

MATEMÁTICAS

Jon Urtats PEREDA EUSA

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA
ENSEÑANZA DEL ALGORITMO DE
RESTAS

TFG 2014

upna
Universidad
Pública de Navarra
Nafarroako
Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Grado en Maestro de Educación Primaria

Grado en Maestro en Educación Primaria
Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Trabajo Fin de Grado

***PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA
DEL ALGORITMO DE LA RESTA***

Jon Urtats PEREDA EUSA

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y SOCIALES
GIZA ETA GIZARTE ZIENTZIEN FAKULTATEA

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Estudiante

Jon Urtats PEREDA EUSA

Título

Propuesta didáctica para la enseñanza del algoritmo de la resta

Grado

Grado en Maestro en Educación Primaria

Centro

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Universidad Pública de Navarra

Director-a

M^a Isabel GOICOECHEA LÓPEZ-VAILO

Departamento / Saila

Departamento de Matemáticas

Curso académico / Ikasturte akademikoa

2013/2014

Semestre

Primavera

Preámbulo

El Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, modificado por el Real Decreto 861/2010, establece en el Capítulo III, dedicado a las enseñanzas oficiales de Grado, que “estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa de un Trabajo Fin de Grado [...] El Trabajo Fin de Grado tendrá entre 6 y 30 créditos, deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título”.

El Grado en Maestro en Educación Primaria por la Universidad Pública de Navarra tiene una extensión de 12 ECTS, según la memoria del título verificada por la ANECA. El título está regido por la *Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria*; con la aplicación, con carácter subsidiario, del reglamento de Trabajos Fin de Grado, aprobado por el Consejo de Gobierno de la Universidad el 12 de marzo de 2013.

Todos los planes de estudios de Maestro en Educación Primaria se estructuran, según la Orden ECI/3857/2007, en tres grandes módulos: uno, *de formación básica*, donde se desarrollan los contenidos socio-psico-pedagógicos; otro, *didáctico y disciplinar*, que recoge los contenidos de las disciplinas y su didáctica; y, por último, *Practicum*, donde se describen las competencias que tendrán que adquirir los estudiantes del Grado en las prácticas escolares. En este último módulo, se enmarca el Trabajo Fin de Grado, que debe reflejar la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas. Finalmente, dado que la Orden ECI/3857/2007 no concreta la distribución de los 240 ECTS necesarios para la obtención del Grado, las universidades tienen la facultad de determinar un número de créditos, estableciendo, en general, asignaturas de carácter optativo.

Así, en cumplimiento de la Orden ECI/3857/2007, es requisito necesario que en el Trabajo Fin de Grado el estudiante demuestre competencias relativas a los módulos de formación básica, didáctico-disciplinar y practicum, exigidas para todos los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria.

En este trabajo, el módulo *de formación básica* se desarrolla a lo largo del marco teórico. Los contenidos adquiridos a lo largo de este módulo permiten conocer el desarrollo cognitivo del niño, con el objetivo de saber actuar ante el alumnado del primer ciclo de Educación Primaria. A su vez, ha permitido desarrollar la secuencia didáctica teniendo en cuenta las características cognitivas del niño en esta edad.

El módulo *didáctico y disciplinar* ha permitido desarrollar la secuencia didáctica aplicando los conocimientos adquiridos tanto teóricos como prácticos. A su vez, ha permitido enmarcar dicha secuencia aplicando los aspectos formales de la educación a través del currículo de Educación Primaria.

Asimismo, el módulo *practicum* está presente tanto en el marco teórico como en la secuencia didáctica y los métodos a seguir en la enseñanza de las matemáticas. Este último módulo ha permitido conocer el funcionamiento de un aula de Primaria, cómo debe actuar un maestro ante sus alumnos y qué objetivos se deben proponer. A su vez, ha sido útil para ser conscientes de la realidad que se vive en las aulas, de modo que en este trabajo se han podido aplicar las experiencias vividas para elaborar distintas actividades y proponerse objetivos de una forma realista.

Uso lingüístico y género

Las referencias a personas o colectivos figuran en el presente trabajo en género masculino como género gramatical no marcado. Así, cuando sea necesario marcar la diferencia de comportamientos observados por razón de sexo, se indicará explícitamente en el texto.

Resumen

La finalidad de este trabajo fin de grado es favorecer el dominio del cálculo mental. Se pretende trabajar estrategias basadas en la recuperación directa, desde la memoria, del resultado de la operación para ser aplicadas en la resolución de las restas con llevadas. El trabajo es de carácter experimental y se desarrolla en un aula de 2º de primaria.

El estudio se ha dividido en dos partes. En la primera, se analiza la fundamentación teórica partiendo del desarrollo evolutivo correspondiente a esa edad y se exponen los diferentes algoritmos existentes para la resolución de restas.

A partir de toda esta fundamentación teórica se elabora una propuesta didáctica que aporta una estrategia diferente y que se lleva a la práctica en el aula. Se valoran los resultados obtenidos y a partir de ellos se extraen las conclusiones del trabajo.

Palabras clave: Restas, llevadas, estrategias, resolución, primaria.

Abstract

The aim of this project is to help to improve the domain of mental calculus. The aim is to work on strategies based in direct recuperation, from memory, the result of the operation, to be applied in the resolution of subtractions with regrouping. It is an experimental based work and takes place in a classroom of 2nd grade of primary education.

The study is divided in two main parts. In the first one, we analyze the theoretical foundation starting from the evolutive development corresponding to that age and we present the different existing algorithms for the resolution of subtractions.

Based on all this theoretical basis, we bring to practice a didactic proposal which we take to the classroom, where we get to conclusions and evaluate the results.

Keywords: subtractions, regrouping, strategies, resolution, primary.

Índice

Introducción	1
1. Antecedentes	3
2. Objetivos	4
3. Cuestiones	4
4. Marco Teórico	7
4.1. Psicología evolutiva	7
4.2. Las matemáticas en el currículo	10
4.3. Los algoritmos en las restas con llevadas	
5. Métodos	14
5.1. Introducción y contexto	14
5.2. Propuesto Didáctica	15
5.2.1. Introducción	15
5.2.2. Contextualización	17
5.2.3. Desarrollo de la Propuesta Didáctica	18
5.3. Práctica de la Propuesta Didáctica	28
5.3.1. Contextualización del aula experimental	28
5.3.2. Desarrollo de la Propuesta Didáctica en el aula experimental	31
6. Materiales	44
7. Resultados y discusión	45
Conclusiones y cuestiones abiertas	46
Referencias	48
Anexos	50
A. Anexo I	50
A. Anexo II	51
A. Anexo III	53
A. Anexo IV	54
A. Anexo V	55

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas se caracterizan entre otras cosas por pertenecer a un área instrumental donde el alumno, a través de sus conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales, interactúa y se relaciona con el mundo que le rodea. De tal modo que su enseñanza en la escuela le sirve para enfrentarse a situaciones reales que van a exigir de él un amplio bagaje de capacidades y estrategias cognitivas. En definitiva, el aprendizaje de las matemáticas es un medio excepcional para desarrollar estas capacidades cognitivas que pueden transferirse a otros dominios del aprendizaje. Su inclusión en el currículo es esencial para la formación intelectual de los alumnos.

Se infiere que, en la Educación Primaria, el proceso de construcción del conocimiento matemático debe utilizar como punto de partida la propia experiencia práctica de los alumnos. Las relaciones entre las propiedades de los objetos y las situaciones que los alumnos establecen de forma intuitiva en el transcurso de sus actividades pueden convertirse en objeto de reflexión dando paso a las primeras experiencias específicamente matemáticas.

Hacer matemáticas implica razonar, imaginar, descubrir, intuir, probar, utilizar técnicas y aplicar destrezas. Para que el alumno integre estas estrategias en su interacción con el mundo, es realmente necesario que las actividades programadas sean significativas y útiles para el niño y nunca alejadas de la realidad. Es por ello que la enseñanza de las matemáticas se debe fundamentar en el aprendizaje de estas estrategias.

Desde el momento en el que los niños descubren las capacidades que van adquiriendo, a través de experiencias basadas en la práctica de ejercicios y experimentos, las matemáticas se convierten en un proceso de construcción y abstracción de relaciones progresivamente más complejas. De aquí surge la necesidad de explorar estas destrezas que van a ser la base para futuras operaciones más complicadas, descubriendo que hay diferentes métodos para llegar a una misma conclusión.

Por las razones expuestas, se plantea este Trabajo Fin de Grado como propuesta para adquirir un método de trabajo en la resolución de las restas con llevadas a través de estrategias de cálculo mental, y con el fin de que no se conviertan en un problema en niveles superiores, ya que con éste método se pretende que las estrategias se queden bien asentadas.

1. ANTECEDENTES

Con el fin de acercarnos a las posturas de trabajo que se plantean para esta propuesta, se va a realizar un breve repaso del desarrollo histórico de la enseñanza de la Aritmética. Un saber al que se le dedica la mayor parte del tiempo escolar y que ha tenido desde siempre un espacio asegurado en el currículo.

Se reflejan a lo largo de la historia cinco grandes métodos predominantes: el reglado, el razonado, el de repeticiones, el intuitivo y el orientado a la estructura.

El método de reglas.

La aritmética hindú y árabe supuso el desarrollo del cálculo. Aportaron una gran variedad de métodos para el cálculo aritmético. Hasta finales del siglo XVIII, la tónica dominante consistía en presentar de modo reglado los métodos de cálculo sobre ejemplos ilustrativos. Sin embargo, este método oculta la lógica de los procedimientos.

El método razonado.

Éste método podemos decir que surge a principios del siglo XIX y que se establece un currículo obligatorio común para los estudiantes de un mismo nivel educativo, y de él destacamos un aspecto importante en la propuesta de enseñanza de la aritmética. Se trata del deseo de poner de manifiesto la lógica de las reglas de cálculo y el análisis de los motivos que la sustentan. (Condorcet, 1799).

En los textos que se utilizan para este método, no hay demostraciones sino reglas con su justificación correspondiente a través de ejemplos concretos. En definitiva se defiende que la enseñanza de la aritmética debe ser razonada, lo que significa que los alumnos deben poseer el conocimiento y la explicación de los principios aritméticos. No obstante, este método exige a los niños un nivel de trabajo para el que no siempre están capacitados.

El método de las repeticiones.

Llegados a los años 20 del siglo pasado, la enseñanza de la aritmética está dominada por el aprendizaje mecánico donde la atención se dirige a los elementos del proceso, antes que a comprender los principios aritméticos y las relaciones propias del

proceso en su totalidad. Los automatismos también influyeron en las directrices para trabajar el cálculo. Según extraemos de Eyal (1935), calcular ha de ser primero un automatismo para que la atención pueda quedar libre en la persecución de la solución del problema planteado, y sobre todo para que las operaciones se realicen con la misma rapidez y exactitud con que lo haría una máquina de calcular. Sin embargo, este método se centra en la materialización de los procedimientos y propiedades y no en mostrar la estructura de las matemáticas. (Resnick y Ford, 1990).

El método intuitivo.

Llegaron los primeros enfoques pedagógicos que comenzaron a ganar terreno a los enfoques procedimentales. Extendiendo un interés por desarrollar nuevos métodos de enseñanza que sirviesen para que el aprendizaje de la matemática fuese significativo. De este modo se pretende desarrollar el sentido intuitivo guiado por lo racional, apoyándose en la idea de que la matemática escolar no debe ser una cosa típicamente abstracta sino que debe convertirse en ciencia experimental. (Comas, 1925).

La enseñanza orientada a la estructura.

En este nuevo enfoque se dirige la enseñanza hacia la comprensión de la estructura del contenido, entendida como los conceptos básicos de los procedimientos y las relaciones sobre las que se basan. Se presenta la aritmética orientada a resolver problemas prácticos de la vida diaria. Como afirman Resnick y Ford (1990) “la enseñanza debe servir para que, a través de la comprensión de estas estructuras matemáticas, los alumnos sean capaces de generalizar su comprensión aplicándola a una amplia gama de fenómenos y de transferir su aprendizaje específico a nuevas situaciones y tareas”.

Esto lleva implícito la idea de que se puede enseñar a cualquier edad siempre que se tengan en cuenta el nivel de desarrollo intelectual del niño y el trabajo que se presente esté constituido por la estructura del contenido. En consecuencia, el plan de estudios no debe ser lineal sino espiral e ir retomando el tema a niveles cada vez más superiores. Bruner (1988).

Actualmente, la forma de concebir el aprendizaje matemático es de tipo estructuralista, especialmente cuando se refiere al aprendizaje de conceptos, donde se considera que aprender es alterar estructuras, y que estas alteraciones no se producen

por medio de procesos simples, sino que se realizan de manera global. Pablo Flores (2001).

2. OBJETIVOS

Los objetivos que se persiguen con la elaboración de este trabajo fin de grado son los siguientes:

- Presentar los diferentes métodos y estrategias para resolver restas que se han estado utilizando en los últimos años.
- Diseñar una propuesta didáctica a través de la cual se trabajen las estrategias de cálculo mental que tienen su aplicación en las restas con llevadas.
- Mejorar las competencias matemáticas de los alumnos en relación al algoritmo de la resta con llevadas.
- Enseñar estrategias de cálculo mental basadas en la recuperación directa, desde la memoria, del resultado de la operación.

3. CUESTIONES

Tras plantearse los objetivos para esta propuesta didáctica surgen algunas cuestiones que deberían ser resueltas tras la realización del estudio:

- ¿Las actividades propuestas otorgan mayor confianza al alumno en el cálculo mental?
- ¿El uso de los materiales propuestos favorece un aprendizaje vivencial y significativo?
- ¿Existen diferencias entre los resultados obtenidos al utilizar la didáctica propuesta?
- ¿La utilización de los materiales y actividades propuestos hace que el alumnado se implique más en su aprendizaje de las matemáticas?
- ¿Existe un perfil del alumno que pueda beneficiarse más del aprendizaje de esta estrategia de cálculo mental?

4. MARCO TEÓRICO

4.1. Psicología cognoscitiva en relación a las matemáticas

Un aspecto que concierne al desarrollo del trabajo que se plantea en el siguiente apartado, y que define los parámetros sobre los que se fundamenta, es la psicología evolutiva del niño. Los objetivos curriculares que se diseñen para cada ciclo están íntimamente ligados con las capacidades cognitivas que los alumnos puedan alcanzar.

Para abordar este tema, nos basaremos en la clasificación que establece Piaget para ordenar las características evolutivas más significativas durante el desarrollo del niño. Concretamente, nos centraremos en la etapa evolutiva correspondiente a un alumno de primer ciclo de primaria, que pertenece a la etapa de las operaciones concretas (7 a 11 años).

En este estadio se desarrolla un pensamiento más activo. La característica principal en esta fase radica en que los niños alcanzan a entender la ley de la conservación de la materia. Son capaces de concebir que los elementos, a pesar de ser alterados o transformados, mantienen muchos de sus rasgos originales. Los niños también comprenden que estos cambios pueden ser revertidos. Es decir, que dos recipientes con formas distintas pueden contener la misma cantidad de agua. En esta fase también manejan las operaciones como la identidad, clasificación, seriación, reversibilidad y compensación. Sin embargo aún aquí no son capaces de razonar sobre problemas hipotéticos y abstractos que impliquen la coordinación de muchos hechos a la vez.

Tras identificar los aspectos generales del desarrollo del niño en esa edad, nos interesa centrarnos en las características cognitivas en relación con las nociones aritméticas y las capacidades para ponerlas en práctica.

Antes de iniciar el comienzo de la etapa en primaria, ya han recibido sus primeras nociones básicas de la aritmética en el aula y en el entorno por el que se mueven. Perciben cambios en relación a las cantidades y sobre esas experiencias van

asentándose una serie de nociones matemáticas necesarias, como la construcción del número, que van creando el desarrollo del pensamiento lógico.

Sin embargo, todavía existe un predominio cognitivo por entender el entorno que le rodea en función de lo que perciba. Esto influye considerablemente a la hora de entender conceptos como la reversibilidad, la conservación o la clasificación, dado que al realizar una acción no son capaces de recordar el aspecto original y tampoco son capaces de relacionar un subconjunto dentro de otro conjunto. Se considera por lo tanto que en este estadio preoperacional no alcanzan la comprensión del número y sus aplicaciones porque no piensan de forma operatoria. No obstante, gracias al influyente trabajo de Gelman y Gallistel sobre el desarrollo temprano del conteo, se ha valorado el papel que tiene el conteo, en la etapa preoperatoria, para el desarrollo de las primeras nociones aritméticas.

Llegando a la etapa de las operaciones concretas (de 7 a 11 años), desaparecen estas dependencias generadas por el dominio de las variables perceptivas. En este estadio aparece la adquisición del pensamiento lógico, la comprensión de las clases, las relaciones y correspondencias. En definitiva, se consolida el concepto del número y se desarrolla una manera significativa de contar.

La adquisición del conteo verbal culmina hacia los siete u ocho años de edad y representa un papel importante en el desarrollo del pensamiento matemático de los niños. Entre otras cosas porque a raíz de estas experiencias que surgen con el conteo se va consolidando la secuencia numérica, permitiéndole la capacidad de enumerar los elementos de un conjunto. Durante este periodo, se van abordando una serie de principios matemáticos que ayudan a la comprensión del número en las distintas tareas de cuantificación. Son los principios de correspondencia uno a uno, de orden estable, de cardinalidad, de abstracción y de irrelevancia que fueron desarrollados por Gelman y Gallistel.

Según se van adquiriendo nuevas nociones aritméticas surgen las primeras situaciones en las que se requiere de unas estrategias para abordar los distintos problemas. En la etapa de infantil y primer curso de primaria, los métodos que se utilizan para resolver situaciones de suma y resta es el modelado directo, donde se

trabaja con objetos físicos, los dedos o dibujando sobre el papel, planteando la acción. En la misma línea que avanza el desarrollo conceptual del conteo se van descubriendo nuevas estrategias de conteo más sofisticadas, abstractas y eficientes, permitiendo de esta manera solucionar un problema más rápidamente. Por ejemplo, en la situación de “Eduardo tiene 4 canicas y gana 3 en una partida”, una estrategia para la suma algo más avanzada sería la denominada “contar a partir del mayor” realizando el siguiente proceso: “tiene cuatro; cinco (que es uno más), seis (que son dos más) y siete (que son tres más) – siete”. Infiriendo de algún modo que existe un dominio de la serie numérica.

Otras estrategias, más relacionadas con problemas de resta, que también son abstractas y evolucionadas son el “retroconteo” y la “cuenta progresiva”. En el primer caso, consiste en realizar el conteo en el orden inverso al habitual. Lo que requiere un dominio de la recta numérica en ambos sentidos. Mientras que en la “cuenta progresiva” el conteo se realiza desde el número pequeño hacia adelante, hasta llegar al conjunto mayor. (Carpenter, 1999).

Llegamos a un punto, en el desarrollo de las estrategias, que queremos remarcar para entender el contexto en el que se abordan los planteamientos para este trabajo. Se trata de “recuperar directamente desde la memoria el resultado de la operación”, lo que se llama “recuperación de hechos”. En este nivel aparece la composición aditiva, que permite descomponer cualquier número en dos. Tal y como Josetxu Orrantia (2006) afirma, esto permite operar una suma en la que dos sumandos son conocidos, y en la resta donde se conoce la suma y uno de los sumandos. Permitiendo de este modo la reversibilidad entre la suma y la resta, lo que supone una enorme flexibilidad en la resolución de problemas. Para favorecer este paso sugiere la memorización de las tablas de la suma.

Por último, son muchas las iniciativas de docentes, investigadores y centros educativos que optan por una forma de calcular donde cada niño reinvente las reglas de juego o tenga un marco suficientemente amplio para poder decidir qué y cómo hacer. Es decir, se fomenta la búsqueda de estrategias por parte del alumno, la implicación en la resolución de problemas y en definitiva el espíritu matemático sin

desgastar a los niños en la práctica aburrida y repetitiva de algoritmos clásicos. (Orrantia, 2006)

4.2. Las matemáticas en el currículum

Dentro del marco teórico en el que nos encontramos, conviene realizar un breve repaso de la Ley Orgánica de Educación/2006 donde se concretan los objetivos planteados para la Educación Primaria en la contribución al desarrollo de las capacidades matemáticas. En el que se establece que son:

- Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana.

En cuanto a las competencias de las Administraciones de cada comunidad autónoma, en Navarra se establece mediante el Decreto Foral 24/2007, de 19 de marzo, en los puntos tres y seis, se establecen los objetivos para el área de Matemáticas siguientes:

- Reconocer situaciones de su medio habitual para cuya comprensión o tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlas mediante formas sencillas de expresión matemática o resolverlas utilizando los algoritmos correspondientes, valorar el sentido de los resultados y explicar oralmente y por escrito los procesos seguidos.
- Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales de cálculo mental en contextos de resolución de problemas.

En relación a los contenidos, se han organizado en cuatro bloques que responden al tipo de objetivos matemáticos que se manejan en cada uno de ellos: Números y operaciones, Media, Geometría y Tratamiento de la Información, azar y probabilidad. En lo que a nosotros nos concierne para la fundamentación de este trabajo, nos vamos a centrar en los contenidos que se trabajan en el primer bloque (números y operaciones) del primer ciclo y que son:

- Expresión oral de las operaciones y el cálculo.

- Disposición para utilizar los números, sus relaciones y operaciones para obtener y expresar información, para la interpretación de mensajes y para resolver problemas en situaciones reales.
- Cálculo de sumas y restas utilizando algoritmos estándar.
- Desarrollo de estrategias de cálculo mental para la búsqueda del complemento de un número a la decena inmediatamente superior, para el cálculo de dobles de cantidades y para resolver problemas de sumas y restas.
- Familiarización con el uso de la calculadora para la generación de series y composición y descomposición de números.

Con esta presentación de los contenidos que se trabajan durante el primer ciclo de primaria, se pretende justificar el sentido coherente de la propuesta didáctica para este trabajo. Podemos inducir de esta forma que en la Educación Primaria se busca enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones a través del cálculo mental o escrito. Es importante resaltar que para lograr una destreza significativa en la aritmética no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, se precisa también, y principalmente, actuar con confianza ante los números y utilizarlos siempre que sea pertinente identificando las relaciones básicas que se dan entre ellos.

4.3. Los algoritmos de las restas con llevadas

Un algoritmo es un conjunto ordenado y finito de instrucciones u operaciones sistemáticas que permite hacer un cálculo y hallar la solución de un tipo de problemas.

Gran parte de la matemática escolar está dedicada a enseñar a los niños cómo realizar los cálculos con las cuatro operaciones básicas, es decir, al estudio de los algoritmos de cálculo. En todo algoritmo están implícitas dos cuestiones íntimamente relacionadas: notación y procedimiento. La notación en éste caso es la numeración indo-arábica. El procedimiento está basado en el valor posicional de las cifras y es diferente para cada operación aritmética.

Como ocurre con el algoritmo de la suma y de la resta, para lograr una comprensión es necesario adquirir el conocimiento de la estructura del sistema de numeración decimal, además de una cierta habilidad en el conteo.

Se entiende de esta manera que para la resta $4.698 - 2.534$, se pueden disponer los números y el resultado de cualquiera de las siguientes maneras:

a) $4.698 - 2.534 = 2.164$

b) 4.698
 $- 2.534 = 2.164$

c) 4.698

$\underline{-2.534}$
 2.164

La situación a la que más veces se enfrentan los alumnos, y más cuando se trata de restas con llevadas, es la “c”. En esta disposición de los elementos de la resta, se van obteniendo las cifras a partir de las operaciones que se realizan de derecha a izquierda, es decir, empezando por las unidades y siguiendo por las unidades de un orden superior. Al finalizar las operaciones se comprueba que las cifras del resultado encajen con el orden de unidades del minuendo y el sustraendo, encontrando en cada columna las unidades de un mismo orden.

Sin embargo el algoritmo se complica cuando algún dígito del minuendo es menor que el correspondiente del sustraendo. Para resolver esta situación es imprescindible conocer que la regla de formación de una unidad de un determinado orden, a partir de diez unidades del orden inmediato inferior, es reversible en el sentido de que pueden obtenerse diez unidades de un determinado orden a partir de una unidad del orden inmediato superior. Rafael Roa (2001).

A continuación revisaremos los algoritmos que existen para la solución de este tipo de situaciones:

- *Algoritmo de “pedir prestado”*

6	2	9
-	2	7
<hr/>		
		1

5	12	9
-	2	7
<hr/>		
3	5	1

En el minuendo hay más unidades de primer orden que en el sustraendo. Lo resolvemos fácilmente. Sin embargo, en el minuendo hay menos unidades de segundo orden que en el sustraendo. Bajo estas circunstancias se pueden obtener unidades extras de segundo orden a partir de una de las unidades de tercer orden, en este caso seis. De forma que siempre se va a proceder de esta manera hasta llegar a las unidades de último orden.

- *Algoritmo de “pedir y pagar”*

$$\begin{array}{r} 629 \\ -278 \\ \hline 1 \end{array}$$

Este método consiste en que cuando se necesiten unidades de un determinado orden en el minuendo, porque tenga menos que el sustraendo, se suma diez a las que se tienen y, para que el resultado de la resta no cambie, se le suma la misma cantidad al sustraendo pero a la unidad que se encuentra en el orden inmediato superior.

$$\begin{array}{r} 6129 \\ -2178 \\ \hline 351 \end{array}$$

Estos dos algoritmos mencionados anteriormente son las más utilizadas en el ámbito escolar. Rafael Roa (2001).

- *Algoritmo “ABN”*

El nombre del algoritmo “ABN” son las iniciales de “Abiertos Basados en Números” donde el alumno resuelve la resta con cierta libertad para que pueda resolverlo de la forma que le sea más cómoda, fácil y comprensible. En el método, el alumno trabaja con unidades, decenas, centenas componiéndolas y descomponiéndolas libremente, para llegar a la solución a través de los pasos que le permita su dominio del cálculo. Se trata de una operación por detracción.

Este algoritmo está fundamentado por Jaime Martínez Monteo, Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación y especializado en Didáctica del cálculo en Educación Primaria.

5. MÉTODOS

5.1. Introducción y contexto

Se han realizado una serie de observaciones en un centro encaminadas a identificar el proceso de cálculo que realizan los alumnos de 1º ciclo en Educación Primaria para resolver restas con llevadas. El centro en el que se han realizado las pruebas, es un centro público de Educación Infantil y Primaria, ubicado en la localidad de Pamplona. Es de tres líneas y las pruebas se han realizado concretamente en un aula de 2º de primaria.

En base a las estrategias utilizadas para la resolución de las restas con llevadas, que se han observado en el aula, se va a realizar una propuesta didáctica para cambiar el método de resolución a través del desarrollo de nuevas estrategias. Es conveniente, antes de explicar en qué se basaría dicha propuesta, hacer un análisis y valoración de estas estrategias observadas.

A través de diferentes pruebas y ejercicios que han realizado los alumnos durante varias sesiones, se ha comprobado que la gran mayoría, alrededor de un 85%, mantienen la estrategia por conteo directo. Es decir; contar de uno en uno desde el sustraendo hasta llegar al minuendo. Una técnica en la que se apoyan para no perderse en el cálculo es utilizar los dedos de las manos para representar el conteo que van realizando. En una primera etapa de su aprendizaje desarrollaron esta técnica para abordar restas en las que el minuendo y el sustraendo estaban formados por una cifra.

Pero, ¿qué pasa cuando en el minuendo se supera los diez dedos que tenemos? Una estrategia que han aprendido a desarrollar para estas situaciones, es convertir la resta en suma. Es decir, si tengo que resolver $13 - 6$, partimos desde el 6 y nos preguntamos cuántos números faltan para llegar a 13. Bajo estas circunstancias se puede seguir manteniendo la representación mediante dedos ya que nunca va a existir una diferencia mayor que diez.

De esta manera el alumno interioriza una manera de desarrollar la operación que le asegura obtener un resultado correcto, pero que a la larga, y para futuras

operaciones más complejas como la división, se ve como una estrategia que empieza a no servir, más larga y latosa. (Gregorio, 2004).

5.2. Propuesta Didáctica

El objetivo que se pretende lograr con esta propuesta didáctica es la adquisición y dominio de determinadas estrategias de cálculo mental para la resolución de restas con llevadas. Cabe mencionar que los cálculos que se piden para esta propuesta se sustentan en lo que llamamos estrategia por recuperación de hechos numéricos básicos, resultados que se almacenan en la memoria y que en un momento dado hay que recordar. El objetivo que se plantea es eliminar el conteo directo y el uso de los dedos como apoyo en las operaciones lógico-matemáticas, siendo remplazadas por estrategias de cálculo que tengan más utilidad en futuras enseñanzas más complejas.

5.2.1. Introducción de la Propuesta Didáctica

A partir de los 6 – 7 años, comienzo de la E. Primaria, el niño entra en una etapa de consolidación y organización de su inteligencia. Mientras que en la etapa anterior el niño no tenía en cuenta ni era capaz de comprender informaciones que aparecían en su medio, en este periodo adquiere unas destrezas que van a facilitar su comprensión y adaptación al mismo. Comienza a existir un pensamiento lógico en el que existe una mayor estabilidad y coherencia. Y ya son capaces de comprender que sus pensamientos y acciones tienen varias direcciones. (Skemp, 1986).

Por todo lo anteriormente expuesto el diseño de esta propuesta se centra en el desarrollo de estrategias de cálculo mental y, concretamente, en la resolución de restas con llevadas que se enseñan en el primer ciclo de Educación Primaria.

Las estrategias pedagógicas son el conjunto de métodos, técnicas y procedimientos que el docente utiliza en clase para desarrollar las capacidades, a partir del desarrollo de destrezas y habilidades que conforman cada una de ellas. Estas estrategias se manifiestan en actividades ejecutadas por el estudiante durante el proceso de enseñanza-aprendizaje para que participe de forma activa en la construcción de su propio aprendizaje. (Gómez, 2008).

Esta propuesta se centrará particularmente en dos estrategias relacionadas con el cálculo mental automático, que como dice José Ramón Gregorio (2004), hace referencia a todos aquellos cálculos que se pretende que, los alumnos al acabar el ciclo, acaben dominando automáticamente o de memoria.

Estrategias de cálculo

En primer lugar, se pretende desarrollar una habilidad para la descomposición de la decena en dos números. Para ello, se propondrán una serie de actividades en las que se requiera la intervención de esta habilidad. Cabe recordar que en una resta con llevada, durante el proceso del conteo que va desde el sustraendo hasta el minuendo, siempre se pasa por el diez. De tal modo que ésta será la primera estrategia que utilicen para calcular el resultado y que deberán retener la información adquirida en la memoria para utilizarla en el siguiente paso.

En segundo lugar, se propone como estrategia de cálculo, el uso y dominio de la tabla de sumar. Para el planteamiento de esta propuesta, serían únicamente necesarias las combinaciones, refiriéndose a las sumas, entre los números que pertenecen al conjunto de los naturales que van desde el cero hasta el nueve.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Figura 1. Tabla de sumar

La habilidad en el cálculo de estas sumas, tiene su aplicación en la propuesta en el momento de calcular la suma de la información obtenida en el paso anterior más la cantidad que exprese la cifra del sustraendo.

Ambas dos operaciones mentales son complementarias para el método que se ha propuesto aplicar para las restas con llevadas.

Para explicar el proceso que se quiere desarrollar, utilizaremos como ejemplo la resta $342 - 136$. En primer lugar, empezando por las unidades, nos centraríamos en resolver la diferencia entre seis y doce unidades. Lo haríamos de la siguiente forma: “de 6 a 10 hay cuatro; y de 10 a 12 hay dos; por lo que sumando ambos resultados da una diferencia de seis”.

Esto nos lleva a insistir que las sumas potencian también las restas y que hay que fomentar ejercicios en donde se trabajen estas estrategias, asumiendo que las

actividades tengan como objetivo transversal la automatización de estos cálculos mentales.

Pero, ¿cómo se consigue automatizar que, $3 + 6 = 9$ ó que del 3 al 10 hay siete números de diferencia? Lo único que deberemos procurar es que los alumnos tengan que hacer actividades y juegos en los que sea necesario utilizar esas operaciones. Y, después de averiguarlo, verlo, expresarlo en voz alta, escucharlo y escribirlo un número determinado de veces, el proceso se habrá interiorizado. Sin duda, “un prerequisite básico para avanzar en este dominio es partir, por parte del profesor/a, de una actitud de paciencia pedagógica, de que las cosas no se aprenden de un día para otro, y de que tenemos tiempo para hacerlo en clase”. Y que “el proceso de aprendizaje de automatismos va desde lo estrictamente manipulativo hasta el dominio automático”. (Gregorio, 2004).

Bajo este contexto, se exponen los objetivos secuenciados que guiarán esta propuesta didáctica.

1. Descomponer la decena como suma de dos números utilizando materiales manipulativos.
2. Establecer una relación entre los números que formen la descomposición del diez y afianzar el conteo mental buscando el diez.
3. Reforzar la suma entre los números comprendidos del uno al nueve.
4. Identificar una resta con llevada y consolidar un procedimiento que permita compensar la llevada.
5. Interiorizar el procedimiento utilizando las estrategias de conteo mental.

5.2.2. Contextualización del momento

Basándonos en los criterios utilizados para enunciar los objetivos de primaria que aparecen en el Decreto Foral 24/2007, de 19 de marzo, creemos conveniente realizar esta propuesta didáctica en el primer ciclo de primaria. Concretamente durante el desarrollo del segundo curso que es cuando comienzan a adquirir conceptos más avanzados en relación al algoritmo de las restas.

5.2.3. Desarrollo de la Propuesta Didáctica

Para desarrollar las dos estrategias anteriormente descritas, se han diseñado una serie de actividades que se presentan a continuación. Con el fin de que se automaticen las estrategias que queremos que alcancen, es necesario que los ejercicios se repitan en sesiones diferentes.

Hay que tener en cuenta también que se debe comenzar desde lo manipulativo y simbólico hasta llegar a cálculos mentales que se requieran en operaciones más complejas, de tal modo que se van a exponer de manera ordenada en función de los objetivos que queremos ir alcanzando y que ya han sido enunciados en el apartado anterior.

Objetivo 1. Descomponer la decena como suma de dos números utilizando materiales manipulativos.

Actividad 1

A través de la manipulación con fichas de las regletas de *Cuisenaire*, diseñar una serie de tareas encaminadas a lograr dicho objetivo.



Figura 2. Regletas de Cuisenaire

Las regletas de *Cuisenaire* es un material didáctico que se emplea fundamentalmente en E. Infantil y primer ciclo de E. Primaria para que los niños aprendan, con una base manipulativa, la formación y descomposición de los números e iniciarlos en actividades básicas de cálculo.

El material está clasificado en varias regletas que representan todas las unidades que hay desde el uno hasta el diez. Para cada unidad existe un color y unas medidas específicas. (www.educa2.madrid.org)

En primer lugar, se repartirá a cada alumno una regleta correspondiente a la medida de diez unidades y un montón de regletas de distintos tamaños. Vista la dimensión, se tratará de representar el mayor número de decenas posibles pero buscando la descomposición del diez utilizando dos regletas. Para que la actividad sirva de ejemplo y se encuentren todos los casos posibles, las regletas que se repartan

deben ser abundantes y variadas. De este modo obtendremos las parejas de fichas que forman una decena y las escribiremos en el cuaderno para utilizarlo como posible fuente de información.

Objetivo 2. Establecer una relación entre los números que suman diez y afianzar el conteo mental buscando el diez.

Actividad 2

Para esta actividad se ha ideado un material didáctico específicamente diseñado para este objetivo: el *Dominó 10*. Se trata de unas fichas, similares a las del *Dominó* clásico, donde aparecen ilustrados dos números separados por una línea y un punto, como se puede ver en la figura 3. Los números, que contienen estas fichas, están comprendidos entre el uno y el nueve, lo que hace posible que las fichas se puedan encadenar unas a otras si se establece el criterio de que entre una y otra, los números que queden anexos, sumen diez.

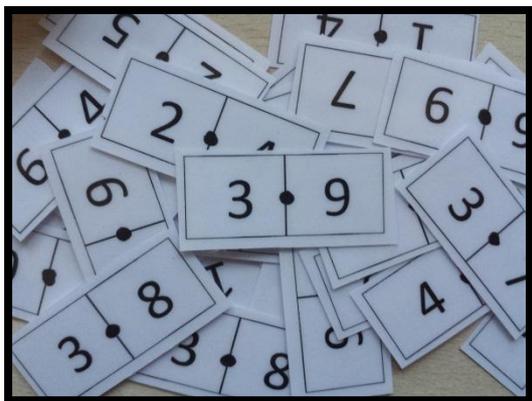


Figura 3. Fichas *Dominó 10*

En este juego se recomienda dividir a la clase en grupos de dos o tres personas. De tal forma que el alumno, mientras espera a que llegue su turno, puede ir calculando mentalmente las opciones que tienen sus compañeros.

En cada grupo, a cada jugador se le reparten aleatoriamente diez fichas y el resto quedan en un montón boca abajo en el centro de donde se esté jugando la partida. De tal modo que si un jugador, en su turno, se queda sin posibilidades de utilizar una de sus fichas, debe coger aleatoriamente una del centro para continuar la partida. Cuando se hayan repartido las fichas a cada uno, empieza jugando quien está a la derecha del que ha repartido colocando una ficha en el centro. Cada jugador solo tiene opción a un movimiento y gana quien se quede antes sin fichas.

Actividad 3

Tras haber jugado al *Dominó 10*, se pretende extender el mismo juego a formato papel. De tal modo que en esta actividad los alumnos deberán rellenar la casilla vacía, como se indica en el ejemplo, y calcular mentalmente el número que falta para completar diez.

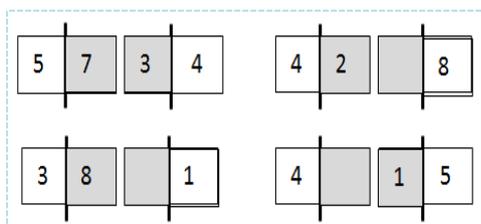


Figura 4. Ejemplo ejercicio

Insistir a los alumnos que se trata de prestar atención al número que aparece en la casilla sombreada, ya que si no puede dar lugar a errores.

En esta actividad se pretende reforzar la estrategia que guarda relación con la descomposición del número diez.

Actividad 4

Para esta actividad se va a utilizar un material de uso común: las cartas de la baraja. Sin embargo, no nos van a ser necesarias todas las cartas de la baraja, quedando fuera las figuras al representar un número mayor que la decena. Para esta baraja de cartas sí que nos hará falta que sea de cuarenta y ocho, quedando incluidos de esta manera los “ochos” y los “nueves”.

En este juego pueden participar entre cuatro y seis personas. Al inicio, a cada jugador se le reparten aleatoriamente tres cartas, otras cuatro se colocan encima de la mesa al descubierto y el resto quedan guardadas en un montón para dar continuidad al juego. Comienza el que se encuentra a la derecha de quien ha repartido. El objetivo es encontrar, utilizando una de las cartas del jugador y otra de las que están encima de la mesa, una pareja que, sumándolas entre las dos, dé resultado diez. Si no se encuentra la combinación deseada se debe dejar una de las cartas sobre la mesa para que el resto de jugadores puedan aprovecharla. Cuando los jugadores ya no tienen cartas, se vuelven a repartir tres a cada uno hasta que se acaben las cartas. Gana quien obtenga mayor número de parejas que sumen diez.

Actividad 5

En la siguiente actividad, dejamos aparte los materiales manipulativos y buscamos ahora la representación simbólica a través del juego. Un paso más hacia la interiorización de esquemas mentales que ayuden a asimilar esta estrategia.

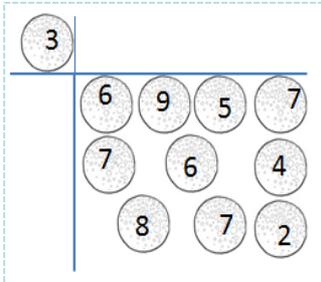


Figura 5. Ejemplo de ejercicio

Mediante esquemas similares al que se presenta en la imagen, el alumno deberá relacionar el número que aparece en la esquina superior izquierda (el tres) con tres números que hay escondidos (los sietes). Para ello, el niño se guiará basándose en un único criterio: que ambos números sumen diez.

Para que esta relación sea más visual, el niño coloreará del mismo color las “burbujas” que guarden una relación como la explicada anteriormente. De esta manera se pretende conseguir que el niño afiance esa relación existente en la descomposición del número diez.

Actividad 6

En la siguiente actividad, pasamos del juego a la representación simbólica. Donde el alumno deberá hacer uso del conteo mental, buscando el diez y para completar las casillas que aparecen vacías.

a) $3 + \boxed{7} = 10$	f) $6 + \boxed{} = 10$
b) $5 + \boxed{} = 10$	g) $8 + \boxed{} = 10$
c) $2 + \boxed{} = 10$	h) $7 + \boxed{} = 10$
d) $1 + \boxed{} = 10$	i) $9 + \boxed{} = 10$
e) $4 + \boxed{} = 10$	j) $10 + \boxed{} = 10$

Figura 6. Ejemplo de ejercicio

Actividad 7

En la siguiente actividad se pretende realizar el mismo cálculo que en la actividad nº 6. Pero en esta ocasión se puede observar una mayor dificultad añadida

que permite poner a prueba las destrezas adquiridas del alumno en el algoritmo de las sumas.

$2 + \quad = 10$	$3 + \quad = 10$
$10 = \quad + 4$	$\quad + 6 = 10$
$1 + \quad = 10$	$10 = 8 + \quad$

El ejercicio consiste en completar el número que falta para que se cumpla la igualdad.

Figura 7. Ejemplo de ejercicio

Actividad 8

Para esta actividad se pretende reforzar un ejercicio mental de discriminación, donde el alumno deberá centrarse únicamente en aquellos números que sumándolos completan la decena.

$6 + 5 + 2 + 8 = 5 + 6 + 10$	
$3 + 4 + 2 + 6 = 2 + 10 + 3$	$5 + 4 + 5 + 6 = 4 + 10 + 6$
$2 + 9 + 8 + 5 = 10 + 9 + 5$	$2 + 8 + 3 + 5 = 10 + 3 + 5$
$3 + 10 + 8 = 9 + 3 + 1 + 8$	$6 + 10 + 7 = 3 + 7 + 7 + 6$

El ejercicio consiste en tachar números, siguiendo el procedimiento que aparece en la nube como ejemplo modelo.

Figura 8. Ejemplo de ejercicio

Objetivo 3. Reforzar la tabla de la suma entre los números comprendidos del uno al diez.

Actividad 9

En esta actividad se pretende hacer un repaso y ejercitación de la tabla de la suma, como estrategia fundamental para desarrollar el método de resolución de restas con llevadas.

A \ B	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7
3	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9
5	5	6	7	8	9	10

Principalmente se va a centrar la actividad en la suma correspondiente a los números comprendidos entre el uno y el cinco. Por la razón de que, inicialmente, sean más sencillas las operaciones y porque, en esta actividad, se juega al principio con los dedos de una sola mano.

Figura 7. Tabla de sumar

Antes de ponerse a jugar, resultaría conveniente recordar qué es un número par y un número impar. Una vez aclaradas las dudas, los alumnos se colocarán por parejas. Cada jugador, deberá escoger representar a los números pares o a los impares. El juego consiste en sacar a la vez, independientemente del grupo (par o impar) que pronostiques, un número determinado de dedos de una mano. Si la suma de los dedos de cada una de las manos es par ganará un punto el primero y si la suma es impar ganará un punto el segundo.

Se puede diseñar una tabla de registros donde cada pareja anote las puntuaciones que van saliendo. Añadido a esto, se ofrece la posibilidad de formar campeonatos, juegos rotatorios, etc. Y si se quiere dificultar más la operación, podrían utilizarse las dos manos, ampliando más la tabla de la suma que queremos trabajar.

Actividad 10

La siguiente actividad va a constar de una serie de operaciones secuenciadas que están relacionadas con las dos estrategias que se pretenden afianzar. Se trata de resolver restas pero siguiendo un procedimiento como el que se muestra en la tabla:

Tabla 1. Ejemplo de ejercicio

15 - 9	9 al 10	y	10 al 15	1 + 5	6
12 - 5					
11 - 6					
...					

Actividad 11

En la siguiente actividad se pretende agilizar el cálculo mental basado en las operaciones de suma. Para ello se ha ideado un panel, como el que se muestra en la figura 10, con el fin de rellenar los cuadros vacíos siguiendo un orden marcado por los colores de las casillas.

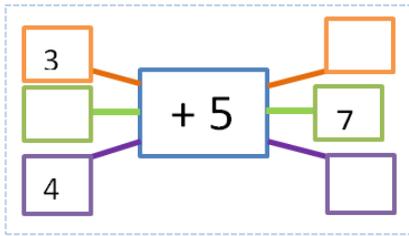


Figura 8. Ejemplo de ejercicio

Los cuadros que se sitúan a la derecha del número que va a ser operado (nº 5), son los resultados de las sumas.

Objetivo 4. Identificar una resta con llevada y consolidar un procedimiento que permita compensar la llevada.

Actividad 12

En la siguiente actividad se pretende trabajar una técnica que ayude en el proceso de identificar cuándo se debe realizar una llevada. Para explicar esta técnica se ha diseñado la presente actividad.

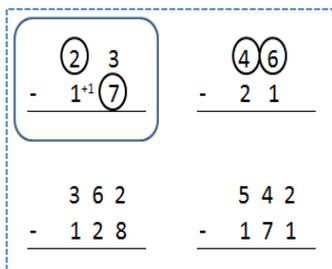


Figura 9. Ejemplo de ejercicio

Siguiendo el orden de resolución empezando por la columna de las unidades, siguiendo por la columna de las decenas, centenas, etc., se marcará mediante un círculo la cifra más alta de cada columna.

En cada elección pueden ocurrir dos casos:

1. El número mayor pertenece al minuendo.
2. El número mayor pertenece al sustraendo (lo que identifica una operación con llevada) y, como consecuencia, se deberá añadir un “uno” en la cifra siguiente del sustraendo.

Al terminar todas las elecciones posibles de la resta, se puede observar si se trata de una resta con llevada. En tal caso el alumno debe rodear con un círculo la operación propuesta.

Este ejercicio también le sirve al alumno para no olvidarse de “llevar una” a la cifra siguiente del sustraendo.

Objetivo 5. Interiorizar el procedimiento utilizando las estrategias de cálculo mental.

Actividad 13

En la presente actividad se pretende trabajar dos estrategias de cálculo mental, que anteriormente ya han sido ejercitadas. Por un lado el conteo mental buscando el diez y por otro lado el cálculo a través de la tabla de sumas. De esta manera, se aglutinan dos pasos fundamentales en la resolución de restas con llevadas como propuesta didáctica.

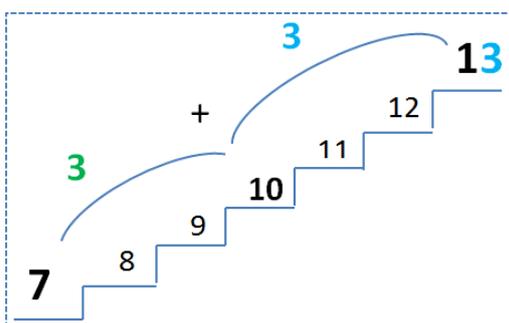


Figura 10. Esquema para calcular diferencias

Se ha diseñado una escalera simbólica, con el fin de poder clarificar los dos pasos que se efectuarían ante una resta con llevada.

Para el ejemplo que visualizamos en la figura 12, partimos de la resta: $423 - 317$. Empezamos por las unidades y observamos que para llegar desde el siete hasta el trece se debe realizar un salto de varios escalones. Para calcular la diferencia exacta se va a realizar en dos pasos. En primer lugar, procedemos a contar desde el siete buscando el diez: hemos saltado tres escalones (contamos tres). En segundo lugar, desde el escalón del diez saltamos al escalón del trece (contamos otros tres escalones). Sumando los dos saltos hacen seis.

Se propone el esquema que aparece a continuación para que los alumnos realicen repeticiones siguiendo el modelo explicado anteriormente.

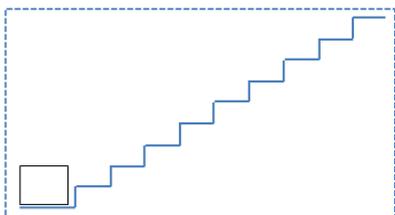


Figura 13. Ejemplo de ejercicio

Es importante que entiendan el método con el que se pretende resolver las restas con llevadas. Por este motivo, es fundamental que, tanto el número diez como el resto de signos que apoyan la representación, aparezcan en el esquema que ellos utilicen.

Actividad 14

Para la siguiente actividad, pasaremos de la representación en la escalera a otro esquema en el que se aprecian los elementos propios de una resta, con el fin de que el alumno utilice las estrategias adquiridas en anteriores actividades pero, en esta ocasión, la resta se va a representar en el formato al que están más acostumbrados.

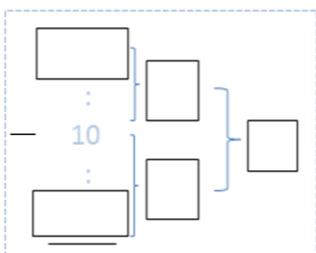


Figura 14. Ejemplo de ejercicio

En cuanto al ejercicio planteado, se ha diseñado un esquema donde se pueden apreciar: dos casillas vacías correspondientes al sustraendo y al minuendo; otras dos casillas en las que se anotarían los cálculos mentales en base a las estrategias anteriormente descritas y una última casilla que tiene como fin escribir la suma de los cálculos anteriores.

El ejercicio está planteado para que el maestro guíe la acción y todos los alumnos puedan ir al mismo ritmo atendiendo a cada resta que se va resolviendo.

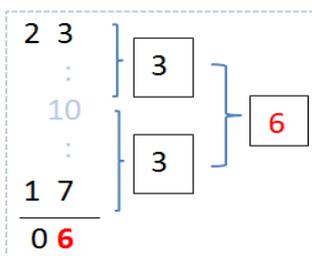


Figura 15. Ejemplo de ejercicio

A continuación vemos en la figura 15 un ejemplo de cómo se resolvería una resta utilizando este esquema. Cabe señalar, que para este ejercicio solamente pueden resolverse restas en las que la llevada se encuentre en las unidades. Lo que limita el campo de trabajo a otros casos posibles.

Para que los alumnos se acostumbren a realizar la resta de esta manera, es necesario que se verbalice y que ellos mismos sean conscientes del proceso que se sigue. De tal modo que se repetirán varios ejemplos para que asimilen cuál es el proceso que hay que seguir.

Por último, y con el objetivo de interiorizar este proceso, realizaremos una competición basada en la verbalización. El profesor escribirá en la pizarra una resta y los alumnos deberán resolverla en el menor tiempo posible. El alumno que antes acabe tendrá la oportunidad de explicar al resto de la clase qué estrategias ha

utilizado. Seguidamente pasa a ser miembro de un jurado que decidirá si el resultado es correcto en las siguientes rondas.

Actividad 15

Para la siguiente actividad se quiere reducir el número de apoyos adicionales para cálculos mentales, como se venía haciendo en la actividad anterior. Por ello se ha diseñado el siguiente ejercicio.

Figura 16. Ejemplo de ejercicio

Tal y como se muestra en el ejemplo de la imagen, queremos hacer referencia a dos elementos que no corresponden con el algoritmo de la resta:

1. El primer elemento es la lupa que se encuentra junto a la unidad del sustraendo, y nos va a servir para anotar el cálculo mental que se realiza al buscar el diez.
2. En segundo lugar, los dos resultados que se aprecian en cada resta. Sin embargo, solamente uno de los dos es la solución correcta.

El alumno debe completar el ejercicio pasando por dos pasos: primero rellenar el espacio que ocupa la lupa y después calcular y escoger la solución correcta.

Figura 17. Ejemplo de ejercicio

El ejercicio puede volverse más difícil si las decenas que aparecen en los resultados son distintas. Teniendo que compensar la llevada al sustraendo y calcular finalmente el resultado correcto.

Actividad 16

En esta actividad queremos efectuar restas con más de dos cifras. Lo que nos obliga a abandonar diversos apoyos visuales que ayudaban a encadenar los pasos requeridos para esta propuesta.

$\begin{array}{r} 342 \\ - 197 \\ \hline \end{array}$	CLAVES SECRETAS: 145: PORQUE 033: EL 406: MUNDO
---	---

Figura 18. Ejemplo de ejercicio

Para esta actividad se pretende desvelar una frase oculta que guarda relación con los resultados que obtengamos de las restas. De tal modo, que lo primero será plantear una frase que intrigue a los alumnos según vayan resolviendo cada resta hasta llegar al final.

Cada palabra tendrá una resta asignada. Y todas las palabras estarán vinculadas a una solución en otro cuadro al margen de las operaciones. Sin embargo, para que no se convierta en una sopa de letras y los alumnos pierdan el interés por resolver las restas, se mezclarán estas claves con otras que no aparezcan en la frase.

5.3. Práctica de la Propuesta Didáctica

Después de haber presentado esta propuesta didáctica, junto con los objetivos y las actividades planteadas, se ha puesto en práctica en una clase experimental, con el fin de evaluar y analizar los resultados que se obtengan tras finalizar este estudio de campo.

Para ello, en primer lugar se va a contextualizar el aula en el que se ha llevado a cabo este estudio. Conociendo de esta manera las competencias adquiridas y los errores que se registran con más frecuencia. En segundo lugar se desarrollará el trabajo que se ha realizado para obtener resultados de este estudio. Mostrando dos etapas de evaluación (inicial y final) y la secuencia didáctica que se plantea para esta propuesta.

5.3.1. Contextualización del aula experimental

La propuesta didáctica se ha llevado a cabo en una clase de 2º de Primaria. En el aula se encuentran 22 niños de entre 7 y 8 años. Sin embargo, dos de ellos tienen una adaptación curricular significativa. Por lo que contamos con 20 niños para poner a prueba este método.

En cuanto al nivel académico, cabe destacar que se va a introducir esta propuesta en el aula a finales del mes de abril. Bajo estas circunstancias, se constata que los alumnos ya han interiorizado un determinado algoritmo para la resta con llevadas, además de otros conocimientos matemáticos adquiridos. A continuación se indicarán los contenidos que se han trabajado en clase desde el inicio del curso hasta el momento de presentar la propuesta, los cuales, han sido estructurados por la editorial Santillana en su proyecto *Los Caminos del Saber*.

- Sumas de dos cifras sin llevar con números hasta el 99
- Sumas de tres cifras sin llevar. Restas sin llevar con números hasta el 99.
- Relación entre suma y resta. Sumas llevando con números hasta el 99.
- Restas llevando pasando una decena a unidades.
- Sumas y restas sin llevar con números de hasta tres cifras. Restas llevando con números de hasta dos cifras.
- Sumas llevando con números de hasta tres cifras
- La multiplicación y la suma. Restas llevando decenas o centenas.
- Restas llevando decenas y centenas. Las tablas del 2 y del 5.

En lo que a las restas se refiere, los alumnos, hasta antes de iniciar la propuesta didáctica en el aula, se han acostumbrado a utilizar el método de “llevo una” que se aplica a una resta con llevadas. Se observó que un porcentaje importante de los alumnos las realizaba con lentitud y cometía fallos reiterativos. Se mostrará más adelante los errores más comunes que se han visto en clase. Pero antes se mencionará el método de resolución de restas con llevadas que se ha llevado a la práctica.

Método de resolución de restas con llevadas

De entre los algoritmos que existen para resolver restas con llevadas, la que conocen y practican los alumnos de este aula, es la de “llevo una”.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 14 \\
 - \quad 1^{+1} \quad 7 \\
 \hline
 0 \quad 7
 \end{array}$$

Es decir, al tomar una decena para el minuendo llevo otra igual para el sustraendo. De tal manera que ambos términos varían pero la diferencia entre minuendo y sustraendo se mantiene.

Para evitar confusiones en el algoritmo de la resta que han interiorizado, se seguirá usando este método para las actividades que se desarrollen en la secuencia didáctica.

Un dato que contextualiza mejor la situación en la que se llegó al aula es saber que comenzaron a trabajar las restas con llevadas exactamente desde el 18 de noviembre del 2013. Pero teniendo en cuenta los puentes y las fiestas por Navidad que han podido interrumpir el ritmo del curso, nos lleva a considerar que fue a partir de enero cuando se trabajaron más a fondo. El estudio comenzó a finales de abril.

Errores más comunes

Si bien es cierto que un porcentaje elevado de los alumnos ya conoce el algoritmo de la resta, también es cierto que todavía persisten determinados errores comunes. A continuación, mediante ejemplos sacados del campo de investigación, se observarán los fallos que se cometen.

1. *Olvidarse de compensar al sustraendo con una decena cuando se hace una llevada al minuendo.*

Es frecuente que los alumnos calculen correctamente la diferencia existente entre las unidades del minuendo y el sustraendo, realizando la llevada al minuendo, pero que no se acuerden de llevar la decena al sustraendo. Alterando el siguiente paso y, por lo tanto, el resultado final. Es un error que se da en aproximadamente el 50% de los alumnos.

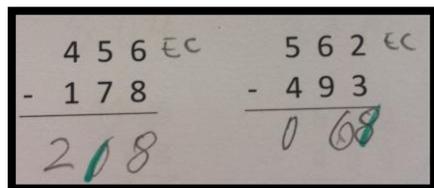
$$\begin{array}{r} 423 \text{ (NC)} \\ - 364 \\ \hline 189 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5470 \text{ (NC)} \\ - 236 \\ \hline 324 \end{array}$$

Figura 19. Ejemplo de Error

2. *Confundirse en el transcurso de la operación por un error en el cálculo.*

Se trata de un fallo producido al calcular la diferencia entre el minuendo y el sustraendo. Se puede decir que los alumnos que cometen solamente este error en la resta comprenden el significado de la misma. Sin embargo, bien por despistes,

confusiones o bloqueos en la secuencia numérica, el resultado acaba siendo el erróneo.



The image shows two subtraction problems written on a piece of paper. The first problem is $456 - 178$ with a handwritten result of 208 . The second problem is $562 - 493$ with a handwritten result of 069 . Both results are crossed out with a green line.

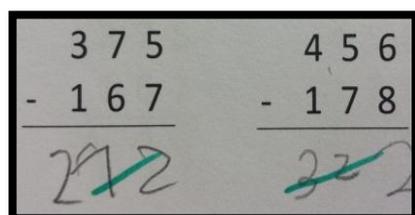
Figura 20. Ejemplo de error

Este es un error que, a diferencia del anterior, representa un porcentaje más elevado de fallos y que acaba repitiéndose a menudo en los ejercicios que se proponen en clase.

3. *Restar desde el sustraendo hasta el minuendo.*

Este tipo de errores se comete con menos frecuencia y pertenecen a casos más aislados. Sin embargo, no deja de ser una muestra de algunos fallos conceptuales que se pueden producir en el alumno a la hora de comprender la operación de la resta.

Esto nos lleva a preguntarnos si es probable que el niño no alcance a ver el minuendo y el sustraendo como dos términos completos, formado por unidad, decena y centena. Si no que, al operar, solo tenga en cuenta las diferencias entre las cifras colocadas en columnas de derecha a izquierda, sin guardar relación con el resto.



The image shows two subtraction problems written on a piece of paper. The first problem is $375 - 167$ with a handwritten result of 212 . The second problem is $456 - 178$ with a handwritten result of 278 . Both results are crossed out with a green line.

Figura 21. Ejemplo de error

5.3.2. *Desarrollo de la Propuesta Didáctica en el aula experimental*

En este apartado se detallará cómo se ha desarrollado la propuesta didáctica en el aula experimental. Comenzando desde el análisis de una evaluación inicial para conocer el nivel del que se parte, pasando por el diseño de sesiones e intervenciones con los alumnos, incluyendo tareas y fichas para realizar en casa, hasta llegar a la

evaluación final. En esta última fase del estudio se analizarán los errores o las mejoras que se han obtenido tras implantar esta propuesta en el aula.

Evaluación inicial

Antes de iniciar cualquier proyecto, en la que incluyamos estrategias para adquirir una habilidad en el cálculo mental, será necesario observar a los alumnos e identificar el momento en el que se encuentran, con el fin de poder ajustar la programación en función de sus necesidades. De ahí la importancia que tiene el realizar esta evaluación inicial.

- *Prueba de evaluación inicial*

Esta prueba ocupó en la programación del aula un total de dos sesiones en las que se realizó una serie de tareas que facilitaron y guiaron la observación. En cada sesión se encontraba en el aula la mitad de alumnos que hay en lista, debido a desdobles. De esta manera se aprovechó para recoger los datos de forma más apropiada, con el fin de ir recogiendo los resultados y los datos que se iban observando durante la prueba. Se ideó una ficha (Anexo I) que constaba de tres ejercicios. Sin embargo, el primero de ellos resultó ser el más determinante al ser más útil en cuanto a aportación de datos sobre los valores que se escogieron para la tabla de registros.

El primer ejercicio constaba de doce restas con llevadas y un tiempo límite de diez minutos para completar las que pudiesen. Una vez consumado dicho tiempo, no se podía continuar el ejercicio, pudiendo quedar restas sin completar.

Además, cabe señalar que estas restas fueron escogidas específicamente de anteriores fichas que realizaron con la maestra, y tienen la característica común de que han sido seleccionadas por haber coincidido en el número de alumnos que fallaban en la misma resta. Esto se hace pensando en la evaluación final, que se realizará después de haber trabajado las estrategias presentadas para esta propuesta, de esta manera todos los alumnos, incluso los que mejores capacidades tienen, puedan tener la opción de fallar en alguna operación y, por lo tanto, tener la oportunidad de ofrecer mejores resultados en la última evaluación. Es decir, para que se pueda observar una evolución favorable en todos los alumnos.

El segundo ejercicio giraba en torno a cinco sumas de números naturales comprendidos entre el uno y el nueve. Tenía como objetivo medir una de las estrategias marcadas para esta propuesta y que sería posteriormente ejercitada durante determinadas sesiones. Por último, el tercer ejercicio constaba de cinco restas donde el minuendo era la decena. De esta manera se pretendía comparar los resultados que realizasen en la prueba final y, entonces, registrar si el alumno habría afianzado otra de las estrategias planteadas para esta propuesta didáctica.

- *Tabla de registro*

Antes de iniciar las sesiones correspondientes a la propuesta didáctica, se diseñó una tabla de registros con la finalidad de identificar las destrezas de cada alumno, y por lo tanto las del aula a nivel general. De este modo se pretendía obtener una información detallada de cada alumno para posteriormente, al realizar la prueba final, se analizasen los avances o retrocesos.

Los valores que se seleccionaron para este estudio se basaron en dos criterios: que resultasen útiles para la aportación de datos y que fuesen fáciles de observar. Inicialmente se escogieron más valores de los que finalmente se han utilizado debido a que algunos no resultaron ser lo suficientemente redundantes para el análisis. En la tabla que se muestra a continuación aparecen los definitivos.

Tabla 2. Registro Observacional

Sujetos	Ejercicio nº 1			
	Tiempo	Fallos		Correctas
		Compensar	Conteo	
1.N. T.				
2.A. M.				
3.J. L.				
4...				
Observaciones:				

En la columna de la izquierda se encuentran las iniciales de los alumnos que se observaron. A cada uno se le vinculó un número con el que se ha utilizado para especificar los datos en el análisis de los resultados. Las variables que se han escogido para esta tabla de registros se definen así:

Tiempo. Refiriéndose al tiempo que tarda un alumno en concreto en resolver todos o varios ejercicios propuestos. Teniendo en cuenta que si el tiempo máximo (diez minutos) expira, el alumno que no haya completado todas las restas se le anotará “diez minutos” (10’) en la variable *tiempo*. La medida se realizará en minutos y segundos.

Fallos por conteo. Se refiere a los fallos producidos al cometer un error de cálculo mental durante el transcurso de una operación.

Fallos por no compensar. Se refiere a los fallos provocados por no tener en cuenta que cuando se necesiten unidades de un determinado orden en el minuendo, porque tenga menos que el sustraendo, se suma diez a las que se tienen y, para que el resultado de la resta no cambie, se le suma la misma cantidad al sustraendo pero a la unidad que se encuentra en el orden inmediato superior.

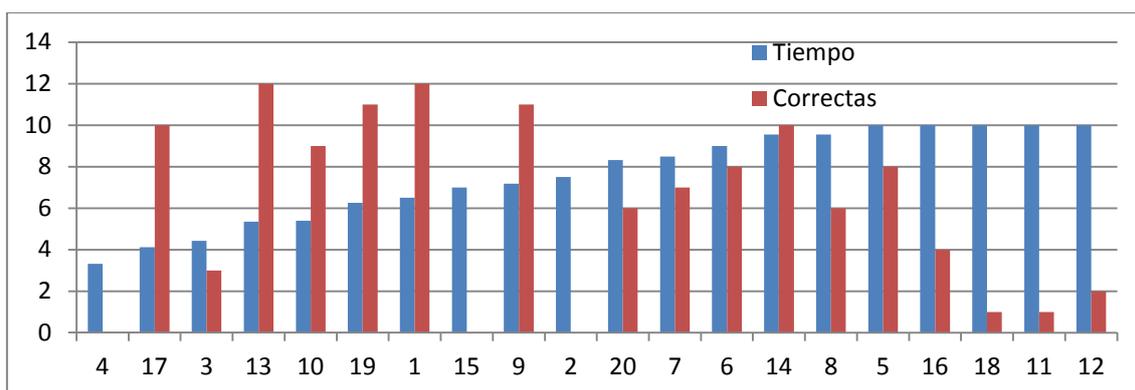
Correctas. Corresponde al número de restas que tienen cero fallos.

- *Análisis de los resultados*

Para una mejor comprensión de los resultados obtenidos, se han elaborado una serie de gráficos que muestran las variables predeterminadas en función de los niños que fueron puestos a prueba. Señalar que los gráficos se refieren exclusivamente al primer ejercicio, porque es el que mejor ha discriminado las diferencias entre individuos.

En la siguiente gráfica se muestran los resultados obtenidos en función del tiempo y el número de restas realizadas correctamente. A cada sujeto de la clase se le ha asignado un número concreto y se muestra en el eje horizontal.

Gráfica 1. Resultados Evaluación Inicial.



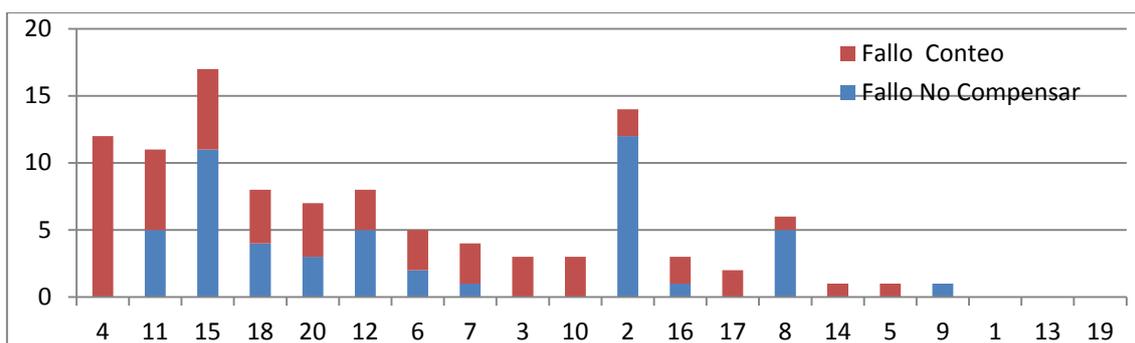
Para buscar una mayor claridad en el mensaje que nos ofrece esta gráfica, se han ordenado los valores de la variable tiempo de menor a mayor, situando a los alumnos que antes acabaron la prueba a la izquierda y a los que no les dio tiempo a la derecha. Sin embargo, el hecho de haber finalizado antes la prueba no significa que guarde relación directa con tener los ejercicios bien hechos. Por ello, se muestra en rojo el número de restas correctas que realizó cada alumno, dejando en evidencia a aquellos alumnos que por correr mucho en la prueba obtuvieron peores resultados.

Se puede ver de forma general que los alumnos con más capacidades, a la hora de resolver restas con llevadas, se aglutinan más en la izquierda, y que coinciden con los valores más bajos para el tiempo.

Otro dato significativo, que se tendrá en cuenta para la comparación con la evaluación final, es el número de alumnos (siete) que no han operado correctamente al menos seis de las doce restas. Es decir, un tercio de los alumnos no llega ni al 50% de respuestas correctas.

A continuación se mostrará otra gráfica en la que se podrán observar los fallos obtenidos en función de si ha sido por no compensar la llevada o por error en el cálculo.

Gráfica 2. Fallos Evaluación Inicial.



Se ha procurado establecer un orden para los valores de la variable *fallo por conteo*. Representando, de esta manera, a los alumnos que más han reiterado este error en la parte inferior del gráfico.

En cuanto al análisis de los resultados, se puede observar que la gran mayoría de los alumnos, a excepción del sujeto nº9, han fallado en al menos una operación de cálculo mental. Por otro lado, entre el total de niños representados en la gráfica nº 22, solamente seis no han tenido ningún error al compensar la resta con llevada. Se trata de los sujetos nº4, nº 3, nº 10, nº 17, nº 14 y nº 5.

De forma general, se puede considerar que se registran casi el mismo número de errores tanto por fallo en el cálculo: 56, como en el fallo por no tener en cuenta la llevada: 50.

Secuencia Didáctica

Teniendo en cuenta el contexto del aula, y tras haber analizado y valorado los resultados en la prueba de evaluación inicial, se propuso una secuencia de actividades que desarrollen las estrategias de cálculo mental descritas ya en apartados anteriores. Esta secuencia didáctica ha sido realizada por los mismos alumnos de la clase experimental.

Es conveniente, antes de presentar el ejemplo de secuencia didáctica, especificar que el tiempo para trabajar ésta fue reducido, debido a que la estancia en el centro terminaba en un plazo determinado. En definitiva, el estudio tuvo una duración de tres semanas de las que solo se pudieron aprovechar cinco sesiones. Por cuestiones de organización, el primero de los objetivos, se obvió por considerarlo ya

realizado previamente en el aula y por falta de tiempo para su repetición. Además, cabe mencionar que las actividades ideadas para esta propuesta no fueron desarrolladas en su totalidad, quedando algunas de ellas sin figurar en las sesiones que se muestran más adelante.

En la siguiente tabla se expone el horario de clase y los tiempos que han sido utilizados para elaborar esta secuencia.

Tabla 3. Horarios en referencia a las asignaturas del aula

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
Religión / AE	Inglés	Música	Lenguaje	C.M.
Inglés	C.M.	Euskera	Matemáticas	Inglés
Desdoble / E.F.	Matemáticas	Lenguaje	C.M.	Desdoble / E.F.
E.F. / Desdoble	Religión / AE	Matemáticas	Euskera	E.F. / Desdoble
C.M.	Lenguaje		Inglés	Euskera
Euskera	Inglés		Lectura	Plástica



Espacios utilizados para trabajar las sesiones.



Espacios ofrecidos por la tutora para reforzar algunas competencias.

A continuación se indican las actividades, fichas y materiales utilizados cada día, teniendo en cuenta que se realizaron siguiendo un orden, es decir; según los objetivos que se pretendían ir alcanzando y que ya han sido mencionados. Han sido un total de cinco sesiones y siete días en los que se intervino en el aula utilizando tanto materiales de carácter didáctico como actividades y fichas para resolver en casa.

Día 1	16 de abril de 2014	Actividades: nº 3, 5 y 6.
Observaciones	Se les entregó una ficha de tareas (Anexo II) para completar en casa durante un período vacacional de once días. Todos pudieron realizar las actividades y los resultados fueron en su gran mayoría correctos. Sin embargo, por motivos relacionados con la incomprensión del enunciado, algunos se confundieron en el procedimiento.	
Objetivo	Nº2: <i>Establecer una relación entre los números que formen la descomposición del diez y afianzar el conteo mental buscando el diez.</i>	

Día 2	28 de abril de 2014	Actividades: nº 2 y 4.
Observaciones	En este día se utilizaron dos sesiones porque en cada una se encontraba la mitad de la clase por motivos de desdoble. Cada sesión se dividió en dos tiempos ajustados para jugar a dos actividades. En el <i>Dominó 10</i> los alumnos con más dificultades se encontraron al principio con un conflicto cognitivo que les impedía avanzar en el siguiente paso. Pero con la mecánica y apoyos de los compañeros y profesores, supieron enfrentarlos. Se ha podido observar que ambos juegos estimularon a los alumnos para poner a prueba sus capacidades.	
Objetivo	Nº2: <i>Establecer una relación entre los números que formen la descomposición del diez y afianzar el conteo mental buscando el diez.</i>	

Día 3	29 de abril de 2014	Actividades: nº 9.
Observaciones	Para este juego hizo falta un previo repaso de los números pares e impares. Se comprobó también que les costaba coordinar dos pasos: sumar los dedos de ambas manos e identificar si se trataba de un nº par o impar. De tal modo que escribir la clasificación de los números pares e impares en la pizarra ayudó a facilitar el ritmo del juego. Importante establecer al principio parejas equiparables en cuanto a rapidez mental. En general se involucraron mucho en el juego al tener un factor competitivo.	
Objetivo	Nº3: <i>Reforzar la tabla de sumar entre los números comprendidos del uno al diez.</i>	

Día 4	5 de mayo de 2014	Actividades: nº12.
Observaciones	Analizando las dificultades que iban surgiendo y comenzar a trabajar otros objetivos, se diseñó una ficha (Anexo III) para que realizaran en casa. La ficha estaba vinculada a la actividad nº 12. Al corregir las fichas se observó que todos realizaban correctamente el procedimiento que exigía dicha actividad.	
Objetivo	Nº4: <i>Identificar una resta con llevada y consolidar un procedimiento que permita compensar la llevada.</i>	

Día 5	6 de mayo de 2014	Actividades: nº13.
Observaciones	En este día se representó el método con el que se pretendía que interiorizaran. Se utilizó el esquema similar al de una escalera como modelo para realizar los cálculos en el conteo de la resta. Cada alumno resolvió en la pizarra una resta con llevada siguiendo el esquema, para posteriormente expresar de forma oral los pasos realizados. En el momento de explicar oralmente cómo era el proceso parecían entenderlo pero a la hora de ponerlo en práctica les costaba aplicarlo.	
Objetivo	<i>Nº5: Interiorizar el procedimiento utilizando las estrategias de conteo mental.</i>	

Día 6	7 de mayo de 2014	Actividades: nº14.
Observaciones	A través de una ficha (Anexo IV) que se entregó a cada alumno, en la que se incluía la actividad nº14, se organizó un campeonato. En el primer grupo se eliminaron determinados apoyos visuales que el esquema de esta actividad ofrecía porque a algunos les llevaron a la confusión en el procedimiento. La misma pauta se mantuvo para el grupo que venía después. Se pudo constatar qué alumnos adquirieron una mayor celeridad en el cálculo de estas operaciones.	
Objetivo	<i>Nº5: Interiorizar el procedimiento utilizando las estrategias de conteo mental.</i>	

Día 7	9 de mayo de 2014	Actividades: nº15.
Observaciones	En este día se le entregó a cada alumno una ficha (Anexo V) vinculada a la actividad nº 15. En ambos grupos la actividad resultó estimulante y los alumnos fijaron su atención en resolver la frase oculta. Pero se pudieron constatar determinados fallos y bloqueos debido a confusiones en el proceso. No todos los alumnos llegaron a acabar las nueve restas de la ficha. Aproximadamente cinco de cada grupo pudo realizarlas completamente. Cabe destacar que en esta ocasión la dificultad era añadida ya que se enfrentaban a restas de tres cifras.	
Objetivo	<i>Nº5: Interiorizar el procedimiento utilizando las estrategias de conteo mental.</i>	

Evaluación Final

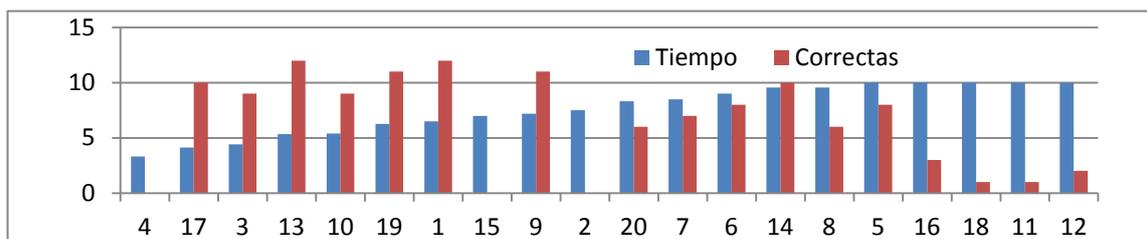
Después de haber trabajado los objetivos marcados para esta secuencia didáctica, se reservó una última sesión para realizar la evaluación final. De este modo se pretendía conocer los avances o retrocesos, en cuanto a los conocimientos y estrategias adquiridas por los alumnos. La prueba fue exactamente igual a la que se realizó para la evaluación inicial. De esta manera, se pretendía no alterar posibles variables externas al estudio, que pudiesen influir en la adquisición de estrategias que se habían interiorizado en el niño, y conservar las mismas variables utilizadas para el anterior registro.

- *Análisis y comparativa de los resultados*

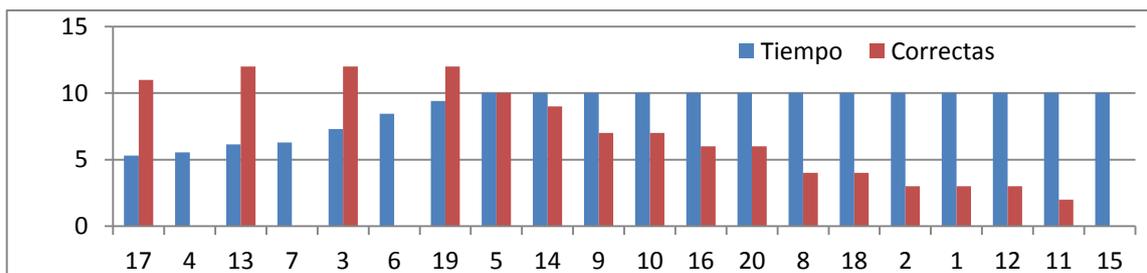
Para comprobar la evolución que han llevado los alumnos, tras haber realizado la intervención didáctica, se van a mostrar las gráficas correspondientes a la prueba inicial junto con la final. El análisis de los resultados de esta prueba final, se ha seguido con el mismo procedimiento que para la primera. Por un lado se ha diseñado una gráfica en la que se representan las variables *tiempo* y *correctas* en función de las doce restas que ocupan el ejercicio. En otra gráfica, se presentan las variables *fallo por conteo* y *fallo por no compensar* en función de los casos posibles para el total de las restas.

En primer lugar se han analizado las gráficas que muestran los resultados obtenidos en la prueba final comparándolos junto con la que se obtuvieron en la inicial. En ambas gráficas, que se muestran a continuación, las barras de color azul indican el tiempo establecido para realizar las doce restas. Una vez pasa el límite establecido, de diez minutos, las barras se mantienen constantes porque los alumnos ya no pudieron avanzar más en su tarea. Las barras de color rojo indican las respuestas correctas de los alumnos al finalizar la prueba. El valor máximo que se puede alcanzar para esta variable es doce, ya que es el número total de restas que hay en el primer ejercicio de la prueba.

Gráfica 3. Resultados Evaluación Inicial.



Gráfica 4. Resultados Evaluación Final.

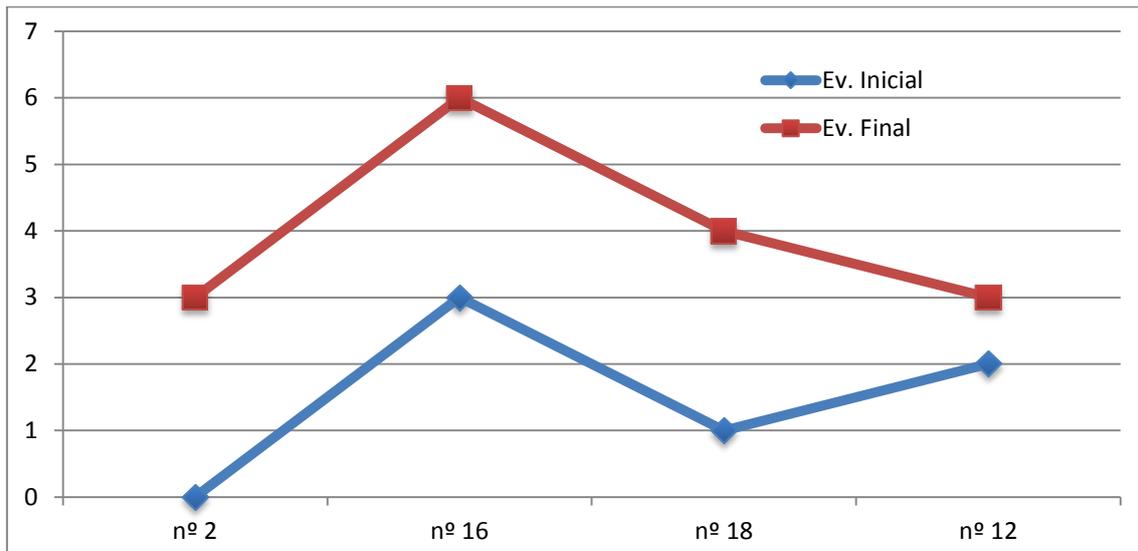


Después de observar detenidamente ambas gráficas, y centrándose en los valores que se han obtenido para la variable *tiempo*, se llega a la conclusión de que, en la prueba de evaluación final, la mayoría de los alumnos consume el tiempo límite establecido para realizar la prueba. Esto indica que casi el 50% de los alumnos se quedaron sin poder continuar la prueba, lo que refleja un aumento en el tiempo de respuesta.

En cuanto a los resultados de las restas, al observar los valores obtenidos para la variable *correctas*, no hay apenas diferencia en el número de respuestas buenas entre la prueba inicial y la final. El número de resultados correctos en ambas pruebas son similares.

Del perfil de alumnado que ha suspendido ambas pruebas, es decir, ha obtenido en la prueba inicial y final puntuaciones por debajo de seis correctas, se destacan cuatro individuos. Se ha observado que para estos cuatro niños (nº 2, nº 16, nº 18 y nº 12) las diferencias son positivas en cuanto a que mejoran sus resultados de la siguiente manera:

Figura 5. Comparación Resultados Correctos



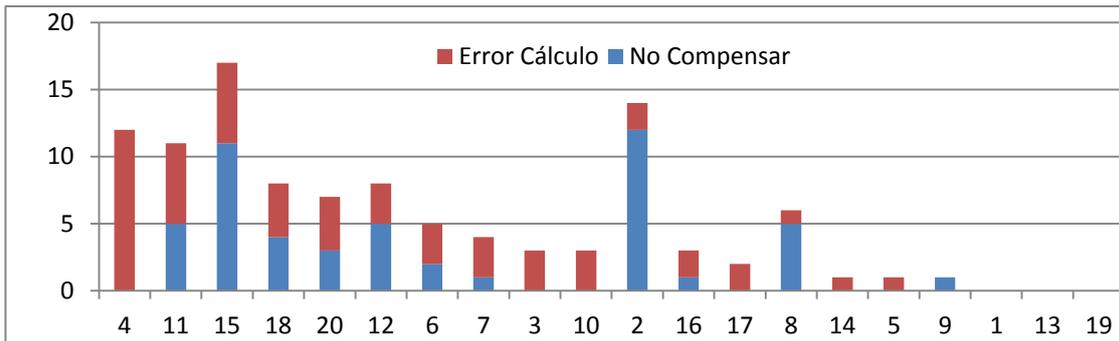
Por otro lado, resulta llamativo los datos que se reflejan para aquellos quienes, en ambas pruebas, han obtenido puntuaciones superiores a seis en la variable *correctas*. Se ha observado que en la última prueba han efectuado peores resultados que en la última. Es decir, para nueve sujetos las puntuaciones han bajado en al menos un punto con respecto a la anterior.

- *Análisis y comparativa en los tipos de errores*

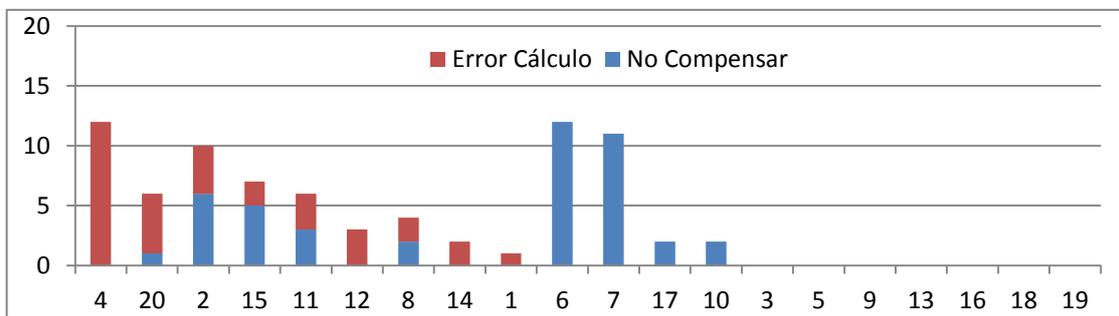
Otro de los puntos que se quiere desarrollar en este apartado, es la comparativa en cuanto a tipos de errores que se han cometido en ambas pruebas (inicial y final). Con las gráficas que se presentan a continuación se pretende clarificar las diferencias que se han producido.

En cada individuo aparece ilustrada una barra vertical dividida por dos colores: el azul que representa los fallos por no compensar la llevada y el rojo los errores en el cálculo. El sumatorio de ambos dos representa el total de fallos cometidos por el individuo. Se pueden dar más de doce fallos en un individuo porque se han podido contabilizar ambos errores en la misma resta, generando en algún caso hasta diecisiete errores.

Gráfica 6. Errores Evaluación Inicial

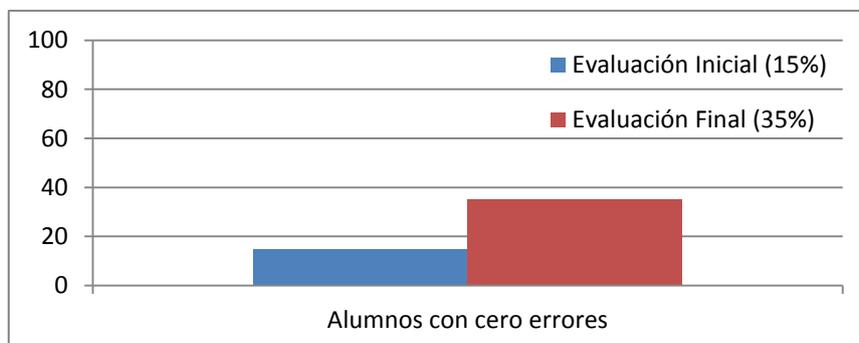


Gráfica 7. Errores Evaluación Final



Un aspecto muy notable que se puede observar al comparar las dos gráficas, es que el número de alumnos con cero fallos en la evaluación final aumenta con respecto a la evaluación inicial. En datos, se puede expresar diciendo que hay siete niños que no han fallado en ninguna operación (35% del total), frente a tres sujetos que tampoco lo hicieron en la prueba inicial (15% del total). Se puede constatar también que solamente dos niños, el nº 13 y el nº 19, mantienen la misma puntuación con cero errores en ambas pruebas. En porcentajes esto indica una mejoría del 20%.

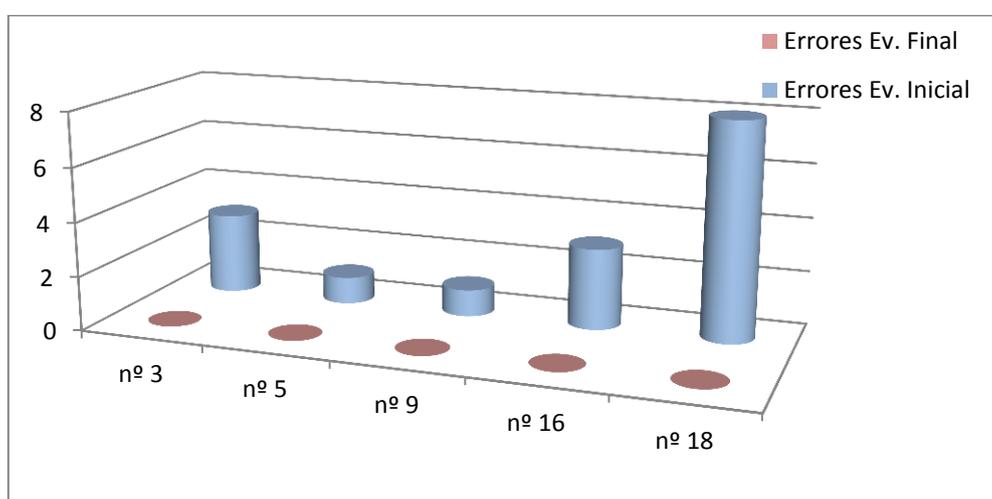
Gráfica 8. Comparación alumnos con cero errores



Para aportar mayor claridad al estudio se han analizado los cambios producidos en la evolución de cinco niños al no haber cometido errores en la prueba final a diferencia de la primera. Se excluyen en esta ocasión a los individuos nº 13 y nº 19 al no representar cambios con respecto a la primera prueba.

Se puede constatar que el sujeto nº3 ha bajado de tres errores a cero; el nº5 ha bajado de uno a cero; el nº9 de uno a cero; el nº16 de tres a cero y el nº 18, sorprendentemente, ha bajado de ocho a cero. Lo que implica una mejoría en el cálculo de las operaciones matemáticas.

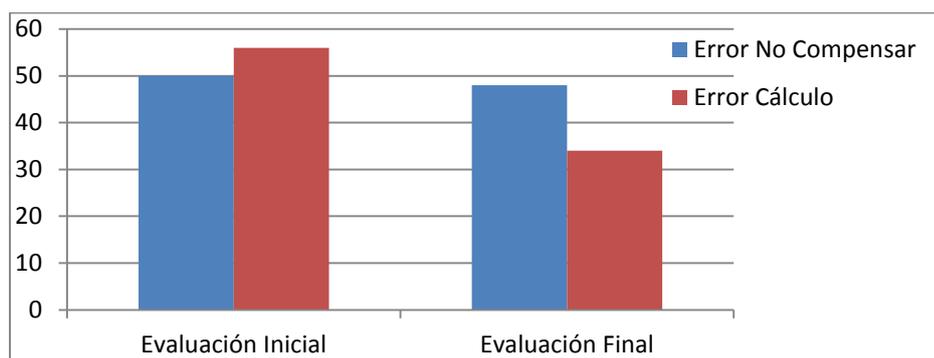
Gráfica 9. Comparación de cinco niños con respecto a los errores cometidos en ambas pruebas.



En cuanto a los errores cometidos en el cálculo, se ha observado que hay un descenso en la reiteración de estos fallos en comparación con la prueba inicial. En datos se puede decir que en la prueba inicial se registraron 56 fallos, por error en el cálculo, frente a 34 que se han contabilizado para la prueba final. Lo que indica una mejoría de veintidós puntos tras la intervención de la propuesta didáctica.

En cuanto a los errores producidos por no compensar la llevada se han registrado un total de 48 errores por este tipo, frente a los 50 que se contabilizaron en la primera evaluación. Esto nos indica una ligera mejoría en el proceso correcto del algoritmo utilizado.

Gráfica 10. Comparación tipo de errores



Un caso curioso, que no se puede ver representado en estas gráficas, es lo sucedido con el sujeto "nº 4". Es un alumno que tiende a cometer el error de calcular la diferencia entre minuendo y sustraendo, o viceversa, pero siguiendo siempre el mismo criterio: la cifra mayor es la que resta a la menor, sin distinguir si está en el minuendo o en el sustraendo. En el ejemplo que se expone a continuación se puede ver más claramente.

Figura 11. Ejercicio Sujeto nº4 Inicio

$$\begin{array}{r} 375 \\ - 167 \\ \hline 212 \end{array} \quad \begin{array}{r} 456 \\ - 178 \\ \hline 278 \end{array}$$

Figura 12. Ejercicio sujeto nº4 Final

$$\begin{array}{r} 375 \\ - 167 \\ \hline 218 \end{array} \quad \begin{array}{r} 456 \\ - 178 \\ \hline 328 \end{array}$$

En todas las restas de la evaluación inicial repite la misma tendencia con la salvedad de que ha operado correctamente la resta con llevada en la columna de las unidades. Esto puede ser debido a las destrezas trabajadas en clase durante la intervención didáctica en el aula.

6. MATERIALES

Los materiales utilizados en este trabajo se han concretado en el apartado de *Métodos*, concretamente para el análisis de las evaluaciones y para la secuencia didáctica propuesta. Se especifican los siguientes:

- **Tablas de Registros.** Han sido utilizados para anotar las individualidades de cada alumno, en relación con las fichas de evaluación que han realizado, y para analizar los resultados obtenidos.
- **Materiales didácticos.** Utilizados para el desarrollo de actividades propuestas en la secuencia didáctica, concretamente las regletas de *Cuisenaire*, la baraja de cartas y las fichas de *Dominó 10*. Cabe mencionar que éste último se ideó específicamente para este trabajo.
- **Fichas.** Durante los días en los que se ha intervenido en el aula, se ha recurrido a la realización de fichas. En éstas, se incluían actividades desarrolladas para la propuesta didáctica que han sido utilizadas como guía el desarrollo de sesiones y para la realización de tareas a completar en casa.

7. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Tras el análisis que se ha realizado, comparando las diferentes pruebas de evaluación, se desarrollarán a continuación una serie de valoraciones fundamentadas en los resultados y datos obtenidos.

En primer lugar, mencionar que el método propuesto parece resultar, al menos inicialmente, más lento. Ya que, según las pruebas realizadas al final de la intervención didáctica, se registra un mayor uso del tiempo permitido para completar las restas de la evaluación. Esto nos indica que todavía no han desarrollado la suficiente capacidad para asociar las estrategias de cálculo planteadas para resolver las restas con llevadas con mayor fluidez.

Sin embargo, se debe tener en cuenta que están habituados al cálculo mental basado en el conteo directo de uno en uno. Lo que justificaría el tiempo utilizado para

completar la última prueba al tener que enfrentarse a una estrategia recientemente adquirida y en proceso de maduración. También se puede inferir la posibilidad de haber obtenido mejores resultados, en cuanto a restas efectuadas y correctas, si el tiempo no hubiese sido limitado, dando lugar a mayor número de operaciones resueltas

Por otro lado, en base a los datos ofrecidos por las gráficas que indican el número de fallos, se puede decir que parece un método más seguro y fiable debido a que se ha registrado una diferencia significativa en la disminución de errores. De este modo nos atrevemos a inferir que el alumno, al realizar el algoritmo de la resta con llevadas, siguiendo este método, basado en las estrategias mencionadas, mantiene una secuenciación de cálculos que le favorecen en el resultado final.

Otro hecho observable es la mejoría que se da en los alumnos que suelen obtener peores resultados. Es decir, se contempla una evidente y significativa disminución del número de errores cometidos en la última prueba. Lo que nos invita a pensar sobre los efectos beneficiosos que podría tener la aplicación de éste método para un perfil de alumno.

Como conclusión, se deduce que el método propuesto afianza un proceso, en el que entran en juego una serie de estrategias mentales, que da lugar a menos errores en el transcurso de la operación. Teniendo en cuenta todo esto, cabe preguntarse qué resultados se recogerían si en vez de cinco sesiones fuesen el doble y con un mayor muestreo en el campo de estudio experimental.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Se ha podido comprobar que las actividades propuestas y trabajadas en el aula, para esta propuesta didáctica, desarrollan la estrategia de recuperación de hechos básicos. Ofrecen al alumno una mayor confianza en el cálculo mental, necesario en situaciones donde las operaciones se vuelvan más complejas.

Se debe tener en cuenta que el niño adquiere un aprendizaje significativo cuando combina y asocia los conocimientos, que ya domina, para llegar a nuevos conceptos o procedimientos. Además si al niño se le da la posibilidad de iniciar esa adquisición mediante el juego y materiales concretos, el aprendizaje estará más asegurado. Es por ello que para esta propuesta didáctica se ha incluido material diseñado específicamente para la práctica de estas estrategias. Con este material, los alumnos han jugado, se han divertido y han adquirido nuevas relaciones entre números, es decir, entre conceptos que ya retenían. Se trata por lo tanto de crear experiencias matemáticas donde el niño sea capaz de generar respuestas a situaciones problemáticas acordes a su nivel de capacidad cognitiva.

Se ha podido comprobar por los resultados de esta experiencia que esta propuesta didáctica de resolución de las restas con llevadas no es peor que las anteriormente trabajadas en el aula. Por este motivo podría considerarse también como válida.

Teniendo en cuenta que solo ha podido aplicarse en cinco sesiones de cincuenta minutos, cabe extrapolar que los resultados que han sido positivos, en disminución del número de errores, podrían todavía mejorarse si se persevera durante más sesiones o si la propuesta se aplicara desde el inicio del aprendizaje.

Se ha observado que los alumnos que habían interiorizado la forma de resolución correcta de las restas con llevadas prácticamente no han modificado sus resultados. Sin embargo, los alumnos que sistemáticamente no alcanzaban ni el 50% de las respuestas correctas en la primera evaluación han sido los que más han mejorado sus resultados. Lo que puede explicarse como una mejor comprensión de otra variante didáctica a la empleada hasta ese momento.

Sería interesante repetir el estudio en el futuro con más alumnos y con más sesiones para comprobar la validez de la estrategia propuesta y certificar la mejoría de los resultados que en esta primera experiencia piloto se han constatado.

REFERENCIAS

Castro, E. (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis, S.A.

Castro, E.; Rico, L. (2007). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis, S.A.

Gómez, B. (s.f.) Desarrollo histórico de la enseñanza de la Aritmética: el caso de los algoritmos de cálculo. Universidad de Valencia, España.

Gómez, G. (2008). El uso de la tecnología y la comunicación y el diseño curricular. *Revista Educación*, 77 – 97, 32 (1).

Gutiérrez, A. (1991). *Área de conocimiento. Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis, S.A.

Iglesias, J. (1999). Los algoritmos de la suma y de la resta a través de las Regletas de Cuisenaire. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 3 – 12, 39.

Jimeno, M. (2002). Al otro lado de las fronteras de las matemáticas escolares. (Tesis doctoral inédita). Universidad de Málaga, España.

Moreira-Mora, T. (2009). Relación entre factores individuales e institucionales con el rendimiento en matemática: un análisis multivariado. *Revista Avances en Medición*, 115 – 128, 7.

Noda, A., Bruno, A. (2009). *Conceptos, estrategias y errores en las operaciones de suma y resta en alumnos con síndrome de Down*. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 333-344). Santander: SEIEM

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, 158 -180, 23 (71).

.

ANEXOS

Anexo 1

HOJA DE EJERCICIOS PARA LA OBSERVACIÓN INICIAL

Fecha:

Nombre:

1) Resuelve las siguientes restas. (Tiempo límite en 10')

$$\begin{array}{r} 585 \\ - 396 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 434 \\ - 236 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 341 \\ - 127 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 541 \\ - 357 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 423 \\ - 364 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 540 \\ - 236 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 530 \\ - 254 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 421 \\ - 165 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 375 \\ - 167 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ - 178 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 562 \\ - 493 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7652 \\ - 4824 \\ \hline \end{array}$$

2) Resuelve las siguientes sumas:

$$4 + 3 =$$

$$3 + 7 =$$

$$5 + 4 =$$

$$3 + 6 =$$

3) Resuelve las siguientes restas:

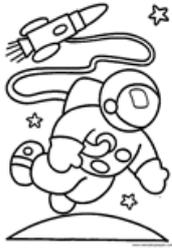
$$\begin{array}{r} 10 \\ - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 2 \\ \hline \end{array}$$

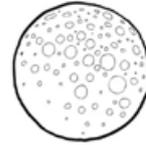
$$\begin{array}{r} 10 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 1 \\ \hline \end{array}$$

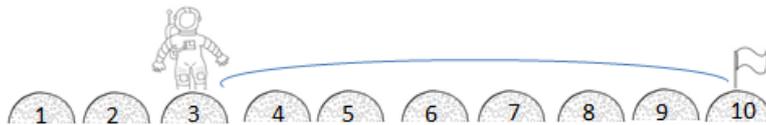
Anexo 2



EJERCICIOS PARA ASTRONAUTAS



LOS ASTRONAUTAS, DAN SALTOS DE 10 EN 10.
PARA SER UN VERDADERO ASTRONAUTA
DEBERÁS APRENDER A CONTAR HASTA 10.



1. Completa las casillas vacías para que sumen 10.

a) $3 + \boxed{7} = 10$

f) $6 + \boxed{} = 10$

b) $5 + \boxed{} = 10$

g) $8 + \boxed{} = 10$

c) $2 + \boxed{} = 10$

h) $7 + \boxed{} = 10$

d) $1 + \boxed{} = 10$

i) $9 + \boxed{} = 10$

e) $4 + \boxed{} = 10$

j) $10 + \boxed{} = 10$

2. Pinta cada número con su pareja para que sumen 10.

2	4	3
8 4 2 7 5 6 8 9 5 2	7 8 7 6 2 6 2 5 8 6	6 9 5 7 7 6 4 8 7 2
5	1	6
7 2 5 6 5 8 7 9 4 5	4 9 6 7 2 8 9 9 2 5	6 4 5 8 2 4 4 7 2 8
7	8	9
4 3 8 3 5 2 6 3 5 2	2 4 7 6 4 5 8 2 9 2	8 1 5 2 1 6 7 4 2 1

3. Completa las fichas del dominó para que sus extremos sumen 10.

5	7	3	4	4	2		8	4	5		8
3	8		1	4		1	5	3		1	2
5		4	7	7		8	1	5	6		8
2	7		8	4		5	2	7	9		8
5		2	6	2	3		4	5		4	8
5	7	3	4	4	2		8	4	5		8
3	8		1	4		1	5	3		1	2
5		4	7	7		8	1	5	6		8
2	7		8	4		5	2	7	9		8
5		2	6	2	3		4	5		4	8

Anexo 3



DETECTIVES EN ACCIÓN



Nombre del detective:

1. ¿Reconoces al sospechoso? Identifica qué resta es con "llevada".

- Redondea el nº que es mayor. Si alguno de ellos está en la fila de abajo, entonces sí es "con llevada".
- Si la resta es "con llevada" entonces rodéala de azul.

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \ 3 \\ - \ 1^+ \ \textcircled{7} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{4} \ \textcircled{6} \\ - \ 2 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 2 \\ - \ 4 \ 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 8 \\ - \ 2 \ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 5 \ 7 \\ - \ 3 \ 4 \ 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 6 \ 2 \\ - \ 1 \ 2 \ 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 4 \ 2 \\ - \ 1 \ 7 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 3 \ 8 \\ - \ 1 \ 7 \ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 4 \ 8 \\ - \ 1 \ 3 \ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 3 \ 9 \\ - \ 1 \ 5 \ 5 \\ \hline \end{array}$$

2. Investiga qué resultado es el correcto ayudándote con tu lupa.

$$\begin{array}{r} 4 \ 3 \\ - \ 1^+ \ 7 \ \textcircled{3} \\ \hline 2 \ 4 \\ \hline \textcircled{2 \ 6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 4 \\ - \ 1 \ 8 \ \textcircled{} \\ \hline 1 \ 6 \\ \hline 1 \ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 3 \\ - \ 2 \ 9 \ \textcircled{} \\ \hline 2 \ 6 \\ \hline 2 \ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \ 2 \\ - \ 5 \ 8 \ \textcircled{} \\ \hline 0 \ 4 \\ \hline 1 \ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \ 2 \\ - \ 4 \ 5 \ \textcircled{} \\ \hline 2 \ 5 \\ \hline 2 \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 1 \\ - \ 1 \ 9 \ \textcircled{} \\ \hline 1 \ 2 \\ \hline 1 \ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \ 3 \\ - \ 3 \ 8 \ \textcircled{} \\ \hline 2 \ 5 \\ \hline 4 \ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 2 \\ - \ 2 \ 3 \ \textcircled{} \\ \hline 1 \ 9 \\ \hline 1 \ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 8 \\ - \ 2 \ 9 \ \textcircled{} \\ \hline 1 \ 6 \\ \hline 0 \ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 3 \\ - \ 3 \ 5 \ \textcircled{} \\ \hline 2 \ 8 \\ \hline 1 \ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 8 \\ - \ 1 \ 9 \ \textcircled{} \\ \hline 0 \ 9 \\ \hline 1 \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 7 \\ - \ 3 \ 9 \ \textcircled{} \\ \hline 1 \ 4 \\ \hline 0 \ 8 \end{array}$$

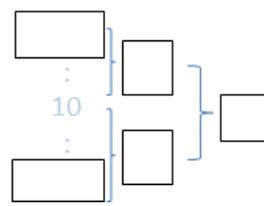
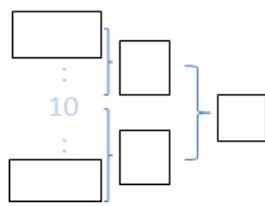
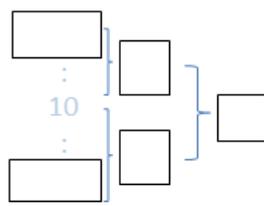
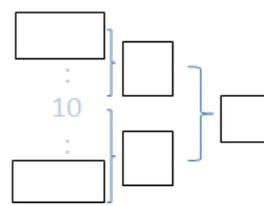
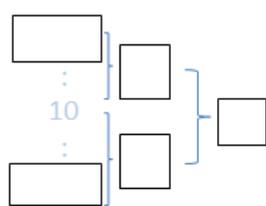
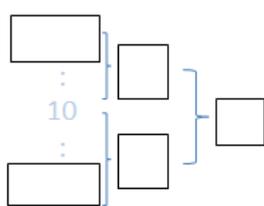
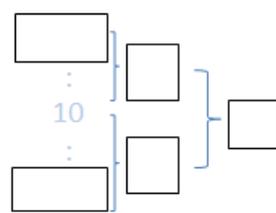
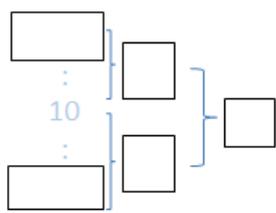
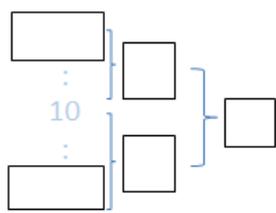
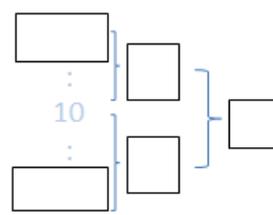
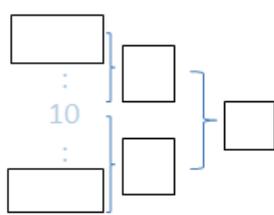
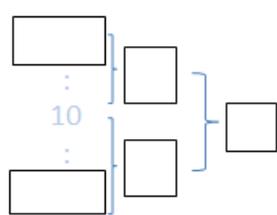
Anexo 4



CAMPEONATO EXTREME-MATHS 2014

Nombre del concursante:

¿Estás preparado? Sí No



Anexo 5



DESVELA EL SECRETO QUE
CAMBIARÁ EL MUNDO



$$\begin{array}{r} 342 \\ - 197 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 527 \\ - 494 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 734 \\ - 328 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 523 \\ - 198 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 856 \\ - 386 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 435 \\ - 136 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 624 \\ - 389 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 435 \\ - 372 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 264 \\ - 188 \\ \hline \end{array}$$

CLAVES SECRETAS:

145: PORQUE

325: PERTENECE

063: SE

033: EL

965: PRESIDENTE

299: A

406: MUNDO

470: SOLO

430: LA

592: SECRETO

803: JUSTICIA

450: ESTRELLA

076: ATREVEN

235: QUIENES

304: EMPEZAR

204: TIEMPO

023: PARA

457: TÚ