

MATEMÁTICAS

Amaia OLLETA SÁNCHEZ

ANÁLISIS DE LA
ENSEÑANZA DEL
NÚMERO DECIMAL Y
DISEÑO DE UNA
PROPUESTA DIDÁCTICA
PARA TRABAJAR EL
CONCEPTO

TFG/*GBL* 2014

upna
Universidad
Pública de Navarra
Nafarroako
Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Grado en Maestro de Educación
Primaria /
Lehen Hezkuntzako Irakasleen
Gradua

Grado en Maestro en Educación Primaria
Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Trabajo Fin de Grado
Gradu Bukaerako Lana

***ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA DEL
NÚMERO DECIMAL Y DISEÑO DE UNA
PROPUESTA DIDÁCTICA PARA
TRABAJAR EL CONCEPTO***

Amaia OLLETA SÁNCHEZ

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y SOCIALES
GIZA ETA GIZARTE ZIENTZIEN FAKULTATEA

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Estudiante / Ikaslea

Amaia OLLETA SÁNCHEZ

Título / Izenburua

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

Grado / Gradu

Grado en Maestro en Educación Primaria / Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Centro / Ikastegia

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales / Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Director-a / Zuzendaria

M^a Inmaculada LIZASOÁIN IRISO

Departamento / Saila

Matemáticas / Matematika

Curso académico / Ikasturte akademikoa

2013 / 2014

Semestre / Seihilekoa

Primavera / Udaberrik

Preámbulo

El Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, modificado por el Real Decreto 861/2010, establece en el Capítulo III, dedicado a las enseñanzas oficiales de Grado, que “estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa de un Trabajo Fin de Grado [...] El Trabajo Fin de Grado tendrá entre 6 y 30 créditos, deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título”.

El Grado en Maestro en Educación Primaria por la Universidad Pública de Navarra tiene una extensión de 12 ECTS, según la memoria del título verificada por la ANECA. El título está regido por la *Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria*; con la aplicación, con carácter subsidiario, del reglamento de Trabajos Fin de Grado, aprobado por el Consejo de Gobierno de la Universidad el 12 de marzo de 2013.

Todos los planes de estudios de Maestro en Educación Primaria se estructuran, según la Orden ECI/3857/2007, en tres grandes módulos: uno, *de formación básica*, donde se desarrollan los contenidos socio-psicopedagógicos; otro, *didáctico y disciplinar*, que recoge los contenidos de las disciplinas y su didáctica; y, por último, *Practicum*, donde se describen las competencias que tendrán que adquirir los estudiantes del Grado en las prácticas escolares. En este último módulo, se enmarca el Trabajo Fin de Grado, que debe reflejar la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas. Finalmente, dado que la Orden ECI/3857/2007 no concreta la distribución de los 240 ECTS necesarios para la obtención del Grado, las universidades tienen la facultad de determinar un número de créditos, estableciendo, en general, asignaturas de carácter optativo.

Así, en cumplimiento de la Orden ECI/3857/2007, es requisito necesario que en el Trabajo Fin de Grado el estudiante demuestre competencias relativas a los módulos de formación básica, didáctico-disciplinar y practicum, exigidas para todos los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria.

En este trabajo, el módulo de *formación básica* recoge los aspectos relacionados con el currículo de Educación Primaria y su organización, en relación a la introducción de los números decimales en quinto curso de Educación Primaria. Se analiza la influencia que ejercen en el currículo las teorías sobre el desarrollo de la inteligencia humana de autores como Jean Piaget o Lev S. Vygotski, así como las teorías de Brousseau en relación al útil papel que desempeña el error en el aprendizaje. Este módulo se puede ver reflejado en los apartados 3.1 y 3.2 así como en el apartado 4.1.

El módulo *didáctico y disciplinar* aparece reflejado en varios puntos del trabajo, más concretamente el módulo didáctico en los apartados 3.3, 4.2, 4.3 y 4.4 y el módulo disciplinar a lo largo del apartado 2. Este módulo permite enmarcar el concepto matemático de número decimal y su enseñanza en la actualidad, analizando cuáles son los errores de los números decimales cometidos con más frecuencia, averiguando sus posibles causas y presentando una propuesta didáctica sobre los números decimales que evitaría la aparición de dichos errores.

Asimismo, el módulo *practicum* se desarrolla en el apartado 5, que se corresponde con los materiales y métodos y el desarrollo de dos secuencias didácticas: la primera, diseñada para alumnos de quinto curso de Educación Primaria, y la segunda, planteada para alumnos de cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria. Este módulo permite demostrar cómo se podrían trabajar los números decimales por medio de actividades que fomenten un aprendizaje sin errores de los números decimales.

Resumen

La introducción de los números decimales, que se realiza en quinto curso de Educación Primaria de acuerdo con las teorías sobre el desarrollo de la inteligencia humana, es fuente de numerosos errores y dificultades de aprendizaje en el alumnado.

En este trabajo, se evidencian, por medio de un cuestionario, los errores más frecuentes que existen en el aprendizaje de los números decimales y se investigan cuáles podrían ser las causas de dichos errores, analizando la forma en que los libros de texto más utilizados presentan el tema. Con el objetivo de evitar la aparición de dichos errores, se presenta una propuesta, diferente a las de los libros de texto analizados, para introducir y trabajar los números decimales.

A su vez, en este trabajo se proponen dos secuencias didácticas: la primera, diseñada para alumnos de quinto curso de Educación Primaria y enfocada al aprendizaje de los diferentes aspectos del concepto de número decimal; la segunda, planteada para alumnos de cursos inferiores y enfocada a la introducción del conocimiento de estos números, para evitar así la aparición de las dificultades y errores de los números decimales cuando estos alumnos comiencen quinto curso de Primaria.

Palabras clave: números decimales; errores; enseñanza-aprendizaje; propuestas; secuencia didáctica.

Abstract

The introduction of decimal numbers, which takes place in year five of Primary Education in accordance with the theories on the human intelligence development, is a source of numerous errors and learning difficulties among students.

In this research, we present, by means of a questionnaire, the most frequent mistakes that appear in the learning of decimal numbers. Besides, we analyze their possible causes, focusing on how the most used text books deal with them. In order to prevent such errors, a proposal, different to those appearing in the textbooks analyzed, is introduced to start working decimal numbers.

In addition, in this research two didactic sequences are set out: the first one is designed for students in year five of Primary Education and it is focused on the learning of the different aspects of decimal numbers. The second one refers to students of lower years and it is centred on the introduction of the knowledge of these numbers in order to avoid, in this way, the arising of some difficulties and errors when these students will face with decimal numbers in their year five of Primary Education.

Keywords: decimal numbers; errors; teaching-learning; proposals; didactic unit.

Résumé

L'introduction de nombres décimaux, qui a lieu dans la cinquième année de l'Enseignement Primaire en accord avec les théories sur le développement de l'intelligence humaine, est une source de nombreuses erreurs et de difficultés d'apprentissage chez les élèves.

Dans cette recherche, on montre, au moyen d'un questionnaire, les erreurs les plus fréquentes qui existent dans l'apprentissage des nombres décimaux et on recherche lesquelles pourraient être les causes de ces erreurs, en analysant la façon dont les manuels scolaires les plus utilisés présentent le sujet. Afin de prévenir l'apparition de ces erreurs, une proposition, différente de celles des manuels analysés, pour introduire et travailler les nombres décimaux est présentée.

En outre, dans cette recherche on propose deux séquences didactiques: la première, conçue pour les élèves de la cinquième année de l'Enseignement Primaire, aborde l'apprentissage des différents aspects du nombre décimal; la deuxième, proposée pour des étudiants des années inférieures, envisage l'introduction à la connaissance de ces nombres pour éviter ainsi l'apparition de difficultés et d'erreurs de nombres décimaux lorsque ces élèves commencent la cinquième année de l'Enseignement Primaire.

Mots-clefs: nombres décimaux; erreurs; enseignement-apprentissage; propositions; séquence didactique.

Índice

Introducción	
1.1 Justificación	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Cuestiones previas	4
2. El concepto de número decimal	5
2.1 Antecedentes históricos de los números decimales	5
2.2 Los decimales: ampliando los conjuntos numéricos	6
2.3 La noción de decimal	7
2.3.1 Expresiones y números decimales	7
2.3.2 Un mismo número decimal, diferentes representaciones	9
2.3.3 Orden y comparación de los números decimales	9
2.3.4 Propiedad de la densidad	10
2.3.5 Operaciones con números decimales	10
3. La enseñanza de los números decimales en Primaria	12
3.1 Presencia de los números decimales en quinto curso de Educación Primaria	12
3.2 La introducción de los números decimales en quinto curso de Educación Primaria	14
3.2.1 La teoría de Jean Piaget	15
3.2.2 La teoría de Lev S. Vygotski	18
3.3 La enseñanza actual de los números decimales	19
4. El aprendizaje de los números decimales	22
4.1 La utilidad del error en el proceso de aprendizaje	22
4.2 Los errores y dificultades de aprendizaje de los números decimales	23
4.3 Causas de los errores y las dificultades de aprendizaje de los números decimales	27
4.4 Resolución de los errores y dificultades de aprendizaje de los números decimales	35
5. Material y métodos	40
5.1 El experimento	40
5.1.1 Objetivos	40
5.1.2 Contexto y población	40
5.1.3 El cuestionario	41
5.1.4 Análisis y resultados del cuestionario	43
5.2 Secuencias didácticas	48
5.2.1 Secuencia didáctica para quinto curso de Educación Primaria	49
5.2.2 Secuencia didáctica para cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria	57
Conclusiones y cuestiones abiertas	
Referencias	
Anexos	
A. Anexo I	
A. Anexo II	
A. Anexo III	
A. Anexo IV	
A. Anexo V	
A. Anexo VI	
A. Anexo VII	
A. Anexo VIII	
A. Anexo IX	
A. Anexo X	
A. Anexo XI	
A. Anexo XII	
A. Anexo XIII	
A. Anexo XIV	

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Justificación

El presente Trabajo de Fin de Grado pertenece al área de Didáctica de las Matemáticas. La elección de este tema, de entre todos los campos de conocimiento y temas de Trabajo de Fin de Grado propuestos, no fue impuesta ni obligada por la imposibilidad de elegir otras opciones, sino que se vio motivada por la relevancia que presentan las matemáticas en nuestra vida cotidiana, por los avances educacionales que supone su estudio y porque resulta crucial su correcta enseñanza en el aula.

El tema elegido fue “Diseño de métodos para la resolución de problemas matemáticos o de propuestas que fomenten la creatividad y el descubrimiento en el aprendizaje de algún aspecto concreto de las matemáticas”. El estudio de los números decimales constituyó el aspecto concreto de las matemáticas escogido para llevar a cabo este trabajo.

¿Y por qué los números decimales? Para responder a esta pregunta y llegar a comprender la justificación del tema propuesto, es necesaria la elaboración de los dos apartados siguientes.

1.1.1 El contexto de un aula real

Mi último periodo de prácticas escolares del Grado de Maestro en Educación Primaria fue llevado a cabo en un colegio concertado situado en el barrio de San Juan, que acoge alumnos de edades comprendidas entre los tres y los dieciocho años, y que oferta, por tanto, todas las etapas educativas.

El nivel cultural, social y económico de la población de las zonas de influencia del centro escolar es medio / alto. Las familias que configuran la comunidad educativa del centro presentan una distribución plural y variada en cuanto a su ejercicio profesional. Además, es muy alto el porcentaje de estas familias en las que tanto el padre como la madre ejercen una actividad profesional.

A pesar de que el centro escolar ha optado por el modelo G para desarrollar su labor educativa, utiliza desde su creación, además del castellano, otras lenguas europeas, como el francés, el inglés y el alemán, para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de su alumnado. Actualmente, en el año 2014, el colegio se ha homologado como centro PAI (Programa de Aprendizaje de Inglés).

Estas últimas prácticas escolares presentaban un carácter generalista, es decir, estaban enfocadas hacia la observación y la enseñanza de las materias troncales, impartidas en castellano: Matemáticas, Lengua Castellana y Conocimiento del Medio. Para ello, se me adjudicó una clase de quinto curso de Educación Primaria, en la cual tuvieron lugar mis experiencias didácticas.

Centrándonos en la materia de Matemáticas, nada más iniciar el periodo de prácticas escolares me surgió la siguiente duda, que expuse a mi tutora del centro: *¿Qué tema matemático, de entre todos los propuestos en el currículo de la Comunidad Foral de Navarra, resulta más complicado para los alumnos de quinto curso de Educación Primaria?* La respuesta al respecto fue: *Los números decimales.*

Esta experiencia me generó una gran cantidad de preguntas y dudas, que marcarían el comienzo de mi Trabajo de Fin de Grado y motivarían su ejecución, entre otras, *¿Por qué los números decimales? ¿Qué dificultades generan los números decimales? ¿Por qué aparecen esas dificultades? ¿Se podrían corregir, o incluso evitar, esas dificultades y errores?*

Todas estas preguntas iban a ser contestadas y justificadas, no solamente por el estudio teórico de este aspecto concreto de las matemáticas, sino también por la posibilidad de observación y puesta en práctica de todo aquello que había sido investigado en un aula real de quinto curso de Educación Primaria.

1.1.2 Importancia social y cultural de los decimales

Tal como defiende Enrique Castro (2003), la habilidad para leer, escribir y entender diversos tipos de números es uno de los aspectos más importantes de nuestra cultura. Todos los días, en los medios de comunicación encontramos informaciones como: “El I.P.C. sube 1,7% en la Rioja”, “El presupuesto para el año próximo es de 18,5 billones de euros”, “La marca mundial de los 100 m es 9,84 segundos”, “El disco duro de un ordenador es de 7,1 GB”, “El pívot de baloncesto Lance Gerwald mide 2,07 m”, etc. Para que una persona comprenda estas informaciones se requiere que conozca el significado de los números escritos con coma, además de entender el sentido de las unidades que los acompañan.

No solamente encontramos números con coma en los medios de comunicación, también aparecen con frecuencia en numerosas situaciones de la vida diaria como el peso del pan, la cantidad de kilómetros recorridos por un automóvil, la capacidad de un envase, la temperatura del día, los resguardos de la compra, entre muchos otros.

Es por esta continua presencia, por lo que he decidido basar mi Trabajo de Fin de Grado en este aspecto concreto de las matemáticas, puesto que todo ciudadano necesita en mayor o menor grado los números decimales, ya sea para su trabajo o para poder interpretar correctamente el significado de muchas informaciones que le vienen a través de la prensa, la radio o la televisión.

1.2 Objetivos

Todo trabajo de investigación, reflexión, aplicación o estudio de un tema o campo de conocimiento concreto se configura en función de unos objetivos que dan sentido al trabajo. En nuestro caso son los siguientes:

- Averiguar cuáles son las dificultades de aprendizaje y errores más frecuentes relacionados con los números decimales.

- Investigar cómo se podrían paliar dichas dificultades o evitar dichos errores relacionados con los números decimales.
- Elaborar dos propuestas de actividades: la primera, diseñada para alumnos de quinto curso de Educación Primaria y enfocada al aprendizaje de los diferentes aspectos del concepto de número decimal; la segunda, planteada para alumnos de cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria y enfocada a la introducción del conocimiento de estos números, para evitar así la aparición de las dificultades y errores de los números decimales cuando estos alumnos comiencen quinto curso de Primaria.

1.3 Cuestiones previas

Además de proponerse estos objetivos en el trabajo, también se plantean una serie de cuestiones a las que se pretenderá encontrar respuesta a lo largo de la puesta en práctica de aquello investigado. Las cuestiones son las siguientes:

1. ¿Cómo se enseñan hoy en día los números decimales?
2. ¿A qué dificultades se enfrentan los niños y qué errores cometen?
3. ¿Por qué ocurren estos errores?
4. ¿Cómo podríamos corregirlos o evitarlos?
5. ¿Qué actividades fomentarían un aprendizaje sin errores de los números decimales?

2. EL CONCEPTO DE NÚMERO DECIMAL

2.1 Antecedentes históricos de los números decimales

De acuerdo con Pascual y Wilhelmi (2011), la consolidación de los números decimales aparece asociada a una época rica en transformaciones sociales ocurridas a principios del siglo XVI. Los grandes descubrimientos y expansiones llevadas a cabo en este siglo no solamente produjeron una nueva estructura sociológica en Europa, sino que también dieron lugar al nacimiento de la ciencia moderna y a la transformación de la religión, la filosofía y la economía. Tanto la navegación, que empezó a necesitar distancias más precisas, como el comercio, que se expandió y precisó de cálculos más exactos, explican el contexto social que va a favorecer el interés por los números decimales.

El principal protagonista de la extensión de los números decimales en occidente fue el matemático belga Simon Stevin. En 1585, propuso utilizar, además de las unidades, decenas, centenas... que ya se utilizaban en el sistema de numeración decimal, unas fracciones de la unidad que más tarde recibirían el nombre de décimas (con diez décimas hacemos una unidad), centésimas (con diez centésimas hacemos una décima), milésimas, diezmilésimas... para representar cantidades menores que la unidad.

También sugirió que, en lugar de usar los denominadores para expresar las partes fraccionarias de la unidad, se podría adoptar un criterio de posición. La idea era que el número de décimas que tuviera una cantidad no entera ocupara una determinada posición (a la derecha de las unidades), el número de centésimas, la posición siguiente a su derecha, y así sucesivamente.

Años más tarde, el escocés John Napier, que siempre firmaba como Neper, introdujo la coma (o el punto en los países anglosajones) para separar la parte entera de la no entera en cada número.

Una vez que el sistema métrico decimal fue adoptado por todos los países europeos, el cálculo con decimales adquirió toda su relevancia en la vida práctica.

2.2 Los decimales: ampliando los conjuntos numéricos

Los números naturales sirven para enumerar colecciones y para contar y permiten dar la medida de una magnitud discreta. Sin embargo, los números naturales no cubren todas las necesidades numéricas y se necesita ampliar el sistema numérico hasta conseguir un sistema más completo que permita resolver un mayor número de problemas teóricos y prácticos.

La insuficiencia de los números naturales se pone de manifiesto desde dos puntos de vista:

- Desde el punto de vista práctico, los números naturales se muestran insuficientes cuando tratamos de medir magnitudes continuas.
- Desde el punto de vista teórico, los conceptos matemáticos tienen una exigencia intrínseca que los hace tender a una generalización que permita, por una parte, completar las teorías existentes suprimiendo restricciones y haciendo las ampliaciones necesarias y, por otra, hacerlo sin referencia alguna a las situaciones concretas que iniciaron la teoría.

La primera extensión del conjunto de los números naturales nos lleva al conjunto de los números enteros. Sin embargo, de nuevo nos encontramos con que este conjunto resulta insuficiente para resolver todos los problemas numéricos. Por esta razón, ante la necesidad de representar numéricamente aquello que no se puede describir mediante un número entero, tiene lugar la construcción teórica del conjunto de los racionales.

La escritura decimal surge a partir de la extensión natural hacia la derecha de las reglas utilizadas en el sistema de numeración decimal, de forma que cada lugar representa la décima parte del valor del lugar precedente, lo que permite

representar cantidades inferiores a la unidad. A las unidades inferiores a la unidad se les llama *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, etc.

2.3 La noción de decimal

2.3.1 Expresiones y números decimales

Frecuentemente se utilizan indistintamente los conceptos matemáticos de *expresión decimal de un número* y de *número decimal*. No obstante, son conceptos distintos que deben ser diferenciados en la escuela para evitar futuras dificultades de aprendizaje. Por un lado, un número decimal puede expresarse con punto decimal pero también tiene otras expresiones; por otro lado, no todas las expresiones numéricas que tienen un punto decimal corresponden a un número decimal. Julia Centeno nos previene respecto a esta posible confusión:

“Debemos distinguir bien cuando hablamos de un número y cuando nos referimos a una de sus diversas formas de representarlo. Hablamos de un número cuando nos ocupamos de su función, de los problemas que permite resolver o de las propiedades que le distinguen de otras clases de números”. (Centeno, 1988, 22).

La introducción de la coma o el punto para separar la parte entera de la no entera en cada número permite expresar cantidades de la forma que aparece a la derecha en el ejemplo siguiente y que se denomina *expresión decimal de un número*.

$$2 * 100 + 3 * 10 + 1 + 2 * \frac{1}{10} + 3 * \frac{1}{100} \rightarrow 231'23$$

La parte de la expresión decimal que queda delante de la coma se denomina *parte entera* y la que queda después, *parte decimal* del número. Las cifras que aparecen en la parte decimal se denominan *cifras decimales* de la expresión.

Por tanto, la expresión decimal de un número es una nueva forma de expresar cantidades que ya sabíamos representar con fracciones, es decir, una nueva forma de representar números racionales. Esta notación también puede utilizarse para representar números que no admiten una fracción como representante, es decir, números irracionales. Esta nueva forma de expresar cantidades o números resulta más cómoda que las fracciones para hacer comparaciones y operaciones aritméticas utilizando los algoritmos de cálculo definidos para los números naturales.

Sin embargo, no deben confundirse los números decimales con una de sus representaciones escritas con coma o punto, que por ser la más práctica, es la que más utilizamos. Siguiendo el criterio de autores como Centeno (1988) o Socas (2001), llamamos *números decimales* únicamente a los números racionales que tienen como representante una fracción decimal, definida ésta como aquella fracción cuyo denominador es una potencia de diez. Sus expresiones decimales son *finitas*. Los números racionales que no son decimales dan lugar a las *expresiones decimales periódicas infinitas*. Todos los números con expresión decimal finita o periódica forman el conjunto de los números racionales.

Tabla 1. Distinción entre números racionales (decimales y no decimales) y números irracionales

Números racionales		Números irracionales
Números decimales	Números no decimales	
Representables con fracción decimal	Representables con fracción, pero no con fracción decimal	No representables con ningún tipo de fracción
Expresión decimal finita	Expresión decimal periódica	Expresión decimal infinita no periódica

De este modo, diferenciamos entre las expresiones decimales de un número (que también existen para los números irracionales) y los números decimales como subconjunto de los números racionales.

2.3.2 *Un mismo número decimal, diferentes representaciones*

Con el objetivo de favorecer la comprensión y evitar futuros errores, nos parece importante que el alumnado sea capaz de realizar la distinción entre el número (el concepto abstracto representado) y la representación o expresión del número, que no tiene por qué ser única.

Tal como hemos indicado arriba, un número decimal puede representarse de distintas maneras, por ejemplo:

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000} = \frac{5000}{10000} = \dots$$

O bien:

$$0.5 = 0.50 = 0.500 = 0.5000 = 0.50000 = \dots$$

La importancia de conocer varias escrituras equivalentes de un mismo número se pone de manifiesto en la realización de los cálculos porque permite elegir en cada caso aquella escritura que conviene mejor a la situación en la que interviene el número.

2.3.3 *Orden y comparación de los números decimales*

En los decimales el número de cifras no es relevante como elemento para definir el orden. Para ordenarlos, debemos recurrir a la comparación entre ellos, realizando los siguientes pasos:

Dados dos números con expresión decimal:

- Es mayor el que mayor parte entera tenga.

- Si la parte entera de los dos números coincide, entonces comparamos la parte decimal. Conviene añadir ceros a la derecha de la expresión que menos cifras decimales tenga para igualar el número de cifras decimales en las dos expresiones. Miramos la primera cifra decimal. Si es mayor en un número que en otro, ya hemos terminado.
- Si coinciden, pasamos a comparar la segunda cifra decimal de la misma forma, y así hasta encontrar dos cifras que difieran.

2.3.4 Propiedad de la densidad

El conjunto de los números decimales verifica la propiedad de la densidad, que asegura que entre dos decimales siempre es posible incorporar otro decimal. Esto hace que, entre dos números decimales, haya siempre infinitos números decimales.

2.3.5 Operaciones con números decimales

De acuerdo con Batanero et al. (2004), el gran interés de la notación decimal se deriva de que todos los algoritmos desarrollados para realizar las operaciones aritméticas se extienden casi sin problema al conjunto de los decimales. Esto es posible gracias a las propiedades del sistema de numeración decimal.

2.3.5.1 Adición y sustracción

Para sumar o restar dos números decimales, tenemos en cuenta que las cifras que ocupan una misma posición a la derecha de la coma se refieren a una unidad de un mismo orden (décimas, centésimas,...). Por tanto, colocamos un número debajo del otro de forma que las comas queden alineadas. Si un número tiene menos cifras decimales que el otro, añadimos ceros a la derecha de su expresión decimal hasta alcanzar el número de cifras decimales del otro. Después de este arreglo, se utilizan los mismos algoritmos que conocemos para los números naturales (respetando el lugar de la coma en el resultado).

2.3.5.2 Multiplicación

Para multiplicar dos números decimales, podemos olvidarnos de la coma y realizar el producto de los dos números con el algoritmo que conocemos para los números naturales. Al resultado tenemos que colocarle la coma de forma que deje tantas cifras decimales a su derecha como tengan en total los dos números decimales de partida. La justificación de este algoritmo se entiende muy bien si pensamos en la fracción decimal asociada a cada número decimal.

2.3.5.3 División

La división de dos decimales se puede reducir siempre a la de un dividendo decimal y un divisor natural, ya que si el divisor tuviera decimales se podría transformar en natural multiplicando ambos números por la potencia de diez conveniente.

El algoritmo que se utiliza es el mismo que para los números naturales, teniendo en cuenta que hay que poner una coma en el cociente en el momento en que bajamos la primera cifra decimal del dividendo.

Las cifras que aparecen en el resto hay que interpretarlas como cifras decimales que toman el valor de la posición correspondiente.

3. LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS DECIMALES EN PRIMARIA

3.1 Presencia de los números decimales en el currículo de Educación Primaria

La etapa de Educación Primaria está constituida por tres ciclos de dos años académicos cada uno y se organiza en seis áreas, que tienen un carácter global e integrador. Una de ellas es el área de Matemáticas.

Su objetivo principal es que los alumnos alcancen una eficaz alfabetización numérica, es decir, que sean capaces de enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, bien directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito.

La importancia que se otorga a su aprendizaje en la etapa de Educación Primaria se fundamenta en la doble función de las matemáticas:

1. Proporcionan la formación matemática básica que cualquier ciudadano necesita para desenvolverse en la sociedad.
2. Potencian la formación intelectual general mediante el desarrollo de habilidades de razonamiento y de comunicación, la elaboración y el uso de estrategias de resolución de problemas y el fomento de actitudes positivas para el aprendizaje.

Tras la incorporación de las competencias básicas al currículo, establecida por la Ley Orgánica de Educación (2006), la competencia matemática que debe haber desarrollado todo joven al finalizar la enseñanza obligatoria, queda definida en el Decreto Foral 24/2007 como *<<la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas*

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral>>. Una vez que el alumno haya desarrollado esta competencia matemática a lo largo de la educación obligatoria, éste será capaz de utilizar espontáneamente –en el ámbito personal y social– los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones.

Los contenidos propios del área se encuentran divididos en cuatro bloques distintos y conectados: Números y operaciones; La medida: estimación y cálculo de operaciones; Geometría; y, por último, Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

Los números decimales se encuentran recogidos en el primer bloque de contenidos, “Números y operaciones”, que pretende esencialmente el desarrollo del sentido numérico en el niño. Sin embargo, su conocimiento resulta imprescindible para abordar cuestiones correspondientes a otros bloques, como el de la medida o el tratamiento de la información.

Englobados bajo el título “Números enteros, fraccionarios y decimales”, son introducidos en el tercer ciclo de Educación Primaria, más concretamente en quinto curso. El currículo establece que los alumnos de tercer ciclo de Educación Primaria deben aprender los siguientes aspectos de los números decimales:

- Valor de posición y equivalencias.
- Uso de los números decimales en la vida cotidiana.
- Ordenación de decimales por comparación y representación gráfica.
- Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

No obstante, es preciso recalcar también aquellos contenidos establecidos en el currículo para ser adquiridos en ciclos anteriores y que, sin duda, resultan necesarios de aprender para poder llegar a comprender posteriormente los números decimales.

Tabla 2. Contenidos relacionados con los números decimales del Primer y Segundo Ciclo de Educación Primaria

1º CICLO	2º CICLO
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Valor de posición de números de hasta tres cifras. ▪ Orden y relaciones entre números. Comparación de números en contextos familiares. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Sistema de numeración decimal. Valor de posición de las cifras. Su uso en situaciones reales. ▪ Orden y relación entre los números. Notación. ▪ Números fraccionarios para expresar particiones y relaciones en contextos reales, utilización del vocabulario apropiado. ▪ Comparación entre fracciones sencillas mediante ordenación y representación gráfica.

3.2 La introducción de los números decimales en quinto curso de Educación Primaria

Como hemos dicho arriba, el currículo de la etapa de Educación Primaria establece que los números decimales sean introducidos en quinto curso de Educación Primaria, es decir, a la edad de 10-11 años. Numerosas son las razones que han motivado su inclusión específica en este curso, entre otras, las teorías sobre el desarrollo de la inteligencia humana.

Muchos y diferentes autores han investigado y escrito sobre el desarrollo del conocimiento. No obstante, en este apartado analizaremos únicamente aquellos aspectos relevantes de las teorías del desarrollo de Jean Piaget y de Lev S. Vygotski, autores cuyas aportaciones han tenido una importante implicación sobre la educación y el aprendizaje y que pueden hacernos comprender el periodo evolutivo en el que se encuentra un niño de quinto curso de Educación Primaria.

3.2.1 La teoría de Jean Piaget

Jean Piaget es una de las figuras más relevantes que existen en el panorama teórico del desarrollo cognitivo. A pesar de las numerosas críticas que ha recibido su teoría y de los cambios que se han producido en las últimas décadas, su explicación acerca del desarrollo del pensamiento sigue siendo la más completa.

Como se recoge en Giménez et al. (2008), la teoría del desarrollo de Piaget se articula en torno a tres estadios evolutivos o estructuras cualitativamente distintos. Cada uno de ellos supone una forma diferente de aproximarse y entender el mundo. En concreto, Piaget distingue tres periodos principales: el *periodo sensoriomotor*, el *periodo de las operaciones concretas* (dividido, a su vez, en periodo preoperatorio y operatorio concreto) y *periodo de las operaciones formales*.

Tabla 3. La teoría de Piaget: periodos del desarrollo de la inteligencia

Periodos del desarrollo	Edades aproximadas
Periodo sensoriomotor	Del nacimiento hasta los 2 años
Periodo de operaciones concretas:	
▪ Periodo preoperatorio	De 2 a 5/6 años.
▪ Operaciones concretas	De 5/6 años hasta la adolescencia.
Periodo de operaciones formales	Desde la adolescencia (11/12 años)

Tal como aparece en la tabla anterior, las edades que se corresponden con cada periodo son sólo aproximadas. Algunos niños pueden pasar de un periodo a otro antes de lo marcado en esos márgenes de edad. Sin embargo, lo importante es que la secuencia del desarrollo es siempre la misma. Todos los niños, en su desarrollo intelectual, han de pasar por los tres periodos anteriormente señalados. Esto es, existe una continuidad entre los distintos periodos, más allá de las edades en que se sitúan cada uno de ellos.

Por otra parte, cada periodo posee un conjunto de rasgos y una estructura que lo define. Además, los logros propios de un estadio se integran en el siguiente, a la vez que se superan; es decir, los periodos del desarrollo de la inteligencia humana tienen un carácter integrador.

El *periodo sensoriomotor* comienza cuando el niño reconoce la permanencia de los objetos aunque se encuentren fuera de su propia percepción. Este periodo comprende los diferentes procesos y adquisiciones de los niños a medida que van creciendo, por medio de los cuales se va construyendo activamente la inteligencia sensomotriz del niño hasta lograr esa capacidad de adaptación al medio que se muestra al final del segundo año de vida y que va unida a la adquisición de las primeras formas de representación mental.

El *periodo preoperatorio* está caracterizado por la capacidad de representación del niño, lo que Piaget llama *la función simbólica o semiótica*. Esta capacidad de representar lo real por medio de significantes diferentes de las cosas significadas se plasma en diferentes campos como la imitación, el dibujo, el juego y, especialmente, el lenguaje. Durante el periodo preoperatorio, este nuevo potencial que el pensamiento representativo tiene, no llega a liberar al pensamiento del sujeto de los aspectos superficiales, perceptivos de los problemas, siendo todavía su pensamiento intuitivo, prelógico.

En el *periodo de las operaciones concretas*, el niño es capaz de realizar este tipo de acciones mentales, interiorizadas, que llamamos operaciones y que muestran ya un tipo de pensamiento lógico. Estas operaciones, puestas de manifiesto en la aparición de nociones como la conservación, la seriación y la clasificación, tienen un rasgo principal que es su carácter reversible. A su vez, van surgiendo las operaciones matemáticas. El niño se convierte en un ser cada vez más capaz de pensar en objetos físicamente ausentes, apoyado en imágenes vivas de experiencias pasadas. No obstante, las operaciones concretas están siempre ligadas a la acción y el niño es incapaz de construir un discurso lógico a partir de proposiciones verbales independientes de su acción sobre los objetos.

En el *periodo de las operaciones formales*, el adolescente va a ser ya capaz de desarrollar un pensamiento lógico a partir de hipótesis formuladas verbalmente, liberándose de lo real y construyendo diferentes mundos posibles. Este pensamiento es propio de la ciencia y tiene como principal característica su carácter abstracto, formal, liberado de las ataduras de lo concreto.

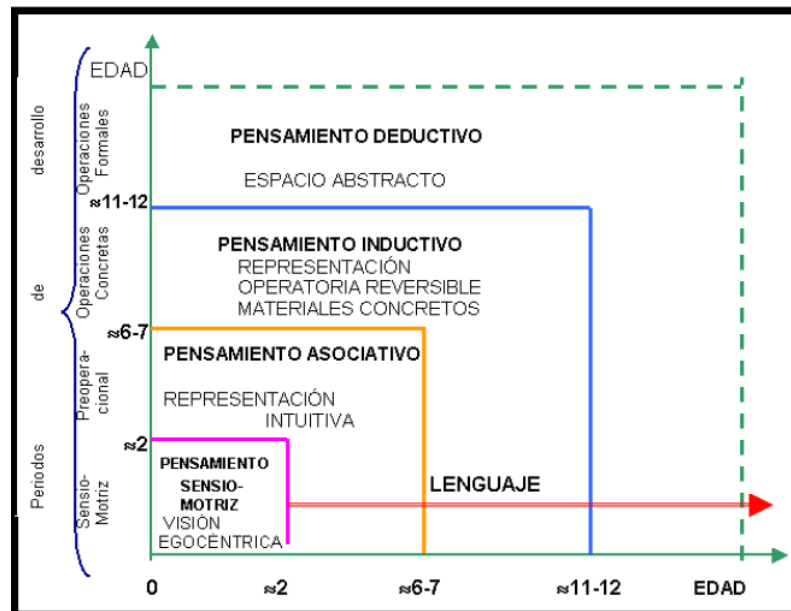


Figura 1. El desarrollo del pensamiento según la teoría de Jean Piaget: un esquema gráfico

En resumen, una vez descritos todos los periodos evolutivos por los que pasa el niño, concluimos que los alumnos de quinto curso de Educación Primaria, de 10-11 años, se encuentran en el límite entre el periodo de las operaciones concretas y el periodo de las operaciones formales. Este tránsito de un periodo a otro se caracteriza por la presencia en los alumnos tanto del pensamiento inductivo (pensamiento que se encuentra aún ligado a aspectos concretos de la realidad y, por lo tanto, el niño únicamente es capaz de pensar sobre los aspectos de un problema tal y como se le presentan) como del pensamiento deductivo (pensamiento abstracto y manejo de ciertas operaciones formales).

La presencia de ambos tipos de pensamiento en los alumnos de quinto curso de Educación Primaria justifica la inclusión de los números decimales en este curso debido a que su total comprensión y utilización requiere no solamente concebir lo real sino también lo posible.

3.2.2 La teoría de Lev S. Vygotski

Además de en las teorías de Piaget, conviene también ahondar en lo que otros autores han afirmado e investigado respecto al desarrollo de la inteligencia humana.

La psicología del desarrollo de Lev S. Vygotski, uno de los autores clásicos, sitúa los procesos psicológicos superiores en el marco de la historia, de la cultura y de la sociedad. No ve el desarrollo humano desde un punto de vista meramente individualista, sino en su contexto social, histórico y cultural.

De acuerdo con Giménez et al. (2008), Vygotski, a diferencia de Piaget, establece únicamente dos periodos evolutivos: el primero de ellos denominado *nivel evolutivo real* y el segundo, *zona de desarrollo próximo (ZDP)*.

El *nivel evolutivo real* o *nivel de desarrollo real* hace referencia al nivel de desarrollo de las funciones mentales de un niño, entendido como su capacidad para resolver un problema de forma autónoma. Se establece como resultado de ciertos ciclos evolutivos.

Se denomina *zona de desarrollo próximo* a la que se encuentra entre el *nivel real de desarrollo* y el *nivel de desarrollo potencial*, entendido como la capacidad de resolver un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. En definitiva, esta zona define aquellas funciones que todavía no han madurado, pero que se hallan en proceso de maduración, en estado embrionario.

Así pues, la zona de desarrollo próximo nos permite trazar el futuro inmediato del niño, así como su estado evolutivo dinámico, señalando no sólo lo que ya ha sido completado evolutivamente, sino también aquello que está en curso de maduración.

En consecuencia, la teoría de Vygotski justifica la inclusión de los números decimales en quinto curso de Educación Primaria, puesto que el niño de 10-11

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

años ha desarrollado algunas funciones mentales necesarias para la total comprensión de estos números, pero, a su vez, cuenta con la ayuda del docente para continuar desarrollando aquellas que le faltan por madurar.

Del mismo modo, se puede concluir que esta ayuda del docente puede incluso hacer madurar funciones mentales necesarias para la comprensión de los números decimales en alumnos de cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria. No nos referimos aquí al desarrollo de los distintos conceptos de los números decimales sino a algunas de las ideas que subyacen bajo este aspecto concreto de las matemáticas y que, a través del docente y de su actuación didáctica, se pueden ir introduciendo.

3.3 La enseñanza actual de los números decimales

Tal y como se ha expuesto previamente, el currículo oficial del Estado explicita qué contenidos relacionados con los números decimales deben ser aprendidos por los niños de quinto curso de Educación Primaria. Dichos contenidos se plasman en los libros de texto de las distintas editoriales existentes. Un análisis exhaustivo de ellos nos muestra cómo se trabajan actualmente en las escuelas los números decimales.

Los diferentes libros de texto analizados introducen los números decimales, en primer lugar, a través de las diversas situaciones reales en las que dichos números aparecen o son utilizados. Este aspecto didáctico responde a la necesidad de demostrar al alumnado la importancia de los números decimales en nuestra sociedad, ejemplificando por medio de imágenes sus diferentes usos y las situaciones reales en las que surgen. No obstante, en todos los libros de texto, esta aproximación al contexto real del concepto matemático carece de continuidad a lo largo del tema. Únicamente se utiliza como modo de introducción al nuevo concepto.

Según el índice de estos libros de texto, el tema de los números decimales precede a los temas referidos a las fracciones y operaciones con ellas. En consecuencia, una vez que se han ejemplificado los usos y situaciones reales

de los números decimales, éstos son introducidos, en segundo lugar, a partir de las fracciones decimales. En efecto, los libros de texto se basan en los conceptos que los niños han tenido que haber adquirido en los temas previos al que nos concierne, definiendo, por tanto, las expresiones decimales como una nueva forma de escritura de los números que se expresaban con fracciones decimales, consideradas éstas como un caso particular de las fracciones.

Por consiguiente, las expresiones decimales no se presentan al alumnado como la extensión natural del sistema de numeración decimal, es decir, no se explicita que se originan al prolongar el principio del valor relativo de cada cifra en el sistema de numeración posicional de base diez hacia la derecha de las unidades.

Por el contrario, los libros de texto trabajan las unidades decimales y sus equivalencias por medio de las fracciones y, más concretamente, a través de las fracciones de la unidad, explicitando tanto su expresión fraccionaria como su expresión decimal. A pesar de no relacionar la escritura del número decimal con lo que los alumnos ya saben acerca del sistema de numeración decimal, estos libros de texto sí proponen actividades del mismo estilo que aquellas realizadas para aprender las unidades, decenas y centenas en el primer ciclo de Educación Primaria, es decir, actividades de cambio de unidad.

Del mismo modo, estos libros de texto recurren al uso de tablas de valor posicional para explicar la lectura y escritura de los números decimales, su comparación y ordenación así como los algoritmos asociados a las distintas operaciones que se pueden llevar a cabo con ellos.

En relación con la lectura y escritura de los números decimales, es destacable cómo los libros de texto definen el número decimal como dos partes separadas por una coma; a la izquierda la parte entera y a la derecha la parte decimal. De ahí que concluyamos que los libros de texto no presentan los números decimales como números nuevos, distintos de los enteros y que permiten resolver problemas que no podíamos resolver únicamente con los enteros, sino que los conciben como números formados por dos enteros, cada uno con un

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

papel distinto. Por ejemplo, $1\text{ m } 235\text{ mm} = 1'235\text{ m}$. Esta concepción conlleva el riesgo de que los alumnos operen por separado la parte entera y la parte decimal.

Otro aspecto importante que conviene destacar es el constante y beneficioso uso que realizan los libros de texto de la representación gráfica como apoyo a la explicación teórica de los conceptos matemáticos. Sin embargo, a pesar de la amplia variedad de materiales que se ofrecen con cada libro de texto, éstos no hacen uso de materiales físicos distintos (ábaco, bloques multibase, regletas, monedas, etc.) ni en la explicación teórica ni en la propuesta de actividades, limitando así la ayuda prestada a los alumnos en cuanto a la comprensión de los conceptos a imágenes y representaciones gráficas.

En resumen, se podría concluir que los libros de texto abordan de manera completa y detallada el manejo de los decimales (cómo se leen, cómo se escriben, cómo se ordenan, cómo se opera con ellos...) pero apenas se interrogan sobre el porqué y para qué de los decimales, creando así obstáculos de comprensión, que generan posteriores errores y dificultades de aprendizaje de los decimales en los niños de quinto curso de Educación Primaria.

4. EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS DECIMALES

4.1 La utilidad del error en el proceso de aprendizaje

En el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos existen diversas dificultades de procedencia y naturaleza variada que dan lugar a errores en la comprensión y en las producciones de los alumnos.

La aparición de dichos errores y dificultades de aprendizaje de los conceptos matemáticos debe considerarse como una etapa necesaria para el progreso del conocimiento y el hecho de que aparezcan es de gran utilidad para el maestro.

Los errores nos pueden dar una información de la manera en que los alumnos interpretan aquello que están aprendiendo. Por tanto, analizar los errores que cometen los alumnos es una actividad importante para estudiar la forma en que encajan los conceptos enseñados en sus estructuras mentales. Por medio de dicho análisis, el maestro:

- Sabe lo que han aprendido los alumnos (evaluación diagnóstica).
- Profundiza en los significados que atribuyen los alumnos a los conceptos matemáticos (las estructuras conceptuales que se han formado).

Para influir en estas estructuras y conseguir que el alumno entienda el concepto matemático, el maestro tiene que conocer no solamente la forma en que los alumnos organizan los conocimientos sino también los modelos erróneos de los alumnos –lo que no han comprendido o han comprendido mal– para poder así crear las condiciones necesarias que provoquen el progreso y la reorganización de las ideas.

El maestro debe hacer uso de los errores que surgen como una herramienta más de aprendizaje. No obstante, el error juega un papel importante en el aprendizaje siempre y cuando se conciba como motor de la acción y de la reflexión (Brousseau, 1983) en *situaciones apropiadas*, en las que el alumno que ha fracasado en la resolución de un problema, pueda analizar su fracaso

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

(en términos de error), pueda volver a considerar su estrategia (volviendo a la acción para ver por qué no le ha salido bien), y pueda rectificar su modo de hacer (al final de un proceso de adaptación a la situación en el que ha sido protagonista).

4.2 Los errores y dificultades de aprendizaje de los números decimales

Centeno (1988) en su obra *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* nos da cuenta de numerosos estudios que confirman la lentitud en la adquisición del concepto de número decimal, afirmando que “el tiempo necesario para realizar este camino que va del primer contacto con los números decimales hasta el dominio de los mismos, puede extenderse desde los ocho o nueve años hasta los trece o catorce, sin que se pueda asegurar que a esta edad estén resueltas todas las dificultades que este aprendizaje plantea”.

Son muchas las dificultades que los niños experimentan, desde el momento en que tienen la primera información de la existencia de estos nuevos números hasta que son capaces de reconocerlos en un buen número de situaciones, utilizarlos de forma correcta, operar con ellos, comprender su significado e integrarlos en sus esquemas cognoscitivos personales, como *nuevos números*, que incluyen a los enteros pero que tienen algunas propiedades distintas.

Los aspectos del concepto de número decimal que provocan mayor dificultad los conocemos, en gran parte, a través del análisis de las respuestas que los alumnos dan a los problemas que les planteamos o a las situaciones que resuelven. Pero analizar las producciones de los alumnos en tareas relativas al concepto de número decimal es un trabajo delicado del maestro. Exige haber profundizado previamente en el proceso de elaboración de dicho concepto, en la manera de aprender de los alumnos y, sobre todo, haber construido para sí mismo un esquema que le permita no solamente, diagnosticar sus causas y elaborar nuevas estrategias didácticas que provoquen en el alumno la progresión en la comprensión del concepto, sino también corregir esos indicadores de incomprensión que son los errores repetidos y persistentes.

Basándonos en la clasificación de Centeno (1988), los principales errores que los alumnos de Educación Primaria producen cuando operan con números decimales se pueden agrupar en cuatro apartados:

- Errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición.
- Errores relacionados con el cero.
- Errores relacionados con el orden entre decimales.
- Errores relacionados con las operaciones.

A continuación, analizamos cada uno de estos apartados que recogen los aspectos más significativos a los que se refieren los errores. Tal como plasma Centeno (1988) en cada uno de los casos, nosotros también enunciaremos las preguntas y respuestas reales que frecuentemente se obtienen por parte del alumnado y que ejemplifican cada uno de los errores relacionados con los números decimales.

4.2.1 Errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición.

Ejemplo 1: ¿Cuál de los números siguientes es 37 milésimas? 0'037; 0'37; 37; 37000.

El 88% de niños de nueve años y el 40% de trece responden 37000 (Carpenter 1981). Parece que una buena parte de los alumnos de estas edades interpreta centésimas como enteros, y piensan que para que haya milésimas tiene que haber tres ceros.

Ejemplo 2: Seis décimas como decimal se escribe 0'6. ¿Cómo escribes tres centésimas? Algunas respuestas erróneas obtenidas: 0'300; 3'00; 3'0; 3'100; 00'3; 0'3.

Estos errores indican que el sistema de numeración decimal no se ha instalado convenientemente en los niños, quienes sistemáticamente cometen estos

errores; y estos resultados se repiten cuando se trata de la escritura de números decimales menores que la unidad.

4.2.2 Errores relacionados con el cero.

La utilización del cero forma parte de mecanismos que funcionan de distinta forma según el contexto en que aparece.

Ejemplo 1: Algunos alumnos ignoran el cero e interpretan 0'036 como 36, perdiendo la estructura global del número y viéndolo sólo como un número entero.

Ejemplo 2: 1'27 se considera distinto de 1'270. Este error muestra como algunos alumnos no comprenden la diferencia entre los ceros necesarios y los que no lo son en la expresión decimal de un número: después de la última cifra significativa a la derecha del punto decimal pueden agregarse ceros sin que el decimal cambie de valor. Esto es así porque el cero en dichas posiciones no suma ninguna unidad a la cantidad representada. No obstante, dichos ceros son importantes en cuanto a que transmiten información sobre la posición que ocupan, haciendo que la siguiente cifra represente una unidad de un determinado orden.

4.2.3 Errores relacionados con el orden entre decimales.

Ejemplo 1: ¿Qué número es mayor 0'14 o 0'2?

Hay alumnos que tienen dificultad para ordenar decimales. Piensan que 0'14 es mayor que 0'2 puesto que 14 es mayor que 2. Consideran la parte decimal como un número natural y deciden que el número mayor es el que tiene mayor número de cifras decimales.

Ejemplo 2: ¿Hay algún número entre $1'23$ y $1'24$?

La propiedad de la densidad de los decimales es también una fuente de dificultad para los niños. Para algunos de ellos entre $1'23$ y $1'24$ no hay ningún número.

4.2.4 Errores relacionados con las operaciones

- Adición y sustracción

Ejemplo 1: Suma estos números decimales: $17'3 + 21'8$. Resta estos números decimales: $25'3 - 12'8$

El resultado erróneo para la suma es $38'11$ y para la resta es $13'5$. Algunos alumnos siguen funcionando con las reglas de los números naturales, y, por tanto, perciben los números decimales como pares de números naturales. En consecuencia, suman y restan por separado la parte entera y la parte decimal.

Ejemplo 2: Suma estos números decimales: $1'70 + 2'4 + 0'20$. Opera estos números decimales: $(2'4 - 1'70) - 0'20$

El resultado erróneo para la suma es $2'14$ y para la resta es $1'34$. Otro problema relacionado con la suma y la resta de números decimales reside en la comprensión de que la correspondencia de los diversos órdenes de unidades es la condición imprescindible para que se pueda realizar la operación.

Ejemplo 3: Suma estos números decimales: $9'4 + 2'3$. Resta estos números decimales $9'4 - 2'3$.

El resultado erróneo para la suma es 117 y para la resta es 71 . Otra fuente de error es la ausencia de coma en el resultado de la operación. Ciertamente se debe a inadvertencia, pero la falta es de tal naturaleza, que su omisión desvirtúa y priva de significación a la operación misma.

– Multiplicación y división

Ejemplo 1: Multiplica estos números decimales: $2'3 \times 2'3$ y divide estos números decimales: $2'12 : 2$.

El resultado erróneo para la multiplicación es $4'9$ y para la división es $1'6$. Algunos alumnos siguen funcionando con las reglas de los números naturales, y, por tanto, perciben los números decimales como pares de números naturales. En consecuencia, multiplican y dividen por separado la parte entera y la parte decimal.

Ejemplo 2: Multiplica este número decimal por diez: $3'15 \times 10$.

Los resultados erróneos son: $3'150$; $30'150$. Hay alumnos que consideran que multiplicar por diez es añadir un cero a la derecha de la parte decimal o un cero a la derecha de la parte entera y de la parte decimal.

Ejemplo 3: A la pregunta, ¿cuál de los pares de operaciones siguientes da la respuesta mayor?

$$\begin{array}{l} 8'4 \times 4; 8 : 4 \\ 8 \times 0'4; 8 : 0'4 \\ 0'8 \times 0'4; 0'8 : 0'4 \end{array}$$

Un buen número de alumnos de todas las edades presentan concepciones equivocadas sobre la multiplicación y división de decimales, justifican que *multiplicar es siempre aumentar y dividir es siempre disminuir*.

4.3 Causas de los errores y las dificultades de aprendizaje de los números decimales.

Numerosos estudios e investigaciones han intentado discernir las posibles causas que originan posteriormente los errores y dificultades de aprendizaje de los números decimales vistos en el apartado anterior.

Podemos clasificar las causas de los problemas con los números decimales, a los que generalmente se enfrentan los alumnos, en tres apartados:

- Causas relacionadas con el concepto matemático.
- Causas relacionadas con el proceso de enseñanza.
- Causas relacionadas con el proceso cognitivo del alumno.

4.3.1 Causas relacionadas con el concepto matemático.

4.3.1.1 Conocimiento insuficiente del sistema de numeración decimal.

La escritura de los números decimales surge de la extensión natural del sistema de numeración decimal. Por lo tanto, no puede esperarse que los alumnos comprendan los números decimales si poseen aún un conocimiento insuficiente del sistema de numeración decimal. Si esto es así, el alumnado encontrará dificultades a la hora de asociar la escritura de los decimales menores que la unidad al mismo esquema que la de los números superiores a la unidad. No llegará a ver que se trata de extender un mismo modelo de representación (diez unidades hacen una decena de igual forma que diez décimas hacen una unidad).

4.3.1.2 Manejo de los números decimales como si fueran números naturales debido a la incompreensión de las diferencias entre ellos.

Muchos de los errores que cometen los alumnos con los números decimales proceden de la incompreensión de las diferencias existentes entre los números naturales y los números decimales. En consecuencia, los alumnos conciben los números decimales como pares de números naturales y, por lo tanto, se rigen por las reglas que siguen estos últimos.

Por consiguiente, nos parece importante detallar a continuación cuáles son las diferencias entre los números naturales y los números decimales que los alumnos no llegan a comprender y distinguir. Cada una de dichas diferencias va a ser explicada en diferentes apartados.

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

4.3.1.2.1 Distinción entre el concepto de número y su escritura (o representación en un sistema numérico determinado).

En la escuela, cuando se introduce el concepto de número natural, se trabaja al mismo tiempo su representación en el sistema de numeración decimal. Por ejemplo, los niños van aprendiendo a la vez el concepto de “números dos” como idea abstracta y la forma de expresión o representación del dos.

Lo mismo ocurre cuando se introducen los números naturales de dos o más cifras. Por ejemplo, la idea del doce se aprende a la vez que su representación en el sistema de numeración decimal. No obstante, únicamente se enseña una de sus representaciones: 12. No es cierto que sea la única, puesto que 012 es otra representación del mismo número. Sin embargo, no se usa puesto que se ha establecido como norma utilizar el mínimo número de cifras posibles para representar un número natural (siempre en el sistema numérico decimal). Tampoco se suele hacer referencia a que las fracciones $24/2$, $36/3$,... son distintas formas de representar ese mismo número.

El hecho de que en los naturales solo se utilice una representación, hace que se identifique, al menos en la práctica, el número natural doce (como idea abstracta) con su representación 12, aunque esta representación no sea la única que existe para este número.

Sin embargo, cuando en la escuela se introducen los números decimales, se recalcan sus distintas representaciones o expresiones. En este sentido, el número decimal 0,5 se puede representar de las siguientes formas:

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000} = \frac{5000}{10000} = \dots$$

O bien:

$$0.5 = 0.50 = 0.500 = 0.5000 = 0.50000 = \dots$$

Tal como hemos dicho previamente, es importante que los alumnos conozcan varias escrituras equivalentes de un mismo número decimal porque, en la realización de los cálculos, los alumnos serán capaces de elegir en cada caso aquella escritura que convenga mejor a la situación en la que interviene el número.

No obstante, es en estos cálculos donde los alumnos tienen problemas con los números decimales, puesto que operan las partes enteras y decimales como pares de números naturales, provocando errores importantes.

4.3.1.2.2 Lectura de los números decimales

A la hora de leer los números naturales, los niños no presentan ningún problema puesto que habitualmente se suelen leer de una única forma. En efecto, cuando leemos el número doscientos, siempre utilizamos la misma lectura de las múltiples que tiene y es aquella referida a las unidades simples: cuando decimos doscientos, entendemos doscientas unidades sin que nadie nos lo diga. No obstante, aunque el resto de lecturas del número no se utilicen frecuentemente, éstas son igualmente válidas: 200 puede leerse, además de como “doscientas unidades”, como “dos centenas” o como “veinte decenas”.

En cambio, en los números decimales se trabajan todas las lecturas posibles del número decimal. Por ejemplo, el número decimal 0,853 puede ser leído como “8 décimas y 53 milésimas”, “85 centésimas y 3 milésimas” o “853 milésimas”.

Estas lecturas diferentes del mismo número también son fuente de dificultad y los alumnos frecuentemente asocian el número decimal con una única lectura, tal y como hacen con los números naturales.

4.3.1.2.3 Comparación de números decimales

Al haber elegido solo una forma de representar los naturales, aquella con el mínimo número de cifras posibles, la comparación entre dos números naturales

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

es inmediata cuando tienen diferente número de cifras. Este hecho ocurre también entre los números decimales si únicamente miramos la parte entera del número.

No obstante, un número con más cifras que otro en la parte decimal no representa necesariamente un número mayor. En efecto, $0,2$ es mayor que $0,1$. Aunque añadiéramos la mayor cifra a la derecha del $0,1$, seguiríamos sin llegar al $0,2$.

Este hecho no se puede entender con los números naturales puesto que no ocurre lo mismo: 2 es mayor que 1 y, aunque añada un cero al 1 , ya supera al 2 porque en cuanto añadimos una cifra al número natural, las cifras que teníamos cambian de posición y pasan a representar una unidad superior. Al añadir una cifra al 1 , el dígito 1 cambia de valor y se convierte en una decena.

Pero, en los números decimales, al añadir una cifra al $0,1$ y pasar a $0,19$, el 1 no cambia de posición y, por tanto, no cambia de valor.

4.3.1.2.4 La propiedad de la densidad de los números decimales

Uno de los primeros conceptos que los alumnos aprenden acerca de los números naturales es su orden en la recta numérica, es decir, adquieren automáticamente la idea de que todo número natural posee un anterior y un siguiente en la recta numérica. Así, para el “número natural tres” existe un número anterior a él en la recta numérica, el “número natural dos”, y un número siguiente a él en la recta numérica, el “número natural cuatro”.

Los alumnos trasladan la propiedad de sucesión de un número, válida para los números naturales, a los números decimales. Por consiguiente, los alumnos presentan dificultades de aprendizaje a la hora de concebir que los números decimales no tienen un siguiente, sino que, dada la propiedad de la densidad de los números decimales, siempre podemos encontrar infinitos números decimales entre dos dados.

4.3.2 Causas relacionadas con el proceso de enseñanza.

4.3.2.1 La forma en que se han presentado los decimales a los niños.

Muchos errores cometidos con los números decimales proceden de cómo se han introducido los números decimales al alumnado.

Tal como hemos analizado en los libros de texto en el apartado 3.3, la enseñanza actual de los números decimales, éstos son introducidos como una nueva forma de escritura de los números que representábamos con las fracciones decimales, es decir, se basan en los conceptos que los niños han tenido que haber adquirido en temas previos al de los decimales. Sin embargo, esta introducción al alumnado de los números decimales conlleva el riesgo de arrastrar al concepto de número decimal la posible incompreensión, errores y dificultades de aprendizaje que algunos alumnos hayan podido sufrir con las fracciones.

En consecuencia, dicha introducción no relaciona la escritura de los números decimales con el sistema de numeración posicional y, por lo tanto, cuesta concebirla como la ampliación del sistema de numeración decimal hacia la derecha de las unidades. De esta forma, desde un punto de vista didáctico, no se están aprovechando los conocimientos previos del alumnado, quien conoce y ha interiorizado en cursos anteriores nuestro sistema de numeración posicional así como la definición y el manejo de las unidades superiores a la unidad.

4.3.2.2 Escasa utilización de materiales físicos

La existencia y manipulación de materiales físicos favorece el aprendizaje. Teresa Cascallana nos señala el papel tan importante que desempeñan los materiales físicos en la enseñanza de las matemáticas:

“El material didáctico cumple una misión fundamental e insustituible. Es a través de la manipulación de materiales estructurados y no estructurados como

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

el niño llega a la adquisición de la conservación, al concepto de número y cantidad, a la organización de la realidad en clases, a establecer relaciones entre ellas; a operar, en definitiva, sobre la realidad.” (Cascallana, 1988, 10).

No obstante, ha quedado patente, tras el análisis de los libros de texto actuales, la escasa utilización que se hace de los materiales físicos tanto para explicar como para comprender los números decimales. A pesar de que existen una gran variedad de materiales físicos a nuestra disposición (ábaco, bloques multibase, regletas, papel cuadriculado, monedas, etc.), por medio de los cuales los alumnos pueden llegar a entender mejor el concepto matemático de número decimal, solamente se utilizan en los libros las representaciones gráficas e imágenes ilustrativas para clarificar los conceptos y realizar las actividades correspondientes.

Esta limitación de oportunidades de aprendizaje al alumnado genera también errores y dificultades con los números decimales, que podrían ser fácilmente solucionados con un cambio de metodología por parte del maestro.

4.3.2.3 Ausencia de profundización en el porqué y el para qué de los números decimales

Los actuales libros de texto abordan de manera completa y detallada el manejo de los números decimales (cómo se leen, cómo se escriben, cómo se ordenan, cómo se opera con ellos...) pero apenas se interrogan sobre el porqué y para qué de los decimales, creando así obstáculos de comprensión, que generan posteriores errores y dificultades de aprendizaje de los números decimales en los niños de quinto curso de Educación Primaria.

En efecto, los alumnos apenas conocen los diferentes usos de los números decimales, no siendo conscientes, por tanto, de la importancia social y cultural que tienen estos números en nuestra sociedad.

En consecuencia, al no conocer la relevancia que presentan estos números en nuestra vida cotidiana, los alumnos no encuentran una razón para aprenderlos.

En ninguno de los libros de texto actuales se especifica y explica la necesidad a la que responden los números decimales, el porqué de su aparición y uso. Esta descontextualización y falta de sentido no solo provoca en el alumno una desmotivación en su aprendizaje sino también una incapacidad de conexión de los números decimales con la realidad, generando, por consiguiente, numerosos errores con los decimales.

4.3.3 Causas relacionadas con el proceso cognitivo del alumno

4.3.3.1 Teoremas implícitos que se fabrican los alumnos

Muchas veces los alumnos se fabrican reglas de acción que les permiten obtener resultados correctos, hasta el punto de que estas reglas pueden no ser conocidas por el maestro si no llega a plantear las ocasiones en las que la regla no sirve y conduce al error.

Por ejemplo, algunas reglas implícitas sobre el modo de ordenar los decimales pueden ser: <<Es menor el número que tiene más cifras después de la coma>>. Esta regla que es falsa puede producir buenos resultados en algunos casos: $12'04 < 12'4$; pero fracasa a la hora de ordenar $12'413$ y $12'4$. Otro ejemplo sería la regla que hemos visto funcionar en los errores sobre el orden: se aplica el algoritmo de ordenación de los enteros a los números que hay antes de la coma y a los que hay después de la coma, lo que dará $4'15 > 4'5$ porque 15 es mayor que 5.

Es sumamente importante conocer qué significación dan los niños a las operaciones que hacen y hacer que las definiciones o teoremas que se han fabricado se hagan explícitos para poder aceptarlos si son válidos o rechazarlos en caso contrario.

4.4 Resolución de los errores y dificultades en el aprendizaje de los números decimales

El conocimiento de los errores y las dificultades de aprendizaje de los números decimales que cometen los alumnos así como la identificación de las posibles causas que generan dichos errores nos llevan a preguntarnos cómo se podrían trabajar, desde el principio, los números decimales sin que aparezcan *a posteriori* todos los errores y dificultades de aprendizaje que hemos analizado en apartados anteriores.

Para intentar responder a dicha cuestión, destacamos tres momentos clave en el proceso de enseñanza – aprendizaje de los números decimales:

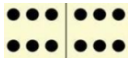
1. Recordatorio de conceptos matemáticos relacionados con los números decimales.
2. Introducción del aprendizaje de los números decimales.
3. Estudio del concepto de número decimal.

4.4.1 Recordatorio de conceptos matemáticos relacionados con los números decimales.

Con el objetivo de alcanzar una completa comprensión de los números decimales, el maestro tiene que hacer recordar al alumno, antes de comenzar el tema de los decimales, los principales conceptos matemáticos que presentan una relación directa con los números decimales.

En primer lugar, se debe recordar cómo es nuestro sistema de numeración: *decimal* porque se agrupan las unidades de diez en diez y *posicional* porque el valor que representa cada cifra depende de su situación en el número. De igual forma, es imprescindible recordar cuáles son las unidades superiores a la unidad (decenas, centenas,...) y qué representa cada una de ellas en un número. Ejercicios y actividades de cambios de unidad de un número de izquierda a derecha y viceversa deberán ser realizados. Ejemplo: “2 centenas = 20 decenas = 200 unidades”; “25 unidades = 2 decenas y 5 unidades”.

Para la realización de estas actividades, es muy recomendable el uso de distintos materiales físicos (ábaco, bloques multibase, regletas, papel cuadriculado, monedas, etc.) no solamente para la explicación teórica sino también para la manipulación, experimentación, ejecución y reflexión de las actividades por parte del alumnado. De esta forma, los alumnos comenzarán a familiarizarse con un material que continuarán utilizando para trabajar los números decimales.

En segundo lugar, se recalcará al alumnado la distinción entre el número (concepto abstracto que se representa) y sus diversas representaciones o expresiones. Para ello, se trabajarán la lectura y escritura de los números naturales. Por ejemplo, se podrían especificar las distintas representaciones del número natural doce, como XII, o doce palitos, o  , 012, etc., destacando que, aunque la mayoría de las veces representamos el número doce tal que así: 12, no es esta la única representación del número. Del mismo modo, se trabajaría la lectura del número natural doce no solo como “12 unidades” sino también como “1 decena y 2 unidades”.

Por último, el maestro tendría que recordar a los alumnos las formas de comparar y ordenar los números naturales. En este sentido, se les explicaría que, como la mayoría de las veces utilizamos una única representación de los números naturales, aquella que usa el mínimo número de cifras posibles (esto es, usamos “12” en vez de “012”), la comparación entre dos naturales es inmediata cuando tienen diferente número de cifras. Del mismo modo, recalcaríamos que, para ordenarlos, nos basamos únicamente en el número de cifras que tienen los números que estamos comparando.

4.4.2 La introducción del aprendizaje de los números decimales.

Una vez que hemos recordado los principales conceptos matemáticos que les pueden ayudar a entender los números decimales, se puede iniciar su aprendizaje. A la hora de introducirlos, es preciso comenzar interrogándonos sobre el porqué y el para qué de los decimales. Estas dos preguntas son

sumamente necesarias para evitar futuros errores y dificultades de aprendizaje de los números decimales. Los alumnos tienen que conocer los diferentes usos y contextos reales de los números decimales, para ser capaces de deducir su importancia en nuestra sociedad, así como la necesidad a la que responden, esto es, la insuficiencia de los números naturales y enteros para cubrir todas las necesidades numéricas y resolver todos los problemas matemáticos.

A continuación, las expresiones decimales deben ser presentadas al alumnado como la extensión natural del sistema de numeración decimal, explicitando que la expresión decimal se origina al prolongar el principio del valor relativo de cada cifra en el sistema de numeración posicional de base diez hacia la derecha de las unidades. Este modo de presentar los decimales permite a los alumnos relacionar las unidades de orden inferior al primero con, aquello que ya sabían y conocían de antemano, el sistema de numeración posicional y las unidades de órdenes superiores e integrar así los decimales en sus esquemas mentales.

Para una completa comprensión del nuevo contenido, es imprescindible la continuación del uso y manejo de materiales físicos (ábaco, bloques multibase, regletas, papel cuadriculado, monedas, etc.) para ejemplificar este nuevo concepto matemático y para realizar actividades de cambio de unidad, similares a las llevadas a cabo con las unidades de órdenes superiores al primero.

A su vez, el maestro hará ver a los alumnos la posibilidad de relacionar el nuevo contenido que acaban de aprender, los números decimales, con el tema del libro de texto que antecede a los decimales: las fracciones. De esta forma, los alumnos entenderán que los números que se están representando con esta escritura decimal son los mismos que aquellos que ya sabían representar con fracciones. En este sentido, los alumnos comprenderán que la expresión decimal constituye una nueva forma de escribir o representar números que ya sabían escribir *a priori* con las fracciones: la escritura con coma.

4.4.3 Estudio del concepto de número decimal

Es a partir de este momento cuando se pueden trabajar con los alumnos los distintos aspectos de este concepto matemático: lectura y escritura, significado de cada cifra de un número decimal, orden y comparación, la propiedad de la densidad y las operaciones con decimales.

Respecto a la lectura y escritura de los números decimales, se deben trabajar, al igual que con los números naturales, las distintas formas de leer y escribir los números decimales, distinguiendo así entre el concepto de número y las diversas formas de representarlo o expresarlo.

Asimismo, resulta crucial para asentar el nuevo concepto matemático aprendido, la comprensión del significado de cada cifra de un número decimal, es decir, qué valor de orden de unidad ocupa cada cifra en el número. En este aspecto, se deberá relacionar las unidades decimales con lo que los alumnos ya saben y conocen, el sistema de numeración posicional de base diez y las unidades de órdenes superiores al primero. Esta relación se deberá trabajar por medio de actividades y ejercicios del mismo estilo que aquellas realizadas para aprender las unidades, decenas y centenas en el primer ciclo de Educación Primaria, es decir, actividades de cambio de una unidad a otra, de forma que los alumnos sean capaces de expresar cada número utilizando unidades de distintos órdenes como referencia.

A la hora de enseñar a los alumnos el orden y comparación de los números decimales, la propiedad de la densidad y las diversas operaciones, es importante que el maestro se detenga en la enseñanza del papel del cero en los números decimales, para evitar así los errores relacionados con el cero que suelen cometer con frecuencia los alumnos.

Este estudio del concepto de número decimal debe seguir apoyándose en el uso y manejo de materiales físicos (ábaco, bloques multibase, regletas, papel cuadriculado, monedas, etc.) puesto que, si el maestro ha utilizado materiales o representaciones gráficas en el momento de introducir el número decimal, Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

como apoyo de su discurso, es imprescindible que los alumnos sigan teniendo la oportunidad de recurrir a ellos para verificar sus realizaciones, solucionar sus dudas o corregir posibles errores cometidos.

Igualmente, a lo largo del estudio del concepto de número decimal, el maestro debe pedir a los alumnos que expliciten los significados, definiciones o teoremas que se van fabricando para poder aceptarlos si son válidos o rechazarlos en caso contrario.

Por último, solamente cuando los alumnos dominen la escritura y el significado de las expresiones decimales, hasta ese momento finitas, se introducirá la distinción entre expresiones decimales finitas, explicitando qué tipo de fracciones se utilizan para representarlas (las fracciones que tienen un denominador potencia de diez o sus equivalentes), y expresiones decimales infinitas (periódicas o no periódicas), revelando si son o no representables por medio de una fracción.

En resumen, creemos que esta forma diferente de trabajar, desde el principio, los números decimales podría reducir la aparición de los errores y dificultades de aprendizaje de los números decimales que hemos analizado en apartados anteriores de este trabajo.

5. MATERIAL Y MÉTODOS

5.1 El experimento

5.1.1 *Objetivos*

La realización de este experimento presenta los siguientes objetivos:

- Comprobar si los errores con los números decimales, estudiados en el marco teórico del presente trabajo, tienen lugar entre los alumnos de un aula real.
- Analizar las dificultades de aprendizaje relacionadas con los números decimales que tienen los alumnos a raíz de sus respuestas a las preguntas del cuestionario.
- Examinar cuáles son los errores que ocurren con más frecuencia entre los alumnos del aula elegida.

Para la comprobación de la existencia de los errores con los números decimales, los cuales han sido detallados en el apartado 4.2 de este trabajo, en los alumnos de quinto curso de Educación Primaria, el método elegido ha sido la aplicación de un cuestionario con diferentes ejercicios y preguntas. En consecuencia, ante la presencia de dichos errores en las respuestas del alumnado, se podrán estudiar las dificultades de aprendizaje relacionadas con los números decimales a las que se enfrentan con frecuencia estos alumnos.

5.1.2 *Contexto y población*

Los protagonistas de esta investigación son alumnos/as del colegio en el que se ha desarrollado mi último periodo de prácticas escolares. Se trata de un colegio concertado, situado en el barrio de San Juan, en el que las diferentes áreas del currículo son impartidas tanto en castellano como en otros idiomas, al tratarse de un colegio multilingüe.

Este cuestionario se ha aplicado a un grupo de 52 alumnos de quinto curso de Educación Primaria, cuyas edades están comprendidas entre 10 y 11 años.

A pesar del deseo expreso de que los alumnos no se identificaran en el cuestionario, sí que se les pidió que escribieran su número de lista. De esta forma, se podría analizar la progresión de cada número, correspondiente a un alumno/a en concreto, y estudiar si los errores en sus respuestas son continuados, debido a una completa incomprensión del concepto de número decimal o, por el contrario, esporádicos, debido a una falta de concentración o cálculo.

5.1.3 El cuestionario

El cuestionario (Anexo I) se compone de nueve preguntas, cada una con distintos ejercicios, que hacen referencia a los diferentes errores con los números decimales estudiados en el marco teórico del presente trabajo.

A continuación, se indica qué se pretende evaluar en cada una de las preguntas del cuestionario:

- A través de la pregunta 1, se evalúa si el alumno conoce el valor de posición de cada cifra del número y es capaz de leer los números decimales.
- La pregunta 2 se centra en la escritura de los números decimales así como en el valor de posición de cada cifra del número.
- Por medio de la pregunta 3, se pretende averiguar si los alumnos son capaces de representar un número decimal por medio de un material físico, el ábaco, y de comprender el valor de posición de cada cifra del número.
- La pregunta 4 es un ejercicio de ordenación donde podemos comprobar si los alumnos son capaces de interpretar el valor de posición y el orden de los números decimales.
- La pregunta 5 tiene como propósito observar si se tiene conocimiento de la propiedad de la densidad de los números decimales.

- La pregunta 6 es un ejercicio relacionado no solamente con la comparación y el orden de los números decimales sino también con el valor de posición de cada cifra del número y el papel del cero en la expresión decimal.
- La pregunta 7 pretende trabajar la escritura de decimales, ya que los alumnos deben continuar diferentes series de números que se les proporcionan, entendiendo, por tanto, el valor de posición de cada cifra del número.
- La pregunta 8 se centra en las operaciones con números decimales; en concreto, se proponen una suma, una resta, una multiplicación y una división de números decimales así como una multiplicación de un número decimal por la unidad seguida de ceros y una división de un número decimal entre la unidad seguida de ceros.
- La pregunta 9 trata una cuestión relacionada con el producto y la división de números decimales: la consideración errónea de que la multiplicación es siempre aumento y de que la división es siempre disminución.

Las nueve preguntas del cuestionario engloban los principales contenidos relacionados con los números decimales propuestos en el currículo oficial para ser trabajados en quinto curso de Educación Primaria y aprendidos, por tanto, por los alumnos de 10 y 11 años.

Tabla 4. Relación de las preguntas del cuestionario con los contenidos del número decimal propuestos en el currículo oficial

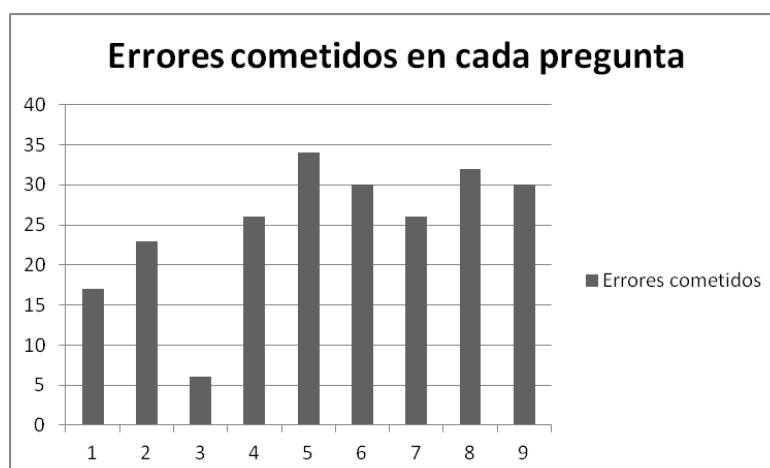
Aspectos del número decimal propuestos en el currículo para ser aprendidos en quinto curso de Educación Primaria	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
Representación del número decimal	X	X	X						
Valor de posición de las cifras del número decimal	X	X	X			X	X		
El papel del cero en la expresión decimal de un número decimal				X		X			
Lectura de números decimales	X						X		
Escritura de números decimales		X					X		
Ordenación de decimales por comparación				X		X			
Propiedad de la densidad					X				
Operaciones con decimales								X	X

5.1.4 Análisis y resultados del cuestionario

Las respuestas del alumnado a las diferentes preguntas del cuestionario constituyen una fuente reveladora de los errores que cometen con frecuencia los alumnos con los números decimales (Anexo II).

Este experimento en un aula real confirma lo estudiado en el presente trabajo, es decir, verifica la presencia de diversos errores relacionados con los números decimales en el alumnado de quinto curso de Educación Primaria así como permite la identificación de los errores cometidos con más frecuencia.

Los resultados del cuestionario se recogen en el siguiente gráfico, por medio del cual se pueden observar los errores cometidos en cada una de las nueve preguntas del cuestionario realizado a un grupo de 52 alumnos de quinto curso de Educación Primaria.

Gráfico 1. Errores cometidos en cada pregunta del cuestionario

Un análisis exhaustivo de este gráfico permite extraer diversas y variadas conclusiones acerca de los errores relacionados con los números decimales, las cuales exponemos a continuación.

Una observación general del gráfico permite concluir cuáles han sido las preguntas que más difíciles han resultado al alumnado, debido a la gran cantidad de errores cometidos en ellas, así como cuáles han sido las que les han resultado más sencillas.

En efecto, los alumnos han cometido más errores en las últimas seis preguntas del cuestionario, desde la cuatro hasta la nueve, siendo la número cinco la pregunta más fallada. Estos datos revelan las dificultades que presentan los alumnos respecto a la ordenación y comparación de los números decimales, la propiedad de la densidad, el papel del cero en la expresión decimal, el valor de posición de las cifras de un número decimal y las operaciones con decimales.

Para analizar las dificultades que los alumnos han tenido con cada uno de estos aspectos del concepto de número decimal, vamos a exponer como ejemplo una respuesta significativa de todas las obtenidas en el cuestionario de cada una de las preguntas más falladas.

En primer lugar, la pregunta cuatro tenía como objetivo que los alumnos fueran capaces de interpretar el valor de posición de las cifras del número decimal para así poder ordenar los números decimales. Sin embargo, el siguiente

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

ejemplo nos muestra cómo algunos alumnos siguen sin comprender el valor de posición de las cifras de un número decimal. En particular, consideran su parte entera y su parte decimal como dos números naturales distintos y, por lo tanto, los ordenan teniendo únicamente en cuenta el número de cifras de la parte decimal.

4. Ordena los siguientes números de mayor a menor:

$$2'14 - 0'14 - 0'20 - 14'2 - 14'02 - 0'104 - 0'020$$

..0'204 > 0'020 > 14'02 > 2'14 > 0'20 > 0'14 > 14'2

Figura 2. Respuesta de un alumno a la pregunta cuatro del cuestionario

En segundo lugar, la pregunta cinco, relacionada con la propiedad de la densidad de los números decimales, ha sido, con diferencia, la pregunta en la que se han cometido más errores. Tal como demuestra el siguiente ejemplo, los alumnos concebían este ejercicio como inútil o erróneo, puesto que consideraban que no existía ningún número decimal entre los dos dados. Esta respuesta nos lleva a concluir de nuevo que los alumnos continúan percibiendo los números decimales como pares de números naturales y, por consiguiente, se rigen en función de las propiedades de los naturales.

5. Escribe un número que esté comprendido entre las siguientes parejas de números: *no se puede hacer*

a) 5'58 - - 5'59
 b) 9'1 - - 9'2
 c) 2'523 - - 2'524

} *no se puede hacer*

Figura 3. Respuesta de un alumno a la pregunta cinco del cuestionario

En tercer lugar, la pregunta seis, centrada en la comparación de números decimales, nos indica la existencia de tres errores importantes relacionados con los números decimales: la concepción del número decimal como un par de números naturales y, en consecuencia, la realización de su comparación en función de las reglas de los naturales; la incompreensión del valor de posición de

las cifras del número decimal; y la ignorancia y confusión del papel del cero en la expresión decimal de un número.

6. Rodea el número menor de cada una de las siguientes parejas:

2'5	2'05
0'08	0'009
0'036	36
1'7	1'70
6'45	6'5

Figura 4. Respuesta de un alumno a la pregunta seis del cuestionario

En cuarto lugar, la pregunta siete, que buscaba que los alumnos escribieran el siguiente número decimal de la serie, atendiendo al valor de posición de las cifras de los números, nos ha permitido analizar respuestas como la siguiente, en la que claramente advertimos la incomprensión del valor de posición de las cifras del número decimal y, por consiguiente, la incapacidad de poder escribir el siguiente número decimal de la serie. Además, en esta respuesta, se contempla de nuevo la concepción del número decimal como dos números naturales distintos, al haber continuado la serie sumando una unidad a cada una de las partes, entera y decimal, del número decimal.

7. Completa las siguientes series de números decimales:

a) $7'96 \rightarrow 7'97 \rightarrow 7'98 \rightarrow \underline{7'99} \rightarrow \underline{7'00}$

b) $0'6 \rightarrow 0'7 \rightarrow 0'8 \rightarrow \underline{0'9} \rightarrow \underline{0'00}$

c) $0'5 \rightarrow 1 \rightarrow 1'5 \rightarrow \underline{0'6} \rightarrow \underline{1}$

Figura 5. Respuesta de un alumno a la pregunta siete del cuestionario

En quinto lugar, la pregunta ocho, enfocada hacia las operaciones con decimales, plasma muchos de los errores estudiados en relación con las operaciones de números decimales: concepción de los números decimales como dos pares de números naturales y, por consiguiente, cálculo de la parte

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

entera y la parte decimal de forma separada; la ausencia de coma en el resultado debido a una falta de concentración; y la consideración de que multiplicar por diez es añadir un cero a la derecha de la parte decimal o bien, de que dividir entre diez es eliminar la parte decimal del número decimal.

8. Haz las siguientes operaciones:

- $17'3 + 21'8 = 40'1$
- $2'4 - 1'70 = 1'70$
- $2'3 \times 2'3 = 4'59$
- $3'15 \times 10 = 31'50$
- $2'12 : 2 = 1'06$
- $0'9 : 10 = 9$

Figura 6. Respuesta de un alumno a la pregunta ocho del cuestionario

En sexto y último lugar, la pregunta nueve, orientada hacia el estudio de una cuestión relacionada con el producto y la división de números decimales, nos muestra la existencia de la consideración errónea por parte del alumnado de que la multiplicación es siempre aumento y de que la división es siempre disminución. Así pues, los alumnos, al tener que marcar la operación que diese un resultado mayor, no han dudado en rodear en todo momento la multiplicación, independientemente de su resultado.

9. Marca en cada pareja la operación que dé un resultado mayor:

a) 8×4 y $8 : 4$

b) $8 \times 0'4$ y $8 : 0'4$

c) $0'8 \times 0'4$ y $0'8 : 0'4$

Figura 7. Respuesta de un alumno a la pregunta nueve del cuestionario

Tras este estudio de las respuestas del alumnado a las preguntas del cuestionario, hemos observado, gracias a que los alumnos escribieron su número de lista, que, en general, son los mismos alumnos los que han cometido los errores a lo largo de las preguntas del cuestionario. En efecto,

esta conclusión lógica es debida a que muchas de las preguntas del cuestionario evaluaban aspectos relacionados entre sí del concepto de número decimal. Por lo tanto, aquellos alumnos que presentaban una completa incomprensión del concepto, cometieron errores en la mayoría de las preguntas del cuestionario.

Por último, cabe señalar las preguntas del cuestionario que menos errores han tenido: las tres primeras preguntas. Dichas preguntas hacen referencia a la lectura y escritura de los números decimales así como a la representación de un número decimal por medio del uso de un material físico como es el ábaco.

Estos buenos resultados conducen a pensar que los aspectos del concepto de número decimal que han sido enseñados por medio de materiales físicos o tablas de valor posicional son mejor comprendidos y afianzados en los esquemas mentales del alumno. En consecuencia, los alumnos son capaces de realizar exitosamente aquellos ejercicios en los que se trabaja expresamente dichos aspectos del número decimal, ya que los alumnos utilizan los apoyos que han aprendido para llevar a cabo el ejercicio. No obstante, en aquellas preguntas en las que estos aspectos del concepto de número decimal no son trabajados directamente aunque son necesarios para obtener un correcto resultado, el alumnado no es capaz de utilizar los apoyos que les han ayudado en anteriores ejercicios.

5.2 Secuencias didácticas

En este segundo apartado del marco práctico del presente trabajo se presentan dos secuencias didácticas; la primera, enfocada a los alumnos de quinto curso de Educación Primaria, está diseñada para trabajar los diferentes aspectos del concepto de número decimal; la segunda, dirigida a los alumnos de cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria, está planteada para recordar aquellos conceptos matemáticos relacionados con los números decimales así como para introducir los aspectos más básicos de este concepto.

Ambas secuencias didácticas abarcan los cuatro bloques de contenidos en los que se divide, en el currículo de Educación Primaria, el área de Matemáticas. En efecto, por medio de las actividades diseñadas, no solamente se profundiza en el bloque de contenidos en el que se encuentran recogidos los números decimales, “Números y operaciones”, sino que también se trabajan los otros tres bloques: “La medida: estimación y cálculo de operaciones”; “Geometría”; y, por último, “Tratamiento de la información, azar y probabilidad”.

Los cuatro bloques en los que se clasifican los contenidos del área de Matemáticas son trabajados en las secuencias didácticas tanto por materiales didácticos estructurados y utilizados frecuentemente en las aulas como por materiales didácticos nuevos, diseñados expresamente para dichas secuencias didácticas. El constante uso de materiales físicos llevado a cabo en estas propuestas de actividades refuerza nuestra idea de utilizar en el aula este tipo de objetos manipulativos para poder así aprovechar las ventajas que ofrecen en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Es necesario aclarar que estas dos secuencias didácticas no pudieron ser llevadas a la práctica en un aula real. No obstante, aunque su utilidad no haya sido aún verificada, creemos que esta forma de trabajar el concepto de número decimal ayudará notablemente al alumnado a entender este aspecto concreto de las matemáticas.

5.2.1 Secuencia didáctica para quinto curso de Educación Primaria

A través de la secuencia de actividades propuesta para quinto curso de Educación Primaria, se pretende trabajar los diferentes aspectos del número decimal:

- Representación de un número decimal.
- Valor de posición de las cifras de un número decimal.
- El papel del cero en la expresión decimal de un número decimal.
- Lectura de números decimales.
- Escritura de números decimales.

- Orden y comparación de números decimales.
- Propiedad de la densidad.
- Operaciones con decimales.

Por consiguiente, dicha secuencia de actividades se situaría en el último de los tres momentos clave en los que hemos dividido, en el apartado 4.4 del presente trabajo, el proceso de enseñanza – aprendizaje de los números decimales: *el estudio del concepto de número decimal*.

En consecuencia, cabe recordar que, antes de iniciar esta secuencia didáctica, los números decimales ya habrían sido presentados e introducidos a los alumnos. Así pues, el alumnado sería conocedor, entre otros aspectos, del porqué y el para qué de la aparición de los números decimales, de la formación de las expresiones decimales por la extensión natural del sistema de numeración decimal o de la relación existente entre los números decimales y las fracciones, al ser distintas representaciones de un mismo número.

Para trabajar los diferentes aspectos del concepto de número decimal, se propone una secuencia de cinco actividades distintas y prácticas, de duraciones variadas en función de lo que se trabaja en cada una de ellas. Estas cinco actividades engloban los principales contenidos relacionados con los números decimales que los alumnos de quinto curso de Educación Primaria deben comprender y aprender.

Tabla 5. Relación de las actividades con los aspectos del concepto decimal que deben ser trabajados

Aspectos del concepto decimal que deben ser aprendidos por los alumnos de quinto curso de Educación Primaria	A1	A2	A3	A4	A5
Representación del número decimal	X	X	X	X	X
Valor de posición de las cifras del número decimal	X	X	X	X	X
El papel del cero en la expresión decimal de un número decimal				X	X
Lectura de números decimales		X		X	X
Escritura de números decimales	X	X		X	X
Ordenación de decimales por comparación	X	X	X	X	X
Propiedad de la densidad		X	X	X	X
Operaciones con decimales		X	X	X	X

Todas ellas giran alrededor de la construcción y posterior utilización de un material físico, una regla, elaborada con el material “goma eva”, el cual es fácilmente manejable y transportable. Utilizando la regla construida por los propios alumnos, se realizarán todas las actividades propuestas al respecto, por medio de las cuales los alumnos trabajarán los distintos aspectos del concepto de número decimal.



Figura 8. Reglas construidas con “goma eva” que van a ser utilizadas en las actividades

La construcción y posterior utilización de este material físico ayudará al alumnado no solamente a entender de una forma más práctica y eficaz este concepto matemático, sino también incrementará su interés en aquello que estará aprendiendo, incitando a la indagación, investigación y reflexión sobre el tema de estudio, así como su motivación en el aprendizaje.

Para la ejecución de las diferentes actividades planteadas, se proponen, junto con la utilización de la regla construida por los propios alumnos, distintas y variadas fichas donde se refleje lo que los alumnos habrán trabajado en las diferentes actividades. De esta forma, constará por escrito todo lo que los alumnos habrán ido realizando a lo largo de la secuencia didáctica.

5.2.1.1 Secuencia didáctica para trabajar los números decimales con alumnos de quinto curso de Educación Primaria

Actividad 1: ¡Construimos nuestras propias reglas!

- Tiempo: 60 minutos
- Material: Láminas de “goma eva” de distintos colores, regla, lápiz, rotuladores negro y azul, tijeras, cola o silicona y ficha preparada por el profesor/a (Anexo III).
- Descripción:

En primer lugar, los alumnos serán divididos en grupos de tres personas. Cada grupo deberá construir su propia regla, siguiendo las instrucciones dadas por escrito por el profesor/a (Anexo III).

Antes de construir las distintas reglas, el profesor/a mostrará a los alumnos una regla, construida con anterioridad y dividida en diez unidades, como ejemplo a imitar y como referencia a tomar para realizar las diferentes divisiones de las reglas.

Las distintas reglas de la clase serán diferentes entre sí, puesto que a cada grupo se le habrá pedido que realice diferentes divisiones en sus reglas, es decir, a un grupo se le habrá pedido, por ejemplo, que divida en dos partes

cada una de las unidades que aparecen en su regla; a otro grupo, en cambio, que divida cada una de estas unidades en cuatro partes; a un tercero, que divida en cinco partes cada una de las unidades de su regla; a otro grupo de la clase, sin embargo, que divida en diez partes cada una de las tres primeras unidades, etc.

Una vez adjudicada a cada grupo una división diferente para sus reglas, los alumnos tendrán un tiempo determinado para construirlas, atendiendo a las instrucciones dadas por escrito al comenzar la actividad.

Cuando las hayan construido, se llevarán a cabo las diferentes actividades prácticas propuestas para trabajar los aspectos del número decimal, que se exponen a continuación.

Actividad 2: ¡Plantamos un árbol!

- Tiempo: 30 minutos
- Material: Reglas construidas en la anterior actividad y ficha preparada por el profesor/a (Anexo IV).
- Descripción:

El profesor/a presentará al alumnado la siguiente situación práctica:

La semana pasada nuestra clase plantó un árbol en el huerto del colegio. Cada semana visitamos nuestro árbol y marcamos su altura en un palo para medirla. La semana pasada nuestro árbol medía 1'2 metros y esta semana mide 0'03 metros más.

A continuación, se pedirá a los alumnos que representen en sus respectivas reglas las medidas del árbol indicadas en la situación práctica anterior, suponiendo que cada unidad de la regla representa un metro. Para ello, el alumnado tendrá que pensar e investigar acerca del lugar en la regla dónde debe colocarlas, dadas las divisiones hechas en la actividad anterior.

En consecuencia, los alumnos tendrán que ordenar en la regla las dos medidas del árbol representadas con números decimales, averiguando entre qué dos números decimales estarán comprendidas en su recta numérica.

Una vez que los alumnos hayan descubierto entre qué números de los señalados en sus reglas se encuentran comprendidas las medidas del árbol y hayan representado, por tanto, el número decimal $1'2$, los alumnos tendrán que averiguar la medida del árbol de esta semana y representarla en sus reglas. Para la consecución de tal objetivo, es necesario que se den cuenta, en primer lugar, de que $0'03$ metros equivalen a tres centésimas de metro. Por lo tanto, ante la imposibilidad de alcanzar otra décima, es preciso que, en segundo lugar, dividan la décima, entre los números decimales $1'2$ y $1'3$, en diez partes iguales, es decir, en diez centésimas, para así poder representar en las reglas el número decimal $1'23$.

Del mismo modo, el profesor/a hará ver a los alumnos que siempre se pueden encontrar números decimales entre otros dos dados, en este caso, entre el $1'2$ y el $1'3$, es decir, trabajará con los alumnos la propiedad de la densidad.

Una vez que los alumnos hayan conseguido representar las medidas del árbol en sus respectivas reglas, el profesor/a entregará a los alumnos una ficha (Anexo IV) en la que no solamente se plasmará gráficamente el proceso llevado a cabo para representar los números decimales en la regla o recta numérica sino que también se propondrá una serie de cuestiones al respecto, por medio de las cuales se trabajarán diversos aspectos del concepto de número decimal.

Actividad 3: Construcción de nuestra parcela triangular

- Tiempo: 25 minutos
- Material: Reglas construidas en la primera actividad, compás y ficha preparada por el profesor/a (Anexo V).
- Descripción:

El profesor/a continuará utilizando la misma situación práctica anterior a la hora de introducir esta tercera actividad:

Nuestra clase ha plantado un árbol en una parcela triangular del huerto del colegio, cuyas longitudes son las siguientes: $1'8$, $3'02$ y $3'2$ metros.

A continuación, el profesor/a pedirá a los alumnos que reproduzcan esa parcela triangular a partir de las medidas dadas. Para ello, tendrán que utilizar de nuevo las reglas que han construido en la primera actividad (suponiendo siempre que cada unidad de la regla representa un metro).

No obstante, dichas medidas no aparecen en las reglas elaboradas. Por lo tanto, el primer paso será averiguar el lugar de las medidas en las reglas de cada grupo, trabajando, por tanto, el orden y la comparación de números decimales y la propiedad de la densidad.

El segundo paso se centrará en la reproducción de la parcela triangular, la cual será llevada a cabo por medio de las reglas construidas y el compás. Dicha reproducción se realizará en una ficha (Anexo V), dada previamente a los alumnos, donde plasmarán todo lo trabajado en esta actividad.

Una vez construidas las parcelas triangulares, el profesor/a hará ver y comprobar a los alumnos, por medio de una serie de preguntas, la premisa de que para construir un triángulo es necesario que la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera sea mayor a la longitud del lado restante. En consecuencia, se pedirá al alumnado que compruebe por qué ha podido construir la parcela triangular con las medidas dadas en la situación práctica. Del mismo modo, los alumnos tendrán que pensar en construir otra parcela triangular, cuyas medidas sean ilógicas e incoherentes y, por lo tanto, se vean incapaces de construir el triángulo.

Actividad 4: ¡Necesitamos vallar el huerto del colegio!

- Tiempo: 30 minutos
- Material: Reglas construidas en la primera actividad y ficha preparada por el profesor/a (Anexo VI).
- Descripción:

Siguiendo el mismo argumento que en las dos actividades anteriores, el profesor/a planteará una nueva situación práctica que contextualizará la actividad:

Nuestra clase ya ha plantado el árbol en la parcela triangular que hemos construido. No obstante, el huerto del colegio se compone de muchas más parcelas. Debido a su gran amplitud, hemos decidido cercarlo y colocar una valla alrededor del huerto para protegerlo. Sin embargo, no sabemos cuántos metros de valla debemos comprar puesto que no conocemos el perímetro del huerto.

El objetivo de esta actividad es que los alumnos sean capaces de averiguar cuánto mide el perímetro del colegio o, lo que es lo mismo, cuántos metros de valla debemos comprar para cercarlo.

Para alcanzar tal propósito, los alumnos tendrán que reproducir, primero, el terreno del huerto del colegio, siguiendo las instrucciones que el profesor/a les planteará en una ficha (Anexo VI) y con la ayuda de las reglas construidas en la primera actividad de la secuencia didáctica.

Sin embargo, dicha reproducción del terreno del huerto del colegio no será tan fácil de llevar a cabo, puesto que en las instrucciones dadas al alumnado se presentarán distintos enigmas que deberán ser resueltos para averiguar las medidas del huerto y, finalmente, poder reproducirlo con las reglas. Estos enigmas consistirán en preguntas y problemas relacionados con los números decimales, por medio de los cuales los alumnos trabajarán todos los aspectos del concepto del número decimal que hemos especificado anteriormente.

Actividad 5: Repaso y refuerzo de lo aprendido en la secuencia didáctica

- Tiempo: 35 minutos
- Material: Fichas realizadas en las actividades anteriores (Anexos III, IV, V y VI)
- Descripción:

La última actividad de la secuencia didáctica se dedicará a repasar, gracias a las distintas fichas (Anexos III, IV, V y VI) hechas por los alumnos, todos los ejercicios llevados a cabo a lo largo de ella. Mediante este repaso exhaustivo y detallado de cada ejercicio, el profesor/a explicará los objetivos que pretendía. Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

que los alumnos alcanzaran en cada uno de ellos y, en consecuencia, de forma conjunta, alumnos y profesor/a conceptualizarán cada uno de los aspectos del concepto trabajados, a partir de la observación de los ejercicios concretos realizados.

5.2.2 Secuencia didáctica para cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria

La secuencia didáctica diseñada para alumnos de cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria se configura principalmente para cumplir dos objetivos:

- El primero de ellos consiste en trabajar los principales conceptos matemáticos que presentan una relación directa con los números decimales. Estos mismos conceptos matemáticos son los que el maestro debe recordar al alumnado de quinto curso de Educación Primaria antes de comenzar el tema de los decimales.
- El segundo objetivo se basa en la idea de introducir y trabajar el aspecto más básico e importante del concepto de número decimal, las unidades decimales (décima, centésima, milésima, etc.).

Para alcanzar ambos objetivos, se va a emplear en la secuencia didáctica una metodología que otorga un papel relevante al uso de materiales físicos como un medio más motivador y cercano al alumnado para llegar a comprender los conceptos matemáticos que se desean trabajar.

Con la ayuda de esta secuencia didáctica, creemos que los alumnos que comenzaran quinto curso de Educación Primaria estarían mejor preparados y, por consiguiente, comprenderían mejor los aspectos del número decimal cuando se trabajara el tema en quinto curso de Educación Primaria. Esta mejora en la comprensión del concepto sería notable puesto que, de esta forma, los alumnos podrían asociar el nuevo contenido que están aprendiendo con lo que ellos ya saben y han aprendido *a priori*. De igual modo, se contribuiría a reducir los errores y dificultades de aprendizaje con los números

decimales a los que a menudo se enfrentan los alumnos de quinto curso de Educación Primaria.

Con el fin de detallarla de forma clara y organizada, esta secuencia didáctica se encuentra dividida en dos apartados, relacionados con los dos objetivos que cumple.

5.2.2.1 Secuencia de actividades para trabajar los principales conceptos matemáticos relacionados con los números decimales.

Los principales conceptos matemáticos relacionados con los números decimales, que consideramos necesario trabajar previamente por medio de este primer apartado de la secuencia didáctica, son los siguientes:

- Nuestro sistema de numeración: decimal y posicional.
- Las unidades de orden superior al primero (decenas, centenas,...) y qué representa cada una de ellas en un número.
- La distinción entre el número (concepto abstracto que se representa) y sus diversas representaciones o expresiones.
- Lectura y escritura de los números naturales.
- La comparación y el orden de los números naturales.

Todos estos conceptos matemáticos son trabajados por medio de las tres primeras actividades de la secuencia didáctica, las cuales se detallan a continuación.

Actividad 1: El cuento de la cuenta

- Tiempo: 30 minutos
- Material: Fichas preparadas por el profesor/a (Anexos VII y VIII)
- Descripción:

Con el objetivo de trabajar nuestro sistema de numeración decimal posicional así como las unidades superiores a la unidad (decena, centena...), el profesor/a entregará a los alumnos un cuento titulado “El cuento de la cuenta” (Anexo VII), el cual tendrá que ser leído individualmente.

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

A continuación, por medio de otra ficha (Anexo VIII) que el profesor/a entregará al alumnado, se realizará un análisis detallado de toda la información que contiene el cuento. A su vez, se irán realizando una serie de preguntas acerca del cuento que ayudarán al alumnado no solamente a entender mejor la propia historia sino también a comprender mejor y a trabajar nuestro sistema de numeración y la representación de las unidades de orden superior al primero en un número.

Actividad 2: Aprendemos nuestro sistema de numeración con los bloques multibase

- Tiempo: 30 minutos
- Material: El material físico “bloques multibase” y la ficha preparada por el profesor/a (Anexo IX).
- Descripción:

Esta segunda actividad pretende que los alumnos profundicen e interioricen el contenido trabajado en la actividad anterior: qué es y cómo es nuestro sistema de numeración así como cuáles son las unidades de órdenes superiores al primero, qué representan en un número y cuáles son las equivalencias entre unas y otras.

Para ello, se van a realizar ejercicios y actividades de cambios de unidad de un número de izquierda a derecha y viceversa gracias a la utilización de un material físico muy útil para estos casos: los bloques multibase.

Por medio de una ficha preparada por el profesor/a (Anexo IX), se presentará, en primer lugar, al alumnado el material; en segundo lugar, los alumnos dispondrán de un tiempo para descubrir y experimentar con el nuevo material a través de una serie de cuestiones que se les plantea en la ficha; y en tercer lugar, tendrán que responder a varias preguntas, investigando las respuestas, primero, manipulativamente con los bloques multibase y, segundo, escribiendo y dibujando las respuestas en la ficha dada.

Actividad 3: El número y sus diversas representaciones

- Tiempo: 30 minutos
- Material: El material físico “bloques multibase” y la ficha preparada por el profesor/a (Anexo X).
- Descripción:

En esta actividad se trabajan tres conceptos matemáticos importantes para, posteriormente, comprender mejor algunos aspectos del concepto de número decimal: la distinción entre el número y sus diversas representaciones o expresiones, la lectura y escritura de los números naturales y la comparación y orden de los números naturales.

Para trabajar el primero de ellos, se va a pedir a los alumnos que representen varios números de diferentes formas, ayudados de las imágenes del cuento de la cuenta, trabajado en la primera actividad. De esta forma, el profesor/a enfatizará la idea de que los números pueden ser representados de diferentes maneras.

De igual modo, el profesor/a relacionará esta última idea con el hecho de que los números pueden ser leídos y escritos también de distintas formas. Para ayudar a los alumnos a comprender mejor esta relación, el profesor/a volverá a recurrir a los bloques multibase para explicarla. A continuación, dejará a los alumnos experimentar con el material para intentar responder a las distintas cuestiones que se les plantean en la ficha dada al comenzar la actividad (Anexo X). El profesor/a observará cómo se desenvuelven los alumnos, cómo indagan y cómo expresan sus ideas al respecto, además de resolver las dudas pertinentes.

Por último, el profesor/a hará ver a los alumnos cómo frecuentemente utilizamos, a pesar de las numerosas representaciones que tienen los números, una única expresión de un número, aquella referida a las unidades. En consecuencia, ordenar y comparar números nos resulta muy sencillo de hacer, ya que el número mayor será aquel que tenga el mayor número de unidades. Para interiorizar esta última idea, los alumnos realizarán en la ficha dada un ejercicio de comparación y ordenación de números naturales.

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

5.2.2.2 Secuencia de actividades para aprender las unidades decimales.

Este segundo apartado de la secuencia didáctica pretende introducir y trabajar el aspecto más básico e importante del concepto de número decimal, las unidades decimales (décima, centésima, milésima, etc.), a través de una metodología práctica y manipulativa, gracias al uso de materiales físicos (monedas y bloques multibase), así como motivadora y cercana al alumno, debido a la utilización de un cuento.

Actividad 4: El cuento “Alicia en el país de los números”

- Tiempo: 30 minutos
- Material: Fichas preparadas por el profesor/a (Anexo XI y XII).
- Descripción:

Con el objetivo de trabajar las unidades inferiores a la unidad o unidades decimales, el profesor/a entregará a los alumnos un cuento titulado “Alicia en el país de los números” (Anexo XI), el cual tendrá que ser leído individualmente.

A continuación, por medio de otra ficha (Anexo XII) que el profesor/a entregará al alumnado, se realizará un análisis detallado de toda la información que contiene el cuento. A su vez, se irán realizando una serie de preguntas acerca del cuento que ayudarán al alumnado a comprender mejor no solamente la propia historia sino también este nuevo concepto matemático.

En todo momento, el profesor/a relacionará las unidades decimales con nuestro sistema de numeración decimal posicional así como con las unidades de orden superior al primero (decena, centena...) y hará ver a los alumnos la formación de las expresiones decimales por la extensión natural de nuestro sistema de numeración hacia la derecha.

Actividad 5: Trabajemos con los euros

- Tiempo: 30 minutos
- Material: El material físico “las monedas” y la ficha preparada por el profesor/a (Anexo XIII).
- Descripción:

En relación con el final del cuento de “Alicia en el país de los números” y con el propósito de continuar trabajando e interiorizando este nuevo concepto matemático, el profesor/a utilizará un material muy cercano a los alumnos, los euros y los céntimos, para seguir estudiando las unidades decimales.

Por medio de una ficha (Anexo XIII) que el profesor/a dará a los alumnos, se les presentará, en primer lugar, el material así como sus similitudes con las unidades decimales; en segundo lugar, los alumnos podrán experimentar con las monedas respondiendo a las cuestiones planteadas en la ficha; y, en tercer lugar, el alumnado tendrá que responder a varias preguntas, investigando las respuestas, primero, manipulativamente con las monedas y, segundo, escribiendo y dibujando las respuestas en la ficha dada.

Actividad 6: Aprendamos las unidades decimales con los bloques multibase

- Tiempo: 30 minutos
- Material: El material físico “bloques multibase” y la ficha preparada por el profesor/a (Anexo XIV).
- Descripción:

Debido a que con el material de las monedas únicamente podemos expresar números y cantidades hasta las centésimas, el profesor planteará esta última actividad, por medio de la cual los alumnos podrán trabajar también las milésimas, utilizando para ello el material físico ya empleado en actividades anteriores, los bloques multibase.

Por medio de una ficha preparada por el profesor/a (Anexo XIV), se presentará, en primer lugar, al alumnado el material, en el cual se cambiará, en esta ocasión, la forma de representar cada orden de unidades; en segundo lugar, los alumnos dispondrán de un tiempo para descubrir y experimentar con el material a través de una serie de cuestiones que se les plantea en la ficha; y en tercer lugar, tendrán que responder a varias preguntas, investigando las respuestas, primero, manipulativamente con los bloques multibase y, segundo, escribiendo y dibujando las respuestas en la ficha dada.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Este trabajo de investigación constituye un estudio detallado y exhaustivo de la situación actual de la enseñanza y el aprendizaje del número decimal.

El currículo oficial de Educación Primaria establece el estudio completo de los números decimales en quinto curso. Las teorías sobre el desarrollo de la inteligencia humana desarrolladas por autores tan importantes como Jean Piaget o Lev S. Vygotski han permitido no solamente justificar su inclusión específica en este curso sino también concluir que los conceptos más básicos de los números decimales podrían ser introducidos y trabajados, con la ayuda del profesor, en cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria.

Centrándonos en la enseñanza actual de los números decimales, se han analizado los distintos libros de texto disponibles hoy en día en el mercado español para quinto curso. La valoración de la calidad del proceso de enseñanza propuesto por los manuales permite concluir la existencia de ciertos aspectos inadecuados en la metodología empleada, los cuales crean obstáculos de comprensión y generan posteriores errores y dificultades de aprendizaje de los decimales en los niños de quinto curso de Educación Primaria.

En consecuencia, es notable la presencia de numerosos errores de comprensión en el aprendizaje de los números decimales. El estudio de las diferentes investigaciones didácticas que existen acerca de los errores y dificultades de aprendizaje de los números decimales en Educación Primaria ha permitido conocer cuáles son los que se comenten con más frecuencia así como inferir cuáles podrían ser las posibles causas que producen la aparición de dichos errores y dificultades de aprendizaje en los alumnos de quinto curso de Educación Primaria.

Para contrastar la información de estos estudios y verificar si realmente estos errores son producidos en la escuela, se ha realizado un cuestionario con alumnos de quinto curso de Educación Primaria. Este cuestionario ha permitido demostrar la existencia de los errores y dificultades de aprendizaje de los

números decimales en dos aulas del colegio donde se han desarrollado mis prácticas escolares así como concluir que los números decimales ocasionan múltiples dificultades en los alumnos de esa edad.

El cuestionario diseñado plantea diversas preguntas relacionadas con la lectura y escritura, valor posicional de las cifras, interpretación del cero, ordenación, propiedad de la densidad y operaciones con números decimales. Los resultados del cuestionario muestran cómo los alumnos encuestados cometen numerosos errores en la mayoría de las preguntas propuestas, obteniendo los peores resultados en los ejercicios relacionados con la propiedad de la densidad, el orden y las operaciones con los números decimales.

Con el objetivo de averiguar cómo se podrían trabajar, desde el principio, los números decimales sin que apareciesen *a posteriori* todos los errores y dificultades de aprendizaje relacionados con ellos, se propone en el trabajo otra forma de enseñanza de los números decimales, diferente a la propuesta en los libros de texto.

Aunque su utilidad no haya podido aún ser verificada, creemos que esta forma de trabajar el número decimal ayudaría notablemente al alumnado a entender este aspecto concreto de las matemáticas.

En relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números decimales propuesto en el trabajo, se han desarrollado dos secuencias didácticas con variadas y prácticas actividades que, a pesar de que no han podido ser llevadas a la práctica en un aula real, creemos que fomentarían un aprendizaje sin errores de los números decimales.

La primera, diseñada para alumnos de quinto curso de Educación Primaria, se encuentra enfocada al aprendizaje de los diferentes aspectos del concepto de número decimal, teniendo presente en todo momento cuáles son los errores cometidos con más frecuencia con los números decimales. Por consiguiente, se demuestra la posibilidad de desarrollar una secuencia didáctica encaminada a prevenir dichos errores o a corregirlos en el caso de que apareciesen en el alumnado.

Análisis de la enseñanza del número decimal y diseño de una propuesta didáctica para trabajar el concepto

La segunda, planteada para alumnos de cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria, está enfocada a la introducción de los aspectos más básicos e importantes de estos números, para evitar así la aparición de las dificultades y errores de los números decimales cuando estos alumnos comiencen quinto curso de Primaria. En consecuencia, se verifica la posibilidad de diseñar actividades relacionadas con los aspectos del concepto de número decimal para cursos inferiores a quinto curso de Educación Primaria.

REFERENCIAS

Batanero, C.; Cid, E.; Godino, J.D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: Proyecto Edumat-maestros.

Brousseau, G. (1983). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. Investigaciones en didáctica de las matemáticas*. Vol. 4, núm. 2. El pensamiento salvaje, Grenoble.

Carpenter, T.P. (1981). *Decimals. Results and Implication form the second NAEP mathematics Assessment*. Arithmetic Teacher. April.

Cascallana, T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Bilbao: Santillana.

Castro, E. (2003). *Didáctica de la matemática en Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*. Madrid: Síntesis.

Frabetti, C. (2000). *Malditas matemáticas*. Madrid: Alfaguara juvenil.

Giménez, M; Mariscal, S. et al. (2008). *Psicología del desarrollo, Volumen 1. Desde el nacimiento a la primera infancia*. Madrid: McGraw-Hill.

Ley Orgánica 1513/2006, de 7 de diciembre, del Real Decreto, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado, 8 de diciembre de 2006, núm. 293.

Ley Orgánica 1393/2007, de 29 de octubre, del Real Decreto, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, relativo a la memoria para la solicitud de verificación de títulos oficiales. Boletín Oficial del Estado, 29 de diciembre de 2007, núm. 312.

Pascual, J.R., Wilhelmi, M.R. (2011). *Matemáticas para maestros en Educación Primaria* (libro inédito). Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Pereda, L. (2002). *Matemáticas. Tercer ciclo. 5 Educación Primaria*. Donostia: Proyecto Aurkitzen.

Proyecto La Casa del Saber (2009). *Matemáticas 4 Primaria*. Madrid: Santillana.

Proyecto La Casa del Saber (2009). *Matemáticas 5 Primaria*. Madrid: Santillana.

Proyecto nuevo (2003). *Matemáticas 5 curso Primaria*. Madrid: SM.

ANEXOS

ANEXO I: CUESTIONARIO NÚMEROS DECIMALES

1. ¿Cuál de los siguientes números corresponde a cada cantidad? Rodea el correcto.

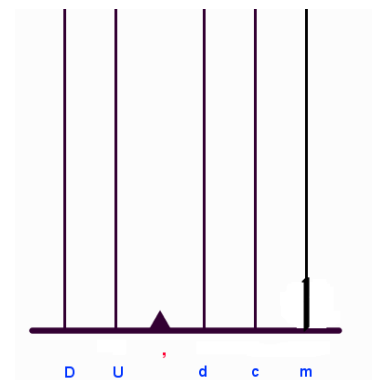
a) 84 milésimas	0'084	0'84	84	84000
b) 5 décimas	0'05	5	50	0'5
c) 30 centésimas	30	0'30	0'030	300

2. Escribe con cifras:

- Cinco centésimas → _____
- Ciento cuarenta y siete milésimas → _____
- Veinte y tres décimas → _____

3. Representa en el ábaco, el siguiente número:

- Treinta y dos unidades cuatrocientos cincuenta y tres milésimas.



Escribe el número representado en cifras: _____

4. Ordena los siguientes números de mayor a menor:

2'14 - 0'14 - 0'20 - 14'2 - 14'02 - 0'104 - 0'020

..... > > > > >

5. Escribe un número que esté comprendido entre las siguientes parejas de números:

- a) 5'58 - - 5'59
- b) 9'1 - - 9'2
- c) 2'523 - - 2'524

6. Rodea el número menor de cada una de las siguientes parejas:

2'5	2'05
0'08	0'009
0'036	36
1'7	1'70
6'45	6'5

7. Completa las siguientes series de números decimales:

a) $7'96 \rightarrow 7'97 \rightarrow 7'98 \rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$

b) $0'6 \rightarrow 0'7 \rightarrow 0'8 \rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$

c) $0'5 \rightarrow 1 \rightarrow 1'5 \rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$

8. Haz las siguientes operaciones:

- $17'3 + 21'8 =$
- $2'4 - 1'70 =$
- $2'3 \times 2'3 =$
- $3'15 \times 10 =$
- $2'12 : 2 =$
- $0'9 : 10 =$

9. Marca en cada pareja la operación que dé un resultado mayor:

a) 8×4 y $8 : 4$

b) $8 \times 0'4$ y $8 : 0'4$

c) $0'8 \times 0'4$ y $0'8 : 0'4$

ANEXO II: EJEMPLO DE CUESTIONARIO RESUELTO

CUESTIONARIO NÚMEROS DECIMALES

1. ¿Cuál de los siguientes números corresponde a cada cantidad? Rodea el correcto.

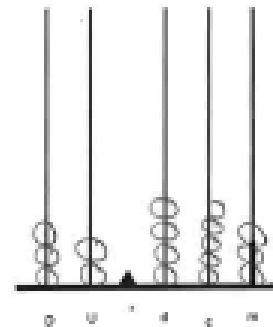
- | | | | | |
|------------------|-------|------|-------|-------|
| a) 84 milésimas | 0'084 | 0'84 | 84 | 84000 |
| b) 5 décimas | 0'05 | 5 | 50 | 0'5 |
| c) 30 centésimas | 30 | 0'30 | 0'030 | 300 |

2. Escribe con cifras:

- Cinco centésimas → 0'05
- Ciento cuarenta y siete milésimas → 0'47
- Veinte y tres décimas → 20,3

3. Representa en el ábaco, el siguiente número:

- Treinta y dos unidades cuatrocientos cincuenta y tres milésimas.



Escribe el número representado en cifras: 32,453

4. Ordena los siguientes números de mayor a menor:

$2'14$ - $0'14$ - $0'20$ - $14'2$ - $14'02$ - $0'104$ - $0'020$

$14'2 > 14'02 > 2'14 > 0'20 > 0'14 > 0'104 > 0'020$

5. Escribe un número que esté comprendido entre las siguientes parejas de números:

- | | | |
|--------------------------|---|-------------------|
| a) 5'58 - - 5'59 | } | no se puede hacer |
| b) 9'1 - - 9'2 | | |
| c) 2'523 - - 2'524 | | |

6. Rodea el número menor de cada una de las siguientes parejas:

<u>2'5</u>	2'05
<u>0'08</u>	0'009
0'036	<u>36</u>
<u>1'7</u>	1'70
6'45	<u>6'5</u>

7. Completa las siguientes series de números decimales:

a) $7'96 \rightarrow 7'97 \rightarrow 7'98 \rightarrow \underline{7'99} \rightarrow \underline{7'00}$

b) $0'6 \rightarrow 0'7 \rightarrow 0'8 \rightarrow \underline{0'9} \rightarrow \underline{0'0}$

c) $0'5 \rightarrow 1 \rightarrow 1'5 \rightarrow \underline{2} \rightarrow \underline{2'5}$

8. Haz las siguientes operaciones:

- $17'3 + 21'8 = 39'1$
- $2'4 - 1'70 = 0'60$
- $2'3 \times 2'3 = 4'59$
- $3'15 \times 10 = 31'5$
- $2'12 : 2 = 1'06$
- $0'9 : 10 = 0'09$

$\begin{array}{r} 17'3 \\ + 21'8 \\ \hline 39'1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2'4 \\ - 1'70 \\ \hline 0'60 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2'3 \\ \times 2'3 \\ \hline 6'9 \\ + 4'59 \\ \hline 4'59 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3'15 \\ \times 10 \\ \hline 31'50 \end{array}$
--	---	---	--

9. Marca en cada pareja la operación que dé un resultado mayor:

a) 8×4 y $8 : 4$

b) $8 \times 0'4$ y $8 : 0'4$

c) $0'8 \times 0'4$ y $0'8 : 0'4$

ANEXO III: FICHA “CONSTRUIMOS NUESTRAS PROPIAS REGLAS”

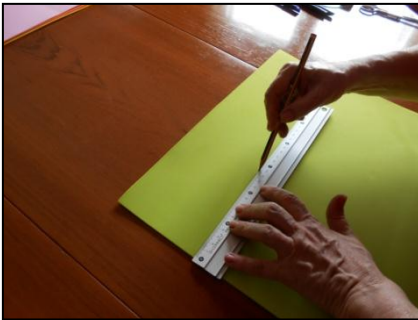
Para construir vuestras propias reglas con el material llamado “Goma Eva”, tenéis que seguir estos sencillos pasos:

PASO 1: Preparar todo el material que se va a necesitar.

- Láminas de distintos colores del material “Goma Eva”.
- Regla.
- Lápiz.
- Goma.
- Rotuladores negro y azul.
- Tijeras.
- Cola o pegamento.



PASO 2: Dibujar los extremos de la regla.

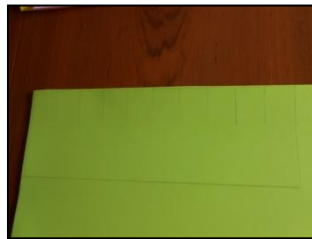


Con la ayuda de una regla y un lápiz, se van a trazar los extremos de la regla que se quiere construir. Para ello, todos vamos a tomar las mismas medidas: 30 cm de largo y 10 cm de ancho.

PASO 3: Hacer las divisiones en la regla.

Una vez que hemos trazado los extremos de la regla, tenemos que hacer sus divisiones. El profesor/a ya os habrá adjudicado una división concreta para hacer en vuestras reglas.

1. Pensar qué números tendréis que escribir en vuestras reglas. El límite de nuestras reglas es el número 10.
2. Mirar el ejemplo que el profesor/a os ha mostrado al iniciar la actividad para calcular la distancia a la hora de hacer las divisiones en vuestras reglas. Este paso es muy importante para que todas las reglas representen los mismos números.
3. Una vez que sabéis el lugar dónde tenéis que hacer las divisiones, marcarlas, primero, con lápiz, y segundo, con rotulador negro o azul.

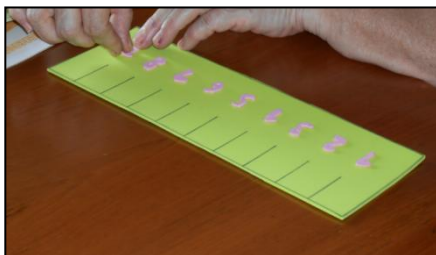


PASO 4: Recortar las reglas por sus extremos.

A continuación, hay que recortar las reglas por los extremos que hemos trazado en el segundo paso.



PASO 5: Dibujar, recortar y pegar en las reglas las unidades del número diez.



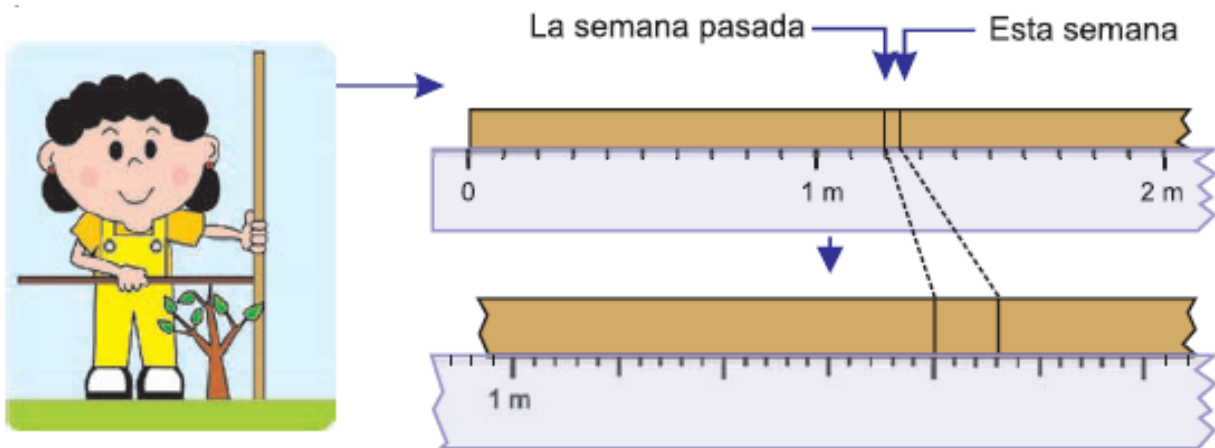
A pesar de que cada grupo ha tenido que hacer divisiones distintas en sus reglas, todos vamos a dibujar, recortar y pegar números del uno al nueve.

PASO 6: Escribir los números de las divisiones hechas en la regla

Por último, tenéis que escribir en la regla los números que representan cada una de las divisiones marcadas en ella.

ANEXO IV: FICHA "¡PLANTAMOS UN ÁRBOL!"

La semana pasada nuestra clase plantó un árbol en el huerto del colegio. Cada semana visitamos nuestro árbol y marcamos su altura en un palo para medirla. La semana pasada nuestro árbol medía 1'2 metros y esta semana mide 0'03 metros más.



- ¿Cuántos metros medía la semana pasada?

- ¿Cuántos metros mide esta semana? El resultado, ¿entre qué dos números decimales está comprendido?

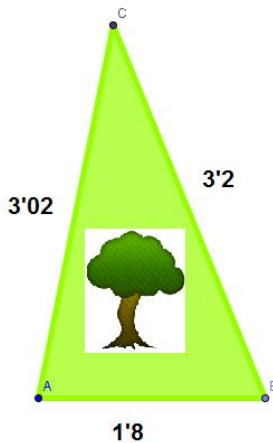
- ¿De qué forma podemos expresar la altura de esta semana en metros?

- ¿Cuánto ha crecido nuestro árbol de una semana a otra?

- Si cada semana crece 0'03 m, ¿cuántos metros crece cada día?

- ¿Cuántos metros medirá nuestro árbol dentro de diez años?

ANEXO V: FICHA "CONSTRUCCIÓN DE NUESTRA PARCELA TRIANGULAR"



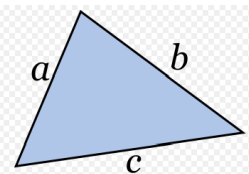
Nuestra clase ha plantado un árbol en una parcela triangular del huerto del colegio, cuyas longitudes son las siguientes: 1'8, 3'02 y 3'2 metros.

1. Utilizando la regla que has elaborado, reproduce a escala la parcela triangular siguiendo las medidas dadas.

2. ¿Has podido construir el triángulo? ¿Por qué?

3. Lee atentamente esta premisa:

En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante



$$\begin{aligned} a + b &> c \\ b + c &> a \\ c + a &> b \end{aligned}$$

4. Escribe las medidas de una parcela triangular, utilizando números decimales, que no se pueda construir.

ANEXO VI: FICHA: "INECESITAMOS VALLAR EL HUERTO DEL COLEGIO!"

Nuestra clase ya ha plantado el árbol en la parcela triangular que hemos construido. No obstante, el huerto del colegio se compone de muchas más parcelas. Debido a su gran amplitud, hemos decidido cercarlo y colocar una valla alrededor del huerto para protegerlo. Sin embargo, no sabemos cuántos metros de valla debemos comprar puesto que no conocemos el perímetro del huerto.

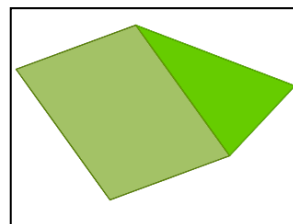
Para conocer el perímetro del huerto y, por tanto, saber cuántos metros de valla tenemos que comprar, es necesario, primero, reproducir a escala, con la ayuda de las reglas elaboradas en la primera actividad, cada una de las parcelas que forman el huerto, calculando sus medidas. Para averiguar dichas medidas se tendrán que resolver pequeños enigmas relacionados con los números decimales.

A continuación, se presentan las instrucciones para poder construir el huerto del colegio y poder así descubrir cuántos metros de valla tenemos que comprar.

INSTRUCCIONES PARA CONSTRUIR EL HUERTO DEL COLEGIO

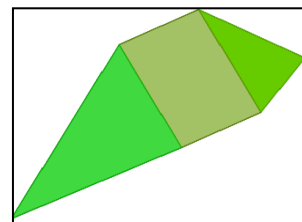
1. Reproducir a escala la parcela triangular donde hemos plantado nuestro árbol. Para ello, recuerda que las medidas del triángulo son: 3'02, 3'2 y 1'8 metros.

2. Construir un rectángulo al lado de la parcela triangular, de tal forma que una de las bases del rectángulo coincida con el lado de la parcela triangular que mide 3'02 metros.



- Para averiguar la medida de los lados laterales del rectángulo (que llamaremos A), hay que resolver el siguiente enigma: ¿Cómo escribimos veinticuatro décimas?

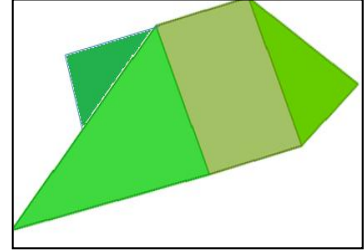
3. Construir un triángulo rectángulo al lado del rectángulo que se acaba de construir, de manera que uno de los lados que conforman el ángulo recto, llamados catetos, coincida con una de las bases del rectángulo anterior.



- Para averiguar la medida del otro cateto (medida B), se debe resolver este problema: ¿Cómo escribimos 5 unidades y 85 milésimas?

- Para averiguar la medida del lado del triángulo restante (medida C), llamado hipotenusa, hay que pensar y resolver este enigma: El número mayor entre 5,9 y 5,90 será en metros, aproximadamente, la medida que buscamos.

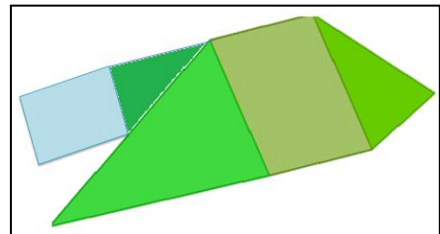
4. Construir otro triángulo rectángulo sobre el que acabamos de construir. No obstante, uno de los catetos de este triángulo, se alza desde el punto medio del lado opuesto al ángulo recto del triángulo anterior.



- ¿Pero cuánto mide ese cateto del nuevo triángulo rectángulo? La respuesta (medida D), es la solución en metros a este enigma: ¿Cuál de los dos números es mayor: 1'51 o 1'051?

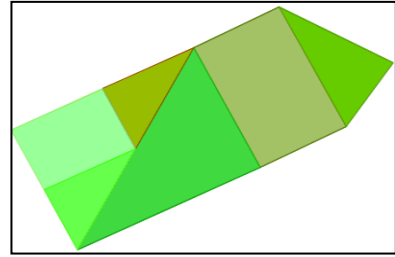
- Para saber la medida del resto de lados del triángulo, piensa y reflexiona. ¿No es cada una de esas medidas la mitad de alguna otra que ya hemos descubierto?

5. Construir otro rectángulo al lado del triángulo rectángulo que se acaba de construir. Uno de los lados laterales del rectángulo coincide con un cateto del triángulo rectángulo anterior, esto es, es igual que la medida D.

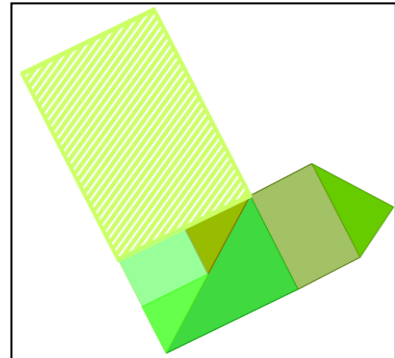


- Para descubrir cuánto mide el otro lado de este rectángulo, hay que pensar con qué medida (medida E) ya descubierta coincide. No obstante, si no caes en la cuenta, se puede también resolver este problema para saber la respuesta: ¿Qué número decimal está comprendido entre 2'5424 y 2'5426?

6. Construir un tercer triángulo rectángulo debajo del rectángulo anterior. Para elaborar este triángulo no se ofrece ninguna pista, ya que sus medidas pueden ser averiguadas si se piensa detenidamente.



7. Por último, construir un rectángulo sobre los polígonos elaborados en los pasos cuatro y cinco, de tal forma que uno de sus lados laterales coincida con uno de los lados del triángulo rectángulo que conforman el ángulo recto y una de las bases del rectángulo. Por lo tanto, la medida de dicho lado lateral del rectángulo ya la conocemos y sabemos (medida B).



- Falta por resolver el último enigma. Es preciso conocer cuánto mide el otro lado de este rectángulo (medida F). Para ello, se debe contestar a la siguiente pregunta: ¿Qué número multiplicado por $6'025$ da como resultado un número cuatro unidades menor que el número $40'15$?

“¡NECESITAMOS VALLAR EL HUERTO DEL COLEGIO!”

A. Construye el huerto del colegio, siguiendo las instrucciones dadas.

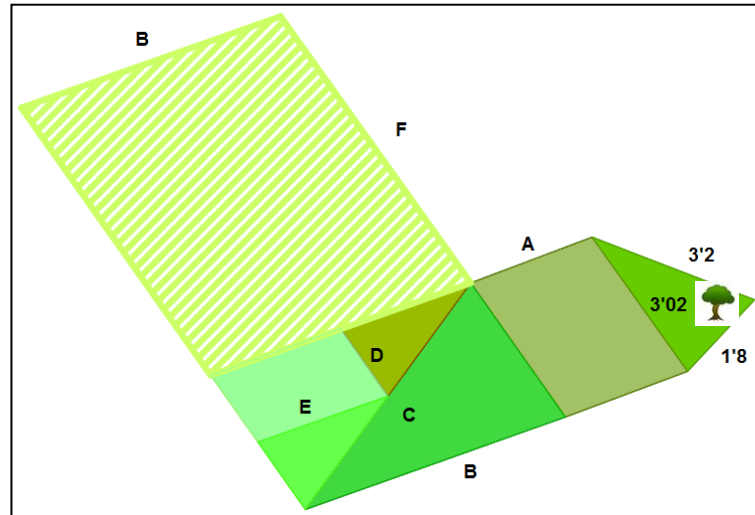


B. Una vez construido el terreno del huerto del colegio, calcula su perímetro para saber cuántos metros de valla tenemos que comprar.

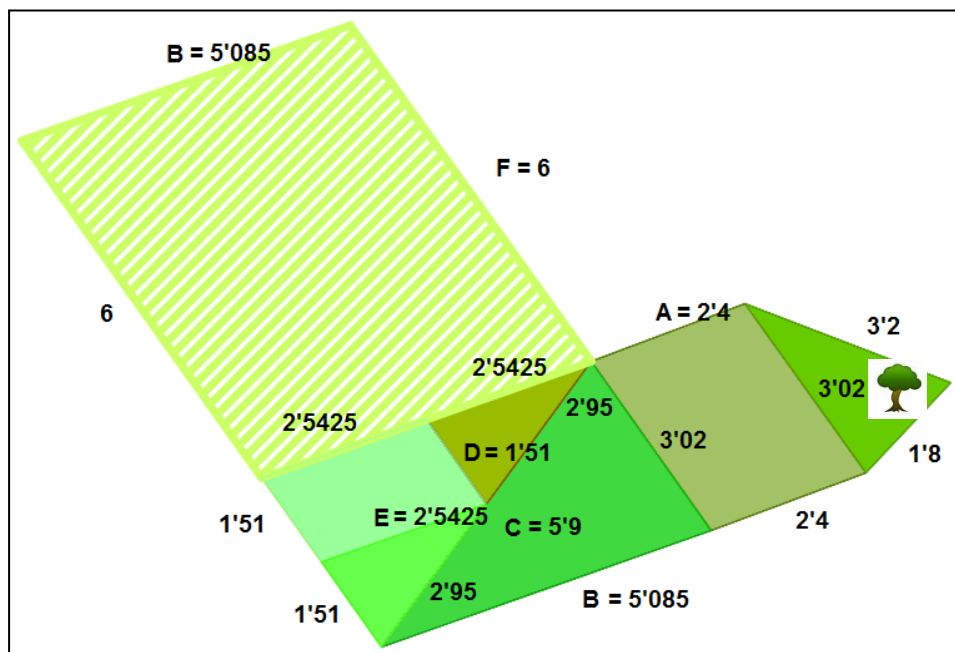


SOLUCIÓN: FICHA "¡NECESITAMOS VALLAR EL HUERTO DEL COLEGIO!"

A. El huerto del colegio con las medidas ocultas por los distintos enigmas.



B. Solución final de la actividad.



ANEXO VII: FICHA "EL CUENCO DE LA CUENTA"

Había una vez, hace mucho tiempo, un pastor que solamente tenía una oveja, empezó el hombre. Como sólo tenía una, no necesitaba contarla: si la veía, es que la oveja estaba allí; si no la veía, es que no estaba, y entonces iba a buscarla... Al cabo de un tiempo, el pastor consiguió otra oveja. La cosa ya era más complicada, pues unas veces las veía a ambas, otras veces sólo veía una, y otras ninguna...

-Ya sé cómo sigue la historia -le interrumpió Alicia-. Luego el pastor tuvo tres ovejas, luego cuatro..., y si seguimos contando más ovejas me quedaré dormida.

-No seas impaciente, que ahora viene lo bueno. Efectivamente, el rebaño del pastor iba creciendo poco a poco, y cada vez le costaba más comprobar, de un solo golpe de vista, si estaban todas las ovejas o faltaba alguna. Pero cuando tuvo diez ovejas hizo un descubrimiento sensacional: si levantaba un dedo por cada oveja y no faltaba ninguna, tenía que levantar todos los dedos de las dos manos.

-Vaya tontería de descubrimiento -comentó Alicia.

-A ti te parece una tontería porque te enseñaron a contar de pequeña, pero al pastor nadie le había enseñado. Mientras el pastor sólo tuvo diez ovejas, todo fue bien; pero pronto consiguió algunas más, y entonces ya no le bastaban los dedos.

-Podía usar los dedos de los pies.

-Si hubiera ido descalzo, tal vez, convino él -. Pero el pastor llevaba alpargatas, y habría sido muy incómodo tener que descalzarse para contar. De modo que se le ocurrió una idea mejor: cuando se le acababan los diez dedos, metía una piedrecilla en su cuenco de madera, y volvía a empezar a contar con los dedos a partir de uno, pero sabiendo que la piedra del cuenco valía por diez.

-¿Y no era más fácil acordarse de que ya había usado los dedos una vez?

-Como dice el proverbio, sólo los tontos se fían de su memoria. Además, ten en cuenta que nuestro pastor sabía que su rebaño iba a seguir creciendo, por lo que necesitaba un sistema que sirviera para contar cualquier cantidad de ovejas. Por otra parte, la idea de las piedras le vino muy bien para descansar

las manos, pues en vez de levantar los dedos para la primera decena de ovejas, empezó a usar piedras que metía en otro cuenco, esta vez de barro.

-¡Qué lío!

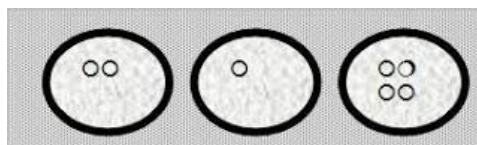
-Ningún lío. Es más fácil de hacer que de explicar: al empezar a contar las ovejas, en vez de levantar los dedos iba metiendo piedras en el cuenco de barro, y cuando llegaba a diez vaciaba el cuenco y metía una piedra en el cuenco de madera, y luego volvía a llenar el cuenco de barro hasta diez. Si al final tenía, por ejemplo, cuatro piedras en el cuenco de madera y tres en el de barro, sabía que había contado cuatro veces diez ovejas más tres, o sea, cuarenta y tres.

-¿Y qué hizo cuando llegó a tener diez piedras en el cuenco de madera?

-Buena pregunta. Entonces echó mano de un tercer cuenco, de metal, metió en él una piedra que valía por las diez del cuenco de madera y vació éste. O sea, que la piedra del cuenco de metal valía por diez del cuenco de madera, que a su vez valían cada una por diez piedras del cuenco de barro.

-Lo que quiere decir que la piedra del cuenco de metal representa cien ovejas.

-Muy bien, veo que has captado la idea. Si al cabo de una jornada de pastoreo, tras meter las ovejas en el redil y contarlas una a una, el pastor se encontraba, por ejemplo, con esto -dijo el hombre, tomando de nuevo el bolígrafo y dibujando en el cuaderno de Alicia:



-Quiere decir que tenía doscientas catorce ovejas -concluyó ella.

-Exacto, ya que cada piedra del cuenco de metal vale por cien, la del cuenco de madera vale por diez y las del cuenco de barro valen por una.

Pero entonces al pastor le regalaron una tablilla de arcilla y un punzón. Y en vez de usar cuencos y piedras de verdad, empezó a dibujar en la tablilla unos círculos que representaban los cuencos y a hacer marcas en su interior, como acabo de hacer yo en tu cuaderno. Sólo que, en vez de puntos, hacía rayas



para verlas mejor, Por ejemplo, esto significaba ciento cuarenta y dos. Pero pronto se dio cuenta de que las rayas, si las

hacía todas verticales, no eran cómodas, pues no resultaba fácil distinguir, por ejemplo, siete de ocho u ocho de nueve. Entonces empezó a diversificar los números cambiando la disposición de las rayas:



A medida que iba familiarizándose con los nuevos números, los escribía cada vez más deprisa, sin levantar el punzón de la tablilla, y empezaron a salirle así:



Poco a poco fue redondeando las siluetas de sus números con trazos cada vez más fluidos hasta que acabaron teniendo este aspecto: 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Pronto comprendió que no hacía falta poner los círculos que representaban los cuencos, ahora que los números eran compactos y no podían confundirse las rayas de uno con las del de al lado. Así sólo dejó el círculo del cuenco cuando estaba vacío; por ejemplo, si tenía tres centenas, ninguna decena y ocho unidades, escribía: 3 o 8

- ¿Y no es más fácil dejar sencillamente un espacio en blanco? – Preguntó Alicia.

- No, porque el espacio en blanco sólo se ve si tiene un número a cada lado. Pero para escribir treinta, por ejemplo, que son tres decenas y ninguna unidad, no puedes escribir sólo 3, porque eso es tres.

El pastor acabó reduciendo el círculo para que fuera del mismo tamaño que los demás signos, con lo que el trescientos ocho del ejemplo anterior acabó teniendo este aspecto: 308

Había inventado el cero, con lo que nuestro maravilloso sistema de numeración estaba completo.

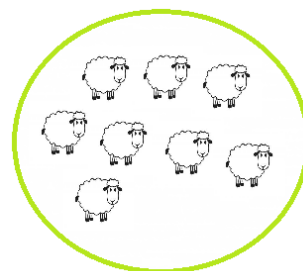
Cuento adaptado de Frabetti, C. (2000). El cuento de la cuenta en *Malditas matemáticas*. Madrid. Alfaguara juvenil, 12 – 18.

ANEXO VIII: FICHA “ANÁLISIS DEL CUENTO DE LA CUENTA”

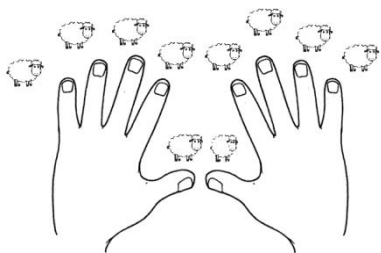
Por medio de este cuento has descubierto cómo se ha ido formando a lo largo de los siglos nuestro sistema de numeración. Sin embargo, en el cuento hay mucha información y es preciso analizarla paso a paso para comprenderla mejor.

PASO 1: El rebaño tiene 9 ovejas

El pastor comienza teniendo una oveja; luego dos ovejas, posteriormente, tres ovejas y, así sucesivamente, hasta llegar a tener nueve ovejas. Para contarlas únicamente necesita la vista.



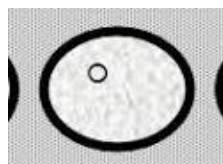
PASO 2: El rebaño tiene 10 ovejas



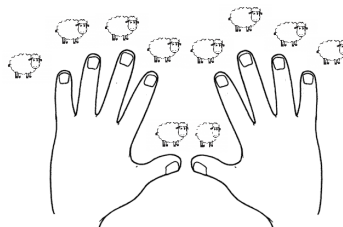
El pastor consigue diez ovejas para su rebaño y averigua que para contarlas puede utilizar los dedos de sus dos manos. Así, cada oveja es representada por un dedo de la mano.

PASO 3: El rebaño tiene 14 ovejas.

El pastor se agencia 4 ovejas más y, finalmente, su rebaño tiene 14 ovejas. El pastor, para contarlas, sigue utilizando los dedos de las dos manos para contar hasta diez ovejas. Sin embargo, como esta vez tiene más de diez ovejas, cuando se le acaban los diez dedos, mete una piedrecilla en su cuenco de madera, y vuelve a empezar a contar con los dedos a partir de uno, pero sabiendo que la piedra del cuenco de madera vale por diez.



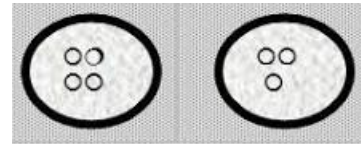
Cuenco de madera



PASO 4: El rebaño tiene 43 ovejas.

El pastor logra otras 29 ovejas más y su rebaño alcanza el número de 43 ovejas. No obstante, el pastor, cansado de levantar sus dedos cada vez que quería contar a sus ovejas, decide que

a partir de ese momento en vez de levantar los dedos para la primera decena de ovejas, va a empezar a usar piedras que va a meter en otro cuenco, esta vez de barro.

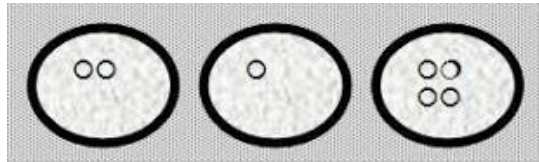


Cuenco de madera

Cuenco de barro

PASO 5: El rebaño tiene 214 ovejas.

El pastor gana un concurso y recibe como premio 171 ovejas que, junto a las 43 ovejas que ya tenía, forman un rebaño de 214 ovejas. Al ser un número tan grande de ovejas, decide echar



Cuenco de metal

Cuenco de madera

Cuenco de barro

mano de un tercer cuenco, de metal. En él va a meter una piedra que vale por las diez del cuenco de madera, lo que le va a permitir vaciar el cuenco de madera. De forma que la piedra del cuenco de metal vale por diez del cuenco de madera, que a su vez valen cada una por diez piedras del cuenco de barro.

PASO 6: El rebaño tiene 142 ovejas.

Tras enfermar y morir 72 ovejas, el rebaño se redujo finalmente a 142 ovejas. En ese momento le regalaron al pastor una tablilla de arcilla y un punzón. En consecuencia, decide, que en vez de usar cuencos y piedras de verdad, va a empezar a dibujar en la tablilla unos círculos que representarían los cuencos y a hacer rayas en su interior representando así las piedras.



Pero las rayas le resultan incómodas y empieza a diversificar los números cambiando la disposición de las rayas.



Comienza a familiarizarse con los nuevos números y le empiezan a salir de otra forma.

Poco a poco va redondeando las siluetas de sus números hasta que acabaron teniendo este aspecto: **1 2 3 4 5 6 7 8 9.**

Por último, comprende que no hace falta poner los círculos que representan los cuencos y únicamente deja el círculo del cuenco cuando está vacío, inventando así el cero.

PREGUNTAS SOBRE "EL CUENTO DE LA CUENTA"

El cuento que acabas de leer termina con una frase interesante: *"Había inventado el cero, con lo que nuestro maravilloso sistema de numeración estaba completo"*.

1. ¿Qué es nuestro sistema de numeración? Defínelo con tus palabras.

2. ¿Qué características presenta nuestro sistema de numeración?

3. En el cuento se mencionan las unidades, decenas y centenas. ¿Qué son? ¿Qué relación hay entre ellas y nuestro sistema de numeración?

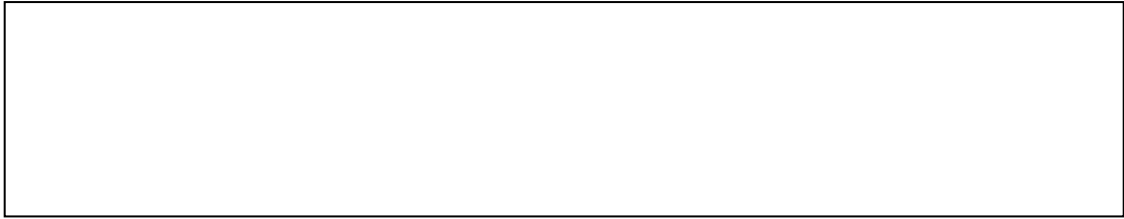
4. Las unidades, decenas y centenas están representadas en el cuento por medio de piedrecitas en distintos cuencos. ¿Qué tipo de cuenco representa cada una de ellas?

Cuenco de barro →

Cuenco de madera →

5. En el cuento aparece la siguiente frase: *"Al empezar a contar las ovejas, en vez de levantar los dedos iba metiendo piedras en el cuenco de barro, y cuando llegaba a diez vaciaba el cuenco y metía una piedra en el cuenco de madera, y luego volvía a llenar el cuenco de barro hasta diez"*. ¿Qué inventa el pastor? Puedes ayudarte de un dibujo. ¿Qué relación presenta esta frase con las unidades de orden superior al primero?

7. Más tarde, le regalan al pastor una tablilla y un punzón y empieza a dibujar en la tablilla unos círculos que representan los cuencos y a hacer rayas en su interior representando así las piedras. Representa de esta nueva forma los números 592, 631 y 437.



8. Pero las rayas le confunden y, entonces, decide diversificar los números cambiando la disposición de las rayas. Utilizando el modelo que ofrece el cuenco, representa los siguientes números: 631, 857 y 294. ¿Hay alguna diferencia entre esta forma de representar los números y la anterior? Esta forma de representación de los números ¿está relacionada con el sistema de numeración?



9. Con el tiempo, el pastor empieza a dibujar los números de otra forma. Representa de esta nueva forma los números 213 y 869.



10. Pasado un tiempo, el pastor comprende que no hace falta poner los círculos que representaban los cuencos ¿por qué? ¿Qué escribía cuando el cuenco estaba vacío? ¿Cuántas unidades representa con este cuenco vacío?






11. ¿Por qué el pastor no deja simplemente un espacio en blanco para representar la ausencia de piedras o rayas?



ANEXO IX: FICHA “APRENDEMOS EL SISTEMA DE NUMERACIÓN CON LOS BLOQUES MULTIBASE”

1. PRESENTACIÓN DEL MATERIAL

		
PLACAS	BARRAS	CUBOS
CENTENAS	DECENAS	UNIDADES
1 placa = 10 barras = 100 cubos	1 barra = 10 cubos	

2. EXPERIMENTACIÓN

- Representar con los cubos distintos números de 1 dígito, hasta llegar a 9.
- Representar el número 10 con los cubos ¿A qué equivalen 10 cubos?
- Representar diferentes números con cubos y barras, entre 10 y 99.
- ¿Cómo representarías el número 100? Si tengo 90 barras, ¿Qué material tendría que añadir para formar el número 100? ¿A qué equivalen 10 barras? ¿A qué equivalen 100 cubos?
- Representar diferentes números con cubos, barras y placas entre 100 y 999.

3. EJERCICIOS

3.1. Contesta a las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas unidades forman una decena?

- ¿Qué valor tienen 6 decenas? Entonces, ¿cómo escribimos 6 decenas con cifras? Y 3 unidades, ¿a qué número corresponden?
- En el número 87, ¿qué significa el 8? ¿Qué significa el 7?
- ¿Cómo representamos 4 unidades y 3 decenas? ¿Qué valor tienen 3 decenas? ¿Qué número es $30+4$?

3.2. Resuelve las siguientes adivinanzas numéricas con la ayuda de los bloques multibase:

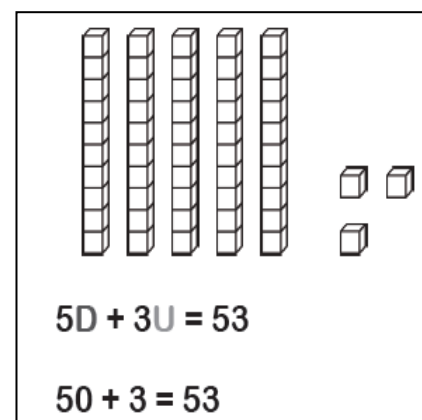
- El dígito de mis unidades es el doble de 4 y el dígito de mis decenas es la mitad de 4. ¿Qué número soy?
- El dígito de mis decenas es 5 menos 2 y el dígito de mis unidades es el doble del de mis decenas. ¿Qué número soy?
- El dígito de mis decenas es 2 menos que la suma de $5+5$ y el dígito de mis unidades es el número de decenas menos 4. ¿Qué número soy?
- El dígito que está en el lugar de las decenas es un número impar, mayor que 5 y menor que 9 y el número que está en el lugar de las unidades es un número par que está entre el 3 y el 5. ¿Qué número soy?

3.3. Descomposición de números según el valor posicional de sus cifras.

EJEMPLO

a. Descompón el número 53: **$(53 = 50 + 3)$**

- ¿Qué valor tienen 5 decenas? **(50)**
- ¿Qué valor tienen 3 unidades? **(3)**
- En 53 unidades, ¿cuántas decenas hay? **(5)** ¿Y cuántas unidades? **(3)**.



ES TU TURNO

a. Descompón el número 19:

- ¿Qué valor tiene 1 decena?
- ¿Qué valor tienen 9 unidades?
- En 19 unidades, ¿cuántas decenas hay? ¿Y cuántas unidades?

b. Descompón el número 35:

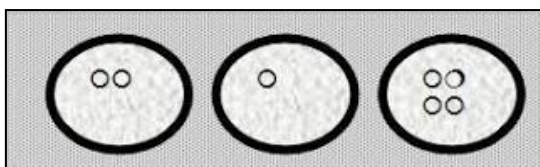
- ¿Qué valor tienen 3 decenas?
- ¿Qué valor tienen 5 unidades?
- En 35 unidades, ¿cuántas decenas hay? ¿Y cuántas unidades?

c. Descompón el número 381:

- ¿Qué valor tienen 3 centenas?
- ¿Qué valor tienen 8 decenas?
- ¿Qué valor tiene 1 unidad?
- En 381 unidades, ¿cuántas centenas hay? ¿cuántas decenas hay? ¿Y cuántas unidades?

ANEXO X: FICHA “EL NÚMERO Y SUS DIVERSAS REPRESENTACIONES”

En el cuento de la cuenta hemos visto cómo un mismo número puede ser representado de diferentes formas. Por ejemplo, el pastor representaría el número 214, en primer lugar, como la imagen de la izquierda y, en segundo lugar, como la imagen de la derecha.



- ¿Se te ocurre alguna otra representación del número doscientos catorce?

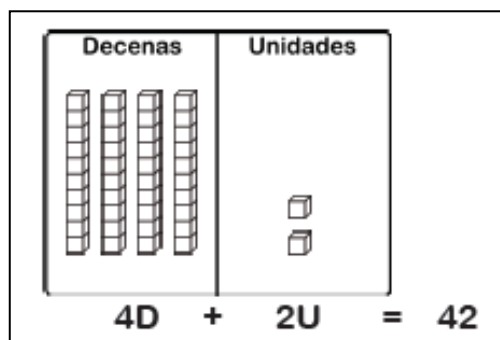
- ¿Y del número 42? ¿De cuántas formas distintas eres capaz de representar el número 42?

Habitualmente utilizamos únicamente la representación “42” para referirnos al número cuarenta y dos. Sin embargo, como has observado, no es la única forma de representar este número.

De la misma forma, existen diversas formas de lectura y escritura del número 42. Veámoslas ayudándonos de los bloques multibase.

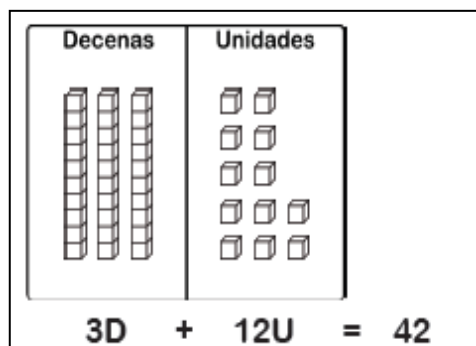
La forma más frecuente de leer el número 42 es aquella referida a las unidades. Sin embargo, existen distintas formas de leer y representar ese número.

- Representación: como la imagen de la derecha.
- Lectura: 42 unidades
- Escritura: 42



No obstante, ¿podríamos representar el 42 de otra forma? ¿Podemos descomponer una de las 4 decenas en unidades? ¿Cómo quedaría la representación?

- Representación: como la imagen de la derecha.
- Lectura: 3 decenas y 12 unidades.
- Escritura: $30 + 12$



¿Ha cambiado el valor del número? ¿Qué es lo que ha cambiado?

¿Se te ocurre alguna otra representación del número 42?

ES TU TURNO

1. Representa de diferentes formas, utilizando los bloques multibase, los números 93 y 857.

2. Resuelve las siguientes adivinanzas matemáticas:

- “Tengo 3 grupos de 10 y además 6 unidades. ¿Qué número soy?”
- “Tengo 4 grupos de 10 y además 12 unidades. ¿Qué número soy?”
- “Tengo 2 decenas y 14 unidades. ¿Qué número soy?”

Al trabajar con números naturales, ordenar y comparar números resulta muy sencillo de hacer, ya que el número mayor será aquel que tenga el mayor número de cifras, en el caso de que este sea distinto.

Para comprender qué ocurre cuando el número de cifras es igual, resuelve este ejercicio. Ordena los números de mayor a menor.

- ¿Cuál de los números tiene el menor número de decenas?
- ¿Quién le sigue?
- ¿Qué número tiene la mayor cantidad de decenas?

D	U
3	1
4	2
5	8
6	5
8	4

ANEXO XI: FICHA “ALICIA EN EL PAÍS DE LOS NÚMEROS”



Alicia y su amigo matemático, Carlos, se encontraban dando un paseo por el país de los números. A lo lejos vislumbraron al Sombrerero Loco y a la Liebre que se disponían a tomar el té de las cinco de la tarde en una mesa dispuesta bajo un árbol. La mesa era muy grande, y sin embargo los dos comensales se habían agrupado muy juntos en una esquina. Al ver acercarse a Alicia y a Carlos, la Liebre y el Sombrerero Loco empezaron a gritar:

-¡No hay sitio! ¡No hay sitio!

-Hay sitio de sobra –replicó la niña, indignada, a la vez que se sentaba en una amplia butaca que había a la cabecera de la mesa. Carlos, algo más tímido, se sentó a su lado.

-¿Qué prefieres, media tarta de manzana o 0,5 tartas? –le preguntó la Liebre a Alicia, mientras le ofrecía una obsequiosa sonrisa.

-¿Te estás quedando conmigo? 0,5 tartas es lo mismo que media tarta –dijo la niña.

-¿Por qué? –preguntó la Liebre sin llegar a entenderlo del todo.

-Pues porque... -empezó a decir la niña, pero se dio cuenta de que no lo tenía muy claro.

-Porque nuestro sistema de numeración posicional –dijo Carlos, que era un experto en matemáticas- no solo nos permite expresar unidades, decenas, centenas y demás potencias de diez mediante la posición de las cifras, sino también décimas, centésimas, milésimas...

El Sombrero Loco, que se encontraba algo perdido en el tema de la conversación, dijo:

-Por favor, Carlos, explícanos lo del sistema posicional.

-Es muy simple –dijo Carlos. Cuando escribimos, por ejemplo, 347, significa que tenemos 7 unidades, 4 decenas y 3 centenas...

Ni corto ni perezoso, el Sombrero Loco se sacó una brocha de un bolsillo, la mojó en un tarro de melaza y trazó sobre el blanco mantel las tres cifras a gran tamaño; luego con un lápiz diminuto escribió <<centenas>>, <<decenas>> y <<unidades>> debajo de las cifras correspondientes.

3 4 7
centenas decenas unidades

-Pues bien –prosiguió Carlos-, mediante una simple coma podemos ampliar nuestro maravilloso sistema posicional e incluir también décimas, centésimas, milésimas... Así, si escribimos 347,125...

El Sombrero Loco volvió a mojar la brocha en la melaza y a sacar el lapicito, y completó su tarea.

3 4 7,1 2 5
centenas decenas unidades décimas centésimas milésimas

-Ya veo... La primera cifra a la derecha de la coma representa las décimas, por lo que 0,5 significa cinco décimas –comentó Alicia.

-Exacto –dijo Carlos-. Y del mismo modo que diez unidades son una decena y diez decenas son una centena, diez décimas son una unidad, diez centésimas son una décima, diez milésimas son una centésima, y así sucesivamente.

-Si la tarta de manzana costara ese dineral, me arruinaría –intervino la Liebre.

-Sí, sería muy cara –dijo Carlos. Aunque recuerda que con el dinero únicamente podemos representar los números hasta las centésimas.

El Sombrero Loco volvió a poner cara de no comprender lo que Carlos acababa de decir.

-Claro, –dijo Carlos al ver la cara del Sombrero Loco- para representar las unidades, utilizaríamos las monedas de 1 euro, para representar las decenas los billetes de 10 euros y para representar las centenas los billetes de 100 euros; para representar las décimas emplearíamos las monedas de 10 céntimos; y, por último, para representar las centésimas usaríamos las monedas de 1 céntimo. ¡Y ya no nos quedan más monedas para representar las milésimas!

- ¡Pero existen muchas más monedas y billetes! –exclamó la Liebre.

- Sí, pero no representan unidades nuevas. Solo sirven para agrupar las que ya hemos mencionado –respondió Carlos.

-Por ejemplo, la moneda de 2 euros agrupa dos unidades y el billete de 5 euros agrupa 5 unidades –comentó Alicia.

-Ya lo entiendo –exclamó el Sombrero Loco. Entonces el billete de 20 euros agrupa 2 decenas y el de 50 euros agrupa 5 decenas.

-Y algo parecido pasa con los billetes de 200 y de 500 euros, que agrupan dos y cinco centenas–dijo la Liebre.

-Exacto –concluyó Carlos.

Cuento adaptado de Frabetti, C. (2000). *Malditas matemáticas*. Madrid. Alfaguara juvenil.

ANEXO XII: FICHA “ANÁLISIS DEL CUENTO ALICIA EN EL PAÍS DE LOS NÚMEROS”

Como ya conoces y has aprendido qué es y cómo es nuestro sistema de numeración así como cuáles son las unidades superiores a la unidad (decena, centena...), no te habrá resultado difícil comprender el cuento de Alicia en el país de los números.

En efecto, el Sombrero Loco pinta sobre un mantel estas tres cifras, 347.

- ¿Sabrías clasificarlas en unidades, decenas y centenas?

CENTENAS	DECENAS	UNIDADES

- ¿Qué número está representado?
- ¿Qué valor en decenas y unidades tienen 3 centenas? ¿Cómo escribimos 3 centenas con cifras?
- ¿Qué valor en unidades tienen 4 decenas? ¿Cómo escribimos 4 decenas con cifras?
- 7 unidades, ¿cómo las escribimos con cifras?
- En 347 unidades, ¿cuántas centenas hay?, ¿cuántas decenas hay?, ¿y cuántas unidades?

En el cuento se menciona, además, que *“nuestro sistema de numeración posicional no solo nos permite expresar unidades, decenas, centenas y demás múltiplos de diez mediante la posición de las cifras, sino también décimas, centésimas, milésimas...”*

- ¿Qué son las décimas, centésimas, milésimas...? ¿Hacia qué lado se ampliaría, por tanto, nuestro sistema de numeración?

- ¿Cómo se separan las centenas, decenas y unidades de las décimas, centésimas y milésimas?

- ¿Qué cifra del número representa las décimas? ¿Cuántas décimas hacen una unidad? Haz un dibujo para explicarlo.

- ¿Qué cifra del número representa las centésimas? ¿Cuántas centésimas forman una unidad? ¿Cuántas centésimas hacen una décima? Haz un dibujo para explicarlo.






- ¿Qué cifra del número representa las milésimas? ¿Cuántas milésimas forman una unidad? ¿Cuántas milésimas hacen una décima? ¿Cuántas milésimas componen una centésima? Haz un dibujo para explicarlo.

- Al final del cuento, ¿por qué Carlos le dice a la Liebre que con el dinero únicamente podemos representar los números hasta las centésimas?

ANEXO XIII: FICHA "TRABAJEMOS CON LOS EUROS"

El cuento de Alicia en el país de los números termina hablando del dinero y las monedas como medio para representar las centenas, decenas, unidades, décimas y centésimas. ¡Pero no las milésimas porque ya no nos quedan más monedas para poder representarlas!

1. PRESENTACIÓN DEL MATERIAL

		 1€ 2€	 0,10 € 0,20 € 0,50 €	 0,01 € 0,02 € 0,05 €
CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	DÉCIMAS	CENTÉSIMAS
100€ = 10 billetes de 10€ = 100 monedas de 1€	10€ = 10 monedas de 1€	1€	1€ = 10 monedas de 10 céntimos	1€ = 100 monedas de 1 céntimo

2. EXPERIMENTACIÓN

- Representar con los euros distintas cantidades comprendidas entre uno y nueve euros.
- Representar la cantidad de 10 euros con las monedas. ¿A qué equivalen 10 monedas de un euro?
- Representar diferentes cantidades entre 10 y 99 euros con monedas y billetes de 10, 20 y 50 euros.
- ¿Cómo representarías la cantidad de 100 euros? Si tengo 90 euros, ¿Qué monedas o billetes tendría que utilizar para formar la cantidad de 100 euros? ¿A qué equivalen 10 billetes de 10 euros? ¿A qué equivalen 100 monedas de 1 euro?

- Representar diferentes cantidades entre 100 y 999 euros con euros y billetes.
- Representar la cantidad de 0'1 euros con los céntimos. ¿Qué moneda se tiene que utilizar? ¿Qué cantidad forman diez monedas de la que has elegido?
- Representar diferentes cantidades entre 0'1 y 0'9 euros con céntimos.
- Representar la cantidad 0'01 euros con los céntimos. ¿Qué moneda se tiene que utilizar? ¿Qué número forman diez monedas de la que has elegido? ¿Qué número forman cien monedas de la que has elegido?
- Representar diferentes cantidades entre 0'01 y 0'09 euros con céntimos.

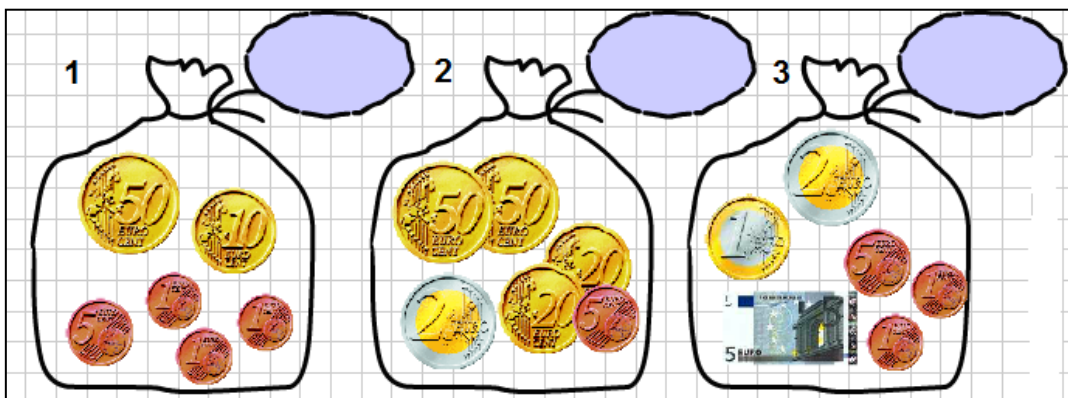
3. EJERCICIOS

3.1. Cuenta cuánto dinero tenemos y exprésalo con números decimales.

EJEMPLO



ES TU TURNO



- ¿Sabrías expresar cada cantidad de forma diferente a la dada en el ejercicio?

1 →

2 →

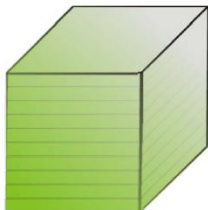
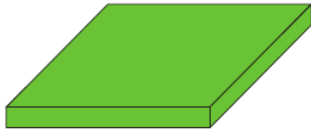


3 →

ANEXO XIV: FICHA “APRENDAMOS LAS UNIDADES DECIMALES CON LOS BLOQUES MULTIBASE”

Acabamos de trabajar las centenas, decenas, unidades, décimas y centésimas por medio de los euros y los céntimos. Sin embargo, no ha sido así con las milésimas puesto que no nos quedaban más monedas para poder representarlas.

Por lo tanto, vamos a trabajar ahora todas juntas (centenas, decenas, unidades, décimas, centésimas y milésimas) con la ayuda de los bloques multibase que ya conocemos. Sin embargo, vamos a hacer un pequeño cambio al respecto. ¡Ahora verás!

1. PRESENTACIÓN DEL MATERIAL

			
BLOQUES	PLACAS	BARRAS	CUBOS
UNIDADES	DÉCIMAS	CENTÉSIMAS	MILÉSIMAS
	1 bloque = 10 placas	1 bloque = 100 barras	1 bloque = 1000 cubos

2. EXPERIMENTACIÓN

- Representar con los bloques distintos números de 1 dígito, hasta llegar a 9.
- Representar el número 0'1. ¿Qué material se tiene que utilizar? ¿Qué número representan diez placas?

- Representar diferentes números entre 0'1 y 0'9 con placas.
- Representar el número 0'01. ¿Qué material se tiene que utilizar? ¿Qué número representan diez barras? ¿Qué número representan cien barras de la que has elegido?
- Representar diferentes números entre 0'01 y 0'09 con barras.
- Representar el número 0'001. ¿Qué material se tiene que utilizar? ¿Qué número representan diez cubos? ¿Qué número representan cien cubos? ¿Qué número representan mil cubos?
- Representar diferentes números entre 0'001 y 0'009 con cubos.

3. EJERCICIOS

3.1. Descomposición de números decimales.

EJEMPLO

a. Descompón el número 1'053; **$1'053 = 1 + 0'0 + 0'05 + 0'003$**

- ¿Qué valor tiene el primer sumando? **(Una unidad)**
- ¿Qué valor tiene el segundo sumando? **(Cero décimas)**
- ¿Qué valor tiene el tercer sumando? **(Cinco centésimas)**
- ¿Y el resto de los sumandos? **(Tres milésimas)**
- En 53 milésimas, ¿cuántas centésimas hay? **(5)** ¿Y cuántas milésimas? **(3)**.

ES TU TURNO

a. Descompón el número 4'9:

- ¿Qué valor tiene el primer sumando?
- ¿Qué valor tiene el segundo sumando?
- En 49 décimas, ¿cuántas unidades hay? ¿Y cuántas décimas?

b. Descompón el número 7'35:

- ¿Qué valor tiene el primer sumando?
- ¿Qué valor tiene el segundo sumando?
- ¿Qué valor tiene el tercer sumando?
- En 735 centésimas, ¿cuántas unidades hay?, ¿cuántas décimas hay?, ¿y cuántas centésimas?

c. Descompón el número 64'381:

- ¿Qué valor tiene el primer sumando?
- ¿Qué valor tiene el segundo sumando?
- ¿Qué valor tiene el tercer sumando?
- ¿Y el resto?
- En 64.381 milésimas, ¿cuántas decenas hay? ¿cuántas unidades hay?, ¿cuántas décimas hay?, ¿cuántas centésimas hay?, ¿y cuántas milésimas?