MATEMATIKA ETA BERE DIDAKTIKA

Martin ESLAVA DE MIGUEL

# *PROBLEMA ARITMETIKOEN EBAZPENA LEHEN HEZKUNTZAKO LEHENENGO ZIKLOAN*

TFG/*GBL* 2014

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
*Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea*

*Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua* / Grado en Maestro de Educación Primaria

**Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua**

**Grado en Maestro en Educación Primaria**

**Gradu Bukaerako Lana**

**Trabajo Fin de Grado**

# *PROBLEMA ARITMETIKOEN EBAZPENA LEHEN HEZKUNTZAKO LEHENENGO ZIKLOAN*

# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN EL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

**Martin ESLAVA DE MIGUEL**

GIZA ETA GIZARTE ZIENTZIEN FAKULTATEA

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y SOCIALES

**NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA**

**UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA**

**Ikaslea / Estudiante**

Martin ESLAVA DE MIGUEL

**Izenburua / Título**

*PROBLEMEN ARITMETIKOEN EBAZPENA LEHEN HEZKUNTZAKO LEHENENGO ZIKLOAN* / RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN EL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

**Gradu / Grado**

Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua / Grado en Maestro en Educación Primaria

**Ikastegia / Centro**

Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea / Facultad de Ciencias Humanas y Sociales

Nafarroako Unibertsitate Publikoa / Universidad Pública de Navarra

**Zuzendaria / Director-a**

Joseba Sabin LIZEAGA RIKA

**Saila / Departamento**

Matematikaren didaktika / Matemáticas y su didáctica

**Ikasturte akademikoa / Curso académico**

2013 / 2014

**Seihilekoa / Semestre**

Udaberria / Primavera

## Hitzaurrea

2007ko urriaren 29ko 1393/2007 Errege Dekretua, 2010eko 861/2010 Errege Dekretuak aldatuak, Gradu ikasketa ofizialei buruzko bere III. kapituluan hau ezartzen du: “ikasketa horien bukaeran, ikasleek Gradu Amaierako Lan bat egin eta defendatu behar dute […] Gradu Amaierako Lanak 6 eta 30 kreditu artean edukiko ditu, ikasketa planaren amaieran egin behar da, eta tituluarekin lotutako gaitasunak eskuratu eta ebaluatu behar ditu”.

Nafarroako Unibertsitate Publikoaren Lehen Hezkuntzako Irakaslearen Graduak, ANECAk egiaztatutako tituluaren txostenaren arabera, 12 ECTSko edukia dauka. Abenduaren 27ko ECI/3857/2007 Aginduak, Lehen Hezkuntzako irakasle lanetan aritzeko gaitzen duten unibertsitateko titulu ofizialak egiaztatzeko baldintzak ezartzen dituenak arautzen du titulu hau; era subsidiarioan, Unibertsitatearen Gobernu Kontseiluak, 2013ko martxoaren 12ko bileran onetsitako Gradu Amaierako Lanen arautegia aplikatzen da.

ECI/3857/2007 Aginduaren arabera, Lehen Hezkuntzako Irakaslearen ikasketa-plan guztiak hiru modulutan egituratzen dira: lehena, oinarrizko prestakuntzaz arduratzen da, eduki sozio-psiko-pedagokikoak garatzeko; bigarrena, didaktikoa eta dizplinakoa da, eta diziplinen didaktika biltzen du; azkenik, Practicum daukagu, zeinean graduko ikasleek eskola praktiketan lortu behar dituzten gaitasunak deskribatzen baitira. Azken modulu honetan dago Gradu Amaierako Lana, irakaskuntza guztien bidez lortutako gaitasun guztiak islatu behar dituena. Azkenik, ECI/3857/2007 Aginduak ez duenez zehazten gradua lortzeko beharrezkoak diren 240 ECTSak nola banatu behar diren, unibertsitateek ahalmena daukate kreditu kopuru bat zehazteko, aukerako irakasgaiak ezarriz, gehienetan.

Beraz, ECI/3857/2007 Agindua betez, beharrezkoa da ikasleak, Gradu Amaierako Lanean, erakus dezan gaitasunak dituela hiru moduluetan, hots, oinarrizko prestakuntzan, didaktikan eta diziplinan, eta Practicumean, horiek eskatzen baitira Lehen Hezkuntzako Irakasle aritzeko gaitzen duten unibertsitateko titulu ofizial guztietan.

Lan honetan, oinarrizko prestakuntzako modulua/ak, lau urteetan zehar lortutako errekurtso desberdinak plazaratzeko bidea eman digu. Urte horietan ikerlari desberdinek sortu dituzten produkzioak aztertu ondoren, lan honetan horietako batzuk aztertutako ideiak erabiliak izan dira marko teoriko egokia osatzeko orduan. Horretaz gain, oinarrizko prestakuntza honek, baliabide desberdinak eskaini ditu Lehen Hezkuntzako ikerketa bat aurrera eraman ahal izateko beharrezkoak diren jakintzak lortzeko.

Didaktika eta diziplinako modulua/ak, matematika arloan, Lehen Hezkuntzako ikasleek problema matematikoen aurrean agertzen dituzten zailtasunak eta hauei aurre egiteko erabili ditzaketen prozesuak aztertzeko aukera eman didate. Lan hau aurrera eramateko, gaiaren inguruko oinarrizko teoria eskaini dizkidatelarik, bertan problema matematikoak ebazteko modu desberdinak aztertuak izan direlarik.

Halaber, Practicum modulua/ak, Lehen Hezkuntzako ikasleekin kontaktu zuzena izateko esparrua eman digu, honekin batera gure formakuntza asko sendotuz. Gainera, jarraian agertutako ikerketa aurrera eramateko laginak esakini dizkigute.

Azkenik, aukerako modulua/ak Lehen Hezkuntzako beste esparru batzuetan ematen diren didaktika metodo desberdinak aztertzeko. Honekin batera, landutako esparrua hobe ulertzeko bidea sortuz.

Beste alde batetik, ECI/3857/2007 Aginduak ezartzen du, Gradua amaitzerako, ikasleek gaztelaniazko C1 maila eskuratuta behar dutela. Horregatik, hizkuntza gaitasun hau erakusteko, hizkuntza honetan idatziko dira “Antecedentes, objetivos y cuestiones” eta “Conclusiones” atalak, baita hurrengo atalean aipatzen den laburpen derrigorrezkoa ere.

## Laburpena

Lan honetan, hasierako marko teorikoa ezarri ondoren eta honen gidaritzapean, Lehen Hezkuntzako Lehenengo Zikloko curriculumeko alderdi batean sakontzeko saiakera egin da, problema aritmetikoen ebazpenean hain zuzen ere. Ziklo bukaeran problemen ebazpenean ikasleen gaitasun maila ezberdinak eta gaitasun maila apaleko ikasleen zailtasun espezifikoak ezagutu nahi ziren. Baita ere, irakaste-ikaste prozesuetan jarraitutako metodologiaren eta lortutako gaitasun mailaren artean nolabaiteko erlazioa aurkitzea interesgunetzat hartu zen. Jakinmin hauei hurbilpen enpirikoa egin zaie, Iruñeko ikastetxe publiko bateko 2. mailako ikastaldearen eta bere tutorearen laguntza jaso delarik. Lanak gaia agortzea urruti dauka eta, aldiz, ikertzen jarraitzeko hainbat lerro zabaltzen du.

*Hitz gakoak*: buruketen ebazpena; gaitasunak; Lehen Hezkuntza; zailtasunak; Matematika.

## Resumen

En el presente trabajo, tomando como guía la fundamentación teórica inicial, se pretende profundizar en un aspecto concreto del currículum de Educación Primaria: la resolución de problemas aritméticos en Primer Ciclo. Se deseaban conocer las diferencias interindividuales que presenta el alumnado en la competencia en resolución de problemas al final de dicho ciclo y las dificultades específicas que encuentran aquellos alumnos con un nivel competencial bajo. Así mismo, resultaba interesante establecer algún tipo de relación entre la metodología utilizada en el proceso enseñanza-aprendizaje y el nivel competencial alcanzado. Se ha realizado un acercamiento empírico a estas cuestiones contando con la colaboración de un grupo de alumnado de 2º de Educación Primaria de un colegio público de Pamplona y de su tutora. El presente trabajo, lejos de agotar el tema, plantea finalmente una serie de cuestiones que quedan abiertas para posteriores investigaciones.

*Palabras clave*: resolución de problemas; competencias; Educación Primaria; dificultades; Matemáticas.

## Abstract

This work, based on an initial theoretical foundation, delves into a particular aspect of the curriculum of Primary Education: arithmetic problem solving in the first stage. It has been looked into Individual differences that exist among students in the problem solving competence at the end of this stage, and the specific difficulties lower-achieving students have to face. Also, some kind of relationship seems to have been found between the methodology used and the level of competence achieved. An empirical approach has been conducted to address these issues, thanks to the collaboration of a group of students in 2nd year of Primary Education in a state school in Pamplona and their teacher. Finally, some questions are raised to be investigated in future research.


*Keywords*: problem solving; competences; Primary Education; difficulties; mathematics.

## Aurkibidea

**1. Antecedentes, objetivos y cuestiones** **1**

**2. Marko teorikoa** **4**

2.1. Alderdi epistemologikoa: problemak matematikaren baitan 5

2.1.1.Matematikaren izaera holistikoa 5

2.1.2.Problema hitzaren esanahia 7

2.1.3. Problema matematikoak historian zehar 8

2.1.4.Problema matematikoak Nafarroako curriculum ofizialean 10

2.1.5.Soluzioaren araberako problemen sailkapena 11

2.1.6.Tarearen arabereko problemen sailkapena 12

2.1.7. Isabel Echeniqueren sailkapen integratua 13

2.2. Alderdi psikologikoa: ikaslea 18

2.2.1.Jean Piageten ekarpena umeen garapen kognitiboaren ezagutzari 18

2.2.2 6-8 urte haurren ezaugarri kognitiboak Piajeten teoriaren arabera 20

2.2.3.Ikasleen garapena eta problemen ebazpenean topatzen dituzten zailtasunak 22

2.2.4.Oinarrizko ezagutzak eta problemen ebazpena 23

2.2.5.Teknika heuristikoak eta problemen ebazpena 25

2.2.6.Metakognizioa eta problemen ebazpena 26

2.2.7.Osagai emozionala eta problemen ebazpena 26

2.3. Alderdi didaktikoa: problemen ebazpenen metodologia 29

2.3.1. Eredu pedagogikoak eta matematikaren didaktika 29

2.3.2. Problema matematikoen ebazpen metodo bat: MBS 35

2.3.3. Pentsamendu matematikoaren estrategiak problemen ebazpenean 37

2.3.4.Problema matematikoen didaktika Lehenengo Zikoan 38

2.4. Alderdi ekologikoa: egoera didaktikoa 41

2.4.1. Egoera didaktikoa: esanahi tradizionala eta esanahi konstruktibista 41

2.4.2. Egoera didaktikoaren teoriaren hainbat kontzeptu 42

2.4.3. Egoera didaktikoen faseak 44

2.4.4. Intituzionalizazioa 45

2.4.5. Fenomeno didaktikoak 46

**3. Fase esperimentala: metodoa eta teknikak** **48**
3.1.Lagina 48
3.2.Datuen bilketaren teknikak 48
3.2.1.Elkarrizketa irakasleari 48
3.2.2.Galdetegi baten pasazioa ikasleei 48
3.2.3.Kasuen azterketa 50
**4. Emaitzak eta eztabaida** **42**
4.1.Metodologia eta ikasleen ebazpen gaitasun maila 52
4.2.Ikasleen arteko aldea problemak ebazteko gaitasunean 57
4.3.Problemen zailtasun espezifikoak 59
4.3.1. A ikaslea 59
4.3.2. B ikaslea 62
4.3.3. C ikaslea 64
**Conclusiones y cuestiones abiertas**
**Referencias**
**Irudiak eta taulak**
**Eranskinak**
I. erasnkina: Isabel Echeniquek proposatutako problemen sailkapena
II. eranskina: Isabel Echeniqueren problema aritmetikoen sailkapena biltzen duen eskema.
III eranskina: Broussouren Egoera Didaktikoen teoriaren mapa kontzeptuala.
IV. eranskina: Probaren problemak
V. eranskina: problemen ebazpenen zailtasunen inguruko hipotesiak eta hauek frogatzeko jarduerak.
VI. eranskina: Ikasle baten proba (problema guztiak zuzen burutuak)
VII. eranskina: A ikaslearen proba
VIII. eranskina: B ikaslearen proba
IX. eranskina: C ikaslearen proba

## 1. ANTECEDENTES, OBJETIVOS Y CUESTIONES

La Universidad Pública de Navarra establece, dentro del documento denominado *Memoria del Grado de Maestro en Educación Primaria* (2013), una serie de competencias básicas, generales, trasversales y específicas que los futuros profesionales deben adquirir a lo largo de los ocho semestres en los que se estructuran los estudios.

Tal y como ha quedado expuesto en el apartado inicial de este documento, *Hitzaurrea,* la Universidad solicita a todo estudiante la realización de un Trabajo de Final de Grado mediante el que será evaluado de manera global sobre las competencias adquiridas a lo largo de su formación. Por lo tanto, el trabajo que aquí se presenta responde a este requerimiento.

Si bien para la realización de este trabajo se han tomado en cuenta todas las competencias que un maestro debe demostrar tener desarrolladas al final del grado, es pertinente señalar aquí que la competencia que supuso el punto de partida es la identificada como Competencia Básica 3 que indica *"Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética."*

Plantea una competencia cercana a la investigación y con clara proyección en la práctica profesional. “Los maestros y maestras investigadores son aquellos que indagan, averiguan, curiosean, examinan, interrogan, exploran, estudian y descubren en sus clases con sus alumnos cuestiones y problemáticas interesantes para ambos", tal y como aseveran Canal, Pozuelos y Travé (2003, p.51). Es difícil plantearse una vida laboral larga es las aulas si no se cuenta con la motivación de cuestionarse la práctica, plantearse preguntas, recoger datos, interpretarlos y actuar en consecuencia.

El área elegida para realizar el TFG fue el de *Matemáticas y su didáctica*, con dirección del Departamento de Matemáticas de la Universidad. Concretamente se adjudicó el trabajo sobre *diseño de métodos para la resolución de problemas matemáticos.*

Las Matemáticas constituyen uno de los pilares de la educación, ya que se estudia en todos los niveles educativos y en todos los países del mundo. La causa fundamental de esa universal presencia podríamos buscarla en que constituyen un idioma poderoso, conciso y sin ambigüedades, según la formulación del Informe Cockroft (1985). Esta universalidad proporciona a las matemáticas una gran importancia y hace que los alumnos y alumnas de todas las generaciones necesiten desarrollar competencias para entenderlas y “hablarlas”.

La utilización de un idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto. Pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo. En el caso del *idioma matemático*, la Resolución de Problemas es un potente generador de situaciones comunicativas que permiten alumno o alumna ir construyendo su conocimiento matemático.

Para contextualizar el tema del trabajo relacionándolo con motivaciones personales, se realizó una reflexión sobre cuáles habían sido los momentos de contacto con alumnado de Educación Primaria mientras estos abordaban tareas de resolución de problemas. Estas situaciones se habían producido tanto en las prácticas organizadas desde la Universidad como participando como voluntario en un proyecto de aprendizaje colaborativo entres alumnos. Se deseaba partir de experiencias personales para obtener de esta manera un nivel alto de motivación cara a la realización del TFG.

Esta primera reflexión llevó a delimitar el *objeto de estudio*: *resolución de problemas aritméticos verbales por parte de alumnado de 2º de Educación* Primaria. Como se puede comprobar, se utilizaron dos variables para esta delimitación.

- *Nivel de escolarización del alumnado*: segundo de Primaria. Durante el curso 2013-14 se había tenido contacto con niños y niñas de este nivel en resolución colaborativa de problemas. La estrategias metodológicas que se habían observado en el trabajo de aula (resolución manipulativa, uso de la calculadora, representación sagital, trabajo colaborativo...) supuso una motivación para profundizar en este nivel escolar.
- *Tipología de problemas*: problemas aritméticos verbales. Según estas mismas observaciones, son a este tipo de problemas al que más tiempo se dedica en las aulas y los que mayor peso tienen habitualmente en la

evaluación individual del apartado de “resolución de problemas” del área de Matemáticas.

Una vez establecido el objeto de estudio, se plantearon para este trabajo tres objetivos:

- Explicitar el marco teórico que guía la práctica en resolución de problemas en Educación Primaria.
- Conocer el nivel de competencia en resolución de problemas al finalizar el primer ciclo de EP. estableciendo relaciones con la metodología utilizada.
- Analizar las dificultades cognitivas y emocionales con las que se encuentra el alumnado de final de 1º ciclo de EP en la resolución de problemas.

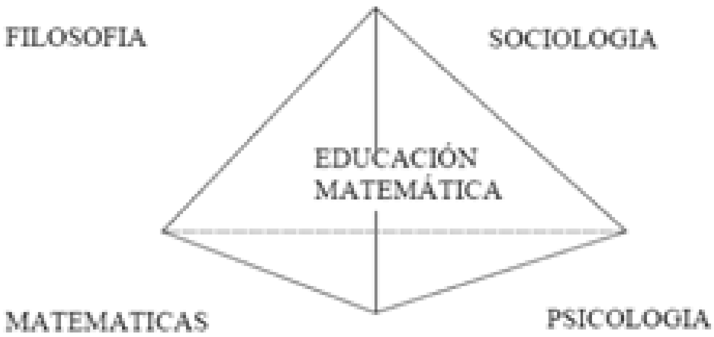
La consecución de los objetivos planteados ha sido guiada por *tres cuestiones* que la observación asistemática de la práctica escolar por parte del autor de este trabajo no había podido responder:

- La metodología utilizada en el aula en el trabajo sobre resolución de problemas, ¿tiene repercusión en el nivel competencial que el alumnado alcanza?
- ¿Hay diferencias significativas al final del primer ciclo de Educación Primaria entre alumnos de un mismo grupo en cuanto al nivel competencial que alcanzan en resolución de problemas?
- ¿Qué tipo dificultades específicas tienen aquellos alumnos que acaban el primer ciclo con un nivel competencial bajo en resolución de problemas?

## 2. MARKO TEORIKOA

Luzatutako galderei erantzunak bilatzeak, lan enpirikoari ekin aurretik, marko teorikoa zehaztea eskatzen zuen. Helburu horrekin egin den material bibliografikoaren orrazketa laburtzen da bigarren kapitulu honetan.

Higginsonen (1980) tetraedro didaktikoa izan da bilaketaren abiapuntua. Tetraedroaren aurpegietan hezkuntza matematikoaren euskarri diren lau disziplinak aurkitzen ditugu. (1. irudia)




**1. irudia.** Higginsonen (1980) tetraedro didaktikoa, Gutiérrez (1991)-tik hartua.

Eredu honen egokitzapen pertsonala eginez, marko teorikoa lau poloren inguruan antolatu da:

- jakintza matematikoa (polo epistemologikoa): problema matematikoak jakintza matematikoan kokatuta. 2.1. puntuan garatuko da.
- ikaslea (polo psikologikoa): problemen ebazpenean inplikatuta dauden alderdi kognitiboak eta emozionalak. 2.2. puntuan garatuko da.
- irakaslea (polo didaktikoa): problemen ebazpenaren metodologia. 2.3. puntuan garatuko da.
- egoera didaktikoa (polo ekologiko): problemen ebazpenaren testu inguru pertsonala eta materiala. 2.4. puntuan garatuko da.

## 2.1. Alderdi epistemologikoa: problemak matematikaren baitan

### *2.1.1. Matematikaren izaera holistikoa*

Matematika zientzia unibertsala da. Munduan lortzen diren eredu teoriko edo asmakizun teknologiko berriak modu unibertsalean komunikatzeko, aipatutako zientzi unibertsal honek ematen duen tresna baten bidez adierazten dira, hizkuntza matematikoaren bidez. Beraz hizkuntza unibertsaltzat uler dezakegu. Gainera, unibertso osoan gertatzen diren fenomeno guztiak adierazteko, hizkuntza hau erabil daiteke. Galileo Galileik (1633) idatzitako *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico e Coperniciano liburuan* jangoikoak unibertsoa sortzeko erabili duen hizkuntza Matematika dela esan zuen.

Gaur egungo gizakia matematikak eskaintzen dituen abantailarik gabe ezingo litzateke ulertu. Bai historian zehar, bai gaur egun ere, matematikek berebiziko garrantzia izan dute gizakien kulturan eta eboluzioan. Argi dago, egungo gizartean, edonor gizarteratzeko beharrezkoa duela matematiken inguruko jakintza minimoa izatea, honekin batera inguruarekin erlazionatzeko aukera jasotzen duelarik.

Egun, kaleetan barna ibiltzerakoan, etxeetan eguneroko lanak egin behar direnean edota aisialdietan inkontzienteki norberaren trebetasun matematikoak jarraian praktikan jartzen dira. Honen adibide asko aipa daitezke, hauen artean: egunero sukaldatzerakoan neurri matematikoak erabiltzen ditugu osagaien kantitateak zein den jakin ahal izateko, edozein objektu erostean kantitate desberdinekin jolasten da, kotxean lekuren batera joaterakoan zenbakiekin adierazten da gelditzen diren kilometroak, “poker” partida batean irabazteko probabilitateak kalkulatu beharra dago…

Adierazitakoaz gain, nabarmena da gure gizartean edozein lanbidetan jardun behar denean, beharrezkoa dela matematikan gaitasuna izatea, hots, ezagutzak eta trebetasunak garatuak izatea. Leku horietan erabakiak hartzeko, ezinbestekoa da mota guztietako mezuak ulertzea, aldatzea eta ekoiztea; erabiltzen dugun informazioan, gero eta maizago azaltzen dira taulak, grafikoak eta formulak, eta horiek zuzen interpretatzeko beharrezkoa da matematika-ezaguerak izatea. Hortaz, hiritarrek prestatuta egon behar dute etengabe sortzen diren aldaketetara modu eraginkorrean egokitzeko.

Matematika, askotan, forma geometrikoen ikerketarekin eta kopuruen erabilpenarekin mugatzen bada ere, eremu desberdin asko ikertzen dituen zientziatzat ulertu beharra dago. Zientzia honek egiturak identifikatzeko, gertaeren arteko harremanak sortzeko, eredu berriak sortzeko, galdera berriei erantzun logiko bat emateko… aukera ematen du.

Askotan, matematikaren influentzia argia ikusten ez badugu ere, jakin beharra dago, gure inguruan nonahi begiratzen dugularik, hauen adibide erabilgarriak ikus ditzakegula. Zientzian, teknologian, komunikazioan, ekonomian eta beste arlo askotan erabiltzen da. Eguneroko bizitzarako arazoak hautemateko, interpretatzeko eta horiei irtenbidea emateko ere baliogarria bilakatu delarik.

Matematika zientziaren hizkuntza izan da azkeneko ehunka urteetan eragin arrakastatsua izanez. Eugene Wigner (1960) fisikoa idazki batean Matematikak duen arrakasta irrazionala azaltzen saiatu zen. Bertan, konplexutasun handikoak diruditen ideiak argi azaltzeko hizkuntza matematikoak daukan izaera adierazi eta defendatu zuen.

Zientzia unibertsala dela esan bada ere, honek ez du esan nahi erabilera berdina eman zaiola urte eta leku desberdinetan zehar. Garai eta leku desberdinetan matematikak norberaren beharrak eta gizartearen beharrak asetzeko erabili izan dira. Duela milaka urte agertu ziren arazoak eta gaur egun agertutakoak ez dira berdinak, beraz emandako erabilera desberdina izan da baita ere. Matematika kontzeptua ulertzen ez bazen ere, zientzia honek jasotzen dituen hainbat aspektu erabiltzen hasi ziren, kantitate desberdinak zenbatzeko adibidez. Urteek aurrera egin ahala, erabilera horrek jarraitu badu ere, gizarteak beste behar batzuk izan ditu eta hauek asetzeko matematikak irtensorbide batzuk zabaldu dizkio, eraikuntza berriak egiteko geometriaren inguruko jakintzen garapena honen adibide edota sortzen diren eredu zientifiko desberdinak azaltzeko eta harremanatzeko erabiliak izan diren jakintza matematikoak.

Mintzagai dagoen zientzia hau, bizirik dagoela esaten dute matematikari askok. Ezaguera ez da bere horretan gelditzen, jasotzen den ondarea izateaz gainera, osatu beharreko zientzia bat da, momenturo berritzen eta osatzen dabil.

Erronka handia da, bestalde, eduki eta ezaguera berriak sortutako testuinguruan behar bezala kokatzea.

Hori guztiaz gainera, pentsamendu arrazionala sortzeko funtsezkoa da matematika; izan ere, arrazoi bideak garatzeko aukera egokienak dituen ezagutza-arloa da, eta, arrazoitzea da, hain zuzen ere, edozein matematikako jardueraren oinarri. Pentsamendu arrazionala garatzea, nahitaezkoa da matematikan agertzen diren edukiak eta estrategiak ikasteko prozesuan. Gainera, funtsezkoa suertatzen da estrategia orokorrak garatzeko eta eskuratzeko orduan. Aipatutako ikasteko estrategia hauek berebiziko garrantzia dute bizitzan zehar, ikasten jarraitzeko ahalmena edukitzea bermatzen baitute. Honekin batera jarduera profesional berri baten aurrean edo bizitzan zehar ezaguera berri bat barneratu behar denean prozesua errazten baitute.

### *2.1.2 Problema hitzaren esanahia*

Lan honen gaia problema matematikoak izanik bere izaeran sakontzea beharrezkoa da.

Problema hitza Europako hizkuntza gehienetan erabiltzen da, latinetik hartutako mailegua baita. Latinak grekotik hartu zuen. Antzineko grekoz *πρόβλημα* hitzak existitzen zuen*, πρό* aurrizkiaz eta *βλημα* izenez (botata, jaurtikia) osatua. Hots, etimologikoki problema aurrera jaurtikia izan dena, aurrean dagoen oztopo bezala uler daiteke.

Historian zehar, matematikari ospetsu desberdinek, definizio desberdinak eskaini dizkigute problema matematikoari buruz, adibidez, Branfordek eta Steinek (1897), problemak egungo egoeratik, helmugako egoerara ailegatzeko gainditu beharreko oztopo bezala ikusten zituzten. .

Matematika mundutik irtenez gero, arazo edo problema bat, soluzio bat behar duen galdera edo egoera bezala kontsideratzen da. Arazo matematiko baten inguruan mintzatzen denean berriz, entitate matematiko bat bilatzen da zeina beste entitate multzo baten barruan dagoen eta gainera problemak aurkezten dituen kondizioak betetzen dituen.

Beste era batean adieraziz gero, problema matematiko guztiak hurrengo esaldian laburtu daitezke: (S,C(s),r) non S objektu multzo bat den bere barruan r duena, C(s) kondizio bat (edo batzuk) diren, zeinak $s \in S$ izan daiteke. Problemaren ebazpena izango litzateke, $r \in S$ zein den determinatzen duen prozesua zeinak C (r) betetzen duen.

Esanahia zehazten bukatzeko, garrantzitsua da batzuetan nahasten diren bi kontzepturen arteko desberdintasunei erreparatzea: *problema matematikoak eta ariketa matematikoak*. Jose Miguel de la Rosa Sánchezen (2007) arabera ariketa hitza emaitza lortzeko jarraitu behar den prozedura mugatua eta ezaguna da. Behin baino gehiagotan errepikatua izan den prozesu bat aurrera eramaten da. Ariketak kontzeptuak edo prozedurak ulertzeko lagungarri izan daitezke, etorkizunean problemetan aplikatu daitezkeelarik.

Problemak, berriz, jarduera konplikatuagoak dira. Ikasleak momentuan dituen jakintzak modu automatikoan erabiliaz ebatzi ezingo duen jarduera bezala ulertua da. Problemari soluzioa aurkitzeko hausnartu, egoera bereganatu, jakintza ezberdinak lotu, adierazpen bideak bilatu (grafikoa, manipulatiboa, ahozkoa…) beharrezkoa izango da.

Euskaraz beste arazo terminologiko batekin egiten dugu topo: Problema eta buruketa hitzak, sinonimoak dira? ezberdindu behar dira? Kontsultatutako hiztegiek sinonimotzat hartzen dituzte. Adibide moduan, hona hemen Harluxet hiztegi entziklopedikoak buruketa hitzerako eskaintzen digun definizioa.

*Buruketa: iz. 1. Burutzeko ekintza eta horren ondorioa. 2. Gogoeta, hausnarketa. 3. MAT. Ik. problema*

Umeei zuzendutako materialetan *buruketa* hitza da gehien ikusten dena baina problema erabiltzen dutenak ere badira. Euskarazko literatura zientifikoan eta dokumentu ofizialetan, aldiz, problema hitza da erabiliena.


**2. irudia. I**kasleei zuzendutako problemak - buruketa liburuxkak

*2.1.3. Problema matematikoak historian zehar*

Badakigunez, problema matematikoen ebazpenak, berebiziko garrantzia izan du eguneroko bizitzan historian zehar. Hauei esker, objektuen arteko trukeak modu zuzenean egin dira, txanponen trukea…. Egunero agertzen ziren problema matematiko batzuk, Matematiken sorkuntza bultzatu zuten, zientzia honen beharra zegoela argi utziz. Honen adibide, greziarrek nekazaritza lurraldeak neurtu behar zituztenean ematen zen.

Problema batzuen ebazpenaren bitartez, Matematikak zabaltzeko gune berriak aurkitu ditu. Honen adibide bat *Fermaten azken teorema* izenarekin ezagutzen den teoremarena da. 350 urte eman zituen frogatu gabe, konjetura hutsa bezala, Andrew Wiles 1995. urtean frogatzea lortu arte. Hona hemen teoremak zioena:

> Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias o, en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias similares. (...) En notación matemática esta conjetura es: si $n \geq 3$ es un entero, entonces la ecuación $x^n \pm y^n = z^n$, n no tiene soluciones enteras con $x, y, z \neq 0$. (Zaldibar, 2001, p. 26).

Aipatutakoak, adibide bakan batzuk baino ez dira problema matematikoek izan duten garrantzia guztiarekin konparatuta.

*2.1.4. Problema matematikoak Nafarroako curriculum ofizialean*

Problema matematikoen ebazpena, gaur egun Nafarroan indarrean dagoen curriculum ofizialean, Nafarroako Foru Komunitateko Lehen Hezkuntzako irakaskuntzarako curriculuma ezartzen duen Foru Dekretuaren (2007) arabera, behin baino gehiagotan erreferentzia egiten zaion kontzeptua da.

Curriculumean barna leku desberdinetan egiten zaie aipua problema matematikoei: curriculumaren helburu nagusietan, matematika arloaren sarreran, honen edukietan eta ebaluazio irizpideetan.

Lehendabiziko aldiz, Lehen Hezkuntzako helburuen atalean irakurri daiteke honen inguruan. Zehazki, “g” atalean hurrengoa irakurri daiteke “*kalkulu eragiketa oinarrizkoak, geometria-ezagupenak eta estimazioak egitera behartzen duten problemak ebazten hastea, eta horiek guztiak eguneroko bizitzako egoeretan aplikatzeko gauza izatea.”*

Dokumentu ofizialean aurrera egin ahala, matematika osatzen duen atalaren aurkezpenera iristerakoan, berriro ere irakurri daiteke problemen ebazpenen inguruan. Bertan defendatzen denez, “*eguneroko bizitzan agertzen diren problema matematikoen ebazpenak garrantzia izan beharra dauka gaur egungo ikasgeletan”*. Gainera, atal berdinean, honek daukan garrantzia goresten da hurrengo esaldiaren bidez “*Problemak ebazteko prozesuak jarduera matematikoaren ardatz nagusietako bat dira, eta matematika ikasteko iturri eta euskarri nagusia izan behar dute etapa osoan, hezkuntza matematikoaren giltzarri baitira.”*

Arloko oinarrizko gaitasunetan ere, problema matematikoen garrantzia ikus daiteke, norberaren autonomia eta ekimenari egiten dizkio ekarpenetan. “*Problemak ebaztearen inguruko edukiak dira arlo honek norberaren autonomiari eta ekimenari egiten dion ekarpen nagusia”*

Aurrera jarraitzerakoan, matematikak garatzeak izanen dituen helburuen artean aurkitu ditzakegu problema matematikoak berriro ere, seigarren helburuan. “*Buruzko kalkuluaren eta neurriaren tresna eta estrategia pertsonalak prestatu* *eta erabiltzea, bai eta espazioan orientatzeko prozedurak ere, problemak ebazteko testuinguruetan.”*

Problema matematikoek edukietan barna agertzeko moduari dagokionez, aurretik emandako garrantzia erreferentziaz izanda, eduki multzo konkretu bat osatzen ez dutela deigarria izan daiteke. Hala ere, eduki multzo guztietan, erreferentzi garrantzitsuak egiten zaizkio, multzoak azaldu aurretik hau irakurri daitekelarik, *“problemen ebazpena ardatza da eta zeharka ageri da multzo guztietan; horregatik, bereziki nabarmenduta sartu da multzo guztietan.”* Honekin, argi gelditzen zaigu eduki baten barruan baino gehiagotan eta ziklo desberdinetan honi erreferentzia egiten zaiola.

Bukatzeko, ebaluazio irizpideetan, puntu batean baino gehiagotan errepikaturik ageri dira problema matematikoei egiten zaizkion aipuak. Bai ebaluazio irizpide talde desberdinetan, bai ziklo desberdinetan ere. Hauen barruan bakoitzak bere berezitasunak dituelarik.

GBL honen ildoan, 1. zikloko ebaluazio irizpideak sakonago aztertuko dira. Hiru irizpide hauek egiten diote aipamena problemen ebazpenari:

> ***"1. irizpidea:*** *999rainoko zenbakiak zenbatu, irakurri eta idaztea eskatzen duten problema errazak formulatzea."*
>
> ***"7. irizpidea****: Barra-grafiketan aurkeztutako datuen oinarrizko interpretazioak egitea. Grafikoak irakurtzea eskatzen duten problema errazak formulatu eta ebaztea."*
>
> ***"8. irizpidea:*** *Eguneroko bizitzako objektu, gertaera eta egoerekin zerikusia duten problema errazak ebaztea, batuketa eta kenketako eragiketak hautatuz eta kasuan kasuko oinarrizko algoritmoak edo ebazpeneko beste prozedura batzuk erabiliz. Problema bat ebazteko jarraitutako prozesua ahoz azaltzea."*

Laburtuz, eremu numerikoa mugatua dago (999 arteko zenbakiak) baita erabili beharreko algoritmoak ere (batuketa eta kenketa). Problemetako egoerak eguneroko bizitzakoak behar dira. Hizkuntzaren beharra agerian gelditzen da problemen ebazpenean, lehenengo irizpidean “*problemak formulatzea*” eskatzen baita eta 8. irizpidean “*jarraitutako bidea ahoz azaltzea”.*

### *2.1.5. Soluzioaren araberako problemen sailkapena*

Problemak sailkatzeko orduan, ikerle desberdinek, irizpide desberdinak erabili izan dituzte hauek bereizteko. Lan honetan, hasteko, bi autore ezberdinen taxonomiei erreparatuko diegu, zehazki Roger M. Garrett eta George Polyaren taxonomiei.

Problemen taxonomiei bukaera emateko, Isabel Echeniqueren sailkapenari eskainiko zaio tarte zabala. Honek Rileyk, Greenok eta Hellerek (1983) sortutako taxonomian oinarrituz eta beste egile batzuen ekarpenak kontuan hartuta, Lehen Hezkuntzako problemen sailkapenaren sintesia oso interesgarria eskaintzen digu.

Roger M. Garrettek (1988), *soluzioaren arabera* egin zuen bere sailkapena. Horrela soluzio itxia duten problemak, soluzio irekia dutenak eta hirugarren multzo batean soilik ulergarriak izan daitezkeen problemak sartu zituen.

- Soluzio itxia daukaten problemak, soluzio zehatz bat edo gehiago (guztiak zuzenak) izan dezaketen problemak bezala deskribatu zituen.
- Soluzio irekiak, soluzio definitiborik ez daukaten problemak dira, erantzun ugari egon daitezke, baldintza ezberdinetan baliogarriak direnak.
- Azkeneko talde batean, ulertzen diren problemak sartu zituen baina ohiko paradigmetatik atera gabe ebatzi ezin direnak, hau da, paradigma berriak sortzea eskatzen dute. "Benetako” problemak deitzen zien.

### *2.1.6. Zereginaren araberako problemen sailkapena*

Buruketak sailkatzeko hirugarren aukera bat George Polya (1945, gaztelerara itzulita 1965) proposatutakoa da. Honek, probleman egin beharreko zereginaren arabera proposatu zuen sailkapena: ebazteko diren problemak eta frogatzeko diren problemak.

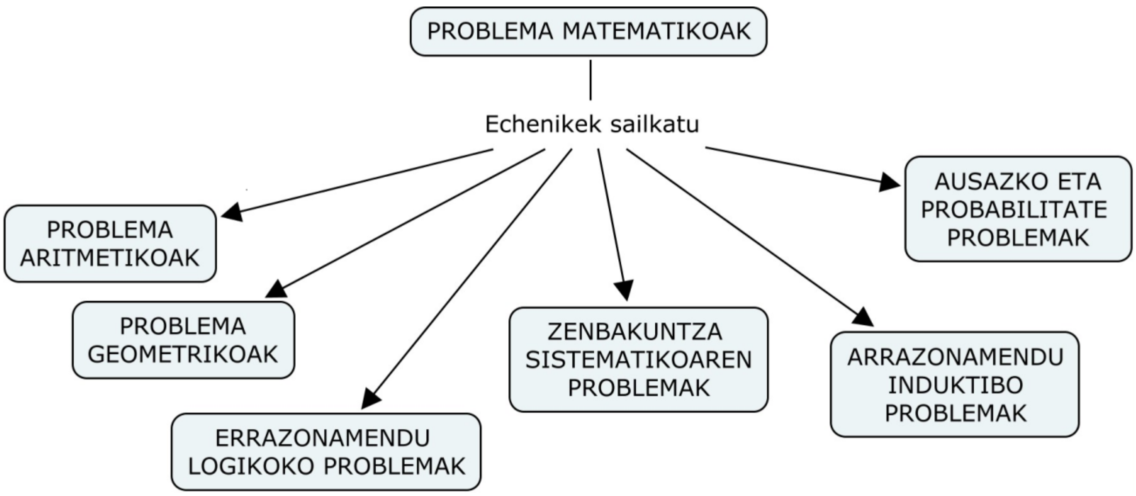
- *Ebazteko problemetan*, agertzen den inkognita edo galderaren erantzuna zein den aurkitu beharra dago. Problema mota honetan ondorengo informazioak agertuko dira: datu, inkognita eta bete beharreko kondizioak. Oinarrizko Matematikan honelakoak agertzen dira.

- *Frogatzeko problemetan* berriz, baieztapen bat agertuko da eta hau egia den ala ez modu definitibo batean frogatzea bilatuko da. Hauetan agertzen diren datu nagusiak, hipotesiak eta demostratu beharreko konklusioak dira. Goi mailako Matematikaren problemak dira.

### *2.1.7. Isabel Echeniqueren sailkapen integratua*

Bukatzeko, lehen esan bezala, Isabel Echenikek *"Matemáticas. Resolución de problemas. Educación Primaria"* (2006) liburuan proposatzen duen sailkapena azalduko da. Saikapen hau sortzeko matematikan Lehen Hezkuntzan landu ohi diren problemak hartu zituen kontuan espresuki. Rileyk, Greenok eta Helleren taxonomian oinarritu zen. Honetaz gain, beste autore batzuek egindako ekarpenak honen barruan egokitzea lortu du, honekin batera 6 - 12 urteko etapan erabilgarria suertatzen den sailkapen osatua lortu duelarik.

Isabel Echeniquek sei multzo handietan sailkatzen ditu Lehen Hezkuntzan landu beharreko problema matematikoak: problema aritmetikoak, problema geometrikoak, arrazonamendu logikoko problemak, zenbaketa sistematiko problemak, arrazonamendu induktiboarekiko problemak eta zoria eta probabilitate problemak.




**3. Irudia.** Isabel Echeniquek proposatutako problemen sailkapena (I erasnkina).

Hauetako talde batzuetan azpitaldeak ere osatu zituen, jarraian azaltzen den bezala.

1. Problema aritmetikoak: problema mota horietan agertzen diren datuak kantitate moduan aurkezturik daude eta hauen artean ematen den erlazioa kuantitatiboa da. Bertan egindako galderak aipatutako kantitate desberdinen ingurukoa edo hauen artean ematen diren erlazioen ingurukoak izaten dira. Problema hauen erantzuna aurkitzeko operazio aritmetikoen beharra dago (algoritmoak erabiliz, buru kalkuluaren bitartez, manipulatuz…).

Problema hauek, egitura semantikoaren arabera, behar duten eragiketen arabera eta zenbakien izaeraren arabera hiru multzotan sailkatzen dira, lehen mailakoak, bigarren mailakoak eta hirugarren mailakoak.

- *Lehen mailako problema aritmetikoak:* operazio bakarrarekin soluzio zuzena aurkitu daitezkeen problemak dira. Hauen barruan beste bi azpi multzo aurki ditzakegu, egoera aditibo-sustraziozkoak eta biderketa-zatiketa buruketak.

  — Batuketa-kenketa buruketak, emaitza lortzeko batuketa bat edo kenketa bat egin behar diren buruketek osatzen dute talde hau. Hauen artean eskatzen den informazioaren arabera, aldaketa problemak, elkarketa problemak, konparazio problemak eta berdinketa problemak daude.

    - Aldaketa problemak: hasierako kantitate batek (Ci) transformazio bat jasaten du (Cf) bukaerako kopurua lortu arte. Transformazioa aditiboa zein sustraktiboa izan daiteke. Hiru datu desberdin ditugu buruketa mota honetan: hasierako egoera (Ci), transformazioa eta bukaerako egoera (Cf). Hiru horietatik buruketa egin ahal izateko bi datu beharko ditugu eta hirugarrena aurkitu beharrekoa izanen da.

    - Elkarketa problemak: Bertan bi elementuren arteko erlazioa agertuko zaigu (P1 eta P2) zeinak biak batuz (T) osatuko dute. Problema hauetan bi datu izango dira eta hirugarren bat bilatu beharko da. Galderak hasierako datu baten ingurukoa (P1 edo P2) edo guztiarena (T) izanen dira.

    - Konparazio problemak. Problema hauetan konparaketen bidez (bestea baino gehiago edo gutxiago…) bi daturen arteko erlazioa ematen da. Jasotako informazioak erreferente daukagun kantitatearen ingurukoa (Cr), konparatu egin dena (Cc) edo diferentziarekin (D) erlazionaturik egongo dira. Beraz, buruketa hauen problemetan, aipatutako datuetatik bi jasoko dira eta hirugarrena bilatu beharko da.

- Berdinketa problemak. Agertzen den kantitate bat erreferente (Cr) izanen da eta honen inguruan aldaketa bat egongo da (D) beste kantitate baten berdina izatera heltzeko, konparatutako kantitatea (Cc).

– Biderketa-zatiketa buruketak: biderketa edo zatiketa baten bitartez aurkitzen da soluzioa problema hauetan. Enuntziatuak planteaturiko egoeraren arabera mota desberdinetako problemak aurki daitezke.

- Banaketa ekitatibo problemak: Kantitate bat talde jakin baten barruan modu ekitatibo batean banatu behar denean agertzen diren problemak dira. Enuntziatuan hiru informaziori egingo zaie erreferentzia, banatu beharreko kantitateari, zenbat behar den eta bakoitzak jasoko duena. Hiru informazio horietatik bi probleman bertan agertuko dira eta hirugarren inkognita izanen da.
- “N” faktorea. Bi kantitateren arteko konparaketak ematen da (Cr) eta (Cc), honek arrazoi bat edo faktore bat (N) mantenduko du. *Nik A kotxe dauzkat. Anaiak B (faktorea) aldiz gehiago. Anaiak C kotxe dauzka.*
- Arrazoi buruketak. Hiru magnitude desberdinen inguruko datuak agertzen zaizkigu problema mota honetan. Hauetako batek, tasa deitutakoa (Ci) agertzen diren beste biak erlazionatzen ditu. Kotxe batek A kilometro egin ditu B ordutan. Kotxearen abiadura C km ordukoa da.
- Biderkaketa kartesiarrak. Problema hauetan, objektu mota bat (C1) beste objektu mota batekin (C2) konbinatzeko aukera guztiak (T) frogatzean datza. Izozki denda batean A zaporezko izozkiak egiten dituzte. B tamaiera ezberdinetan eska dezakezu izozkia. C izozki ezberdin eska daitezke zaporea eta tamaiera konbinatuta.

- *Bigarren mailako problema aritmetikoak.* Problema mota hauek ebazteko, operazio bat baino gehiagoren beharra dago. Lehen mailakoak baino zailagoak dira datuen arteko erlazio konplexuagoa eskatzen baitute. Informazioa agertzeko moduaren arabera, datuen agerpenaren arabera eta erabili behar diren algoritmoen arabera sailkatu daitezke.

— Galderak agertzeko eraren arabera:

  - Galdera bat baino gehiago, bata bestearen atzetik, ager daitezke. Horrela problema ebatzi behar duenari bide bat eskaintzen zaio galdera bakoitza ordenan erantzuten azkeneko emaitza lortu arte, benetan garrantzia daukana izanik.
  - Galdera bakarra ager daiteke. Kasu honetan egileak estrategia propio bat osatu behako du problemaren soluzioa aurkitzera iristeko, beraz aurrekoa baino zailagoak bilakatu ohi dira.

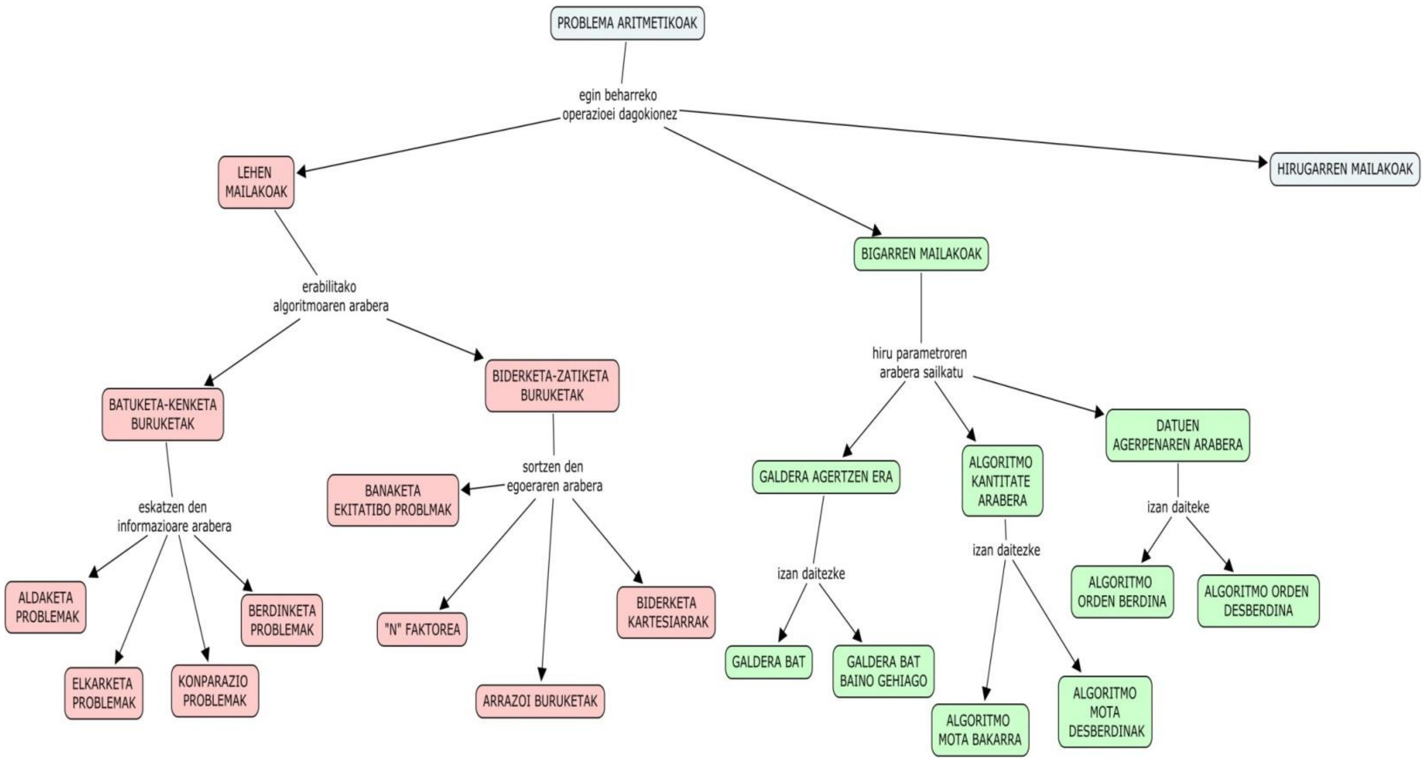
— Emaitza lortzeko behar diren algoritmoen arabera:

  - Emaitza lortzeko ematen diren erdiko pauso guztietan algoritmo berbera erabili behar da.
  - Emaitza lortzeko tartean ematen diren pausoetan, algoritmo desberdinak erabili behar da.

— Datuak agertzeko moduari dagokionez:

  - Datuak erabili behar diren orden berean agertzen dira probleman
  - Datuak agertzeko ordena eta problema ebazterakoan erabilpen ordena ezberdinak dira.

- *Hirugarren mailako problema aritmetikoak.* Problema mota hauek daukaten berezitasuna, enuntziatuan agertzen diren datuak zenbaki dezimaletan, frakzioetan edo portzentajeen bitartez emandakoak direla da. Planteatzen diren egoerak lehen edo bigarren mailako problema aritmetikoetan agertzen direnen antzekoak izan daitezke baina aipatutako zailtasun hori kontutan hartzekoa da.




**4. Irudia.** Isabel Echeniqueren problema aritmetikoen sailkapena biltzen duen eskema. (II eranskina)

2. *Problema geometrikoak:* hauen bitartez, geometria inguruko eduki eta kontzeptu desberdinak lantzen dira (itxura desberdinak, elementuak, bi dimentsiotako irudiak, hiru dimentsiotako gorputzak, orientazioa…). Aritmetika, bigarren plano batera pasatzen da, geometriarekin erlazionaturiko aspektuek garrantzia hartuz.

3. *Arrazonamendu logiko problemak*: egoera desberdinetan logika garatzeko aukera eskaintzen diguten problemak dira. Azalpen zehatzak ulertzeko eta emateko gaitasuna lantzea bilatzen dute.

- *Zenbakizkoak*: kondizio batzuk errespetatuz zenbaki batzuk leku konkretu batzuetan jarri behar diren buruketak dira.
- *Bi eskutako balantzak:* ekibalentzia desberdinetan jarduteko aukera ematen diguten problemak dira.
- *Proposizioen inguruko analisiak:* argumentu desberdinak modu egokian azaltzea bultzatzen duten aktibitateak dira. Hauetan, hizkuntza modu egokian eta zehatzean erabiltzea eskatuko zaigu.

4. *Zenbaketa sistematikoaren problemak*. Soluzio desberdinak dituzten problemak dira, guztiak aurkitzea garrantzitsua delarik. Soluzio hauek zenbakien itxura edo itxura geometrikoa izan dezakete. Hauen soluzio guztiak modu egokian aurkitu ahal izateko, garrantzitsua bilakatzen da modu sistematiko batean lan egiteko gaitasuna.

5. Arrazonamendu induktibo problemak: emandako segida batean agertzen diren kondizioak ikusirik, honen erregulartasuna aurkitu behar da, ondoren hori osatu ahal izateko. Problema hauetan zenbaki segidak edo geometria segidak aurkitzea izan ohi da ohikoena Lehen Hezkuntzan.

6. Ausazko eta probabilitatezko problemak: jolasetan eta manipulazioan oinarritzen diren egoerak dira non ikasleek gertaeren posibilitateaz eta probabilitateetara egiten dituzten hausnarketak. Esperientzia hauen antzekoetan trebatuz gero, egoera batzuen aurrean oinarri zientifikoa daukaten aurresanak egiteko kapazitatea garatuko da.

Jakin beharra dago, Isabel Echenikek aipatutako liburuan, Lehen Hezkuntzako ziklo bakoitzean landu beharreko problema motak zehazten dituela.

## 2.2. Alderdi psikologikoa: ikaslea

### *2.2.1 Jean Piageten ekarpena umeen garapen kognitiboaren ezagutzari*

Jean Piaget Suitzan jaiotako filosofo, natura zientzialari eta psikologoa izan zen. Konstruktibismoaren oinarriak finkatu zituen, 30. hamarkada geroztik ikaste prozesuak ulertzeko eta eskoletan erabilitako metodologietan aldaketa sakonak bultzatu dituen korronte pedagogikoa.

Lan honetan islatzen diren ideiak Carriedo, N. et at-k (2010), bildu zituzten *El desarrollo psicológico a lo largo de la vida* liburuan.

Egindako ikerketen artean, gizakiaren adimenaren eboluzioa deskribatu eta analizatu zuen. Inteligentzia aldatuz joaten diren egitura edo eskemak bezala ulertzen zituen. Eskema horien aldaketa inguruari egokitu beharrak bultzatzen du, gizakiok genetikoki programatuta ditugun bi ahalmenei esker: asimilazioa eta akomodazioa (egokitzea).

*Asimilazio* kontzeptuaren bitartez, pertsona batek, kontzeptu edo objektu bat aurretik daukan eskema mental batera gehitzeari egiten dio erreferentzia. Adibidez, ume bat baso batera joaten bada eta bertan urtxintxa bat ikusterakoan esaten du “begira katu hori”. Bertan asimilazio prozesua ematen da, urtxintxa aurretik daukan egitura mental bati gehituko zaio. Lan honen esparruko beste adibide bat ikus daiteke ikasle bat honelako problema baten aurrean jartzerakoan: *Jonek goxoki batzuk zeuzkan eta 12 gehiago eman dizkiote. Orain 30 dauzka. Zenbat zeuzkan hasieran?* Ikasleak, hasieran batuketa bat planteatzera jo dezake bere eskeman “emateari” lotzen zaion eragiketa batuketa delako.

*Egokitze prozesuak* berriz, gizaki batek sortuta daukan egitura kognitibo baten aldaketari egiten dio erreferentzia, honen bidez gizakiok objektu berriekin trebatzea lor dezakegu. Hau da, egokitze prozesuak, “asimilatua” izan den errealitate hori errealitatera ajustatzera arte ematen den prozesua da. Lehenengo adibideari bueltatuta, egokitze prozesua emanen da, ikusitako urtxintxa, kontzeptu horrek duen esanahira ajustatzen denean. Bigarren adibidean, probleman lortu duen emaitza interpretatzerakoan emango da. Manipulazioaren bitartez froga dezake aplikatutako algoritmoa ez dela zuzena eta aurreko eskema egokitzeko beharra dagoela (krisia, desoreka).

Azaldutako bi kontzeptu hauek konstanteki lanean dihardute batak bestearekin, inguruan sortzen diren aldaketei aurre eginez. Errealitatearekiko ematen diren egokitzapen hauek *homeostasi prozesu* bezala ezagutzen dira.

Asimilazio eta egokitze prozesuak umea eta inguruneren (fisikoa eta soziala) arteko interakzioek bultzatzen dituzte, horrela eskema batetik garatuago den beste batera aldaketa ahalbideratuz. Kontzeptu matematikoetan aplikatuta, objektuen manipulazioaren garrantzia azpimarratu behar da. Ondorio metodologiko zuzenak garbi daude. Umeak kantitate diskretuekin, jarraituekin, masarekin… esperimentatu behar du bere ezaguera matematikoa eraikitzeko. Manipulazioa da abiapuntua. Manipulazio hori inguru sozial batean (beste umeak, gurasoak, irakasleak) ematen denean aurkikuntzak komunikatzeko beharra izango du eta hortik krisialdiak, eskema zaharren baliogabetzea eta berrien baliozkotzea aurrera jotzea etorriko da.

Piajetek, ikerketen bidez, gizakion garapen kognitiboa etapa batzuetatik igarotzen den prozesu sekuentziala dela ondorioztatu zuen, eta faktore sozialen eta inguru fisikoaren arabera garapen honen erritmoa alda daitekeela. Garapena *etapa edo estadio* ezberdinetan banatu zuen. Estadio bakoitzean propioak diren eskemak azaltzen direlarik, beste etapetan ematen ez direnak. Eskemak gero eta garatuagoak dira, hots, inguruaren interpretatziora hobe egokitzen dira. Beraz, estadio batetik bestera salto kualitatiboak ematen dira. Zehazki hauek dira berak proposatutako etapak: etapa sensoriomotorea, operazio aurretiko etapa, operazio konkretuen etapa eta operazio formalen etapa.

### *2.2.2. 6-8 urteko haurren ezaugarri kognitiboak Piajeten teoriaren arabera*

Esan bezala, lan honen 3. eta 4. kapituluetan LHko lehenengo zikloko ikasleekin egindako praktika azalduko da. Beraz, adin honetako umeen garapen kognitiboaren ezaugarriei erreparatzea inportantea da.

Piagetek deskribaturiko fase edo estadioak erreferentziaz izanda, adin honetako ikasleak bi etapa edo estadioren artean daudela esan beharra dago, operazio aurretiko etapa (oso aurreratua) eta operazio konkretuen etapa (lehenengo faseetan), beraz jakina da garapen handiko garaia dela, urte hauek berebiziko garrantzia dutela eta gela berean fase ezberdinetan dauden ikasleak topa ditzakegula.

- *Operazioen aurretiko etapa*
    - Pentsamendu sinbolikoa eta hizkuntzaren garapen nagusiaren etapa da. Umea jokabideak imitatuz, joko sinbolikoetan arituz eraikitzen ditu eskema berriak.
    - *Egozentrismoak* markatzen du etapa hau.
    - *Irrebersibilitatea* da beste ezaugarri bat. Transformazio batean ezin dute hasierara bueltatzeko operazioa burutu.
    - Magnitude ezberdinen kontserbazioaren (kantitatea, masa, bolumena) inguruan ere aurkikuntza interesgarriak egin zituen. Aldaketa espazial baten bitartez kantitatea aldatu dela uste dute.

Beste modu batez esanda, ez dira kantitatearen konserbaziora heldu.

- *Operazio konkretuen etapa*
    - Pentsamendua objektuekiko erlazio zuzenetik aldentzen hasten da, *gaitasun sinbolikoa* garatzen den heinean.
    - *Operazio konkretuak* egiteko gai izango da umea, sortzen diren arazo konkretuei eta errealei aplikatzen hasiko delarik.
    - Lorpen handiena, etapa honetan sartu dela jakinaraziko diguna, *kontserbazioa* (kantitate diskretuak eta jarraiak, masa, bolumena) izango da. GBL honi dagokion aldean, kantitate diskreturen kontserbazioa da garrantzitsuena. Kantitate batek bere horretan jarraituko du aldaketa espazialak egiten badira ere. Tarteko etapa batetik pasako dira, hau da, aldaketa bera egitea eta zenbaketa egitea beharko du. Beranduago aldaketa fisikoa egin gabe operazioa buruan egingo du eta emaitza aurreratzeko gai izango da.
    - *Errebersibilitatea* ere lortzen du (5 gehitzen baditut eta ondoren kentzen baditut hasierako kantitatea izango dut).

Esan bezala lan honetan egingo den azterketan, deskribaturiko bi etapa hauen artean egongo lirateke ikertutako ikasleak, haien artean egon daitezkeen desberdintasunak handiak izan daitezkeelarik. Hala ere, hauen gaitasunen eta izaeraren inguruko deskribapen bat egiteko, hurrengo nolakotasunak aipatuak izan behar dira problemekin lotura zuzenak dituztelako. Oso markatuak dira ziklo hasieran eta gainditzeko bidean daude ziklo bukaeran.

- Buru ariketa mugatuak dituzte, egiten dituzten operazioak intuitiboak izan ohi dira. Eskema berriak inguruko objektu eta pertsonen interakzioan sortzen dira. Matematika problemetan manipulazioaren garrantzia azpimarratzen du ezaugarri honek.
- Eraldaketen errebertsibilitatea ez dute lortu. Problemekin lotuta, aldaketa problema sinpleenak egin dezakete (Cf eskatzen dutenak) baina

hasierako egoera (Ci) ezagutzea eskatzen dutenak ez. Ezin dute atzerantz egin emandako aldaketan.

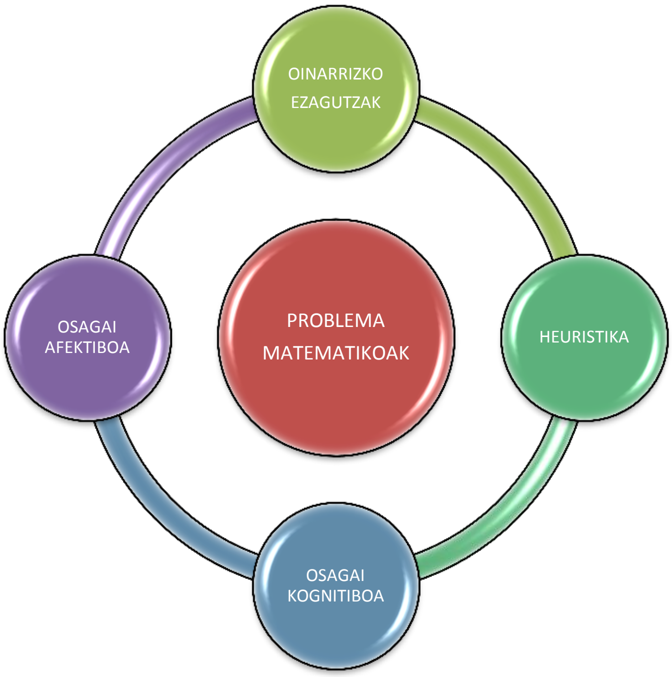
- Kantitate diskretuen kontserbazioa beharrezkoa da problemei aurre egiteko. Problemetan kantitateek eraldaketak nozitzen dituzte, batzuk kantitatearen aldaketa dakartzate eta beste batzuk ez. Lehenengo zikloaren hasieran dauden umeak 10 elementu zenbatzeko gai dira baina elementu horiek aldentzen badira gehiago daudela pentsatzen dute oraindik gehienek.
- Besteen ikuspuntua aintzat hartzeko arazoak izan ditzakete, nahiko egozentrikoak direlarik. Problemen ebazpenean badu ondorioa. Problema matematikoen protagonistak direnean problemaren zailtasun maila txikiagoa da.
- Errealitatearen aspektu batean zentratzeko joera daukate, errealitatearen aspektu ezberdinak ezberdindu gabe. Honek problemetan informazio matematikoa identifikatzea eta berari, ez besteei, erreparatzea zailtzen du.
- Beren buruari kritikak jaurtitzeko zailtasunak dituzte, bere buruarekiko subjektiboa dira.
- Arreta mantentzeko zailtasunak izaten dituzte, bere interesak oso lokalizatuak dituzte.

### *2.2.3. Ikasleen garapena eta problemen ebazpenean topatzen dituzten zailtasunak*

Ikaslearen garapen kognitiboak, emozionalak eta sozialak eta problemen ebazpenak elkarren arteko lotura zuzena daukate. Problemen ebazpen zuzenak, kontzeptu, jarrera eta prozedura ezberdinak garatuak izatea eskatzen du.

Jakina denez, problema bati ekiten zaionetik soluzio zuzena aurkitzen zaion arte, faktore desberdinek eragiten dute. Faktore hauetan errepikakorrak izan ohi diren zailtasunak sortzen zaizkie ikasleei.

Alan Schoenfeldek (1985), problema matematiko baten aurrean eragina izaten duten lau faktore edo dimentsio kontsideratu zituen: oinarrizko ezagutza, heuristika, metakognizioa (bakoitzak bere lanean daukan kontrola) eta osagai afektiboak eta problemak ikusteko ikuspuntua. Azter ditzagun banan banan.




**5. Irudia.** Schoenfeldek, problema matematiko baten aurrean eragina daukaten lau dimentsioak.

2.2.4 *Oinarrizko ezagutzak eta problemen ebazpena*

Dimentsio honen barruan hiru aspekturen influentzia nabarmentzen zuen Schoenfeldek (1985):

- norberak dituen ezagutzak (formalak eta informalak)
- ezagutza horietara iristeko ibili beharreko bidea
- ezagutzak problema matematikoaren aurrean erabiltzeko modua.

Problemen emaitzak azkar eta zuzen lortzen dituzten ikasleak proposatutako problemen inguruan jakintza asko dituztelako nabarmentzen dira; gainera jakintza horiek modu egokian gordeak dituzte garunean, jakintza horietara azkar eta erraz iritsiz.

Problemaren soluzioa bilatzeko fase desberdinetatik pasatzen da ikaslea, fase bakoitzean jakintza desberdinek daukate gakoa:

- Problema ulertu beharreko fasean, non problema identifikatu eta definitu behar den, hurrengo jakintzak egongo dira inplikaturik:

  - Linguistikoak: problema idatzita dagoen hizkuntzaren inguruan norberak dituen jakintzak.
  - Semantikoak: agertzen diren hitzen, espresioen eta esaldien esanahia ezagutzea.
  - Eskematikoa: irakurritako enuntziatua zer motatako problematakoa den jakitea ematen du. Jakintza mota honek problema argitzen du eta aldi berean honen inguruko pistak ematen dizkigu.
- Planifikazio fasean, problemen soluzioa aurkitzeko ezagutzen diren estrategia desberdinek izango dute garrantzia. Ezagutza heuristiko moduan ezagutuak dira.
- Exekuzio fasean bi jakintza mota inplikaturik agertzen dira:
  - Buruketaren emaitza lortzeko egin beharreko prozedurak aurrera eramateko behar den gaitasuna, adibidez, beharrezkoa den eragiketaren bat egiten jakitea.
  - Beharrezkoak diren abileziak aukeratzeko eta behar den aktibitatera ajustatzeko jokaera.

Problema matematikoetan akats ugari egotearen arrazoi nagusietako bat, aurretik izan beharreko oinarrizko ezagutzetan daukate jatorria.

Hauen eragina problema matematikoa ebazteko egin behar den prozesu guztian ikusi badaitezke ere, problema matematikoa abordatzerakoan, ulertze fasean, aurkitzen dira hauetako asko. Honen arrazoia dekodifikazioa gaizki egin delako edo zuzen dekodifikatu arren, ez daki zer irakurri duen mezu linguistiko ulergarri bihurtzeko zailtasuna duelako ikasleak (irakurmen ulermenaren zailtasuna).

Informazioa ez bada behar bezala jasotzen, problema ez da modu zuzenean ebatziko. Ikasle batek buruketa entzundakoan ongi egin dezake , baina gerta daiteke, buruketa bera modu autonomoan irakurrita ez ulertzea. Irakurmena arlo guztietan lantzen bada ere, matematikako problemetan zehazki landu beharreko aspektua da.

Ikasle batek enuntziatuan, ulertzeko zailtasunak ager ditzake, ezagutza linguistiko (morfosintaktikoa, semantikoak) faltaren ondorioz. Adibide sinple batekin garbi gelditzen da. “Mikelek 4 puxika dauzka eta Laurak halako bi. Zenbat puxika dauzka Laurak?” problema ezin da ulertu “halako bi” esapidea ez bada ulertzen.

Batzuetan problema birkontatzeko gai dira, hau da, “ulertu” du. Baina ulertze hau azalekoa da ez baitu eskema mental bihurtzen. Hau da egoera berezi bat bezala ikusten du, mota bereko problemenekin antzekotasuna ikusi gabe.

Exekuzio faseari ikasleak problema ulertu gabe eta eskema mental bihurtu gabe ekiten badio, bertan agertzen diren datuak algoritmo batean konbinatzen saiatuko da. Lehenengo zikloan egiten diren eragiketa bakarreko problemetan posiblea da erantzun zuzena lortzea. Hortik lortutako ikaskuntza hutsala izanen da (“*problema egiteko ez da beharrezkoa irakurtzea. Zenbakiak hartzen dira eta batuketa edo kenketa egiten da”*). Horregatik, ziklo honetan oso inportantea da ikasleak jarraitutako bidea ezagutzea. Beti adierazpen grafikoa, adibidez diagrama sagitala, edo egindakoa manipulazioaren bitartez azaltzea lagungarria da.

Exekuzio fasean ezagutza matematikoak beharko ditu. Algoritmoak zuzen burutzen jakin behar du. Problemen edukien arabera, jakintza espezifikoak beharko ditu. Esate baterako, dirua tartean baldin badago, euro eta zentimoen egitura ezagutu beharko du.

### *2.2.5. Teknika heuristikoak eta problemen ebazpena*

Problemak ebazteko existitzen diren estrategiak biltzen ditu heuristikak. Normalean teknika hauetatik emaitzak jasotzeko, askotan erabiliak izan behar dira. Hauek zenbat eta gehiagotan erabiliz, lortutako emaitza gero eta hobea izanen da. Teknika hauek ongi erabiltzen jakinez gero, abantaila asko lor daitezke problema bat ebazterakoan. Heuristikaren adibide anitz daude, horien artean:

- Problemaren ulermena lortzeko estrategiak (beste modu batez kontatzea, atzetik aurrera kontatzea…)
- Aurretik ebatzitako problemekiko antzekotasunak eskainitako tresnak.

- Errepresentazio grafikoak. Ikaslea ez bada trebea nolabaiteko grafiko egiteko, eskema mentalak garatzea eta ebazteko bidea aurkitzea zailagoa suertatuko zaio.
- Aldagai numerikoa erabiltzea (problemako zenbakiak erabili beharrean problema txikiago batzuekin burutzen saiatzea)
- Lortutako emaitzaren generalizazioa.
- Problema baten deskonposatzea, problema errazago batzuekin ordezkatuz.

Teknika hauek espresuki erakutsi eta landu behar dira. Ikasle batzuek berez garatzen dituzte baina beste batzuek ez eta hauekin landu behar dira bereziki.

### *2.2.6. Metakognizioa eta problemen ebazpena*

Kontzeptu honek, norberak problema matematikoen ebazpenen inguruan dituen gaitasunak eta mugen inguruko gogoeta bat sortzeari egiten dio erreferentzia. Modu honetan norbera bilakatzen da problemen soluzioak bilatzeko orduan hartzen dituen erabakien arduradun. Problemak ebazteko dauden estregiaz kontzientea izatea eskatzen du eta erabakiak hartzen entrenatuta egotea (ez soilik matematika alorrean).

Gaitasun metakognitiboen garapen zuzen batek, norberak problemen aurrean duen jarrera egokia bultzatuko du. Honen eraginez, esfortzurik egin aurretik buruketa uztea zailago bilakatuko da, bideak egon badaudela baitaki.

### *2.2.7.Osagai emozionala eta problemen ebazpena*

Osagai afektiboen inguruko gaian abiapuntua, Extremadurako Unibertsitateko hiru irakaslek, Nuria Gil Ignaciok, Lorenzo J.Banco Nietok eta Eloisa Guerrero Baronak (2006) DBHko 3. eta 4. mailako ikasleekin egindako ikerketa izango da.

Hona hemen ikerle hauek behatu zituzten zenbait jarrera eta egoera ez-egokiak ikasleengan problemak ebazterakoan:

- Inongo planifikaziorik izan gabe eta buruketak ematen duen informazio guztia kontutan hartu gabe, problemaren erantzuna lortzen saiatu.

- Irakurketa ulerkor bat egitea askotan bigarren mailako aktibitatetzat hartu.
- Ikusten dituzten zenbakiak kontutan izanik soluzio bat bilatzen saiatu.
- Beste estimulu batzuekin despistatu, egin beharreko lana bigarren maila batean utziz.
- Egoera ezjakin baten aurrean ikustean, blokeo mental bat izatea.
- Buruketa ongi irakurri aurretik ikasleek irakasleari laguntza eskatu.
- Motibazio falta izan.

Aipatu diren jarrera ez-egokiak aztertzen hasteko, matematika ikasgaiak ikasle batzuengan sortzen dituen hainbat sentimendu negatibo (beldurra, antsietatea, segurtasun falta..) eragiten dituen ikasgaia dela esan beharra dago. Ikerleek, problema bati aurre egiterakoan, ikasleen %45ak konfiantza falta sentitzen zuela aurkitu zuten eta %37ak gaitasun falta sentitzen zuela.

Matematikak daukan izaera zehatza, lan honetan jadanik aipatua, nabarmendu behar da. Ikasgai honetan agertzen diren elementuek ez daukate esanahi bikoitzik. Gainera, matematikak izaera abstraktu eta inpertsonal bat dauka eta horrek zenbait ikasleren kemena zapuztu dezake. Ikasleen garapen kognitiboa ez da homogeneoa eta gela berean abstrakzio maila altuko ikasleak eta apalagokoak egon daitezke. Hezkuntza curriculumek abstrakzioa saritzen dute eta programa zabalek manipulaziorako tartea txikitzen dute, ikasle askorentzat funtsezkoa baldin bada ere. “Txikien” gauza bezala ulertzen da.

Aipatutako arrazoiez gain, matematiken inguruan estereotipo sozial negatibo asko daude (“zailak dira”) eta horiek ez diete ikasleei laguntzen. Hauen artean gurasoek edo lagunek izandako arazo edo anekdota negatiboak aipa daitezke.

Matematikaren izaerak eta aurreiritzi hauek, problema matematikoak ebazteko orduan ikasleek daukaten motibazioan eta errendimenduan efektu negatiboak izan ditzakete, honekin batera haien ideia negatibo propioak sortuz. Jarrerek, ohiturek eta sentimenduek eragin zuzena daukate problemen erantzuna aurkitzeko dituzten probabilitatean. Positiboak baldin badira probabilitatea handituko da eta alderantziz negatiboak izanik, soluzio zuzena bilatzeko motorra izango dira. Negatiboak badira, prozesua blokeatuko dute. McLeodren

(1989) iritziz, “problemen ebazpenean inplikatutako prozesu kognitiboetan eragin handia eta zuzena dauka alderdi emozionalak”.

Sentimenduak negatiboek (okertzeko beldurra, ezjakintasunaren sentimentua…) atxikitze jarrera bultzatzen dute: ikaslea askotan erabili dituen prozesuak eta teknikak erabiltzen saiatuko da, ahalik eta arrisku gutxien izatea bilatuz, pentsamendu dibergentea saihestuz. Modu honetan eraginkorragoak izan daitezkeen beste estrategia batzuk alde batera utzi egiten dituzte hain ezagunak ez izateagatik.

Ematen den beste jarrera bat, problema saihesteko defentsa izaten da, problema matematikotik ihes egiten saiatzen da, honetarako aitzaki ugari erabili daitezkeelarik: gerorako utzi, kopiatzea…

Pertsona batek problema matematiko baten aurrean plazaratzen dituen sentimenduak negatiboak badira, honen inguruan dauden gertaerak arriskutsuak bezala ulertzen ditu. Honekin batera autoelikatzen den zirkuitu negatibo bat sortuz bere pentsamendu eta aktibitate fisiologikoan. Honek eraginda, norberak balorazio eta pentsamendu negatiboak sortzen ditu: “ezin dut egin”, “niretzako konplexuegia da”…

Esan beharra dago, GBL honetan bereziki lehenengo zikloko ikasleen inguruan egiten dela azterketa eta adin honetan problemen inguruko sentimendu negatiboak oso ikasle gutxiengan somatzen direla. Baina bizitza akademikoa aurrera doan heinean sentimendu positiboak (“gai naiz”, “egin dezaket”) manten daitezen oso inportantea da hasiera honetan egiten den lana, gutxienez aurrerago jarraipena ematen bazaio.

Lehen azaldu bezala, irakasleen metodologiak ere ikasleen sentimenduetan eragina izaten du. Matematikak, askotan formulak edo abilezia konkretu batzuen errepikapena erabiliaz irakatsi izan dira, konpetentzietan oinarritu beharrean. Adibidez, algoritmoak errepikatu beharreko ariketa bezala erakutsi dira, egoera errealetan erabili gabe. Gainera, ikasleen interesak alde batera utzi izan dira, ikasgaiak denbora gutxian emateko beharra dagoenez (ikasgaiak ongi ikasiak izatea zailduz), aurreko urteetan erabilitako material berdinak erabiliaz.

## 2.3. Alderdi didaktikoa: buruketen ebazpenen metodologia

### *2.3.1 Eredu pedagogikoak eta matematikaren didaktika*

Urteetan egondako Hezkuntza erreformetan, matematikaren didaktika aipagaia izan ohi da. Metodologien atzean eredu pedagogiko desberdinak daude eta hauetan azkeneko urteetan aldaketa ugari eta sakonak eman dira. Aldaketa ugari hauen zergatia ulertzeko, ikasleek ikasgai honekin izan ohi duten porrotari irtenbideren bat bilatzearekin lotuta egon daiteke

Beraz, jarraian, ikasgeletako errealitatea ulertzeko eta urteetan zehar horietan eman diren aldaketak ulertzeko, proposaturiko eredu pedagogiko desberdinak, kronologikoki ordenatuta, aurkeztuko dira. Hala ere, garrantzitsua da azpimarratzea, ikastetxe askotan gaur egun, matematikak irakasteko ereduan aldaketa bat eman beharra dagoela. Izan ere, ikasgela asko eta asko baitira oraindik eredu tradizionalean oinarritzen direnak, kolore eta aurrerapen teknologikoen atzean ezkutaturik baldin badaude ere.

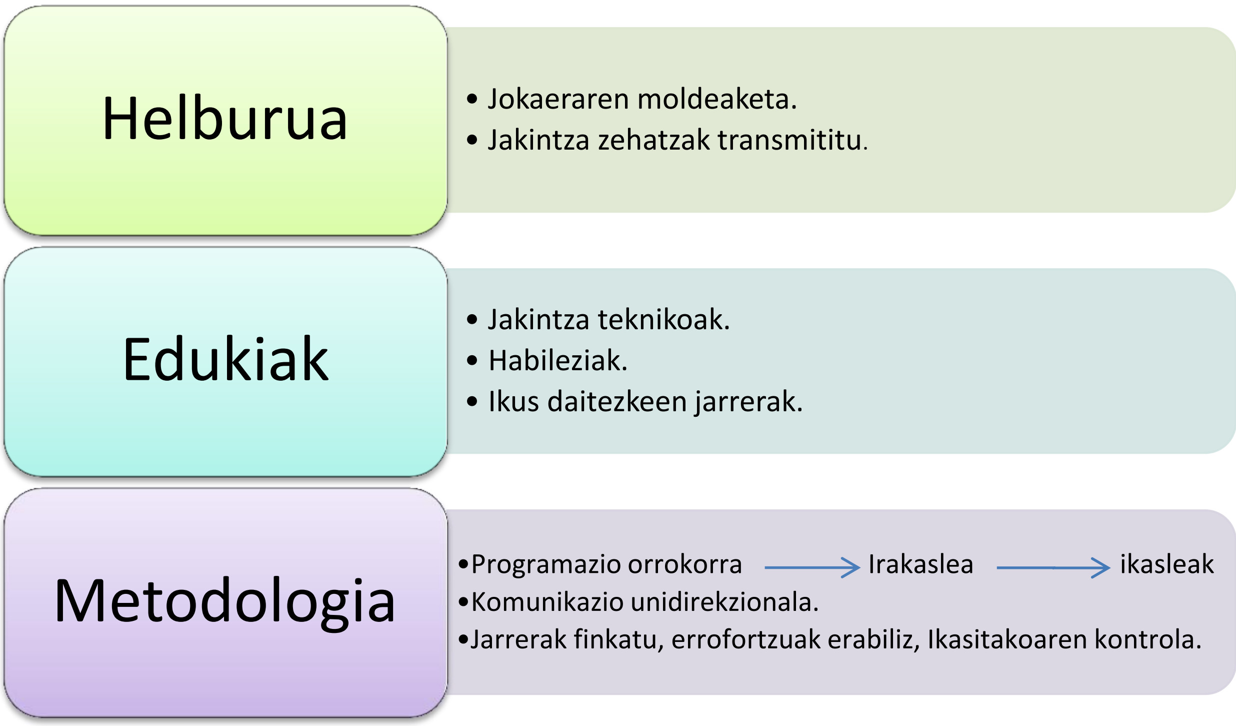
Denboran zehar sortuak izan diren eredu pedagogiko desberdin horiek 3 taldetan multzokatu daitezke: transmisio-eredua, zaharrena dena, eredu kognitiboa eta eredu sistemikoa.

- *Transmisio eredua*

Lehenengo eredua, transmisio-eredua bezala ezagutzen da. Azaldu behar diren hiruetatik zaharrena da eta beraz, eredurik tradizionalena bezala kontsideratzen da. Modelo honen abiapuntuan, ikasleak ez daki deus eskolara ikastera joaterakoan, hau da, umeen jakintza eta inteligentzia hutsa izango balitz bezala ulertzen da. Eskolara iristean, orojakilea den irakasle batekin topatuko da eta honen lana modu progresibo batean ezagutzak ikasleei gehitzea izango da. Beraz partaideen artean ematen den komunikazio korrontea “uniderekzionala” da, hau da, bakarrik alde bat komunika daiteke, irakaslea.

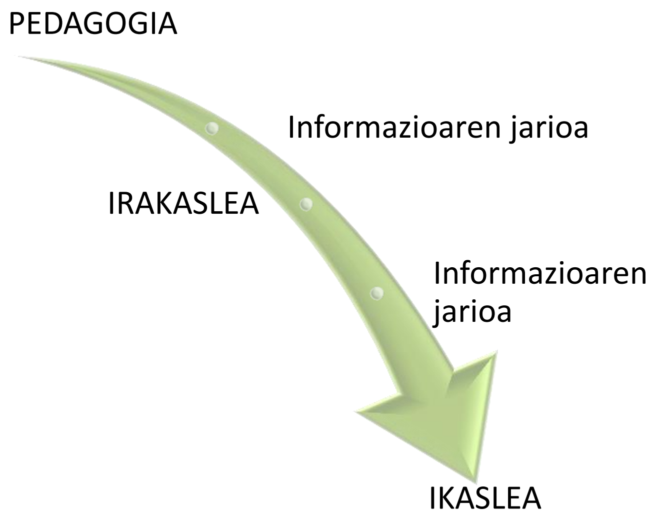
Berdintasuna, eredu honen ezaugarri nagusi bezala jo daiteke, honetan ikasleen dibertsitatea ez baita kontuan edukitzen, guztiek gaitasun eta zailtasun berdinak balituzte bezala tratatzen dira. Irakasleak ezagutzak modu homogeneo batean transmititzen ditu, eta ikaslearen betebeharra, hauek entzun, gogoratu eta behin eta berriz errepikatzea, buruz ikasten den arte, izanen da. Ikaskideen artean ez da inolako elkarreraginik egoten, modelo honen abiapuntuak esaten duen bezala haiek ez daukatelako inongo ezagutzarik, eta beraz hauen arteko elkarreraginak negatiboak izan daitezke bakarrik. Beraz, ikasleak memorizatu egiten du irakasleak esanikoa, eta behin hori lortu ondoren, entzundakoa erreproduzitzeaz arduratzen da, modu autonomoan inongo lanik egin gabe eta errealitatearekin harremanetan jarri gabe. Ikasleak aulkietan eserita egongo dira irakasleak hitz egiten duen bitartean.

Eredu honek, hainbat kritika jaso ditu urteetan zehar. Horietako gehienak ikasleak dituen behar indibidualak alde batera utzi egin dituelako eta inguruarekin harremanetan jartzea alde batera utzi duelako. Hala ere, oraindik, ikasgela askoren barruan aurrera eramaten den eredua da.




**6. irudia.** Transmisio ereduaren eskema.

Beraz, esan bezala, egoera honetan irakasleak ikasleari ezagutzak transmititzen dizkio. Ikaslea kaxa huts bat da eta irakaslea, berak dituen ezagutzekin, betetzen joanen da (7. irudia).




**7. irudia.** Transmisio ereduan informazio transmitzeko ematen den ibilidea.

Esan daiteke, Haur Hezkuntzako eta Lehen Hezkuntzako jakintza matematikoa ez zirela gehiegi ukitu egin 1960. urtera bitarte. Orokorrean aritmetikako 4 erregeletan (batuketa, kenketa, biderketa eta zatiketa) eta geometriako oinarrizko ezagutzetan zetzala eredu honek. Baina, nahiz eta mendeetan zehar martxan egon zen, zenbait aldaketa medio, azkenean transmisio eredu hau krisian sartu zen egoera sozial konplexuen eraginez eta honek eredu aldaketak ekarri zituen.

- *Eredu kognitiboa*

Aurretik azaldutako ereduak jasotako kritika anitzen ondorioz, eta beste arlo batzuetan egondako ikerketa desberdinek eskainitako informazio garrantzitsuei esker, eredu aldaketa bat eman zela esan daiteke. Honen arrazoi nagusietako bat, XX. mendearen erdialdean psikologia kognitiboak irakaskuntza-ikaskuntza prozesuetan hartutako pisua izan zen. Urte horietan psikologia arloan garapen asko ziren eta horien emaitzen ondorioz ikasleen garapen indibidualari garrantzi handia ematen hasten zaio. Gainera, irakasleen formakuntza pisua hartzen hasten da eta urte horietan sortzen diren irakasleek jakinduri gehiagokoak dira ikaskuntza-irakaskuntza prozesuari dagokionez.

Aipatutako psikologia kognitiboa, psikologiaren adar konkretu bat da, zeinek ikaskuntzan ematen diren prozesu mentalen inguruan ikertzen du. Honek, ikasketa prozesuan ematen diren mekanismo basikoak aztertzea ditu, pertzepziotik edo memoriatik hasita, ezagutza berriak eta arrazoiketa logikoak lortu arte.

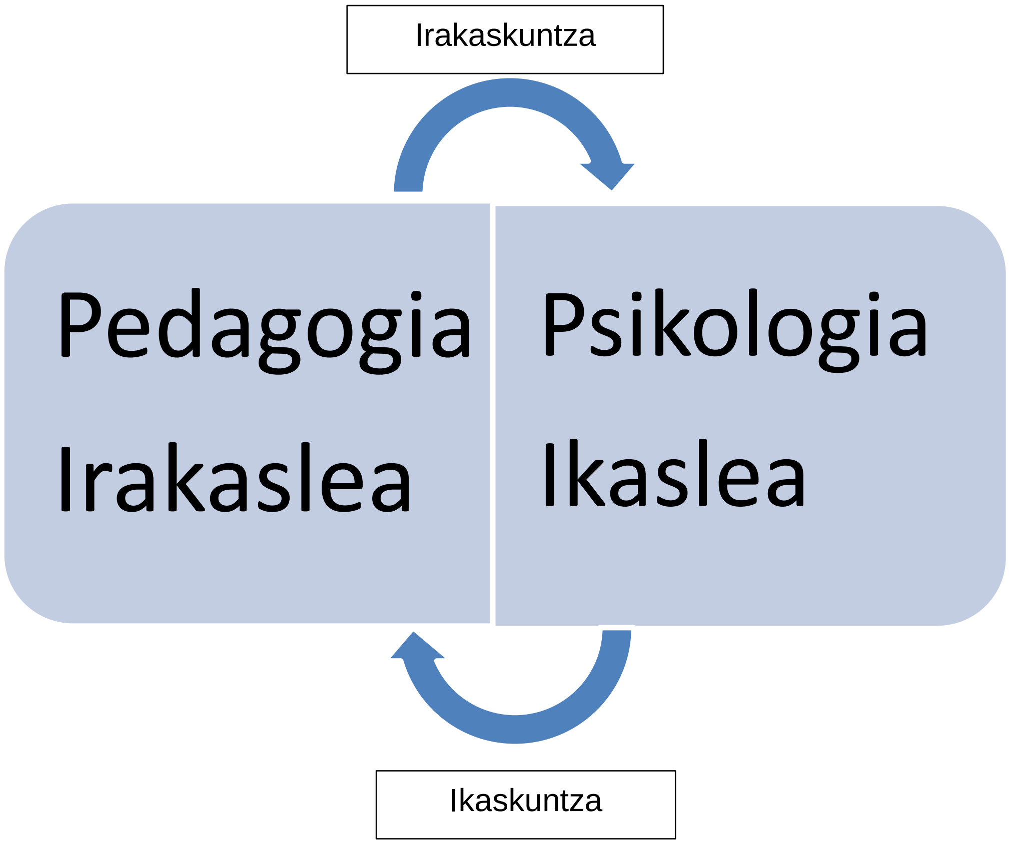
Psikologia kognitiboak bi lanbide nagusi ditu. Alde batetik, pertsonak mundua ikusteko duten modua aztertu nahi du eta bestetik, gizakiok informazio sentsoriala ingurutik jasotzeko prozesu ikertzen du eta ondoren hau transformatzeko, gordetzeko, sintetizatzeko, berreskuratzeko eta azkenik erabiltzeko prozesuak aztertzen ditu. Prozesu honen guztiaren emaitza aktiboa, ikaskuntza prozesua ikertzean datza, zeinetan pertsonek gertaera berdin baten aurrean dauden bigarren aldian jakin dezakete gertatu behar dena.

Psikologiaren adar honetan eman ziren aurrerapenen ondorioz, ikasleen ikaskuntza prozesua modu desberdin batez ikusten hasten da, bertan ikasleen eboluzioak garrantzia gehiago dauka, norberaren bizipenak garrantzia handia lortzen dutelarik.

Ikuspuntu berri honetan, ikaslea jakitun bezala kontsideratzen da eta beraz ez da eskolara joaten informazio berria jasotzera soilik, duen informazioaren inguruan hausnartzera doa eskolara. Bertan ikasle bakoitzak indibidualki, bere jakintzak eraikiko ditu, horretarako bakoitzak dituen aurre jakintzak erabiliak izanen dira. Eskolan informazioaren antolaketa bat eginen da, norberak dituen informazioak osatuko dira, hauek aberastuz eta garatuz. Beraz, eredu berri honetan, umeak bere ezagutza propioak eraikitzeko gai dela pentsatzen da, irakaslearen papera, honi laguntza ematera, ikaskuntza ibilbidean bideratzera zuzendurik egongo delarik. Honen helburua ikaslearen potentzialaren ahalik eta gehiengoa ateratzea izanen da. Kasu honetan, aurreko ereduan ez bezala, ikasleek aurretiko jakintzak izango dituzte eta izango dituzten esperientzia berrien bidez, aurretik zituzten jakintzek aldaketa bat jasango dute, ikaskuntza esanguratsuak lortuz.

Irakasleak beraz bi paper nagusi beteko ditu, alde batetik informazio bitartekari izanen da eta bestetik ikertzaile lana egingo du, aurrera eramandako jarduerak ebaluatuz eta behatuz. Jardueretan daukan paper kritiko hau probestuz, haurrengan portaera desberdinak sortzen saiatuko da, jakin-nahia, eztabaidatzeko gaitasuna, arazoen konponbidea bilatzeko gaitasuna… Eredu hau aurrera eramaten hasten denean, ikastetxeetan ikaskuntza esanguratsuak garrantzia hartzen hasten dira.

Azaldu bezala, eredu honetan irakasle eta ikasle artean sortzen den erlazioak berezitasun nagusi bat dauka transmisio ereduarekin konparatuz gero. Honetan ematen den komunikazioa “bidirekzionala” da, bi partaideen artean *feedback* bat, informazioaren elkartrukatze bat ematen da. Modu honetan irakasleak ikasleek dituzten arazo, kezka edo interesak ikus ditzake, honekin batera ikaskuntza-irakaskuntza prozesua aberasteko, informazio gehiago edukiz, hau nahi duen moduan erabili dezake.




**8. Irudia.** Bi partaideen arteko elkartrukea ikaskuntza-irakaskuntza prozesuan.

Ikaskuntza-irakaskuntza prozesuetan zerikusia zeukaten administrazioek, psikologiaren ikuspuntu berri hau kontutan eduki zuten egin beharreko hurrengo erreformetan. Honi esker lortutako emaitzak hurrengo bi alorretan ikusi zirelarik: alde batetik pedagogian egindako aldaketak, ikasleen dibertsitatea kontutan hartzen zituzten trataera, motibazioa bultzatu, interbentzio teknikak… eta bestetik irakasleak kontutan eduki behar zituen psikologiako informazioei eman zieten berebiziko garrantzia. Informazio hauen barruan batez ere bi alderdi goraipatu beharra dago, umearen garapen maila kontutan edukitzen zuten ezaugarriak bai psikologia genetikoak deskribatzen dituenetan bai psikologia kognitibokoak eta ikaskuntza psikologiako eredu teorikoetan.

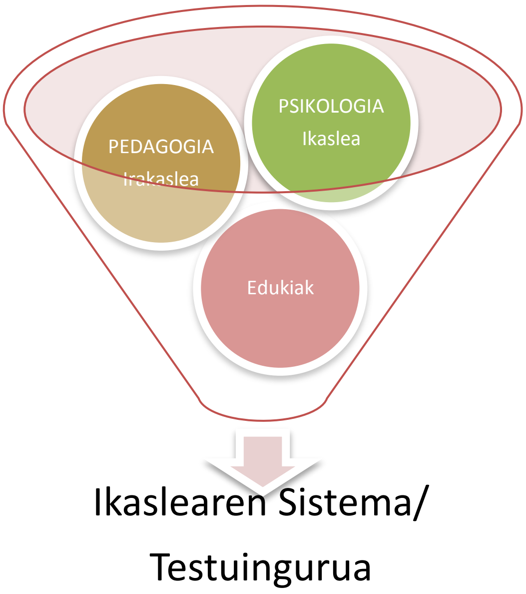
Beraz, aipatu bezala, 50. hamarkadatik aurrera planteatutako eredu honek, aurretik planteaturiko eredua baino osatuago agertzen da, ikaskuntza prozesuan ematen diren elementu gehiago hartzen dituelako kontuan. Eredu honi egin zitzaion kritika nagusia irakasleei zuzendurik egon zen, garai horretan irakasleen formakuntza aurreko urteetan baino hobea izan bazen ere, psikologia eta pedagogian zentraturik zegoen gehien bat eta transmititu behar zituzten jakintzen inguruko kontzeptuak ez zituzten behar bezala lantzen, ondoren ikasleak behar bezala gidatzeko haien ikaskuntza bidaian.

- *Eredu sistemikoa*

Jarraian aipatu beharreko eredua, 70. hamarkadan sortua izan zen eta aurretik azaldutako eredu kognitiboari egindako kritiken ondorioz osatua izan zen. Aurreko ereduan bi elementuk zeuzkaten gehieneko indarra, irakaslea eta ikaslea. Eredu berri honetan hirugarrengo elementu nagusi bat batzen zaie aipatutako bi elementu horiei, ezagutzak. Ez zaio bakarrik transmititu beharrekoaren formari begiratzen, bertan agertzen den ezagutzak aztertzen dira gainera.

Horretaz gain, eredu sistemikoak proposatzen zuena, ikaskuntza prozesuan agertzen ziren elementu guztiak sistema unitario moduan ulertzea izan zen, hau da, ikasleak, irakasleak eta hauen inguruko elementuak (testuingurua) sistema bakarra osatzen zutela defendatzen zuen. Hauetako batean desoreka bat agertzen bada, gainontzeko elementuetan ere nabarituko dira aldaketa berri hauek, oreka berri bat lortu arte berriro. Edozein sisteman bezala (zelulen sisteman bezala) elementu guztiak unitate baten moduan ulertu daitezke, guztien batuketa bat baino.

Hau jakinik, irakasleak testuinguru aberasgarri bat prestatu beharko die ikasleei, non irakasleak xede dituen edukiak, ikasleek modu autonomo batean eta egoera didaktikoetatik kanpo ikas ditzaketen, hau da, egoera adidaktikoak erabiliaz.



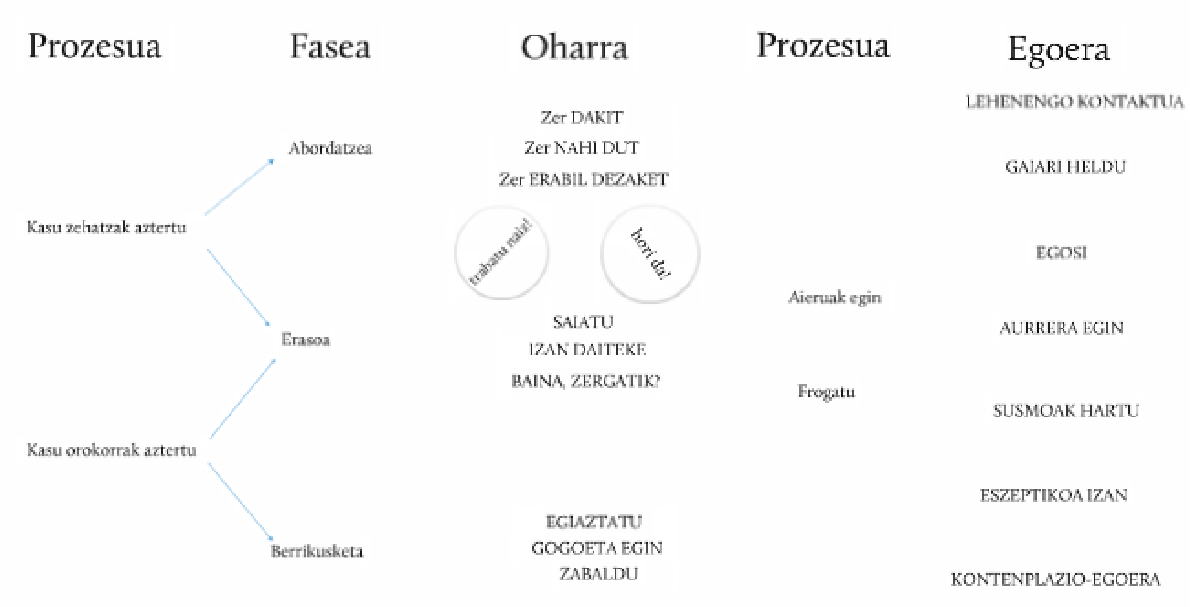

**9. Irudia.** Eredu sistemikoaren arabera, ikaslearen inguruko aspektu guztiek sistema unitario bat sortzen dute.

### *2.3.2. Problema matematikoen ebazpen metodo bat: MBS*

Problemen ebazteko metodoei eutsi aurretik, interesgarria izan daiteke Miguel de Guzmanen (1991) ideia bat gogoraraztea. Galderak dira problema matematikoen funtsa, eta haiei erantzunak bilatzea erronka izango da. Problema matematikoak erronkak baldin badira, hauei aurre egiteko metodo orokorrak ezagutzea beharrezkoa izango da.

Hurrengo bi ataletan, bi autore klasikok problema matematikoak ebazteko proposatu zituzten metodoak aztertuko ditugu.

Metodoaren izena bere sortzaileen abizenetatik eratorria da. Hauek John Mason, Leon Burton eta Kaye Stacey (1989) matematikariak dira. Proposatu zutenaren, problema bat ebatzi behar denean, lehendabizi honek eskaintzen dituen kasu zehatzak ikertu beharko dira, ondoren kasu orokorrak ikertuz, modu honetan arau orokorrak aurki daitezkeelarik. Honetaz gain, problemen ebazpenaren hiru fase desberdin deskribatu zituzten: abordatzea, erasoa eta berrikuspena. Dena den, problemaren ebazpena ez da prozesu lineal bat bezala ulertu behar. Ez da hasi, garatu eta amaitu. Autore hauek defendatzen dutenez, aurrera eta atzera ibili beharra dago problemak ebazteko.




**10. Irudia**. MBS eskemaren faseak, UPNAko irakaslea den Aitzol Lasak egindakoa (http://prezi.com/fewr9_w8xxut/mbs-eskema)

10. irudian ikusi daitekeen legez, abordatzean, eskura dugun informazioa aztertu egiten da eta erasoan problemak ebazteko saiakera desberdinak egiten dira.

Beraz problema matematiko bat abordatzeko orduan, metodologia honek defendatzen du lehendabizi kasu zehatzak aztertu beharra dagoela ondoren lortutako emaitzak kasu orokorretan zabaldu ahal izateko.

Kasu zehatzen barruan lehendabizi, buruketatik lortu ditzakegun datuak aztertu beharra dago, zer dakit, zer lortu nahi dut, zer erabili dezaket… bezalako galderak sortu daitezke  bertan dagoen informazioa lantzeko orduan. Lan hau egindakoan gaiarekin lehendabiziko kontaktuak lortuko dira, gaiari helduz.

Ondoren, informazio guztia bildu duzularik, “erasoaren” fasea aurrera eraman beharko da. Honetan, lortutako informazioarekin problema ebazteko saiakera desberdinak egin beharko dira, hauen emaitzaren inguruko hipotesiak egin daitezkeelarik. Eragiketa desberdinak egin beharko dira. Lehen esan bezala, atzeraka behin baino gehiagotan egin beharko dugu, bildutako informazioaren inguruan gogoeta bat egin daitekeelarik informazio berria edo erabilgarria lortzeko.

Pauso hori aurrera eraman ondoren, kasu zehatzetatik emaitza bat lortua izango da eta beraz, lortutako emaitza hori kasu orokor batean egiaztatu beharko da, “berrikusketa”. Hala ere emaitza ongi ez balego, atzerako pauso bat eman daiteke “erasoaren” fasera itzuliz eta beste saiakera batzuk aurrera eramanez. Bukatzeko lortutako emaitzen inguruko gogoeta bat egin beharko zen lortutako emaitzetatik ezagutza berrietara zabalduz.

*2.3.3. Pentsamendu matematikoaren estrategiak problemen ebazpenean*

Hemen, problemak abordatzeko azalduko den bigarren metodoa, Miguel de Guzmanek (1991) zabaldutakoa izanen da, Lehen Hezkuntzako metodologian kontuan hartzen dena maiz. MBSrekin ez dago kontrajarria baina problema konkretu bati aurre egiterakoan fase oso zehatzak proposatzen ditu.

Argi dago, askotan, problema matematikoek beldurra edo ziurtasun falta sortu dezaketela egin behar duenarengan. Honekin batera, jakina da, egileak bere ahalmenaren zati bat galdu egingo duela, problemaren ebazpena zailduz. Hau saihesteko eta problema matematikoen aurrean metodo zehatz bat izan ahal izateko, Miguel de Guzmanek lau fase desberdin bereizi zituen.

1. **Problemetara ohitu** fasean, buruketaren aurrean daukazun jarrera egokia izatea bilatzen da. Bertan informazio irakurtzeaz gain, norberaren beldurrak kentzea bilatzen da, honi esker egoerak sakonki ulertzeko.
2. **Estrategiak bilatu** fasean, saiakerak egiteko epea da. Bertan eskema desberdinak, marrazkiak erabiliko dira buruketaren ebazpenera hurbiltzeko. Gainera buruketa abordatzeko, kasu errazenetatik hastea gomendatzen da ondoren zailagoak direnetara iritsiaz. Gainera, hurrengo fasean aurrera eraman beharreko estrategiak prestatu beharko dira.
3. **Estrategiak aurrera eraman**. Fase honetan, aurretik diseinaturiko estrategiak aurrera eraman beharko dira baina malgutasun baten barruan. Sortutako estrategia bat asko korapilatzen ari dela ikusten denean atzera egin beharko da beste estrategia batzuk bilatzeko asmotan. Fase honen bukaeran emaitza bat lortzea izango da helburu eta behin hori lorturik jarraitutako bidearen errepasoa egin beharko da.
4. **Prozedurak berrikusi eta ondorioak atera.** Bertan emaitzara heltzeko jarraitutako bidea errepasatuko da. Lortutako emaitza ongi dagoen zergatik ikusiz edo akatsak non egin diren ikusteko. Gainera, jarraitutako bidea baino eraginkorrago baten bat badagoen ikusi beharko da.


**11. Irudia.** Miguel de Guzmanek problemen ebazpenean ezberdintzen dituen 4 faseak

### *2.3.4. Problema matematikoen didaktika Lehenego Zikloan*

Esan bazala, lan honen 3. eta 4. kapituluetan, 1. ziklo bukaeran dauden ikasle talde batekin  burutu den praktika azalduko da. Problema matematikoen alderdi didaktikoan sakontzeko, egokia da adin horretan erabiltzen diren problema motei, metodologiari eta prozesu heuristikoetara hurbiltzea. Isabel Echeniqueren (2006) proposamena hartuko da ardatz.

- *Buruketa tipologia*

Ziklo honetan nagusiki, egitura semantikoari dagokienean,  problema aritmetiko sinpleak landuko dira, hots, batuketa edo kenketa bakar batez ebazten direnak. Bigarren kapituluan azaldutako tipologiara bueltatuz, zein buruketa mota izan daitezkeen birgogoratuko dugu:

- Aldaketa problemak: Hasierako kantitate bati (Ci) aldaketa (gehitu edo kendu) egiten zaio eta bukaerako kantitatea lortzen da (Cf)
- Elkarketa problemak: bi kantitate daude (P1 eta P2) eta biak elkartuz beste kantitate bat (T) lortzen da.
- Konparazio problemak: kantitate erreferente bat daukagu (Cr), horrenkin konparatzen dugun beste bat (Cc) eta bien arteko aldea (D).
- Berdinketa problemak: kantitate bat dago (Cr), horrekin berdindu nahi dugun beste bat (Cc) eta berdinketa lortzeko zenbat falta den adierazten dun beste kantitate bat (D).

Tipologia honen barruan *zailtasun gutxienekoak* aldaketa motakoak dira Cf (bukaerako kantitatea) eskatzen denean eta elkarketa problemak T eskatzen denean (totala). Aldiz, *zailtasun handiena* aldaketa problemetan Ci eta konparazio eta berdinketa problemetan Cr eta Cc eskatzen denean sortzen dira. Zailenak izateak ez du landu behar ez direnik esan nahi, baizik eta bigaren zikloan lantzen jarraitu beharrekoak direla.

Poblema aritmetiko sinpleez gain, geometria, arrazonamendu logiko eta probabilitatearekin lotutako problema errez batzuk ere landu beharrekoak dira.

- *Metodologia*

Isabel Echeniquek (2006) lehenengo mailan talde handiko ahozko lanari ematen dio lehentasuna, ikasleak poliki-poliki problemen jarduerak nolakoak diren jabetzeko. Lana beti saio motzetan antolatuko da (30 min baino gutxiago). Ikasturte erditik aurrera aurkezpen idatzia eta bikotekako lan kolaboratiboari hasiera emateko momentu egokia da.

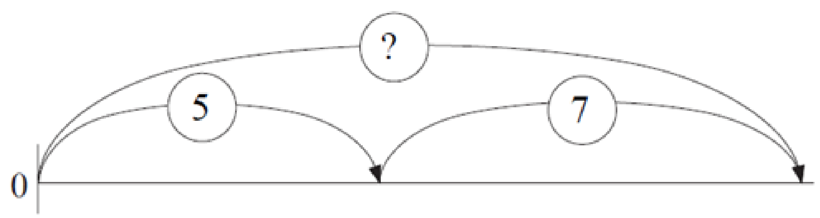
Bigarren mailan lan gehiena bikoteka egingo da. Talde handia problema zailenen modelizazioa egiteko utziz. Ikasleei problemen ebazpenen faseetan sakontzea eskatuko zaie. Isabel Echeniqueren aburuz jarraitu beharreko faseak de Guzmanek planteatzen dituen berberak dira eta 2.3.4. puntuan, modu zabal batez, aurkeztu dira. Honako hauek dira:

- Problemaren irakurketa eta ulertzea
- Plan bat antolatzea
- Plana aurrera eramatea
- Lortutako emaitzaren inguruko hausnarketa: zuzena izan daiteke? emaitzara heltzeko ba al zegoen beste biderik?

- *Prozesu heuristikoak (edo ebazpen estrategia orokorrak)*

Bestelako prozesu heuristiko interesgarriak egon badaitezke ere, Isabel Echeniquek (2006) honako bi ebazpen estrategia orokorrak azpimarratzen ditu, ziklo honetako ikasleekin lantzeko dagoen beharra dela eta.

- Problemak planteatzen duen egoeraren ulermena errazteko teknikak: lan hau nagusiki ahoz egingo da. Ikasleei aho hizkuntzaren bitartez eragiketa ezberdinak egitea eskatuko zaie.
  - Gauza bera beste modu batez kontatzea (Xabier Maria baino altuagoa da, Maria Xabier baino baxuagoa da).
  - Problema istorio bat bezala ikustea eta atzetik aurrera kontatzea (Mikelek 10 kromo zituen, 2 galdu ditu eta horregatik orain 8 dauzka, Mikelek 8 kroma dauzka 2 galdu dituelako eta hasieran 10 zituelako).
  - Datu batzuk emanda zer galde daitekeen aztertzea (galdera asmatzea).
  - Galdera bat planteatuta zein datu behar diren aztertzea (datuak asmatzea).
- Adierazpen grafikoetan ikasleak trebatzea: adierazpen grafikoa egiteko soilik matematikoa den informazioa identifikatu behar da. Adierazpen grafikoak egiteko modu ezberdinak baldin badaude ere, Isabel Echeniquek diagrama sagitalak aholkatzen ditu (12. irudia). Ikasleak trabatzeko progresio bat jarraitu behar da. Hasierak diagramak problemetatik at batuketa eta kenketa egoerak irudikatzeko aurkeztuko dira, ondoren irakasleak egingo ditu problemekin lotuta, poliki-poliki hasierako planteamendua besterik ez du egingo eta bukatzeko ikasleari estrategia heuristiko hau bere osotasunean.




**12. Irudia.** Elkarketa buruketa baten diagrama sagitana,non P1=5, P2=7 eta T inkognita den.

## 2.4. Alderdi ekologikoa: egoera didaktikoa

*2.4.1. Egoera Didaktikoa: esanahi tradizionala eta esanahi konstruktibista*

Egoera didaktiko kontzeptuari erreferentzi egiterakoan, honek bi esanahi desberdin izan ditzakeela jakin beharrekoa da.


**13. Irudia.** Egoera didaktiko kontzeptuaren bi esanahi ezberdinak.

Alde batetik, *zentzu tradizionaltzat* ulertu daitekeena, ikasle-irakasle erlazioari egiten dio erreferentzia. Honetan irakasleak edukiak edo ezagutzak transmititu egiten ditu soilik, eta bitartean ikasleak irakasleak esandakoa bere baitan txertatu beharko du, beranduago entzundakoa modu berean erreproduzituz. Irakaskuntzan, egoera tradizionala bezala ulertzen da, *transmisio ereduaren ildoan.*

Beste aldetik, kontzeptu hau ikuspuntu berritzaile eta konstruktibista batetik uler daiteke. Guy Brousseaurrek (1999 eta 2004), matematikari frantziarrak, *Egoera didaktikoen teoriaren* bitartez egin zion bere ekarpen ezagunena matematikaren didaktikari. Honetan, aurrekoan ez bezala, egoera didaktikoan irakasleak, ikasleak eta inguru didaktikoak elkar erlazionatuta daude, helburua ikasleak eraikitze bidean duen jakintza batean aurrerapausoak ematea izanik.

### *2.4.2. Egoera didaktikoaren teoriaren hainbat kontzeptu*

Egoera didaktikoekin erlazionaturik, garrantzitsua da Brousseauk aipatutako *egoera adidaktikoak* azaltzea. Hauek, egoera didaktioen fase bat bezala ulertu behar dira, beharrezkoa eta inportantea den fasea. Ikasleak problema bati egin beharko dio aurre irakaslearen laguntza jaso gabe. Hau da, ikasleak berak aukeratu beharko ditu bere jakintzen artean egokienak erantzun berria bilatzeko. Ikaste prozesuaren ikuspegi konstruktibistan oinarritzen da: ikasleak eraikitzen du bere ezagutza, erantzun berria bilatzeko bere eskema mentalak berrantolatu ondoren.

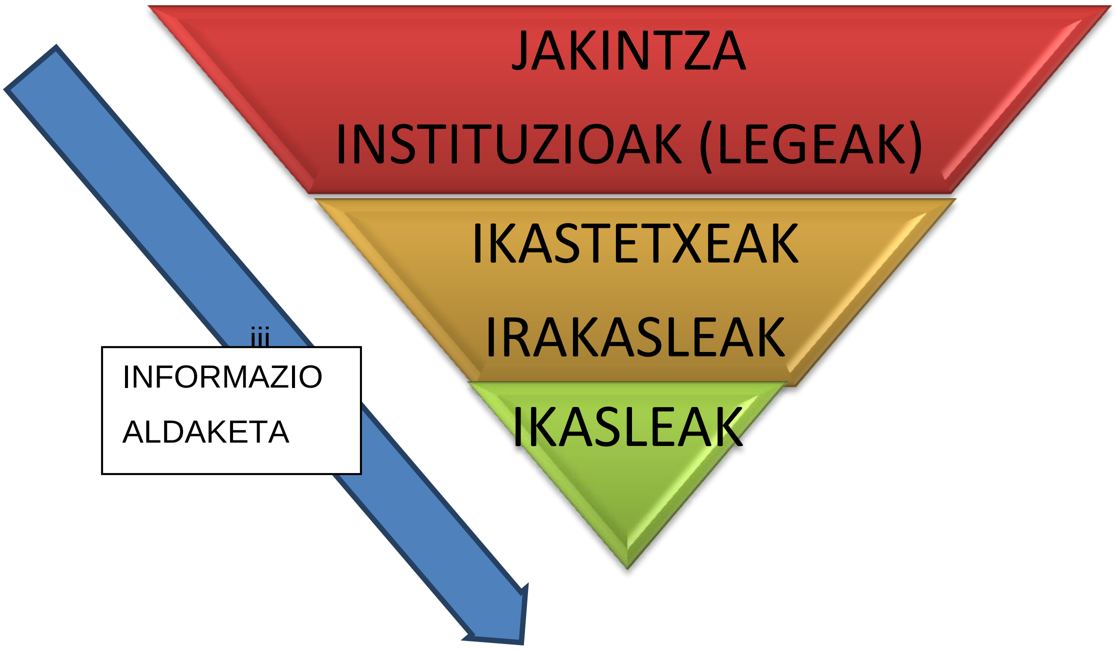
Egoera hauek ikaslearen motibazio intrintsekoa bilatzen dute, hau da, ikasleek ez diote arazoari irtenbide bat bilatu nahi irakaslearen nahia asetzeko helburuarekin, arazoari konponbide bat bilatzeak motibatuko ditu. Ikaskuntza-irakaskuntza prozesuari baliospeena ematen dioten egoeratzat ulertu daitezke.

Brousseau-k deskribatutako egoera adidaktikoak irakaskuntza-ikaskuntza prozesuari forma emateko proposatuak izan ziren. Arauak dituzten joko batzuk proposatuko ditu irakasleak, eta joko motaren arabera, ikasleak barneratzen duen ezagutza modu batekoa edo bestekoa izango da.

Egoera hauetaz gain, proposatutako problema matematiko bat ebazterakoan, ikaskuntza formaletik kanpo ikasitako kontzeptu eta prozesu askoren beharra izan ohi da, egoera *ez didakitkoetan* sortutakoak. Egoera hauek, eguneroko bizitzan izandako esperientziek (etxean, kalean…) sortzen dituzten jakintzak dira. Ez dago, jakintzak sortzeko intentziorik, baina bizitzan sortzen diren problemei soluzioa bilatzerakoan jakintza berriak sortzen ohi dira.

Egoera ez didakitkoen adibidea, bigarren mailako ikasle batek gurasoekin denda batean dagoenean aurkitu daiteke. Gurasoak zerbait erosterakoan ikasleak diru truke bat ikusiko du, transferentzia horren bitartez, aritmetika lantzen ari delarik edo etxean kroketak prestatzerakoan balantzaren erabilera ikus dezake edota esperimentatu.

Ikaskuntza prozesuetan, Brousseauren arabera, eragina daukaten aipatutako hiru elementuen (ikasle, irakasle eta inguru didaktikoa) arteko erlazioan, beste bi kontzeptu adierazi zituen Brousseauk. Alde batetik transposizio didaktikoa, jakintza jakinetik ikasleak ikasten duenera dagoen jauzia da. Bestetik, irakasleak ikaslearengandik espero dituen jarrerak eta alderantziz, ikasleak irakaslearengandik espero dituen portaerak.




**1. Irudia.** Maila ezberdinetan ematen den informazio galera

Broussearen teorian sakontzeko Transposizio didaktikoaren kontzeptua ere ezagutu behar da. *Transposizio didaktikoa* benetako jakintza batetik azkenik ikasleak ikasten duen artean dagoen jauziari egiten dio erreferentzia. Jauzi hori ulertzeko, informazioak ikasleei iritsi arte jasaten dituen transformazioak aipatzekoak dira. Ikasle batek informazio bat jasotzen duenerako, horrek hainbat transformazio eta selekzio jasan izan ditu. Hasteko, instituzio desberdinek, legeen bitartez, jakintza konkretuen inguruan ikasleei transmititu behar zaiena legeztatzen dute, bertan informazioren lehendabiziko galera edo transformazioa sortuz. Ondoren, ikastetxeek legeetan jartzen duena errespetatuz, beste selekzio bat egiten dute transmititu beharreko informazioan, hasierako jakintzek beste transformazio bat jasotzen dutelarik bertan. Hurrengo pausuan, irakasleek, ikastetxeek bidalitako informazioa bakoitzaren moduan ulertu eta ikasleei transmititzen diete. Bukatzeko, ikasleek irakasleek esandako informaziotik beste selekzio bat egiten dute informazioan (ez dutelako zerbait ulertu edo ez dutelako garrantzitsutzat jo). Beraz, ikusi daitekeen moduan hasieran zegoen informaziotik azkenean ikasleek ulertu eta barneratu duten informaziora desberdintasun handia egon daiteke.

Argi dago, ariketa guztietan egon daitezkeen arazoen aurrean, irakasleek aldaketa edo bariazio batzuk sartu ditzakeela ariketa osoa edo arazoa errazteko edo zailtzeko edo jakintzaren elementu ezberdinen garapena bilatzeko. Aldaketa hauei *aldagai didaktiko* deitzen zaie. Sortutako aldaketa hauen aurrean ikasleek haien erresoluzio estrategiak aldatu beharko dituzte, sortutako arazo berriari soluzio egoki bat emateko erabili behar dituzten ezagutzak desberdinak izanez.

Adibidez, 1. mailako ikasleei poltsa batean 6 goxoki eta beste batean 4 emanda osotara zenbat dauden galdetuta, aurrezagutzak erabilita (hatzen erabilera) gai izango dira erantzun zuzena emateko. Eremu numerikoa aldagai didaktiko gisan erabil dezakegu. Poltsetan 35 eta 46 goxoki daudela esaten badiegu, egoera zailtzen dugu eta ezagutza berri baten beharra izango dute (batuketaren algoritmoa, abakoaren erabilera, kalkulagailuaren erabilera...). Adibide honetan ikasleei emango zaien baliabidea (abakoa, kalkulagailua, arkatza eta papera…) aldagai didaktiko bilakatzen dira.

### *2.4.3. Egoera didaktikoen faseak*

Brousseau-ren teoriek adierazten dutenez, egoera didaktikoetan fase edo egoera mota ezberdinak identifika daitezke.

- *Akzio egoerak* edo faseak ikasle eta inguruko elementu didaktiko batekin (materiala edo sinbolikoa) sortzen diren hasierako erlazioak dira. Modu honetan ikasleek, irakaslearen esku hartzerik gabe, arazo bati soluzio bat bilatu beharko diote haien ezagutza inplizituak erabiliaz, modu honetan ezagutza berriren bat barneratzen dutelarik.
- *Formulazio egoeretan,* ikasleen arteko talde lana ematen da, haien arteko mezu trukea ematen delarik. Horietan ikasle batek edo batzuek igorle lana izanen dute eta mezu bat sortu beharko dute beste ikasle bati edo batzuei zuzenduta. Behin mezu hau hartzaileek lortu dutenean, ulertu beharko dute eta ondoren inguru didaktikoan jasotako mezua

aurrera eraman beharko dute. Egoera hauetan ematen den helburu nagusia ikasleen arteko komunikazioa lantzea izanen da. Honetarako, ikasleek haien hizkuntza moldatu beharko dute bidalitako informazioak normalean baino gehiago zehaztuz. Ikasleen artean inguru didaktikoari buruz izaten diren esperientziak elkarbanatzen dira, modu honetan, inguru didaktiko horrekin trebatzen dabiltzalarik.

- *Baliozkotze fasean* bi ikasleren edo ikasle talderen, arteko emaitzen trukea ematen da, non ikasle bakoitzak lortutako emaitzak eta konklusioak beste ikasle edo ikasle talde batek kontsiderazioen eskuetan gelditzen diren. Bertan ikasle bakoitzak lortutako emaitzak defendatzen saiatu beharko da beste batzuen aurrean. Gainontzekoek jasotako informazioa kritikatzeko gaitasuna izanen dute entzuten dutena ongi dagoen edo gaizki dagoen defendatuz. Prozesu honetan irakaslea agertu daiteke sortzen diren konklusioen inguruko balorapenetan laguntzeko.

### *2.4.4. Instituzionalizazioa*

Azkeneko fase hau, prozesu didaktikoan ezinbestekoa da, gizarterako fenomeno garrantzitsutzat jotzen delarik. Brousseauk (1986), fase honen inguruan hurrengoa zioen, “Instituzionalizazioan, ikasleek izan ditzaketen produkzioak, jakintza kulturalekin edo zientifikoekin erlazionatzen dira, produkzio horiei estatus jakin bat emanez”. Deskripzio honen bidez, Brousseauk, erlazionatzeko zailak diren kontzeptu praktiko bat (ikasleek fase adidakikoan sortzen dituzten produkzio libreak) eta teoriko bat (jakintzak) erlazionatzen dira. Beraz esan daiteke, ikasleek fase honetan eraiki izan dituzten ezagutzak jakintza izateraino transformatu beharra dagoela.

Aipatutako bi kontzeptu hauek antzeko esanahia izan badezakete ere, ezagutzak eta jakintzak zentzu desberdina daukate fase honetan. Alde batetik, *ezagutza kontzeptuak*, hurrengo elementuek osatzen duten esanahien batura izan dezake; ikasleak prozesu osoan zehar egindako norberaren arrazonamenduak, egindako frogak, hauen emaitzen bidez egindako birformulatzeak eta hauen arteko erlazio didaktikoak. Bestaldetik, *jakintza* *kontzeptuak,* gizartean onartuak dauden errepresentazioei egiten dio erreferentzi.

Brousseauk honako fase hau deskribatu arte, askotan irakasleak, ikasleak ezagutza bereganatzeko egoeran zegoela kontsideratzen zen, baina ezagutza beraren gainean ez zuen parte hartzen.

Ikaslearen aldetik ezagutza ofizialki kontutan hartzea, eta irakaslearen bidez ikaslearen ikaskuntza lortzea, prozesu didaktikoan ezinbesteko fasea da. Errekonozimendu bikoitz horri *instituzionalizazio* izena eman zion Brousseauk.

### 2.4.5. Fenomeno Didaktikoak

Brousseauk, ezagutzaren eraikuntza osatzerakoan sortu daitezken oztopoak ikertu ondoren, zenbait efektu negatibo errepikatzen zirela ikusi eta hauek identifikatu zituen. Hauek irakaskuntza-ikaskuntza prozesuan zehar *irakasleen zenbait portaerak eta jarrerak* sortuak dira.

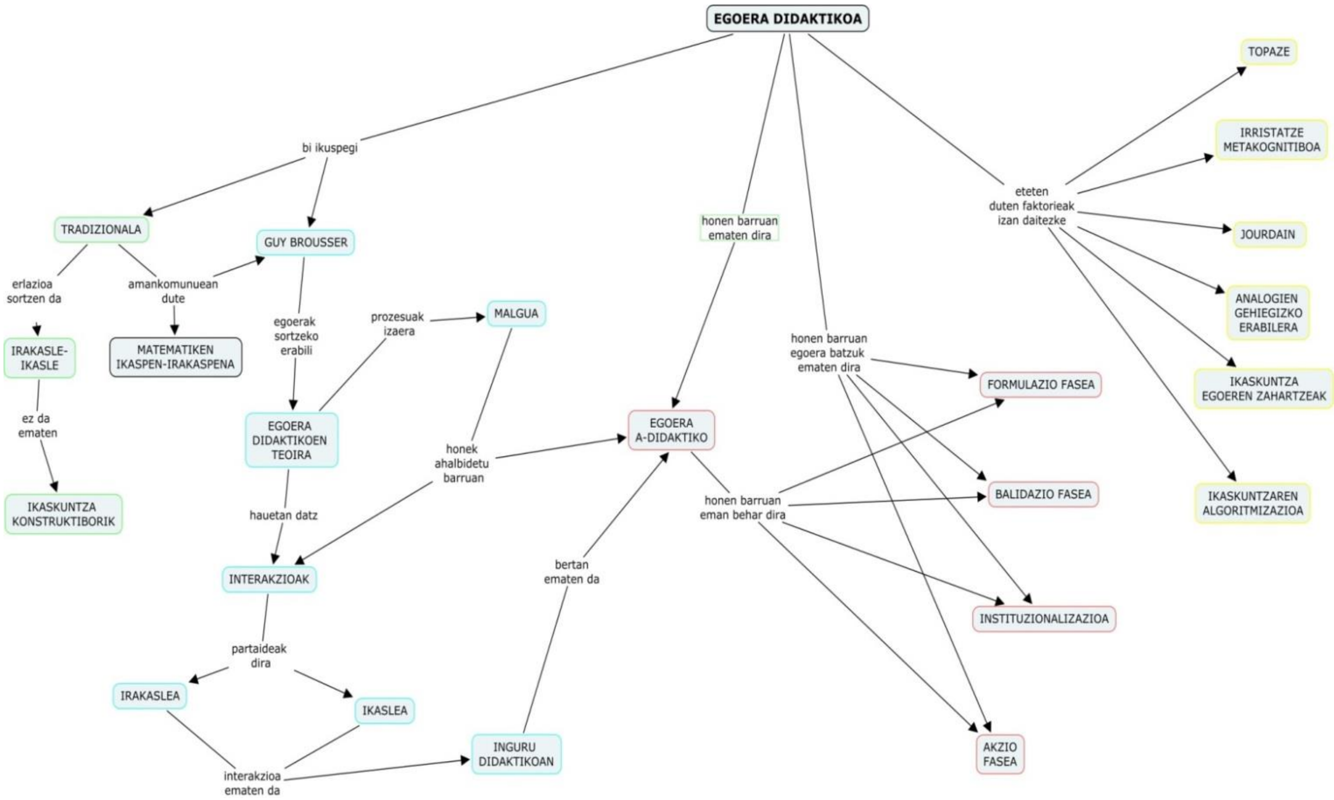
Aipatutako efektuak lau multzotan sailkatu zituen: topaze efektua, jourdain efektua, irristatze metakognitiboa eta analogiaren gehiegizko erabilera.

Brousseauren arabera, *Topaze efektua*, ikasleek buruketa bat egiten ez dakitenean irakasleak haien ezjakintasunaren aurrean hartzen duen bide oker baten ondorioa da. Honetan irakasleak ikusten duenean ikasleek ez dakitela buruketari erantzun zuzen bat ematen eta ulergarriago egin dezakeen beste azalpen bat ematen ez dakienean, bide bat zehazten die ikasleei erantzun zuzenera iristeko.

Irakasleak eskainitako bide berri honen bidez ikasleek ez dute jakintzarik eraikiko. Ikasleek soluzioaren zergatia ez dute ulertuko, hurrengoan antzeko buruketa bat jasotzerakoan ikasleengatik lortuko den emaitza hasierakoaren antzekoa izanez. Ikasleek badakite zein prozesu jarraitu behar duten (irakasleak esan duena) baina ez dute honen zergatia ulertu eta buruketak transformatze bat jasan badu ez dute buruketa egiten jakingo.

Ikasle baten erantzun oker baten aurrean irakasleak errukituta, edo ikaslearen autokontzeptua ez zapuzteagatik, ontzat ematearen ondorioa da *Jourdain efektua***.** Ondorioz, ikaslearen jokaera ezegoki bat baliozko ezagutza bezala kontsideratzen da.

Ikaskuntza bati aurre egiteko orduan, elementu edo adibide bakarrari soluzioa bilatzeren ondorioa da *Irristatze metakognitiboa*, ikertu behar den jakintzaren osotasuna sinplifikatuz. Hau da, buruketa baten aurrean, irakasleak buruketak eskaintzen duen jakintza globala lantzea alde batera utzi eta buruketa beraren emaitza aurkitzea bilakatuko da ikaskuntzaren helburu.




**15. irudia**. Broussouren Egoera Didaktikoen teoriaren mapa kontzeptuala (III. eranskinean)

Bi problema edo metodoen antzekotasunez probestea problemen ebazpena lantzeko metodo bat izan daiteke baina badu ere erabilera okerra, *Analogiaren gehiegizko erabiltzea.* Hau ematen da, adibidez, ikasleei problema bat aurkezten zaionean eta ondorengoak berdin ebazten direla esaten zaienean. Aipatutako oztopoez gain, denboran aurrera egin ahala, ikaskuntza lortzeko sortzen diren beste arazo batzuk aurkitu izan dira, hauen adibide ikaskuntza egoeren zahartzea edo ikaskuntzen algoritmizazioa. *Ikaskuntza egoeren zahartzeak* irakaslearen egoerari egiten dio erreferentzia. Honek klase berbera errepikatu beharko du behin eta berriro, gai berdinak errepikatuz. Irakasleak klase hauek berdin errepikatuz gero, hauek ikasleengan daukaten efektua okerragoa izatea bermatuko dute. Bigarrengoak berriz, *ikaskuntzaren algoritmizazioa,* buruketei soluzio bat bilatzeko helburuarekin ematen den formula erabiltzeari egiten dio erreferentzi. Askotan ikasleek badakite formula bat aplikatzearekin aski izanen dela buruketari soluzio zuzena aurkitzeko, baina ez dakite zergatik erabilia izan den formula hori edo honek esan nahi duena.

## 3. FASE EXPERIMENTALA: METODOA ETA TEKNIKAK

### 3.1. Lagina

GBL honen atal enpirikoa Iruñeko ikastetxe publiko bateko talde bateko ikasleen eta beren tutorearen laguntzaz eraman da aurrera.

- Ikastaldea: 15 ikaslez osatua, D eredukoak. 11 mutil eta 4 neska. Ikasle batek TDH sindrome diagnostikoa dauka, atzerapen kurrikular esanguratsurik gabekoa. Beste ikasle batek garun paralisiaren afektazioa, atzerapen kurrikular esanguratsurik gabekoa. Ikasle batek HH eta LHko 1. maila Iruñeko beste ikastetxe batean egin zituen. Ikasle bat 2. mailaren hasieran heldu zen ikastetxera Hego Amerikako herrialde batetik, euskara ezagutu gabe eta aurreko eskolarizazioa irregulara izan zelarik.
- Irakasle bat: 1. zikloko tutore bezala azkeneko 12 urteak eman dituena.

### 3.2 Datuen bilketaren teknikak

*3.2.1 Elkarrizketa irakasleari*

Irakasleari ikasleriaren ezaugarri orokorrez eta zikloan zehar matematika arloa lantzeko erabilitako metodologiaz galdetu zitzaion, gehienbat problemen ebazpenaren metodologiaz.

*3.2.2 Galdetegi baten pasazioa ikasleei*

2014ko maiatzaren 8an, hau da, ikasturtearen bukaeran, ikastaldeko 15 ikasleek 6 buruketaz osatutako galdetegia (ikus IV. eranskina) erantzun zuten.

Galdetegi hau Yánez, G.-k eta Bethencourt, J.-k (2004) erabilitakoaren itzulpena da. "Elaboración y validación de una prueba de conocimientos matemáticos para la Educación Primaria" izenburua duen artikuluan, bigarren mailako ikasleen ezagutza matematikoa baloratzeko proba bat proposatu eta Tenerifeko 1311 ikasleren emaitzak eskaintzen dira. Egile hauen ikerketak bi alderdi hartzen ditu kontuan, kalkulu algoritmikoa eta problemen ebazpena. GBL honetan erreplikatu dena bigarren alderdi honi dagokio.

Ikus ditzagun probaren eta probaren pasazioaren hainbat zehaztapen:

- *Probaren itzulpena*: gazteleratik proba euskaratzean aldaketa gutxi batzuk egin dira, buruketen zailtasun mailari eragiten ez dietenak.
  - Problemetan agertzen diren subjektuen izenak aldatu: D ereduan ikasten ari diren ikasleak izanik, oraindik Gazteleraren idazkera ez dute sistematikoki landu. Hau dela eta, zenbait izan aldatu dira irakurtzerakoan ortografia zailtasunak ekiditeko nahian (Carmen erabili ordez, Karmele).
  - Lexikoa moldatu: buruketa batean "pezeta"ren ordez zentimoak erabili dira eta beste batean "cochitos"en ordez margoak.
- *Probaren pasazioa:* lana haien ikasgelan proposatu zitzaien, haientzat ezaguna den kokapen batean. Talde osoak batera burutu zuen proba, 30 minutuko tartea izan zutelarik. Ikasgelan, ikasleentzat ezezaguna zen pertsona berri bat zegoenez (proba proposatu ziena), honen aurkezpena egitea beharrezkoa izan zen. Aurkezpen honetan, bertan zegoen pertsona berria nor zen eta zergatik zegoen azaltzeaz gain, jarraian egin behar zuten lanarekiko motibazio sortzeko jarraian agertzen direnen antzeko hitzak esan zitzaizkien:

  > *"Martin dut izena. Irakasle izateko ikasketak bukatzen ari naiz. Bigarren mailaren bukaeran nola ebazten dituzuen buruketak jakiteko interes handia daukat. Orri honetan 6 buruketa daude. Oso zailak ez direla uste dut baina asko pentsatu beharko duzue. Ezin duzue zuen artean hitz egin. Zalantzak baldin badituzue eskua altxatu eta hurbilduko naiz. Eutsi eta aurrera!"*

- *Problemen ezaugarriak*
  - Eremu numerikoa: erabilitako kantitateak 100 baino txikiagoak dira, zailtasun irizpide hori kontrolatuz.
  - Problemen tipologia: probaren egileen esanetan, Rileyk, Greenok eta Hellerek sortutako taxonomia hartu zuten ardatz problemen aukeraketa egiteko. Taxonomia hau bera, zabalduta, aurki dezakegu Isabel Echeniqueren (2006) lanean, GBL honetan

jadanik azalduta izan dena. Galdetegian ez dira problema aritmetiko mota guztiak azaltzen, horien aukeraketa bat baizik. Esate baterako aldaketa errazenak (A + B = x, A - B = x) eta konparazio errazena (A - B = x), baztertuak izan ziren bigarren mailako ikasleentzat zailtasun maila oso baxukoak direlakoan. 1. taulan egindako aukeraketa daukagu ikusgai.

**1. taula.** Probakarako aukeratu diren problema motak.
A, B eta C: problemak ematen dituen datuak eta x aurkitu beharreko datua.

| PROBLEMA | MOTA | ADIERAZPEN | ERAGIKETA |
|---|---|---|---|
| 1 | Konbinazioa | A + x = C | Kenketa |
| 2 | Aldaketa | x + B = C | Kenketa |
| 3 | Konparazioa | A - B = x | Kenketa |
| 4 | Aldaketa | x - B = C | Batuketa |
| 5 | Konparazoa | A + x = C | Kenketa |
| 6 | Konparazioa | x - B = C | Batuketa |

- *Frogaren zuzenketa:* problema bakoitzari 0 edo 1 puntuazioak egokitu zaizkio.
  - **0:** buruketa ez du egin, eragiketa okerra planteatu du, ez du emaitzarik lortu edota kalkulu akats larria (erantzuna "ezinezkoa" bihurtzen duena) sortu ditu.
  - **1:** eragiketa zuzena planteatu du, zuzen ebatzi du eragiketa eta kantitateari lotzen dion esapidea zuzena da.

  Zuzentzat eman da, kalkulu akatsa egonda ere, emaitza "posiblea" baldin bada. Adibidez, bigarren buruketan (x + B = C) erantzunak (x), C kopuruak baino handiago behar du izan (C>x). Ikasle batek kantitate txikiagoa ontzat emango balu egoera ez duela ulertu adieraziko luke.

3.2.3 *Kasuen azterketa*: zenbait ikaslerekin, izandako zailtasunetan sakondu nahian, banakako egoeran zenbait jarduera ezberdin burutu ziren.

- *Ikasleen aukeraketa*: problemen ebazpenean gaitasun maila apalena erakutsi zuten bi ikasleak aukeratu ziren, biek lortutako puntuazioa beheko muturrekoa zen, nabarmenki (A eta B ikasleak). Honez gain, beste ikasle bat, C ikaslea, froga bukatzeko astirik izan ez zuelako aukeratu zen (A,B eta C ikasleen frogak, VII, VIII eta IX eranskinetan ikusi daitezke).

- *Prozedura:* GBL honen marko teorikotik abiatuta eta probaren pasazioan behatutakoarekin, zailtasun hipotesi zerrenda bat osatu zen, zerrendaren hipotesi bakoitzari frogatzeko jarduera bat erantsi zitzaiolarik (2. taula*).* Zerrenda ikasleekin burututako elkarrizketen gida izan zen. Ikasle bakoitzari ez zitzaizkion jarduera guztiak proposatu, elkarrizketan zehar behatutakoarekin aukeratu zirenak baizik.

**2. taula.** Ikasleek problemen ebazpenean aurkitzen dituzten zailtasunen inguruko hipotesiak, zailtasunen eremua eta hipotesiak frogatzeko jarduerak. (V. erasnkina).

<table>
<tr><th>HIPOTESIAK</th><th>ZAILTASUNAREN EREMUA</th><th>JARDUERA</th></tr>
<tr><td>1. Ikaskideek baino denbora gehiago behar du. Hipotesia soilik 30. minututan bukatu ez duten ikasleekin dauka zentzua. Debora gehiago behar izatearen beharra arretaren faltak, egoera emozional ez egokiak, lan autonomo falta edota exekuzio mantsoak bultza dezake, besteak beste.</td><td>Exekuzio erritmoa<br>Egoera emozionala<br>Arreta<br>Lan autonomoa</td><td>1. Ikasleari beste 15 minutu eskainiko zaizkio proba buka dezan.</td></tr>
<tr><td>2. Irakurtzen baldin badaki ere, ez du buruketa irakurri edo behar bezala ez du irakurri.</td><td>Arreta<br>Lan autonomoa</td><td rowspan="2">2. Banakako egoera batean, ikasleari animoak eman eta ozenki irakurtzea eskatuko zaio.</td></tr>
<tr><td>3. Deskodifikazio mailak (irakurketa mekanikoak) ez da nahikoa ulermena lortzeko. Egoera hau irakurketaren lehenengo faseetan suerta daiteke. Ikasleak badaki irakurtzen baina deskodifikazioan arreta handia jartzen du eta akatsak egiten ditu.</td><td>Irakurketaren deskodifikazioa</td></tr>
<tr><td>4. Buruketa zuzen eta arin irakurri badu ere, ez du ulertu. Irakurketa mekanikoa zuzena da baina ez ditu ulermen estrategiak garatzen. Deskodifikatutakoaren interpretazioa ez du egiten.</td><td>Irakurmen ulermenarena</td><td>3. Ikasleari buruketa irakurriko zaio.</td></tr>
<tr><td>5. Enuntziatuan agertzen den lexikoa ez du ulertu.</td><td>Lexiko maila</td><td>4. Enuntziatuan agertzen diren hitzen esanahia banaka landuko da.</td></tr>
<tr><td>6. Enuntziatuan agertzen den hizkuntzaren egitura morfosintaktikoek eraginda ez du ulertu.</td><td>Garapen morfosintaktikoa</td><td>5. Ikasleari problema birkontatuko zaio morfosintaxia erraztuta (esaldi motzagoak eta sinpleagoak, egiturak berrantolatuta...)</td></tr>
<tr><td>7. Hizkuntzaren jabetze prozesuan atzerapen nabaria dauka. 5. eta 6. jardueretan lexikoa eta morfosintaxia azaldu arren ikaslea ez da gai buruketa egiteko, azalpen horiek ulertzeko ere gauza ez delako.</td><td>Euskara maila orokorra</td><td>6. Problema osoa bere ama hizkuntzan (gazteleraz edo beste batean beharrezkoa eta posiblea bada) irakurriko zaio.</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| 8. Ezin du problemaren egoera *eskema* mental bihurtu. | Egitura semantikoa | 7. Problemaren protagonistaren papera emango zaio inplikazio emozionala bilatuz.<br>8. Manipulatzeko materiala utziko zaio, egoera adiera dezan. |
| 9. Kantitate horiekin ezin du ez eskema mentalik sortu. Eremu numerikoa zenbat eta handiagoa, problema gero eta zailagoa suertatzen da. | Eremu numerikoa | 9. Buruketa bera zenbaki txikiagoekin planteatuko zaio (20 baino txikiagoak) eta manipulatzeko materiala utziko zaio. |

Jarduerak burutu ondoren ez badu erantzun zuzena lortzen hipotesia honako hau izango zen: ikaslearen garapen kognitiboak oraindik ez dio ahalbideratzen problemaren egitura semantikoa eskema mental bihurtzen, ez eta materiala manipulatzeko aukera izanda eta zenbaki txikiak izanda.

# 4. EMAITZAK ETA EZTABAIDA

## 4.1 Metodologia eta ikasleen problemen ebazpen gaitasun maila

Hona hemen planteatutako lehenengo galdera: *ikasleak problemen ebazpenean trebatzeko erabilitako metodologiak ondoriorik ba al du ikasleek problemen ebazpenean lortzen duten gaitasun mailan?*

Jadanik azalduta gelditu den bezala, ikasleek problemen ebazpenean daukaten gaitasun maila baloratzeko tresna bera erabili da bi lagin ezberdinekin, lehenengo kasuan euskaraz eta bigarrenean gazteleraz:

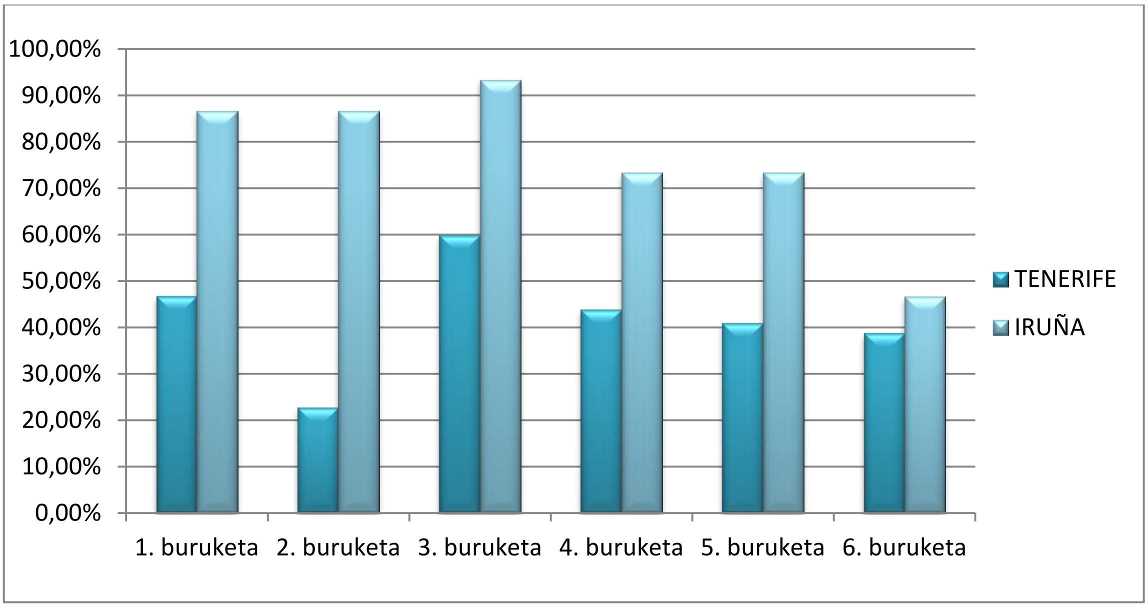
- Iruñeko ikastetxe batean 2. mailako gela bateko 15 ikaslerekin. Kasu honetan 15 ikasleek irakasle bera izan dute eta, beraz, metodologia berberarekin egin dute prozesua zikloan zehar.
- Tenerifeko 2. mailako 1311 ikasle. Ikasle hauek irlako ikastetxe ezberdinetakoak dira, beraz, prozesua metodologia anitzen bidez egin dutela pentsatzekoa da.

Ikus dezagun bi laginen emaitzak problemaz problema, erantzuna zuzena lortzen dutenaren ehunekoetan adierazita (3. taula).

**3. Taula:** probaren problemetan erantzun zuzena eman duten ikasleen portzentaiak.

| | PROBLEMA | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Tenerifeko lagina | 46.8 % | 22.7% | 59.9% | 43.9 % | 40.9 % | 38.8 % |
| Iruñeko lagina | 86.7 % | 86.7 % | 93.3 % | 76.3 % | 76.3 % | 46.7 % |

Emaitza berberak, modu grafikoago batez, 16. irudian dago ikusgai.




**16. Irudia.** Iruñeko eta Tenerifeko laginen emaitzak barra-grafikoan.

Grafikoan garbi gelditzen denez, Iruñeko laginak lortzen dituen emaitzak problema guztietan, eta modu deigarri batez, altuagoak dira. Beraz, ondorioztа daiteke *Iruñeko laginaren ikasleen problemen gaitasun maila altuagoa dela*. Hala ere, enuntziatu hau ontzat emateko, erabilitako tresna ontzat eman beharko litzateke. Gogora dezagun tresna, gaztelerazko bertsioan, balidatuta zegoela baina ez euskarazko bertsioan. Egoera honek emaitzak baldintzatzen ditu, neurri batean behinik behin.

*Iruñeko laginaren ikasleen problemen gaitasun maila altuagoa* dela dioen enuntziatua ontzat hartzen bada, honen zergatia zein den planteatu beharra dago. *Aldagai askok* eragina izan dezakete ikasleen errendimendu akademikoan, esanguratsuenak familien ezaugarriak (gurasoen maila akademikoa, maila sozio-kulturala, seme-alabekiko dauzkaten expektatiba akademikoak...) eta ikastetxearen ezaugarriak (ikasgela bakoitzeko ume kopurua, baliabide materialak eta pertsonalak, metodologia...).

Begi bistakoa denez, ikerketarako eremu zabal baten aurrean gaude baina, egin diren behaketen ondorioz, ikastalde honekin, ikastetxean erabili den metodologia aldagai bereziki esanguratsua izatearen inpresioa jaso da. GBL honetan aldagai guztien kontrola ezinezkoa izan da, hala ere hauen artean metodologia aldagaia izan da gehien kontrolatzen saiatu dena. Irakasleari egindako elkarrizketan zikloan zehar buruketen ebazpena lantzeko erabili duen *metodologia* azaltzea eskatu zitzaion. Hona hemen gaiaren inguruan jasotako informazioa:

- Ikasgelan egiten duena hainbat *formazio jardueren* ondorioz eta erakarpen pertsonalekin osatuz, "eraikiz", joan den metodoa da. Luis Peredak eta Isabel Echeniqueren ikastaroei egin zien aipamen berezia.
- Problema aritmetikoen ebazpen eta sistema hamartarra ikasleak egiten dituen bi eraikuntza dira, bien artean lotura estua dagoelarik. Bietan ikasleek ikasgelan beti eskura daukaten material ezberdinen *manipulazioa (abakoak, konteoak egiteko material ezberdinak, zenbakiak lurrean idatzita...)* funtsezkoa da.
- Ikasgelako *egoera erreal arruntak* ("egoera adidaktikoak", Brousseauren terminologian) probesten dira problema moduan aurkezteko. Horiez gain umeengandik gertu dauden "datuak" biltzera eta ikertzera konbidatzen ditu umeak, este baterako guraso edo aiton-amonen adinak.
- Lehenengo mailan (6-7 urte) ahoz eta talde handian egin zen lan handiena. Irakasleak problema aurkezten zuen, ikasleek modu manipulatiboan ebazten zuten eta irakasleak *diagrama sagitala* eta algoritmoaren bitartez ebazten zuen denen aurrean, eredua emanez. Honez gain zenbait teknika heuristikoak lantzen ziren (istoriotxoak atzetik aurrera kontatzea, egindako eraikuntza bat desegitea ahoz azaltzen zen bitartean, gauza bera beste modu batez esan...).

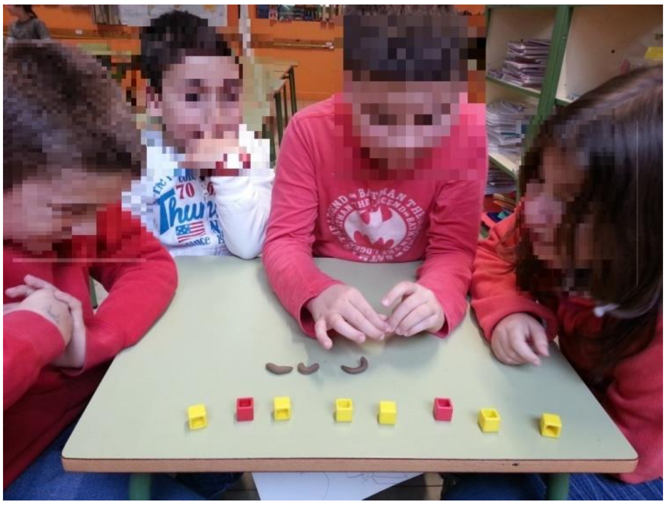
- Bigarren mailan (7 - 8 urte) bakarkako lanak edo binakakoak hartu zuen lehentasuna. Bikotekideen artean alde handirik ez egotea bilatzen da, hots, buruketen ebazpenean antzeko maila izatea.
- Bigarren mailan talde handiko lana bi egoera hauetan erabili da: problema konplexuak ebazteko (irakasleak ikasleen partaidetzarekin arbelean ebatzi) eta ahoz eta buru kalkuluaren bitartez problemak ebazteko (normalean kantitate txikiekin edo zenbaki "borobilekin").
- *Diagrama sagitalen* erabilera sistematikoa izan da. Buruketa guztietan agertu beharreko elementua. Ikasleak ez bazuen diagrama zuzena lortzen irakasleak modelo gisa egiten zuen. Lehenengo mailan ikasle gehienentzat oso abstraktua suertatzen den adierazpen grafiko mota da baina erabiltzearen poderioz eta ikasleen garapen kognitiboarekin batera oso teknika heuristiko ahaltsua izan daiteke bigarren mailaren bukaera honetan. VI. eranskinean eskaintzen den ikasle baten proban ikus daitekeen bezala, buruketa guztietan erabili dituzte proban, irakasleak abisua eman ez bazuen ere.
- *Kalkulagailua*ren erabilera ez da zigortua egon, are gehiago, bere erabilera bultzatu da, adibidez, egoera hauetan: zein eragiketa aukeratu behar zenean garbi ez zegoenean biak kalkulagailuan ebatzi eta emaitzen arabera egokiena aukeratu (kalkulagailuak berehalako erantzuna ematen du eta jardueraren haria ez da galtzen), buru-kalkuluaren bitartez egindako eragiketa frogatzeko, egoera errealek oraindik menperatzen ez duten algoritmoa eskatzen denean eta abar.
- *Talde txikiko ebazpen kolaboratiboa bolondres helduen laguntzaz* egin da bai 1. mailan baita 2.ean ere, Talde Elakarreragileen proiektuaren bitartez. Saio hauetan bolondresak 3-4 ikaslez osatutako taldetxoetan egoera didaktiko bat, Brousseauk (1986) ematen zion esanahiarekin, sortzen zuen. Horien atzean Isabel Echeniqueren (2006) zikloko ikasleentzat egokiak hartzen dituen mota ezberdineko problemak zeuden baina jolas gisan eta manipulatiboki aurkeztuak. Esate baterako, ikasleei bi kutxa aurkezten zitzaizkien. Kutxa batean zeuden elementuak ez zitzaizkien kontatzen uzten eta bestekoak bai. Pista gisan bi kutxen artean zegoen kantitatea ematen zitzaien eta "kutxa sekretuan" zenbat

egongo ote ziren galdetzen zitzaien (elkarketa problema bat non P1 ezezaguna den). Ikasleen artean eztabaida bultzatzea zen bolondresaren ardura, problema ebazteko modu ezberdinak (manipulatuz, kalkulagailua erabiliz, adierazpen grafiko ezberdinak asmatuz...). Bikotekako lanaren kasuan bikoteak homogeneoak bilatzen baziren, kasu honetan, berriz, heterogeneitatea (ikasleen maila ezberdinak) bilatzen dira. Modu honetan oso konpetenteak direnek besteei ulertarazten ahalegindu behar dira. Hain konpetenteak ez direnek bere ikaskideen ereduak dauzkate eta beren azaltzeko modua, irakaslearena ez dena. Ikasle guztientzat onurak dauzkan antolakuntza mota izan daiteke.

**17. irudia.** Gelako ikasleak lau taldeetan banatuta, jarduera ezberdinak burutzen ari dira eta talde bakoitzean bolodres bat edo bi.

**18. irudia.** Bolondresak kutxen bitartez elkarketa problema bat planteatzen.

**19. irudia.** Ikasleak elkarlanean problema ebazten.



**20. irudia.** Ikasleak elkarlanean banaketa problema ebazten.

Esan bezala, ikasleen errendimendu akademikoan aldagai asko daude, horietako bat metodologia izanik. Metodologia koherente eta sistematiko baten aurrean gaude baina bi laginen artean dagoen emaitzen aldearen azalpena metodologian dagoela esateko ez dugu datu nahikorik, beste aldagaiak ez baitira kontrolatu.

### 4.2. Ikasleen arteko gaitasun maila ezberdinak problemen ebazpenean

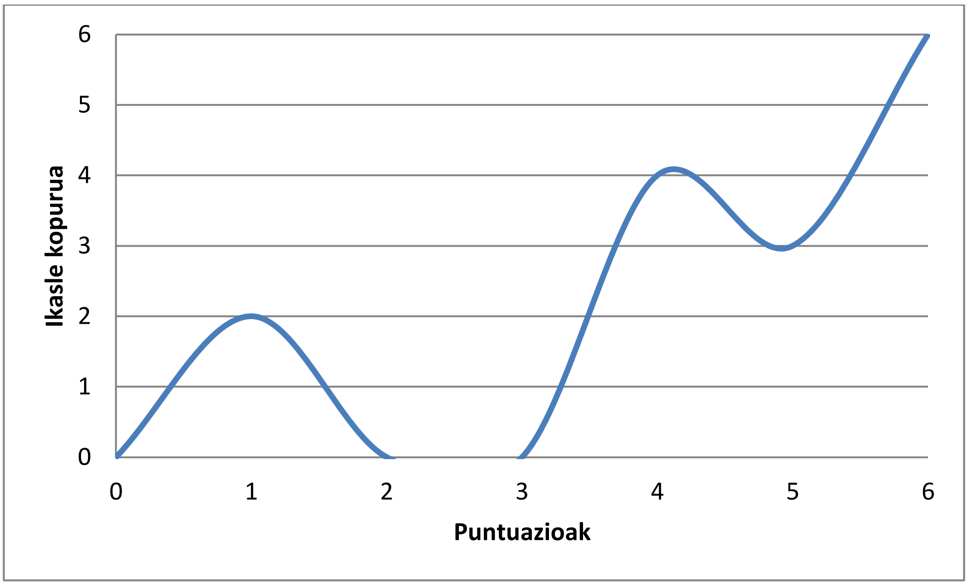
Gogora dezagun zein izan zen planteatutako bigarren galdera: *adin bereko ikasleen artean, problemen ebazpenean lortzen duten gaitasun mailan, ba al dago alde esanguratsurik?*

Galderari erantzuten saiatzeko, proban Iruñeko ikasleek lortutako emaitzetara bueltatu beharra dago. Kasu honetan ikasle bakoitzak zenbat problema ebatzi dituen ongi aztertuko dugu. 4. taulan zenbat ikasleek lortu duten puntuazio bakoitza isla da. Gogora dezagun, zuzen ebatzitako problema bakoitzari puntu bat eman zaiola eta, ondorioz, lortutako puntuazioak ikasle bakoitzak zenbat problema ebatzi dituen ongi ere adierazten duela.

**4. taula:** puntuazio bakoitza lortu duen ikasle kopurua.

| 0 puntu | Puntu 1 | 2 puntu | 3 puntu | 4 puntu | 5 puntu | 6 puntu |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 ikasle | 2 ikasle | 0 ikasle | 0 ikasle | 4 ikasle | 3 ikasle | 6 ikasle |

Hurrengo diagrama honetan (21. irudia) goiko puntuazioak ikasle askok lortzen dituztela ikusten da eta beheko puntuazioak, aldiz, bi ikaslek. Zehazki, ikasleen 60%-k burutzen ditu zuzen 5 edo 6 problema eta, beste muturrean, 13%-k problema bat bakarrik burutzen du ongi, bi edo hiru puntu lortu duen ikaslerik ez dagoela. Hots, puntuazioak muturrekoak dira; tarteko puntuazioak jasotzen duten ikaslerik ez dago.




**21. irudia.** Puntuazioen distribuzioaren kurba

Honi buruz bi aipamen:

- Garapen kognitiboari begira, adin honetako bi estadioen artean, operazio aurretiko etapa eta operazio zehatzen etaparen artean hain zuzen ere, kokatzen direla ikasleak esana dago GBL honetan. Emaitzetan, etapa horien diferentziak islatu dira hain zuzen ere. Hala ere, hurrengo puntuan garapen kognitiboen erritmo ezberdinek zein neurritan sortzen duten problemen ebazpen gaitasun mailetan ikasleen arteko aldea aztertzera hurbilpen bat egingo da.
- Lagin txikia izanik, muturreko emaitzak jasotzea probabilitate handiagokoa da. Lagin handi batean giza ezaugarri askok jarraitzen duten banaketa normala, Gaussen kurba, espero daiteke.

## 4.3 Problemen zailtasun espezifikoak

Azkenik honako galdera hau zegoen planteatua: *Problemen ebazpenean gaitasun maila apala erakusten duten ikasleek zein zailtasun espezifiko agertzen dute?*
Hiru ikasleekin egindako elkarrizketen bitartez jasotako informazioa hurrengo puntuetan laburbiltzen da.

### *4.3.1 A ikaslea*

Lehendabiziko ikaslea, zazpi urtekoa da. Urte bukaeran egiten ditu urteak eta beraz, ikaskide batzuekin urte bateko aldea dauka ia-ia adin kronologikoan. Honek bere isla izan dezake garapen kognitiboan.

Jokaera egokia dauka eskolan agertzen diren egoera desberdinetan. Hala ere, irakasleak esandakoaren arabera, arrazoitu beharreko ariketetan zailtasunak agertu ohi ditu.

Proban problema bakarra ebatzi du zuzen, 3.a hain zuzen ere. Bere proba VII. eranskinean dago ikusgai.

Buruketak egiten hasi aurretik, A ikaslea ikerlearen aurrean urduri zegoela ikusita, lehendabiziko minutuak mintzatzen jardun ziren, ikaslea lasaitu ahal izateko, eta ondoren izandako ahalmena handiagoa izateko. Ondoren, ikerleak prestatutako hipotesien arabera (ikus 2. taula, 3.3.3 puntuan) ikasleari jarduerak proposatu eta behaketa egin zuen. Gainera, ikasleak aurrera jarraitzeko motibazioa galdu zuen momentuetan, ikerleak motibatzaile papera izan zuen.

Hurrengo taulan buruketa bakoitzaren inguruan egindako jarduerak islatu dira. Ixa laukitxo batean agertzeak jarduera hori aurrera eraman dela adierazten du. Ez bada deus agertzen, pauso horren beharra ez da ikusi eta jarduera ez da burutu.

**5. taula.** A ikaslearekin burututako jarduerak buruketa bakoitzean.

| | 1. jarduera | 2. jarduera | 3. jarduera | 4. jarduera | 5. jarduera | 6. jarduera | 7. jarduera | 8. jarduera | 9. jarduera |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. buruketa *Konbinazioa* | | X | X | | | X | X | | |
| 2. buruketa *Aldaketa* | | X | X | | | X | X | | |
| 3. buruketa *Konparazioa* | | | | | | | | | |
| 4. buruketa *Aldaketa* | | X | X | | | | X | | |
| 5. buruketa *Konparazioa* | X | X | X | | X | | X | X | X |
| 6. buruketa *Konparazioa* | X | X | X | | X | | X | X | X |

A ikaslearengan behatutakoarekin hasteko, ikerlea ondoan egonda ikasleak izandako jarrera eta egoera emozionala aipatzekoa da. Lanari ekiterakoan, urduri xamar bazen ere, berehala lasaitu egin zen eta problema guztiak ongi egiteko gogo handia erakutsi zuen, akatsen bat egiteaz ohartzen bazen bere buruarekin haserretzen zelarik.

Problema mota guztietan erakusten ditu zailtasunak baina nabariagoak dira *konparaketa problemetan*. Hirugarren problema, klasekideekin proba pasatzerakoan, zuzen burutu zuen baina 5. eta 6. problemetan izan zituen zailtasunak ikusita, kasualitate hutsa izan zela pentsa daiteke. Konparazio problemen egitura semantikoa ez zuen ulertzen, hau da, norbaitek, besteak baino gehiago edo gutxiago izateak zer esan nahi duen ez zuen zuzen interpretatzen. Baliokidetzat hartzen zituen "8 gehiago dauzka" eta "8 dauzka". 5. taulan islatu den bezala, problema mota honetan (5. eta 6. problemetan) egin ziren saiakera handienak, 7 jarduera ezberdin, A ikasleak zuzen burutu zitzan eta soilik zenbaki txikiekin eta materialaren manipulazioan lagundu zitzaionean lortu zuen.

Euskaraz ongi moldatzen zela baldin bazirudien ere, gazteleraz azaldu zitzaizkion bi problema baina horrek ez zuela egoera hobetzen ikusi zen. Gainera, gaztelera erabiltzerakoan, artikulua eta izenaren genero koordinazio zailtasunak sumatu ziren ("la mapa", el mapa esan beharrean). Beranduago tutoreak emandako informazioaren arabera, umearen bi gurasoak euskaldun zaharrak direla, umearen etxeko hizkuntza euskara dela eta euskaraz gazteleraz baino hobe moldatzen dela jakin zen.

"Marierrauskin” edo “Katu botaduna” hitzak irakurtzerakoan, blokeatu egiten zen probleman, hauek nortzuk ziren ez baitzekien. Nonbait, ez du garatu estrategiarik elementu bat ulertu gabe testuingurutik informazioa ateratzeko (kasu honetan pertsona/pertsonaien izenak zirela garbi zegoen adin honetako ikasleendako) eta aurrera jarraitzeko. Izen horiek gazteleraz esanda ezagunak egin zitzaizkion eta aurrera jarraitu zuen.

Pertsonaien inguruan, aipatzekoa da ere, batzuetan bazirudiela, hauen inguruko ideia egitea kostatzen zitzaiola, pertsonaietan edo haien izenetan zentratzen zen. Zailtasun hau ekiditeko, eta inplikazio emozionala bilatzeko, bi problematan bere eta bere klasekide bat jarri ziren subjektuak (protagonistak) bezala. Horrek izenen zentzazio horretatik ateratzen laguntzen zion eta arreta problemaren edukian jartzen.

Buruketetan agertzen diren zenbakiak hogei baino handiagoak izaterakoan, batzuetan, ikaslea nahasi egiten zen. Honen aurrean, problema berdina zenbaki txikiekin planteatzerakoan, ulertzeko gaitasuna asko handitzen delarik.

Erraztasun hauek emanda, lau problematan grafiko sagitala zuzen egitea eta problemaren emaitza zuzen ematea lortu du.

Bigarren problema ez du lortu, ez modu autonomoan eta ez ikerleak eskainitako laguntza guztiaz. Problema hau aldaketa aditiboa da eta hasierako egoera asmatzea eskatzen du. Beste aldaketa aditiboa proposatu zitzaion, non galdera bukaerako egoera zen, eta erraztasun handiz burutu zuen.

Hurrengo taulan, azaldutakoaren arabera, A ikaslearen zailtasunen hipotesiak eta zailtasunen eremuak laburbiltzen dira.

**6. taula.** A ikaslearen zailtasunen hipotesiak eta zailtasunen eremuak

| **HIPOTESIAK** | **ZAILTASUNAREN EREMUA** |
|---|---|
| *Ezin du problemaren egoera eskema mental bihurtu.*<br>Aldaketa problema errazenak inkognita bukaerako egoeran dutenak dira. Konbinazioaren kasuan totala galdetzen duten problemak dira errazenak. A ikasleak hauek menperatzen ditu baina proban honelako egoera errazik ez zegoen. Inkognitak bestelako lekuetan zeuden (hasierako egoeran edo totalaren parte batean).<br>Honez gai, konparaketa problemen kasuan, laguntzarik gabe, ez zen gai ez eta egoera errazenak ebazteko (inkognita bi kantitateen arteko aldean). | Egitura semantikoa |
| *Buruketa zuzen eta arin irakurri badu ere, ez du ulertu.*<br>Irakurketa mekanikoa zuzena da baina ulermen estrategien falta dauka (izen propioak ez ulertzeak lana oztopatzen zion, testuinguruaren informazioaz baliatuz ez zen gai aurrera egiteko). | Irakurmen ulermena |
| *Kantitate horiekin ezin du ez eskema mentalik sortu.*<br>Kantitatean txikiagoak izateak lagungarri suertatu zaio zenbait kasutan. | Eremu numerikoa |

Laburtuz, *mota ezberdinetako zailtasunak* erakusten ditu A ikasleak baina esanguratsuena egoera semantikoaren hipotesiarekin dator bat, eta hau garapen kognitiboaren mugaren ondorioak dira. Proban planteatu diren egoera semantikoak oraindik konplikatuegiak dira berarentzat, ezin baitu eskema mental bihurtu. Bigarren maila batean, irakur ulermen estrategia faltaren hipotesiak eta eremu numerikoaren inguruko hipotesiak ere azaltzen du bere gaitasun maila apala problemen ebazpenean.

### 4.2.2. B ikaslea

Zortzi urte beteta ditu. Ikasle mugitua eta jarrera zaila izan dezake hainbat momentutan. Ikasleak lortutako kalifikazioak ez dira onak izaten, honen arrazoietako bat motibatua eta kontzentratua denbora tarte batean egotea asko kostatzen zaiola izaten delarik.

Honetaz gain, lana gustukoa duenean eta zentratzen denean ez du inolako arazorik aurkezten, ikasteko, ikaskideekin alderatua, ahalmen handia erakusten duelarik.

Proba bukatu zuen lehenengo ikaslea izan zen. Hamar bat minututan egin zuen. Ez zen batere saiatu, problemak irakurtzera ere ez zen iritsi. Bere hitzen arabera, “buruketak oso errazak dira, zenbakiak elkartu eta listo”. Bere proba zuzentzerakoan, argi ikusi zen problemetan agertzen ziren zenbakiak inongo zentzurik gabe algoritmoen bitartez elkartu zituela. Horietako batean, zortea tarteko, asmatu egin zuen (6. buruketa). Bere proba VIII. eranskinean ikus daiteke.

Problemak ikertzailearekin bakarkako egoeran aurkeztu zitzaizkionean jarrera aldatu zuen.

**7. taula.** B ikaslearekin burututako jarduerak buruketa bakoitzean.

| | 1. jarduera | 2. jarduera | 3. jarduera | 4. jarduera | 5. jarduera | 6. jarduera | 7. jarduera | 8. jarduera | 9. jarduera |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. buruketa *Konbinazioa* | | X | X | | | | | | |
| 2. buruketa *Aldaketa* | | X | X | | X | | | | |
| 3. buruketa *Konparazioa* | | X | X | | | | | X | X |
| 4. buruketa *Aldaketa* | | X | X | | | | | | |
| 5. buruketa *Konparazioa* | | X | X | | X | | X | | |
| 6. buruketa *Konparazioa* | | | | | | | | | |

Problemetan B ikasleak ez du ohiko zailtasun matematikorik agertu. Bakarrik lan egiterakoan, problemei ez zien behar bezalako trataera eman, honekin batera lortutako emaitzak txarrak izanik.

Nabaria izan zen buruketak bakarrik irakurtzeko hainbat zailtasun zituela. Lehendabiziz problemak irakurtzen zituenean ez zen gai izaten bertan agertzen zena prozesatzeko. Hala ere, problemak ozenki eta bi alditan irakurtzen bazituen, eta are gehiago irakurtzen bazitzaizkion, gehienetan ulertzea lortzen zuen, edo ulermenera asko hurbiltzen zen.

Horretaz gain, esan beharra dago bakarkako saioaren hasieran nahiko ongi mantendu zuela arreta baina minutu gutxi batzuk pasa ondoren zailagoa suertatu zela arreta mantenaraztea (kantatzen hasi zen, aulkiari buelta eman zion, komunera joatea eskatu zuen, orrian marrazten hasi zen...).

Bukatzeko, aipatzekoa da, aurreko ikasleari bezala, bi kantitateen arteko konparaketa problemak izan zirela zailtasun maila altuena suposatu zitzaizkionak.

Hurrengo taulan, azaldutakoaren arabera, B ikaslearen zailtasunen hipotesiak eta zailtasunen eremuak laburbiltzen dira.

**8. taula.** B ikaslearen zailtasunen hipotesiak eta zailtasunen eremuak.

| HIPOTESIAK | ZAILTASUNAREN EREMUA |
|---|---|
| Irakurtzen baldin badaki ere, *ez du buruketa irakurri* edo behar bezala ez du irakurri. | Arreta<br>Lan autonomoa |
| Buruketa zuzen eta arin irakurri badu ere, *ez du ulertu*.<br>Azaleko irakurketa egiten du, oso mekanikoa. Ulertzeko esfortzurik ez du egiten. Ez ditu ulermen estrategiak pizten. | Irakurmen ulermena |
| *Ezin du problemaren egoera eskema mental bihurtu.*<br>Hau soilik konparaketa problemetan erakutsi dituen zailtasunen hipotesia da. | Egitura semantikoa |
| *Kantitate horiekin ezin du ez eskema mentalik sortu.*<br>Hau soilik konparaketa problemetan erakutsi dituen zailtasunen hipotesia da. Zailagoak gertatzen zaizkio problema mota hauek eta eremu numerikoa beti zailtasunen aldagaia da. | Eremu numerikoa |

Laburbilduz, B ikasleak erakusten dituen zailtasunak azaltzen dituen hipotesi esanguratsuena *arreta faltarekin* eta, ondorioz, *modu autonomoan lana aurrera eramateko gaitasun faltarekin* dago erlazionatuta.

*4.2.3. C ikaslea*

Ikasle honek diskapazitate motorikoa dauka (garun paralisia) afektazio kognitiborik gabe. Eskuz idazteko moldatzen da baina ikaskideek baino erritmo motelagoan eta itxura traketsagoa lortzen du bere lanak.

**9. taula.** B ikaslearekin burututako jarduerak buruketa bakoitzean.

| | 1. jarduera | 2. jarduera | 3. jarduera | 4. jarduera | 5. jarduera | 6. jarduera | 7. jarduera | 8. jarduera | 9. jarduera |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. buruketa *Konbinazioa* | | | | | | | | | |
| 2. buruketa *Aldaketa* | | | | | | | | | |
| 3. buruketa *Konparazioa* | | | | | | | | | |
| 4. buruketa *Aldaketa* | | | | | | | | | |
| 5. buruketa *Konparazioa* | X | | | | | | | | |
| 6. buruketa *Konparazioa* | X | | | | | | | | |

Taldeak izan zituen 30 minutuak pasatu zirenean bere lana jaso zen. Lau problema zituen ebatziak, lauak zuzen. Beraz, probaren puntuazioa 4/6 izango litzateke. Bere proba IX. eranskinean agertzen da. Hau ikusi ondoren, beste saio batean, 15 minutu gehiago eskaini zitzaizkion lana bukatzeko. Gustura onartu zuen eta sei problemen ebazpen zuzena lortu zuen.

**10. taula.** C ikaslearen zailtasunen hipotesia eta zailtasunen eremua.

| HIPOTESIAK | ZAILTASUNAREN EREMUA |
|---|---|
| 1. *Ikaskideek baino denbora gehiago behar du.* | Exekuzio erritmoa |

Kasu honetan, problemen ebazpenean ezin da zailtasunez hitz egin baina zailtasun orokorrago batez bai, ebaluaketa idatziz egiten denean bere konpetentzia maila erakusten utziko ez diona. C ikasleak ez du curriculumaren beste alderdietan egokitzapenen beharrik (helburuetan, edukietan...) baina bai ebaluaketan (denbora gehiago eman, ahozko ebaluaketarekin osatu...).

## CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

A lo largo de este trabajo se ha realizado una revisión bibliográfica sobre la resolución de problemas en el primer ciclo de Educación Primaria. La selección de material ha resultado complicada dado la cantidad de publicaciones que existen relacionadas con el tema. Especialmente interesante ha resultado el acceso a artículos publicados en revistas universitarias que abordan aspectos parciales del tema, aunque por motivos de extensión no se hayan recogido toda la información consultada.

Se ha intentado que la revisión bibliográfica estuviera lo más centrada posible en el objeto de estudio, resolución de problemas aritméticos en primer ciclo de Educación Primaria, aunque también se ha utilizado material bibliográfico que aborda el tema de la resolución de problemas de manera genérica.

Al inicio de este trabajo se planteaban tres cuestiones a responder mediante un proceso empírico. Se estima que la recogida de información ha sido eficaz y la respuesta conseguida se ha considerado satisfactoria para la consecución de un Trabajo Fin de Grado. Al haberse trabajado con una muestra muy pequeña, los resultados no son generalizables pero si suficientes para contestar a las tres cuestiones planteadas en el contexto del grupo con el que se ha trabajado.

La *primera cuestión* planteaba la duda de si *existía relación entre la metodología utilizada en el aula para el trabajo sobre resolución de problemas y el nivel competencial logrado por el alumnado al final del primer ciclo*. Como se recordará se contaba con los datos de una muestra de Pamplona (15 alumnos) y una muestra de Tenerife (1311 alumnos) a las que se había aplicado la misma prueba. Los resultados alcanzados por la muestra de Pamplona mejoran claramente los conseguidos por la muestra de Tenerife. Si suponemos que la prueba tiene validez, tal y como aseguran sus autores, Yánez, G. y Bethencourt, J., se puede afirmar que los alumnos de la muestra de Pamplona son más competentes en resolución de problemas aritméticos. Son muchas las variables que pueden incidir en este rendimiento superior. La única de ellas que se ha controlado ha sido la metodología utilizada por el grupo de Pamplona. Cabe suponer que con la muestra de Tenerife, al proceder de los distintos centros de la isla, se habían utilizado metodologías diferentes.

La hipótesis de que la metodología utilizada con el grupo de Pamplona pueda obtener rendimientos altos en la competencia en resolución de problemas parece acertada pero sería necesario continuar investigando para poder confirmarla y para determinar el peso de esta variable con respecto al resto de variables (nivel cultural de las familias, implicación de estas en el trabajo académico, ratio de alumnos por aula, etc.).

La *segunda cuestión aludía a las diferencias interindividuales en cuanto al nivel competencial en resolución de problemas al final del primer ciclo*. Se deseaba saber si este nivel era homogéneo o si por el contrario era heterogéneo. Para la recogida de información para este aspecto se ha utilizado la misma prueba que en la cuestión anterior. En este caso se desconocen los resultados de la muestra de Tenerife ya que los autores del artículo citado no facilitan la distribución de puntuaciones.

En la muestra de Pamplona se ha encontrado que los alumnos y alumnas obtienen puntuaciones extremas con dos alumnos que únicamente logran resolver un problema de los seis  correctamente y 9 que consiguen resolver cinco o los seis de manera adecuada.

Se observa que la mayoría de los alumnos se sitúan en la parte alta de los resultados pero a la vez dos de ellos lo hacen en el extremo inferior. Estos resultados extremos, tan alejados de la curva normal, pueden estar provocados por el pequeño número de alumnos que componían la muestra aunque también pueden estar relacionados con el hecho de  el alumnado de este ciclo está a caballo entre dos etapas diferentes del desarrollo cognitivo según Paiget. Cabría pensar que los alumnos que no han conseguido de manera plena esquemas cognitivos como la reversibilidad o conservación de la cantidad muestren dificultades en la resolución de problemas  por no poder desarrollar representaciones mentales de las situaciones que plantean los problemas. De esta manera el salto cualitativo entre una etapa y otra se reflejaría en  estas puntuaciones agrupadas en la zona alta (alumnos que ya están en la etapa de las operaciones concretas) y aquellos que todavía no han conseguido abandonar del todo de etapa preoperacional. El gráfico de la imagen 21 refleja que no hay alumnos en la zona central de puntuaciones. Tal vez esa zona correspondería a los alumnos que están saliendo de la etapa preoperacional pero no han entrado de manera plena en la operacional.

Como se observa son varias las cuestiones que quedan abiertas. Sería necesario determinar en qué etapa se encuentran realmente los alumnos, mediante las pruebas que propone Jean Piaget para poder establecer hipótesis y contrastarlas  de manera más rigurosa.

Por último se planteaba un acercamiento al tipo de dificultades que presenta el alumnado con nivel competencial bajo en resolución de problemas. Se ha efectuado un estudio de tres casos mediante entrevistas posteriores con los alumnos A y B y proporcionando más tiempo al alumno C para la ejecución de la prueba.

En el primer caso, alumno A, encontramos que presenta diferentes dificultades pero que la principal de ellas es la imposibilidad de producir representaciones mentales de las relación semántica que le presenta el problema. Esta dificultad estaría relacionada con el desarrollo cognitivo y, volviendo a la cuestión anterior, puede ser que el alumno todavía no haya superado la etapa preoperacional.

En el caso del alumno B, el tipo de dificultades que presenta no son específicas de la resolución de problemas sino que parecen estar más  en relación con dificultades atencionales y de trabajo autónomo.

Por último, el alumno C presenta una discapacidad motórica que le lleva a un ritmo de ejecución lento. No concluyó la prueba en el tiempo determinado (30 minutos)  pero sí lo hizo, y de manera satisfactoria, proporcionándole 15 minutos extras.

## ERREFERENTZIAK


24/2007 FORU DEKRETUA, martxoaren 19koa, Nafarroako Foru Komunitateko Lehen Hezkuntzako irakaskuntzarako curriculuma ezartzen duena.

Bransford, J.; & Stein, B. (1897). *Solución ideal de problemas. Guía para mejor aprender a pensar, aprender y crea*r. Barcelona: Labor.

Brousseau, G. (1999). *Educación y Didáctica de las matemáticas.* Mexico: Educacion Matemática.

Brousseau, G. (2004). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas.* Buenos Aires: Paidós.

Cañal, P.; Pozuelos, F. & Travé, G. (2003). Aportaciones del Proyecto Curricular Investigando Nuestro Mundo (6-12) al cambio en la Educación Primaria. Investigación en la Escuela, 51, 5-13 [Eskuragarri (2014/05/12) http://www.investigacionenlaescuela.es/articulos/51/R51_1.pdf]

Carriedo, N., Mariscal, S., Gimenez, M., & Corral, A. (2010). *El desarrollo psicológico a lo largo de la vida.* Madrid: Mc Graw Hill.

Cockroft, W.H (1995). Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Echenique Urdiain, I. (2006). *Matemáticas. Resolución de problemas. Educación Primaria.* Pamplona: Fondo de Publicaciones del Gobierno de Navarra.

Galilei, Galileo (1632). *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico e Coperniciano*. Florencia: Gio. Batista Landini

Garrett, R. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de Ciencias. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 224-230, 6 (3) [Eskuragarri (2014/04/21) http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/51098/92967]*

Gil, N., Blanco, L., & Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolucion de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 551-569, 340. [Eskuragai (2014/04/25) http://www.revistaeducacion.mec.es/re340/re340_20.pdf]

Gutiérez, A. (1991). Área de conocimiento: Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Síntesis.

de Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona: Labor.

Higginson, W. (1980). *On the foundations of mathematics education*. For the Learning of Mathematicas. Quebec: Publishing association.

Klaudio Harluxet Fundazioa (2003) Hiztegi entziklopedikoa. (1. edizioa). [Eskuragai (2014/04/27) http://www1.euskadi.net/harluxet/]

Lasa, A. (2010). MBS eskema [eskuragarri (2014/05/08) http://prezi.com/fewr9_w8xxut/mbs-eskema/]

Mason, J., Burton, L., & Stanecy, K. (1989). *Pensar matematicamente.* Barcelona: Labor-M.E.C.

McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes and emotions: New views of affect in mathematics learning. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving: A new perspective (pp. 245-258). London: Springer-Verlag.

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* Mexico: Trillas.

Riley, M., Greeno, J.G. y Heller, J.I. (1983). Development of children´s problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.) The development of mathematical thinking (pages. 153-196). Nueva York: academic Press.

de la Rosa Sánchez, J. (2007). Didáctica para la resolución de problemas. Junta de Andalucia. [eskuragarri (2014/05/12) http://www.juntadeandalucia.es/averroes/]

Schoenfel, A. (1992). Learning to think *Mathematicaly: problem solving.* Metacognition and sense making in mathematics. [Eskuragarri (2014/04/18) http://gse.berkeley.edu/sites/default/files/users/alan-h.-schoenfeld/Schoenfeld_1992%20Learning%20to%20Think%20Mathematically.pdf]

Wigner, E. (1960). The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13 (1)

Yánez, G & Bethencourt J (2004). Elaboración y validación de una prueba de conocimientos matemáticos para la Educación Primaria. *Apuntes de Psicología*. 267-275, 22 (2). [Eskuragarri (2014/05/12) http://www.apuntesdepsicologia.es/index.php/revista/article/viewFile/55/57]

Zaldibar, F. (2001). La conjetura de Fermat. *Miscelánea matemática* 25-42, 34. [Eskuragarri (2014/05/12) en http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/zaldivar.pdf]

## IRUDIAK ETA TAULAK


**1. irudia.** Tetraedro didáctico de Higginson (1980). 4. orrialdea

**2. irudia.** Ikasleei zuzendutako problemak - buruketa liburuxkak 9. orrialdea

**3. Irudia.** Isabel Echeniquek proposatutako problemen sailkapena 13.orrialdea

**4. irudia.** Isabel Echeniqueren problema aritmetikoen sailkapena biltzen duen eskema. 17. orrialdea

**5. irudia.** Schoenfeldek, problema matematiko baten aurrean eragina daukaten. 23. orrialdea

**6. irudia.** Transmisio ereduaren eskema 30. orrialdea

**7. irudia.** Transmisio ereduan informazio transmitzeko ematen den ibilidea. 31. orrialdea

**8. irudia.** Bi partaideen arteko elkartrukea ikaskuntza-irakaskuntza prozesuan. 33. orrialdea

**9. irudia.** Eredu sistemikoaren arabera, ikaslearen inguruko aspektu guztiek sistema unitario bat sortzen dute. 35. orrialdea

**10. irudia.** MBS eskemaren faseak, UPNAko irakaslea den Aitzol Lasak egindakoa (http://prezi.com/fewr9_w8xxut/mbs-eskema) 36. orrialdea

**11. irudia.** Miguel de Guzmanek problemen ebazpenean ezberdintzen dituen 4 faseak. 38. orrialdea

**12. irudia.** Elkarketa buruketa baten diagrama sagitala, non P1=5, P2=7 eta x inkognita den. 40. orrialdea

**13. irudia.** Egoera didaktiko kontzeptuaren bi esanahi ezberdinak. 41. orrialdea

**14. irudia.** Maila ezberdinetan ematen den informazio galera 43. orrialdea

**15. irudia.** Broussouren Egoera Didaktikoen teoriaren mapa kontzeptuala 47. orrialdea

**16. Irudia.** Iruñeko eta Tenerifeko laginen emaitzak barra-grafikoan. 53. orrialdea

**17. irudia.** Gelako ikasleak lau taldeetan banatuta, jarduera 56. orrialdea ezberdinak burutzen ari dira eta talde bakoitzean bolondres bat edo bi.

**18. irudia.** Bolondresak kutxen bitartez elkarketa problema bat planteatzen. 56. orrialdea

**19. irudia.** Ikasleak elkarlanean problema ebazten. 57. orrialdea

**20. irudia.** Ikasleak elkarlanean banaketa problema ebazten. 57. orrialdea

**21. irudia.** Puntuazioen distribuzioaren kurba. 58. orrialdea

**1. taula.** Probakarako aukeratu diren problema motak. A, B eta C: problemak ematen dituen datuak eta x aurkitu beharreko datua. 50. orrialdea

**2. taula.** Ikasleek problemen ebazpenean aurkitzen dituzten zailtasunen inguruko hipotesiak, zailtasunen eremua eta hipotesiak frogatzeko jarduerak. 51. orrialdea

**3. taula.** Probaren problemetan erantzun zuzena eman duten ikasleen portzentaiak. 52. orrialdea

**4. taula.** Puntuazio bakoitza lortu duen ikasle kopurua. 57. orrialdea

**5. taula.** A ikaslearekin burututako jarduerak buruketa bakoitzean. 60. orrialdea

**6. taula.** A ikaslearen zailtasunen hipotesiak eta zailtasunen eremuak. 62. orrialdea

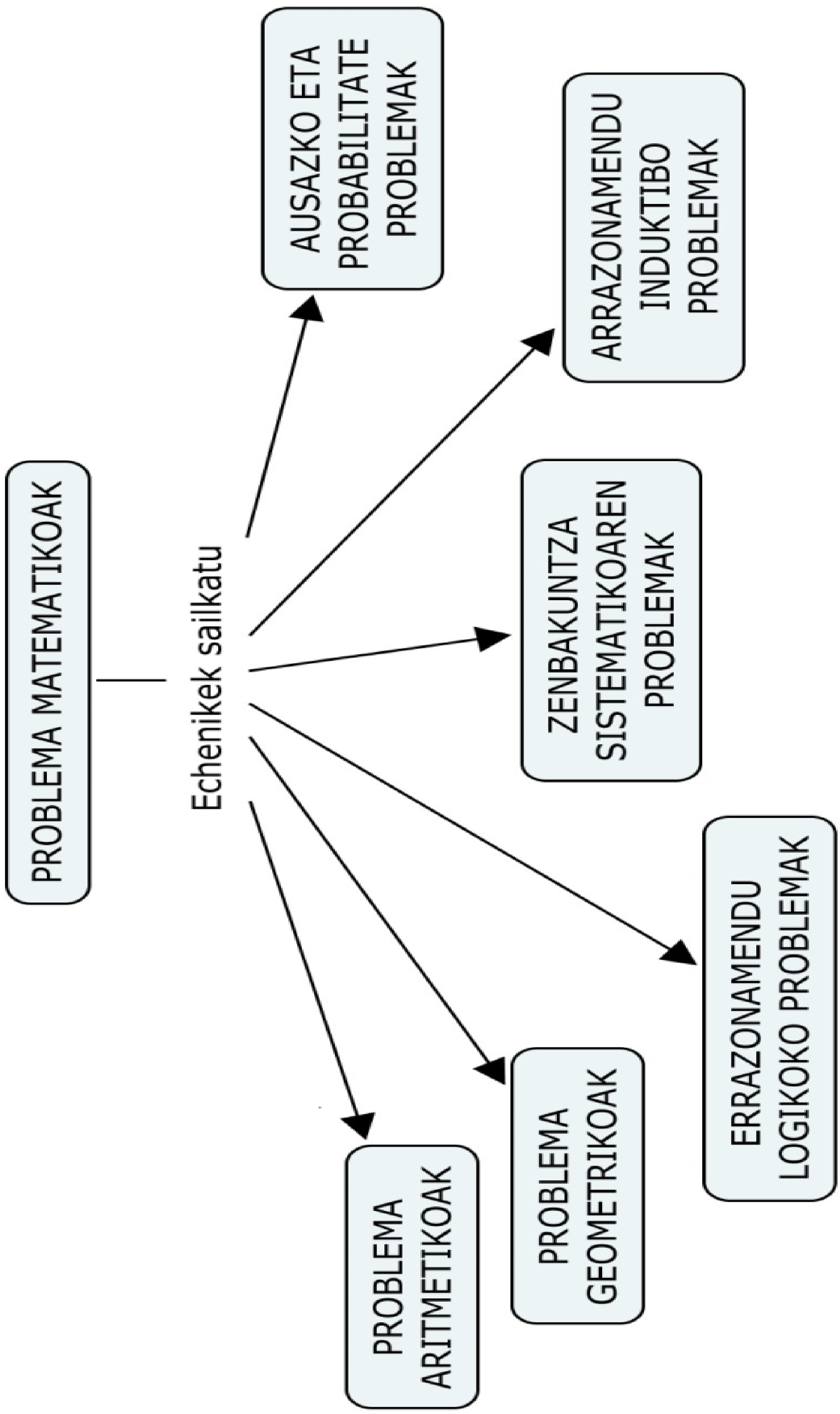
**7. taula.** B ikaslearekin burututako jarduerak buruketa bakoitzean. 63. orrialdea

**8. taula.** B ikaslearen zailtasunen hipotesiak eta zailtasunen eremuak. 64. orrialdea

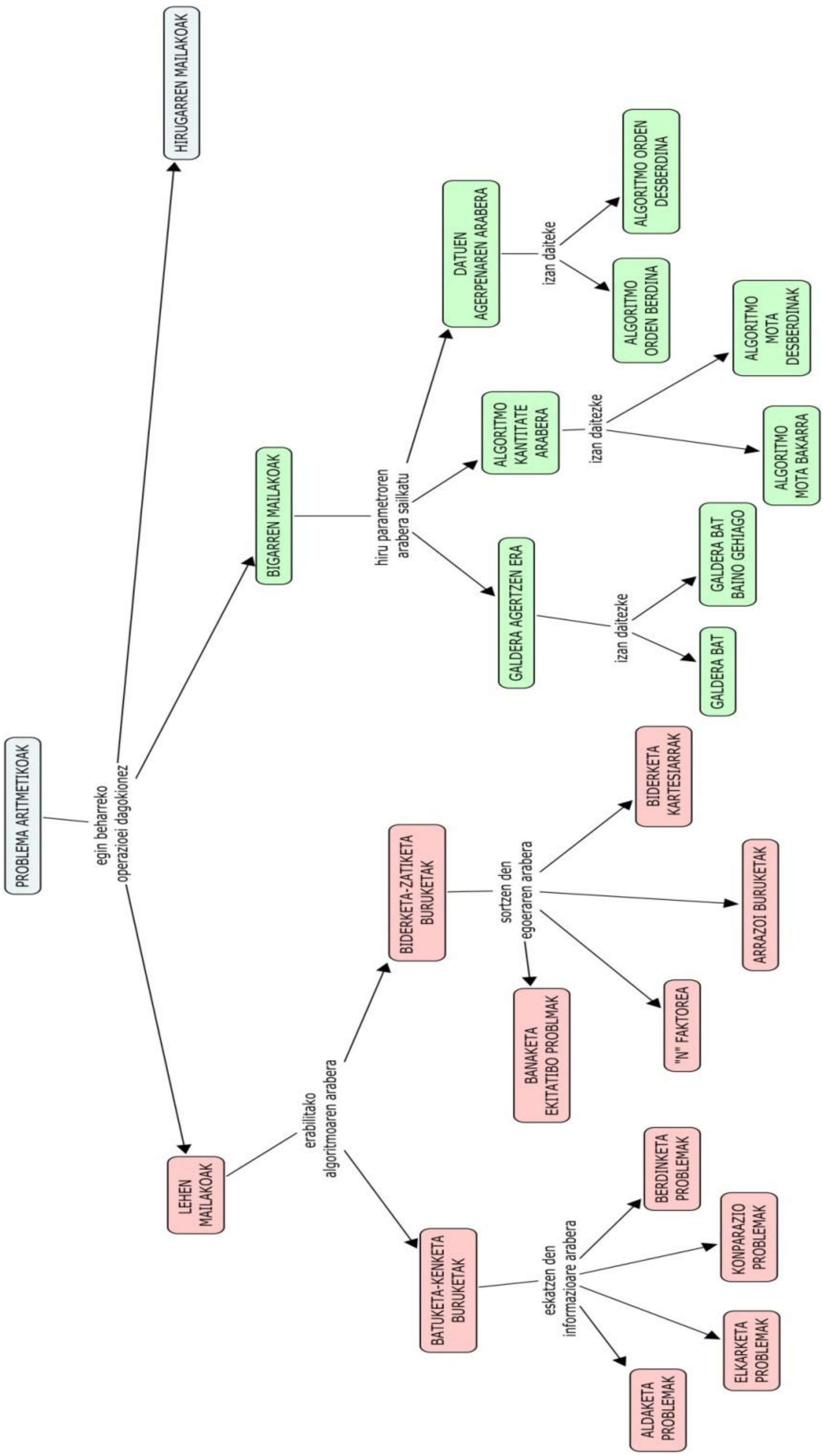
**9. taula.** B ikaslearekin burututako jarduerak buruketa bakoitzean. 65. orrialdea

**10. taula.** C ikaslearen zailtasunen hipotesia eta zailtasunen eremua. 85. orrialdea

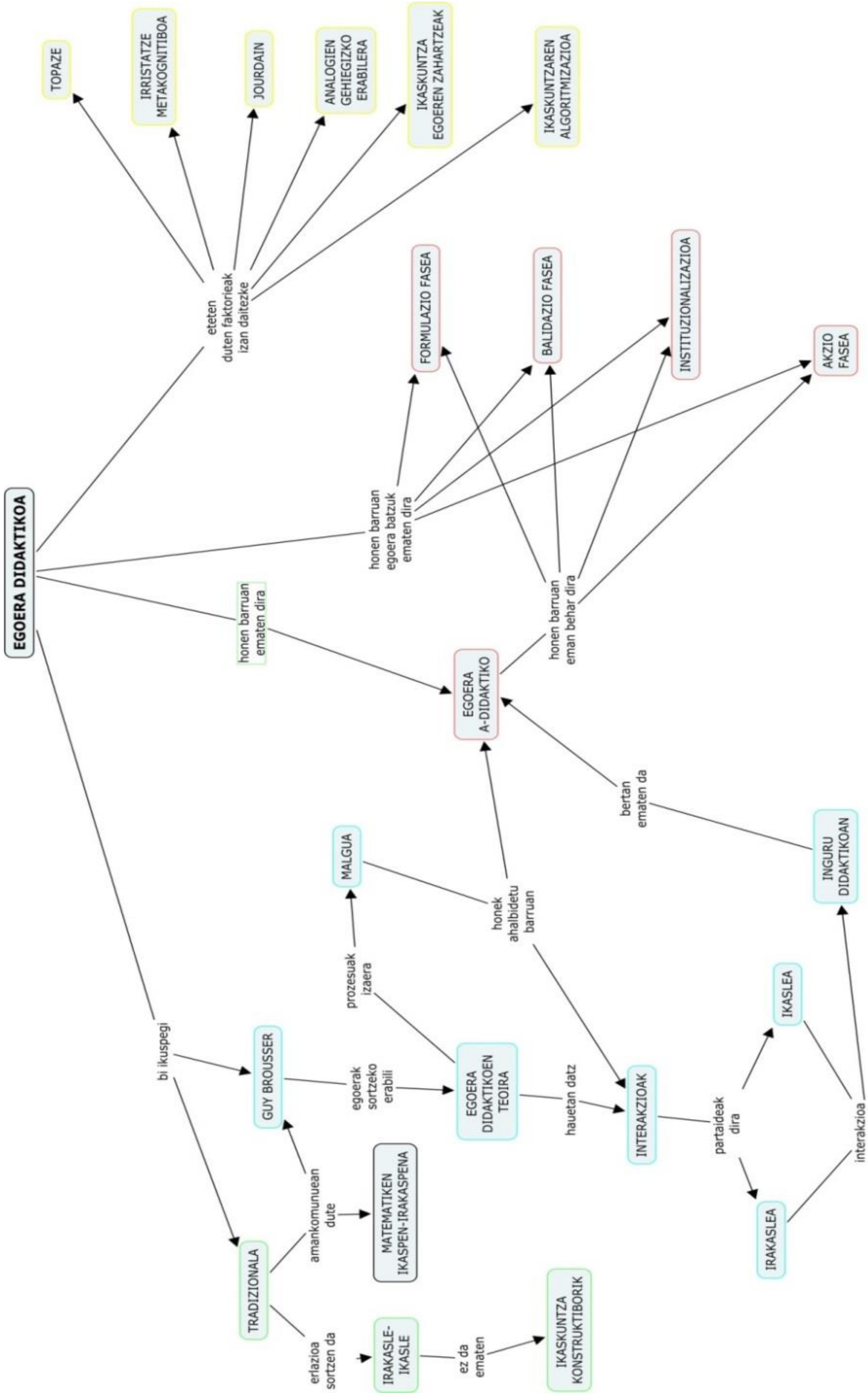
**I. ERANSKINA: . Isabel Echeniquek proposatutako problemen sailkapen**



**II. ERANSKINA:** Isabel Echeniqueren problema aritmetikoen sailkapena biltzen duen eskema.



**III ERANSKINA:** Broussouren Egoera Didaktikoen teoriaren mapa kontzeptuala.



**IV. ERANSKINA:** Probaren problemak

1. Katu botadunak eta Marierrauskinek elkarren artean 85 gozoki dituzte. Katu botadunak 34 goxoki ditu. Zenbat goxoki ditu Marierreuskinek?

2. Jonek margo batzuk zituen. Mirenek 28 margo oparitu zizkion. Orain Jonek 40 margo dauzka. Zenbat margo zeuzkan Jonek hasieran?

3. Karmelek 53 kromo dauzka. Luisek Karmelek baino 32 kromo gutxiago dauzka. Zenbat kromo dauzka Luisek?

4. Txanogorritxok lore batzuk zeuzkan. Ondoren, 36 lore eman zizkion amonari. Orain Txanogorritxok 48 lore dauzka. Zenbat lore zeuzkan Txanogorritxok hasieran?

5. Edurnezurik 64 sagar dauzka. Berak ipotxek baino 23 sagar gehiago dauzka. Zenbat sagar dauzkate ipotxek?

6. Gorkak 72 zentimo dauzka. Berak Mikelek baino 26 zentimo gutxiago dauzka. Zenbat zentimo dauzka Mikelek?

**V. ERANSKINA:** problemen ebazpenen zailtasunen inguruko hipotesiak eta hauek frogatzeko jarduerak**.**

| **HIPOTESIAK** | **ZAILTASUNAREN EREMUA** | **JARDUERA** |
|---|---|---|
| 1. *Ikaskideek baino denbora gehiago behar du.* Hipotesia soilik 30. minututan bukatu ez duten ikasleekin dauka zentzua. Debora gehiago behar izatearen beharra arretaren faltak, egoera emozional ez egokiak, lan autonomo falta edota exekuzio mantsoak bultza dezake, besteak beste. | Exekuzio erritmoa<br>Egoera emozionala<br>Arreta<br>Lan autonomoa | 1. Ikasleari beste 15 minutu eskainiko zaizkio proba buka dezan. |
| 2. Irakurtzen baldin badaki ere, *ez du buruketa irakurri* edo behar bezala ez du irakurri. | Arreta<br>Lan autonomoa | 2. Banakako egoera batean, ikasleari animoak eman eta ozenki irakurtzea eskatuko zaio. |
| 3. *Dekodifikazio mailak* (irakurketa mekanikoak) ez da nahikoa ulermena lortzeko. Egoera hau irakurketaren lehenengo faseetan suerta daiteke. Ikasleak badaki irakurtzen baina dekodifikazioan arreta handia jartzen du eta akatsak egiten ditu. | Irakurketaren dekodifikazioa | |
| 4. Buruketa zuzen eta arin irakurri badu ere, *ez du ulertu*. Irakurketa mekanikoa zuzena da baina ez ditu ulermen estrategiak garatzen. Dekodifikatutakoaren interpretazioa ez du egiten. | Irakurmen ulermenarena | 3. Ikasleari buruketa irakurriko zaio. |
| 5. Enuntziatuan agertzen den *lexikoa* ez du ulertu. | Lexiko maila | 4. Enuntziatuan agertzen diren hitzen esanahia |
| 6. Enuntziatuan agertzen den hizkuntzaren *egitura morfosintaktikoek* eraginda ez du ulertu. | Garapen morfosintaktikoa | 5. Ikasleari problema birkontatuko zaio morfosintaxia erraztuta |

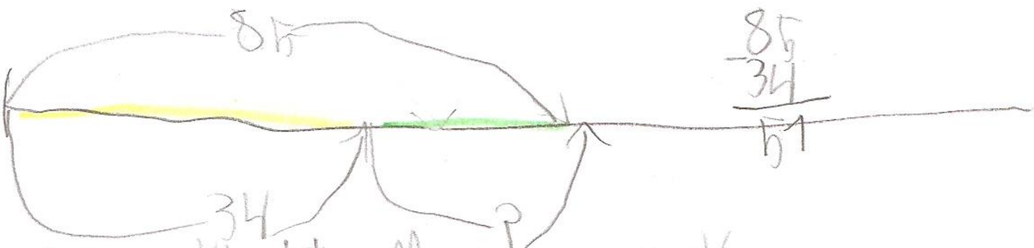
| | | |
|---|---|---|
| 7. Euskeraren jabetze prozesuan atzerapen nabaria dauka. 5. eta 6. jardueretan lexikoa eta morfosintaxia azaldu arren ikaslea ez da gai buruketa egiteko, azalpen horiek ulertzeko ere gauza ez delako. | Euskara maila orokorra | 6. Problema osoa bere ama hizkuntzan (gazteleraz edo beste batean beharrrezkoa eta posiblea bada) irakurriko zaio. |
| 8. Ezin du problemaren egoera *eskema* mental bihurtu. | Egitura semantikoa | 7. Problemaren protagonistaren papera emango zaio inplikazio emozionala bilatuz. |
| 9. Kantitate horiekin ezin du ez eskema mentalik sortu. Eremu numerikoa zenbat eta handiagoa, problema gero eta zailagoa suertatzen da. | Eremu numerikoa | 9. Buruketa bera, zenbaki txikiagoekin planteatuko zaio (20 baino txikiagoak) eta manipulatzeko materiala utziko zaio. |

Jarduerak burutu ondoren ez badu erantzun zuzena lortzen hipotesia honako hau izango zen: ikaslearen garapen kognitiboak oraindik ez dio ahalbideratzen problemaren egitura semantikoa eskema mental bihurtzen, ez eta materiala manipulatzeko aukera izanda eta zenbaki txikiak izanda.

**VI. ERANSKINA:** Ikasle baten proba (poblema guztiak zuzen burutuak).

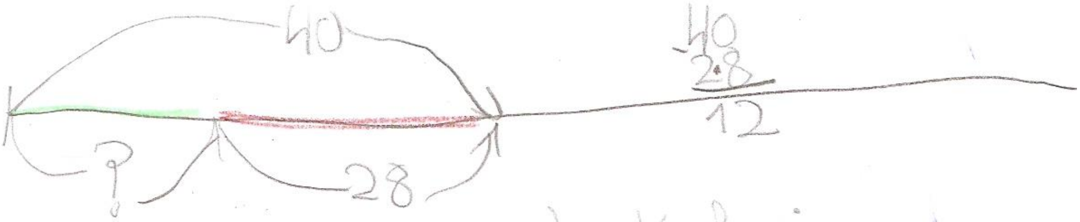
## PROBLEMAK

1. Katu botadunak eta Marierrauskinek elkarren artean 85 gozoki dituzte. Katu botadunak 34 goxoki ditu. Zenbat goxoki ditu Marierreuskinek?



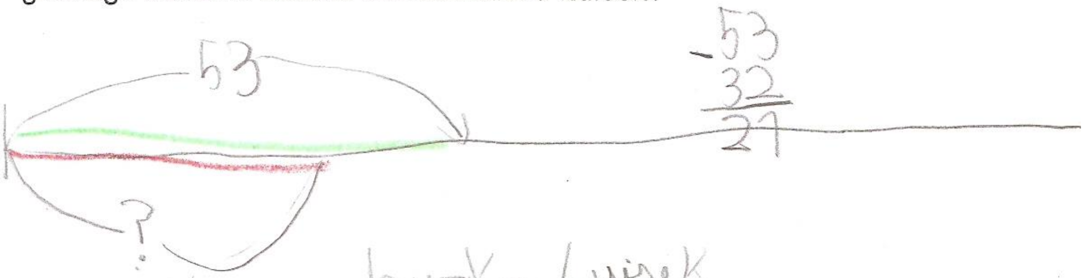

51 goxoki ditu Marierreuskinek

2. Jonek margo batzuk zituen. Mirenek  28 margo oparitu zizkion. Orain Jonek 40 margo dauzka. Zenbat margo zeuzkan Jonek hasieran?




12 margo zeukan Jonek hasieran

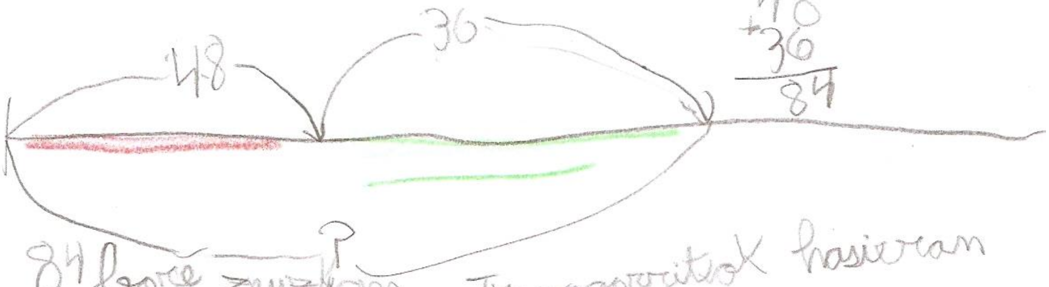
3. Karmelek 53 kromo dauzka.  Luisek Karmelek baino 32 kromo gutxiago dauzka. Zenbat kromo dauzka Luisek?




21 kromo dauzka Luisek

4. Txanogorritxok lore batzuk zeuzkan. Ondoren, 36 lore eman zizkion amonari. Orain Txanogorritxok 48 lore dauzka. Zenbat lore zeuzkan Txanogorritxok hasieran?

$$\begin{array}{r} 48 \\ +36 \\ \hline 84 \end{array}$$




84 lore zeuzkan Txanogorritxok hasieran

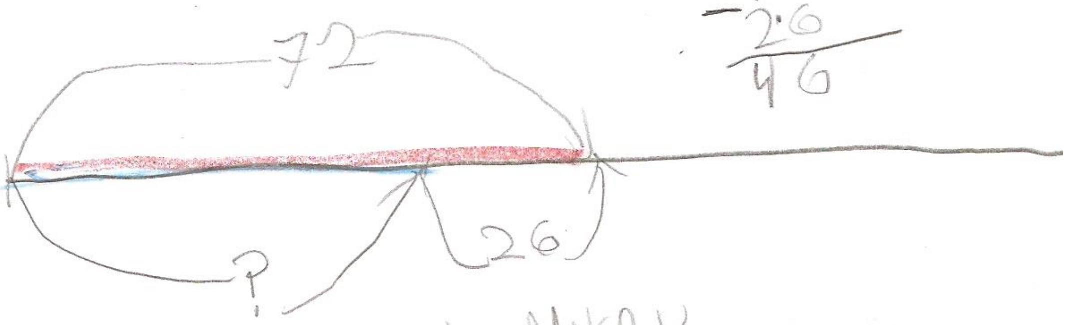
5. Edurnezurik 64 sagar dauzka. Berak ipotxek baino 23 sagar gehiago dauzka. Zenbat sagar dauzkate ipotxek?

$$\begin{array}{r} 64 \\ -23 \\ \hline 41 \end{array}$$


41 sagar dauzkate ipotxek

6. Gorkak 72 zentimo dauzka. Berak Mikelek baino 26 zentimo gutxiago dauzka. Zenbat zentimo dauzka Mikelek?

$$\begin{array}{r} 72 \\ -26 \\ \hline 46 \end{array}$$




46 zentimo dauzka Mikelek

**VII. ERANSKINA:** A ikaslearen proba

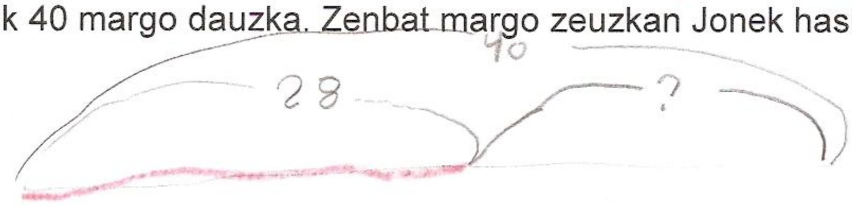
# PROBLEMAK

1. Katu botadunak eta Marierrauskinek elkarren artean 85 gozoki dituzte. Katu botadunak 34 goxoki ditu. Zenbat goxoki ditu Marierreuskinek?


85
34
119

119 gozoki ditu Marierreuskinek

2. Jonek margo batzuk zituen. Mirenek 28 margo oparitu zizkion. Orain Jonek 40 margo dauzka. Zenbat margo zeuzkan Jonek hasieran?



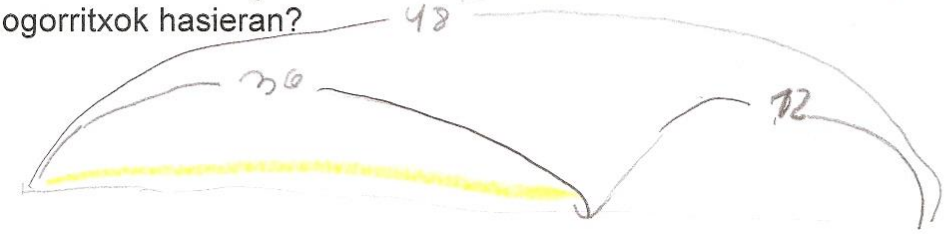

40 margo zeuzkan Jonek hasieran

3. Karmelek 53 kromo dauzka. Luisek Karmelek baino 32 kromo gutxiago dauzka. Zenbat kromo dauzka Luisek?


21 kromo dauzka Lusek

53
- 32
21

4. Txanogorritxok lore batzuk zeuzkan. Ondoren, 36 lore eman zizkion amonari. Orain Txanogorritxok 48 lore dauzka. Zenbat lore zeuzkan Txanogorritxok hasieran?




48 lore zeuzkan Txanogorritxo

5. Edurnezurik 64 sagar dauzka. Berak ipotxek baino 23 sagar gehiago dauzka. Zenbat sagar dauzkate ipotxek?


+ 64
23
87

87 sagar dauzkate ipotxek

6. Gorkak 72 zentimo dauzka. Berak Mikelek baino 26 zentimo gutxiago dauzka. Zenbat zentimo dauzka Mikelek?


72
− 26
54

54 zentimo dauzka Mikelek

**VIII. ERANSKINA:** B ikaslearen proba

## PROBLEMAK

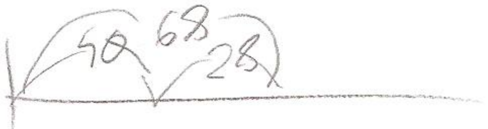
1. Katu botadunak eta Marierrauskinek elkarren artean 85 gozoki dituzte. Katu botadunak 34 goxoki ditu. Zenbat goxoki ditu Marierreuskinek?


marierreuskinek

$$\begin{array}{r} 85 \\ +34 \\ \hline 119 \end{array}$$

119 goxoki ditu

2. Jonek margo batzuk zituen. Mirenek 28 margo oparitu zizkion. Orain Jonek 40 margo dauzka. Zenbat margo zeuzkan Jonek hasieran?




$$\begin{array}{r} 40 \\ +28 \\ \hline 68 \end{array}$$

168 marga zdaka Jonek hasieran

3. Karmelek 53 kromo dauzka. Luisek Karmelek baino 32 kromo gutxiago dauzka. Zenbat kromo dauzka Luisek?


$$\begin{array}{r} 53 \\ +32 \\ \hline 86 \end{array}$$

86 kromo daurka Luisek

4. Txanogorritxok lore batzuk zeuzkan. Ondoren, 36 lore eman zizkion amonari. Orain Txanogorritxok 48 lore dauzka. Zenbat lore zeuzkan Txanogorritxok hasieran?


$$\begin{array}{r} 48 \\ -36 \\ \hline 12 \end{array}$$

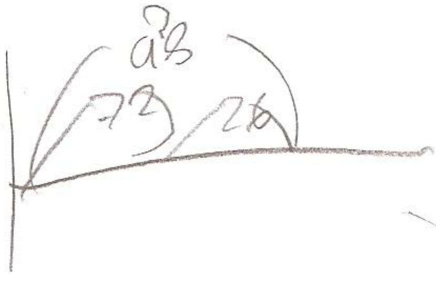
12 lore dauzka orain

5. Edurnezurik 64 sagar dauzka. Berak ipotxek baino 23 sagar gehiago dauzka. Zenbat sagar dauzkate ipotxek?


$$\begin{array}{r} 64 \\ +23 \\ \hline 87 \end{array}$$

87 sagar dazkate ipotxek

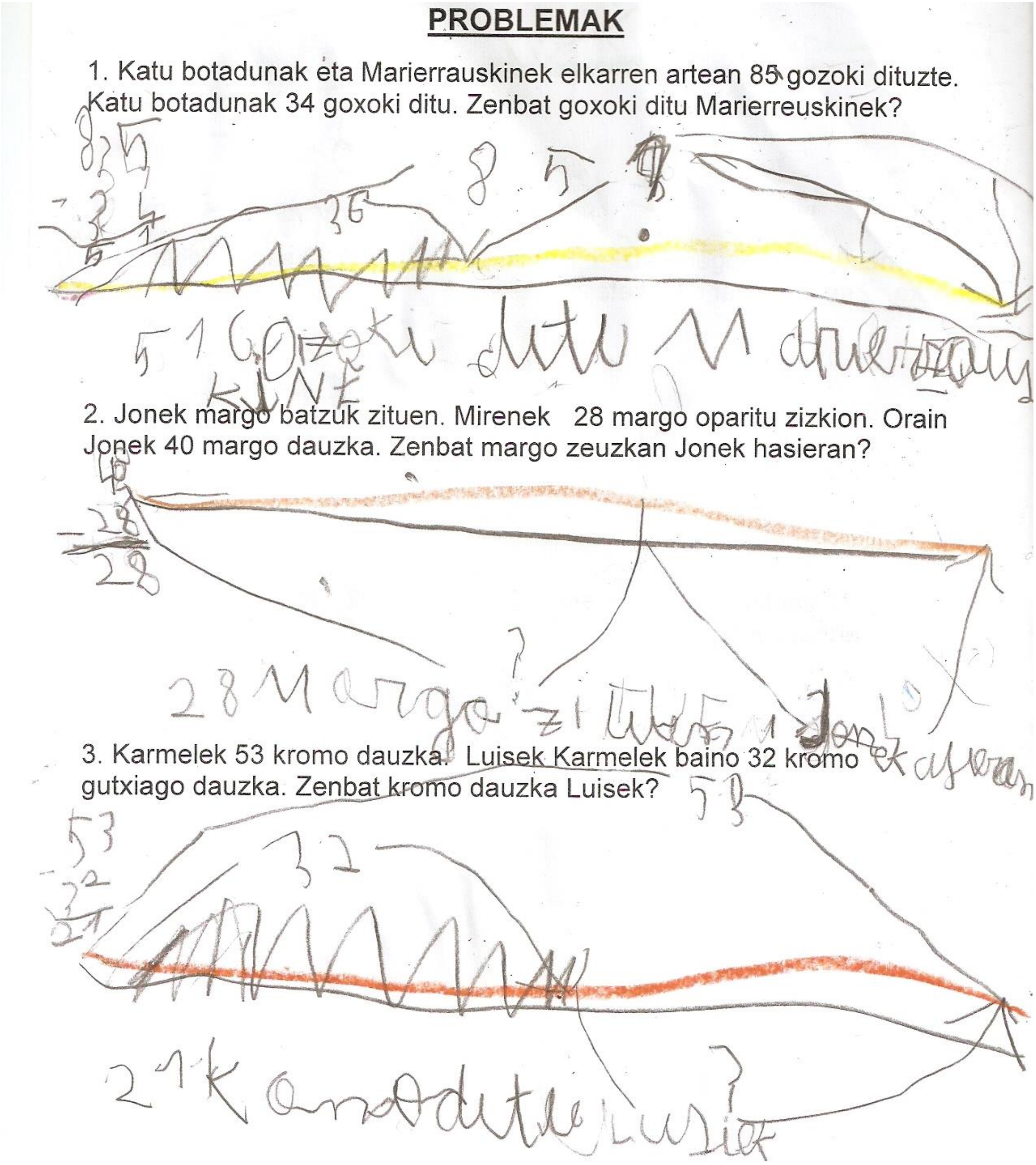
6. Gorkak 72 zentimo dauzka. Berak Mikelek baino 26 zentimo gutxiago dauzka. Zenbat zentimo dauzka Mikelek?




$$\begin{array}{r} 72 \\ +26 \\ \hline 98 \end{array}$$

98 zentimo dauzka Mikele

**IX. ERANSKINA:** C ikaslearen proba



## PROBLEMAK

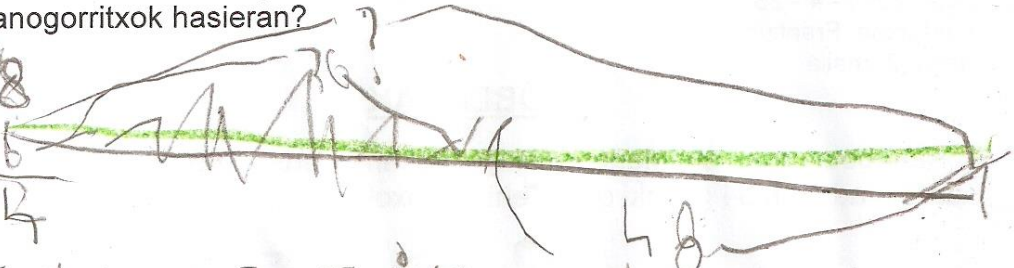
1. Katu botadunak eta Marierrauskinek elkarren artean 85 gozoki dituzte. Katu botadunak 34 goxoki ditu. Zenbat goxoki ditu Marierreuskinek?

2. Jonek margo batzuk zituen. Mirenek 28 margo oparitu zizkion. Orain Jonek 40 margo dauzka. Zenbat margo zeuzkan Jonek hasieran?

3. Karmelek 53 kromo dauzka. Luisek Karmelek baino 32 kromo gutxiago dauzka. Zenbat kromo dauzka Luisek?

4. Txanogorritxok lore batzuk zeuzkan. Ondoren, 36 lore eman zizkion amonari. Orain Txanogorritxok 48 lore dauzka. Zenbat lore zeuzkan Txanogorritxok hasieran?

$$\begin{array}{r} 48 \\ +\ 36 \\ \hline 84 \end{array}$$




84 Lore Zituen Txonagorritxo asieran

5. Edurnezurik 64 sagar dauzka. Berak ipotxek baino 23 sagar gehiago dauzka. Zenbat sagar dauzkate ipotxek?

6. Gorkak 72 zentimo dauzka. Berak Mikelek baino 26 zentimo gutxiago dauzka. Zenbat zentimo dauzka Mikelek?