FUNCIONES

BEATRIZ ALZUETA IBAÑEZ

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FUNCIONES POR ALUMNOS DE 1º ESO

TFM 2012

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Resolución de problemas de funciones por alumnos de 1º ESO

Beatriz Alzueta Ibañez

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Página

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la resolución de problemas de funciones por alumnos de 1º ESO.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre funciones, que se ha puesto en marcha en un aula de 1º de ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido ad hoc, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

.

Parte I:

Las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a las funciones en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 1º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

.

1. Las funciones en el currículo vigente

En los distintos BOEs (Boletín Oficial del Estado) que a continuación se enumeran se recogen los contenidos mínimos del currículo vigente de Educación Primaria, Secundaría Obligatoria y Bachillerato.

- Primaria: B.O.E. nº 293 del 8 de Diciembre de 2006, Real Decreto 1513/2006
- Educación Secundaría Obligatoria: B.O.E. nº 5 del 5 de Enero de 2007, Real Decreto 1631/2006
- Bachillerato: B.O.E. nº 266 del 6 de Noviembre de 2007, Real Decreto 1467/2007

En este capítulo se hace un estudio longitudinal del currículo en lo referente al tema de Funciones. Los contenidos mínimos recogidos en dichos boletines se van a agrupar por descriptores y por cursos dentro de las distintas etapas educativas.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

En la Tabla 1 se muestran los contenidos mínimos del tercer ciclo de Educación Primaria (5º y 6º de primaria).

Tabla 1. Contenidos mínimos en el tercer ciclo de Educación Primaria

Descriptor:	**Contenidos del tercer ciclo de primaria:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas, gráficas y fórmulas	Bloque 3. Geometría - Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros... -La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
C2: Tratamiento de la información	Bloque 4.Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Gráficos y parámetros estadísticos: - Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. - Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. - Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. - Obtención y utilización de información para la realización de gráficos
C3: Proporcionalidad numérica	---
C4:Ecuaciones	---
C5: Modelización matemática de situaciones reales	---
C6: Tecnologías de la información	---

1.2. Contenidos en ESO

En la Tabla 2 se muestran los contenidos mínimos de 1º y 2ºde ESO.

Tabla 2. Contenidos mínimos en 1ºy 2º de ESO

Descriptor	**Contenidos en 1º ESO:**	**Contenidos en 2º ESO:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas, gráficas y fórmulas	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Organización de datos en tablas de valores. - Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas. - Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. -Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación.	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. - Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. - Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla. - Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
C2: Tratamiento de la información	Bloque 6. Estadística y probabilidad. - Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.	Bloque 6. Estadística y probabilidad. - Diferentes formas de recogida de información. Organización de los datos en tablas.
C3: Proporcionalidad numérica	Bloque 2. Números. - Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa. Bloque 5. Funciones y gráficas. - Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.	Bloque 2. Números. - Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. - Aumentos y disminuciones porcentuales. - Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa. Bloque 5. Funciones y gráficas. - Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.
C4:Ecuaciones	---	Bloque 3. Álgebra. - Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. - Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución. - Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido
C5: Modelización matemática de situaciones reales	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas	---
C6: Tecnologías de la información	---	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

En la Tabla 3 se muestran los contenidos mínimos de 3º de ESO.

Tabla 3. Contenidos mínimos en 3º de ESO

Descriptor	**Contenidos en 3º ESO**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas, gráficas y fórmulas	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas. - Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. - Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
C2: Tratamiento de la información	Bloque 6. Estadística y probabilidad. - Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. - Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.
C3: Proporcionalidad numérica	---
C4:Ecuaciones	Bloque 3. Álgebra. - Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
C5: Modelización matemática de situaciones reales	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. - Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.-
C6: Tecnologías de la información	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas. Bloque 6. Estadística y probabilidad. - Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.

En la Tabla 4se muestran los contenidos mínimos de 4º de ESO.

Tabla 4. Contenidos mínimos en 4º de ESO

Descriptor	**4ºA**	**4ºB**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas, gráficas y fórmulas	Bloque 5. Funciones y gráficas. - La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.	Bloque 5. Funciones y gráficas. - La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.
C2: Tratamiento de la información	Bloque 6. Estadística y probabilidad. - Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja de cálculo.	Bloque 6. Estadística y probabilidad. -Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.
C3: Proporcionalidad numérica	Bloque 2. Números. - Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.	---
C4:Ecuaciones	Bloque 3. Álgebra. - Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. - Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.	Bloque 3. Álgebra. - Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. - Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos. - Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.
C5: Modelización matemática de situaciones reales	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. -Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. - Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.
C6: Tecnologías de la información	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.

1.3. Contenidos en Bachillerato

En la Tabla 5 se muestran los contenidos mínimos en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

Tabla 5. Contenidos mínimos en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología

Descriptor	**Matemáticas I**	**Matemáticas II**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas, gráficas y fórmulas	3. Análisis: – Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. – Dominio, recorrido y extremos de una función. – Operaciones y composición de funciones. – Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o grafica, que describan situaciones reales. – Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad. – Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo.	3. Análisis: – Concepto de límite de una función. Calculo de límites. – Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad. – Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. – Función derivada. Calculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización. – Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.
C2: Tratamiento de la información	4. Estadística y Probabilidad: – Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal.	---
C3: Proporcionalidad numérica	---	---
C4:Ecuaciones	1. Aritmética y álgebra: – Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.	---
C5: Modelización matemática de situaciones reales	---	---
C6: Tecnologías de la información	---	---

En la Tabla 6 se muestran los contenidos mínimos en el Bachillerato aplicado a las Ciencias Sociales

Tabla 6. Contenidos mínimos en el Bachillerato aplicado a las Ciencias Sociales

Descriptor	**Matemáticas I CCSS**	**Matemáticas II CCSS**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas, gráficas y fórmulas	2. Análisis: - Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de graficas. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos. - Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos. Tasa de variación. Tendencias.	2. Análisis: - Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función. Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información. - Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica. - Aplicación de las derivadas al estudio de las propiedades locales de funciones habituales y a la resolución de problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía. - Estudio y representación gráfica de una función polinómicas o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.
C2: Tratamiento de la información	3. Probabilidad y estadística: - Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados.	---
C3: Proporcionalidad numérica	---	---
C4:Ecuaciones	1. Aritmética y álgebra: -Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.	1. Álgebra - Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Programación lineal. Aplicaciones a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos. Interpretación de las soluciones.
C5: Modelización matemática de situaciones reales	---	---
C6: Tecnologías de la información	---	---

2. Los criterios de evaluación de funciones en el currículo vigente

En este capítulo se recopilan los criterios de evaluación relativos a las Funciones recogidos en los BOEs ya mencionados en el capítulo anterior. Estos criterios de evaluación se agrupan por descriptores y por nivel educativo.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

En la Tabla 7 se muestran los criterios de evaluación en el tercer ciclo de Educación Primaria.

Tabla 7.Criterios de evaluación en el tercer ciclo de Primaria

Descriptor:	**Criterios de evaluación en el tercer ciclo de primaria:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas, gráficas y fórmulas	6. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.
C2: Tratamiento de la información	7. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... y de comprender y comunicar la información así expresada. Además, se comprobará que se empieza a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en la experiencia.
C3: Proporcionalidad numérica	---
C4:Ecuaciones	---
C5: Modelización matemática de situaciones reales	---
C6: Tecnologías de la información	---

2.2. Criterios de evaluación en ESO

En la Tabla 8 se muestran los criterios de evaluación en 1º de ESO.

Tabla 8. Criterios de evaluación en 1º ESO

Descriptor	**Criterios en 1º ESO:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas, gráficas y fórmulas	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas
C2: Tratamiento de la información	---
C3: Proporcionalidad numérica	2. Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto. Se trata de valorar la capacidad para asignar a las distintas operaciones nuevos significados y determinar cuál de los métodos de cálculo es adecuado a cada situación. Se pretende evaluar, asimismo, cómo se interpretan los resultados obtenidos en los cálculos y comprobar si se adopta la actitud que lleva a no tomar el resultado por bueno sin contrastarlo con la situación de partida.
C4:Ecuaciones	---
C5: Modelización matemática de situaciones reales	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas
C6: Tecnologías de la información	---

En la Tabla 9 se muestran los criterios de evaluación en 2º de ESO.

Tabla 9. Criterios de evaluación en 2º ESO

Descriptor	**Criterios en 2º ESO:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas o gráficas	5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.
C2: Tratamiento de la información	6. Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas. Se trata de verificar, en casos sencillos y relacionados con su entorno, la capacidad de desarrollar las distintas fases de un estudio estadístico: formular la pregunta o preguntas que darán lugar al estudio, recoger la información, organizarla en tablas y gráficas, hallar valores relevantes (media, moda, valores máximo y mínimo, rango) y obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos. También se pretende valorar la capacidad para utilizar la hoja de cálculo, para organizar y generar las gráficas más adecuadas a la situación estudiada. Se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de contraste
C3: Proporcionalidad numérica	2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.
C4:Ecuaciones	3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.
C5: Modelización matemática de situaciones reales	---
C6: Tecnologías de la información	---

En la Tabla 10 se muestran los criterios de evaluación en 3º de ESO.

Tabla 10. Criterios de evaluación en 3º ESO

Descriptor	**Criterios en 3º ESO:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas o gráficas	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.
C2: Tratamiento de la información	---
C3: Proporcionalidad numérica	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.
C4:Ecuaciones	3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales
C5: Modelización matemática de situaciones reales	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.
C6: Tecnologías de la información	---

En la Tabla 11se muestran los criterios de evaluación en 4º de ESO_A.

Tabla 11. Criterios de evaluación en 4º ESO_A

Descriptor	**Criterios en 4º ESO_A:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas o gráficas	4. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta. 6. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.
C2: Tratamiento de la información	7. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales correspondientes a distribuciones discretas y continuas, y valorar cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas. Se trata de valorar la capacidad de organizar la información estadística en tablas y gráficas y calcular los parámetros que resulten más relevantes con ayuda de la calculadora o la hoja de cálculo.
C3: Proporcionalidad numérica	---
C4:Ecuaciones	3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este criterio va dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos y mediante el uso adecuado de las tecnologías de la información
C5: Modelización matemática de situaciones reales	4. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta. 5. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.
C6: Tecnologías de la información	3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este criterio va dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos y mediante el uso adecuado de las tecnologías de la información

En la Tabla 12 se muestran los criterios de evaluación en 4º de ESO_B.

Tabla 12. Criterios de evaluación en 4º ESO_B

Descriptor	**Criterios en 4º ESO_B:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas o gráficas	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.
C2: Tratamiento de la información	5. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales en distribuciones unidimensionales y valorar cualitativamente la representatividad de las muestras utilizada
C3: Proporcionalidad numérica	---
C4:Ecuaciones	2. Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos para resolver problemas. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad de usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas y utilizar sus métodos en la resolución de problemas mediante inecuaciones, ecuaciones y sistemas.
C5: Modelización matemática de situaciones reales	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.
C6: Tecnologías de la información	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

En la Tabla 13 se muestran los criterios de evaluación en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

Tabla 13. Criterios de evaluación en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

Descriptor	**Criterios en Matemáticas I:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas o gráficas	4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global. 5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente. Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.
C2: Tratamiento de la información	6. Se pretende comprobar la capacidad para estimar y asociar los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden .
C3: Proporcionalidad numérica	---
C4:Ecuaciones	1. Resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos.
C5: Modelización matemática de situaciones reales	4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global
C6: Tecnologías de la información	---

En la Tabla 14 se muestran los criterios de evaluación en 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

Tabla 14. Criterios de evaluación en 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

Descriptor	**Criterios en Matemáticas II:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas o gráficas	4. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita. Se pretende comprobar con este criterio que los alumnos son capaces de utilizar los conceptos básicos del análisis y que han adquirido el conocimiento de la terminología adecuada y los aplican adecuadamente al estudio de una función concreta. 5. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido. 6. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables. Este criterio pretende evaluar la capacidad para medir el área de una región plana mediante el cálculo integral, utilizando técnicas de integración inmediata, integración por partes y cambios de variables sencillos.
C2: Tratamiento de la información	---
C3: Proporcionalidad numérica	---
C4:Ecuaciones	---
C5: Modelización matemática de situaciones reales	3. Transcribir problemas reales a un lenguaje grafico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas especificas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o grafico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en algebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.
C6: Tecnologías de la información	---

En la Tabla 15 se muestran los criterios de evaluación en 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

Tabla 15. Criterios de evaluación en 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales

Descriptor	**Criterios en Matemáticas I CCSS:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas o gráficas	4. Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas. Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas. 5. Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos. Este criterio está relacionado con el manejo de datos numéricos y en general de relaciones no expresadas en forma algebraica. Se dirige a comprobar la capacidad para ajustar a una función conocida los datos extraídos de experimentos concretos y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas.
C2: Tratamiento de la información	6. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional es de carácter funcional o aleatorio e interpretar la posible relación entre variables utilizando el coeficiente de correlación y la recta de regresión. Se pretende comprobar la capacidad de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información gráfica aportada por una nube de puntos; así como la competencia para extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden. En este sentido, más importante que su mero cálculo es la interpretación del coeficiente de correlación y la recta de regresión en un contexto determinado.
C3: Proporcionalidad numérica	---
C4:Ecuaciones	2. Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir algebraica o gráficamente una situación y llegar a su resolución haciendo una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos, más allá de la resolución mecánica de ejercicios que sólo necesiten la aplicación inmediata de una fórmula, un algoritmo o un procedimiento determinado.
C5: Modelización matemática de situaciones reales	4. Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas. Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas.
C6: Tecnologías de la información	---

En la Tabla 16 se muestran los criterios de evaluación en 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

Tabla 16. Criterios de evaluación en 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales

Descriptor	**Criterios en Matemáticas II CCSS:**
C1: Interpretación y representación de datos en tablas o gráficas	3. Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir al lenguaje de las funciones determinados aspectos de las ciencias sociales y para extraer, de esta interpretación matemática, información que permita analizar con criterios de objetividad el fenómeno estudiado y posibilitar un análisis crítico a partir del estudio de las propiedades globales y locales de la función.. 4. Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función y resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social. Este criterio no pretende medir la habilidad de los alumnos en complejos cálculos de funciones derivadas, sino valorar su capacidad para utilizar la información que proporciona su cálculo y su destreza a la hora de emplear los recursos a su alcance para determinar relaciones y restricciones en forma algebraica, detectar valores extremos, resolver problemas de optimización y extraer conclusiones de fenómenos relacionados con las ciencias sociales.
C2: Tratamiento de la información	---
C3: Proporcionalidad numérica	---
C4:Ecuaciones	2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas. Este criterio está dirigido a comprobar la capacidad de utilizar con eficacia el lenguaje algebraico tanto para plantear un problema como para resolverlo, aplicando las técnicas adecuadas. No se trata de valorar la destreza a la hora de resolver de forma mecánica ejercicios de aplicación inmediata, sino de medir la competencia para seleccionar las estrategias y herramientas algebraicas; así como la capacidad de interpretar críticamente el significado de las soluciones obtenidas.
C5: Modelización matemática de situaciones reales	3. Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir al lenguaje de las funciones determinados aspectos de las ciencias sociales y para extraer, de esta interpretación matemática, información que permita analizar con criterios de objetividad el fenómeno estudiado y posibilitar un análisis crítico a partir del estudio de las propiedades. 4. Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función y resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social. Este criterio no pretende medir la habilidad de los alumnos en complejos cálculos de funciones derivadas, sino valorar su capacidad para utilizar la información que proporciona su cálculo y su destreza a la hora de emplear los recursos a su alcance para determinar relaciones y restricciones en forma algebraica, detectar valores extremos, resolver problemas de optimización y extraer conclusiones de fenómenos relacionados con las ciencias sociales.
C6: Tecnologías de la información	---

3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones en el currículo vigente

Después del estudio realizado, al currículo vigente, en los dos apartados anteriores; se ha realizado una recopilación de los ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en los dos cursos anteriores y posteriores al curso central de estudio en el trabajo: último ciclo de primaria (5º y 6º) y 1º, 2º y 3º de la ESO.

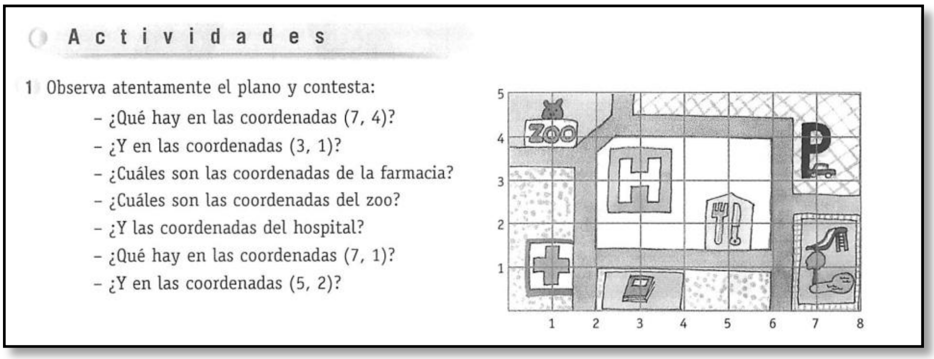
Todos los ejercicios que se presentan a continuación se han extraído de los libros de texto utilizados en el colegio donde se ha realizado la experimentación. Todos los libros son de la editorial SM, proyecto Esfera.

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el tercer ciclo de Educación Primaria

Actividad tipo: ☒ **Ejercicio** ☐ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Localizar diferentes lugares en un plano y obtener las coordenadas de otros lugares del mismo plano.

Ejemplo: 5º primaria (SM 2003, pág. 195)



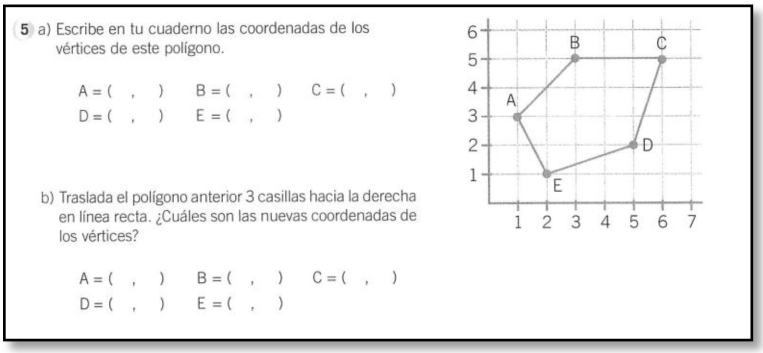
Actividades

1 Observa atentamente el plano y contesta:
- ¿Qué hay en las coordenadas (7, 4)?
- ¿Y en las coordenadas (3, 1)?
- ¿Cuáles son las coordenadas de la farmacia?
- ¿Cuáles son las coordenadas del zoo?
- ¿Y las coordenadas del hospital?
- ¿Qué hay en las coordenadas (7, 1)?
- ¿Y en las coordenadas (5, 2)?

Actividad tipo: ☒ **Ejercicio** ☐ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Obtener las coordenadas de diferentes puntos de un plano cartesiano.

Ejemplo: 5º primaria (SM 2003, pág. 197)



5 a) Escribe en tu cuaderno las coordenadas de los vértices de este polígono.

A = (,) B = (,) C = (,)
D = (,) E = (,)

b) Traslada el polígono anterior 3 casillas hacia la derecha en línea recta. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de los vértices?

A = (,) B = (,) C = (,)
D = (,) E = (,)

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Interpretar una tabla de datos.

Ejemplo: 5º primaria (SM 2003, pág. 205)

1 Juan ha tomado nota de las temperaturas máximas a lo largo de la semana. ¿Cuál es la temperatura media?

L	M	X	J	V	S	D
18 °C	21 °C	18 °C	18 °C	21 °C	18 °C	19 °C

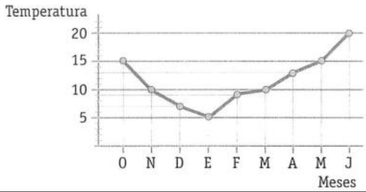
Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Interpretar una gráfica.

Ejemplo: 5º primaria (SM 2003, pág. 207)

1 Elvira y Francisco han representado en este gráfico de líneas las temperaturas medias durante el curso.

- ¿Cuál fue la temperatura máxima?
- ¿Cuál fue la temperatura mínima?
- ¿A qué mes correspondió cada una?
- ¿En qué meses la temperatura media superó los 12 °C?



Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Construir una gráfica a partir de una tabla de datos e interpretar los datos dados.

Ejemplo: 5º primaria (SM 2007, pág. 207)

2 Jacobo ha anotado en esta tabla los bollos que ha vendido durante la semana.

- Elabora un gráfico de líneas.
- ¿Qué día vendió más bollos?
- ¿Cuántos bollos vendió el viernes?

Lunes	40
Martes	29
Miércoles	33
Jueves	21
Viernes	37
Sábado	12
Domingo	18

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☐**Problema** ☒**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Tablas de equivalencias con relaciones proporcionales

Ejemplo: 6º primaria (SM 2003, pág. 109)

1 Indica, en las siguientes tablas de equivalencia, el número por el que hay que multiplicar o dividir para que las series sean proporcionales.

×	1	2	3	4	5
	7	14	21	28	35

	2	3	5	7	9
	8	12	20	28	36

:	1	5	7	9	10
	11	55	77	99	110

:	2	3	5	6	8
	4	6	10	12	16

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Tablas de equivalencias con relaciones proporcionales

Ejemplo: 6º primaria (SM 2003, pág. 109)

2 Lorenzo vende discos compactos a 15 € cada uno. Elabora una tabla de equivalencias con el número de discos y el precio. ¿Cuánto costarán 5 discos? ¿Cuántos discos se pueden comprar con 165 €?

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Construcción de gráficas**.**

Ejemplo: 6º primaria (SM 2003, pág. 114)

18 En una cooperativa cobran 13 € por una garrafa de 5 litros de aceite de oliva y por 20 litros hay que pagar 40 €.

a) Construye una gráfica con los datos del problema.

b) ¿Cuánto pagará Araceli por 15 litros de aceite?

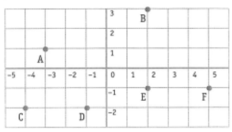
Actividad tipo: ☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representación de puntos en el plano.

Ejemplo: 6º primaria (SM 2003, pág. 141)

1 Observa el plano y señala las coordenadas de cada punto.

A = (,) D = (,)
B = (,) E = (,)
C = (,) F = (,)



2 Sitúa los puntos P = (4, 1) y Q = (−3, −1) en la cuadrícula del ejercicio anterior.

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Situar puntos en el plano dados en un problema verbal.

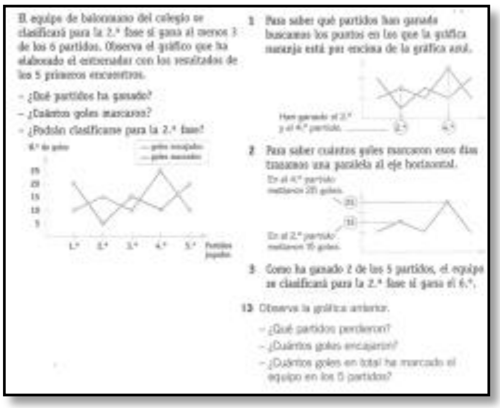
Ejemplo: 6º primaria (SM 2003, pág. 144)

22 Laura y Mariano van a ir al teatro y buscan en el plano qué aparcamiento está más cerca. Observa las coordenadas de cada uno. ¿En cuál aparcarán el coche?

Actividad tipo:☐ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☒ **Situación**

Descripción: Interpretar una gráfica.

Ejemplo: 6º primaria (SM 2003, pág. 212)



El equipo de balonmano del colegio se clasificará para la 2.ª fase si gana al menos 3 de los 6 partidos. Observa el gráfico que ha elaborado el entrenador con los resultados de los 5 primeros encuentros.

- ¿Qué partidos ha ganado?
- ¿Cuántos goles marcaron?
- ¿Podrán clasificarse para la 2.ª fase?

1 Para saber qué partidos han ganado buscamos los puntos en los que la gráfica naranja está por encima de la gráfica azul.

2 Para saber cuántos goles marcaron esos días trazamos una paralela al eje horizontal.

3 Como ha ganado 2 de los 5 partidos, el equipo se clasificará para la 2.ª fase si gana el 6.º.

13 Observa la gráfica anterior.

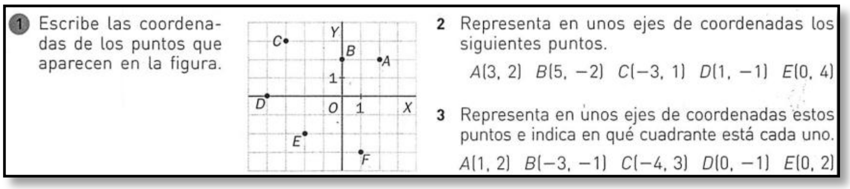
- ¿Qué partidos perdieron?
- ¿Cuántos goles encajaron?
- ¿Cuántos goles en total ha marcado el equipo en los 5 partidos?

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º ESO

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Coordenadas y representación de puntos en un eje de coordenadas.

Ejemplo: 1º ESO (SM2007, pág:163)



1 Escribe las coordenadas de los puntos que aparecen en la figura.

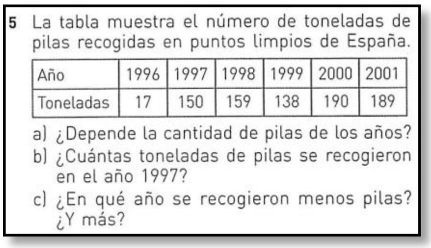
2 Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos.
$A(3, 2)$ $B(5, -2)$ $C(-3, 1)$ $D(1, -1)$ $E(0, 4)$

3 Representa en unos ejes de coordenadas estos puntos e indica en qué cuadrante está cada uno.
$A(1, 2)$ $B(-3, -1)$ $C(-4, 3)$ $D(0, -1)$ $E(0, 2)$

Actividad tipo:☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Interpretación de datos dados en un tabla.

Ejemplo: 1º ESO (SM 2007, pág:164)



5 La tabla muestra el número de toneladas de pilas recogidas en puntos limpios de España.

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Toneladas	17	150	159	138	190	189

a) ¿Depende la cantidad de pilas de los años?
b) ¿Cuántas toneladas de pilas se recogieron en el año 1997?
c) ¿En qué año se recogieron menos pilas? ¿Y más?

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Calcular el valor de una magnitud dependiente de otra, relacionada por una fórmula.

Ejemplo: 1º ESO (SM 2007, pág:166)

10 En la fórmula $y = 3x + 2$, calcula el valor de y para cada uno de los siguientes valores de x.
a) 2 b) 6 c) 0 d) −1 e) −5

Actividad tipo:☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Escribir una formula dada a través de un enunciado verbal.

Ejemplo: 1º ESO (SM 2007, pág:166)

12 Escribe una fórmula general en la que a un número entero le corresponde su cuadrado menos 5.

Actividad tipo:☐ **Ejercicio** ☐**Problema** ☒**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Identificar las relaciones que son funciones.

Ejemplo: 1º ESO (SM 2007, pág:167)

16 Indica si son o no funciones las siguientes relaciones.
a) Relacionamos cada número natural con su anterior y con su posterior.
b) Asociamos cada número entero con su opuesto.
c) Hacemos corresponder cada número con los dígitos que lo forman.
d) Asociamos cada número entero de dos cifras con su cifra de las decenas.

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representar gráficamente una función dada por una fórmula.

Ejemplo: 1º ESO (SM 2007, pág:168)

17 Dibuja la gráfica de la función $y = x + 1$.

Actividad tipo:☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representación grafica de un problema contextualizado.

Ejemplo: 1º ESO (SM 2007, pág:168)

21 El precio del revelado de un carrete es 1 euro y por cada foto cobran 0,50 euros.
Representa la gráfica de esta función.

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Completar una tabla de datos y representar la función.

Ejemplo: 1º ESO (SM 2007, pág:169)

22 Copia y completa en tu cuaderno esta tabla y dibuja la gráfica de la función asociada.

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−6				2	

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representar gráficamente funciones de proporcionalidad directa.

Ejemplo: 1º ESO (SM 2007, pág:169)

23 Representa estas funciones.

a) $y = 4x$
b) $y = -3x$
c) $y = -2x$
d) $y = x$
e) $y = -x$
f) $y = 5x$

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Expresar algebraicamente un enunciado verbal.

Ejemplo: 1º ESO (SM 2007, pág:173)

38 Expresa mediante una fórmula las siguientes frases.

a) Asociamos a cada número x su doble.
b) Asociamos a cada número x su triple más dos.
c) Asociamos a cada número x su cuadrado menos tres.
d) Asociamos a cada número x el opuesto de su cuadrado.

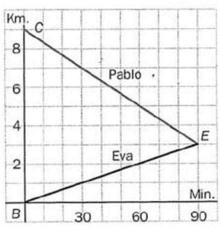
Actividad tipo:☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Interpretar una gráfica con un enunciado contextualizado.

Ejemplo: 1º ESO SM (2007, pag:176)

64 Al encuentro

Pablo se encuentra en la cima, *C*, de un monte, y Eva, en el punto más bajo, *B*, del mismo. A las diez de la mañana parten uno al encuentro del otro. La gráfica representa la distancia de *B* a la que se encuentra cada uno en función del tiempo.



a) ¿Cuánto mide el monte?

b) ¿A qué hora se encuentran? ¿Qué distancia ha recorrido cada uno hasta ese momento?

c) Calcula la velocidad media que han llevado Pablo y Eva.

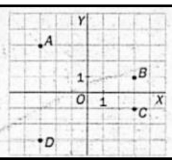
3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO

Actividad tipo: ☒ **Ejercicio** ☐ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Identificar y representar puntos en un eje de coordenadas.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:141)

1 Escribe las coordenadas de los puntos que aparecen en la figura.



2 Representa estos puntos en un eje de coordenadas.

A(4, −2) B(0, 2) C(−1, 3) D(−1, 0) E(4, 4)

3 Representa estos puntos en unos ejes de coordenadas indicando su cuadrante.

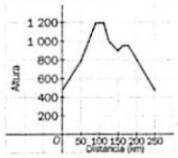
A(2, 2) B(−3, 2) C(4, −3) D(0, −2) E(1, 0)

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Interpretar una gráfica.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:142)

4 La gráfica representa una etapa ciclista. A cada distancia del punto de salida le corresponde una determinada altitud.



a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Cuándo se alcanza la mayor altitud?

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☐ **Problema** ☒ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Identificar relaciones que son funciones.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:143)

7 Pon un ejemplo de una relación que sea función.

8 Da un ejemplo de una relación que no sea función.

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representar gráficamente datos dados en una tabla contextualizada.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:144)

11 Haz la representación gráfica de los puntos de esta tabla.

N.º de fotocopias	1	2	3	4
Precio (euros)	0,05	0,10	0,15	0,20

a) Razona si hay que unir los puntos o no.

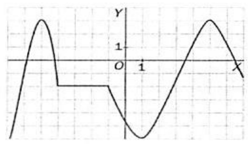
b) ¿Cuánto pagarías por 7 fotocopias?

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Identificar máximos y mínimos en una gráfica.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:148)

24 Escribe las coordenadas de los máximos y los mínimos de la siguiente función.



Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

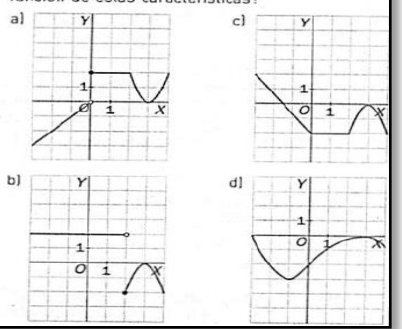
Descripción: Identificar la continuidad de una función dada en una gráfica.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:153)

46 De una función continua sabemos que:

- Corta al eje de abscisas en el punto (3, 0), que además es un máximo de la función.
- Es constante entre $x = 0$ y $x = 2$.

¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función de estas características?



Actividad tipo: ☒ **Ejercicio** ☐ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representar gráficamente funciones de proporcionalidad directa.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pag:161)

3 Representa las siguientes funciones.
a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $y = 2x$ d) $y = -2x$
¿Qué relación hay entre las gráficas?

Actividad tipo: ☒ **Ejercicio** ☐ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representar gráficamente funciones afines.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:162)

6 Representa en los mismos ejes las siguientes funciones afines. ¿Qué relación hay entre las gráficas?
a) $y = 2x + 3$ b) $y = -2x + 3$

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Identificar la pendiente y ordenada en el origen de una función.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:163)

> **10** Escribe la ecuación de una recta con la misma pendiente que $y = x - 2$ y con la misma ordenada en el origen que $y = 5x + 3$.

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Escribir la ecuación de una recta paralela a otra dada.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:165)

> **12** Escribe una recta paralela a $y = 3x - 4$ cuya ordenada en el origen sea 2.

Actividad tipo:☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Problema de funciones de proporcionalidad inversa.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:167)

> **16** Con un grifo se tardan 8 horas en llenar una piscina.
>
> a) Encuentra la fórmula que exprese cómo obtener el tiempo de llenado en función del número de grifos.
>
> b) Representa gráficamente la función.

Actividad tipo:☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Interpretar algebraicamente un problema contextualizado.

Ejemplo: 2º ESO (SM 2007, pág:172)

> **52** La función f asocia a cada radio, r, de una circunferencia el área del círculo que le corresponde.
>
> a) Escribe su ecuación.
>
> b) ¿Es una función lineal? ¿Es afín?
>
> c) ¿Cuál es el área de un círculo de 2 centímetros de radio?
>
> d) ¿Cuál es el radio de un círculo de 314 centímetros cuadrados de superficie?

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Completar una tabla de magnitudes proporcionales.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:207)

1 Un kilogramo de azúcar cuesta 1,10 euros. Completa la siguiente tabla que relaciona las magnitudes número de kilogramos y precio en euros.

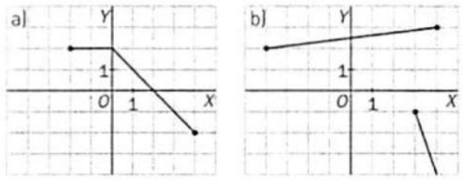
N.º de kilogramos	2	5		20
Precio €			11	

Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Identificar una función en un gráfico.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:208)

3 Indica si estas gráficas son funciones y, en caso afirmativo, halla su dominio y recorrido.



Actividad tipo:☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Hallar la tasa de variación de funciones.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:210)

8 Para las funciones siguientes, halla la tasa de variación en los intervalos [0, 1] y [3, 4].

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = 2x + 3$ c) $f(x) = x^2$

Actividad tipo:☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representar una función con máximos y mínimos.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:212)

14 Representa una función continua que tenga:

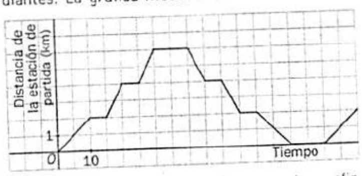
- Un máximo en el punto (−2, 1).
- Un máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 2$.
- Un mínimo en el punto de abscisa $x = 0$.
- Sin mínimo absoluto.

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Interpretación de una gráfica, periodicidad, crecimiento, decrecimiento...

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:218)

42 Un autobús universitario realiza cada viaje dos paradas, además de la inicial, para recoger estudiantes. La gráfica muestra su recorrido diario.



a) ¿Es periódica la función? Si la respuesta es afirmativa indica el período.

b) ¿A cuántos kilómetros está la universidad?

c) ¿Cuánto tiempo tarda en realizar el trayecto a la universidad?

d) ¿Cuánto tiempo está parado en todo su recorrido?

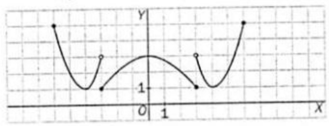
e) ¿Qué significa el decrecimiento de la gráfica?

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Identificar las propiedades de una función dada en una gráfica.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:220)

1 Halla el dominio, recorrido, máximos y mínimos, discontinuidades, crecimiento y decrecimiento, y simetrías de la siguiente función.



Actividad tipo: ☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Caracterizar funciones lineales y escribir su ecuación.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:224)

3 Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones lineales.

a) $y = 3x$ c) $y = 3x + 1$

b) $y = -5x + 2$ d) $y = \frac{1}{2}x + 3$

4 Halla la ecuación de la función lineal que pasa por el punto $A(2, 9)$ y tiene pendiente -3.

5 Determina la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(5, 4)$.

Actividad tipo: ☒ **Ejercicio** ☐**Problema** ☐**Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representar gráficamente funciones lineales.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:225)

6 Representa estas funciones lineales.

a) $y = 4x - 2$ c) $y = -x$

b) $y = -3x + 5$ d) $y = \frac{1}{2}x + 2$

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☐ **Problema** ☒ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Funciones cuadráticas.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:227)

10 Entre las siguientes funciones indica cuáles son cuadráticas.

a) $y = 3x^2$ c) $y = 5 + x^2$

b) $y = -2x + 3$ d) $y = x^3$

Actividad tipo: ☒ **Ejercicio** ☐ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Construir parábolas haciendo traslaciones de la ecuación $y = x^2$.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:228)

12 Representa por traslación estas funciones.

a) $y = x^2 + 3$ c) $y = (x + 1)^2$

b) $y = x^2 - 2$ d) $y = (x - 4)^2$

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Representar gráficamnete funciones cuadráticas.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:229)

15 Representa las siguientes funciones cuadráticas y analiza las gráficas obtenidas.

a) $y = 2x^2 - 6$ b) $y = x^2 - 5x$

Actividad tipo: ☐ **Ejercicio** ☒ **Problema** ☐ **Cuestión** ☐ **Situación**

Descripción: Problema contextualizado de funciones cuadráticas.

Ejemplo: 3º ESO (SM 2007, pág:234)

47 La ecuación del espacio recorrido por un móvil es:

$$s = 5 + 3t + 2t^2$$

donde s se expresa en metros y t en segundos.

a) ¿Qué longitud ha recorrido el móvil al cabo de 5 segundos de iniciar el movimiento?

b) ¿Cuál es la longitud recorrida durante el quinto segundo?

c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando ha recorrido 157 metros desde el inicio?

4. Resultados

El objetivo de este apartado es valorar la coherencia de los libros de texto con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Para hacer este estudio se ha utilizado como libro de referencia: *"Calculo y Geometría Analítica"* (Larson, Hostetler, Edwards, 1995)

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

El aprendizaje del tema de Funciones desde el tercer ciclo de Primaria hasta 3º de ESO es un aprendizaje en espiral, es decir cada año se vuelven a ver los conceptos del año anterior y se añaden nuevos conocimientos. En primaria no hay un tema específico de funciones, pero los contenidos relacionados con el tema se muestran en la Tabla 17.

Tabla 17. Contenidos relacionados con las funciones en Primaria

5ªPrimaria	• Coordenadas en el plano • Tablas de datos • Los gráficos de líneas
6º Primaria	• Proporcionalidad • Series de números proporcionales • Representación de los números enteros en el plano • Construir una gráfica • Interpretar una gráfica

Llama la atención que en 6º de Primaria se enseña primero a construir una gráfica antes que a representar puntos en el plano. Esto puede interpretarse como un "efecto del fenómeno de la desarticulación o atomización escolar del currículum de matemáticas" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Es decir los conceptos se estudian de forma aislada sin buscar las relaciones que existen entre ellos.

En 1º de ESO es cuando se introducen las funciones por primera vez como tales en un tema propio (Tabla 18).

Tabla 18. Contenidos del tema de Funciones en 1º ESO

1º ESO	Tema 9:Funciones • Coordenadas en el plano • Relaciones dadas por tablas • Relaciones dadas por gráficas • Relaciones dadas por fórmulas • Concepto de función • Representación gráfica de una función • Función de proporcionalidad directa

En 2º y 3ºde ESO se dedican dos temas del libro de texto a las funciones (Tabla 19).

Tabla 19. Contenidos del tema de Funciones en 2 y 3º ESO

2º ESO	Tema 8 Funciones: Propiedades globales • Coordenadas cartesianas • Fórmulas tablas y gráficas • Concepto de función • Representación gráfica de funciones • Continuidad y discontinuidad • Crecimiento y decrecimiento • Máximos y mínimos • Puntos de corte con los ejes	Tema 9:Funciones de proporcionalidad directa e inversa • Funciones asociadas a distintas situaciones • Función de proporcionalidad directa • Funciones afines • Pendiente y ordenada en el origen • Rectas paralelas • Función de proporcionalidad inversa
·º ESO	Tema 12: Funciones • Dependencia entre magnitudes • Funciones: Definición • Continuidad de funciones • Variación de la función en un intervalo • Crecimiento y decrecimiento de funciones • Máximos y mínimos • Simetría y periodicidad	Tema 13: Funciones lineales y cuadráticas • Funciones lineales: definición • Caracterización de funciones lineales • Representación de funciones lineales • Aplicación de la función lineal • Funciones cuadráticas • Construcción de parábolas a partir de $y = x^2$ • Representación de funciones cuadráticas

Igual que ocurre en Primaria, en la ESO también está presente la atomización de la enseñanza en el tema de funciones, no hay ninguna relación con otros conceptos matemáticos.

El aprendizaje en espiral debería ser beneficioso para ir asentando y ampliando poco a poco los conocimientos sobre el tema de Funciones. Sin embargo, en 3º de la ESO (en el libro de texto analizado) se introducen las funciones cuadráticas y entonces se le da un significado diferente del que tenía hasta ese momento a la función lineal. A partir de este nivel educativo se utiliza el término de función lineal para referirse a todas las funciones de primer grado, sin hacer distinción entre funciones lineales y funciones afines.

En el libro de referencia (Larson et al. 1995) también se usa el término de función lineal para referirse a todas las funciones de primer grado y así distinguirlas de otros tipos de funciones cuadráticas, cúbicas, racionales….

Por otra parte, en el libro de referencia, como apartados previos (incluidos en el capítulo 1: El plano cartesiano: Funciones) se habla de gráficas de ecuaciones y no de funciones, como se hace en los libros de Primaria y Secundaria.

Otra diferencia encontrada en el Larson et al. es, que parte de una ecuación y como soluciones de dicha ecuación se elaboran las tabla de valores.

Así mismo, antes de llegar al concepto de función se muestran las simetrías, los puntos de intersección con los ejes de una gráfica y la pendiente de una recta.

La definición de función se basa en los conjuntos inicial y final, en cambio en los libros de texto se habla de relación entre dos magnitudes.

En libro de referencia se hace distinción entre una ecuación $y = \frac{1-x}{2}$ y una función $f(x) = \frac{1-x}{2}$ sin embargo, en los libros de texto no se hace tal distinción y apenas se utiliza la notación $f(x)$.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Los libros de texto analizados incluyen prácticamente todos los contenidos recogidos en el currículo oficial. Se ha podido constatar que en 2º de ESO no se incluyen los contenidos relativos al uso de tecnologías de la información:

- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.
- Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.

Lo mismo ocurre en 3º de ESO, donde no se incluyen los siguientes contenidos relacionados con el uso de tecnologías de la información:

- Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.
- Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.

Ya que los Reales Decretos establecen las enseñanzas mínimas de cada etapa, cada editorial tiene libertad para incluir algún contenido extra. Se ha detectado que en 3º de ESO, el tema de funciones cuadráticas no está incluido en el currículo oficial, así como tampoco los conceptos de simetría y periodicidad de funciones.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de las funciones en 1º ESO

5. Funciones en el libro de texto de referencia

El libro de texto de referencia utilizado para la impartición del tema ha sido: MATEMÁTICAS 1 ESO, Proyecto esfera; editorial SM.; Tema 9: Funciones.

En los siguientes apartados se va a realizar un análisis del tema de Funciones desde el enfoque ontosemiótico utilizado en Godino, Juan D., Font,Vicenç, Wilhelmi., 2006.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

En la Tabla 20a y Tabla 20b se recogen los principales elementos o componentes de la configuración epistémica empírica formada por el sistema de objetos y relaciones implicadas en la solución de problemas de funciones en 1º de ESO.

Tabla 20a. Configuración epistémica de las funciones.

LENGUAJE
Verbal: – Ejes, ejes de coordenadas, coordenadas, abscisas, ordenadas, par ordenado, origen de coordenadas, cuadrante, plano, magnitud, tabla, gráfica, fórmula, igualdad, depende, representación gráfica, función, variable dependiente, variable independiente, función de proporcionalidad directa, razón de proporcionalidad. **Gráfico:** – Representación de puntos en los ejes cartesianos, relaciones dadas por gráficas, representación gráfica de una función. **Tablas:** – Relación entre dos magnitudes dadas en una tabla. **Simbólico:** – $(x,y), A(1,3), y = m \cdot x;\ y = 3x;\ y = x + 2;\ f(x)$
SITUAC IONES
– Representar y localizar puntos en unos ejes de coordenadas. – Problemas contextualizados en los que se pide interpretar los datos dados en una tabla, o en una gráfica. – Problemas descontextualizados con magnitudes relacionadas en una tabla para completar los valores que faltan, encontrar la fórmula o/y dibujar la gráfica. – Problemas contextualizados en los que se pide encontrar una fórmula que relaciona dos magnitudes. – Enunciados descontextualizados en los que se pide indicar si las relaciones dadas son funciones o no. – Problemas contextualizados en los que se pide dibujar una gráfica a partir de un enunciado. – Problemas descontextualizados en los que se pide dibujar una gráfica a partir de una función dada.

Tabla 20b. Configuración epistémica de las funciones.

CONCEPTOS
Previos: – Ejes de coordenadas, coordenadas de un punto en el plano. – Fórmulas. – Representación gráfica de funciones discretas. – Razón de proporcionalidad. **Emergentes:** – Abscisas, ordenadas, cuadrantes. – Relación entre dos magnitudes en una tabla. – Representación gráfica de funciones. – Función. – Variable dependiente y variable independiente. – Función lineal o de proporcionalidad directa. – Pendiente de una función de proporcionalidad directa
PROCEDIMIENTOS
– Dibujar un punto en los ejes de coordenadas a partir de sus coordenadas. – Determinar las coordenadas de un punto. – Construir tablas de situaciones reales. – Interpretar la gráfica de una situación real. – Calcular valores de una función a partir de su fórmula. – Escribir la fórmula de una función a partir de un conjunto de valores. – Dibujar gráficas de funciones mediante el cálculo de algunos de sus puntos. – Distinguir si determinadas situaciones vienen representadas o no por funciones. – Identificar las variables dependiente e independiente de una función. – Resolver problemas s en los que aparezcan funciones de proporcionalidad directa.
PROPIEDADES
– Las coordenadas de un punto se indican con un par ordenado de valores. – La primera coordenada se mide en el eje horizontal y la segunda sobre el vertical. – En una tabla a cada valor de la primera magnitud le corresponde un valor de la segunda. – En una gráfica a cada valor de la magnitud del eje de abscisas le corresponde un valor de la magnitud del eje de ordenadas. – En una fórmula a partir de los valores x de una magnitud se obtiene los valores y de la otra. – Una función es una relación entre dos magnitudes de forma que a cada valor de la primera magnitud le corresponde un único valor de la segunda. – Las funciones cuyas gráficas pasan por el origen de coordenadas se llaman funciones de proporcionalidad directa.
ARGUMENTOS
– Comprobación de las propiedades en casos particulares. – Justificación de las propiedades, utilizando elementos genéricos. – Justificación deductiva de los algoritmos .

5.2. Análisis del tema en el libro de texto

"El análisis ontosemiótico de una lección debe abordarse primero desde una perspectiva global que identifique su objetivo y estructura en configuraciones didácticas, para pasar después en un segundo nivel, a un estudio detallado de cada una de ellas". Godino et al. (2006)

En este apartado, se va ha hacer un análisis global del tema, con cierta profundidad, pero sin llegar al detalle de cada apartado del tema como se propone en el artículo Godino et al. (2006)

En el Anexo A se encuentra una copia completa del Tema 9: funciones, que se analiza a continuación.

El tema se compone de los siguientes epígrafes:

1. Coordenadas en el plano.
2. Relaciones dadas por tablas.
3. Relaciones dadas por gráficas.
4. Relaciones dadas por fórmulas.
5. Concepto de función.
6. Representación gráfica de una función.
7. Función de proporcionalidad directa.

En el libro de texto analizado, el tema está estructurado de la siguiente forma.

Comienza con una introducción y un pequeño esquema de los contenidos. Cada epígrafe del tema presenta la teoría acompañada de un "ejercicio resuelto" que ayuda a comprender mejor los contenidos y varios "ejercicios propuestos" para que el alumno practique lo aprendido. Estos ejercicios están resueltos al final del tema. Las ideas principales de cada epígrafe se encuentran destacadas con una sombra naranja.

El último apartado del tema es "resolución de problemas", donde se explica cómo resolver un problema relacionado con los contenidos, acompañado de varios "problemas propuestos", análogos a los resueltos.

Una vez terminada toda la teoría del tema, hay un apartado de “organiza tus ideas” compuesto por un conjunto de conceptos e ideas fundamentales del tema que facilitan el repaso.

A continuación se encuentra una colección de ejercicios y problemas, organizados por su finalidad en: “cálculo mental”, “ejercicios para entrenarse”, estos ejercicios están agrupados según los apartados en los que está dividido el tema; “problemas para aplicar”; ejercicios y problemas de “refuerzo”, ejercicios y problemas de “ampliación”, “problemas para interpretar” y finalizan con una “autoevaluación” que permite comprobar al alumno por si mismo sus progresos.

Las actividades están agrupadas por contenidos y tienen indicado el nivel de dificultad: amarillo- básico, verde- medio y rojo:-avanzado.

El tema termina con una página de divulgación con información científico-matemática llamada “mural de matemáticas”.

A continuación se hace un análisis más detallado de cada apartado del tema.

El tema comienza con una introducción, un esquema muy general de los contenidos y un ejemplo de una función a través de un reloj de sol (Figura 1), donde se relaciona la atura del sol y la sombra que proyecta el gnomon.

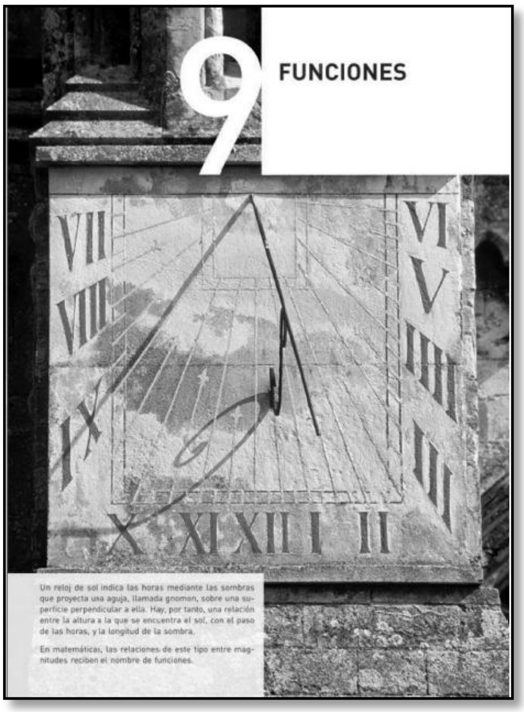


Figura 1. Introducción Tema 9: Funciones

El primer epígrafe del tema introduce los ejes de coordenadas, así como todos los conceptos asociados: eje de abscisa, eje de ordenadas, cuadrantes y origen. La teoría importante de cada epígrafe está sombreada para destacarla (Figura 2).


1. COORDENADAS EN EL PLANO

163

Los ejes y el origen de coordenadas

La figura muestra dos rectas perpendiculares y graduadas, una horizontal y otra vertical, que dividen el plano en cuatro cuadrantes.

Estas rectas se llaman **ejes de coordenadas**.

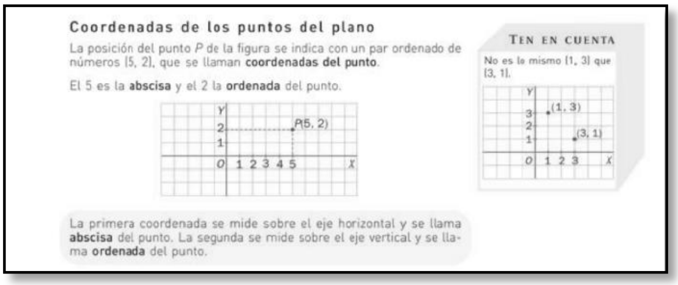
El punto donde se cortan estas rectas es el **origen de coordenadas**.

El eje horizontal se llama **eje de abscisas**.
El eje vertical se llama **eje de ordenadas**.
El punto de corte de los dos ejes se llama **origen de coordenadas**.

Figura 2. Epígrafe 1 del tema 9: Funciones

A continuación, se representa un punto en el plano, destacando que al representar un punto, la primera coordenada hace referencia al eje de abscisas (en el libro dice exactamente “se mide en el eje de abscisas”), y la segunda, al eje de ordenadas.

Se incluye un ejemplo para que el alumno se dé cuenta de que no se pueden cambiar de orden las coordenadas, puesto que daría lugar a puntos distintos. En algunos epígrafes, como en este (Figura 3) se añade una reseña especial “ten en cuenta” con algún concepto importante que se debe tener en cuenta.


Coordenadas de los puntos del plano

La posición del punto *P* de la figura se indica con un par ordenado de números (5, 2), que se llaman **coordenadas del punto**.

El 5 es la **abscisa** y el 2 la **ordenada** del punto.

La primera coordenada se mide sobre el eje horizontal y se llama **abscisa** del punto. La segunda se mide sobre el eje vertical y se llama **ordenada** del punto.

TEN EN CUENTA

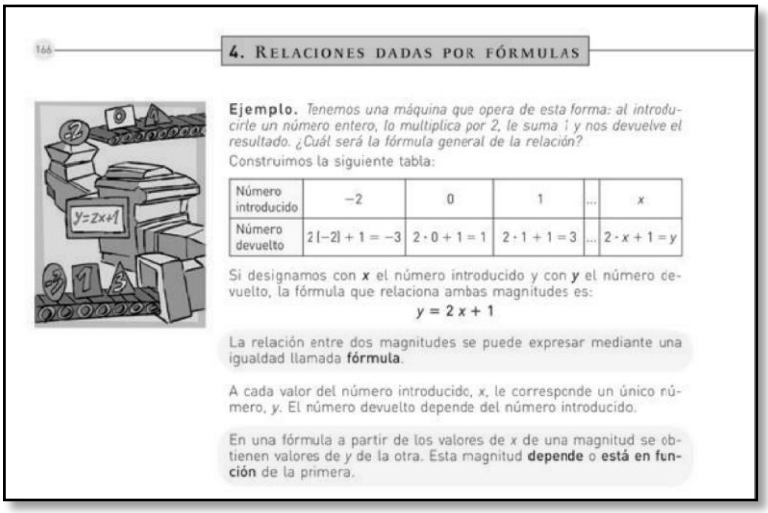
No es lo mismo (1, 3) que (3, 1).

Figura 3. Reseña en el epígrafe “ten en cuenta”

El epígrafe termina con un problema resuelto para representar varios puntos en un eje de coordenadas y decir a que cuadrante pertenecen y tres problemas propuestos del estilo al problema resuelto (dibujar puntos o decir sus coordenadas).

En los dos siguientes epígrafes se trata la dependencia entre dos magnitudes expresada a través de una tabla y de una gráfica. En ambos se muestra un ejemplo, se resuelve un problema y se proponen otros dos. Se hace hincapié en el concepto de dependencia e independencia y de que a cada valor de la primera magnitud le corresponde un valor de la segunda. Se muestra como, a través de una tabla o una gráfica se puede obtener diferente información.

El epígrafe cuatro del tema, muestra la relación entre dos magnitudes a través de una fórmula. Para traducir al lenguaje algebraico dicha relación utilizan el símil con una máquina que hace una cierta operación al introducir un número y nos da un resultado (Figura 4).



166

4. Relaciones dadas por fórmulas

Ejemplo. *Tenemos una máquina que opera de esta forma: al introducirle un número entero, lo multiplica por 2, le suma 1 y nos devuelve el resultado. ¿Cuál será la fórmula general de la relación?*

Construimos la siguiente tabla:

Número introducido	-2	0	1	...	x
Número devuelto	$2(-2)+1=-3$	$2\cdot 0+1=1$	$2\cdot 1+1=3$	...	$2\cdot x+1=y$

Si designamos con x el número introducido y con y el número devuelto, la fórmula que relaciona ambas magnitudes es:

$$y = 2x + 1$$

La relación entre dos magnitudes se puede expresar mediante una igualdad llamada **fórmula**.

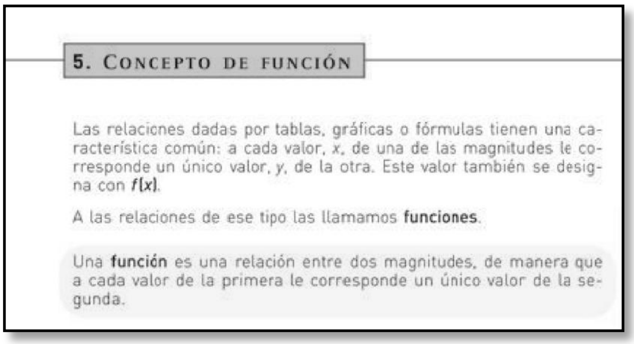
A cada valor del número introducido, x, le corresponde un único número, y. El número devuelto depende del número introducido.

En una fórmula a partir de los valores de x de una magnitud se obtienen valores de y de la otra. Esta magnitud **depende** o **está en función** de la primera.

Figura 4. Introducción del concepto de fórmula

Se vuelve a tratar el concepto de variable dependiente y de variable independiente, pero ahora asociándolo a la relación algebraica entre ellas (y : variable dependiente; x: variable independiente). También se vuelve al concepto de que a cada valor de la variable x le corresponde un único valor de la variable y.

El quinto epígrafe, se centra en el concepto de función (Figura 5). Se introduce por primera vez la expresión $f(x)$ pero solo se utiliza en un ejercicio al final del tema.



5. Concepto de función

Las relaciones dadas por tablas, gráficas o fórmulas tienen una característica común: a cada valor, x, de una de las magnitudes le corresponde un único valor, y, de la otra. Este valor también se designa con $f(x)$.

A las relaciones de ese tipo las llamamos **funciones**.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.

Figura 5. Introducción del concepto de función.

Se hace una pequeña recopilación de los conceptos que se han visto en los tres apartados anteriores para mostrar que son tres formas distintas de representar lo que se formaliza en este apartado.

Si bien se ha señalado de nuevo, en la propia definición de función que “una función es una relación entre dos magnitudes de forma que a cada valor de la primera magnitud le corresponde **un único valor** de la segunda" no se pone ningún ejemplo de relaciones que nos sean funciones.

Sin embargo en los ejercicios propuestos en este epígrafe (Figura 6) se persigue que el alumno distinga relaciones que corresponden a funciones de otras que no.

EJERCICIOS PROPUESTOS

14 Halla el valor de la variable dependiente en la fórmula $y = x^2 + 4$ para los siguientes valores de la variable independiente.

a) $x = 5$ c) $x = -8$

b) $x = -1$ d) $x = 3$

15 Determina la fórmula de la función que relaciona estos valores y completa la tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6				2		

16 Indica si son o no funciones las siguientes relaciones.

a) Relacionamos cada número natural con su anterior y con su posterior.

b) Asociamos cada número entero con su opuesto.

c) Hacemos corresponder cada número con los dígitos que lo forman.

d) Asociamos cada número entero de dos cifras con su cifra de las decenas.

Figura 6. Ejercicio propuesto para reconocer una función

En este apartado, hay una reseña histórica sobre el primer matemático que utilizo el término función y el primero que utilizó el símbolo $f(x)$.

En el sexto epígrafe, se trata la representación gráfica de funciones. Se pone un ejemplo en el que se describe con palabras el recorrido que ha realizado una persona en función del tiempo. A partir de este enunciado, se plantean tres pasos para representar la función: 1º construir una tabla con los datos, 2º representar los puntos obtenidos y 3º estudiar si tiene sentido unir los puntos.

En los ejercicios propuestos de este epígrafe (Figura 7) se plantea un problema de una función discreta, en el que no tiene sentido unir los puntos (ejercicio 21).

EJERCICIOS PROPUESTOS

17 Dibuja la gráfica de la función $y = x + 1$.

18 Dibuja la gráfica de la función $y = 3x + 2$.

19 La fórmula que expresa el perímetro de un triángulo equilátero en función del lado es:

$$P = 3 \cdot l$$

Representa gráficamente dicha función.

20 Para hacer un bizcocho se necesitan dos medidas de harina por cada yogur.

Representa la gráfica de la función.

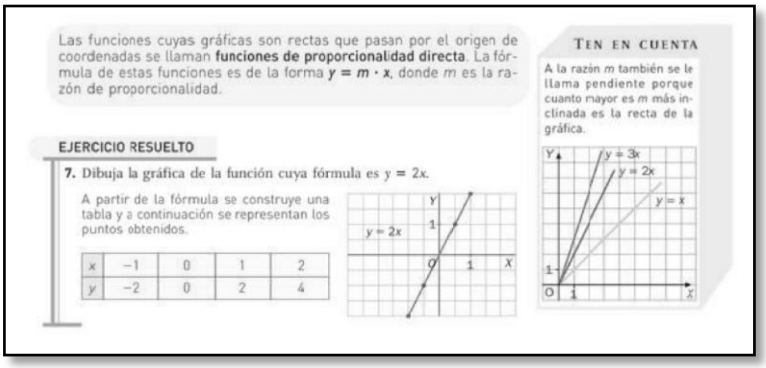
21 El precio del revelado de un carrete es 1 euro y por cada foto cobran 0,50 euros.

Representa la gráfica de esta función.

Figura 7. Ejemplo de una función discreta.

Con los ejemplos que se muestran, también se puede hacer ver a los alumnos que hay que tener cuidado a la hora de hacer las divisiones de los ejes, teniendo en cuenta que todas deben ser iguales entre sí, pero no necesariamente iguales a las del otro eje.

El séptimo y último epígrafe del tema, se centra en las funciones de proporcionalidad directa como un caso particular de los que se han visto anteriormente. En este epígrafe, hay una reseña destacada en la que introduce el concepto de pendiente en relación con la razón de proporcionalidad (Figura 8).


Las funciones cuyas gráficas son rectas que pasan por el origen de coordenadas se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. La fórmula de estas funciones es de la forma $y = m \cdot x$, donde m es la razón de proporcionalidad.

EJERCICIO RESUELTO

7. Dibuja la gráfica de la función cuya fórmula es $y = 2x$.

A partir de la fórmula se construye una tabla y a continuación se representan los puntos obtenidos.

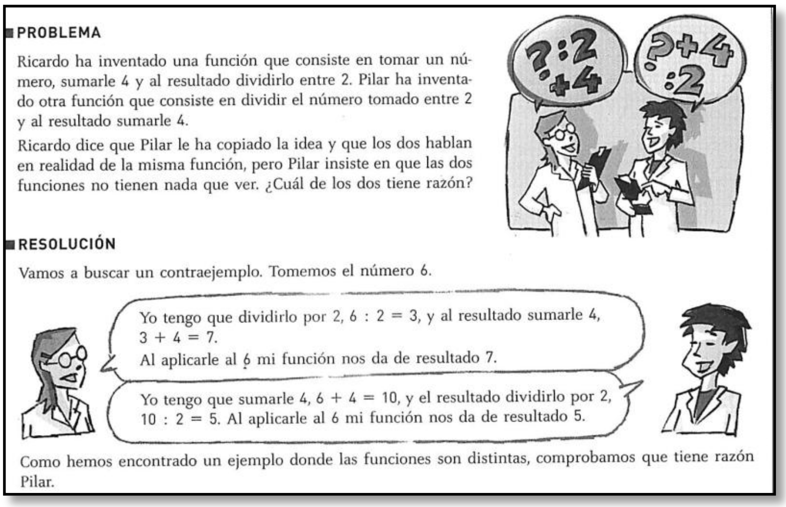
x	−1	0	1	2
y	−2	0	2	4

TEN EN CUENTA

A la razón m también se le llama pendiente porque cuanto mayor es m más inclinada es la recta de la gráfica.

Figura 8. Introducción del concepto de pendiente.

El apartado correspondiente a "resolución de problemas" se centra en la búsqueda de contraejemplos para demostrar que dos funciones son diferentes si el orden de las operaciones es diferente (Figura 9). El ejemplo, muestra que no es lo mismo tomar un número, sumarle cuatro y el resultado dividirlo entre dos, que primero dividir el número entre dos y al resultado sumarle cuatro.


PROBLEMA

Ricardo ha inventado una función que consiste en tomar un número, sumarle 4 y al resultado dividirlo entre 2. Pilar ha inventado otra función que consiste en dividir el número tomado entre 2 y al resultado sumarle 4.

Ricardo dice que Pilar le ha copiado la idea y que los dos hablan en realidad de la misma función, pero Pilar insiste en que las dos funciones no tienen nada que ver. ¿Cuál de los dos tiene razón?

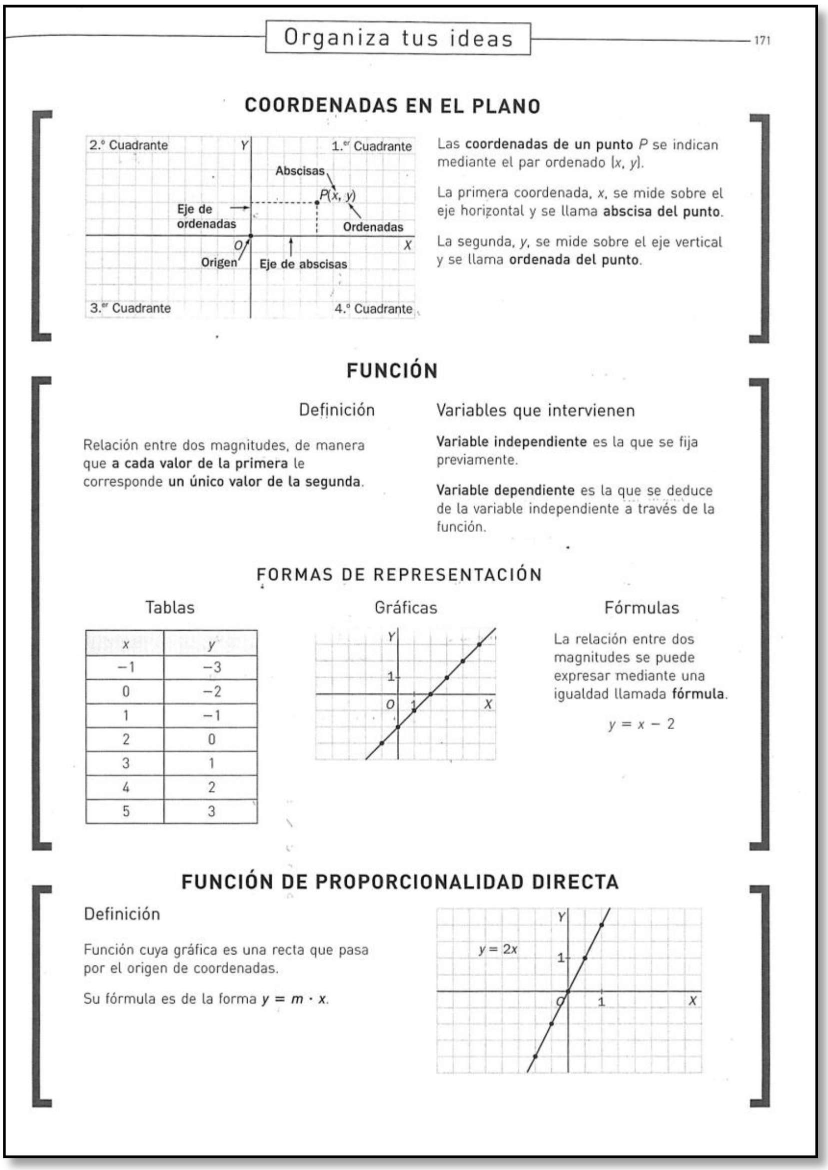
RESOLUCIÓN

Vamos a buscar un contraejemplo. Tomemos el número 6.

Como hemos encontrado un ejemplo donde las funciones son distintas, comprobamos que tiene razón Pilar.

Figura 9. Búsqueda de contraejemplos.

En el apartado de "organiza tus ideas" (Figura 10) se puede ver una recopilación de los conceptos e ideas fundamentales del tema: coordenadas en el plano; función: definición y variables que intervienen (variable dependiente e independiente); formas de representación: tablas, gráficas y fórmulas y función de proporcionalidad directa.



Organiza tus ideas 171

COORDENADAS EN EL PLANO

Las **coordenadas de un punto** P se indican mediante el par ordenado (x, y).

La primera coordenada, x, se mide sobre el eje horizontal y se llama **abscisa del punto**.

La segunda, y, se mide sobre el eje vertical y se llama **ordenada del punto**.

FUNCIÓN

Definición

Relación entre dos magnitudes, de manera que **a cada valor de la primera** le corresponde **un único valor de la segunda**.

Variables que intervienen

Variable independiente es la que se fija previamente.

Variable dependiente es la que se deduce de la variable independiente a través de la función.

FORMAS DE REPRESENTACIÓN

Tablas

x	y
−1	−3
0	−2
1	−1
2	0
3	1
4	2
5	3

Gráficas

Fórmulas

La relación entre dos magnitudes se puede expresar mediante una igualdad llamada **fórmula**.

$y = x - 2$

FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Definición

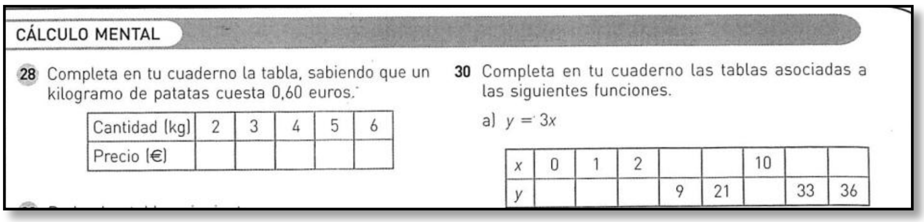
Función cuya gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Su fórmula es de la forma $y = m \cdot x$.

Figura 10. Apartado "organiza tus ideas".

Para trabajar con todos los conceptos aprendidos en el tema, hay una recopilación de actividades divididas según su finalidad en:

- Actividades de cálculo mental. En este tema son tablas para completar ().



CÁLCULO MENTAL

28 Completa en tu cuaderno la tabla, sabiendo que un kilogramo de patatas cuesta 0,60 euros.

Cantidad (kg)	2	3	4	5	6
Precio (€)					

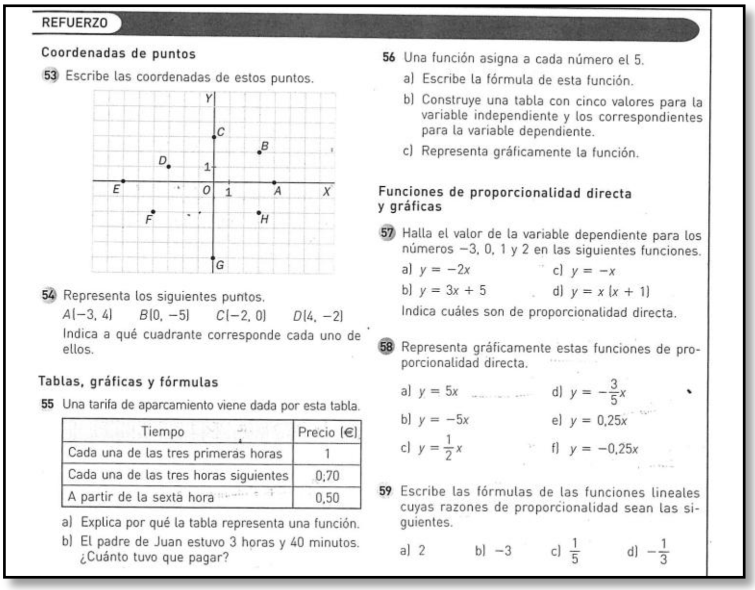
30 Completa en tu cuaderno las tablas asociadas a las siguientes funciones.

a) $y = 3x$

x	0	1	2			10		
y				9	21		33	36

Figura 11. Actividades de cálculo mental

- Ejercicios para entrenarse. Esos ejercicios están agrupados por bloques de contenido como en los epígrafes del tema, para que los alumnos los hagan conforme se va explicando la teoría de cada epígrafe.
- Problemas para aplicar. Son problemas variados y sin agrupar por contenidos.
- Refuerzo. Son una colección de ejercicios y problemas de refuerzo del tema (Figura 12).


REFUERZO

Coordenadas de puntos

53 Escribe las coordenadas de estos puntos.

54 Represente los siguientes puntos.
$A(-3, 4)$ $B(0, -5)$ $C(-2, 0)$ $D(4, -2)$
Indica a qué cuadrante corresponde cada uno de ellos.

Tablas, gráficas y fórmulas

55 Una tarifa de aparcamiento viene dada por esta tabla.

Tiempo	Precio (€)
Cada una de las tres primeras horas	1
Cada una de las tres horas siguientes	0,70
A partir de la sexta hora	0,50

a) Explica por qué la tabla representa una función.
b) El padre de Juan estuvo 3 horas y 40 minutos. ¿Cuánto tuvo que pagar?

56 Una función asigna a cada número el 5.
a) Escribe la fórmula de esta función.
b) Construye una tabla con cinco valores para la variable independiente y los correspondientes para la variable dependiente.
c) Represente gráficamente la función.

Funciones de proporcionalidad directa y gráficas

57 Halla el valor de la variable dependiente para los números -3, 0, 1 y 2 en las siguientes funciones.
a) $y = -2x$ c) $y = -x$
b) $y = 3x + 5$ d) $y = x(x + 1)$
Indica cuáles son de proporcionalidad directa.

58 Representa gráficamente estas funciones de proporcionalidad directa.
a) $y = 5x$ d) $y = -\frac{3}{5}x$
b) $y = -5x$ e) $y = 0,25x$
c) $y = \frac{1}{2}x$ f) $y = -0,25x$

59 Escribe las fórmulas de las funciones lineales cuyas razones de proporcionalidad sean las siguientes.
a) 2 b) -3 c) $\frac{1}{5}$ d) $-\frac{1}{3}$

Figura 12. Ejercicios de refuerzo.

- Ampliación. Para finalizar la colección de actividades, hay cuatro ejercicios de ampliación.

Todas las actividades están señaladas con colores por nivel de dificultad. En cada apartado señalado hay actividades de diferentes dificultades, excepto en las actividades de ampliación que están todas señaladas en rojo (nivel avanzado).

El tema termina con una página de divulgación con información científico-matemática llamada “mural de matemáticas”.

6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En el estudio del tema de Funciones, así como en cualquier otro tema, se puede hacer una previsión de las dificultades que se va a encontrar el alumno en su proceso de estudio y de los posibles errores que puede cometer.

6.1. Dificultades

Las dificultades previstas en el aprendizaje del tema de Funciones por alumnos de 1º de ESO se enumeran a continuación.

- Identificar una función directamente proporcional.
- Identificar la razón de proporcionalidad.
- Interpretar los datos contextualizados dados en una tabla.
- Interpretar los datos contextualizados dados en una gráfica.
- Lenguaje propio del tema: representar, cuadrantes.
- Obtener la fórmula a partir de la relación entre dos magnitudes dada por una tabla de valores.
- Obtener el valor de la variable dependiente (y) dado el valor de la variable independiente (x) a través de una fórmula.
- Diferenciar si un enunciado expresa una relación que es una función o no lo es.
- Expresar de forma algebraica un enunciado.
- Utilizar una fórmula para hacer un cálculo concreto de un problema.
- Identificar la variable dependiente de la variable independiente en problemas contextualizados.
- Darse cuenta de que hay problemas contextualizados en los que no tienen sentido los valores negativos de la variable independiente.

6.2. Errores y su posible origen

“Los errores cometidos por los alumnos constituyen, muy a menudo, "síntomas" de la utilización de modelos erróneos. Es útil, pues, interesarse en los errores de los alumnos para hacer hipótesis razonables sobre sus orígenes."(Briand J.; Chevalier MC, 1995)

Estos errores pueden ser errores anecdóticos, o bien errores reproducibles. Estos últimos errores se manifiestan de un año a otro y en diferentes clases " (Briand J et al., 1995).

Cuando los errores se pueden reproducir y son persistentes, se acaban convirtiendo en obstáculos (Bachelard 1938). Que se produzcan estos errores no siempre es por una falta de conocimiento del alumno, en ocasiones revela un conocimiento anterior que tiene su campo de validez, pero que fuera de este campo es erróneo.

Los obstáculos se pueden clasificar según su origen (Briand J et al., 1995) en:

- Obstáculos de origen cognitivo. "Están ligados al desarrollo neurofisiológico del individuo".
- Obstáculos de origen didáctico; "Son aquellos que son provocados por la opción de enseñanza (institución, enseñante)".
- Obstáculos de origen epistemológico. "Están estrechamente ligados al saber. La construcción de los conocimientos choca y se apoya en estos obstáculos".

A continuación, en la Tabla 21, se ejemplifican algunos de los errores observados en los alumnos de 1º de ESO en el tema de funciones, que por su persistencia y reproductibilidad se convierten en obstáculos.

Tabla 21. Tipos de obstáculos

Obst. cognitivos	**Obs. didácticos**	**Obs. epistemológicos**
No saber interpretar un problema verbal contextualizado. .	Unir los puntos al representar una función discreta.	En una gráfica (tiempo, espacio) no interpretar una línea recta como que no hay movimiento.

Otros errores son:

- Invertir el orden de las coordenadas en un punto, tanto para posicionarlo en los ejes como para dar sus coordenadas

- En una gráfica no relacionar los datos de los ejes con el enunciado del problema
- En una gráfica (tiempo, espacio) no calcular bien la distancia entre dos puntos.
- En una gráfica (tiempo, espacio) no saber calcular la distancia total recorrida (ida y vuelta).
- No poner bien las unidades en una fórmula que está contextualizada en un problema.
- Dar valores negativos al representar una función cuando esto no tiene sentido por el contexto del problema.
- En una función expresada con una fórmula, en la que el coeficiente de la x no está expresado con un número ($y = x$ ó $y = -x$) decir que no tiene razón de proporcionalidad.
- Confundir la variable dependiente con la variable independiente en problemas contextualizados.
- No calcular adecuadamente el valor de la variable dependiente (y) dado el valor de la variable independiente (x) a través de una fórmula.

A continuación se enumeran los errores anecdóticos:

- Enumerar los cuadrantes en el sentido de las agujas del reloj.
- Decir que un punto está en un cuadrante cuando en realidad está en el eje abscisas o en el eje de ordenadas.

7. El proceso de estudio

Para la impartición del tema de funciones a los alumnos de 1º de ESO, se dispone de ocho sesiones de clase, un día más para la realización del examen y un último día para su corrección.

En los siguientes apartados, se describe detalladamente cómo se ha distribuido el tiempo en clase, las actividades adicionales a las propuestas en el libro de texto que se han realizado y las actividades que los alumnos han realizado de forma autónoma, fuera del colegio.

Para la impartición del tema se ha utilizado una presentación (Anexo B), que cada día se ha ido proyectando sobre la pizarra, siguiendo el orden de los epígrafes del libro de texto, y sobre la que se han realizado los diferentes ejercicios. En la presentación, se muestran las actividades que se han realizado cada día junto con la teoría explicada.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

Cada sesión de clase tiene una duración de 55 minutos, de los cuales aproximadamente los cinco primeros se dedican a registrar las faltas de asistencia en el programa informático que dispone el centro, por lo tanto el tiempo real de clase es de unos 50 minutos.

Esto ha sido así en todas las sesiones excepto en la quinta, que ha tenido una duración de 30 minutos debido a que los alumnos han llegado a clase con retraso por una actividad organizada por el centro.

Los ejercicios que se han realizado en clase o bien son del libro del texto, o se les ha entregado a los alumnos en hojas adicionales (Anexo C) o se han proyectado en la presentación. Por lo tanto, en la Tabla 22 (a-h) al referirse a los ejercicios, se utiliza la siguiente nomenclatura: (P: se refiere a ejercicios que se proyectaron en la presentación de ese día; H: se refiere a ejercicios de las hojas entregadas; L: se refiere a ejercicios del libro). En algún caso los ejercicios de las hojas son ejercicios del libro (H=L).

En la Tabla 22 (a-h) se muestra la distribución del tiempo en clase en cada una de las ocho sesiones impartidas.

Tabla 22 a Distribución del tiempo en clase. Sesión 1.

SESIÓN 1			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Actividades de introducción del tema	25	Alumno	Constructivista
Teoría, epígrafe 1: coordenadas en el plano	10	Profesor	Magistral
Ejercicios (P)	15	Alumno	Constructivista

Tabla 22 b. Distribución del tiempo en clase. Sesión 2.

SESIÓN 2			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Repaso clase anterior	5	Profesor	Magistral
Corrección tarea (H1)	15	Compartida	En gran grupo
Teoría, epígrafe 2: relaciones dadas por tablas	5	Profesor	Magistral
Ejercicios (H2=L: 4,5,6)	10	Compartida	En gran grupo
Trabajo en grupos	15	Alumno	Constructivista

Tabla 22 c. Distribución del tiempo en clase. Sesión 3.

SESIÓN 3			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Corrección tarea (L:34,35)	10	Compartida	En gran grupo
Teoría, epígrafe 3: relaciones dadas por gráficas	10	Profesor	Dialógica
Ejercicios(P,H3)	20	Compartida	Dialógica
Interpretación de graficas reales	10	Compartida	Dialógica

Tabla 22 d. Distribución del tiempo en clase. Sesión 4.

SESIÓN 4			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Teoría, epígrafe 4: relaciones dadas por fórmulas	10	Profesor	Dialógica
Ejercicios por parejas (P,H5)	25	Alumno	Constructivista
Corrección de ejercicios (H5, ejerc:1,2,3,4)	15	Compartida	Dialógica

Tabla 22 e. Distribución del tiempo en clase. Sesión 5.

SESIÓN 5			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Corrección tarea de gráficas y tablas (P,H2,H4)	30	Compartida	En gran grupo

Tabla 22 f. Distribución del tiempo en clase. Sesión 6.

SESIÓN 6			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Teoría epígrafe 5: concepto de función	10	Profesor	Magistral
Ejercicios del epígrafe 6: representación de funciones (P)	15	Compartida	En gran grupo
Corrección tarea (L:,28,30,31,32,33,36,37,38)	25	Compartida	En gran grupo

Tabla 22 g. Distribución del tiempo en clase. Sesión 7.

SESIÓN 7			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Corrección de la tarea (L:17,18, H5,ejerc 5)	25	Compartida	En gran grupo
Teoría epígrafe 7: función de proporcionalidad directa	10	Profesor	Magistral
Ejercicios (L:21,39)	15	Compartida	En gran grupo

Tabla 22 h. Distribución del tiempo en clase. Sesión 8.

SESIÓN 8			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Corrección de la tarea (L: 23 a,b,d,39)	15	Compartida	En gran grupo
Problemas (H6)	35	Compartida	En gran grupo

7.2. Actividades adicionales planificadas

Durante la impartición del tema de funciones, se han realizado diversas actividades adicionales, como complemento al libro de texto.

En el Anexo B y Anexo C, está recogido todo el material adicional que se ha elaborado y que se ha utilizado durante los días de la impartición del tema.

El tema se ha impartido utilizando una presentación de power point con la teoría del libro y algunos ejemplos adicionales.

También se han preparado hojas de ejercicios adicionales de:

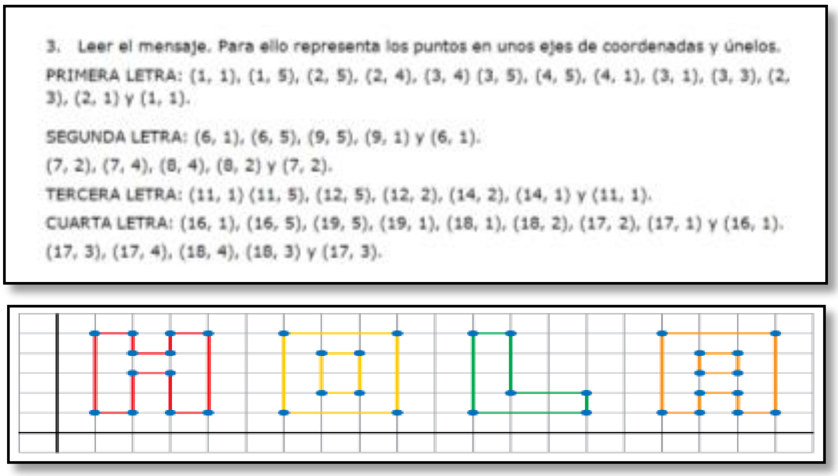
- Coordenadas en el plano, hoja 1
- Relaciones dadas por tablas, hoja2
- Relaciones dadas por gráficas, hojas 3 y 4
- Relaciones dadas por fórmulas, hoja 5
- Problemas, hoja 6

El primer día de clase y como introducción al tema, se ha empezando jugando al juego "hundir la flota" para familiarizarse con las coordenadas de un punto. Se ha dado mucha importancia a decir en primer lugar el número del eje horizontal y después la letra que está en el eje vertical.

A continuación se ha utilizado un mapa del barrio, donde está ubicado el colegio, con las iniciales de unos cuantos lugares que pudiesen conocer todos los alumnos (piscina, ambulatorio, institutos, una rotonda…). Una vez identificados todos los lugares, como el mapa está colocado sobre un eje de coordenadas con los cuatro cuadrantes, han tenido que ir diciendo sus coordenadas.

Después de explicar la teoría se han realizado los dos ejercicios adicionales para colocar puntos en el plano dadas sus coordenadas y otro para dar las coordenadas de los vértices de una figura.

En la hoja 1, que se ha mandado de tarea el primer día, para hacer el ejercicio 3 se ha dividido por grupos la clase, para que cada grupo haga una letra. De este modo si cada alumno hace su tarea se obtiene entre todos un mensaje, Figura 13.


3. Leer el mensaje. Para ello representa los puntos en unos ejes de coordenadas y únelos.

PRIMERA LETRA: (1, 1), (1, 5), (2, 5), (2, 4), (3, 4) (3, 5), (4, 5), (4, 1), (3, 1), (3, 3), (2, 3), (2, 1) y (1, 1).

SEGUNDA LETRA: (6, 1), (6, 5), (9, 5), (9, 1) y (6, 1).
(7, 2), (7, 4), (8, 4), (8, 2) y (7, 2).

TERCERA LETRA: (11, 1) (11, 5), (12, 5), (12, 2), (14, 2), (14, 1) y (11, 1).

CUARTA LETRA: (16, 1), (16, 5), (19, 5), (19, 1), (18, 1), (18, 2), (17, 2), (17, 1) y (16, 1).
(17, 3), (17, 4), (18, 4), (18, 3) y (17, 3).

Figura 13. Ejemplo de coordenadas de puntos.

Para mostrar que una misma función, se puede representar de varias formas, se ha utilizado siempre el mismo ejemplo introductorio (relación entre los kilos de manzanas y su precio; Figura 14) en forma de tabla, gráfica, fórmula y función de proporcionalidad directa.

Figura 14. Ejemplo introductorio de relación entre dos variables.

Al tratar el tema de las relaciones dadas por tablas, se ha utilizado el programa GeoGebra (Figura 15) para que viesen la relación entre el ancho y el alto de un rectángulo, para que el área sea siempre constante.

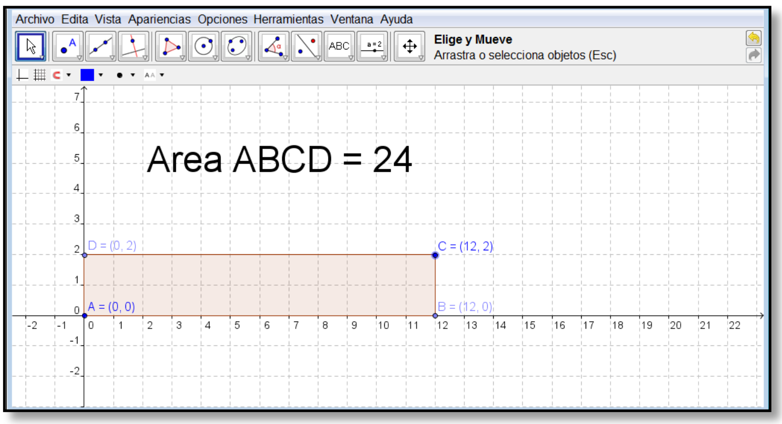


Figura 15. Ejemplo con GeoGebra.

En la hoja 2, los tres primeros problemas están extraídos del libro de texto, pero en el cuarto, se propone a los alumnos que sean ellos los que se inventen una tabla como en los ejercicios anteriores, que formulen varias preguntas al respecto y que las contesten.

En la hoja 3, se dan dos ejemplos de gráficas con el mismo perfil, pero con magnitudes distintas en los ejes y se hacen varias preguntas sobre cada gráfica. Con estos ejemplos se pretende mostrar a los alumnos, que la interpretación de una gráfica depende de las magnitudes medidas en sus ejes (Figura 16).

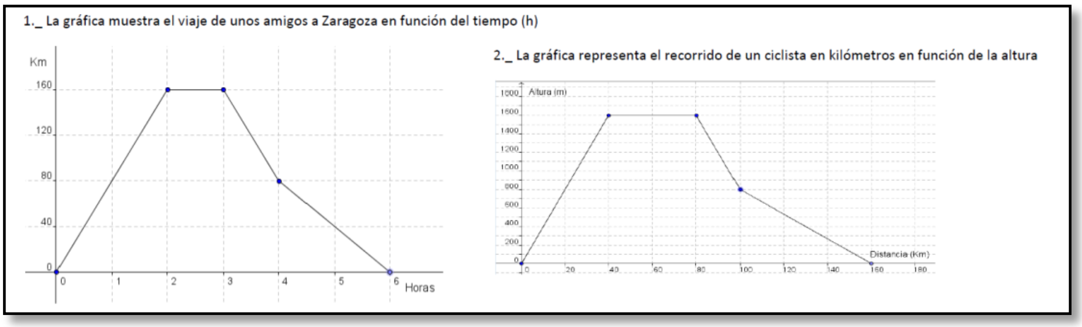


Figura 16. Ejemplo de dos graficas con igual perfil y distintas unidades en los ejes.

Estos ejercicios, están incluidos en la presentación utilizada para la impartición del tema. Los alumnos los han realizado en clase, saliendo a la pizarra y resolviendo ambos ejercicios sobre la imagen proyectada.

Con esto se pretende, que los ejercicios adicionales que se hagan en clase, se los puedan llevar hechos a casa, para luego poder estudiar con ellos.

En la presentación,se han mostrado gráficas reales obtenidas de internet (Figura 17).

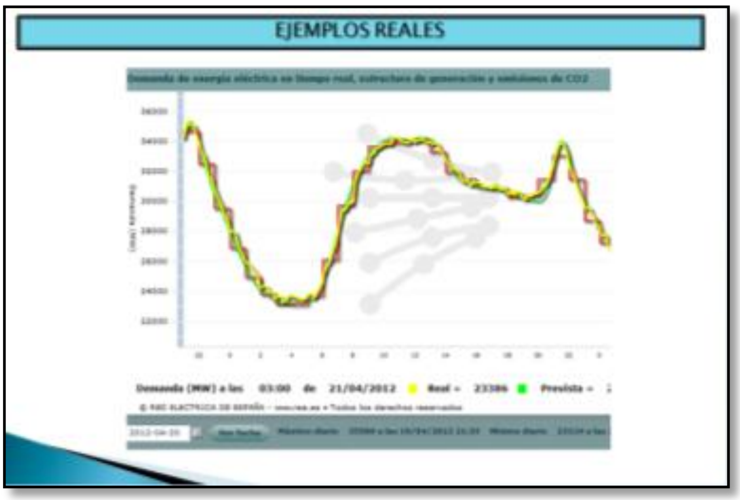


Figura 17. Ejemplo de una gráfica real obtenida en internet.

Después de ver en clase las relaciones dadas por tablas y por gráficas, se les ha pedido a los alumnos que, durante la semana busquen en el periódico y recorten las tablas y gráficas que encuentren. Con esta actividad se pretende que los alumnos se den cuenta de que estas formas de expresar relaciones entre dos magnitudes se utilizan asiduamente en prensa.

En la hoja 4, se plantean cuatro problemas con gráficas. En el problema 4, se propone una gráfica con dos funciones en el mismo plano cartesiano, para que comparen ciertos valores entre las dos.

En la hoja 5, se proponen varios ejercicios adicionales de relaciones dadas por fórmulas. El primero, es un ejercicio para expresar de forma algebraica varios enunciados. En los dos ejercicios siguientes, deben expresar con una fórmula la relación entre dos magnitudes dadas en una tabla. Uno de ellos corresponde a una función lineal y el otro a una función afín.

El cuarto ejercicio es para calcular el valor de la variable dependiente (y) dados cuatros valores diferentes (0, 1, 2, 3, -1) de la variable independiente (x) a través de una fórmula. El quinto ejercicio, está extraído del libro y en él se pretende que los alumnos diferencien relaciones entre variables que expresan funciones de las que no expresan funciones. Todos estos ejercicios se han proyectado y se han hecho en clase.

Como solo se dispone de una clase para trabajar los problemas, se ha elaborado la hoja 6 que se compone de 3 problemas. Los dos primeros, muy parecidos a los que se han propuesto en el cuestionario de evaluación del tema. El tercero, está extraído del libro. Se han incluido dos ejercicios de proporcionalidad directa y otro que no lo es. Estos ejercicios también se han proyectado y se han hecho en clase.

7.3. La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista

En la Tabla 23, se muestra la actividad autónoma que deben realizar los alumnos en su casa para complementar lo estudiado en clase. Estas actividades se proponen como tarea en cada una de las sesiones indicadas.

Tabla 23. Actividad autónoma de los alumnos prevista

Tipo	**Tiempo estimado**	**Relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje**
SESIÓN 1: Ejercicios de tarea:hoja1	50 minutos	Aplicación
SESIÓN 2: Ejercicios de tarea: L 34,35	30 minutos	Aplicación
SESIÓN 3: Ejercicios de tarea: hoja 4 Búsqueda de tablas y gráficas en prensa	40 minutos 5 minutos	Aplicación Ampliación
SESIÓN 4: Repaso de los ejercicios de la hoja 5 hechos en clase Búsqueda de tablas y gráficas en prensa	30 minutos 5 minutos	Refuerzo Ampliación
SESIÓN 5: Ejercicios de tarea: L 28,30,31,32,33,36,37,38 Búsqueda de tablas y gráficas en prensa	80 minutos 5 minutos	Aplicación y refuerzo Ampliación
SESIÓN 6: Ejercicios de tarea: L 17,18, hoja 5 :ejerc5	30 minutos	Aplicación
SESIÓN 7: Ejercicios de tarea: L 23 a,b,d,39	50 minutos	Aplicación
SESIÓN 8: Preparación el examen	120 minutos	Refuerzo

8. Experimentación

“La enseñanza en el medio escolar pone en relación tres polos: el alumno, el profesor y el saber. Cada uno de estos polos tiene una historia particular de la que una parte es propia y otra se basa en las interacciones con las otras dos.

El funcionamiento de la enseñanza puede explicarse estudiando cada uno de esos tres polos, pero también observando las transformaciones que experimentan cada uno de ellos en contacto con los otros dos”, (Briand J. et al.1995). Para realizar esta experimentación se ha priorizado el polo del estudiante.

8.1. Método

La evolución de una teoría en didáctica de las matemáticas puede determinarse por el contraste entre un análisis a priori y un análisis a posteriori. La teoría busca validar las hipótesis que formula (a priori). Los hechos observados permiten (a posteriori) validar o refutar, total o parcialmente, las hipótesis enunciadas.

La ingeniería didáctica (Artigue, 1989) permite abordar el contraste experimental necesario, que permita determinar condiciones de reproducibilidad de situaciones didácticas. Aquí, las variables didácticas actúan de “contraste o reactivo” que permiten de manera controlada provocar en los sujetos modificaciones en sus estrategias de acción para adaptarlas al medio.

El estudio de la adecuación de las variables didácticas para determinar cambios en las estrategias de acción representa un instrumento de validación interna de las conclusiones que puedan extraerse de una observación concreta. En estas condiciones, se puede definir una situación reproducible; es decir, en condiciones similares, con un control del medio, la construcción del conocimiento pretendido será la misma.

La cuestión de la reproducibilidad de las situaciones incide sobre la fiabilidad de las observaciones y, sobre todo, sobre su validez. La fiabilidad presupone una estabilidad en el funcionamiento del sistema didáctico; el contraste repetido entre el análisis a priori y el análisis a posteriori permite hacer evolucionar las condiciones del medio (incluidas las intervenciones del profesor) que garanticen la construcción del saber pretendido, de tal manera que la situación devenga reproducible. Es entonces cuando su validez puede ser aceptada, puesto que la situación es exitosa y aplicable de manera estable.

En este trabajo, la parte I “Las Funciones en el currículo vigente y en los libros de texto” constituye el estudio previo de la dimensión de enseñanza, desde una perspectiva eminentemente institucional; a saber:

1. El contenido matemático en el currículo vigente, incluidas las orientaciones y criterios de evaluación.
2. El desarrollo de estas directrices oficiales en los libros de texto escolares.

Este estudio precede al análisis a priori realizado en los capítulos 5, 6 y 7, donde se abordan las dimensiones:

- Epistemológica: las matemáticas presentes en la unidad didáctica objeto de estudio.
- Cognitiva: dificultades y errores de los estudiantes en el aprendizaje de la unidad didáctica.
- De enseñanza: descripción del proceso de estudio implementado.

En el capítulo 8, este análisis a priori es contrastado con los resultados de la experimentación, permitiendo una valoración de los mismos basada en las “expectativas previas” (discusión de los resultados), que supone la fase última del método de la ingeniería didáctica.

8.2. Muestra y diseño de la experimentación

La muestra utilizada se compone de 64 alumnos de 1º de ESO, de un colegio concertado de Pamplona. Los alumnos pertenecen a cuatro clases diferentes. En tres de ellas, la enseñanza se realiza en castellano y en otra en inglés. Cada una de las clases tiene un profesor distinto.

- Clase A 18 alumnos.
- Clase B 17 alumnos.
- Clase C 13 alumnos.
- Clase D (en inglés) 16 alumnos.

La Clase A, corresponde a la clase donde se ha llevado a cabo el proceso de estudio descrito en el apartado 7 del presente trabajo.

En la clase D, se imparte la asignatura de Matemáticas en inglés. Esta es la única asignatura, en un idioma extranjero que oferta el colegio en 1º de ESO (aparte de la propia del idioma). Los alumnos que estudian esta asignatura en inglés, en origen son alumnos de las otras tres clases anteriores pero que, por su buen nivel de inglés y matemáticas en el curso anterior, han podido optar a elegir la enseñanza de las Matemáticas en inglés.

En la experimentación, solo se ha contado con los alumnos que han realizado el cuestionario, habiendo más alumnos matriculados en las distintas clases.

Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido ad hoc y que ha contado con el visto bueno de los cuatro profesores encargados de la asignatura. El cuestionario ha sido la prueba de evaluación del tema para los alumnos de 1º de ESO. Esta prueba la han realizado todas las clases el mismo día.

8.3. El cuestionario y los criterios de corrección

En este apartado se muestra el cuestionario y los criterios de corrección utilizados.

Tanto el cuestionario como los criterios de corrección han sido diseñados por la autora del presente trabajo y supervisados por los profesores de la asignatura.

8.3.1. El cuestionario

En el Anexo D, se muestra una copia del cuestionario realizado, tanto en castellano como en inglés. En ambas copias se ha eliminado el logotipo del colegio.

A continuación, en la Figura 18 se muestra el cuestionario diseñado en castellano.

Nombre: ....

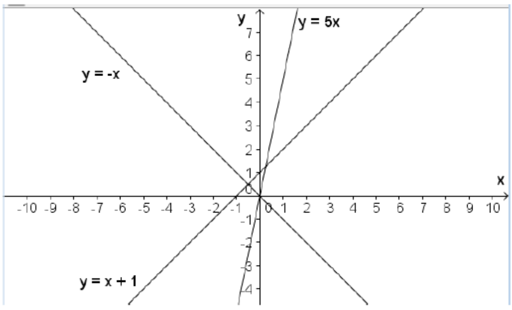
MATEMÁTICAS 1º ESO
TEMA 9 "FUNCIONES"

8/mayo/2012

1. Teoría: **(1,5 ptos.)**

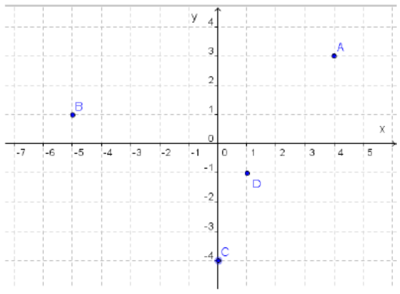
a) Define que es una función.

b) De las siguientes funciones que están representadas a continuación indica cual o cuales son funciones de proporcionalidad directa. Razona tu respuesta. Indica la razón de proporcionalidad si la hubiera.



2.

a) Escribe las coordenadas de los cuatro puntos que aparecen representados en los ejes de coordenadas. **(0,5 ptos)**



b) Representa en los ejes de coordenadas del apartado a) los siguientes puntos, indicando a que cuadrante pertenecen. E(-3,2); F(0,1);G(-6,-2); H(5,0);I(3,-2). **(0,5 ptos)**

3. La siguiente tabla muestra la evolución del paro en Navarra, en miles de personas, en el último año. Observa la tabla y responde a las siguientes preguntas. **(1 pto)**

Trimestre	1er trimestre (Enero-Marzo) 2011	2º trimestre (Abril-Junio) 2011	3er trimestre Julio-septiembre 2011	4º trimestre Octubre-Diciembre 2011	1er trimestre Enero-Marzo 2012
Parados	41,2	39,6	35,9	42,5	50,3

a) ¿Ha aumentado o ha disminuido el nº de parados en el último año en Navarra?¿En cuántas personas?

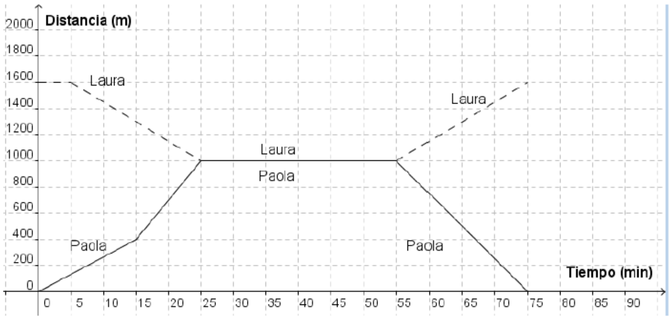
b) ¿Entre que trimestres ha aumentado más el nº de parados?

c) ¿En algún trimestre ha disminuido el nº de parados?

d) ¿Cuántos parados hay actualmente en Navarra?

Figura 18. Cuestionario

4. La siguiente gráfica representa la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por dos amigas, Laura y Paola, desde que salen cada una de su casa. Observa la gráfica y responde a las siguientes preguntas. **(1, 5ptos)**



a) Si Paola sale de casa a las 10:00 horas ¿A qué hora ha salido Laura?
b) ¿A qué distancia de la casa de Laura se encuentran las dos amigas?
c) Antes de que se junten ¿ha andado Paola siempre a la misma velocidad?¿Por qué?
d) ¿Qué hacen las dos amigas cuando se encuentran?
e) ¿Cuánto rato están juntas?
f) ¿A dónde crees que van cuando se separan? Razona tu respuesta.
g) ¿Qué distancia en total a recorrido Laura?¿Y Paola?

5. Completa la siguiente tabla de magnitudes directamente proporcionales y escribe la fórmula de la función que las relaciona. A continuación represéntala. **(1,5 ptos)**

x	4	2	1	0	-1	-2
y			-3			6

PROBLEMAS

6. Juan lleva a revelar unas fotos a una maquina de revelado digital donde le cobran 20 céntimos por cada foto que revela. **(1,5 ptos)**
a) Escribe la formula que se deduce del enunciado anterior
b) Representa gráficamente la función
c) ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente?
d) ¿Cuántos euros le costará revelar 12 fotos?

7. Lucía ha llamado a su amigo Luis. La tarifa que tiene en el móvil es de 15 céntimos por el establecimiento de llamada y 5 céntimos por cada minuto de conversación. **(2 ptos)**
a) ¿Cuál es la función que relaciona el precio de la llamada con los minutos de conversación?
b) Si lucía ha estado hablando durante 20 minutos, ¿Cuánto habrá pagado?

Figura 18 (cont). Cuestionario

8.3.2. Criterios de corrección

Para una mejor lectura de los criterios de corrección, se agrupan en la Tabla 24. Se muestra así mismo la puntuación de cada uno de los apartados.

Tabla 24. Criterios de corrección y puntuación del cuestionario

Pregunta	**Criterio de corrección y puntuación**
1a	Definición correcta: 0,75
1b	Identificar las dos funciones de proporcionalidad directa: 0,5 Identificar la razón de proporcionalidad: 0,25
2a	Coordenadas de los puntos A, B, D : 0,1 cada uno Coordenadas del punto C : 0,2
2b	Situar los puntos indicando su cuadrante: 0,1 cada punto
3a	Contestar correctamente: 0,3
3b	Contestar correctamente: 0,3
3c	Contestar correctamente: 0,2
3d	Contestar correctamente: 0,2
4a	Contestar correctamente: 0,25
4b	Contestar correctamente: 0,2
4c	Contestar correctamente: 0,25
4d	Contestar correctamente: 0,2
4e	Contestar correctamente: 0,2
4f	Contestar correctamente: 0,2
4g	Contestar correctamente: 0,1 cada una
5	Completar la tabla todos los valores bien:0,25 Escribir la formula de la función: 0,75 Representar la función : 0,5
6a	Escribir la fórmula: 0,75
6b	Representar la función: 0,25
6c	Identificar la variable dependiente y la variable independiente: 0,25
6d	Contestar correctamente: 0,25
7a	Escribir la fórmula: 1,25
7b	Contestar correctamente: 0,75

8.4. Cuestiones y comportamientos esperados

El cuestionario se ha realizado siguiendo las normas que tienen en el colegio para elaborar los exámenes de matemáticas. La puntuación de cada examen se debe repartir del siguiente modo:

- Teoría y cálculo: de 6 a 8 puntos
- Problemas: de 4 a 2 puntos

La estructura del cuestionario es similar a la estructura del tema de funciones del libro de texto utilizado en clase. Por ello, se han planteado cuestiones sobre cada uno de los epígrafes: coordenadas de un punto, relaciones dadas por tablas, por gráficas y por fórmulas, funciones de proporcionalidad directa y problemas de aplicación.

A continuación, se hace un análisis de los objetivos buscados en el cuestionario y de los comportamientos esperados.

1. Pregunta de teoría aplicada.

La pregunta de teoría tiene dos apartados. En el primero, se pregunta la definición de función. En el segundo, se pretende que los alumnos identifiquen una función de proporcionalidad como aquella que pasa por el origen de coordenadas, así como su razón de proporcionalidad.

Se espera que la pregunta de teoría no origine ningún problema, pues el tema de funciones a penas tiene definiciones.

En el segundo apartado se espera que la mayoría identifique las dos funciones que pasan por el origen como de proporcionalidad directa. Sin embargo, es de esperar que, en algún caso solo identifiquen una de ellas: la función $y = 5x$ por ser una función que tiene un número multiplicando a la x .

Identificar la razón de proporcionalidad puede ocasionar más problemas, pues en el tema anterior (Tema 8: magnitudes proporcionales, porcentajes) ya se observó una dificultad importante en la mayoría de los alumnos para identificar la constante de proporcionalidad.

HIPÓTESIS 1: Los estudiantes no hacen una interpretación analítica de la proporcionalidad.

2. Ejercicio de coordenadas.

En el primer apartado se pide escribir las coordenadas de un punto y en el segundo apartado se dan las coordenadas de varios puntos y se pide colocarlos en los ejes de coordenadas, indicando el cuadrante en el que encuentran.

Los puntos seleccionados para este ejercicio, están repartidos entre los cuatros cuadrantes y los dos ejes. Se espera que los puntos que más problemas ocasionen sean los que tengan que situar en el plano y tengan cero alguna de sus coordenadas $F(0,1); H(5,0)$. Así mismo es de esperar que tengan problemas al identificar el cuadrante de estos mismos puntos.

3. Ejercicio de relaciones dadas por tablas.

Se ha propuesto un ejercicio en el que dos magnitudes están relacionadas mediante una tabla. Es un ejercicio con datos reales y contextualizados, sobre el paro en Navarra en el último año en función del trimestre.

Con el objetivo de comprobar si los alumnos hacen una correcta interpretación del enunciado, las unidades en que se mide el número de parados (miles de personas) se indican en dicho enunciado. Así mismo, las cantidades indicadas en la tabla se han puesto con números decimales para valorar la capacidad de los alumnos de expresar correctamente un resultado (50.300 parados y no decir 50,3 mil parados o 50,3 parados).

Se espera que estas consideraciones creen dificultades en los alumnos a la hora de contestar las cuestiones propuestas en este ejercicio.

En la primera cuestión, se espera que algunos alumnos en vez de hacer la resta del primer y último dato para calcular en cuantos parados ha aumentado el paro en Navarra en el último año, hagan la resta de los dos últimos datos.

HIPÓTESIS 2: La comprensión lectora es una interferencia para la resolución de problemas matemáticos.

4. Ejercicio de relaciones dadas por gráficas.

En este ejercicio, se han incluido dos funciones en el mismo plano cartesiano, que relacionan la distancia recorrida por dos amigas en función del tiempo.

Este hecho en sí mismo puede plantear dificultades a algún alumno a la hora de interpretar los datos.

Se han dibujado dos momentos en los que la gráfica es horizontal (es decir no hay movimiento) para comprobar si los alumnos los saben identificar.

Se espera que la mayoría identifique el periodo en que ambas amigas están paradas y durante cuánto tiempo (apartados d) y e)). Sin embargo se espera que el apartado a) genere cierta dificultad por el hecho de no tener el dato directamente en los ejes, sino que tienen que interpretar que si Paola sale de casa a las 10:00 h y Laura no se mueve de casa en cinco minutos, saldrá a las 10:05 h (contextualización de los datos).

En el apartado b) deben interpretar que la casa de Laura está a 1.600 m de la casa de Paula, pero que las dos amigas se encuentran a 600 m de la casa de esta última. Esta cuestión puede crear dificultades para algunos alumnos.

El apartado f) se ha incluido para que interpreten que cada gráfica acaba a la misma distancia de donde parte, respecto del eje vertical (distancia), es decir que cada una de las amigas vuelve al punto de partida, sus respectivas casas. Es de esperar que algún alumno conteste que siguen caminando por separado hacia otro lugar diferente de sus casas.

El último apartado g) se ha puesto con el propósito de que calculen el total del recorrido, suma del recorrido de ida y de vuelta. En esta cuestión se espera que si han sabido responder al apartado anterior sepan responder a este. Pero hay que tener en cuenta que para contestar a este apartado es necesario realizar un cálculo matemático y esto puede generar errores.

Es esperable que algún alumno solo de cómo resultado la distancia del trayecto de ida hasta que se juntan.

HIPÓTESIS 3: Los alumnos tienen menos dificultades al responder a preguntas sobre tablas o gráficas cuando la respuesta se puede obtener sin realizar ningún cálculo.

5. Ejercicio de relaciones dadas por fórmulas.

En este ejercicio se da una tabla en la que se indica que las magnitudes son directamente proporcionales y se pide que se complete, se escriba la fórmula de la función que las relaciona y que la representen.

El completar la tabla, en principio, no debe generar ningún problema en la mayoría de los alumnos. Al escribir la fórmula, se pueden olvidar de poner el signo negativo

($y = -3x$). En cuanto a representarla, si saben colocar puntos en los ejes de coordenadas, este apartado no debe tener dificultad.

6. Problema de función lineal.

En este problema, han de saber expresar de forma algebraica un enunciado en el que hay una relación directamente proporcional entre dos magnitudes, apartado a).

En el apartado b) tienen que representar la función. Un error esperado en este apartado es que unan los puntos, cuando no tiene sentido unirlos por el contexto del problema.

En el apartado c) han de identificar cual es la variable dependiente y la variable independiente. Esta cuestión también es de esperar que ocasione problemas, pues ya se ha detectado anteriormente como un error común entre los alumnos.

En el último apartado del problema, se plantea el cálculo de la variable dependiente (precio en €) conocida la variable independiente (nº de fotos).

En este caso la variable didáctica (Briand J. et al. 1995) sería el nº de fotos y se ha provocado un salto de información, es decir "un cambio de valor de una variable didáctica en el interior de una situación susceptible de provocar un cambio de estrategia" (Briand J. et al. 1995).

Se ha planteado esta cuestión con un número elevado de la variable independiente para que no sigan la técnica de hacer la tabla de valores hasta el valor pedido.

Lo deseable es que utilicen la fórmula para calcular el valor pedido, pero se espera que muchos alumnos hagan el cálculo sin hacer uso de la fórmula.

HIPOTESIS 4: Si un estudiante sabe expresar algebraicamente un enunciado, utilizará dicha expresión para hacer los cálculos pedidos.

7. Problema de función afín.

Este problema se ha planteado de forma similar al anterior, pero con la diferencia de que en este caso los alumnos han de expresar de forma algebraica un enunciado en el que hay una relación entre dos magnitudes que no es directamente proporcional, apartado a).

Aquí también se ha provocado un salto de información para que los alumnos utilicen la fórmula para el cálculo pedido en el apartado b). Sin embargo como en el problema anterior, es esperable que muchos de ellos realicen el cálculo sin utilizar la fórmula.

A continuación, en la Tabla 25, se resumen las hipótesis planteadas sobre la resolución de problemas de funciones por alumnos de 1º de ESO.

Tabla 25. Hipótesis planteadas

Hipótesis:	
H1	Los estudiantes no hacen una interpretación analítica de la proporcionalidad.
H2	La comprensión lectora es una interferencia para la resolución de problemas matemáticos. Tabla: si las unidades están en el enunciado no prestan atención
H3	Los alumnos tienen menos dificultades al responder a preguntas sobre tablas o gráficas cuando la respuesta se puede obtener sin realizar ningún cálculo.
H4	Si un estudiante sabe expresar algebraicamente un enunciado, utilizará dicha expresión para hacer los cálculos pedidos.

8.5. Resultados

En este apartado se muestran los resultados obtenidos de la experimentación realizada.

En la Figura 19, se pueden ver los resultados que han obtenido los alumnos en el cuestionario, agrupados por clases y en total para toda la muestra.

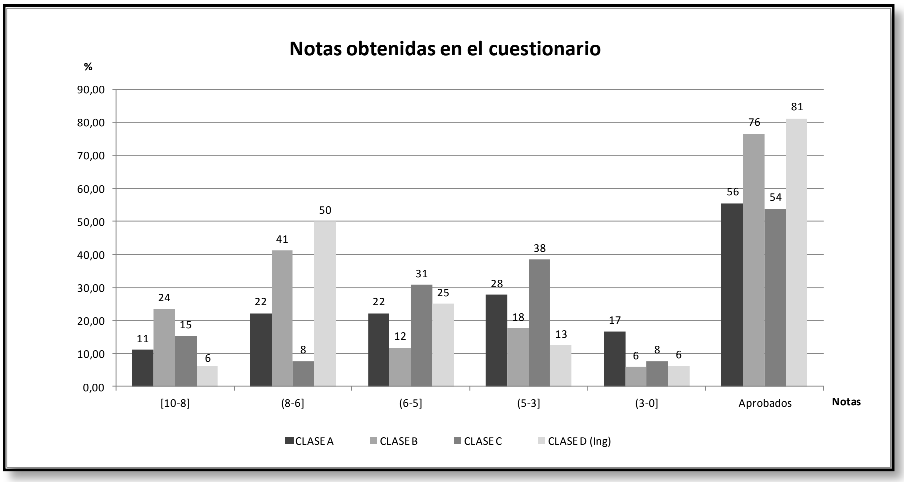


Figura 19. Resultados del cuestionario.

Como era de esperar los estudiantes de la clase D (en inglés), son los que han obtenido los mejores resultados en el cuestionario, con un 81% de aprobados. Como se puede observar dos clases superan el 75 % de aprobados y otras dos no superan el 60%. Estos resultados siguen la línea de los resultados obtenidos en las evaluaciones anteriores en cada una de las clases.

En función de las dificultades y errores esperados en el cuestionario, que ya se han expuesto en el Capítulo 6 del presente trabajo, se han analizado 17 variables. Cada variable se ha elegido en función de un apartado del cuestionario y se indica en paréntesis junto a la variable.

Las variables analizadas en la experimentación son:

V1: Reconocer una función de proporcionalidad directa en un gráfico. (1b)

V2: Identificar la razón de proporcionalidad. (1b)

V3: Interpretar los datos contextualizados en una tabla. (3a)

V4: Interpretar los datos contextualizados en un gráfico. (4a)

V5: Interpretar una línea recta como ausencia de movimiento, en una gráfica tiempo, distancia. (4d)

V6: Interpretar que si una gráfica acaba en el mismo punto, respecto al eje y (distancia) significa que vuelve al punto de partida, en una gráfica tiempo, distancia. (4f)

V7: Calcular la distancia total recorrida en una gráfica tiempo, distancia. (4g)

V8: Completar una tabla de magnitudes directamente proporcionales. (5)

V9: Escribir la fórmula que relaciona dos magnitudes dadas en una tabla. (5)

V10: Expresar de forma algebraica un enunciado que relaciona dos magnitudes a través de una función lineal. (6a)

V11: Utilizar la fórmula de una función lineal para calcular un resultado concreto. (6d)

V12: Calcular el resultado sin utilizar la formula de la función lineal. (6d)

V13: Unir los puntos al representar una función discreta. (6b)

V14: Identificar la variable dependiente y la variable independiente en un problema verbal. (6c)

V15: Expresar de forma algebraica un enunciado que relaciona dos magnitudes a través de una función afín. (7a)

V16: Utilizar la formula de una función afín para calcular un resultado concreto. (7b)

V17: Calcular el resultado sin utilizar la formula función afín. (7b)

Estas variables han sido analizadas en función de las respuestas de cada estudiante en el cuestionario. De este estudio pormenorizado se ha obtenido la Tabla 26, donde se muestran los sujetos (estudiantes) ordenados en función de la nota obtenida en el cuestionario, de mayor a menor.

En esta tabla no se ha hecho ninguna distinción entre las cuatro clases. Sin embargo, en el Anexo E se muestran los resultados obtenidos en cada una de las clases por separado.

Cada variable se ha evaluado de la siguiente forma:

- Valor 1: si el sujeto ha respondido en el cuestionario de forma afirmativa a la pregunta que se corresponde con la variable.
- Valor 0: si el sujeto no ha respondido en el cuestionario de forma afirmativa a la pregunta que se corresponde con la variable.

Todos los resultados que se han obtenido de la experimentación realizada y que se analizan y discuten en el siguiente apartado, solo tienen significatividad para la muestra escogida.

En caso de querer hacer una extrapolación de estos resultados a toda la población que cursa 1º de ESO, se deben tener en cuenta todas las restricciones de la experimentación.

Tabla 26. Tabla de contingencia de los resultados

Sujetos/ variables	**Nota**	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**	**V6**	**V7**	**V8**	**V9**	**V10**	**V11**	**V12**	**V13**	**V14**	**V15**	**V16**	**V17**
1	**9,60**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
2	**9,5**	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
3	**9,35**	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
4	**9,15**	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
5	**9**	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
6	**8,65**	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0
7	**8,60**	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
8	**8**	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
9	**8**	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
10	**7,85**	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
11	**7,8**	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
12	**7,70**	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
13	**7,5**	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
14	**7,5**	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
15	**7,45**	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
16	**7,40**	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
17	**7**	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
18	**6,8**	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
19	**6,80**	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
20	**6,75**	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
21	**6,75**	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
22	**6,65**	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
23	**6,50**	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
24	**6,50**	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
25	**6,45**	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
26	**6,40**	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
27	**6,35**	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
28	**6,35**	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
29	**6,2**	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
30	**5,9**	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
31	**5,9**	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
32	**5,75**	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
33	**5,60**	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
34	**5,6**	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
35	**5,5**	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
36	**5,4**	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
37	**5,35**	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
38	**5,25**	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
39	**5,20**	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
40	**5**	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0

Tabla 26. (cont.) Tabla de contingencia de los resultados

Sujetos/ variables	Nota	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17
41	**5**	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
42	**5**	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
43	**5**	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
44	**4,75**	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
45	**4,75**	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
46	**4,65**	0	0	0	1		1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
47	**4,65**	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
48	**3,9**	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
49	**3,80**	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
50	**3,75**	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
51	**3,75**	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
52	**3,65**	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
53	**3,65**	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
54	**3,60**	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
55	**3,5**	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56	**3,4**	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
57	**3,15**	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
58	**3**	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
59	**2,75**	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
60	**2,50**	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
61	**2,4**	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
62	**1,8**	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
63	**1,6**	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
64	**1,25**	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

En la Figura 20, se hace un recuento del número de respuestas con valor 1 para cada una de las variables analizadas.

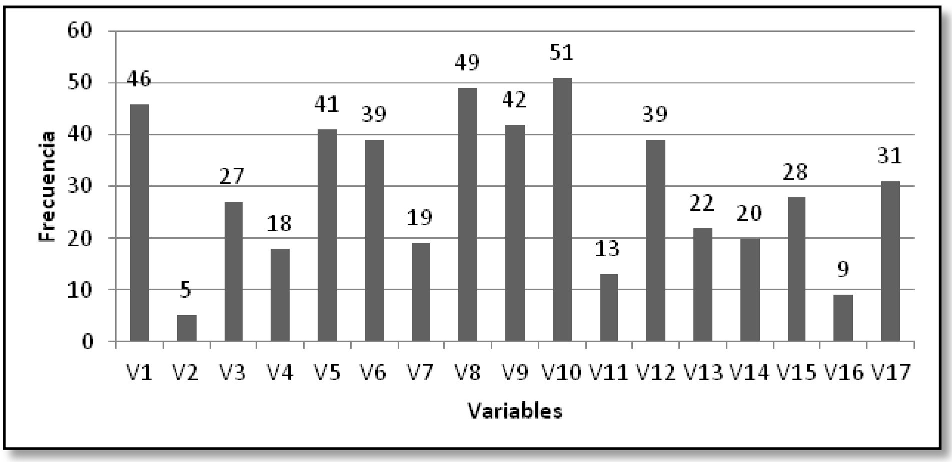


Figura 20. Resumen de la frecuencia de los resultados.

En base a los resultados obtenidos, en la Figura 21, se muestran los porcentajes de respuestas con valor 1, de las variables analizadas.

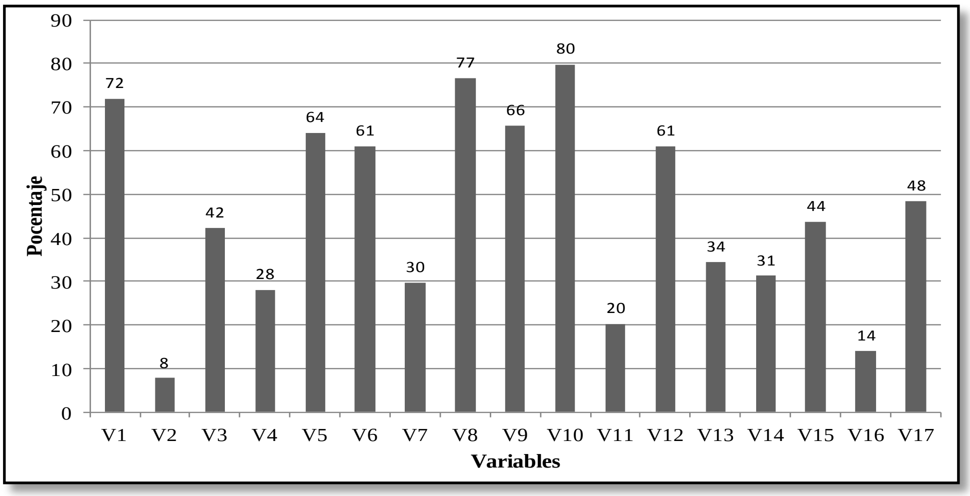


Figura 21. Resumen del porcentaje de resultados.

Más del 70% de la muestra ha reconocido las funciones de proporcionalidad directa en un gráfico, como aquellas que pasan por el origen de coordenadas. Sin embargo, es destacable el hecho de que menos del 8% ha identificado la razón de proporcionalidad. Esta variable solo ha tenido valor 1 (respuesta afirmativa a la variable) en los sujetos que mejor nota ha obtenido en el cuestionario en cada clase (por encima de un 9 de nota).

Las variables V3 y V4 confirman la previsión planteada en el apartado 6.1, respecto a la dificultad de los estudiantes para interpretar los datos contextualizados dados en una tabla o en una gráfica. Estas variables hacen referencia a los ejercicios 3 y 4 del cuestionario y en ambos ejercicios las unidades se indicaban en el enunciado. El 42% ha hecho una correcta interpretación de los datos contextualizados dados en la tabla y solo el 28% en la gráfica.

Las respuestas que más aciertos han tenido, respecto al ejercicio 4 (datos relacionados mediante una gráfica) han sido aquellas que se pueden contestar correctamente sin realizar ningún cálculo, variables V5 y V6 con un 64% y un 61% de aciertos respectivamente.

La variable V6 está relacionada con la V7, sin embargo tan solo el 30% ha respondido adecuadamente a la pregunta que hace referencia a esta última variable.

La variable V8 (completar una tabla de magnitudes directamente proporcionales) está relacionada con el tema anterior de proporcionalidad directa. En dicho tema ya había ejercicios de este estilo. Al analizar esta variable se ha detectado que, la mayoría de los alumnos de una de las clases han realizado este ejercicio utilizando la propiedad de las proporciones. (Figura 22). El 77% de la muestra tiene un valor 1 para esta variable.

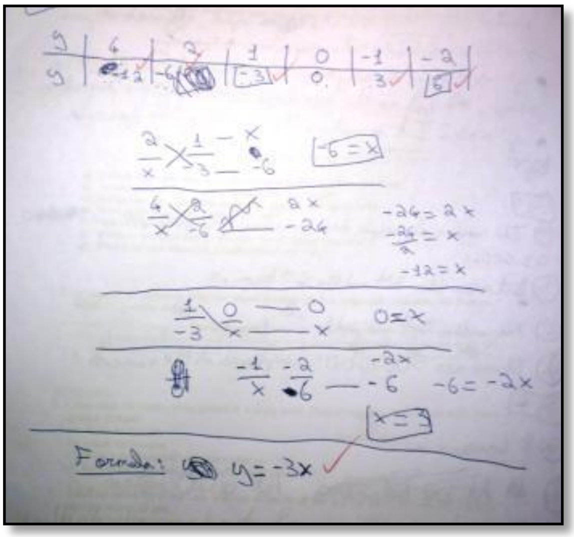


Figura 22. Ejemplo de cálculo para completar una tabla de valores proporcionales

El 66% de la muestra ha escrito la fórmula que relaciona las magnitudes de la tabla, variable V9.

Las variables V10 a V14 hacen referencia al problema 6 del cuestionario. La primera cuestión del problema (V10) ha sido contestada de forma correcta por el 80% de la muestra. Sin embargo, el 20% ha utilizado la fórmula para responder al apartado d) del problema (V11) y el 61 % ha contestado este apartado sin utilizar la fórmula (V12), por lo que hay algún sujeto con un 1 en la V12 y un 0 en la V10.

La variable V13 muestra que, el 34% de los sujetos han unido los puntos al representar la función.

El 31% de los sujetos, ha sabido identificar la variable dependiente y la variable independiente en un problema contextualizado (V14).

Las tres últimas variables, V15, V16 y V17 se refieren al problema 7. El 44 % de la muestra ha expresado correctamente el enunciado, a través de una fórmula (V15), pero solo el 14% la ha utilizado para responder al siguiente apartado, V16. Por el contrario, el 48% ha contestado correctamente al apartado b) sin utilizar la fórmula, V17. Es decir, hay estudiantes que han calculado el resultado correctamente sin haber escrito ni siquiera la fórmula.

En la Figura 23 se muestra un ejemplo de solución aritmética del apartado 7b) del cuestionario, sin utilizar la fórmula.

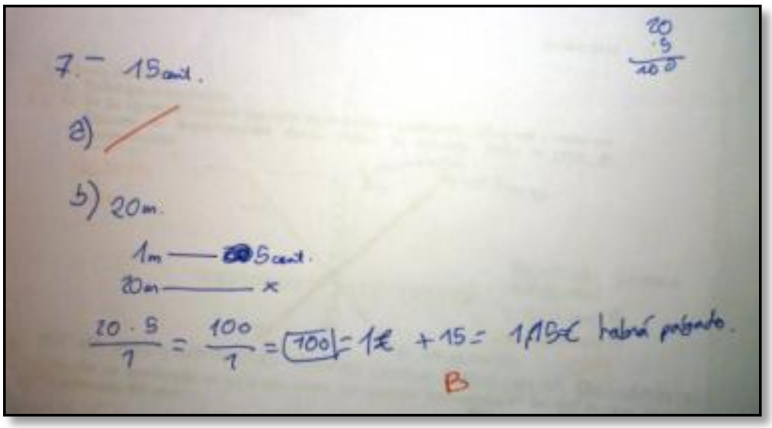


Figura 23 Solución del apartado 7b del cuestionario sin utilizar la fórmula.

En la Figura 24 se muestra otro ejemplo de solución del apartado 7b) del cuestionario, pero en este caso utilizando una tabla de datos.

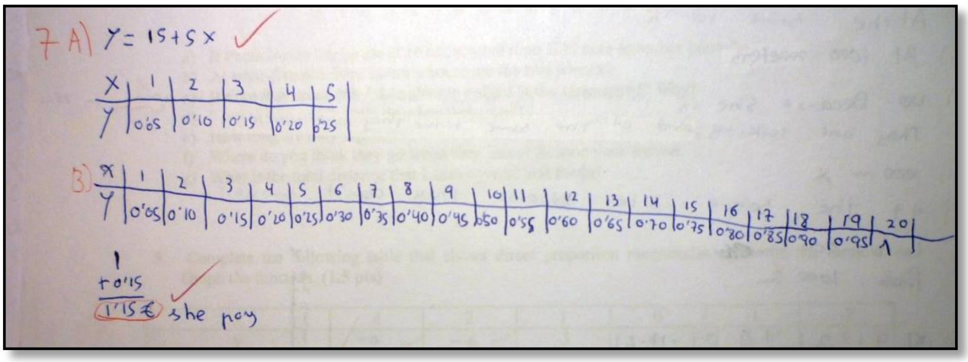


Figura 24. Solución del apartado 7b del cuestionario utilizando una tabla de datos

8.6. Discusión de los resultados

En este apartado, el análisis realizado a priori en los Capítulos 5, 6 y 7, es contrastado con los resultados obtenidos de la experimentación, permitiendo así una valoración de los mismos.

1._ Los estudiantes no identifican la razón de proporcionalidad de una función directamente proporcional de la que se facilita la fórmula.

Detrás de esta cuestión hay un problema de conocimiento de base. El tema anterior que estudian en clase trata el tema de la proporcionalidad y los porcentajes El concepto de proporcionalidad se introduce en problemas concretos donde el objeto matemático utilizado para su resolución es la “regla de tres”. Estos conceptos se suelen identificar como nociones diferentes a pesar de que proceden de un mismo saber científico: las funciones lineales de R hacia R (Briand J. et al., 1995). Sin embargo, no se parte de este modelo matemático y ambos conceptos se estudian de una forma totalmente atomizada.

Con los datos disponibles no es posible afirmar que no sepan lo que es la razón de proporcionalidad pero si se puede afirmar que la Hipótesis 1 es cierta: los estudiantes no hacen una interpretación analítica de la proporcionalidad.

2._ Para los alumnos, la comprensión lectora del enunciado, es una interferencia en la resolución de problemas matemáticos contextualizados. Tanto en problemas donde los datos están dados en tablas, en gráficas o en problemas verbales.

El enunciado de un problema matemático requiere de múltiples competencias (Briand J. et al., 1995):

- Competencias puramente lingüísticas, necesarias para la comprensión de cualquier mensaje escrito, conocimiento más específico del vocabulario y de los símbolos matemáticos;
- Un abandono progresivo de la lógica natural por la lógica formal;
- La capacidad de localizar, seleccionar, clasificar y ordenar las informaciones matemáticas necesarias para alcanzar un cierto objetivo o resolver el problema.

Por lo tanto, es fácil comprender las dificultades de los alumnos al enfrentarse a un texto matemático. Han de comprender la situación que se plantea en el problema y de lo que está en juego, desde el punto de vista matemático, para hacer una elección de estrategias e instrumentos adaptados. La lectura del enunciado de los problemas es una actividad específica que necesita un trabajo didáctico particular. (Briand J. et al., 1995).

"Se acusa frecuentemente a los alumnos de secundaria de no saber leer: en realidad ellos saben leer los textos narrativos pues aprenden a leer en este tipo de texto […] Ahora bien, los saberes construidos sobre tal o cual tipo de texto no se transfieren. Sólo se transfiere la técnica, pero si bien ella permite descifrar el texto, por el contrario no permite su comprensión". (Maryse Rebière, 1991)

Los resultados obtenidos de la experimentación realizada nos permiten confortar la Hipótesis 2: la comprensión lectora es una interferencia para la resolución de problemas matemáticos.

3._ Los alumnos tienen menos dificultades al responder a preguntas sobre tablas o gráficas cuando la respuesta se puede obtener sin realizar ningún cálculo.

Las cuestiones que se pueden realizar en problemas donde las magnitudes se relacionan a través de tablas o de gráficas se pueden separa en dos grupos: las que corresponden a la "lectura de la tabla o la gráfica" y las que se refieren más propiamente a la "interpretación de la tabla o la gráfica" (Universidad de Piura, 2000). Estas últimas serían las que se han discutido en el resultado anterior.

Cuando el alumno no necesita realizar ningún cálculo para responder a la pregunta planteada las respuestas acertadas aumentan considerablemente.

En el ejercicio 4, apartado a) y apartado d) las preguntas están relacionadas con el concepto de que en una gráfica tiempo, espacio, una línea recta se interpreta como ausencia de movimiento (V4 y V5). Sin embargo, en el apartado a) además de tener claro este concepto hay que hacer una interpretación de los datos y calcular el resultado. El porcentaje de respuestas correctas ha sido un 33% superior en el apartado d).

Un resultado similar se ha obtenido en los apartados f) y g) en los que se preguntaba sobre el recorrido total de las dos amigas. En el apartado f) hay que hacer una correcta interpretación de la gráfica pero sin realizar ningún cálculo. El porcentaje de respuestas correctas ha sido de una 61%, frente al 30% de respuestas correctas en el apartado g) en el que hay que realizar un cálculo matemático.

Como conclusión de estos resultados se puede afirmar que la Hipótesis 4 es cierta: los alumnos tienen menos dificultades al responder a preguntas sobre tablas o gráficas cuando la respuesta se puede obtener sin realizar ningún cálculo.

4._ Cuando un alumno se enfrenta a un problema verbal sobre funciones, ha de saber interpretar la relación entre dos magnitudes y expresarla algebraicamente, si le piden que escriba la fórmula de dicha relación. Una vez superada esta dificultad, ya discutida anteriormente, puede utilizar la fórmula para calcular el valor de la variable dependiente dado un valor elevado de la variable independiente.

En los dos problemas propuestos en el cuestionario (problema 6 y 7) se ha provocado un salto de información, es decir "un cambio de valor de una variable didáctica en el interior de una situación susceptible de provocar un cambio de estrategia" (Briand J. et al. 1995). Se ha planteado esta cuestión con un número elevado de la variable independiente para que no sigan la técnica de hacer la tabla de valores hasta el valor pedido y utilicen la fórmula para calcular el valor pedido.

Sin embargo se ha constatado que la mayoría de los estudiantes que han contestado correctamente a esta pregunta no han utilizado la fórmula, sino que lo han hecho de forma aritmética.

Esto suele ocurrir cuando se plantean problemas en contextos pseudo-arítmeticos es decir, problemas aritméticos en los que solo hay que poner alguna letra en lugar de los números y operar igual. (Lacasta, E., Gomez E, R. Wilhelmi M., 2006).

“Esta situación genera entre los estudiantes una clara resistencia a utilizar el álgebra, ya que no encuentran una necesidad matemática para su uso” (Lacasta et al.,2006)

Por lo tanto, la ausencia de utilización de la expresión algebraica no significa ausencia de conocimiento. Así, no se puede afirmar ni refutar la Hipótesis 4: Si un estudiante sabe expresar algebraicamente un enunciado, utilizará dicha expresión para hacer los cálculos pedidos.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la resolución de problemas de Funciones por alumnos de 1º ESO.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se ha realizado un análisis a priori donde se abordan las dimensiones: epistemológica (las matemáticas presentes en la unidad didáctica objeto de estudio.), cognitiva (dificultades y errores de los estudiantes) y didáctica (descripción del proceso de estudio implementado).

Este análisis es contrastado posteriormente con los resultados de la experimentación llevada a cabo en un aula de 1º de ESO. Esto permite hacer una valoración de los resultados basada en las "expectativas previas".

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Conclusiones generales del trabajo

El aprendizaje del tema de Funciones en la ESO es un aprendizaje en espiral es decir, cada año se vuelven a ver los conceptos del año anterior y se añaden nuevos conocimientos.

Sin embargo, el fenómeno de atomización de la enseñanza está muy presente en el tema de funciones. Las funciones están en un tema aislado y no hay ninguna relación con otros conceptos matemáticos. Esta enseñanza dificulta la interrelación de los conceptos matemáticos y su posterior identificación y utilización.

El uso generalizado de la "regla de tres" dificulta el aprendizaje de las nociones de proporcionalidad y de función lineal hasta llegar a convertirse en un obstáculo.

Los alumnos tienen muchas dificultades al enfrentarse al enunciado de un problema matemático, pues se requiere de múltiples competencias para su correcta interpretación. Han de comprender la situación que se plantea en el problema y de lo que está en juego, desde el punto de vista matemático, para hacer una elección de estrategias e instrumentos adaptados. La lectura del enunciado de los problemas es una actividad específica que necesita un trabajo didáctico particular. Por ello la comprensión lectora del enunciado es una interferencia en la resolución de problemas matemáticos contextualizados.

Cuestiones abiertas

¿Es adecuada la atomización de la enseñanza de las Matemáticas?

¿Por qué se sigue utilizando la regla de tres (que obstaculiza el aprendizaje de las nociones de proporcionalidad y función lineal) cuando ya no está presente en el currículo?

¿Qué métodos y técnicas se pueden utilizar para mejorar la comprensión de los textos matemáticos? ¿Es una tarea exclusiva del profesorado de Matemáticas?

¿Cómo puede un profesor realizar una enseñanza que facilite a los estudiantes la transición de la aritmética al álgebra?

Referencias

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 282–307.

Briand J.; Chevalier MC, (1995). Les enjeux didactiques dans le enseignement des mathématiques.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona: ICE/Horsori.

Godino, Juan D., Font,Vicenç, Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. Relime. Vol 9 (número especial). pp. 131-155.

Lacasta, E., Gomez E, Wilhelmi, M. R. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la educación secundaria obligatoria. Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía IV, pp 79-90.

Larson R., Hostetler R., Edwards B. (1995). Cálculo y geometría analítica. Quinta edición. McGraw-Hill.

Maryse Rebière, (1991). Role de l'énoncé dans la résolution de problèmes. DEA Université de Bordeaux, Sciences de l'Education,

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. BOE 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006).Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO. BOE 5, de 5 enero, 677–773.

Universidad de Piura. Matemática. Fascículo general autoinstructivo 7.3. Las funciones y los modelos de fenómenos del mundo real. Ministerio de Educación, 2000.

S M (2003a). Matemáticas 5 Primaria. Madrid: Autor

S M (2003b). Matemáticas 5 Primaria. Madrid: Autor

S M (2007a). Matemáticas 1 ESO. Proyecto Esfera. Madrid: Autor.

S M (2007a). Matemáticas 2 ESO. Proyecto Esfera. Madrid: Autor.

S M (2007a). Matemáticas 3 ESO. Proyecto Esfera. Madrid: Autor.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto

B. Material didáctico utilizado para la impartición

C. Material didáctico adicional (hojas de ejercicios)

D. Cuestionario en castellano e inglés

E. Resultados de la experimentación por clases

A. Unidad didáctica del libro de texto

9 FUNCIONES

Un reloj de sol indica las horas mediante las sombras que proyecta una aguja, llamada gnomon, sobre una superficie perpendicular a ella. Hay, por tanto, una relación entre la altura a la que se encuentra el sol, con el paso de las horas, y la longitud de la sombra.

En matemáticas, las relaciones de este tipo entre magnitudes reciben el nombre de funciones.

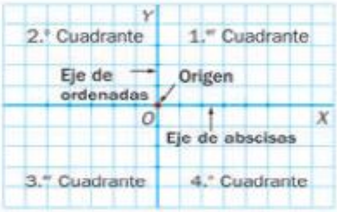
1. Coordenadas en el plano

Los ejes y el origen de coordenadas

La figura muestra dos rectas perpendiculares y graduadas, una horizontal y otra vertical, que dividen el plano en cuatro cuadrantes.

Estas rectas se llaman **ejes de coordenadas**.

El punto donde se cortan estas rectas es el **origen de coordenadas**.

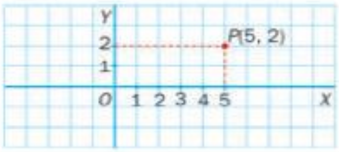


El eje horizontal se llama **eje de abscisas**.
El eje vertical se llama **eje de ordenadas**.
El punto de corte de los dos ejes se llama **origen de coordenadas**.

Coordenadas de los puntos del plano

La posición del punto *P* de la figura se indica con un par ordenado de números (5, 2), que se llaman **coordenadas del punto**.

El 5 es la **abscisa** y el 2 la **ordenada** del punto.



Ten en cuenta

No es lo mismo (1, 3) que (3, 1).

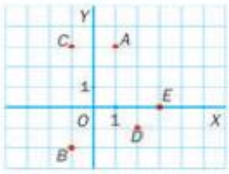
La primera coordenada se mide sobre el eje horizontal y se llama **abscisa** del punto. La segunda se mide sobre el eje vertical y se llama **ordenada** del punto.

EJERCICIO RESUELTO

1. Representa en unos ejes de coordenadas estos puntos e indica en qué cuadrante están.
   A(1, 3) *B*(−1, −2) *C*(−1, 3) *D*(2, −1) *E*(3, 0)

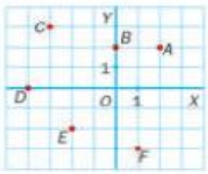
   A está en el primer cuadrante, *C* en el segundo, *B* en el tercero, *D* en el cuarto.

   El punto *E* está sobre el eje de abscisas.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escribe las coordenadas de los puntos que aparecen en la figura.



2. Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos.
   A(3, 2) *B*(5, −2) *C*(−3, 1) *D*(1, −1) *E*(0, 4)

3. Representa en unos ejes de coordenadas estos puntos e indica en qué cuadrante está cada uno.
   A(1, 2) *B*(−3, −1) *C*(−4, 3) *D*(0, −1) *E*(0, 2)

2. Relaciones dadas por tablas

La longitud del feto, medida del cráneo al talón, varía según el mes de gestación.

Un estudio ginecológico muestra cómo crece un bebé antes de nacer, indicando cuál es la longitud del feto cada mes de la gestación en el vientre de su madre, de acuerdo con la siguiente tabla:

Edad (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (cm)	4	8	15	24	29	34	38	42

A cada edad le corresponde una longitud determinada. La longitud del feto depende o está en función del mes de gestación.

En una **tabla** a cada valor de la primera magnitud le corresponde un valor de la segunda. Esta magnitud **está en función** de la primera o **depende** de ella.

De la tabla se puede obtener información, como por ejemplo:

a) Entre el cuarto y quinto mes es cuando más crece el feto.

b) Durante el período de gestación aumenta en más de diez veces su tamaño.

EJERCICIO RESUELTO

2. La tabla muestra el consumo medio de electricidad de una vivienda a distintas horas del día.

a) ¿A qué hora se produce el mayor consumo?

b) ¿Hay momentos en los que no varía el consumo?

a) El mayor consumo se produce a las 20.00 horas.

b) Sí, de 0.00 a 2.00 horas el consumo no varía.

Hora del día	Consumo (kW/h)
0.00	40
2.00	40
4.00	50
8.00	62
12.00	58
16.00	55
20.00	68

EJERCICIOS PROPUESTOS

4 La tabla refleja la evolución de la población española, en millones de personas, a lo largo del siglo XX.

Año	Población	Año	Población
1900	19	1960	31
1910	20	1970	34
1920	21	1980	38
1930	24	1990	39
1940	26	2000	40
1950	28		

a) ¿En función de qué varía la población?

b) ¿Cuál era la población en el año 1990?

c) ¿En qué año la población era de 28 millones de personas?

d) ¿En qué años la población estuvo entre 30 y 35 millones de personas?

5 La tabla muestra el número de toneladas de pilas recogidas en puntos limpios de España.

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Toneladas	17	150	159	138	190	189

a) ¿Depende la cantidad de pilas de los años?

b) ¿Cuántas toneladas de pilas se recogieron en el año 1997?

c) ¿En qué año se recogieron menos pilas? ¿Y más?

6 La tabla muestra el número de horas que dedica Ana a la lectura durante una semana.

Día	L	M	X	J	V	S	D
Horas	1	1,5	1,75	2	0,5	1	1,5

a) ¿Qué día dedica más horas a la lectura?

b) ¿Dedica algunos días el mismo número de horas a la lectura?

c) ¿Qué día dedica menos horas?

3. Relaciones dadas por gráficas

En el cuaderno de campo de Juan aparece esta gráfica para mostrar la variación de la longitud de la sombra de un árbol a lo largo de un día.

A cada hora del día le corresponde una longitud determinada de la sombra. La longitud depende o está en función de la hora del día.

Por ejemplo, a las 19 horas la sombra mide 300 centímetros.

En una **gráfica** a cada valor de la magnitud del eje de abscisas le corresponde un valor de la magnitud del eje de ordenadas. Esta magnitud **depende** o **está en función** de la primera.

De la gráfica se puede obtener información, como, por ejemplo, que la sombra disminuye a lo largo de la mañana y a partir de una hora empieza a aumentar casi al mismo ritmo con el que disminuyó.

EJERCICIO RESUELTO

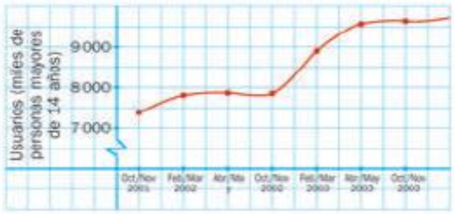
3. La gráfica muestra la evolución del uso de internet en España en los últimos años.

a) En el año 2001, ¿cuántas personas utilizaban internet?

b) ¿En qué año utilizaban internet 9 millones de personas?

a) Lo utilizaban unos 7 millones de personas.

b) En el año 2003.



EJERCICIOS PROPUESTOS

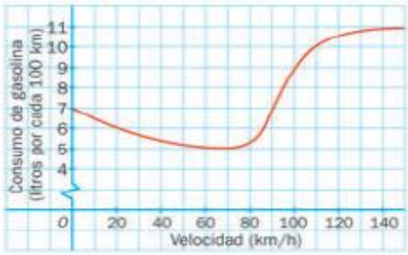
7 La temperatura de un enfermo en la UCI de un hospital está registrada permanentemente por un aparato. Un día se obtuvo este registro:

a) ¿Cuál es su temperatura a las 8.00?

b) En cierto momento, el paciente sufrió un paro cardíaco con un brusco descenso de la temperatura. ¿A qué hora se inició?

c) ¿Cuándo empezó la recuperación?

8 En una revista de coches aparece la gráfica siguiente, para expresar cómo el consumo de gasolina de cierto modelo de coche depende de la velocidad a la que circula.



a) Si el coche circula a 80 kilómetros por hora, ¿cuántos litros consume cada 100 kilómetros?

b) ¿A qué velocidad se consume menos?

c) ¿Qué ocurre al aumentar la velocidad?

4. Relaciones dadas por fórmulas

Ejemplo. *Tenemos una máquina que opera de esta forma: al introducirle un número entero, lo multiplica por 2, le suma 1 y nos devuelve el resultado. ¿Cuál será la fórmula general de la relación?*

Construimos la siguiente tabla:

Número introducido	-2	0	1	...	x
Número devuelto	$2(-2)+1=-3$	$2\cdot 0+1=1$	$2\cdot 1+1=3$	...	$2\cdot x+1=y$

Si designamos con $\boldsymbol{x}$ el número introducido y con $\boldsymbol{y}$ el número devuelto, la fórmula que relaciona ambas magnitudes es:

$$y = 2x + 1$$

La relación entre dos magnitudes se puede expresar mediante una igualdad llamada **fórmula**.

A cada valor del número introducido, x, le corresponde un único número, y. El número devuelto depende del número introducido.

En una fórmula a partir de los valores de x de una magnitud se obtienen valores de y de la otra. Esta magnitud **depende** o **está en función** de la primera.

EJERCICIO RESUELTO

4. Observa las siguientes circunferencias.

a) A partir de los datos de la tabla escribe una fórmula general para la longitud de una circunferencia.

D (cm)	1	2	3	...
L (cm)	3,14	$2\cdot 3{,}14 = 6{,}28$	9,42	...

b) ¿Cuál es la longitud si el diámetro mide 7 centímetros?

a) La longitud de una circunferencia se obtiene multiplicando la longitud del diámetro por 3,14. Por tanto, la fórmula es: $L = D\cdot 3{,}14$

b) Si $D = 7$ cm, la longitud es: $L = 7\cdot 3{,}14 = 21{,}98$ cm.

EJERCICIOS PROPUESTOS

9 A partir de los valores de la tabla, escribe la fórmula que relaciona las dos magnitudes.

x	1	5	10	15
y	4	8	13	18

10 En la fórmula $y = 3x + 2$, calcula el valor de y para cada uno de los siguientes valores de x.

a) 2 b) 6 c) 0 d) -1 e) -5

11 Escribe la fórmula que relaciona el lado del cuadrado con su área.

12 Escribe una fórmula general en la que a un número entero le corresponde su cuadrado menos 5.

13 Escribe una fórmula general que relaciona un número entero con 3 más el número multiplicado por 4.

5. Concepto de función

Las relaciones dadas por tablas, gráficas o fórmulas tienen una característica común: a cada valor, x, de una de las magnitudes le corresponde un único valor, y, de la otra. Este valor también se designa con $f(x)$.

A las relaciones de ese tipo las llamamos **funciones**.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.

Imagínate un coche que se mueve siempre a la misma velocidad de 90 kilómetros por hora. La tabla muestra la relación entre el tiempo que el coche está en movimiento y la distancia que recorre:

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	...	10
Distancia (km)	0	90	180	270	360	...	900

La magnitud *tiempo en movimiento*, que toma los valores 0, 1, 2..., se llama **variable independiente**.

La magnitud *distancia recorrida*, que está en función del tiempo, toma los valores 0, 90, 180... y se llama **variable dependiente**.

La **variable independiente** es la que se fija previamente.

La **variable dependiente** es la que se deduce de la variable independiente a través de la función.

Sabías que...

El matemático alemán **Leibniz** (1646-1716) fue el primero que utilizó el término **función**.

Pero el símbolo $f(x)$ lo utilizó por primera vez el matemático suizo **Euler** (1707-1783).

Gottfried W. Leibniz

Leonhard Euler

EJERCICIO RESUELTO

5. Halla el valor de la variable dependiente en la fórmula $y = 3x - 1$ para los siguientes valores de la variable independiente.

a) $x = 0$ b) $x = -2$ c) $x = 1$

a) $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$

b) $y = 3 \cdot (-2) - 1 = -7$

c) $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

14 Halla el valor de la variable dependiente en la fórmula $y = x^2 + 4$ para los siguientes valores de la variable independiente.

a) $x = 5$ c) $x = -8$

b) $x = -1$ d) $x = 3$

15 Determina la fórmula de la función que relaciona estos valores y completa la tabla.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−6				2		

16 Indica si son o no funciones las siguientes relaciones.

a) Relacionamos cada número natural con su anterior y con su posterior.

b) Asociamos cada número entero con su opuesto.

c) Hacemos corresponder cada número con los dígitos que lo forman.

d) Asociamos cada número entero de dos cifras con su cifra de las decenas.

168

6. Representación gráfica de una función

Ana ha salido de casa para ir a comprar el periódico al quiosco que se encuentra a 1 000 metros de su casa. Ha tardado 15 minutos a la ida y se ha entretenido 5 minutos hablando con el vendedor. El camino de vuelta también lo ha hecho en 15 minutos.

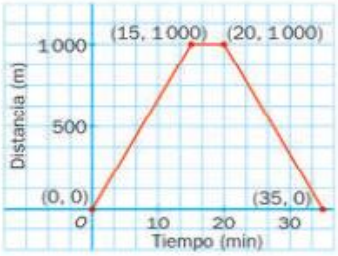
Para mostrar esta situación mediante una gráfica seguimos estos pasos:

1.° **Construimos una tabla** a partir de los datos que tenemos.

Tiempo (min)	0	15	20	35
Distancia (m)	0	1 000	1 000	0

2.° **Representamos los puntos obtenidos** colocando el tiempo en el eje horizontal y la distancia a la casa en el eje vertical.

3.° **Estudiamos si tiene sentido unir los puntos**. En este caso, como el tiempo pasa de forma continua, los puntos se pueden unir.



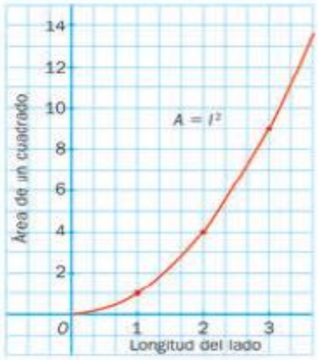
EJERCICIO RESUELTO

6. La fórmula de la función que relaciona el área de un cuadrado con la longitud de su lado es $A = l^2$. Representa gráficamente dicha función.

Para obtener algunos puntos elaboramos una tabla.

Lado	Área
1	1
1,5	2,25
2	4
2,5	6,25
3	9
3,5	12,25

Al dar valores intermedios a la longitud del lado se obtienen valores intermedios del área; así, tiene sentido unir los puntos.



EJERCICIOS PROPUESTOS

17 Dibuja la gráfica de la función $y = x + 1$.

18 Dibuja la gráfica de la función $y = 3x + 2$.

19 La fórmula que expresa el perímetro de un triángulo equilátero en función del lado es:

$$P = 3 \cdot l$$

Representa gráficamente dicha función.

20 Para hacer un bizcocho se necesitan dos medidas de harina por cada yogur.

Representa la gráfica de la función.

21 El precio del revelado de un carrete es 1 euro y por cada foto cobran 0,50 euros.

Representa la gráfica de esta función.

7. Función de proporcionalidad directa

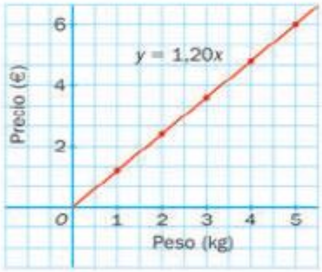
Las magnitudes peso y precio que muestra la tabla son directamente proporcionales, siendo 1,20 la razón de proporcionalidad.

Peso (kg)	1	2	3	4	5
Precio (€)	1,20	2,40	3,60	4,80	6

Al representar los valores de la tabla como puntos del plano, comprobamos que están alineados.

La gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

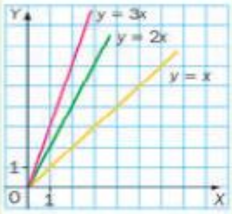
Si llamamos x al peso e y al precio, la expresión $y = 1{,}20x$ es la fórmula asociada.



Las funciones cuyas gráficas son rectas que pasan por el origen de coordenadas se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. La fórmula de estas funciones es de la forma $y = m \cdot x$, donde m es la razón de proporcionalidad.

Ten en cuenta

A la razón m también se le llama pendiente porque cuanto mayor es m más inclinada es la recta de la gráfica.

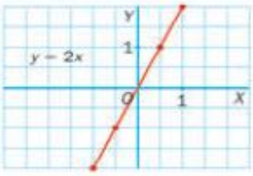


EJERCICIO RESUELTO

7. Dibuja la gráfica de la función cuya fórmula es $y = 2x$.

A partir de la fórmula se construye una tabla y a continuación se representan los puntos obtenidos.

x	−1	0	1	2
y	−2	0	2	4



EJERCICIOS PROPUESTOS

22 Copia y completa en tu cuaderno esta tabla y dibuja la gráfica de la función asociada.

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−6				2	

23 Representa estas funciones.

a) $y = 4x$ d) $y = x$
b) $y = -3x$ e) $y = -x$
c) $y = -2x$ f) $y = 5x$

24 El peso de un objeto en la Luna es la sexta parte de su peso en la Tierra.

Representa la función que da el peso de un objeto en la Luna.

25 La razón de proporcionalidad de dos magnitudes directamente proporcionales es 0,5.

a) Escribe la fórmula de la función que relaciona las dos magnitudes.

b) Representa gráficamente la función.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

BUSCAR CONTRAEJEMPLOS

Hay problemas en los que es necesario decidir sobre si algo es o no verdad. Para ello son muy útiles los llamados **contraejemplos**, es decir, ejemplos que prueban que una determinada afirmación es falsa. Aunque un contraejemplo no sirve para demostrar que algo es verdad, sí sirve para demostrar que una afirmación no lo es.

PROBLEMA

Ricardo ha inventado una función que consiste en tomar un número, sumarle 4 y al resultado dividirlo entre 2. Pilar ha inventado otra función que consiste en dividir el número tomado entre 2 y al resultado sumarle 4.

Ricardo dice que Pilar le ha copiado la idea y que los dos hablan en realidad de la misma función, pero Pilar insiste en que las dos funciones no tienen nada que ver. ¿Cuál de los dos tiene razón?

RESOLUCIÓN

Vamos a buscar un contraejemplo. Tomemos el número 6.

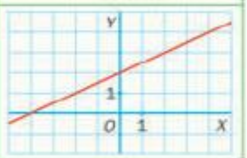
Yo tengo que dividirlo por 2, $6 : 2 = 3$, y al resultado sumarle 4, $3 + 4 - 7$.
Al aplicarle al 6 mi función nos da de resultado 7.

Yo tengo que sumarle 4, $6 + 4 = 10$, y el resultado dividirlo por 2, $10 : 2 = 5$. Al aplicarle al 6 mi función nos da de resultado 5.

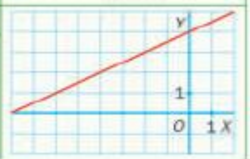
Como hemos encontrado un ejemplo donde las funciones son distintas, comprobamos que tiene razón Pilar.

Veamos en las siguientes gráficas el comportamiento de las dos funciones:

Función de Ricardo

Ecuación	Tabla x	Tabla y	Gráfica
$y = \frac{x+4}{2}$	-2	1	
	0	2	
	2	3	
	6	5	

Función de Pilar

Ecuación	Tabla x	Tabla y	Gráfica
$y = \frac{x}{2} + 4$	-2	3	
	0	4	
	2	5	
	6	7	

PROBLEMAS PROPUESTOS

26 Busca un contraejemplo que pruebe que la función que aplicada a un número, lo multiplica por 2 y al resultado le resta 1; no es la misma función que aplicada al mismo número, le resta 1 y el resultado lo multiplica por 2.

Dibuja sus gráficas.

27 La función $y = x - 4$ y la función $y = \frac{x}{3}$ dan el mismo resultado cuando se aplican a $x = 6$.

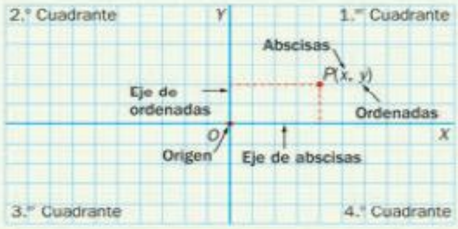
a) ¿Quiere decir esto que son la misma función?

b) Explica tu respuesta.

Organiza tus ideas

171

COORDENADAS EN EL PLANO



Las **coordenadas de un punto** *P* se indican mediante el par ordenado (x, y).

La primera coordenada, *x*, se mide sobre el eje horizontal y se llama **abscisa del punto**.

La segunda, *y*, se mide sobre el eje vertical y se llama **ordenada del punto**.

FUNCIÓN

Definición

Relación entre dos magnitudes, de manera que **a cada valor de la primera** le corresponde **un único valor de la segunda**.

Variables que intervienen

Variable independiente es la que se fija previamente.

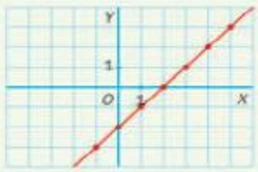
Variable dependiente es la que se deduce de la variable independiente a través de la función.

FORMAS DE REPRESENTACIÓN

Tablas

x	*y*
−1	−3
0	−2
1	−1
2	0
3	1
4	2
5	3

Gráficas



Fórmulas

La relación entre dos magnitudes se puede expresar mediante una igualdad llamada **fórmula**.

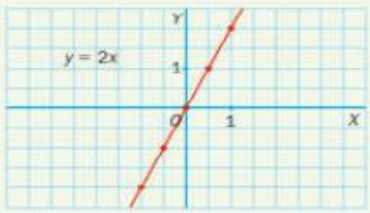
$$y = x - 2$$

FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Definición

Función cuya gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Su fórmula es de la forma $\boldsymbol{y = m \cdot x}$.



> activ

CÁLCULO MENTAL

28 Completa en tu cuaderno la tabla, sabiendo que un kilogramo de patatas cuesta 0,60 euros.

Cantidad (kg)	2	3	4	5	6
Precio (€)					

29 Dadas las tablas siguientes:

a)

x	0	1	2	3	4	...
y	0	2	4	6	8	...

b)

x	0	1	2	3	4	...
y	0	1	4	9	16	...

c)

x	0	1	2	3	4	...
y	1	2	3	4	5	...

¿Cuáles corresponden a funciones de proporcionalidad directa?

30 Completa en tu cuaderno las tablas asociadas a las siguientes funciones.

a) $y = 3x$

x	0	1	2			10		
y				9	21		33	36

b) $y = 3x - 7$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y								

c) $y = x^2 + 2$

x	−5	−2	−1		3	5	7	
y	27			2				102

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

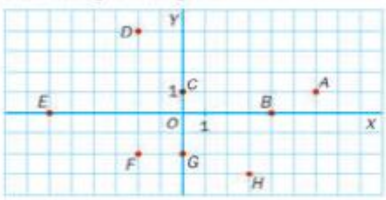
Coordenadas en el plano

31 Represента estos puntos de coordenadas.

$A(3, 2)$ $B(-1, 5)$ $C(0, 7)$

$D(-2, -6)$ $E(5, 0)$ $F(4, -5)$

32 Escribe las coordenadas de los puntos representados en la siguiente figura.



33 Indica en qué cuadrante están estos puntos.

a) $A(5, -2)$ c) $C(-2, -1)$

b) $B(2, 2)$ d) $D(0, 8)$

Escribe cuáles son la abscisa y la ordenada de cada uno de ellos.

Relaciones dadas por tablas

34 Pedro está viajando en tren. La tabla muestra la distancia, expresada en kilómetros, que le falta para llegar a su destino a medida que pasa el tiempo, expresado en horas.

Tiempo (h)	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00
Distancia (km)	560	425	275	120	0

a) ¿Cuánto dura el viaje?

b) ¿Entre qué horas adelanta más kilómetros?

c) ¿Hay una única distancia para cada hora?

35 La tabla recoge las dimensiones de diferentes rectángulos cuya superficie mide 36 metros cuadrados.

Base (m)	2	2,5		6	9		18
Altura (m)		14,4	9			3	

Completa la tabla.

Relaciones dadas por gráficas y fórmulas

36 Halla el valor de la variable dependiente, para los números −2, −1, 0, 1 y 2, en estas fórmulas.

a) $y = -x^2$

b) $y = -x^2 + 2$

c) $y = 3 + 4x$

37 La gráfica muestra la evolución de las ventas de un producto nuevo a medida que transcurren los meses desde que salió al mercado.

a) ¿En qué mes hubo más ventas?

b) ¿En qué mes hubo menos ventas?

c) ¿Hubo dos meses con las mismas ventas?

d) ¿Le corresponde a cada mes un único número de ventas?

38 Expresa mediante una fórmula las siguientes frases.

a) Asociamos a cada número x su doble.

b) Asociamos a cada número x su triple más dos.

c) Asociamos a cada número x su cuadrado menos tres.

d) Asociamos a cada número x el opuesto de su cuadrado.

Funciones y gráficas

39 María quiere regalar a su madre bombones. Elige un tipo de bombones que cuestan 35 euros cada kilogramo.

a) Escribe una fórmula que relacione la cantidad de bombones que compra María con lo que tiene que pagar.

b) ¿Corresponde la fórmula anterior a una función?

c) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente?

40 El área del círculo en función del radio viene dada por esta fórmula $A = \pi \cdot r^2$, donde π vale aproximadamente 3,14.

a) Construye una tabla para distintos valores de r.

b) Representa gráficamente los valores de la tabla.

c) ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos?

d) ¿Le corresponde a cada radio un único valor del área del círculo?

41 Para la función $y = 3x + 1$, calcula los valores de la variable independiente conociendo los siguientes valores de la variable dependiente.

a) $y = 1$

b) $y = 10$

c) $y = -8$

d) Representa gráficamente la función.

42 Indica cuáles de estos puntos pertenecen a la función $y = -x + 1$.

a) $A(1, 0)$ c) $C(4, 2)$

b) $B(0, -1)$ d) $D(4, -3)$

Representa gráficamente los puntos anteriores y comprueba cuáles están en la gráfica de la función.

Función de proporcionalidad directa

43 Escribe la fórmula de las funciones lineales cuyas razones de proporcionalidad sean las siguientes.

a) 3 c) $\frac{1}{2}$

b) −5 d) $-\frac{1}{7}$

44 Representa en los mismos ejes de coordenadas la gráfica de estas funciones de proporcionalidad directa.

a) $y = 0{,}5x$ $y = x$ $y = 2x$ $y = 3x$

b) $y = -0{,}5x$ $y = -x$ $y = -2x$ $y = -3x$

45 Dada la función de proporcionalidad directa $y = -2x$ responde a los siguientes apartados.

a) Averigua los números que faltan.

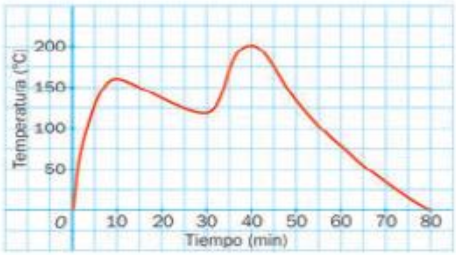
$f(3) = ?$ $f(-1) = ?$ $f(?) = 6$

b) Representa gráficamente esta función.

> a c t i v

PROBLEMAS PARA APLICAR

46 La gráfica muestra la temperatura de un horno mientras se hace un bizcocho.



a) ¿En qué momento se alcanza la mayor temperatura? ¿Cuál es esta?

b) ¿Cuándo la temperatura es de 50 °C?

c) ¿Entre qué minutos se aprecia una subida fuerte de la temperatura?

d) ¿Le corresponde a cada tiempo una única temperatura?

47 Una ONG compra 10 vacunas para niños por cada euro que aportamos.

a) Escribe la fórmula que relaciona la cantidad de dinero aportada con las vacunas compradas.

b) ¿Es una función de proporcionalidad directa?

c) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

d) Represéntala.

48 Describe la gráfica del siguiente paseo en bicicleta.

49 En los triángulos de altura 3, la función que asocia el área con cada base, b, viene dada por la fórmula $A = \frac{b \cdot 3}{2}$.

a) Construye una tabla con valores para las dos variables.

b) Representa la función.

50 Haz una gráfica para ilustrar la caminata que realiza Alejandro.

- En la primera hora anda 3 kilómetros.
- Hace un kilómetro más en la siguiente hora y luego descansa otra hora.
- Se aleja un kilómetro más durante una hora y decide regresar a casa.
- En la siguiente hora, de regreso, hace 4 kilómetros y descansa una hora.
- Tras el descanso, recorre el kilómetro que le falta para llegar en un tiempo similar.

51 El franqueo postal se rige por esta tabla.

Peso (g)	Franqueo (€)
Hasta 20 g	0,27
De más de 20 g hasta 50 g	0,40
De más de 50 g hasta 100 g	0,55
De 100 g hasta 250 g	0,89
De 250 g hasta 500 g	1,58
De 500 g hasta 1 000 g	3,12
De 1 000 g hasta 2 000 g	3,80

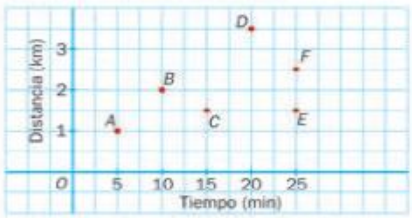
Alberto ha escrito cartas a algunos amigos. La carta que envía a Alejandro pesa 15 gramos, la de Inés 80 gramos, la de Elena 90 gramos y la de Pedro 500 gramos.

a) ¿Qué franqueo tendrá que poner a cada carta?

b) ¿Es posible que a dos cartas con distinto peso les corresponda el mismo franqueo?

c) ¿La relación definida en la tabla es una función?

52 La siguiente gráfica indica el tiempo que tardan en hacer su recorrido seis personas.



a) ¿Qué persona es más rápida, E o F?

b) Dibuja un punto que represente a una persona más rápida que C. ¿Hay más de una?

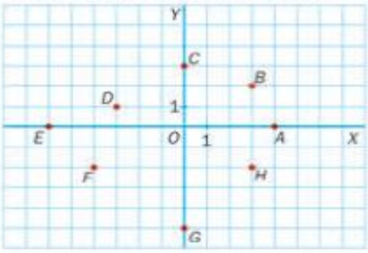
c) ¿Es la gráfica de una función? Razona la respuesta.

idades

REFUERZO

Coordenadas de puntos

53 Escribe las coordenadas de estos puntos.



54 Represente los siguientes puntos.

$A(-3, 4)$ $B(0, -5)$ $C(-2, 0)$ $D(4, -2)$

Indica a qué cuadrante corresponde cada uno de ellos.

Tablas, gráficas y fórmulas

55 Una tarifa de aparcamiento viene dada por esta tabla.

Tiempo	Precio (€)
Cada una de las tres primeras horas	1
Cada una de las tres horas siguientes	0,70
A partir de la sexta hora	0,50

a) Explica por qué la tabla representa una función.

b) El padre de Juan estuvo 3 horas y 40 minutos. ¿Cuánto tuvo que pagar?

56 Una función asigna a cada número el 5.

a) Escribe la fórmula de esta función.

b) Construye una tabla con cinco valores para la variable independiente y los correspondientes para la variable dependiente.

c) Representa gráficamente la función.

Funciones de proporcionalidad directa y gráficas

57 Halla el valor de la variable dependiente para los números -3, 0, 1 y 2 en las siguientes funciones.

a) $y = -2x$ c) $y = -x$

b) $y = 3x + 5$ d) $y = x(x + 1)$

Indica cuáles son de proporcionalidad directa.

58 Representa gráficamente estas funciones de proporcionalidad directa.

a) $y = 5x$ d) $y = -\frac{3}{5}x$

b) $y = -5x$ e) $y = 0{,}25x$

c) $y = \frac{1}{2}x$ f) $y = -0{,}25x$

59 Escribe las fórmulas de las funciones lineales cuyas razones de proporcionalidad sean las siguientes.

a) 2 b) -3 c) $\frac{1}{5}$ d) $-\frac{1}{3}$

AMPLIACIÓN

60 La siguiente tabla corresponde a una función f.

x	$f(x)$
0	4
1	6
2	8
3	?
?	12
...	...

a) Completa los números que faltan.

b) Encuentra la fórmula de dicha función.

61 Se llama diagonal de un polígono al segmento que une dos vértices no consecutivos. Estudia cuántas diagonales tiene un polígono de 3, 4, 5, 6, ..., x lados.

a) Construye una tabla.

b) Representa los valores de la tabla.

c) ¿Se pueden unir los puntos obtenidos?

62 Un granjero tiene 72 metros de valla para hacer un corral de gallinas de forma rectangular.

a) ¿Cómo cambiará el área del corral al variar la longitud de uno de los lados?

b) Construye una tabla de valores.

c) Representa los valores de la tabla.

63 Una empresa petrolífera paga a sus empleados según los metros excavados.

El primer metro lo pagan a 90 euros y los restantes a 60 euros cada uno.

a) Construye una tabla de valores.

b) Representa la gráfica asociada a la tabla anterior.

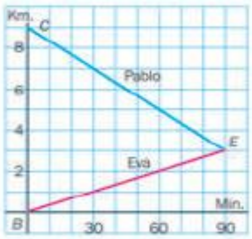
c) Determina la fórmula que permite calcular el precio en función de los metros excavados.

> actividades

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

64 Al encuentro

Pablo se encuentra en la cima, *C*, de un monte, y Eva, en el punto más bajo, *B*, del mismo. A las diez de la mañana parten uno al encuentro del otro. La gráfica representa la distancia de *B* a la que se encuentra cada uno en función del tiempo.



a) ¿Cuánto mide el monte?

b) ¿A qué hora se encuentran? ¿Qué distancia ha recorrido cada uno hasta ese momento?

c) Calcula la velocidad media que han llevado Pablo y Eva.

65 Oferta de trabajo

En un periódico se publica la siguiente oferta de empleo:

> **EMPRESA EUROPEA BUSCA INFORMÁTICO/A**
>
> Se exige:
> - Certificación oficial
> - Inglés nivel medio
> - Edad de 20 a 40 años
>
> Se ofrece:
> - Contrato de dos años
> - Sueldo primer semestre: 10 200 euros (total de los seis meses)
> - A partir del séptimo mes, el sueldo se aumentará 50 euros cada mes
>
> Enviar currículum vitae antes de 15 días

¿Cuánto ganaría cada mes la persona que contratasen para ese trabajo? Elabora una gráfica que refleje esos datos.

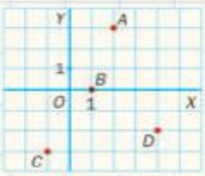
AUTOEVALUACIÓN

1 **Represente en unos ejes de coordenadas:**

$A(0, 3)$ $B(-3, 3)$ $C(4, 0)$ $D(2, -2)$

2 **Representa en unos ejes de coordenadas un punto *P* de abscisa 1 y ordenada −3.**

3 **Escribe las coordenadas de los puntos de la figura.**



4 **Dada la función $y = 2x - 1$.**

a) Construye una tabla con cinco valores para la variable independiente y los correspondientes valores para la variable dependiente.

b) Representa gráficamente la función.

c) ¿Es función de proporcionalidad directa? Razona la respuesta.

5 **Escribe la fórmula de una función lineal de razón de proporcionalidad 3.**

Representa gráficamente dicha función.

6 **Dada $f(x) = 2x$, halla los valores que faltan.**

a) $f(-4) = ?$ b) $f(?) = 1$ c) $f(0) = ?$

7 **Indica cuál es la variable independiente y cuál la dependiente para la siguiente función.**

8 **La tabla muestra la variación de peso de un recién nacido en sus primeras semanas de vida.**

Semanas	0	1	2	3	4	5
Peso (kg)	3,20	3,15	3,30	3,40	3,55	3,60

a) ¿Entre qué semanas ha disminuido el peso?

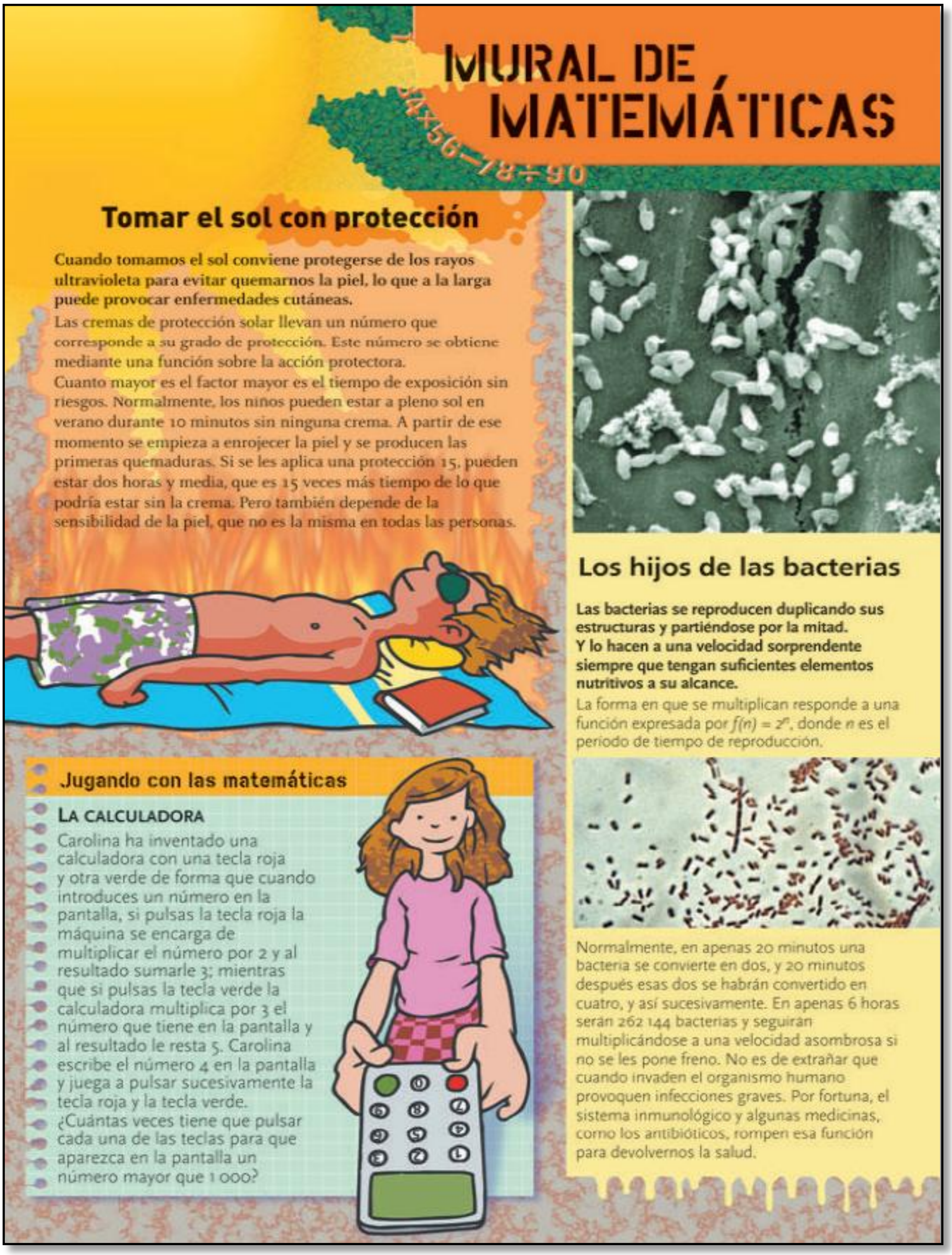
b) ¿Cuándo se ha producido el mayor aumento de peso?

9 **La relación que asocia a cada moneda su valor en euros y su valor en céntimos de euro, ¿es una función?**

Razona la respuesta.

10 **Representa en los mismos ejes estas funciones.**

$y = 3x$ $y = -x$



MURAL DE MATEMÁTICAS

Tomar el sol con protección

Cuando tomamos el sol conviene protegerse de los rayos ultravioleta para evitar quemarnos la piel, lo que a la larga puede provocar enfermedades cutáneas.

Las cremas de protección solar llevan un número que corresponde a su grado de protección. Este número se obtiene mediante una función sobre la acción protectora.

Cuanto mayor es el factor mayor es el tiempo de exposición sin riesgos. Normalmente, los niños pueden estar a pleno sol en verano durante 10 minutos sin ninguna crema. A partir de ese momento se empieza a enrojecer la piel y se producen las primeras quemaduras. Si se les aplica una protección 15, pueden estar dos horas y media, que es 15 veces más tiempo de lo que podría estar sin la crema. Pero también depende de la sensibilidad de la piel, que no es la misma en todas las personas.

Jugando con las matemáticas

La calculadora

Carolina ha inventado una calculadora con una tecla roja y otra verde de forma que cuando introduces un número en la pantalla, si pulsas la tecla roja la máquina se encarga de multiplicar el número por 2 y al resultado sumarle 3; mientras que si pulsas la tecla verde la calculadora multiplica por 3 el número que tiene en la pantalla y al resultado le resta 5. Carolina escribe el número 4 en la pantalla y juega a pulsar sucesivamente la tecla roja y la tecla verde. ¿Cuántas veces tiene que pulsar cada una de las teclas para que aparezca en la pantalla un número mayor que 1 000?

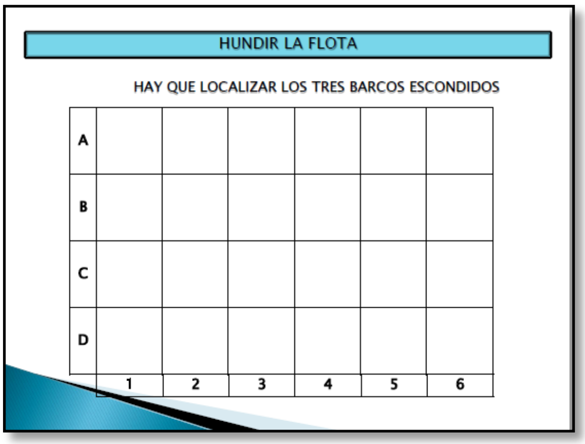
Los hijos de las bacterias

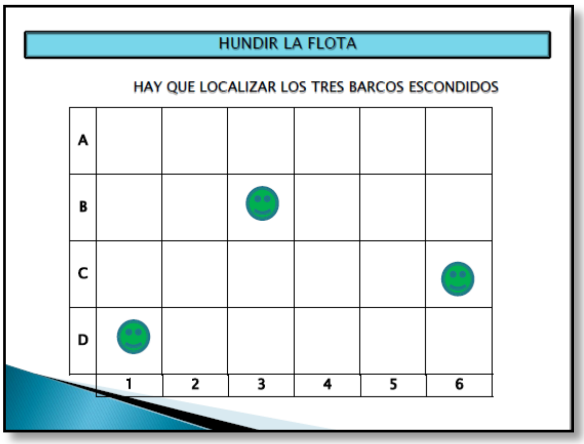
Las bacterias se reproducen duplicando sus estructuras y partiéndose por la mitad. Y lo hacen a una velocidad sorprendente siempre que tengan suficientes elementos nutritivos a su alcance.

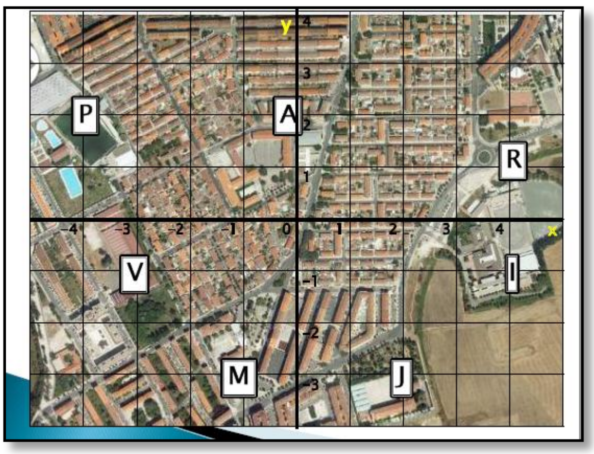
La forma en que se multiplican responde a una función expresada por $f(n) = 2^n$, donde n es el periodo de tiempo de reproducción.

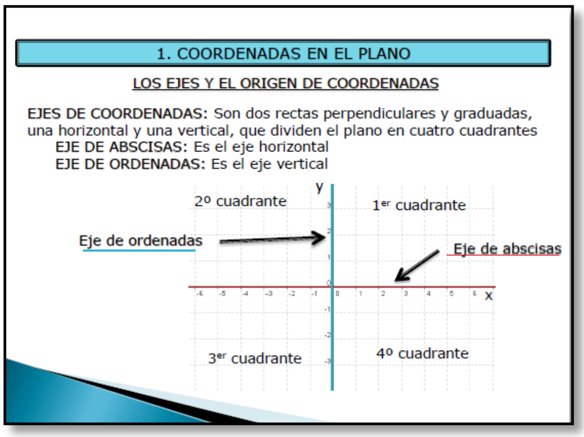
Normalmente, en apenas 20 minutos una bacteria se convierte en dos, y 20 minutos después esas dos se habrán convertido en cuatro, y así sucesivamente. En apenas 6 horas serán 262 144 bacterias y seguirán multiplicándose a una velocidad asombrosa si no se les pone freno. No es de extrañar que cuando invaden el organismo humano provoquen infecciones graves. Por fortuna, el sistema inmunológico y algunas medicinas, como los antibióticos, rompen esa función para devolvernos la salud.

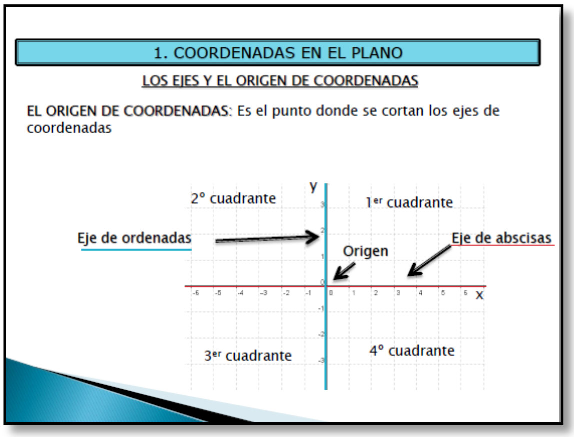
B. Material didáctico utilizado para la impartición

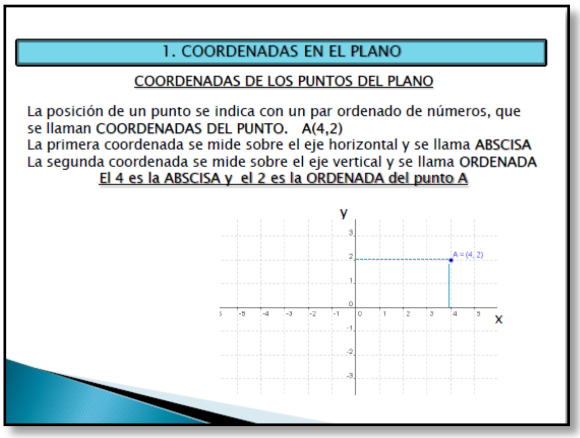


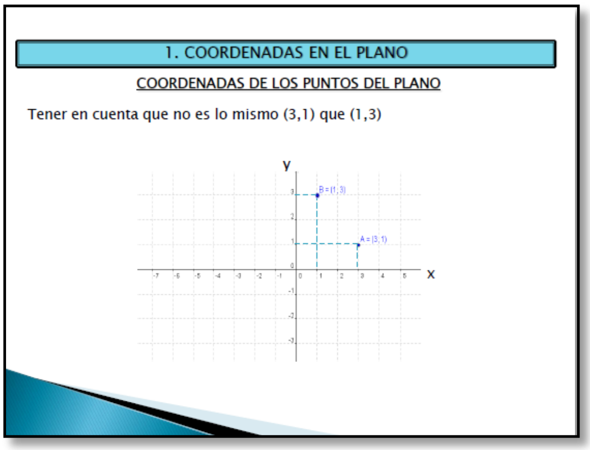


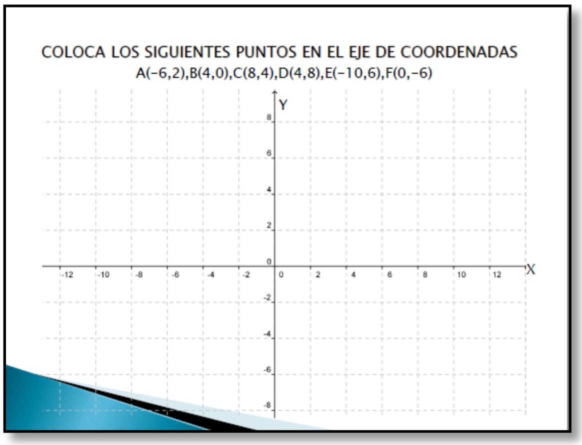


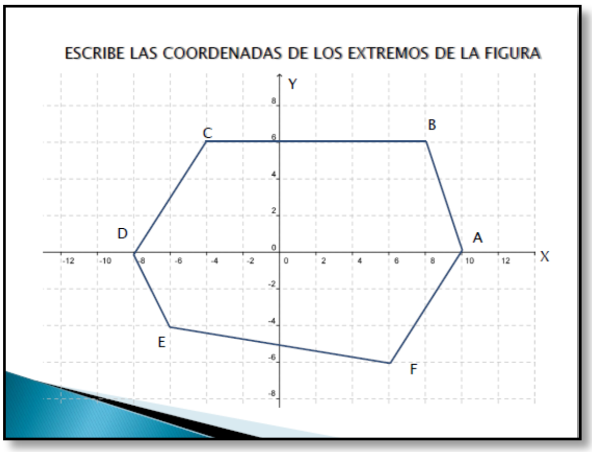


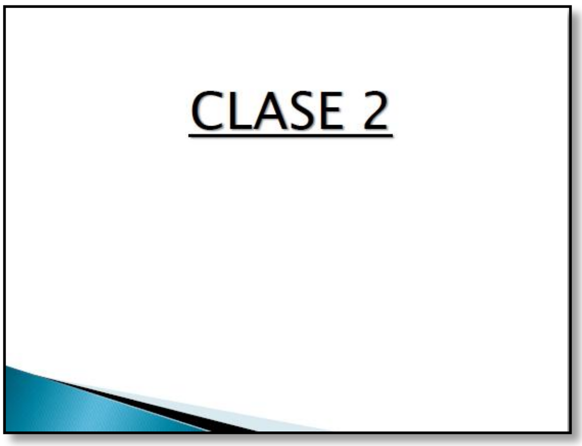

1. COORDENADAS EN EL PLANO
LOS EJES Y EL ORIGEN DE COORDENADAS
EL ORIGEN DE COORDENADAS: Es el punto donde se cortan los ejes de coordenadas
2º cuadrante
1er cuadrante
Eje de ordenadas
Eje de abscisas
Origen
y
x
3er cuadrante
4º cuadrante

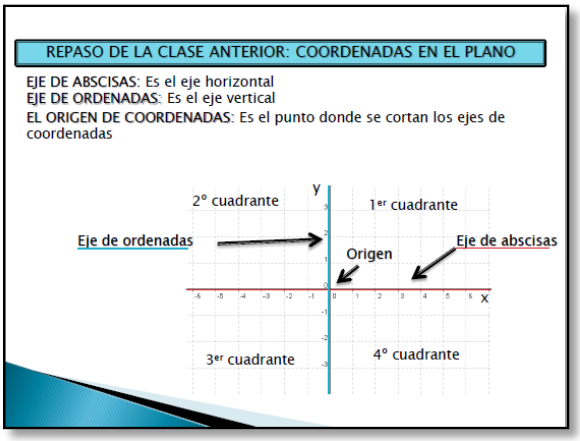

1. COORDENADAS EN EL PLANO
COORDENADAS DE LOS PUNTOS DEL PLANO
La posición de un punto se indica con un par ordenado de números, que se llaman COORDENADAS DEL PUNTO. A(4,2)
La primera coordenada se mide sobre el eje horizontal y se llama ABSCISA
La segunda coordenada se mide sobre el eje vertical y se llama ORDENADA
El 4 es la ABSCISA y el 2 es la ORDENADA del punto A
y
x

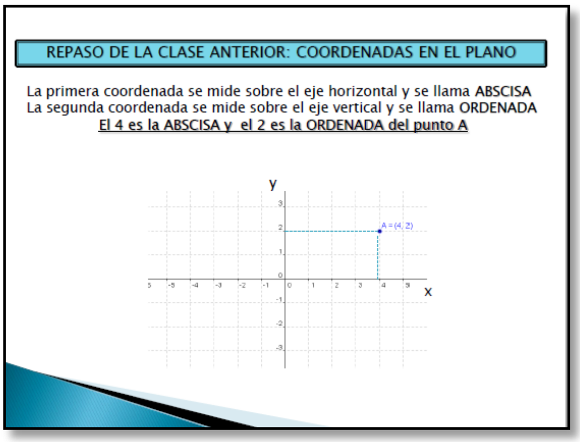

1. COORDENADAS EN EL PLANO
COORDENADAS DE LOS PUNTOS DEL PLANO
Tener en cuenta que no es lo mismo (3,1) que (1,3)
y
x

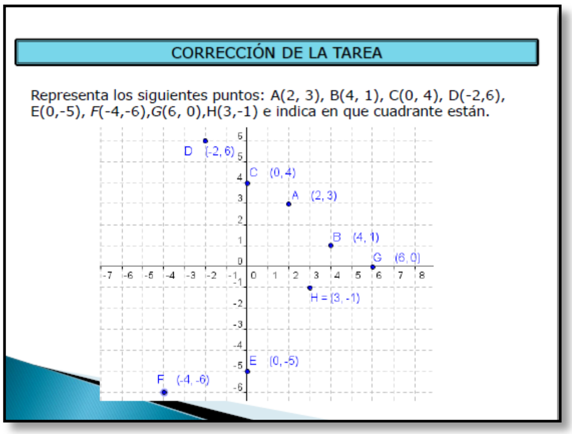

COLOCA LOS SIGUIENTES PUNTOS EN EL EJE DE COORDENADAS
A(−6,2),B(4,0),C(8,4),D(4,8),E(−10,6),F(0,−6)
Y
X

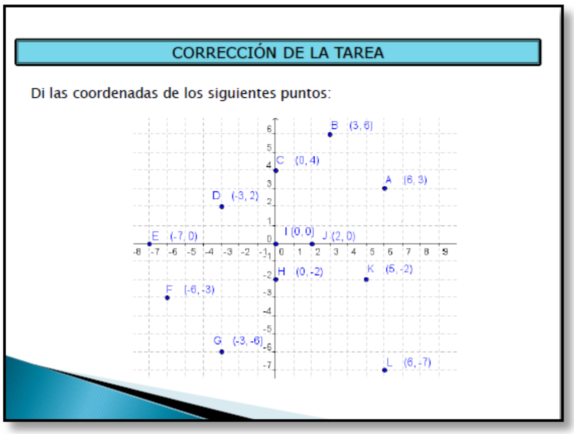

ESCRIBE LAS COORDENADAS DE LOS EXTREMOS DE LA FIGURA
Y
X
C
B
D
A
E
F

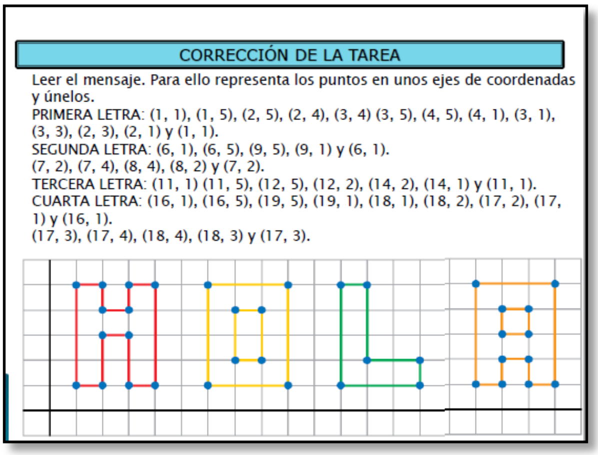

CLASE 2











Edad (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (cm)	4	8	15	24	29	34	38	42

2. RELACIONES DADAS POR TABLAS

Completa la siguiente tabla sabiendo que 1Kg de manzanas cuesta 2€

Manzanas (Kg)	1	2	3	4	5	8	
Precio(€)							

Variable independiente: manzanas
Variable dependiente: precio

MANZANAS
2€/Kg

2. RELACIONES DADAS POR TABLAS

Completa la siguiente tabla sabiendo que la superficie de un rectángulo vale 24 metros cuadrados

Altura(m)	2	4	6	8	12	24
Base(m)						

Superficie = base x altura

altura

SUPERFICIE : 20 m²

base

2. RELACIONES DADAS POR TABLAS

La tabla muestra el consumo medio de la electricidad de una vivienda a distintas horas del día.

Hora del día	0:00	2:00	4:00	8:00	12:00	16:00	20:00
Consumo (KW/h)	40	40	50	62	58	55	68

a) ¿De que depende el consumo?
b) ¿A que hora se produce el mayor consumo?
c) ¿hay momentos en los que no varía el consumo?
d) ¿A que hora el consumo es de 62 KW/h?
e) ¿Cuánto es el consumo a las 16:00h?

CLASE 3

CORRECCIÓN DE LA TAREA

34._ Pedro está viajando en tren. La tabla muestra la distancia expresada en Kilómetros, que le falta para llegar a su destino a medida que pasa el tiempo expresado en horas.

tiempo(h)	10	11	12	13	14
distancia(Km)	560	425	275	120	0

a) ¿Cuánto dura el viaje?
b) ¿En que hora adelanta más kilómetros?
c) ¿Hay una única distancia para cada hora?

CORRECCIÓN DE LA TAREA

35._ La tabla muestra recoge las dimensiones de diferentes rectángulos cuya superficie mide 36 metros cuadrados.

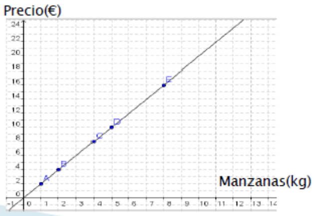
Base (m)	2	2,5		6	9		18
Altura (m)		14,4	9			3	

Completa la tabla

3. RELACIONES DADAS POR GRÁFICAS

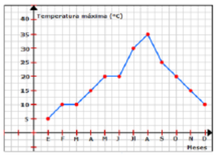
Manzanas (Kg)	1	2	3	4	5	8	X
Precio(€)	2	4	6	8	10	16	y

Variable independiente: manzanas (x)
Variable dependiente: precio (y)



3. RELACIONES DADAS POR GRÁFICAS

En una gráfica a cada valor de la magnitud del eje de abscisas le corresponde un valor del eje de ordenadas. Esta magnitud depende o está en función de la primera o depende de ella.

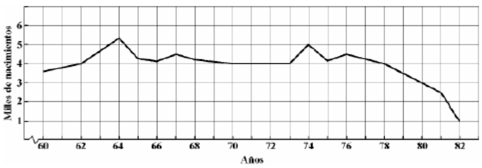


Meses	ºC
E	
F	
M	
A	
M	
J	
Jl	
A	
S	
O	
N	
D	

La gráfica representa la evolución de la temperatura máxima de una ciudad a lo largo del año

3. RELACIONES DADAS POR GRÁFICAS

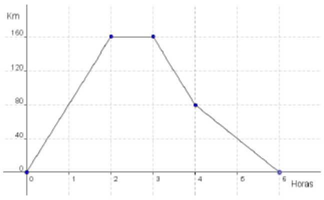
En una gráfica a cada valor de la magnitud del eje de abscisas le corresponde un valor del eje de ordenadas. Esta magnitud depende o está en función de la primera o depende de ella.



La gráfica representa la evolución del numero de nacimientos en una ciudad de España

3. RELACIONES DADAS POR GRÁFICAS

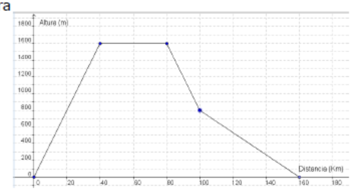
La gráfica muestra el viaje de unos amigos a Zaragoza en función del tiempo (h)



a) ¿Cuantos kilómetros recorren la primera hora y media?
b) ¿Cuánto tiempo permanecen parado?
c) ¿Cuántos kilómetros tiene el viaje de ida?
d) ¿Cuánto tiempo les cuesta hacer todo el viaje?

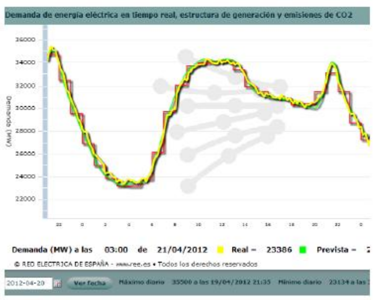
3. RELACIONES DADAS POR GRÁFICAS

La gráfica representa el recorrido de un ciclista en kilómetros en función de la altura

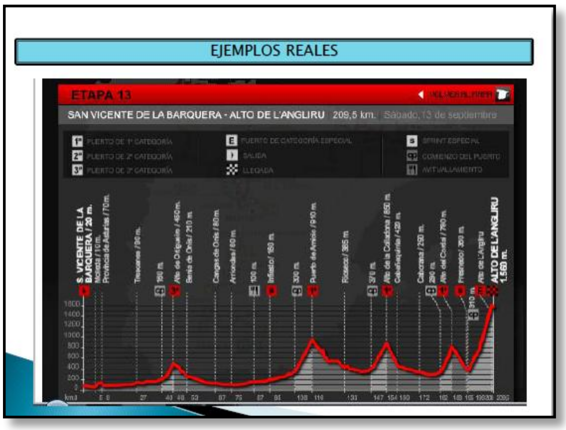


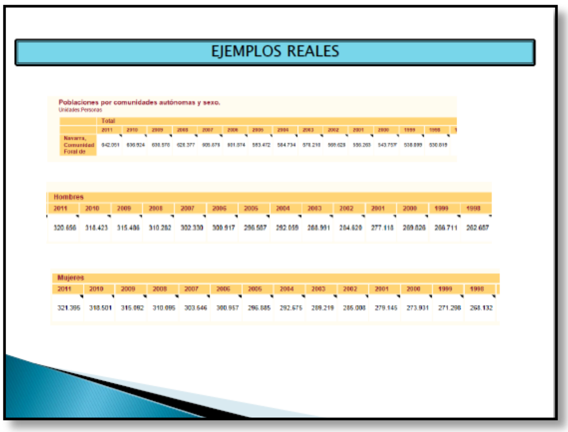
a) ¿Cuantos metros sube los primeros 20 km?
b) ¿Cuál es la altura máxima?
c) ¿Qué hace entre el kilometro 40 y el kilometro 80?
d) ¿Cuántos kilómetros tiene el recorrido?

EJEMPLOS REALES

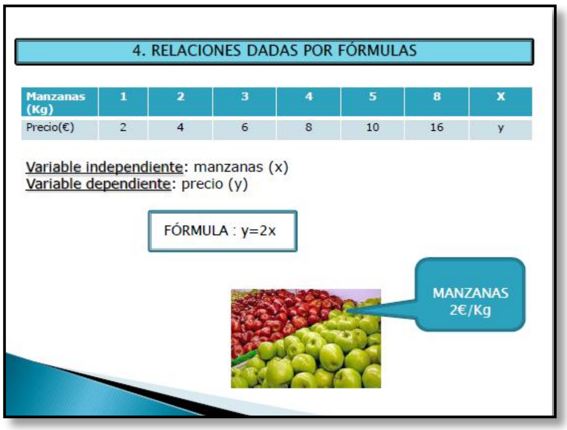


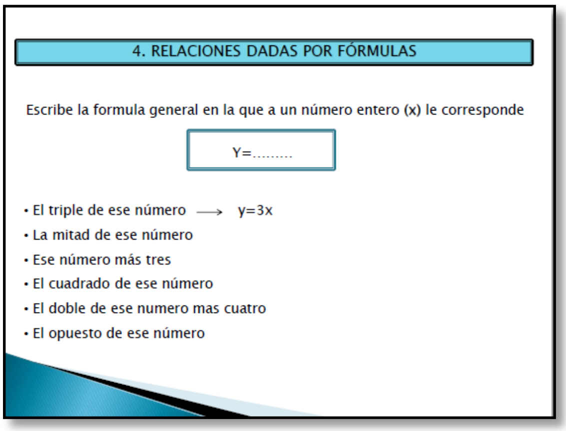

EJEMPLOS REALES
ITM Power PLC (ITM.L)
70,10 ↑1,22(1.78%)


EJEMPLOS REALES
ETAPA 13
SAN VICENTE DE LA BARQUERA - ALTO DE L'ANGLIRU 209,5 km.


EJEMPLOS REALES
Poblaciones por comunidades autónomas y sexo.
Unidades:Personas
Total
Navarra, Comunidad Foral de
Hombres
Mujeres


CLASE 4


4. RELACIONES DADAS POR FÓRMULAS
Manzanas (Kg) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | x
Precio(€) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 16 | y
Variable independiente: manzanas (x)
Variable dependiente: precio (y)
FÓRMULA : y=2x
MANZANAS 2€/Kg


4. RELACIONES DADAS POR FÓRMULAS
Escribe la formula general en la que a un número entero (x) le corresponde
Y=.........
• El triple de ese número ⟶ y=3x
• La mitad de ese número
• Ese número más tres
• El cuadrado de ese número
• El doble de ese numero mas cuatro
• El opuesto de ese número

4. RELACIONES DADAS POR FÓRMULAS

La relación entre dos magnitudes se puede expresar mediante una **igualdad** llamada fórmula.

y=2x+1

En una fórmula a partir de los valores **x** de una magnitud se obtienen valores de **y** de la otra. Esta magnitud depende o está en función de la primera.

Variable independiente: x
Variable dependiente: y

x	1	2	3	4	5	8	10
y							

4. RELACIONES DADAS POR FÓRMULAS

La relación entre dos magnitudes se puede expresar mediante una igualdad llamada fórmula.

x	1	2	5	8	10	15
y	3	6	15	24	30	45

y=3x

x	1	2	5	8	10	15
y	5	8	17	26	32	47

y=3x+2

4. RELACIONES DADAS POR FÓRMULAS

Halla el valor de la variable dependiente (y) para los siguientes valores de la variable independiente (x):
x=0; x=1; x=2; x= 3; x=-1

a) y=x+1;
 y=0+1=1; y=2+1=3; y=3+1=4; y=-1+1=0

b) y=x

c) y=x-2

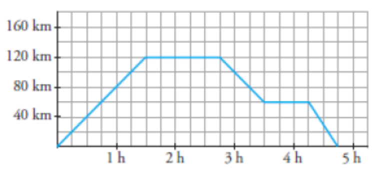
d) y=-2x

e) $y=x^2+1$

f) y=(1/2) x

CLASE 5

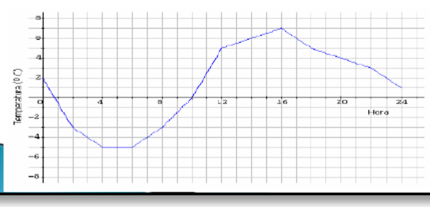
CORRECCION DE LOS EJERCICIOS



a)¿Cuántos kilómetros recorre en la primera hora y media?
b) ¿Cuánto tiempo permanece parado?
c) ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra el lugar de la segunda parada?

CORRECCION DE LOS EJERCICIOS

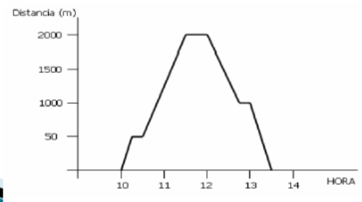
La figura siguiente muestra las temperaturas a lo largo de un día en una ciudad.
Averigua:
a) ¿Qué temperatura hizo a las 0 horas?
b) ¿A qué hora había 0 ºC?
c) ¿A qué hora se alcanzó la temperatura máxima del día? ¿Qué temperatura fue esa?
d) ¿En qué períodos del día se mantuvo la temperatura constante?
e) ¿En qué período del día hubo una temperatura por debajo de los 0 ºC?



CORRECCION DE LOS EJERCICIOS

.Marta y Alicia son compañeras de clase y quedan un día para dar un paseo. Marta sale de su casa y recoge a Alicia, que tarda un poco en bajar. Después dan un paseo y se sientan en un banco del parque a charlar.
Al regresar, se acercan a casa de otra compañera a recoger unos apuntes y allí se entretienen un rato. Después regresa a casa. La gráfica del paseo está representada en la figura de la derecha. Averigua:

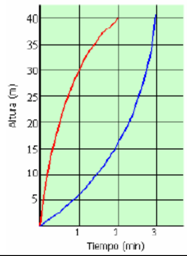
a) ¿A qué distancia están las casas de Marta y Alicia?
b) ¿Cuánto tiempo esperó Marta a que bajara Alicia?
c) ¿Cuánto tiempo tardaron en llegar al banco del parque?
d) ¿A qué hora salieron del parque?



CORRECCION DE LOS EJERCICIOS

Dos monos subieron por un poste. El primero subió lentamente al principio y después aumentó la velocidad gradualmente.

a) ¿Cuál es la gráfica de este mono?
b) ¿Qué separación había entre los monos después de un minuto?
c) ¿Qué tiempo emplearon en llegar a la mitad del poste?



CORRECCION DE LOS EJERCICIOS

La siguiente tabla muestra el número de horas que dedica Ana a la lectura durante una semana.

- ¿Qué día dedica más horas a la lectura?
- ¿Dedica algunos días el mismo número de horas a la lectura?
- ¿Qué día dedica menos horas?

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Horas	1	1,5	1,75	2	0,5	1	1,5

CORRECCION DE LOS EJERCICIOS

La siguiente tabla muestra el número de toneladas de pilas recogidas en puntos limpios en España.

- ¿Depende la cantidad de pilas de los años?
- ¿Cuántas toneladas de pilas se recogieron en el año 1997?
- ¿En qué año se recogieron menos pilas?¿y más?

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Toneladas	17	150	159	138	190	189

CORRECCION DE LOS EJERCICIOS

La siguiente tabla refleja la evolución de la población española en millones de personas, a lo largo del siglo XX.

- ¿En función de que varía la población?
- ¿Cuál era la población en el año 1990?
- ¿En qué año la población era de 28 millones de personas?
- ¿En qué años la población estuvo entre 30 y 35 millones de personas?
- ¿Qué año aumenta más la población?

Año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Población	19	20	21	24	26	28	31	34	38	39	40

CLASE 6

5. CONCEPTO DE FUNCIÓN Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Una función es una relación entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera le corresponde **un único valor** de la segunda.

$y=x+2$

$f(x)=x+2$

Variable independiente: x

Variable dependiente: y

x	1	2	5	8	10	15
y	3	4	7	10	12	17

x	1	2	5	5	10	15
y	3	6	15	20	30	45

5. CONCEPTO DE FUNCIÓN Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA

$y=x+2$

5. CONCEPTO DE FUNCIÓN Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA

$y=-2x$

CLASE 7

6. FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Las funciones cuyas gráficas pasan por el origen de coordenadas se llaman: funciones de proporcionalidad directa.

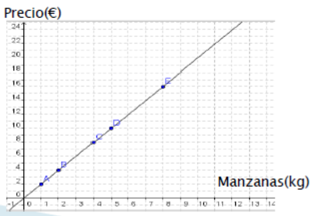
Su fórmula es: $\mathbf{y=m \cdot x}$

m: es la razón de proporcionalidad

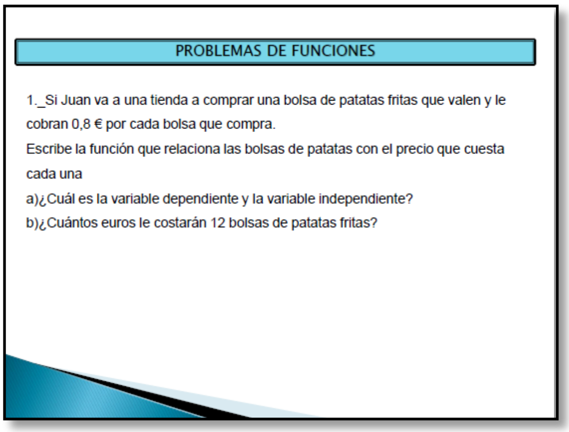
$y=2x$

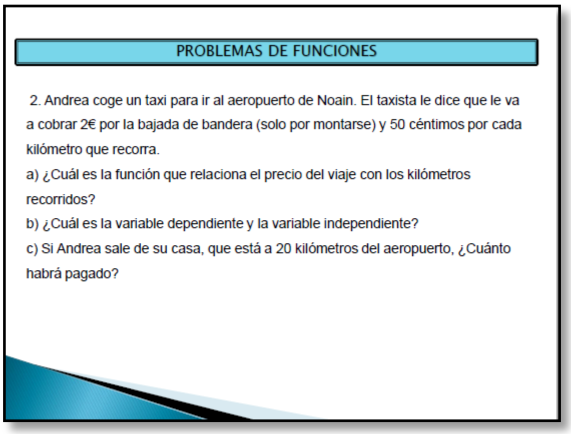
y=precio

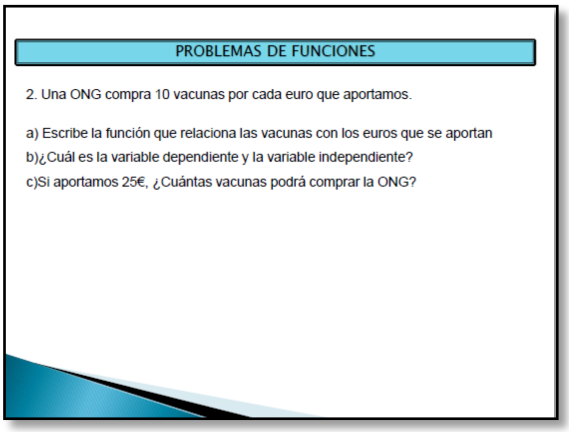
x=kilogramos de manzanas



CLASE 8


PROBLEMAS DE FUNCIONES
1._Si Juan va a una tienda a comprar una bolsa de patatas fritas que valen y le cobran 0,8 € por cada bolsa que compra.
Escribe la función que relaciona las bolsas de patatas con el precio que cuesta cada una
a)¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente?
b)¿Cuántos euros le costarán 12 bolsas de patatas fritas?


PROBLEMAS DE FUNCIONES
2. Andrea coge un taxi para ir al aeropuerto de Noain. El taxista le dice que le va a cobrar 2€ por la bajada de bandera (solo por montarse) y 50 céntimos por cada kilómetro que recorra.
a) ¿Cuál es la función que relaciona el precio del viaje con los kilómetros recorridos?
b) ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente?
c) Si Andrea sale de su casa, que está a 20 kilómetros del aeropuerto, ¿Cuánto habrá pagado?

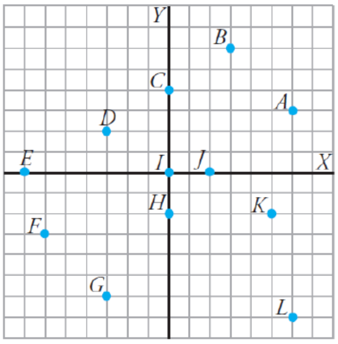

PROBLEMAS DE FUNCIONES
2. Una ONG compra 10 vacunas por cada euro que aportamos.
a) Escribe la función que relaciona las vacunas con los euros que se aportan
b)¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente?
c)Si aportamos 25€, ¿Cuántas vacunas podrá comprar la ONG?

C. Material didáctico adicional (hojas de ejercicios)

Hoja 1

TEMA 9: FUNCIONES. COORDENADAS EN EL PLANO

1. Representa los siguientes puntos: A(2, 3), B(4, 1), C(0, 4),D(-2, 6),E(0,-5), *F*(-4,-6), *G*(6, 0),H(3,-1) e indica en que cuadrante están.
2. Di las coordenadas de los siguientes puntos:

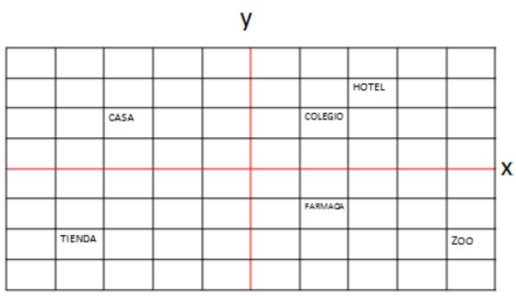


3. Leer el mensaje. Para ello representa los puntos en unos ejes de coordenadas y únelos.

PRIMERA LETRA: (1, 1), (1, 5), (2, 5), (2, 4), (3, 4) (3, 5), (4, 5), (4, 1), (3, 1), (3, 3), (2, 3), (2, 1) y (1, 1).

SEGUNDA LETRA: (6, 1), (6, 5), (9, 5), (9, 1) y (6, 1).
(7, 2), (7, 4), (8, 4), (8, 2) y (7, 2).
TERCERA LETRA: (11, 1) (11, 5), (12, 5), (12, 2), (14, 2), (14, 1) y (11, 1).
CUARTA LETRA: (16, 1), (16, 5), (19, 5), (19, 1), (18, 1), (18, 2), (17, 2), (17, 1) y (16, 1).
(17, 3), (17, 4), (18, 4), (18, 3) y (17, 3).

2._ Di las coordenadas de los lugares indicados en el siguiente plano indicando su abscisa y su ordenada
Ejemplo: HOTEL. Coordenadas: (3,2); Abscisa:3; Ordenada:2



Hoja 2

TRABAJO EN GRUPOS. TEMA 9: FUNCIONES
RELACIONES POR TABLAS

EVALUACIÓN DEL GRUPO			
NOMBRE:	EJERCICIOS:	COMPORTAMIENTO:	COLABORACION:

1._ La siguiente tabla refleja la evolución de la población española en millones de personas, a lo largo del siglo XX.

Año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Población	19	20	21	24	26	28	31	34	38	39	40

a) ¿En función de que varía la población?
b) ¿Cuál era la población en el año 1990?
c) ¿En qué año la población era de 28 millones de personas?
d) ¿En qué años la población estuvo entre 30 y 35 millones de personas?
e) ¿Qué año aumenta más la población?

2._ La siguiente tabla muestra el número de toneladas de pilas recogidas en puntos limpios en España.

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Toneladas	17	150	159	138	190	189

a) ¿Depende la cantidad de pilas de los años?
b) ¿Cuántas toneladas de pilas se recogieron en el año 1997?
c) ¿En qué año se recogieron menos pilas?¿y más?

3._ La siguiente tabla muestra el número de horas que dedica Ana a la lectura durante una semana.

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Horas	1	1,5	1,75	2	0,5	1	1,5

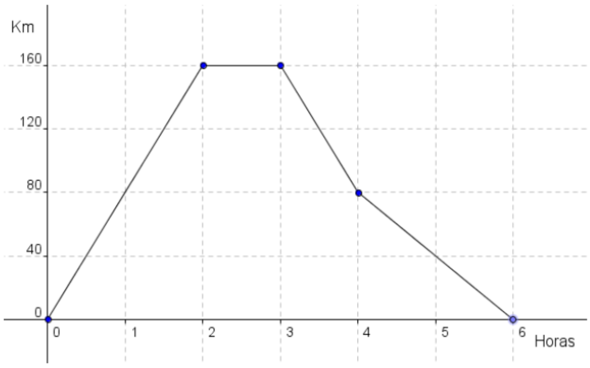
a) ¿Qué día dedica más horas a la lectura?
b) ¿Dedica algunos días el mismo número de horas a la lectura?
c) ¿Qué día dedica menos horas?

4._ Inventaros una tabla parecida a las anteriores. Hacer tres preguntas sobre los datos que habéis puesto y poner las respuestas.

Hoja 3

EJEMPLOS DE RELACIONES CON GRÁFICAS

1._ La gráfica muestra el viaje de unos amigos a Zaragoza en función del tiempo (h)



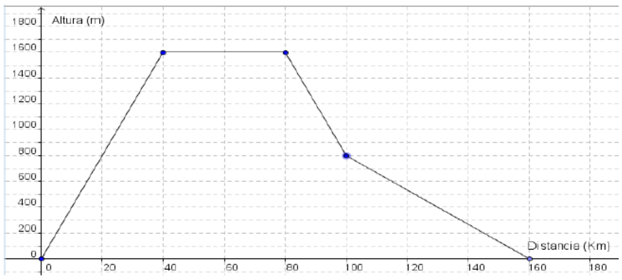
a) ¿Cuantos kilómetros recorren la primera hora y media?

b) ¿Cuánto tiempo permanecen parado?

c) ¿Cuántos kilómetros tiene el viaje de ida?

d) ¿Cuánto tiempo les cuesta hacer todo el viaje?

2._ La gráfica representa el recorrido de un ciclista en kilómetros en función de la altura



a) ¿Cuantos metros sube los primeros 20 km?

b) ¿Cuál es la altura máxima?

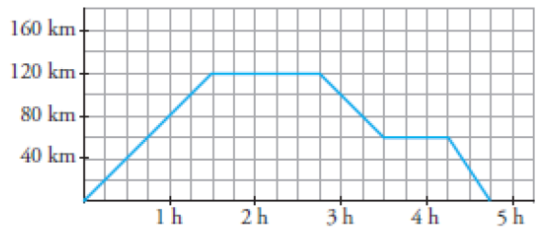
c) ¿Qué hace entre el kilometro 40 y el kilometro 80?

d) ¿Cuántos kilómetros tiene el recorrido?

Hoja 4

EJERCICIOS DEL TEMA 9 (RELACIONES DADAS POR GRÁFICAS)

1.- Describe el siguiente viaje en coche.



a)¿Cuántos kilómetros recorre en la primera hora y media?

b) ¿Cuánto tiempo permanece parado?

c) ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra el lugar de la segundaparada?

d) Recorre, en la primera hora y media, 120 km.

e) Permanece parado durante una hora y cuarto.

f) La segunda parada se encuentra a 60 km de la salida.

2._ La figura siguiente muestra las temperaturas a lo largo de un día en una ciudad.

Averigua:

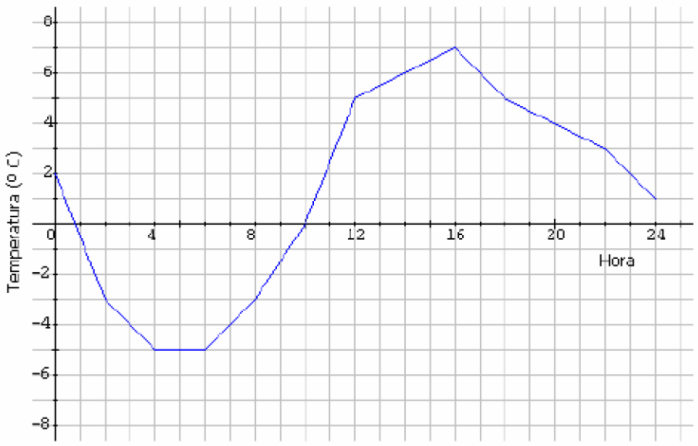
a) ¿Qué temperatura hizo a las 0 horas?

b) ¿A qué hora había 0 ºC?

c) ¿A qué hora se alcanzó la temperatura máxima del día? ¿Qué temperaturafue esa?

d) ¿En qué períodos del día se mantuvo la temperatura constante?

e) ¿En qué período del día hubo una temperatura por debajo de los 0 ºC?



Hoja 4

3._ Marta y Alicia son compañeras de clase y quedan un día para dar un paseo. Marta sale de su casa y recoge a Alicia, que tarda un poco en bajar. Después dan un paseo y se sientan en un banco del parque a charlar.

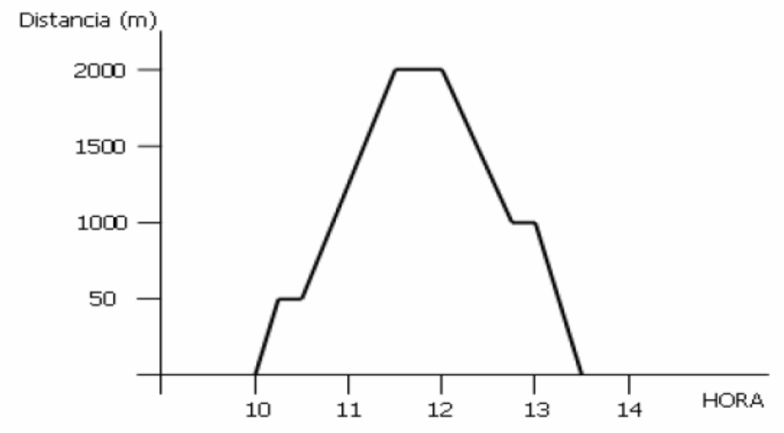
Al regresar, se acercan a casa de otra compañera a recoger unos apuntes y allí se entretienen un rato. Después regresa a casa. La gráfica del paseo está representada en la figura de la derecha. Averigua:

a) ¿A qué distancia están las casas de Marta y Alicia?

b) ¿Cuánto tiempo esperó Marta a que bajara Alicia?

c) ¿Cuánto tiempo tardaron en llegar al banco del parque?

d) ¿A qué hora salieron del parque?

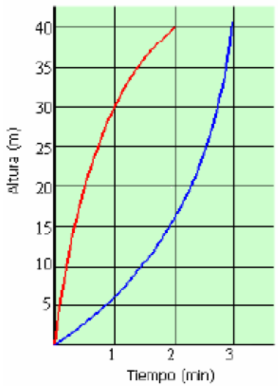


4._Dos monos subieron por un poste. El primero subió lentamente al principio y después aumentó la velocidad gradualmente.

a) ¿Cuál es la gráfica de este mono?

b) ¿Qué separación había entre los monos después de un minuto?

c) ¿Qué tiempo emplearon en llegar a la mitad del poste?



Hoja 5

TRABAJO EN PAREJAS. TEMA 9: FUNCIONES

RELACIONES POR FÓRMULAS Y CONCEPTO DE FUNCIÓN

1._ Escribe la formula general en la que a un número entero (x) le corresponde

y=......

- El triple de ese número
- La mitad de ese número
- Ese número más tres
- El cuadrado de ese número
- El doble de ese número más cuatro
- El opuesto de ese número

2._calcula el valor de la y para cada uno de los siguientes valores de la x. Sabiendo que su relación viene dada por la fórmula:

$$y=2x+1$$

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**8**	**10**
y							

3._A partir de los valores de la taba, escribe la fórmula que relaciona las dos magnitudes.

a)

x	**1**	**2**	**5**	**8**	**10**	**15**
y	3	6	15	24	30	45

Solución:

b)

x	**1**	**2**	**5**	**8**	**10**	**15**
y	5	8	17	26	32	47

Solución:

Hoja 5

4._ Halla el valor de la variable dependiente (y) para los siguientes valores de la variable independiente (x):

x=0; x=1; x=2; x= 3; x=-1

a) y=x+1;

   y=0+1=1; y=1+1=2 y=2+1=3; y=3+1=4; y=-1+1=0

b) y=x

c) y=x-2

d) y=-2x

e) $y=x^2+1$

f) $y=\frac{1}{2}x$

5._ Indica si son o no funciones las siguientes relaciones:

a) Relaciona cada número natural con su anterior y con su posterior

b) Asociamos a cada numero entero con su opuesto

c) Hacemos corresponder cada número con los dígitos que lo forman

d) Asociamos cada número entero de dos cifras con su cifra de las decenas

Hoja 6

TEMA 9: FUNCIONES. PROBLEMAS

1. Si Juan va a una tienda a comprar una bolsa de patatas fritas le cobran 0,8 € por cada bolsa que compra.
   a) Escribe la función que relaciona las bolsas de patatas con el precio que cuesta cada una
   b) ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente?
   c) ¿Cuántos euros le costarán 12 bolsas de patatas fritas?

2. Andrea coge un taxi para ir al aeropuerto de Noain. El taxista le dice que le va a cobrar 2€ por la bajada de bandera (solo por montarse) y 50 céntimos por cada kilómetro que recorra.
   a) ¿Cuál es la función que relaciona el precio del viaje con los kilómetros recorridos?
   b) ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente?
   c) Si Andrea sale de su casa, que está a 20 kilómetros del aeropuerto, ¿Cuánto habrá pagado?

3. Una ONG compra 10 vacunas por cada euro que aportamos.

   a) ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente?
   b) Si aportamos 25€, ¿Cuántas vacunas podrá comprar la ONG?

D. Cuestionario en castellano e inglés

Nombre: ....

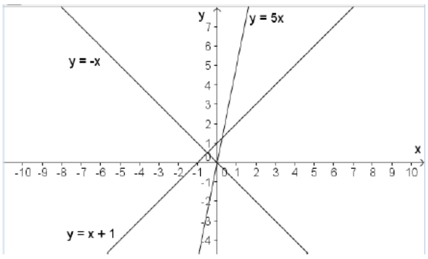
MATEMÁTICAS 1º ESO
TEMA 9 "FUNCIONES"

8/mayo/2012

1. Teoría: **(1,5 ptos.)**

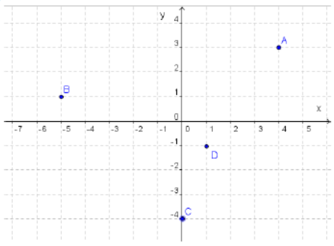
a) Define que es una función.

b) De las siguientes funciones que están representadas a continuación indica cual o cuales son funciones de proporcionalidad directa. Razona tu respuesta. Indica la razón de proporcionalidad si la hubiera.



2.

a) Escribe las coordenadas de los cuatro puntos que aparecen representados en los ejes de coordenadas. **(0,5 ptos)**



b) Representa en los ejes de coordenadas del apartado a) los siguientes puntos, indicando a que cuadrante pertenecen. E(-3,2); F(0,1);G(-6,-2); H(5,0);I(3,-2). **(0,5 ptos)**

3. La siguiente tabla muestra la evolución del paro en Navarra, en miles de personas, en el último año. Observa la tabla y responde a las siguientes preguntas. **(1 pto)**

Trimestre	1^er^ trimestre (Enero-Marzo) 2011	2º trimestre (Abril-Junio) 2011	3^er^ trimestre Julio-septiembre 2011	4º trimestre Octubre-Diciembre 2011	1^er^ trimestre Enero-Marzo 2012
Parados	41,2	39,6	35,9	42,5	50,3

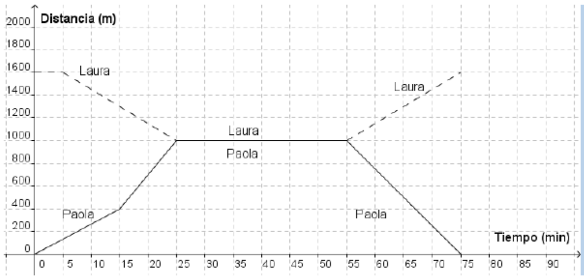
a) ¿Ha aumentado o ha disminuido el nº de parados en el último año en Navarra?¿En cuántas personas?

b) ¿Entre que trimestres ha aumentado más el nº de parados?

c) ¿En algún trimestre ha disminuido el nº de parados?

d) ¿Cuántos parados hay actualmente en Navarra?

4. La siguiente gráfica representa la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por dos amigas, Laura y Paola, desde que salen cada una de su casa. Observa la gráfica y responde a las siguientes preguntas. **(1, 5ptos)**



a) Si Paola sale de casa a las 10:00 horas ¿A qué hora ha salido Laura?
b) ¿A qué distancia de la casa de Laura se encuentran las dos amigas?
c) Antes de que se junten ¿ha andado Paola siempre a la misma velocidad?¿Por qué?
d) ¿Qué hacen las dos amigas cuando se encuentran?
e) ¿Cuánto rato están juntas?
f) ¿A dónde crees que van cuando se separan? Razona tu respuesta.
g) ¿Qué distancia en total a recorrido Laura?¿Y Paola?

5. Completa la siguiente tabla de magnitudes directamente proporcionales y escribe la fórmula de la función que las relaciona. A continuación represéntala. **(1,5 ptos)**

x	4	2	1	0	-1	-2
y			-3			6

PROBLEMAS

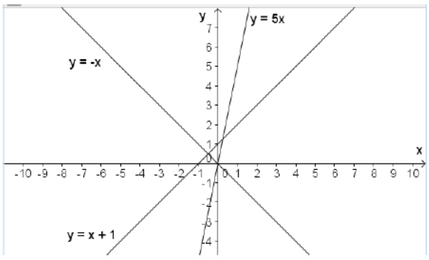
6. Juan lleva a revelar unas fotos a una maquina de revelado digital donde le cobran 20 céntimos por cada foto que revela. **(1,5 ptos)**
a) Escribe la formula que se deduce del enunciado anterior
b) Representa gráficamente la función
c) ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente?
d) ¿Cuántos euros le costará revelar 12 fotos?

7. Lucía ha llamado a su amigo Luis. La tarifa que tiene en el móvil es de 15 céntimos por el establecimiento de llamada y 5 céntimos por cada minuto de conversación. **(2 ptos)**
a) ¿Cuál es la función que relaciona el precio de la llamada con los minutos de conversación?
b) Si lucía ha estado hablando durante 20 minutos, ¿Cuánto habrá pagado?

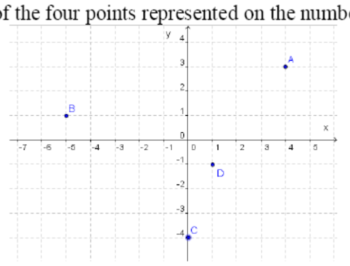
Mathematics 1º ESO
Unit 9: Functions
8th May 2012

NAME: ....

1. Theory: **(1.5 pts)**
   a) Define a function.
   b) State which of the following functions are direct proportion functions. Reason your answer. Write the ratio proportion if it exists.



2.
   a) Write the coordinates of the four points represented on the number line. **(0.5 pts)**



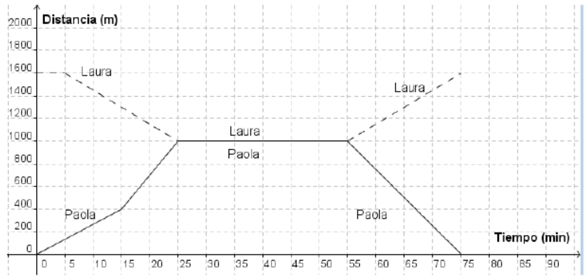
   b) Plot on the number line above the following points indicating in which quadrant they belong. E (-3,2); F (0,1); G (-6,-2); H (5,0); I (3,-2). **(0.5 pts)**

3. The following table shows the number of unemployed people in Navarre (in thousands) in the last year. Observe the table and answer the following questions. **(1 pt)**

Term	1st term (January-March) 2011	2nd term (April-June) 2011	3rd term (July-September) 2011	4th term (October-December) 2011	1st term January-March 2012
Nº of people Unemployed	41.2	39.6	35.9	42.5	50.3

   a) Has the number of people unemployed increased or decreased in the last year in Navarre? In how many people?
   b) In between which terms has the unemployment increased more?
   c) Has the number of people unemployed decreased in any term?
   d) How many people unemployed are there at the moment?

4. The following graph shows the relation between the time and the distance covered by two friends (Laura and Paola) since they leave their house. Observe the graph and answer the following questions. **(1.5 pts)**



a) If Paola leaves her house at 10:00, at what time did Laura leave her house?
b) At what distance from Laura's house are the two friends?
c) Before they meet, has Paola always walked at the same speed? Why?
d) What do the two friends do when they meet?
e) How long are they together?
f) Where do you think they go when they leave? Reason your answer.
g) What is the total distance that Laura covers? and Paola?

5. Complete the following table that shows direct proportion magnitudes and write the formula. Graph the function. **(1.5 pts)**

x	4	2	1	0	-1	-2
y			-3			6

PROBLEMS

6. Juan takes his photos to be printed at a photo store. They charge him 20 cents for each photo printed. **(1.5 pts)**
a) Write the formula.
b) Graph the function.
c) What is the dependent and independent variable?
d) How many euros does it cost him to print 12 photos?

7. Lucia has called her friend Luis. The cost of the phone call is a flat fee of 15 cents per call and 5 cents per minute. **(2 pts)**
a) What is the function that relates the price of the phone call with the minutes talked?
b) If Lucia has been talking during 20 minutes, how much will she pay?

E. Resultados de la experimentación por clases

RESULTADOS CLASE A:

Sujeto	Nota	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17
1	9	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
2	8	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
3	7	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
4	6,8	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
5	6,65	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
6	6,35	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
7	5,4	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
8	5,35	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
9	5	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0
10	5	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
11	4,65	0	0	0	1		1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
12	3,9	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
13	3,75	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
14	3,75	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
15	3,65	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
16	2,4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
17	1,8	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
18	1,25	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

RESULTADOS CLASE B:

Sujeto	Nota	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17
1	9,60	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
2	8,65	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0
3	8,60	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
4	8,00	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
5	7,70	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
6	7,40	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
7	6,80	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
8	6,75	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
9	6,50	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
10	6,50	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
11	6,40	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
12	5,60	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
13	5,20	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
14	3,80	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
15	3,60	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	3,15	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
17	2,50	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

RESULTADOS CLASE C:

Sujeto	Nota	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17
1	9,5	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
2	9,15	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
3	6,45	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
4	5,9	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
5	5,75	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
6	5	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
7	5	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
8	4,75	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
9	4,75	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
10	4,65	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
11	3,5	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
13	2,75	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

RESULTADOS CLASE D (en inglés):

Sujeto	Nota	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17
1	9,35	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
2	7,85	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
3	7,8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
4	7,5	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
5	7,5	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
6	7,45	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
7	6,75	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
8	6,35	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
9	6,2	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
10	5,9	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
11	5,6	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
12	5,5	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
13	5,25	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
14	3,65	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
15	3,4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
16	1,6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
Miguel R. Wilhelmi, Departamento de Matemáticas