Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Resolución de problemas e interpretación de sus gráficas de funciones polinómicas por estudiantes de 4º de ESO

Gema Ancho Narvaiz

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Página

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar las funciones polinómicas: resolución de problemas e interpretación de sus gráficas por estudiantes de 4º de ESO

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre funciones polinómicas, que se ha puesto en marcha en un aula de 4º de ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido ad hoc, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

Se debe aclarar que debido a que los alumnos no pudieron realizar un cuestionario, los resultados se basan en la experiencia durante la docencia de las clases.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

.

Parte I:

Las funciones polinómicas en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones polinómicas en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a las funciones en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 4º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

.

Capítulo 1
Las funciones polinómicas en el currículo vigente

En este capítulo se analizan los contenidos mínimos del tercer ciclo de Educación Primaria, Educación Secundaria y Bachillerato del currículo oficial que se encuentran especificados en el Real Decreto 1513/2006, Real Decreto 1631/2006 y Real Decreto 1467/2007, respectivamente, y que están relacionados con las funciones polinómicas.

Estos contenidos están agrupados por descriptores comunes: ecuaciones, geometría, representación e interpretación gráfica, análisis de funciones, análisis de gráficas, tablas de valores, situaciones cotidianas, gráficos estadísticos, uso de tecnologías, límites y derivadas.

Hay que aclarar que los contenidos que se han escogido pueden resultar comunes a cualquier tema sobre funciones, lo cual es lógico ya que para estudiar la función polinómica de segundo grado es necesario tener conocimientos sobre las propiedades de las funciones y también es necesario estudiar otro tipo de funciones como la lineal o logarítmica para diferenciarlas. Además, la función cuadrática exige el conocimiento de las ecuaciones de segundo grado así como sus métodos de resolución.

1.1. Contenidos en tercer ciclo de Primaria

Descriptor	Contenido
Ecuaciones	
Geometría	*Bloque 3. Geometría. La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros.* -Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos. -Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado.
Representación e interpretación gráfica	*Bloque 3. Geometría. La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros.* -Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros… -La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
Gráficos estadísticos	*Bloque 6. Estadística y probabilidad.* Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. -Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. -Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. -Obtención y utilización de información para la realización de gráficos.
Análisis de funciones	
Análisis de gráficas	
Tablas de valores. Organización y análisis de datos	
Situaciones cotidianas	
Uso de tecnologías	
Límites	
Derivadas	

1.2. Contenidos en ESO

Descriptor	Contenido 1º
Ecuaciones	*Bloque 3. Álgebra.* -Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos. -Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. -Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. -Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas. -Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.
Geometría	*Bloque 4. Geometría.* -Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.
Representación e interpretación gráfica	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas. -Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. -Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación.
Análisis de funciones	
Análisis de gráficas	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. -Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.
Tablas de valores. Organización y análisis de datos	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* Organización de datos en tablas de valores.
Situaciones cotidianas	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.
Gráficos estadísticos	*Bloque 6. Estadística y probabilidad* - Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.
Uso de tecnologías	
Límites	
Derivadas	

Descriptor	Contenido 2º
Ecuaciones	*Bloque 3. Álgebra.* -El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. -Obtención del valor numérico de una expresión algebraica. Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. -Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución. -Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.
Geometría	*Bloque 4. Geometría.* -Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.
Representación e interpretación gráfica	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla. -Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
Análisis de funciones	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. -Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos.
Análisis de gráficas	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica.
Tablas de valores. Organización y análisis de datos	*Bloque 5. Funciones y gráficas* -Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.
Situaciones cotidianas	
Gráficos estadísticos	*Bloque 6. Estadística y probabilidad* - Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.
Uso de tecnologías	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas. *Bloque 6. Estadística y probabilidad* -Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.
Límites	
Derivadas	

Descriptor.	Contenido 3º
Ecuaciones	*Bloque 3. Álgebra.* -Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico. -Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. -Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. -Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. -Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
Geometría	*Bloque 4. Geometría.* -Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.
Representación e interpretación gráfica	
Análisis de funciones	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.
Análisis de gráficas	*Bloque 5. Funciones y gráficas* -Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. -Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. -Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.
Tablas de valores. Organización y análisis de datos	*Bloque 5. Funciones y gráficas* -Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
Situaciones cotidianas	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
Gráficos estadísticos	Bloque 6. Estadística y probabilidad -Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. -Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.
Uso de tecnologías	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas. *Bloque 6. Estadística y probabilidad* -Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.
Limites	
Derivadas	

Descriptor	Contenido 4º (Opción A)	Contenido 4º (Opción B)
Ecuaciones	*Bloque 3. Álgebra.* -Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos. -Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.	*Bloque 3. Álgebra.* -Manejo de expresiones literales. Utilización de igualdades notables. -Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
Geometría		
Representación e interpretación gráfica		
Análisis de funciones	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo -Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales. -Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. -Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales. -Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales. - Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. -Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.
Análisis de gráficas		
Tablas de valores. Organización y análisis de datos		
Situaciones cotidianas	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. -Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Descriptor	Contenido 4º (Opción A)	Contenido 4º (Opción B)
Gráficos estadísticos	*Bloque 6. Estadística y probabilidad.* -Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja de cálculo. -Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.	*Bloque 6. Estadística y probabilidad.* -Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. -Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.
Uso de tecnologías	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* -Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.
Limites		
Derivadas		

1.3 Contenidos en Bachillerato

Descriptor	Matemáticas I	Matemáticas II
Ecuaciones	*1. Aritmética y álgebra.* –Números reales. Valor absoluto. Desigualdades. Distancias entre la recta real. Intervalos y entornos. –Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones. –Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas.	
Geometría	*2. Geometría.* -Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. –Idea de lugar geométrico en el plano. -Cónicas.	
Representación e interpretación gráfica	*3. Análisis.* -Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.	*3. Análisis.* – Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. –Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.

Descriptor	Matemáticas I	Matemáticas II
Análisis de funciones	*3. Análisis*. -Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. –Dominio, recorrido y extremos de una función. –Operaciones y composición de funciones.	2. *Análisis*. – Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.
Análisis de gráficas		
Tablas de valores. Organización y análisis de datos		
Situaciones cotidianas		
Gráficos estadísticos		
Uso de tecnologías		
Límites	*3. Análisis*. – Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.	*3. Análisis*. - Concepto de límite de una función. Cálculo de límites.
Derivadas	*3. Análisis.* – Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo.	*3. Análisis.* –Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. -Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización.

Descriptor	Matemáticas I CCSS	Matemáticas I CCSS
Representación e interpretación gráfica	*2. Análisis.* -Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos.	*2. Análisis.* -Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales. -Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica.
Análisis de funciones	*2. Análisis.* -Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales. -Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos. -Tasa de variación. Tendencias.	
Análisis de gráficas		
Tablas de valores. Organización y análisis de datos		
Situaciones cotidianas		
Gráficos estadísticos	*2. Análisis*. -Métodos estadísticos. Tablas y gráficos. Parámetros estadísticos de localización, de dispersión y de posición. -Distribuciones bidimensionales. -Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados.	
Uso de tecnologías		
Límites		*2. Análisis.* -Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función. -Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información.
Derivadas		*2. Análisis.* -Aplicación de las derivadas al estudio de las propiedades locales de funciones habituales y a la resolución de problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía.

Capítulo 2
Los criterios de evaluación de funciones polinómicas en el currículo vigente

En este capítulo se recogen los criterios de evaluación correspondientes a los criterios identificados en el capítulo anterior.

2.1.Criterios de evaluación en tercer ciclo de Primaria

Descriptor	Criterio
Geometría	5. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno
Representación e interpretación gráfica	6. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.
Gráficos estadísticos	7. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... y de comprender y comunicar la información así expresada. Además, se comprobará que se empieza a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en la experiencia.

2.1.Criterios de evaluación en ESO

Descriptor	Criterio1º	Criterio 2º
Ecuaciones	3. Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas. Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida. Se pretende, asimismo, valorar el uso del signo igual como asignador y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Forma parte de este criterio también la obtención del valor numérico en fórmulas simples con una sola letra.	3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.
Geometría	4. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.	
Representación e interpretación gráfica	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.

Descriptor	Criterio 1º	Criterio 2º
Análisis de funciones		3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.
Análisis de gráficas	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.
Tablas de valores. Organización y análisis de datos	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.

Descriptor	Criterio 1º	Criterio 2º
Situaciones cotidianas	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	
Gráficos estadísticos	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	6. Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas. Se trata de verificar, en casos sencillos y relacionados con su entorno, la capacidad de desarrollar las distintas fases de un estudio estadístico: formular la pregunta o preguntas que darán lugar al estudio, recoger la información, organizarla en tablas y gráficas, hallar valores relevantes (media, moda, valores máximo y mínimo, rango) y obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos. También se pretende valorar la capacidad para utilizar la hoja de cálculo, para organizar y generar las gráficas más adecuadas a la situación estudiada.
Uso de tecnologías		

Descriptor	Criterio 3º
Ecuaciones	2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos. A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas. precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.
Geometría	4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. Con este criterio se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, para que puedan ser utilizados como un recurso más de análisis en una formación natural o en una creación artística. El reconocimiento de los movimientos lleva consigo la identificación de sus elementos característicos: ejes de simetría, centro y amplitud de giro, etc. Igualmente los lugares geométricos se reconocerán por sus propiedades, no por su expresión algebraica. Se trata de evaluar, además, la creatividad y capacidad para manipular objetos y componer
Representación e interpretación gráfica	
Análisis de funciones	
Análisis de gráficas	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.
Tablas de valores. Organización y análisis de datos	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.

Descriptor	Criterio 3º
Situaciones cotidianas	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.
Gráficos estadísticos	6. Elaborar e interpretar informaciones estadísticas teniendo en cuenta la adecuación de las tablas y gráficas empleadas, y analizar si los parámetros son más o menos significativos. Se trata de valorar la capacidad de organizar, en tablas de frecuencias y gráficas, información de naturaleza estadística, atendiendo a sus aspectos técnicos, funcionales y estéticos (elección de la tabla o gráfica que mejor presenta la información), y calcular, utilizando si es necesario la calculadora o la hoja de cálculo, los parámetros centrales (media, mediana y moda) y de dispersión (recorrido y desviación típica) de una distribución. Asimismo, se valorará la capacidad de interpretar información estadística dada en forma de tablas y gráficas y de obtener conclusiones pertinentes de una población a partir del conocimiento de sus parámetros más representativos.
Uso de tecnologías	

Descriptor	Criterio 4º (Opción A)	Criterio 4º (Opción B)
Situaciones cotidianas	3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este criterio va dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación. de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos y mediante el uso adecuado de las tecnologías de la información.	2. Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos para resolver problemas. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad de usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas y utilizar sus métodos en la resolución de problemas mediante inecuaciones, ecuaciones y sistemas.
Geometría		
Representación e interpretación gráfica		
Uso de tecnologías		

Descriptor	Criterio 4º (Opción A)	Criterio 4º (Opción B)
Análisis de funciones	4. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta. 5. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica..
Análisis de gráficas	6. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.

Descriptor	Criterio 4º (Opción A)	Criterio 4º (Opción B)
Tablas de valores. Organización y análisis de datos	6. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.	
Situaciones cotidianas	6. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.
Gráficos estadísticos	7. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales correspondientes a distribuciones discretas y continuas, y valorar cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadasSe trata de valorar la capacidad de organizar la información estadística en tablas y gráficas y calcular los parámetros que resulten más relevantes con ayuda de la calculadora o la hoja de cálculo. En este nivel se pretende, además, que tengan en cuenta la representatividad y la validez del procedimiento de elección de la muestra y analicen la pertinencia de la generalización de las conclusiones del estudio a toda la población.	5. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales en distribuciones unidimensionales y valorar cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas. En este nivel adquiere especial significado el estudio cualitativo de los datos disponibles y las conclusiones que pueden extraerse del uso conjunto de los parámetros estadísticos. Se pretende, además, que se tenga en cuenta la representatividad y la validez del procedimiento de elección de la muestra y la pertinencia de la generalización de las conclusiones del estudio a toda la población.

2.2.Criterios de evaluación en Bachillerato

Descriptor	Criterio Matemáticas I	Criterio Matemáticas II
Ecuaciones		
Geometría	3. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones. La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el plano.	
Representación e interpretación gráfica	5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente. Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.	

Descriptor	Criterio Matemáticas I	Criterio Matemáticas II
Análisis de funciones	4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global.	3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente. 4. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita. Se pretende comprobar con este criterio que los alumnos son capaces de utilizar los conceptos básicos del análisis y que han adquirido el conocimiento de la terminología adecuada y los aplican adecuadamente al estudio de una función concreta. 6. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables. Este criterio pretende evaluar la capacidad para medir el área de una región plana mediante el cálculo integral, utilizando técnicas de integración inmediata, integración por partes y cambios de variables sencillos.
Análisis de gráficas	4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global. 5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente.	

	Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.	
Tablas de valores. Organización y análisis de datos		
Situaciones cotidianas		
Gráficos estadísticos	6. Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal. En este criterio se pretende medir la capacidad para determinar la probabilidad de un suceso, utilizando diferentes técnicas, analizar una situación y decidir la opción más conveniente. También se pretende comprobar la capacidad para estimar y asociar los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden.	
Uso de tecnologías		
Límites		5. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido.

Descriptor	Criterio Matemáticas I	Criterio Matemáticas II
Derivadas		5. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido.

Descriptor	Criterio Matemáticas I CCSS	Criterio Matemáticas II CCSS
Ecuaciones		
Geometría	3. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones. La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el plano.	
Representación e interpretación gráfica	5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente. Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.	

Descriptor	Criterio Matemáticas I CCSS	Criterio Matemáticas II CCSS
Análisis de funciones	4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global.	3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente. 4. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita. Se pretende comprobar con este criterio que los alumnos son capaces de utilizar los conceptos básicos del análisis y que han adquirido el conocimiento de la terminología adecuada y los aplican adecuadamente al estudiode una función concreta. 6. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables. Este criterio pretende evaluar la capacidad para medir el área de una región plana mediante el cálculo integral, utilizando técnicas de integración inmediata, integración por partes y cambios de variables sencillos.
Análisis de gráficas	4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global. 5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas	

	analítica y gráficamente. Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.	
Tablas de valores. Organización y análisis de datos		
Situaciones cotidianas		
Gráficos estadísticos	6.Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal. En este criterio se pretende medir la capacidad para determinar la probabilidad de un suceso, utilizando diferentes técnicas, analizar una situación y decidir la opción más conveniente. También se pretende comprobar la capacidad para estimar y asociar los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden.	
Uso de tecnologías		
Límites		5. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido.

Descriptor	Criterio Matemáticas I CCSS	Criterio Matemáticas II CCSS
Derivadas		5. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido.

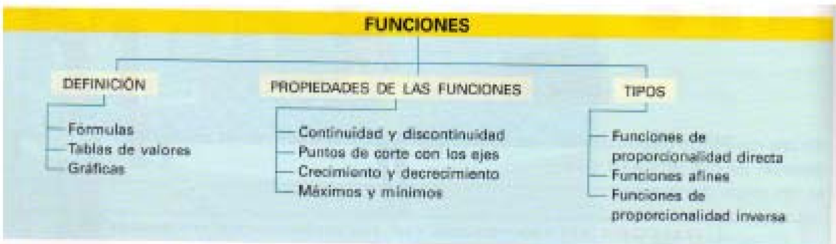
Capítulo 3
Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones polinómicas en el currículo vigente

En este capítulo se analizan los libros de textos desde 2º de ESO hasta 2º de Bachillerato que se utilizan actualmente en el centro donde tuvo lugar mi período de prácticas docentes, identificando los ejercicios, problemas y cuestiones tipo que podemos encontrar en los mismos.

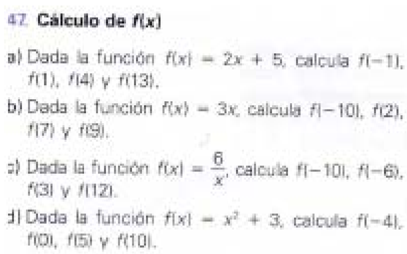
3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones polinómicas en 2º de ESO

Para analizar los ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones cuadráticas y gráficas que se pueden encontrar en 2º de ESO, utilizo como referencia el libro que actualmente se utiliza en el centro. Se trata del libro *Múltiplo Matemáticas, Proyecto Conecta 2.0 de la editorial SM.*

En este curso todavía no se trata el tema de la función cuadrática pero sí hay un tema dedicado a las funciones, el tema 7, en el que se estudia el concepto, propiedades y tipos de funciones, detallado de la siguiente manera:



Una de las actividades tipo que aparecen es en la que se pide calcular la imagen de una función en determinados puntos a partir de la expresión matemática o de la función gráfica. Un ejemplo de ello puede encontrarse en las actividades 47 y 52 de la página 156.



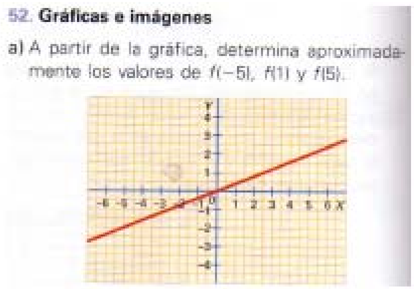
47. **Cálculo de $f(x)$**

a) Dada la función $f(x) = 2x + 5$, calcula $f(-1)$, $f(1)$, $f(4)$ y $f(13)$.

b) Dada la función $f(x) = 3x$, calcula $f(-10)$, $f(2)$, $f(7)$ y $f(9)$.

c) Dada la función $f(x) = \frac{6}{x}$, calcula $f(-10)$, $f(-6)$, $f(3)$ y $f(12)$.

d) Dada la función $f(x) = x^2 + 3$, calcula $f(-4)$, $f(0)$, $f(5)$ y $f(10)$.



Otro tipo de ejercicio está relacionado con conceptos que se han visto durante el tema como: fórmula de la función, tabla de valores y gráfica. Por ejemplo la actividad 32 de la página 151.

32. Un coche consume aproximadamente 6,5 litros de gasolina cada 100 km.

a) Escribe la fórmula de la función para calcular los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos.

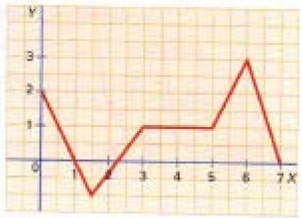
b) Elabora la tabla de valores y dibuja una gráfica que llegue a 650 km.

c) Suponemos ahora que el coche tiene 50 litros de gasolina en el depósito. Dibuja la gráfica de la función que calcula los litros que quedan en el depósito a partir de los kilómetros recorridos.

También resulta habitual encontrar ejercicios donde el alumno tiene que describir características concretas de la función o se le pide que realice una interpretación de los valores de dicha función. Un ejemplo son las actividades 62 de la página 158 y 12 de la página 143.

62. **Gráfica**

Observa la siguiente gráfica:



a) ¿Es continua?

b) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes de coordenadas?

c) Señala las zonas de crecimiento, decrecimiento y sus máximos y mínimos.

12. a) Las tablas de valores describen las puntuaciones de dos equipos de baloncesto a lo largo de un partido. Dibuja las gráficas correspondientes en los mismos ejes. Utiliza un color diferente para cada equipo.

Minuto	5	10	15	20	25	30
Equipo A	6	17	24	31	45	59

Minuto	5	10	15	20	25	30
Equipo B	8	19	24	30	42	55

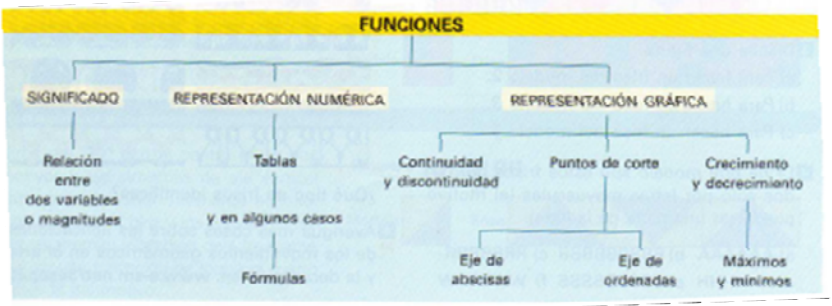
b) Imagina que eres el locutor de una emisora de radio. Narra lo sucedido a lo largo de todo el partido.

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones polinómicas en 3º de ESO

Para analizar los ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones cuadráticas y gráficas que se pueden encontrar en 3º de ESO, utilizo como referencia el libro que actualmente se utiliza en el centro. Se trata del libro *Múltiplo Matemáticas, Proyecto Conecta 2.0 de la editorial SM.*

En este curso todavía no se trata el tema de la función cuadrática. En este libro aparecen dos temas dedicados a las funciones: el 11 Funciones y el 12 Funciones lineales y afines.

El tema 11 supone un repaso de los contenidos del curso anterior, y como contenido nuevo aparece el dominio de la función. Se desarrolla siguiendo el siguiente esquema:



Una actividad tipo es la que pide calcular el dominio de determinadas funciones y sus puntos de corte con los ejes. Por ejemplo, los ejercicios 33 y 43 de la página 231.

33. Dominio y fórmulas

Indica el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x$ b) $f(x) = 5x + \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{3x - 6}{5}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

34. Corte con los ejes

Halla los puntos de corte con los ejes de:

a) $f(x) = 7x - 12$ b) $f(x) = 5x$

c) $f(x) = 3 - 2x$ d) $f(x) = 15x + 5$

Un segundo tipo de actividades consiste en completar una tabla de valores de una función y, a partir de ella, dibujar su gráfica y responder a preguntas sobre el comportamiento dicha función. Un ejemplo de este tipo es la actividad 39 de la página 232. Aquí el alumno comienza a familiarizarse con la función cuadrática.

39. Función cuadrática

Dada la función $f(x) = 0{,}25x^2 - 3x + 8$:

a) Completa la tabla y represéntala gráficamente.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Indica los máximos y los mínimos, si los hay.

Por otro lado se propone interpretar las gráficas de funciones. Un caso concreto lo podemos encontrar en la actividad 45 de la página 233.

45. El IPC

Esta es la gráfica del IPC (índice de precios al consumo) de 2005.

a) Indica qué magnitudes relaciona la gráfica.

b) ¿La relación entre estas magnitudes puede considerarse una función?

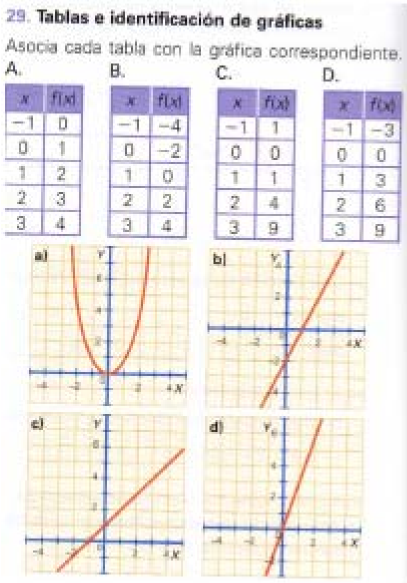
c) ¿La gráfica es continua o discontinua?

d) ¿Hay algún máximo? ¿Y algún mínimo?

e) Escribe la tabla de valores correspondiente a la gráfica.

f) ¿Esta función puede expresarse con una fórmula que nos permita predecir la evolución de los precios en el futuro? Razona la respuesta.

Finalmente, se plantean ejercicios a los alumnos buscando relacionar la expresión analítica o tabla de valores de una función con su gráfica correspondiente. Un ejemplo es la actividad 29 y 30 de la página 230.



29. Tablas e identificación de gráficas

Asocia cada tabla con la gráfica correspondiente.

A.

x	$f(x)$
−1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

B.

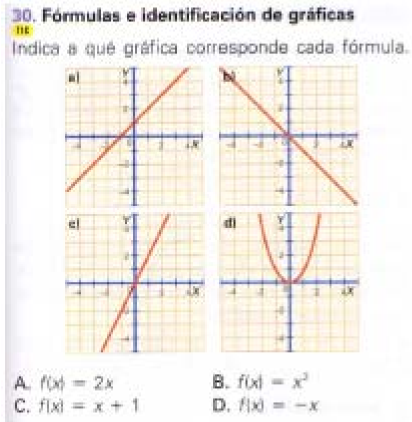
x	$f(x)$
−1	−4
0	−2
1	0
2	2
3	4

C.

x	$f(x)$
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

D.

x	$f(x)$
−1	−3
0	0
1	3
2	6
3	9



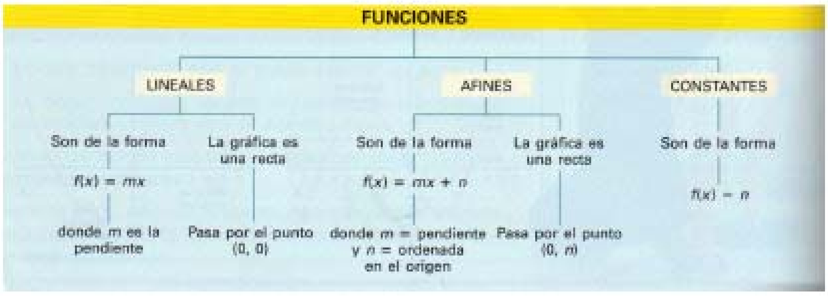
30. Fórmulas e identificación de gráficas

Indica a qué gráfica corresponde cada fórmula.

A. $f(x) = 2x$ B. $f(x) = x^2$

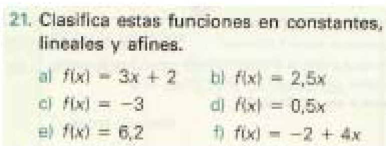
C. $f(x) = x + 1$ D. $f(x) = -x$

El tema 12 trata las funciones lineales, afines y constantes. La diferencia respecto del curso anterior es que se tratan las funciones constantes y se introduce el concepto de pendiente de la recta. El esquema que se sigue en el libro es el siguiente:



Las actividades tipo de este tema intentan que el alumno se capaz de:

1.- Diferenciar las funciones lineales, afines y constantes. Por ejemplo la actividad 21 de la página 245.



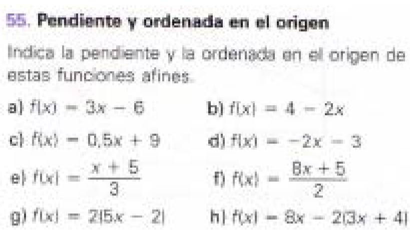
21. Clasifica estas funciones en constantes, lineales y afines.

a) $f(x) = 3x + 2$ b) $f(x) = 2{,}5x$

c) $f(x) = -3$ d) $f(x) = 0{,}5x$

e) $f(x) = 6{,}2$ f) $f(x) = -2 + 4x$

2.- Identificar la pendiente y la ordenada en el origen de una función dada. Ejemplo, ejercicio 55 de la página 253.



55. Pendiente y ordenada en el origen

Indica la pendiente y la ordenada en el origen de estas funciones afines.

a) $f(x) = 3x - 6$ b) $f(x) = 4 - 2x$

c) $f(x) = 0{,}5x + 9$ d) $f(x) = -2x - 3$

e) $f(x) = \frac{x+5}{3}$ f) $f(x) = \frac{8x+5}{2}$

g) $f(x) = 2(5x - 2)$ h) $f(x) = 8x - 2(3x + 4)$

3.- Determinar la fórmula de una función a partir de una serie de datos. Ejemplo, actividad 18 de la página 245.

18. Escribe la fórmula de las siguientes funciones afines.

a) El peso de un camión de 3.830 kg cargado de sacos de 25 kg en función del número de sacos que transporta.

b) El beneficio de una compañía de teatro en función del número total de espectadores de una obra, sabiendo que ha invertido 22.500 € y que vende las entradas a 16,25 €.

c) Los litros de agua que quedan en un depósito de 24.000 litros que pierde 0,25 litros cada minuto, en función de los minutos que hace que se está vaciando.

8. En un periódico encontramos el siguiente cambio de monedas:

1 € = 1,243 $

a) La función que permite pasar de euros a dólares, ¿es lineal? Si lo es, escribe su fórmula.

b) ¿Cuál es la fórmula de la función que permite pasar de dólares a euros?

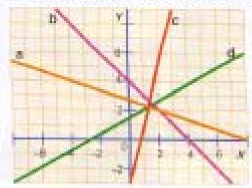
4.- Escribir la ecuación de la recta conociendo dos puntos por donde pasa, a través de su representación gráfica o mediante la tabla de valores. Por ejemplo, el ejercicio 2 de la página 241,el 12 de la página 243 y el 60 de la página 253.

12. Dibuja la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (2, −6) y escribe la fórmula de la función lineal que tiene esta gráfica.

2. Halla la fórmula de la función lineal que tiene esta tabla de valores:

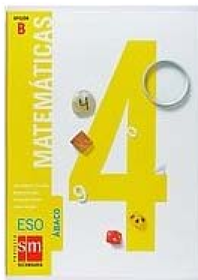
x	−5	−2,5	−1,25	0	1,25	2,5	5
f(x)	−17	−8,5	−4,25	0	4,25	8,5	17

Escribe la fórmula que corresponde a cada gráfica.



3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones polinómicas en 4º de ESO

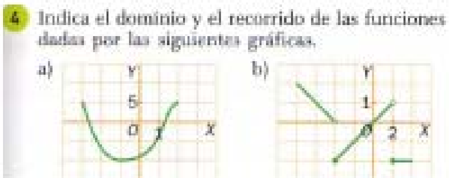
Para analizar los ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones cuadráticas y gráficas que se pueden encontrar en 4º de ESO, utilizo como referencia el libro que actualmente se utiliza en el centro. Se trata del libro *Matemáticas Opción B, Proyecto Ábaco de la editorial SM.*



El tema 10 está dedicado a las propiedades de las funciones: dominio, recorrido, crecimiento, etc. En el tema 11 se analiza la función polinómica por primera vez y trata la función definida a trozos.

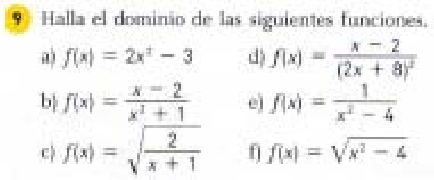
El tema 10 supone una profundación en los contenidos estudiados el curso anterior y se añaden conceptos como simetría, tasa de variación media en un intervalo dado y límite.

Así, un ejercicio tipo que se encuentra en este tema es el que pide al alumno calcular el dominio de funciones dadas gráficamente o a partir de su expresión algebraica Un ejemplo de ello lo encontramos en la página 175, ejercicios 4 y 9.



4 Indica el dominio y el recorrido de las funciones dadas por las siguientes gráficas.

a) b)



9 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$

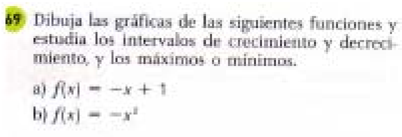
c) $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$

d) $f(x) = \frac{x-2}{(2x+8)^2}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

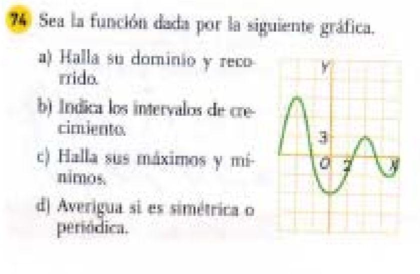
Además del dominio, se representa gráficamente una función analizando sus extremos relativos, crecimiento y decrecimiento. Por otro lado, a partir de una gráfica se determinan su crecimiento, puntos críticos, simetría, etc Por ejemplo, ejercicios 69 y 74 de la página 188.



69 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones y estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos o mínimos.

a) $f(x) = -x + 1$

b) $f(x) = -x^2$



74 Sea la función dada por la siguiente gráfica.

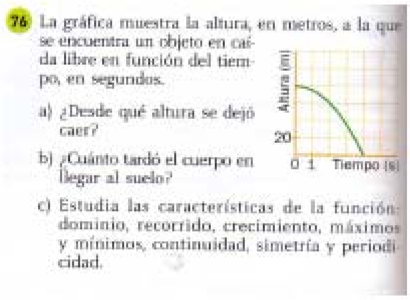
a) Halla su dominio y recorrido.

b) Indica los intervalos de crecimiento.

c) Halla sus máximos y mínimos.

d) Averigua si es simétrica o periódica.

También aparecen ejercicios donde se pide una interpretación de la gráfica correspondiente a un problema práctico Ejemplo: ejercicio 76, página 188.



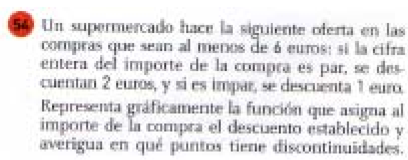
76 La gráfica muestra la altura, en metros, a la que se encuentra un objeto en caída libre en función del tiempo, en segundos.

a) ¿Desde qué altura se dejó caer?

b) ¿Cuánto tardó el cuerpo en llegar al suelo?

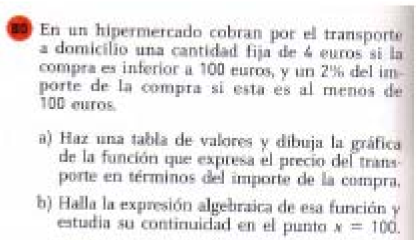
c) Estudia las características de la función: dominio, recorrido, crecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetría y periodicidad.

Reciprocamente, el alumno tiene que determinar una función a partir de los datos facilitados en la descripción de una situación. Ejemplo: ejercicio 54 de la página 103 y ejercicio 80 de la página 188.



54 Un supermercado hace la siguiente oferta en las compras que sean al menos de 6 euros: si la cifra entera del importe de la compra es par, se descuentan 2 euros, y si es impar, se descuenta 1 euro.

Representa gráficamente la función que asigna al importe de la compra el descuento establecido y averigua en qué puntos tiene discontinuidades.



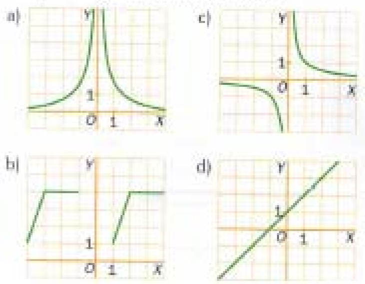
80 En un hipermercado cobran por el transporte a domicilio una cantidad fija de 4 euros si la compra es inferior a 100 euros, y un 2% del importe de la compra si esta es al menos de 100 euros.

a) Haz una tabla de valores y dibuja la gráfica de la función que expresa el precio del transporte en términos del importe de la compra.

b) Halla la expresión algebraica de esa función y estudia su continuidad en el punto $x = 100$.

Debido a que en este tema se estudia por primera vez la simetría par e impar, son numerosos los ejercicios en los que se pide indicar el tipo de simetría de funciones dadas gráficamente o mediante su expresión analítica y hallar las funciones simétricas respecto a una dada. Ejemplo: página 185.

56 Averigua cuáles de las siguientes funciones, dadas por sus gráficas, son simétricas.



58 Estudia si las siguientes funciones son pares o impares.

a) $f(x) = 3x^4 + 2$ c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

b) $f(x) = \frac{2x^3 - 5x}{4}$ d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

61 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 2x$ y halla su función simétrica:

a) Respecto del eje de abscisas.

b) Respecto del eje de ordenadas.

c) Respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrantes.

En el tema 11, dedicado a la función polinómica y definida a trozos, encontramos ejercicios tipo en los que se pide al alumno:

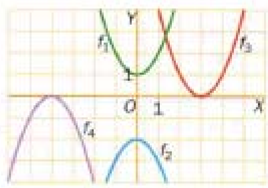
1.- Dibujar gráficas mediante traslaciones o hallar las ecuaciones de funciones trasladadas. Ejemplo: página 197, ejercicio 15 y página 204, ejercicio 55.

15 Mediante traslaciones, dibuja las gráficas estas funciones.

a) $y = 2(x - 3)^2 + 2$ b) $y = 4(x + 3)^2 - 1$

55 Las funciones de la figura son trasladadas de las funciones $y = x^2$ o $y = -x^2$.

Halla sus ecuaciones.



2.- Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas, la ecuación del eje y las coordenadas del vértice de las parábolas. Ejemplo: página 199, ejercicio 28.

28 Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas, la ecuación del eje y las coordenadas del vértice de las siguientes parábolas.

a) $y = -x^2 + 3x + 10$

b) $y = 9x^2 - 6x + 1$

3.- Determinar la ecuación de una parábola conociendo algunos datos como los puntos por donde pasa o la ecuación del eje.

65 Halla la ecuación de la parábola que pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $A(2, 2)$ y $B(-1, -7)$.

66 La parábola $y = x^2 + bx + c$ corta el eje OX en el punto $A(4, 0)$ y tiene como eje la recta $x = 1$.

a) ¿En qué otro punto corta el eje OX?

b) Halla la ecuación de la parábola.

c) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?

d) ¿En qué punto corta el eje OY?

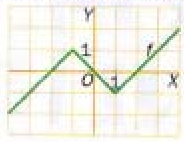
Dado que aparece por primera la función definida a trozos, hay muchos ejercicios en los que se pide al alumno que dibuje la gráfica de una función definida a trozos o que halle la expresión algebraica de funciones a partir de sus gráficas. Ejemplo: página 201, ejercicios 42 y 43.

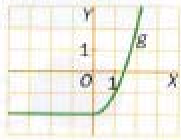
42 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

43 Halla la expresión algebraica de las funciones, formadas por trozos de rectas o parábolas, que tienen estas gráficas.

a) 

b) 

Los alumnos también tienen que determinar una función que permita relacionar e interpretar datos contenidos en la descripción de una situación real. Ejercicio 84, página 206.

84 **Los tramos de la renta**

Durante el mes de mayo, los habitantes de un país deben pagar los impuestos anuales en relación con la renta total que han ganado. La ley determina las siguientes disposiciones.

- Se considera una cantidad fija exenta de pago de 5050 euros, considerada como necesaria para cubrir algunos gastos esenciales.
- A la cantidad anterior se debe sumar una de las siguientes, según el número de hijos que dependan del declarante.

1 hijo	2 hijos	3 hijos
1800	3800	7400

- La renta restante tributa según la siguiente tabla.

De 0 a 17 360 euros	24%
De 17 360 a 32 360 euros	28%
De 32 360 a 52 360 euros	37%
De 52 360 euros en adelante	43%

a) Calcula los impuestos que debe pagar una persona que ha ganado 37 500 euros según tenga 0, 1, 2 ó 3 hijos.

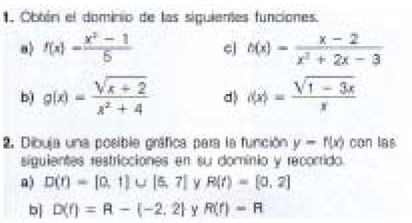
b) Escribe la función que relaciona la renta anual conseguida por una persona y los impuestos que debe abonar sabiendo que tiene dos hijos.

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones polinómicas en 1º de Bachillerato

Para analizar los ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones cuadráticas y gráficas que se pueden encontrar en 1º de Bachillerato, utilizo como referencia el libro que actualmente se utiliza en el centro en el Bachillerato de Ciencias Sociales Se trata del libro *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de la editorial SM.*

En el libro encontramos dos temas dedicados a las funciones. En el tema 6 denominado Funciones, se estudian: propiedades de las funciones, función inversa de una dada, composición de funciones y función definida a trozos. El tema 9, denominado Funciones Elementales, es una continuación del tema 6 ya que comienza describiendo características como la simetría, puntos de corte con los ejes y signo de la función. A continuación, se estudia la función cuadrática, la función polinómica de grado mayor que dos, la función de proporcionalidad inversa, racional exponencial, logarítmica, trigonométrica y valor absoluto.

En el tema 6, aparecen ejercicios tipo en los que hay que determinar el dominio y recorrido a partir de la gráfica de la función o de su expresión analítica, o dibujar una gráfica que cumpla unas características dadas. Ejemplo, página 120, ejercicios 1, 2 y 3.



1. Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{5}$ c) $h(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

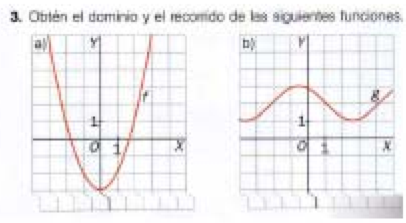
b) $g(x) = \frac{\sqrt{x + 2}}{x^2 + 4}$ d) $i(x) = \frac{\sqrt{1 - 3x}}{x}$

2. Dibuja una posible gráfica para la función $y = f(x)$ con las siguientes restricciones en su dominio y recorrido.

a) $D(f) = [0, 1] \cup [5, 7]$ y $R(f) = [0, 2]$

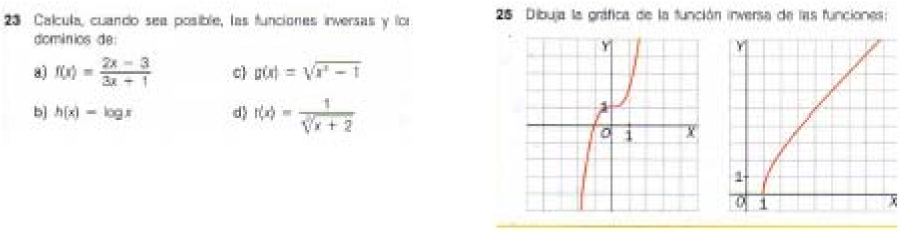
b) $D(f) = R - (-2, 2)$ y $R(f) = R$

3. Obtén el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.



Otro ejercicio tipo pide al alumno que:

1.- Calcule la función inversa de una dada o que la dibuje a partir de gráficas de las funciones originales. Ejemplo: página 130, ejercicios 23 y 25.



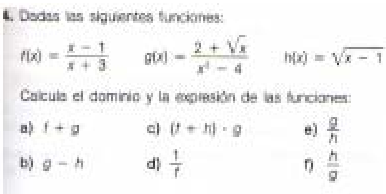
23 Calcula, cuando sea posible, las funciones inversas y los dominios de:

a) $f(x) = \frac{2x - 3}{3x + 1}$ c) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

b) $h(x) = \log x$ d) $i(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + 2}}$

25 Dibuja la gráfica de la función inversa de las funciones:

2:- Realice operaciones algebraicas de funciones y analice las funciones resultantes. Ejemplo: página 121, ejercicio 5.



4. Dadas las siguientes funciones:

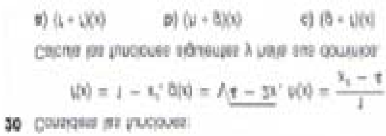
$f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}$ $g(x) = \frac{2 + \sqrt{x}}{x^2 - 4}$ $h(x) = \sqrt{x - 1}$

Calcula el dominio y la expresión de las funciones:

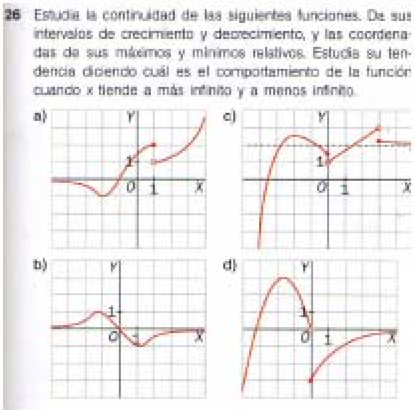
a) $f + g$ c) $(f + h) \cdot g$ e) $\frac{g}{h}$

b) $g - h$ d) $\frac{1}{f}$ f) $\frac{h}{g}$

3.- Determine la función composición de funciones. Ejemplo: página 130, ejercicio 20.

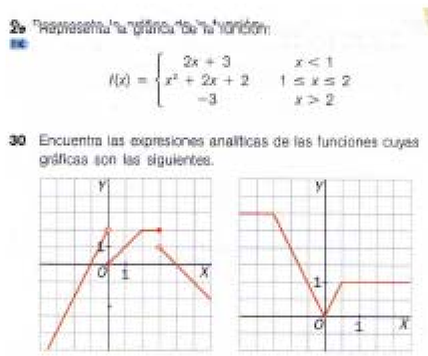


4.- Deduzca propiedades de una función a partir de su gráfica. Ejemplo: página 131, ejercicio 26.



26 Estudia la continuidad de las siguientes funciones. De sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. Estudia su tendencia diciendo cuál es el comportamiento de la función cuando x tiende a más infinito y a menos infinito.

5.- Dibuje la gráfica definida a trozos a partir de la expresión algebraica o al revés, a partir de la gráfica determinar la expresión analítica de la función. Ejemplo: página 131, ejercicio 29 y 30.

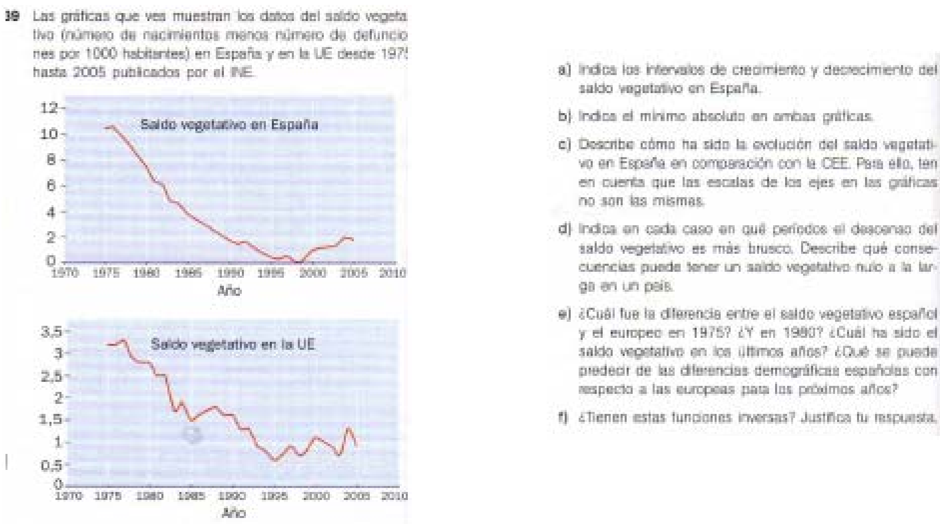


29 Representa la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 1 \\ x^2 + 2x + 2 & 1 \le x \le 2 \\ -3 & x > 2 \end{cases}$$

30 Encuentra las expresiones analíticas de las funciones cuyas gráficas son las siguientes.

Finalmente, encontramos ejercicios en los que, a partir de la gráfica de una función, que describe una situación aplicada a la realidad, se pide al alumno que conteste a diferentes cuestiones. Para responder a estas cuestiones es necesario aplicar todos los conceptos desarrollados en el tema. Ejemplo: página 132, ejercicio 39.



39 Las gráficas que ves muestran los datos del saldo vegetativo (número de nacimientos menos número de defunciones por 1000 habitantes) en España y en la UE desde 1975 hasta 2005 publicados por el INE.

a) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento del saldo vegetativo en España.

b) Indica el mínimo absoluto en ambas gráficas.

c) Describe cómo ha sido la evolución del saldo vegetativo en España en comparación con la CEE. Para ello, ten en cuenta que las escalas de los ejes en las gráficas no son las mismas.

d) Indica en cada caso en qué períodos el descenso del saldo vegetativo es más brusco. Describe qué consecuencias puede tener un saldo vegetativo nulo a la larga en un país.

e) ¿Cuál fue la diferencia entre el saldo vegetativo español y el europeo en 1975? ¿Y en 1980? ¿Cuál ha sido el saldo vegetativo en los últimos años? ¿Qué se puede predecir de las diferencias demográficas españolas con respecto a las europeas para los próximos años?

f) ¿Tienen estas funciones inversas? Justifica tu respuesta.

El tema 9 trata las funciones elementales pero comienza con la simetría, puntos de corte con los ejes y signo de la función. Así, como ejercicio tipo aparece aquel que consiste en realizar un estudio de la función.

31 Haz un estudio completo (vértice, eje de simetría, puntos de corte con los ejes, concavidad) de la parábola $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

64 Estudia los dominios y los recorridos de las siguientes funciones, y después, ayudándote de la calculadora, estudia sus gráficas señalando sus puntos de corte con el eje X y sus periodos.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$ c) $f(x) = 5 \cdot \cos x$

b) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ d) $f(x) = 2 + 4\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

41 Determina el dominio, la continuidad y la posible simetría de las siguientes funciones racionales.

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x}$ d) $f(x) = \frac{2x-6}{x^2+2x+5}$

b) $f(x) = \frac{2+3x}{x}$ e) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-4x}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{3-x}$ f) $f(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$

42 Halla los puntos de corte de las funciones anteriores con los ejes de coordenadas y su signo. Indica también, para cada una de ellas, si tiene asíntotas verticales, horizontales u oblicuas y esboza sus gráficas.

Otro ejercicio tipo consiste en interpretar una función para responder a unas preguntas sobre la situación planteada o partir de la situación determinar la función que está implicada.

44 Se ha comprobado empíricamente que las ganancias que obtiene un casino en la ruleta dependen del tiempo que se esté jugando a través de la expresión: $G(t) = \frac{10000t}{t^2 + 40000}$, donde t representa el tiempo de juego en minutos, y $G(t)$, las ganancias en miles de euros. Demuestra que en este juego, el casino siempre obtiene ganancias.

¿Qué ganancias obtiene el casino si la ruleta está ocupada durante media hora?

51 Un banco ofrece un tipo de interés del 4% anual para los depósitos de nuevos clientes. Si un ahorrador ingresa 20000 euros:

a) ¿Cuál es la función que da el capital acumulado al cabo de t años?

b) Con ayuda de la función hallada, calcula el capital acumulado al cabo de 15 años.

También aparecen donde hay que resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

48 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $2^x = 8$ c) $2^{2x+3} = 512$ e) $3^{-x} = \frac{1}{9}$

b) $2^{x-1} = 32$ d) $3^x = 81$ f) $3^{1-2x} = \frac{1}{27}$

53 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\log x = 4$ c) $12 - \log(3x) = 0$

b) $x \log 3 = 2 \log 6$ d) $\log x^2 - \log x = 4$

Otro ejercicio tipo consiste en realizar la representación gráfica de funciones con la ayuda de la calculadora en algunos casos.

63 Utilizando la calculadora, representa las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$ e) $f(x) = \operatorname{sen} x - 2$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x + 2)$ f) $f(x) = \operatorname{sen}(x - 2)$

c) $f(x) = -\operatorname{sen} x$ g) $f(x) = \operatorname{sen}(-x)$

d) $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x$ h) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

A continuación, indica cuál es el desplazamiento u operación que transforma la función $g(x) = \operatorname{sen} x$ en cada una de las anteriores.

47 Con la ayuda de una calculadora, representa la función $g(x) = 2^x$, y sobre los mismos ejes, representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2^{x-3}$ d) $f(x) = 2^x + 2$

b) $f(x) = 2^x - 1$ e) $f(x) = 2^{x+1}$

c) $f(x) = 2^{x-2} + 3$ f) $f(x) = 2^{x-1} - 2$

Indica, en cada caso, qué desplazamiento transforma la función g en f.

54 Usando la calculadora, representa sobre los mismos ejes las gráficas de las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. ¿Qué observas?

55 Expresa como funciones definidas a trozos y representa gráficamente cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |x + 2|$ c) $f(x) = |x - 1| + 2$

b) $f(x) = |x + 2| + x$ d) $f(x) = 2|x - 1|$

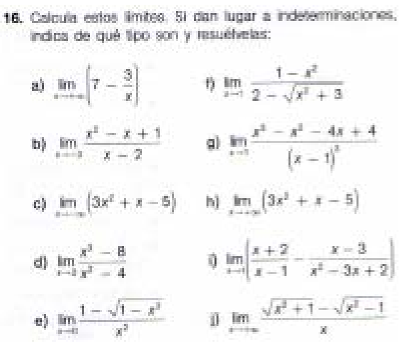
3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones polinómicas en 2º de Bachillerato

Para analizar los ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones cuadráticas y gráficas que se pueden encontrar en 2º de Bachillerato utilizo como referencia el libro que actualmente se utiliza en el centro en el Bachillerato de Ciencias Sociales Se trata del libro *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de la editorial SM.*

Hay dos temas dedicados a las funciones: el tema 5, sobre funciones, límites y continuidad, y el tema 8, sobre representaciones gráficas.

En el tema 5, en los ejercicios tipos se pide:

1.- Calcular límites de funciones dadas, tanto a partir de su expresión analítica como de su representación gráfica



16. Calcula estos límites. Si dan lugar a indeterminaciones, indica de qué tipo son y resuélvelas:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(7 - \frac{3}{x}\right)$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$

c) $\lim_{x \to -\infty} (3x^2 + x - 5)$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

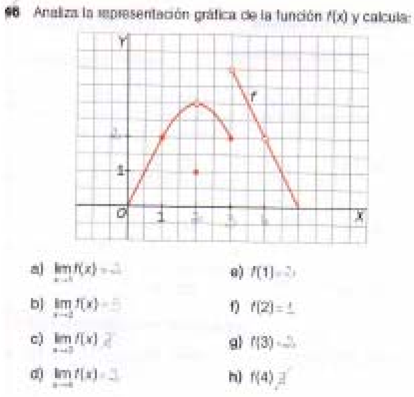
f) $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}$

g) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x - 1)^2}$

h) $\lim_{x \to +\infty} (3x^3 + x - 5)$

i) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x + 2}{x - 1} - \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2}\right)$

j) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$



96 Analiza la representación gráfica de la función $f(x)$ y calcula:

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim_{x \to 2} f(x)$

c) $\lim_{x \to 3} f(x)$

d) $\lim_{x \to 4} f(x)$

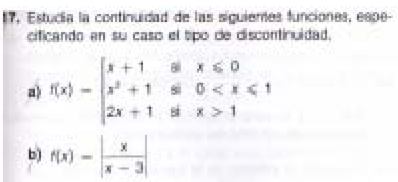
e) $f(1)$

f) $f(2)$

g) $f(3)$

h) $f(4)$

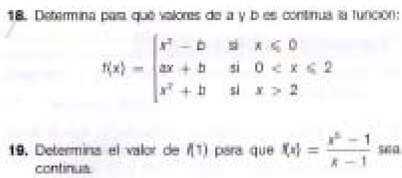
2.- Estudiar la continuidad de funciones o determinar algún valor que falta para que la función sea continua.



17. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, especificando en su caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \left|\frac{x}{x - 3}\right|$



18. Determina para qué valores de a y b es continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x^2 + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

19. Determina el valor de $f(1)$ para que $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ sea continua.

3.- Asociar gráficas a funciones.

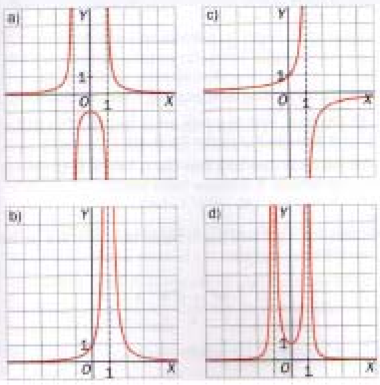
44 Las gráficas siguientes corresponden a cuatro funciones que no están definidas en $x = 1$. Asocia cada gráfica con alguna de estas funciones:

I) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ a

II) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ b

III) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ c

IV) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 1)^2}$ d



En el tema 8, un ejercicio tipo pide al alumno representar funciones y realizar un estudio completo de la función. Ejemplos:

17. Representa las siguientes funciones racionales.

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

18. Representa la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

12 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

Se pide:

a) Dominio de la función, puntos de corte con los ejes y simetrías.

b) Asíntotas y regiones de existencia de la gráfica.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos, si los hay.

d) Representación gráfica aproximada.

Por último para aplicar todo lo estudiado los alumnos deben representar o interpretar funciones que modelan situaciones reales.

57 En un trabajo de investigación sobre el rendimiento (en una escala de 0 a 100) de cierta válvula durante 24 horas de funcionamiento, unos ingenieros industriales han comprobado que dicho rendimiento se comporta de acuerdo con la siguiente función:

$$R(t) = \frac{(30 - t)(t + 10)}{4}, \quad 0 \leq t \leq 24$$

a) ¿Cuánto tiempo debe permanecer funcionando la válvula para conseguir su máximo rendimiento? Justifica la respuesta.

b) Representa y comenta la función.

Capítulo 4
Resultados

En este capítulo se analiza la coherencia entre el contenido y criterios establecidos en el currículo oficial sobre las funciones y los libros de texto analizados en el capítulo 3.

A su vez, se compara este enfoque con el dado en el libro de referencia: *Cálculo 1 de una variable* de Larson-Edwards, Novena Edición, editorial MCGraw-Hill. Se ha elegido este libro debido a que, además de suponer una transición entre el Bachillerato y el primer curso de matemáticas de estudios universitarios, contiene una gran cantidad de ejercicios.

A lo largo de este capítulo, nos referiremos a este libro con esta notación: [La]

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Analizando el currículo se observa que inicialmente se introduce la representación gráfica de funciones y, posteriormente se combina con un análisis de dichas funciones, que curso tras curso es más completo. Los distintos tipos de funciones que hay se introducen progresivamente y así al finalizar 4º de ESO ya conocen la función lineal, afín, polinómica, racional, inversa, logarítmica, exponencial.

Los contenidos matemáticos se imparten de forma aislada de tal forma que el alumno no relaciona conceptos. Por ejemplo, no se hace menciona la relación entre los puntos de corte con el eje de abcisas de una función y las soluciones de su ecuación algebraica. En el caso de la función cuadrática, no se explica que el cálculo de los puntos de corte es la solución analítica de la ecuación de segundo grado que se corresponde con esa función. Es decir, no se utilizan las funciones como una herramienta de resolución sino como un fin.

En los libros de texto analizados cada año se repite gran parte del contenido y se introduce algún concepto nuevo. Es lo que se conoce como currículo en espiral.

Aunque la función polinómica aparece por primera vez en 4º de ESO, desde 2º de ESO se van introduciendo conceptos relacionados con las funciones de la siguiente forma:

- 2º ESO
  - Concepto de función
  - Continuidad y discontinuidad
  - Puntos de corte con los ejes
  - Crecimiento y decrecimiento
  - Máximos y mínimos
  - Funciones de proporcionalidad directa
  - Funciones afines
  - Funciones de proporcionalidad inversa

- 3º ESO
  - Concepto de función
  - Dominio y recorrido
  - Puntos de corte con los ejes
  - Crecimiento y decrecimiento
  - Continuidad y discontinuidad
  - Máximos y mínimos
  - Funciones lineales y afines

- 4º ESO B
  - Concepto de función
  - Dominio y recorrido
  - Puntos de corte con los ejes
  - Variación de una función. Crecimiento y decrecimiento
  - Máximos y mínimos
  - Idea de límite
  - Continuidad
  - Simetrías y periodicidad
  - Funciones lineales y afines
  - Función polinómica (cuadrática)
  - Funciones definidas a trozos
  - Función de proporcionalidad inversa
  - Funciones racionales, exponenciales y logarítmicas

- 1º BACHILLERATO Ciencias Sociales
  - Concepto de función
  - Continuidad y discontinuidad
  - Puntos de corte con los ejes
  - Crecimiento y decrecimiento.
  - Máximos y mínimos.
  - Dominio y recorrido.
  - Simetría y periodicidad.
  - Composición de funciones
  - Funciones lineales y afines.
  - Funciones polinómicas, racionales y con radicales.
  - Funciones de proporcionalidad inversa.
  - Funciones exponenciales y logarítmicas
  - Funciones trigonométricas
  - Concepto de límite.
  - Cálculo de derivadas.

- 2º BACHILLERATO Ciencias Sociales
  - Concepto de función.
  - Continuidad y discontinuidad.
  - Puntos de corte con los ejes.
  - Crecimiento y decrecimiento.
  - Máximos y mínimos.
  - Dominio y recorrido.
  - Simetría y periodicidad.
  - Composición de funciones
  - Funciones lineales y afines.
  - Funciones polinómicas, racionales y con radicales
  - Funciones de proporcionalidad inversa.
  - Funciones exponenciales y logarítmicas
  - Funciones trigonométricas
  - Concepto de límite.
  - Aplicación de las derivadas
  - Aplicación de las integrales

Al comparar el texto de referencia [La] con los libros utilizados en el centro se observa que tanto uno como los otros basan el aprendizaje en la realización de ejercicios y problemas, presentando siempre un ejercicio tipo resuelto para guiar al alumno.

En los libros de texto las definiciones y conceptos se encuentran remarcados dentro de un rectángulo de color amarillo y al final de cada tema hay un resumen de los conceptos más importantes y una colección de ejercicios para aplicar todo lo aprendido durante la unidad didáctica. En el libro[La], también aparece recuadrado aquello que considera importante y al final del capítulo ofrece una amplia colección de ejercicios de repaso, aunque, al igual que en los libros de Bachillerato, os ejercicios no están diferenciados por nivel de dificultad

Por otro lado, este texto profundiza más en los conceptos presentados, sin que existan diferencias significativas en el lenguaje utilizado, que es formal en ambos casos.

Destaca que mientras en el libro de texto de 4º de ESO los objetos matemáticos relacionados con las funciones están desarrollados a lo largo de tres unidades didácticas, en el libro [La] se corresponden con un tema o un apartado del mismo. Esto resulta lógico ya que se profundiza más en los conceptos y el desarrollo de los mismos requiere de un tema entero.

El libro[La] está enfocado hacia el cálculo analítico y mientras que las funciones y sus gráficas forman parte del capítulo introductorio, a los límites, aplicaciones de las derivadas y funciones logarítmicas, exponencial y otras funciones trascendentes se les dedica un capítulo entero, respectivamente. También contiene un tipo de ejercicios identificados como *“Para discusión”*, que sintetizan los conceptos principales de cada sección y muestran al estudiante cómo se relacionan los temas.

Presencias:

- Distintas formas de expresar una función
- Dominio y recorrido
- Simetría
- Límite en un punto

Ausencias:

- No se utiliza tabla de valores para representar una función.
- Definición de función: en el libro [La], la definición de función se basa en los conjuntos inicial y final , en cambio en los libros de texto se define como la relación entre dos magnitudes.
- Periodicidad: en el libro [La] sólo aparece en las funciones trigonométricas, en cambio en los libros de texto forman un apartado en sí.
- Puntos de corte: en el libro [La] no aparece como apartado y se denominan como intersección de la gráfica con los ejes. Se calculan en los ejercicios que sea necesario.
- Continuidad: en el libro [La] la continuidad en un punto se define a partir del concepto de límite, al igual que en Bachillerato. Sin embargo en la ESO, la continuidad se relaciona con la posibilidad de dibujar la gráfica de la función de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.
- Para determinar si una función es creciente o decreciente se calcula la primera derivada, y la segunda derivada para determinar su convexidad. Lo mismo ocurre en el libro utilizado en 2º de Bachillerato.

- Extremos relativos: en el libro [La] se utiliza el concepto de entorno centrado en un punto mientras que en los libros de texto se definen de manera visual como los puntos en los que la función pasa de ser creciente a decreciente o al contrario.
- Ínfimo y supremo: en los libros de texto no se mencionan.
- Función lineal: en el libro [La] la función lineal aparece función polinomial de grado uno.
- La función cuadrática no se desarrolla a lo largo de un tema ni de un apartado sino que aparece a lo largo de los distintos temas sobre funciones y sus gráficas. Esto ya ocurría a partir de 4º de ESO, único curso donde una unidad didáctica estaba dedicada a esta función y a partir de ese curso se desarrollaba en un apartado.
- Función definida a trozos: en el libro [La] no se dedica una apartado a esa función, ni siquiera se nombra, únicamente aparece en ejercicios de cálculo de límites.
- Límite: en el libro [La] se recoge la definición formal de límite.
- En el libro [La] se utiliza el símbolo Δx en el cálculo de la derivada en un punto.

En Secundaria y Bachiller los temarios se encuentran divididos en aritmética, álgebra, funciones, geometría y estadística, y el concepto de función está relacionado con todos ellos. Sin embargo, en el currículo y por tanto en los libros de texto, no se da a conocer la relación existente y aparecen como algo independiente del resto de contenidos (atomización de la enseñanza). Se da el caso de que cuando el alumno determina el dominio de una función dada, no se relaciona con el tipo de función que es (racional, polinómica…) sino que la enseñanza está centrada solamente en el calculo del dominio.

No se relacionan las funciones con las ecuaciones e inecuaciones y rara vez se resuelven de forma gráfica.

En el libro universitario de referencia, las representaciones gráficas son una herramienta de trabajo para realizar el análisis del comportamiento de una función, en cambio en Secundaria son numerosos los ejercicios que piden al alumno realizar gráficos pero sin una finalidad en concreto.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

Debido a que el currículo oficial recoge los contenidos mínimos que deben ser enseñados en cada nivel educativo y está regido por la legislación, se observa una coherencia con los libros de texto analizados.

Pero este currículo oficial no supone el 100% de lo que debe ser enseñado, sino que determina los mínimos a enseñar y por tanto queda un pequeño porcentaje de contenidos a elección de la editorial para ser añadidos al libro y completar esos mínimos.

Por tanto, que en un libro exista más contenido del exigido en los Reales Decretos no supone ningún problema pero sí que falten contenidos.

Por ejemplo en el libro de 3º de ESO se añaden características de las funciones como recorrido, simetría y periodicidad.

Es el caso de los contenidos sobre límites y derivadas, que a pesar de no ser exigida su enseñanza en 1º de Bachillerato en Ciencias Sociales, sí que están recogidos en el libro de texto analizado.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de las funciones polinómicas en 4º ESO

Esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster está basado en el periodo de docencia de prácticas que tuvo lugar en el Centro con alumnos de 4º de ESO.

En ella, se hace un análisis didáctico de las funciones polinómicas.

No fue posible realizar un cuestionario a los alumnos por motivos de tiempo, así que debido a la falta de resultados, en el capítulo 8 dedicado a la experimentación en el aula, únicamente se recoge el cuestionario que se hubiera puesto si hubiera sido posible y las conclusiones se basan en la observación durante la docencia.

Capítulo 5
El contenido matemático en el libro de texto de referencia

En este capítulo se analiza el tema 11, Funciones Polinómicas, del libro de 4º ESO que se utiliza en el centro donde tuvo lugar la actividad docente. Como se ha mencionado en la primera parte, se trata del libro *Matemáticas Opción B, Proyecto Ábaco de la editorial SM.*

Para llevar a cabo este análisis, se utilizará como texto de referencia el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*, de Juan D. Godino, Vincenç Font y Miguel R. Wilhelmi (2006).

5.1.Objetos matemáticos involucrados

A continuación se muestran una serie de tablas que recogen los objetos matemáticos involucrados en el tema de estudio.

5.1.1. Lenguaje

- Verbal: Representación, imagen, gráfica, función, variable, variable independiente, variable dependiente, ejes cartesianos, ejes, escalas, dominio, recorrido, abscisas, ordenadas, coordenadas, tabla, ecuación, creciente, decreciente, máximo, mínimo, relativo, límite, ramas, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, simetría, periodicidad, discontinuidad, continuidad, expresión analítica, interpretación, puntos de corte, vértice, eje de la parábola, intersección.
- Gráfico: Representaciones en ejes cartesianos.
- Simbólico: $f(x), (,), [,], y = ax\hat{}2 + bx + c$, $Dom\ f, Rec\ f, x, y, -, +, /, \mathbb{R}$, <,>
- Tablas : Representaciones de pares de coordenadas.

5.1.2. Conceptos

- Previos: Función, coordenadas, gráficas cartesianas, tablas, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, proporcionalidad, pendiente, traslación.
- Emergentes: Vértice, ramas, convexidad, eje de la parábola.

5.1.3. Procedimientos

- Descontextualización del enunciado del problema.
- Contextualización de enunciados descontextualizados.
- Determinar si una relación entre variables es una función o no a partir de la tabla de valores o de la gráfica.
- Interpretar una tabla como una gráfica y viceversa.
- Interpretar y obtener información de una función.
- Representar gráficamente una función.
- Obtener las características de una función polinómica: dominio, recorrido, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de corte con los ejes, simetría, coordenadas del vértice de la parábola.

5.1.4. Situaciones

- Problemas contextualizados en los que se representan dos magnitudes, determinando cual es la que se corresponde con la variable independiente y cual con la variable dependiente.

- Problemas contextualizados en los que se representa gráficamente un comportamiento explicado verbalmente.
- Problemas descontextualizados en los que se pide que se analicen características de las gráficas.
- Problemas descontextualizados de tablas, funciones y gráficas.

5.1.5. Propiedades

- Una función, f(x)=y, asocia a cada valor de x real un único valor de y real.
- El conjunto de los valores de x para los que existe la función se denomina dominio.
- El conjunto de los valores de y para los que existe un x real tal que f(x) =y se denomina recorrido de la función.
- Una función tiene un máximo en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean.
- Una función es continua si consideramos puntos x reales que están a una distancia menor que delta de un punto *a* real, entonces las imágenes de dichos x están a una distancia menor que Epsilon de la imagen de a.
- Una función tiene simetría par si la imagen de un punto x real coindice con la de su opuesto , -x. La simetría se dice impar si la imagen de un punto x real coindice con la de su opuesto cambiada de signo, es decir si *f(x)= - f(-x).* También puede ocurrir que no exista simetría.
- La expresión algebraica de una función es una ecuación que relaciona las dos variables que intervienen.
- La ecuación de una función cuadrática es de la forma $y = ax^2 + bx + c$

5.1.6. Argumentos

- Comprobación de las propiedades en casos particulares.
- Justificación de las propiedades, utilizando elementos genéricos.
- Representación gráfica de funciones.

5.2.Análisis global de la unidad didáctica

Como ya se han indicado en el apartado 1, en el libro de texto de referencia utilizado en el centro (Proyecto Ábaco, editorial SM), la lección 11 está dedicada a las funciones polinómicas de segundo grado y al igual que el resto de unidades didácticas del libro, sigue la siguiente estructura:

En la primera página se muestra una gran imagen, siempre una foto real, y en la parte inferior un texto que contextualiza esa imagen dentro del tema a tratar para comprender la aplicación cotidiana de esa parte de las matemáticas. En algunos temas, también se hace referencia a la relación que tiene la historia con el contenido que se va a tratar. En la lección 11, se menciona que Arquímedes conocía la propiedad de los espejos parabólicos para reflejar los rayos, y que esto se aplica en la actualidad, por ejemplo en las centrales térmicas solares.

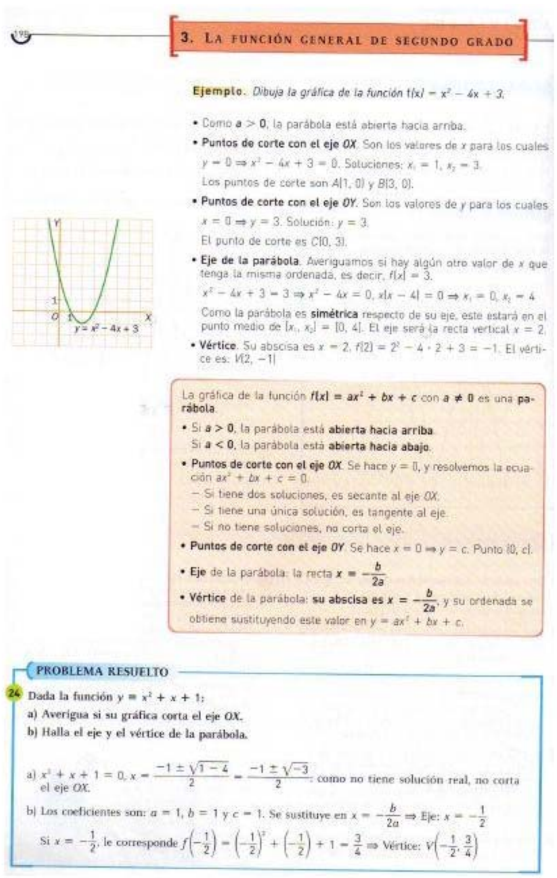
La segunda página está dividida en dos apartados:

- *Recuerda*, que como su propio nombre indica consiste en un breve repaso de conceptos aprendidos en cursos anteriores y,
- *Para empezar,* que incluye unos ejercicios para aplicar los contenidos del apartado anterior.

En la siguiente página comienzan las secciones del tema, que siguen el siguiente esquema:

- Título de la sección
- Ejemplo resuelto
- Definición del concepto o propiedad utilizado para resolver el ejemplo anterior
- Problema resuelto
  No aparece en todas las secciones. En general se trata de un problema, similar al ejemplo resuelto pero algo más complicado.
- Ejercicios denominados como
  - *Para practicar*
    Son ejercicios numerados principalmente en amarillo y verde. Aparece un ejercicio resuelto.
  - *Para aplicar*
    Son ejercicios numerados principalmente en amarillo y rojo. Puede ser que aparezca un problema resuelto.

En todo el libro, los ejercicios están numerados en verde, amarillo o rojo, de acuerdo a la dificultad exigida. Así los ejercicios verdes corresponden a un nivel básico o sencillo, los amarillos a un nivel medio o normal y los rojos a un nivel avanzado o difícil.



198

3. La función general de segundo grado

Ejemplo. *Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$.*

- Como $a > 0$, la parábola está abierta hacia arriba.
- **Puntos de corte con el eje OX.** Son los valores de x para los cuales $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
  Los puntos de corte son $A(1, 0)$ y $B(3, 0)$.
- **Puntos de corte con el eje OY.** Son los valores de y para los cuales $x = 0 \Rightarrow y = 3$. Solución: $y = 3$.
  El punto de corte es $C(0, 3)$.
- **Eje de la parábola.** Averiguamos si hay algún otro valor de x que tenga la misma ordenada, es decir, $f(x) = 3$.
  $x^2 - 4x + 3 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$, $x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 4$
  Como la parábola es **simétrica** respecto de su eje, este estará en el punto medio de $[x_1, x_2] = [0, 4]$. El eje será la recta vertical $x = 2$.
- **Vértice.** Su abscisa es $x = 2$, $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. El vértice es: $V(2, -1)$

La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ es una **parábola**.

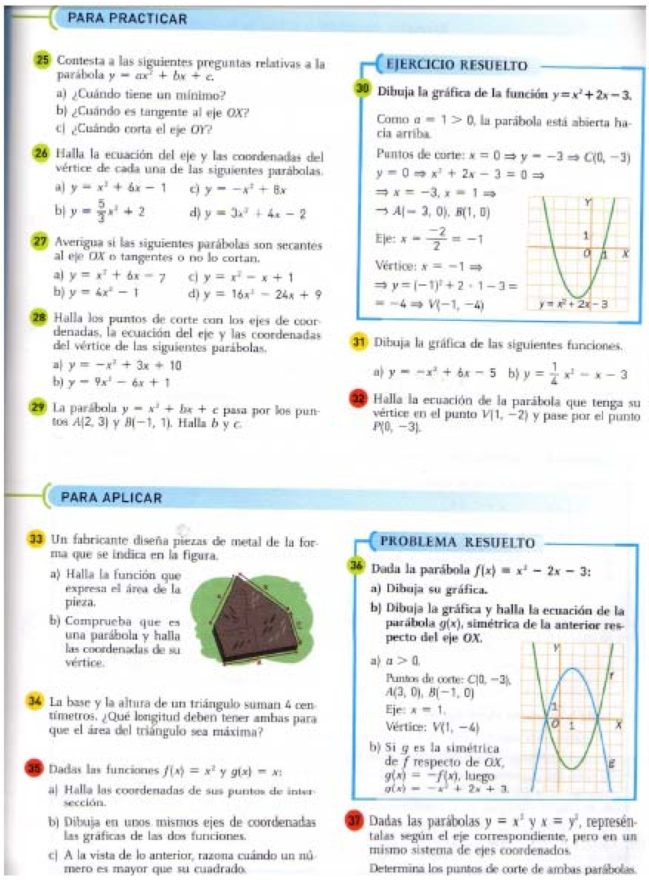
- Si $a > 0$, la parábola está **abierta hacia arriba**.
  Si $a < 0$, la parábola está **abierta hacia abajo**.
- **Puntos de corte con el eje OX.** Se hace $y = 0$, y resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
  – Si tiene dos soluciones, es secante al eje OX.
  – Si tiene una única solución, es tangente al eje.
  – Si no tiene soluciones, no corta el eje.
- **Puntos de corte con el eje OY.** Se hace $x = 0 \Rightarrow y = c$. Punto $(0, c)$.
- **Eje** de la parábola: la recta $x = -\frac{b}{2a}$
- **Vértice** de la parábola: **su abscisa es $x = -\frac{b}{2a}$**, y su ordenada se obtiene sustituyendo este valor en $y = ax^2 + bx + c$.

PROBLEMA RESUELTO

24 **Dada la función $y = x^2 + x + 1$:**
a) Averigua si su gráfica corta el eje OX.
b) Halla el eje y el vértice de la parábola.

a) $x^2 + x + 1 = 0$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; como no tiene solución real, no corta el eje OX.

b) Los coeficientes son: $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Se sustituye en $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow$ Eje: $x = -\frac{1}{2}$
Si $x = -\frac{1}{2}$, le corresponde $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow$ Vértice: $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$



PARA PRACTICAR

25 Contesta a las siguientes preguntas relativas a la parábola $y = ax^2 + bx + c$.
a) ¿Cuándo tiene un mínimo?
b) ¿Cuándo es tangente al eje OX?
c) ¿Cuándo corta el eje OY?

26 Halla la ecuación del eje y las coordenadas del vértice de cada una de las siguientes parábolas.
a) $y = x^2 + 6x - 1$ c) $y = -x^2 + 8x$
b) $y = \frac{5}{3}x^2 + 2$ d) $y = 3x^2 + 4x - 2$

27 Averigua si las siguientes parábolas son secantes al eje OX o tangentes o no lo cortan.
a) $y = x^2 + 6x - 7$ c) $y = x^2 - x + 1$
b) $y = 4x^2 - 1$ d) $y = 16x^2 - 24x + 9$

28 Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas, la ecuación del eje y las coordenadas del vértice de las siguientes parábolas.
a) $y = -x^2 + 3x + 10$
b) $y = 9x^2 - 6x + 1$

29 La parábola $y = x^2 + bx + c$ pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(-1, 1)$. Halla b y c.

EJERCICIO RESUELTO

30 **Dibuja la gráfica de la función $y = x^2 + 2x - 3$.**

Como $a = 1 > 0$, la parábola está abierta hacia arriba.
Puntos de corte: $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow C(0, -3)$
$y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -3, x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow A(-3, 0)$, $B(1, 0)$
Eje: $x = \frac{-2}{2} = -1$
Vértice: $x = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = (-1)^2 + 2 \cdot 1 - 3 =$
$= -4 \Rightarrow V(-1, -4)$

31 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.
a) $y = -x^2 + 6x - 5$ b) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$

32 Halla la ecuación de la parábola que tenga su vértice en el punto $V(1, -2)$ y pase por el punto $P(0, -3)$.

PARA APLICAR

33 Un fabricante diseña piezas de metal de la forma que se indica en la figura.
a) Halla la función que expresa el área de la pieza.
b) Comprueba que es una parábola y halla las coordenadas de su vértice.

34 La base y la altura de un triángulo suman 4 centímetros. ¿Qué longitud deben tener ambas para que el área del triángulo sea máxima?

35 Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$:
a) Halla las coordenadas de sus puntos de intersección.
b) Dibuja en unos mismos ejes de coordenadas las gráficas de las dos funciones.
c) A la vista de lo anterior, razona cuándo un número es mayor que su cuadrado.

PROBLEMA RESUELTO

36 **Dada la parábola $f(x) = x^2 - 2x - 3$:**
a) Dibuja su gráfica.
b) Dibuja la gráfica y halla la ecuación de la parábola $g(x)$, simétrica de la anterior respecto del eje OX.

a) $a > 0$.
Puntos de corte: $C(0, -3)$, $A(3, 0)$, $B(-1, 0)$
Eje: $x = 1$.
Vértice: $V(1, -4)$

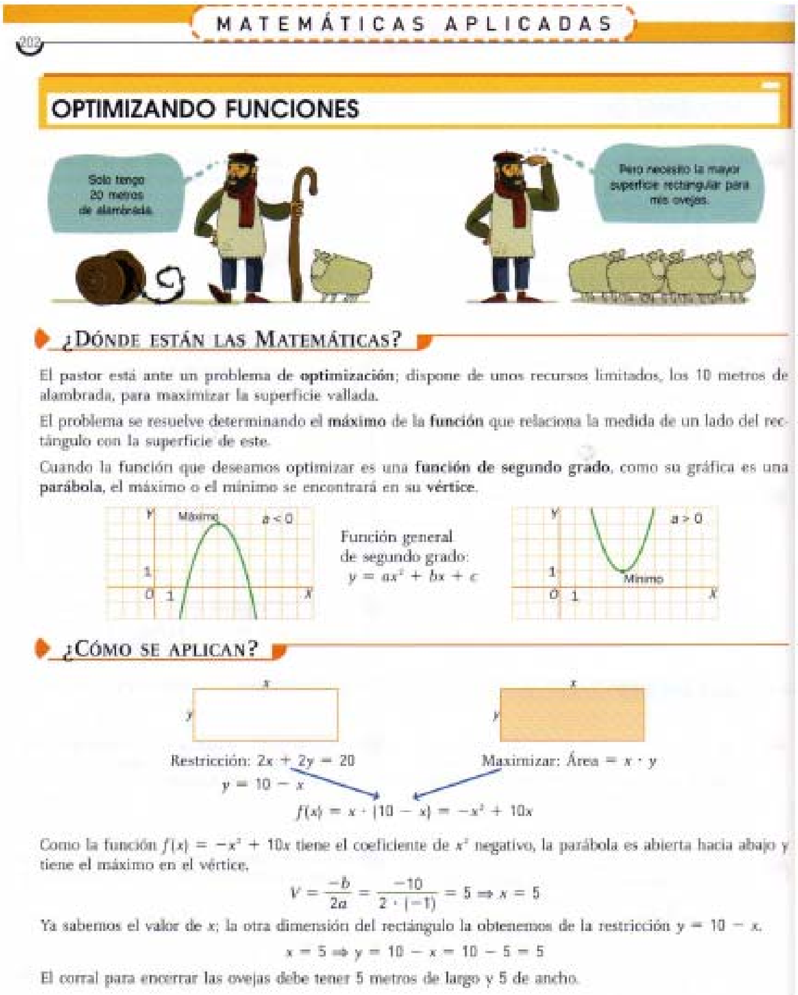
b) Si g es la simétrica de f respecto de OX, $g(x) = -f(x)$, luego $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

37 Dadas las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$, represéntalas según el eje correspondiente, pero en un mismo sistema de ejes coordenados.
Determina los puntos de corte de ambas parábolas.

La lección 11 contiene las siguientes secciones:

1. Las funciones de segundo grado $y = ax^2$
2. Traslaciones de la parábola $y = ax^2$
3. La función general de segundo grado
4. Funciones polinómicas definidas a trozos

A las secciones les sigue un apartado titulado *Matemáticas Aplicadas* donde se describe una situación y se explica qué contenido de las matemáticas en necesario aplicar y cómo aplicar, resolviendo el problema. A continuación, se proponen dos ejercicios de dificultad media y avanzada. En esta lección, se plantea un problema de optimización.



MATEMÁTICAS APLICADAS

202

OPTIMIZANDO FUNCIONES

¿DÓNDE ESTÁN LAS MATEMÁTICAS?

El pastor está ante un problema de **optimización**; dispone de unos recursos limitados, los 10 metros de alambrada, para maximizar la superficie vallada.

El problema se resuelve determinando el **máximo** de la **función** que relaciona la medida de un lado del rectángulo con la superficie de este.

Cuando la función que deseamos optimizar es una **función de segundo grado**, como su gráfica es una **parábola**, el máximo o el mínimo se encontrará en su **vértice**.

Función general de segundo grado: $y = ax^2 + bx + c$

¿CÓMO SE APLICAN?

Restricción: $2x + 2y = 20$
$y = 10 - x$

Maximizar: Área $= x \cdot y$

$f(x) = x \cdot (10 - x) = -x^2 + 10x$

Como la función $f(x) = -x^2 + 10x$ tiene el coeficiente de x^2 negativo, la parábola es abierta hacia abajo y tiene el máximo en el vértice.

$$V = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5 \Rightarrow x = 5$$

Ya sabemos el valor de x; la otra dimensión del rectángulo la obtenemos de la restricción $y = 10 - x$.

$$x = 5 \Rightarrow y = 10 - x = 10 - 5 = 5$$

El corral para encerrar las ovejas debe tener 5 metros de largo y 5 de ancho.

La lección continua con el apartado *Lo más importante*, donde se esquematiza lo aprendido durante el tema.

A continuación, en el apartado *Actividades finales*, se presentan un conjunto de ejercicios y problemas organizados según la finalidad buscada:

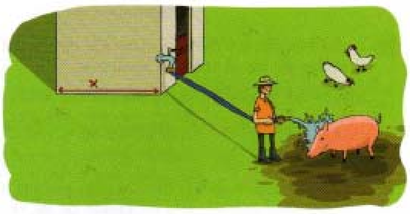
- *Para practicar y aplicar*
  Los ejercicios pertenecen a los tres niveles de dificultad comentados anteriormente.

- *Para reforzar*
  Son ejercicios más bien de nivel básico o medio.
- *Para ampliar*
  Están numerados como difíciles.
- *Para interpretar y resolver*
  Son problemas etiquetados como de escasa dificultad en los que se contextualiza una situación que puede darse en la vida cotidiana.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

83 La manguera

El extremo de entrada de agua de una manguera de riego se encuentra en la esquina de una casa que tiene forma cuadrada de x metros de lado. La manguera mide un metro más que dicho lado.



a) Representa mediante un dibujo la zona del terreno que incluye todos los puntos adonde puede llegar el extremo de salida de la manguera.

b) Escribe la ecuación de la función que relaciona la longitud de x con el área de la zona descrita en el apartado anterior.

Calcula dicha área para el caso de que la manguera mida 4 metros.

84 Los tramos de la renta

Durante el mes de mayo, los habitantes de un país deben pagar los impuestos anuales en relación con la renta total que han ganado. La ley determina las siguientes disposiciones.

- Se considera una cantidad fija exenta de pago de 5050 euros, considerada como necesaria para cubrir algunos gastos esenciales.
- A la cantidad anterior se debe sumar una de las siguientes, según el número de hijos que dependan del declarante.

1 hijo	2 hijos	3 hijos
1800	3800	7400

- La renta restante tributa según la siguiente tabla.

De 0 a 17 360 euros	24%
De 17 360 a 32 360 euros	28%
De 32 360 a 52 360 euros	37%
De 52 360 euros en adelante	43%

a) Calcula los impuestos que debe pagar una persona que ha ganado 37 500 euros según tenga 0, 1, 2 ó 3 hijos.

b) Escribe la función que relaciona la renta anual conseguida por una persona y los impuestos que debe abonar sabiendo que tiene dos hijos.

- *Autoevaluación*
  Se trata de una serie de ejercicios para que el alumno compruebe cuál ha sido su nivel de aprendizaje

La lección finaliza con un apartado denominado *Entre matemáticos* donde se presenta a un matemático, la idea que tuvo y qué situación se vivía en España en su época. En este caso, se habla de Miguel de Guzmán.

ENTRE MATEMÁTICOS

EL MATEMÁTICO... DIVULGADOR

Miguel de GUZMÁN (1936-2004)

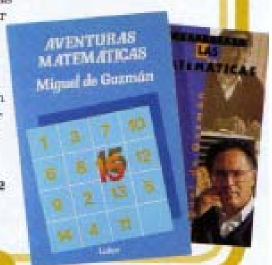
El matemático español Miguel de Guzmán estaba empeñado en mostrar a la sociedad la cara amiga de las matemáticas. No escatimó esfuerzos a la hora de luchar en todos los frentes: profesor de universidad, autor de libros de texto, pionero en el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, promotor de innumerables proyectos sobre educación… Pero si hay algo que Guzmán hacía como nadie, era divulgar las matemáticas. Contagió su entusiasmo a todo el que le escuchaba, y con sus numerosos libros logró poner las matemáticas al alcance de todos.

... SU IDEA...

Miguel de Guzmán siempre estuvo preocupado por la educación matemática en todos los niveles, desde primaria hasta la universidad.

En 1999 fundó en Madrid el **proyecto ESTALMAT (Estimulación del Talento Matemático)** con el objetivo de detectar a jóvenes que tengan aptitudes especiales en matemáticas y ayudarles a desarrollar sus habilidades.

Con su incansable labor, Miguel de Guzmán consiguió la financiación adecuada para mantener el proyecto y extenderlo a otras regiones de España.
www.e-sm.net/mt4yeso02



... Y SU ÉPOCA

En España se aprobó la Constitución y se estableció un régimen democrático. Nació internet y se consolidó como la mayor red de transmisión de información.

Capítulo 6
Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capitulo se recogen las dificultades a las que los alumnos de 4º ESO tienen que hacer frente al estudiar la función polinómica de segundo grado, así como los errores que posiblemente cometerán y su origen.

6.1.Dificultades

Compresión de nociones como:

- Dominio y recorrido
- Discontinuidad en un punto
- Para comprender que las ramas de la parábola se abren hasta el infinito
- Vértice de la parábola
  Se observó que los alumnos tenían dificultad para comprender que el vértice era curvo.
- Puntos de corte con los ejes
  Se observó dificultad para comprender que el punto de corte de la gráfica polinómica con los ejes se corresponde con la solución algebraica de la ecuación de segundo grado.
- Eje de simetría de la parábola
  Los alumnos tenían problemas para determinar el eje de simetría de la parábola una vez calculada la coordenada x del vértice.
- Para determinar si el vértice será mínimo o máximo observando simplemente la expresión algebraica de la función.
- Los alumnos encontraron dificultad para dibujar gráficas polinómicas definidas a trozos, así como para definir su dominio y recorrido, sobre todo si hay alguna discontinuidad.
- Para recordar la expresión que permite calcular la coordenada x del vértice de la parábola.
- Se observa una dificultad para diferenciar cómo realizar las traslaciones dependiendo de si son verticales u horizontales Por ejemplo, dado que al realizar una traslación vertical hacia arriba el número de unidades que se suma a la función f(x) es positivo los alumnos también creen que al realizar una traslación horizontal, si el número que se añade es positivo, el movimiento se realizará hacia la derecha.
- Para comprender que una función definida a trozos está definida por varias funciones.
- Los estudiantes tienen dificultad para comprender que no todas las funciones son polinómicas de grado uno.

6.2.Errores y su posible origen

- En funciones polinómicas definidas a trozos, si el dominio o recorrido está formado por más de un intervalo, los alumnos dan un único intervalo que abarca los anteriores.
- Al realizar una traslación horizontal de una parábola dada, los alumnos tienden a realizarla hacia el lado que no es.
- Dar el recorrido en el eje de abcisas.
- Dar los intervalos de crecimiento en el eje de ordenadas.
- Tendencia a creer que si la ecuación de segundo grado cuya solución son los puntos de corte con el eje OX, no tiene dos soluciones, se está cometiendo algún error en la resolución de la ecuación.
- Para determinar cuales son las ecuaciones de los ejes coordenados, $x=0$ ó $y=0$, para calcular los puntos de corte de la función con dichos ejes.
- Al dar las coordenadas de los puntos de corte con los ejes, creen que les falta una de ellas, lo cual no es cierto ya que el eje del que se trata aporta el valor de la segunda coordenada.
- No calcular correctamente el valor de la función en un punto cuando en la expresión algebraica x^2 está precedido por el signo negativo.
- Los alumnos dibujan el vértice acabado en punta.

Estos errores se originan por motivos diversos:

- Los alumnos conciben el dominio como un intervalo cuyos extremos se corresponden con el menor y mayor valor de x para los que existe la función.
- Al determinar los puntos de corte con los ejes, realizan los cálculos sin darles un significado. En general no deducen que condición cumplen los ejes, lo cual provoca que las confundan.
- No tienen costumbre de relacionar distintos conceptos y temas , si no que creen que lo aprendido en lecciones anteriores no tendrá continuidad a los largo del curso académico o que pueda ser estudiado desde otro punto de vista. Es el caso de la utilización de las ecuaciones de segundo grado para expresar funciones cuadráticas.

Capítulo 7
El proceso de estudio

En este capítulo se detallan las sesiones de docencia en el Centro para impartir el tema de la función cuadrática de segundo grado.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

Las 8 sesiones fueron impartidas a uno de los tres grupos de 4º de ESO. Cada una de las sesiones tenía una duración de 55 minutos y en dos de ellas se utilizó el programa Geogebra, siempre en viernes.

Sesión 1			
Tipo	*Tiempo*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Introducción del tema	10 min	Compartida	Dialógica
Exposición teórica: función $y=ax^2$, traslación vertical	30 min	Profesora	Dialógica
Ejercicios 53,54	15 min	Compartida	Constructivista

Sesión 2			
Tipo	*Tiempo*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Exposición teórica: traslación horizontal y oblicua de la función función $y=ax^2$	35 min	Profesora	Dialógica
Ejercicios 13,16,17,55	20 min	Alumnos	Constructivista

Sesión 3			
Tipo	*Tiempo*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Resumen 2 sesiones anteriores	10 min	Compartida	Dialógica
Exposición teórica: forma general de una función cuadrática $y=ax^2+bx+c$, estudio completo (ejemplo $y=x^2+x+1$)	25 min	Profesora	Magistral
Ejercicios 31 a)	10 min	Alumnos	Constructivista

Sesión 4			
Tipo	*Tiempo*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Ejercicio con Geogebra	55 min	Alumnos	Constructivista

Sesión 5			
Tipo	*Tiempo*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Corrección tarea :ejercicio 31 a)	15 min	Compartida	Dialógica
Ejercicios 66,73,74	40 min	Compartida	Dialógica

Sesión 6			
Tipo	*Tiempo*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Exposición teórica: Funciones polinómicas definidas a trozos	10 min	Profesora	Dialógica
Ejercicios 41,29, 32	45 min	Compartida	Dialógica

Sesión 7			
Tipo	*Tiempo*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Ejercicios funciones definidas a trozos: 40,42,84, Hoja de ejercicios, 4.(Anexo B)	55 min	Compartida	Dialógica

Sesión 8			
Tipo	*Tiempo*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Ejercicio con Geogebra	55 min	Alumnos	Constructivista

7.2. Actividades adicionales planificadas

Para completar el libro, los alumnos contaban con una colección de ejercicios que se les entregó al comienzo del tema anterior sobre las propiedades de las funciones. (Ver Anexo B)

Otra actividad adicional que se planificó fue la realización de dos sesiones de Geogebra que forman parte del Proyecto Gauss (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte), perteneciente al programa Escuela 2.0 con la finalidad de ofrecer materiales educativos digitales que reflejen modos creativos y amenos de aprender matemáticas. El grado de implicación requerido al profesorado participante es mayor que en otro tipo de actividades de formación y es necesario poder dedicarle una hora semanal de clase desde octubre hasta mayo.

Una de las actividades con Geogebra, denominada *Coeficientes* consistió en observar el efecto que tiene sobre una función cuadrática la variación de sus coeficientes. Para ello, el alumno debe observar la gráfica y responder a una serie de preguntas.(Ver Anexo C1).

La otra actividad denominada *Tiro parabólico* consistió en investigar cómo depende el resultado del lanzamiento del ángulo de inclinación de un cañón que lanza pelotas de tenis cañón y de la velocidad con la que se impulsa la pelota. (Ver AnexoC2).

7.3. La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista

Las siguientes tablas recogen una estimación del tiempo de trabajo autónomo de los alumnos en las distintas sesiones de docencia.

Sesión 1		
Tipo	*Tiempo estimado*	*Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje*
Ejercicios 53,54	15 min	Aplicación

Sesión 2		
Tipo	*Tiempo estimado*	*Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje*
Ejercicios 13,16,17,55	20 min	Aplicación

Sesión 3		
Tipo	*Tiempo estimado*	*Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje*
Estudio completo $y=x^2+x+1$	20 min	Aplicación
Ejercicios 31 a)	10 min	Aplicación

Sesión 4		
Tipo	*Tiempo estimado*	*Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje*
Ejercicio con Geogebra	55 min	Refuerzo

Sesión 5		
Tipo	*Tiempo estimado*	*Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje*
Ejercicios 66	15 min	Aplicación
Ejercicios 73,74	25 min	Refuerzo

Sesión 6		
Tipo	*Tiempo estimado*	*Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje*
Ejercicios 41,29, 32	45 min	Aplicación

Sesión 7		
Tipo	*Tiempo estimado*	*Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje*
Ejercicios funciones definidas a trozos: 40,42	20 min	Aplicación
Ejercicio 84	20 min	Conocimientos previos-aplicación
Ejercicios hoja: 4	15 min	Refuerzo

Sesión 8		
Tipo	*Tiempo estimado*	*Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje*
Ejercicio con Geogebra	55 min	Refuerzo

Capítulo 8
Experimentación

En este capítulo correspondería realizar un cuestionario en el aula donde se ha impartido clase durante el período de prácticas para obtener resultados y posteriormente discutirlos, pero debido a diversas causas como charlas de orientación profesional, excursiones y la necesidad de realizar un repaso de contenido antes de los exámenes de la 3º evaluación, no fue posible realizar el examen.

Sí se presenta un posible cuestionario y los comportamientos esperados durante la explicación del tema correspondiente a la función polinómica.

8.1. Muestra y diseño de la experimentación

El alumnado al que se imparte clase pertenece a dos de los tres grupos de 4º de ESO (opción B). Cada uno de los grupos está formado por 18 alumnos aproximadamente, de origen español, de clase media-alta, con una ligera mayor presencia de mujeres y sin ningún repetidor de curso. Aunque alguno de ellos acude a clases particulares de la materia, en general son alumnos implicados, motivados y que participan en el desarrollo de la clase, tanto preguntando dudas como saliendo a la pizarra.

Las clases de teoría y ejercicios se combinan con una clase en el aula de informática, una vez por semana, para utilizar el programa Geogebra dentro del proyecto Gauss. Aunque si se considera que se necesita alguna hora más de teoría o ejercicios, se prescinde de esta docencia utilizando las TIC´s. Además en ningún momento se hace uso de la pizarra digital o del proyector. Tras la explicación del tema se realiza un examen pero no hay evaluaciones intermedias.

Se sigue el libro, aunque no de una manera estricta. Si se cree que una definición es confusa o que la manera de explicar un concepto no es la adecuada, se hace uso de otros apuntes.

El alumnado copia lo que se escribe en la pizarra para estudiarlo posteriormente, lo cual puede provocar que no atiendan a lo que se está explicando.

Se ejerce control sobre los alumnos en cuanto a la tarea que realizan en casa, anotando un negativo en caso de no hacerla.

8.2. El cuestionario

Como ya se ha indicado anteriormente, no fue posible realizar un examen sobre la función polinómica, sino que el contenido referente a ese tema y al anterior sobre las propiedades de las funciones fue evaluado en el examen global de la 3º evaluación.
Tampoco se pude acceder a exámenes de otros años por razones de confidencialidad pero sí que se pudo acceder al examen global de la 3º evaluación del curso 2010-2011, encontrándose en él los siguientes ejercicios sobre funciones:

EXAMEN 3º EVALUACIÓN 2010-2011 (20 MAYO 2011)

1- Representa la siguiente función $y = -x^2 + 4x + 5$, indicando cuál es su vértice, los puntos de corte con los ejes y cuál es su eje de simetría.

(1,5p)

2- Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas: *(1p)*

a) Una función cuadrática con a >0 es creciente en todo R.
b) La función *y =mx+n* es creciente si n>0.
c) La gráfica de la función $y = -4x^2$ es una parábola abierta hacia abajo.
d) La parábola $y = x^2 - 6x + 8$ corta al eje OX en los puntos (2,0) y (4,0).

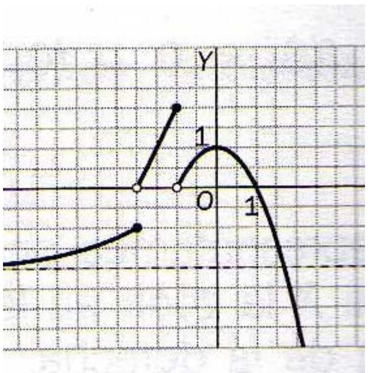
3- a) Define función, dominio y recorrido. (*0,75p)*

b) Indica el dominio de las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ *(0,75p)*

$f(x) = \dfrac{x-2}{x-5}$

4- La función f está representada a continuación:



a) Estudia la continuidad de f. (*0,35p)*
b) Calcula: *(0,4p)*

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$= $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$=

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$= $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$=

5. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas:

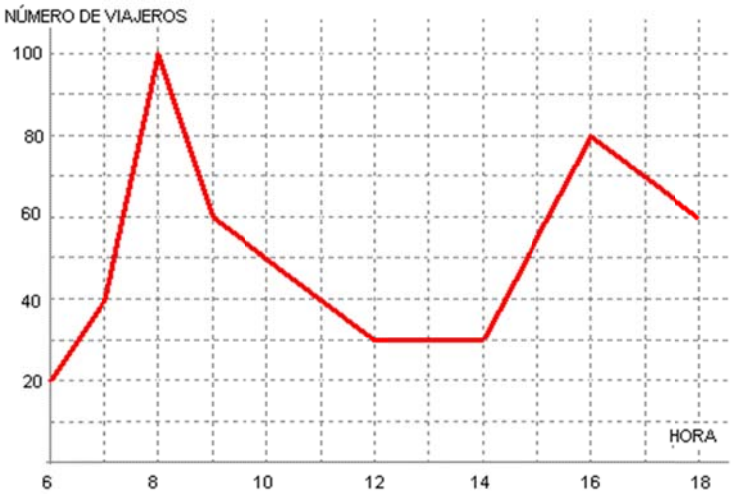
a) La función $f(x) = \dfrac{x^4 - 3}{x^2 + 1}$ es simétrica impar. *(0,5p)*

b) La función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ corta al eje OX en los puntos (2,0) y (4,0). *(0,5p)*

c) Una función puede tener infinitos puntos de corte con el eje de ordenadas y con el eje de abscisas. *(0,5p)*

6. La siguiente gráfica muestra el número de viajeros en una línea de autobuses según la hora del día.

a) Indica su dominio y su recorrido. *(0,5p)*
b) Indica los tramos en los que la función es decreciente y los tramos en los que es creciente. *(0,5p)*
c) ¿En qué tramo no hay variación en el número de viajeros? ¿Cómo dirías que es la función en ese tramo? *(0,5p)*
d) Indica los máximos y mínimos relativos y absolutos. *(0,5p)*



8.3. Cuestiones y comportamientos esperados

Ante este cuestionario los comportamientos esperados serían:

- En el ejercicio1, para representar la función, se realizará una tabla de valores en lugar de dibujarla a partir de los puntos de corte y el vértice.
- En el ejercicio 2, en los apartados a) y b), gran parte de los alumnos fallarán en la respuesta debido al uso de símbolos. No se espera que den un valor al coeficiente desconocido que cumpla la condición exigida y dibujen la gráfica de la función.
  En el apartado c) el porcentaje de los alumnos que dibuje la parábola será similar al que conozcan la relación entre el coeficiente de x^2 y la concavidad de la parábola.
  En el apartado d) la mayoría de los alumnos dibujará la gráfica y comprobará si efectivamente corta en esos puntos. De los alumnos restantes, será mayor el número de aquellos que calculan algebraicamente los puntos de corte, siendo minoritario el número de alumnos que sustituyen las coordenadas de los puntos dados en la ecuación de la función.
- En el ejercicio 3, serán muy pocos los alumnos que definan correctamente las nociones exigidas ya que se debe utilizar un lenguaje matemático adecuado y además normalmente a la hora de estudiar matemáticas no se da importancia a las definiciones. Muchos de los que realicen correctamente el apartado a), no entenderán lo que escriben pero como durante la explicación

de estas nociones se recuerda más de una vez que en el examen se preguntará sobre ello, se lo aprenden de memoria.
En el apartad b) se espera que en la primera función, indiquen como dominio todos los números reales excepto el 3 y el -3, en lugar de dar los dos intervalos correctos. En la segunda función es posible que crean que x=2 no puede formar parte del dominio.

- En el ejercicio 4 un comportamiento esperado consiste en determinar erróneamente el dominio y recorrido debido a las discontinuidades presentes. Es posible que gran parte de los alumnos calculen mal los límites ya que es un concepto nuevo para ellos.
- En el ejercicio 5, en el apartado a), se espera que apliquen la relación existente entre los coeficientes de *x* y la simetría de la función, antes que calcular si f(x)= -f(-x). En el caso de calcular así, será común olvidarse de algún signo negativo o poner alguno de más.
  En el apartado b) se espera lo mismo que en el ejercicio 2 d).
  En el apartado c) es necesario saber que en una función para cada valor de *x*, sólo existe un valor de *y*. Es algo que se remarca mucho durante la explicación del tema pero seguro que más de un alumno responde que la afirmación es cierta pero sin razonar.
- El ejercicio 6 no ofrece gran dificultad para el alumno, esperándose que lo realice correctamente.

8.4. Resultados

Debido a la imposibilidad de realizar un examen, los resultados observados durante la explicación de la materia están detallados en el capítulo 6: Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica, no detectándose todos ellos en el aula.

8.5. Discusión de los resultados

En general, este alumnado de 4º de ESO está muy motivado y se evidencia una gran interrelación con la profesora.
Los errores y dificultades que han podido tener lugar durante la explicación de la unidad didáctica son esperados y ninguno de ellos evidencia un conocimiento deficiente de la materia por parte de los alumnos.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

En este trabajo se ha realizado una aproximación al concepto matemático de función polinómica de segundo grado.

Para ello, en la primera parte del trabajo se ha analizan los contenidos sobre funciones que pueden encontrarse en la legislación vigente, así como el tratamiento que se le da en los libros de texto utilizados en el centro donde se realizó la actividad docente.

En la segunda parte se ha analizado como los alumnos de 4º de ESO afrontan la función polinómica en cuanto a la resolución de problemas e interpretación de sus gráficas, detectando las dificultades y errores que cometen con más frecuencia.

Conclusiones generales del trabajo

La primera conclusión a la que se ha llegado es la evidente atomización de contenidos que tiene lugar en Secundaria ya que, tanto en el currículo oficial como en los libros de texto analizados, las funciones, al igual que otros conceptos sobre álgebra o estadística, aparecen aisladas en un bloque, sin interrelacionarse con el resto de la materia. Por ejemplo, el hecho de representar funciones se constituye como un fin pero no como una herramienta que permite resolver ecuaciones de forma gráfica. También se concluye que el aprendizaje principalmente se basa en afianzar conceptos mediante la práctica, realizando una gran cantidad de ejercicios y problemas, siendo muy pocos aquellos que están contextualizados dentro de una situación real.

Cuestiones abiertas

Se pueden plantear las siguientes cuestiones:

- Conveniencia o no de atomizar los contenidos matemáticos.
- Conveniencia o no de realizar más ejercicios que permitan al alumno conocer la aplicación de las matemáticas a situaciones reales.
- Poder realizar un cuestionario a los alumnos para poder analizar los resultados.
- Intentar que los alumnos superen ciertas dificultades mediante la realización de actividades en clase que sean un ejemplo aplicación de conceptos matemáticos. Por ejemplo, es común confundir la condición que cumple la coordenada x o y, en función de si un punto pertenece al eje de abcisas o al de coordenadas. Podría plantearse una actividad en la que dos paredes contiguas de la clase se correspondan con los ejes de coordenadas y determinen los pasos en dirección horizontal y vertical que hay que dar llegar a un punto determinado desde el “origen” de coordenadas. Colocando varios de los objetos en la línea de las dos paredes, es decir, ejemplificando los puntos sobre los ejes de coordenadas, el alumno puede llegar a comprender más fácilmente cómo son las coordenadas de los puntos que pertenecen a los ejes de coordenadas.

Referencias

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *BOE* 293, de 8 diciembre, 43053–43102.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007b). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO. *BOE* 5, de 5 enero, 677–773.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007a). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE* 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, Godino-Font-Wilhelmi, 2006, Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *9*, pag. 131-155.

Matemáticas Múltiplo 2º ESO, Proyecto Conecta 2.0, Vizmanos, Alcaide, Anzola, Peralta .*SM*, 2011.

Matemáticas Múltiplo 3º ESO, Proyecto Conecta 2.0, Vizmanos, Alcaide, Anzola, Peralta. *SM*, 2010.

Matemáticas 4º ESO-opción B, Proyecto Ábaco, Vizmanos, Alcaide, Anzola Peralta. *SM*, 2008.

Matemáticas 1º Bachillerato-opción Ciencias y Tecnología, Vizmanos, Hernández, Alcaide. *SM*, 2008.

Matemáticas 2º Bachillerato-opción Ciencias y Tecnología , Vizmanos, Hernández, Alcaide *SM*, 2008.

Cálculo1 de una variable, E. Larson, McGraw-Hill, 1989, novena edición.

Proyecto Gauss, Programa Escuela 2.0, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

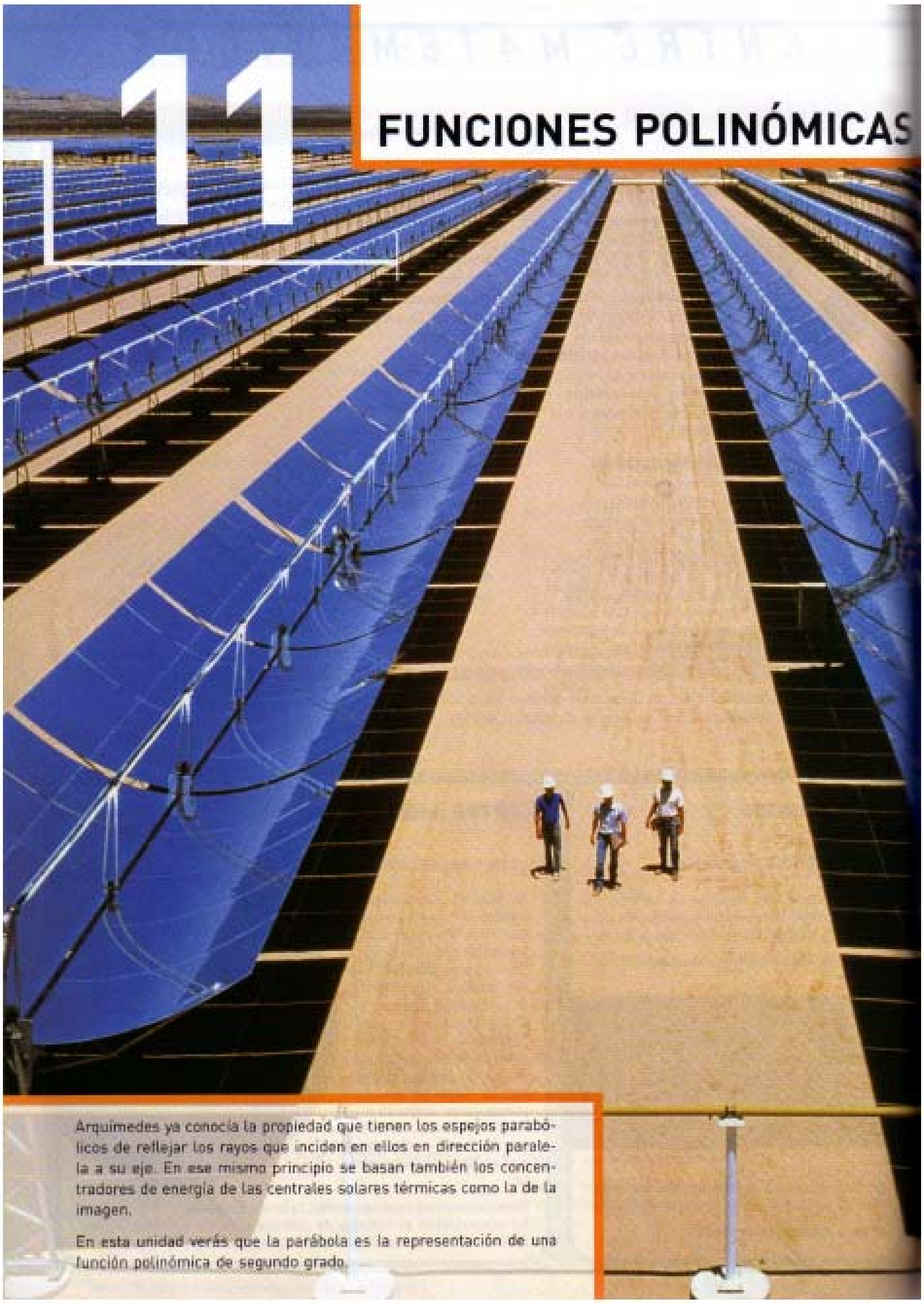
Anexos

A. Unidades didácticas del libro de texto

B. Colección de ejercicios de refuerzo

C. Actividades de refuerzo en el aula de informática

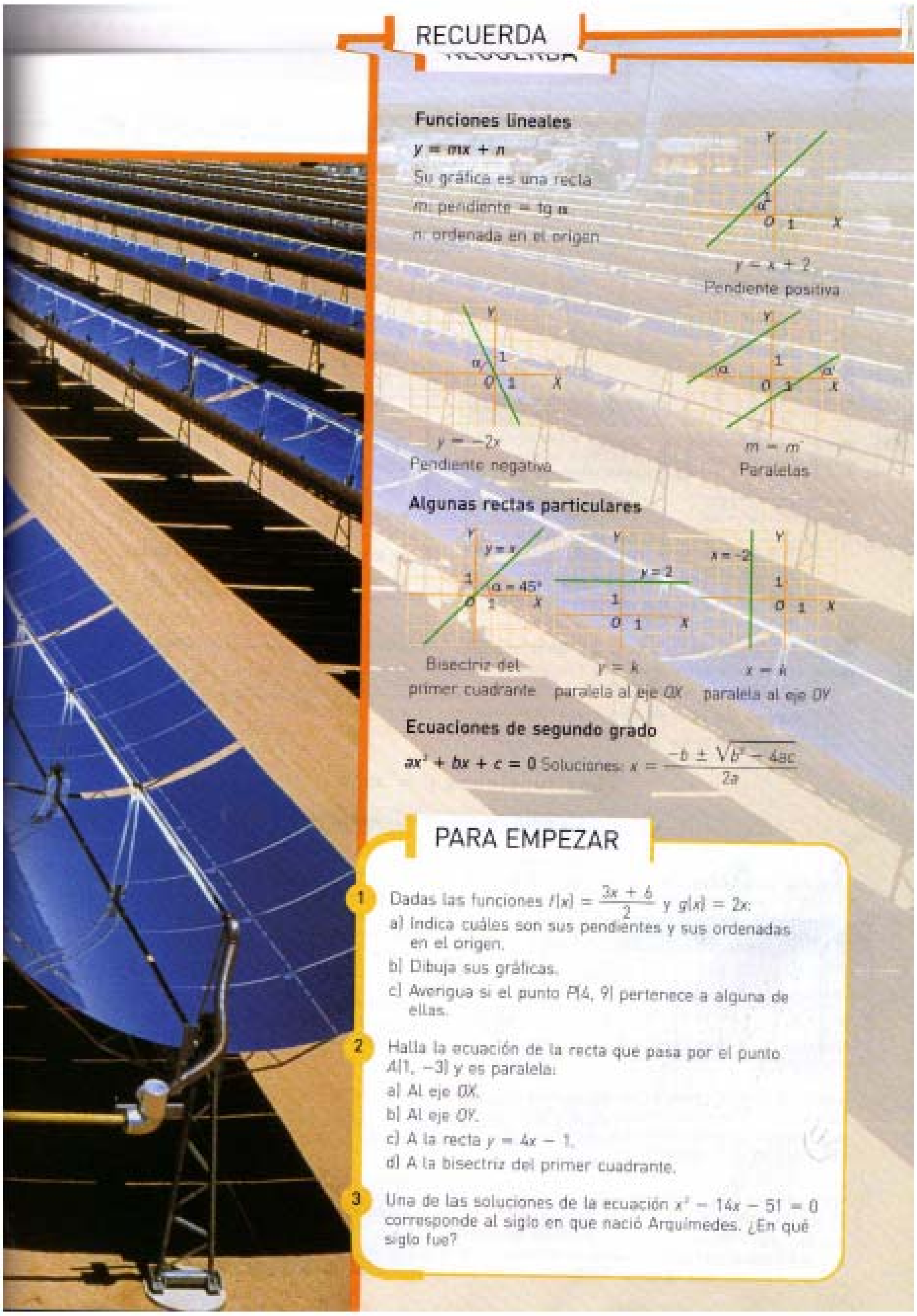
A. Unidad didáctica del libro de texto



11 FUNCIONES POLINÓMICAS

Arquímedes ya conocía la propiedad que tienen los espejos parabólicos de reflejar los rayos que inciden en ellos en dirección paralela a su eje. En ese mismo principio se basan también los concentradores de energía de las centrales solares térmicas como la de la imagen.

En esta unidad verás que la parábola es la representación de una función polinómica de segundo grado.



RECUERDA

Funciones lineales

$y = mx + n$

Su gráfica es una recta

m: pendiente = tg α

n: ordenada en el origen

$y = x + 2$
Pendiente positiva

$y = -2x$
Pendiente negativa

$m = m'$
Paralelas

Algunas rectas particulares

Bisectriz del primer cuadrante

$y = k$ paralela al eje OX

$x = k$ paralela al eje OY

Ecuaciones de segundo grado

$ax^2 + bx + c = 0$ Soluciones: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

PARA EMPEZAR

1. Dadas las funciones $f(x) = \frac{3x + 6}{2}$ y $g(x) = 2x$:
   a) Indica cuáles son sus pendientes y sus ordenadas en el origen.
   b) Dibuja sus gráficas.
   c) Averigua si el punto $P(4, 9)$ pertenece a alguna de ellas.

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, -3)$ y es paralela:
   a) Al eje OX.
   b) Al eje OY.
   c) A la recta $y = 4x - 1$.
   d) A la bisectriz del primer cuadrante.

3. Una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 14x - 51 = 0$ corresponde al siglo en que nació Arquímedes. ¿En qué siglo fue?

1. Las funciones de segundo grado $y = ax^2$

Ejemplo. *Dibuja las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = -x^2$, y determina sus características.*

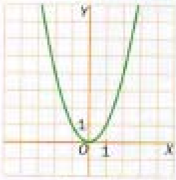
Las funciones de segundo grado más sencillas son $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$.

x	$y = x^2$	$y = -x^2$
...	...	...
-3	9	-9
-2	4	-4
-1	1	-1
0	0	0
1	1	-1
2	4	-4
3	9	-9
...	...	...

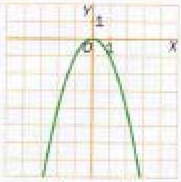
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

$g(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = g(x)$

$f(x) = x^2$



$g(x) = -x^2$



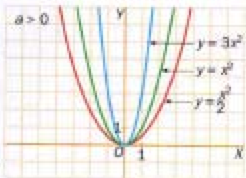
Características	$f(x) = x^2$	$g(x) = -x^2$
Dominio	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
Recorrido	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$
Simetría	Par, eje OY	Par, eje OY
Crecimiento	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$
Decrecimiento	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Máximos y mínimos	$O(0, 0)$ mínimo	$O(0, 0)$ máximo
Continuidad	Es continua.	Es continua.

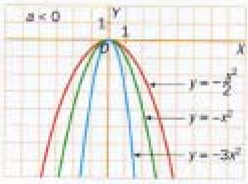
Las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = -x^2$ son **parábolas**.
- El eje de simetría $x = 0$ se llama **eje** de la parábola.
- El punto $O(0, 0)$ se llama **vértice** de la parábola: es el mínimo de $y = x^2$ y el máximo de $y = -x^2$.

Las funciones $y = ax^2$

Ejemplo. *Representa las funciones $y = 3x^2$, $y = -3x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$.*

x	$y = 3x^2$	$y = -3x^2$	$y = \frac{x^2}{2}$	$y = -\frac{x^2}{2}$
-2 ó 2	12	-12	2	-2
-1 ó 1	3	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	0	0	0	0
...	...	...	...	...





Vemos que si las funciones $y = x^2$ e $y = -x^2$ se multiplican por un número $a > 0$, las gráficas correspondientes solo varían en que se cierran más o menos, según aumenta o disminuye el valor de a, respectivamente.

Las gráficas de las funciones $\boldsymbol{y = ax^2}$ son también **parábolas**, y tienen las mismas propiedades que las funciones $y = x^2$ si $a > 0$ e $y = -x^2$ si $a < 0$.

ACTIVIDADES

PARA PRACTICAR

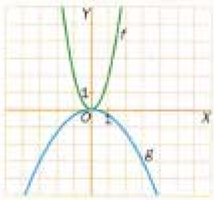
EJERCICIO RESUELTO

1 **Elabora las correspondientes tablas de valores y dibuja en los mismos ejes las gráficas de las siguientes funciones.**

$f(x) = 2x^2$

$g(x) = -\frac{x^2}{3}$

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
$f(x)$	0	2	2	8	8	18	18	...
$g(x)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	−3	−3	...

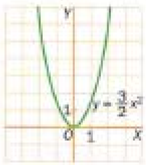


2 Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones cuadráticas.

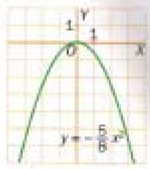
a) $y = -\frac{3}{2}x^2$ b) $y = \frac{2}{3}x^2$ c) $y = 4x^2$

3 Halla el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las parábolas cuyas gráficas son las siguientes.

a)



b)



4 Ordena las siguientes parábolas según la mayor o menor abertura de sus ramas, y averigua si tienen máximos o mínimos.

$y = 9x^2$ $y = -4x^2$ $y = 5x^2$ $y = -0{,}8x^2$

5 Halla la intersección de la parábola $y = x^2$:

a) Con la bisectriz del primer cuadrante.

b) Con la parábola $y = -x^2$.

6 Dos parábolas vienen expresadas por la misma función $y = ax^2$. La primera pasa por el punto $P(2, -6)$, y la segunda, por el punto $Q(-2, 6)$.

a) Halla la ecuación de cada una de ellas.

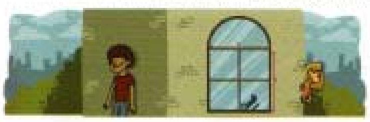
b) ¿Cómo son entre sí sus gráficas?

PARA APLICAR

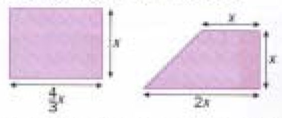
7 Desde el nivel del suelo, se deja caer una pelota a un pozo, y a los 2 segundos se encuentra a 19,6 metros de profundidad. Sabiendo que la distancia recorrida en función del tiempo viene dada por una parábola del tipo $y = mt^2$, halla el valor de m.

8 Los vértices de un triángulo son el origen de coordenadas y los puntos de intersección de la parábola $y = -2x^2$ con la recta $y = -2$. Halla el área del triángulo.

9 El cristal de una ventana tiene la forma de un cuadrado de lado x unido a un semicírculo de diámetro x. Halla la función que expresa el área del cristal en términos de x y dibuja su gráfica.



10 Halla la función que expresa el área de los siguientes polígonos en términos de x.



¿Cuál de las dos funciones tiene sus ramas más abiertas?

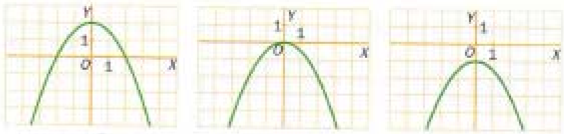
11 Un vendedor de enciclopedias cobra como complemento de su sueldo una cantidad proporcional al cuadrado del número de enciclopedias que vende. Este mes ha vendido 16 y ha percibido 320 euros de complemento.

a) Halla la función que expresa el complemento en términos del número de enciclopedias.

b) Si el mes siguiente vende un 25% más, ¿en qué porcentaje se incrementa el complemento con respecto al del mes anterior?

2. Traslaciones de la parábola $y = ax^2$

Traslación vertical: $y = ax^2 + k$

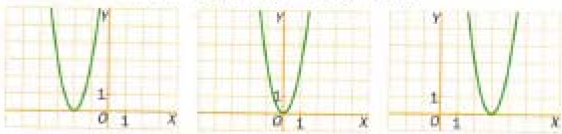


$y = -\frac{x^2}{2} + 2$ $\qquad$ $y = -\frac{x^2}{2}$ $\qquad$ $y = -\frac{x^2}{2} - 1$

Las gráficas de las parábolas $y = ax^2 + k$ resultan de trasladar **verticalmente la parábola $y = ax^2$ k unidades** hacia arriba si $k > 0$, o hacia abajo si $k < 0$.

El vértice de la parábola es $V(0, k)$, y su eje de simetría, la recta $x = 0$.

Traslación horizontal: $y = a(x + h)^2$



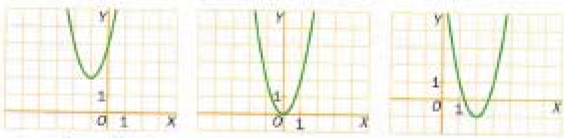
$y = 3(x + 2)^2$ $\qquad$ $y = 3x^2$ $\qquad$ $y = 3(x - 3)^2$

Las gráficas de las parábolas $y = a(x + h)^2$ resultan de **trasladar horizontalmente la parábola $y = ax^2$ h unidades** hacia la izquierda si $h > 0$, o hacia la derecha si $h < 0$.

El vértice de la parábola $y = a(x + h)^2$ es $V(-h, 0)$, y el eje de simetría, la recta $x = -h$.

Traslación oblicua: $y = a(x + h)^2 + k$

Se realizan sucesivamente las dos traslaciones anteriores.



$y = 2(x + 1)^2 + 2$ $\qquad$ $y = 2x^2$ $\qquad$ $y = 2(x - 2)^2 - 1$

$y = 2x^2 + 4x + 4$ $\qquad$ $y = 2x^2 - 8x + 7$

Las gráficas de las parábolas $y = a(x + h)^2 + k$ resultan de **trasladar la parábola $y = ax^2$ k unidades verticalmente** y **h unidades horizontalmente**.

El vértice de la parábola es $V(-h, k)$, y el eje de simetría, la recta $x = -h$.

Al desarrollar $y = a(x + h)^2 + k$, resulta una función de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

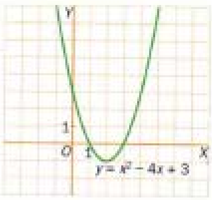
mientos algebraicos, de las siguientes funciones.

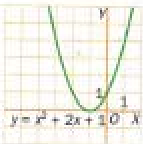
$f(x) = x^2 + 1$ $\qquad$ $g(x) = 3(x + 1)^2 - 2$

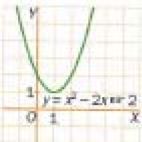
3. La función general de segundo grado

Ejemplo. *Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$.*

- Como $a > 0$, la parábola está abierta hacia arriba.
- **Puntos de corte con el eje *OX*.** Son los valores de x para los cuales $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
  Los puntos de corte son $A(1, 0)$ y $B(3, 0)$.
- **Puntos de corte con el eje *OY*.** Son los valores de y para los cuales $x = 0 \Rightarrow y = 3$. Solución: $y = 3$.
  El punto de corte es $C(0, 3)$.
- **Eje de la parábola.** Averiguamos si hay algún otro valor de x que tenga la misma ordenada, es decir, $f(x) = 3$.
  $x^2 - 4x + 3 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$, $x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 4$
  Como la parábola es **simétrica** respecto de su eje, este estará en el punto medio de $[x_1, x_2] = [0, 4]$. El eje será la recta vertical $x = 2$.
- **Vértice.** Su abscisa es $x = 2$. $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. El vértice es: $V(2, -1)$







La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ es una **parábola**.

- Si $a > 0$, la parábola está **abierta hacia arriba**.
  Si $a < 0$, la parábola está **abierta hacia abajo**.
- **Puntos de corte con el eje *OX*.** Se hace $y = 0$, y resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
  - Si tiene dos soluciones, es secante al eje *OX*.
  - Si tiene una única solución, es tangente al eje.
  - Si no tiene soluciones, no corta el eje.
- **Puntos de corte con el eje *OY*.** Se hace $x = 0 \Rightarrow y = c$. Punto $(0, c)$.
- **Eje** de la parábola: la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- **Vértice** de la parábola: **su abscisa es** $x = -\dfrac{b}{2a}$, y su ordenada se obtiene sustituyendo este valor en $y = ax^2 + bx + c$.

PROBLEMA RESUELTO

24 **Dada la función $y = x^2 + x + 1$:**

a) Averigua si su gráfica corta el eje *OX*.

b) Halla el eje y el vértice de la parábola.

a) $x^2 + x + 1 = 0$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; como no tiene solución real, no corta el eje *OX*.

b) Los coeficientes son: $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Se sustituye en $x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow$ Eje: $x = -\dfrac{1}{2}$

Si $x = -\dfrac{1}{2}$, le corresponde $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ Vértice: $V\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$

ACTIVIDADES

PARA PRACTICAR

25 Contesta a las siguientes preguntas relativas a la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

a) ¿Cuándo tiene un mínimo?

b) ¿Cuándo es tangente al eje OX?

c) ¿Cuándo corta el eje OY?

26 Halla la ecuación del eje y las coordenadas del vértice de cada una de las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 + 6x - 1$ c) $y = -x^2 + 8x$

b) $y = \frac{5}{3}x^2 + 2$ d) $y = 3x^2 + 4x - 2$

27 Averigua si las siguientes parábolas son secantes al eje OX o tangentes o no lo cortan.

a) $y = x^2 + 6x - 7$ c) $y = x^2 - x + 1$

b) $y = 4x^2 - 1$ d) $y = 16x^2 - 24x + 9$

28 Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas, la ecuación del eje y las coordenadas del vértice de las siguientes parábolas.

a) $y = -x^2 + 3x + 10$

b) $y = 9x^2 - 6x + 1$

29 La parábola $y = x^2 + bx + c$ pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(-1, 1)$. Halla b y c.

EJERCICIO RESUELTO

30 **Dibuja la gráfica de la función $y = x^2 + 2x - 3$.**

Como $a = 1 > 0$, la parábola está abierta hacia arriba.

Puntos de corte: $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow C(0, -3)$

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -3, x = 1 \Rightarrow$

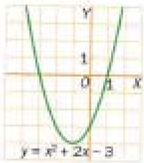
$\Rightarrow A(-3, 0), B(1, 0)$

Eje: $x = \frac{-2}{2} = -1$

Vértice: $x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = (-1)^2 + 2 \cdot 1 - 3 =$

$= -4 \Rightarrow V(-1, -4)$



31 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = -x^2 + 6x - 5$ b) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$

32 Halla la ecuación de la parábola que tenga su vértice en el punto $V(1, -2)$ y pase por el punto $P(0, -3)$.

PARA APLICAR

33 Un fabricante diseña piezas de metal de la forma que se indica en la figura.

a) Halla la función que expresa el área de la pieza.

b) Comprueba que es una parábola y halla las coordenadas de su vértice.

34 La base y la altura de un triángulo suman 4 centímetros. ¿Qué longitud deben tener ambas para que el área del triángulo sea máxima?

35 Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$:

a) Halla las coordenadas de sus puntos de intersección.

b) Dibuja en unos mismos ejes de coordenadas las gráficas de las dos funciones.

c) A la vista de lo anterior, razona cuándo un número es mayor que su cuadrado.

PROBLEMA RESUELTO

36 **Dada la parábola $f(x) = x^2 - 2x - 3$:**

a) Dibuja su gráfica.

b) Dibuja la gráfica y halla la ecuación de la parábola $g(x)$, simétrica de la anterior respecto del eje OX.

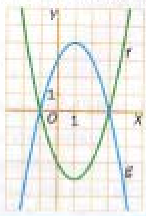
a) $a > 0$.

Puntos de corte: $C(0, -3)$, $A(3, 0)$, $B(-1, 0)$

Eje: $x = 1$.

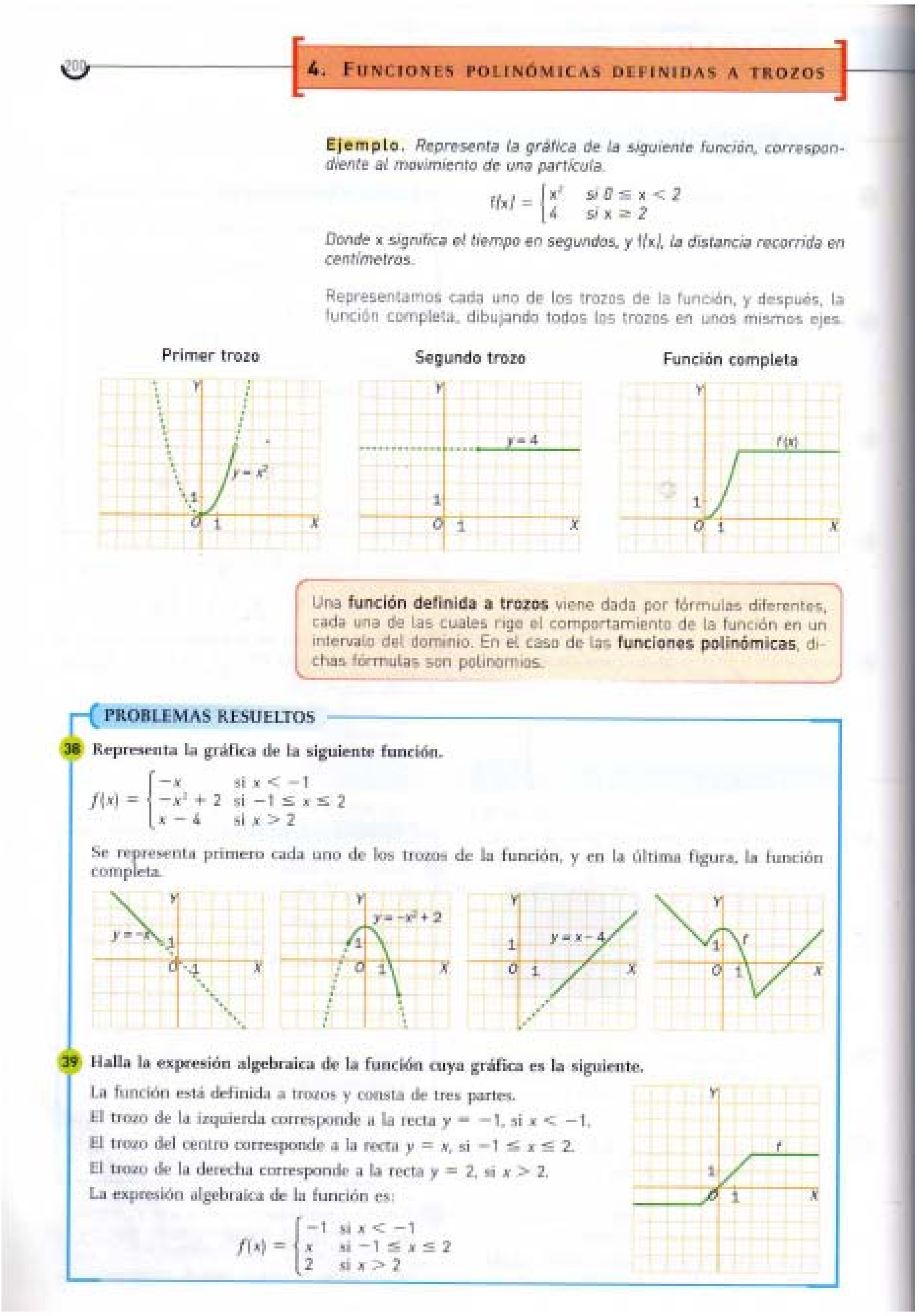
Vértice: $V(1, -4)$

b) Si g es la simétrica de f respecto de OX, $g(x) = -f(x)$, luego $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.



37 Dadas las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$, represéntalas según el eje correspondiente, pero en un mismo sistema de ejes coordenados.

Determina los puntos de corte de ambas parábolas.



200

4. Funciones polinómicas definidas a trozos

Ejemplo. *Representa la gráfica de la siguiente función, correspondiente al movimiento de una partícula.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ 0 \le x < 2 \\ 4 & si\ x \ge 2 \end{cases}$$

Donde x significa el tiempo en segundos, y f(x), la distancia recorrida en centímetros.

Representamos cada uno de los trozos de la función, y después, la función completa, dibujando todos los trozos en unos mismos ejes.

Una **función definida a trozos** viene dada por fórmulas diferentes, cada una de las cuales rige el comportamiento de la función en un intervalo del dominio. En el caso de las **funciones polinómicas**, dichas fórmulas son polinomios.

PROBLEMAS RESUELTOS

38 **Representa la gráfica de la siguiente función.**

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Se representa primero cada uno de los trozos de la función, y en la última figura, la función completa.

39 **Halla la expresión algebraica de la función cuya gráfica es la siguiente.**

La función está definida a trozos y consta de tres partes.

El trozo de la izquierda corresponde a la recta $y = -1$, si $x < -1$.

El trozo del centro corresponde a la recta $y = x$, si $-1 \le x \le 2$.

El trozo de la derecha corresponde a la recta $y = 2$, si $x > 2$.

La expresión algebraica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

PARA PRACTICAR

40 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \\ -x + 3 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Halla $f(-1)$, $f(0)$, $f(0,1)$, $f(2,9)$, $f(3)$ y $f(4)$.
b) Dibuja su gráfica.

41 Dibuja la gráfica de la siguiente función.

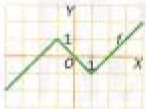
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

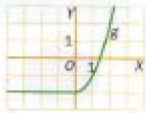
42 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

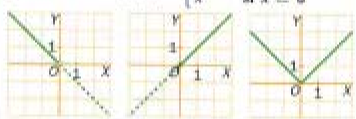
43 Halla la expresión algebraica de las funciones, formadas por trozos de rectas o parábolas, que tienen estas gráficas.

a) 

b) 

EJERCICIO RESUELTO

44 **Representa la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$, que está definida del siguiente modo: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$**



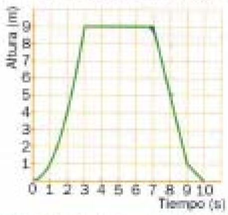
$y = -x$ $\qquad$ $y = x$ $\qquad$ $f(x) = |x|$

45 Representa la gráfica de las siguientes funciones.
a) $f(x) = x + |x|$ $\qquad$ b) $f(x) = x - 2|x|$

PARA APLICAR

46 El precio por el estacionamiento de un vehículo en un aparcamiento público es de 2 euros por la primera hora, 1 euro más por cada hora añadida o fracción, y hasta un máximo de 8 euros por día. Dibuja la gráfica de esa función correspondiente a las 10 primeras horas.

47 Una paloma vuela desde el suelo hasta la terraza de una casa, permanece en ella un tiempo y luego regresa al suelo. La gráfica, formada por trozos de rectas o parábolas, muestra la variación en el tiempo de la altura a la que se encuentra la paloma.

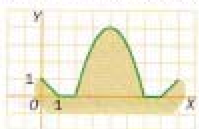


Halla la expresión algebraica de la función correspondiente a la trayectoria seguida por la paloma.

48 Dibuja la gráfica y escribe la expresión de la función simétrica respecto del origen de coordenadas de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

49 Escribe la expresión algebraica de la función cuya gráfica es el perfil marcado en color verde de este sombrero.



50 El precio del viaje de fin de curso de 4.° de ESO es de 200 euros por persona si van 30 personas o menos. En cambio, si viajan más de 30 y menos de 40, rebajan un 5% por cada persona que sobrepase el número de 30, y si asisten 40 o más, el precio por persona es de 100 euros.

Halla la expresión y dibuja la gráfica de la función que hace corresponder al número de viajeros el precio del viaje.

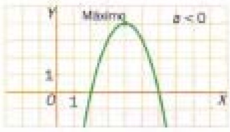
OPTIMIZANDO FUNCIONES

¿Dónde están las Matemáticas?

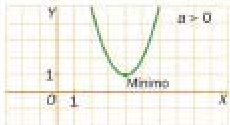
El pastor está ante un problema de **optimización**; dispone de unos recursos limitados, los 10 metros de alambrada, para maximizar la superficie vallada.

El problema se resuelve determinando el **máximo** de la **función** que relaciona la medida de un lado del rectángulo con la superficie de este.

Cuando la función que deseamos optimizar es una **función de segundo grado**, como su gráfica es una **parábola**, el máximo o el mínimo se encontrará en su **vértice**.



Función general
de segundo grado:
$y = ax^2 + bx + c$



¿Cómo se aplican?

Restricción: $2x + 2y = 20$

$y = 10 - x$

Maximizar: Área $= x \cdot y$

$$f(x) = x \cdot (10 - x) = -x^2 + 10x$$

Como la función $f(x) = -x^2 + 10x$ tiene el coeficiente de x^2 negativo, la parábola es abierta hacia abajo y tiene el máximo en el vértice.

$$V = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5 \Rightarrow x = 5$$

Ya sabemos el valor de x; la otra dimensión del rectángulo la obtenemos de la restricción $y = 10 - x$.

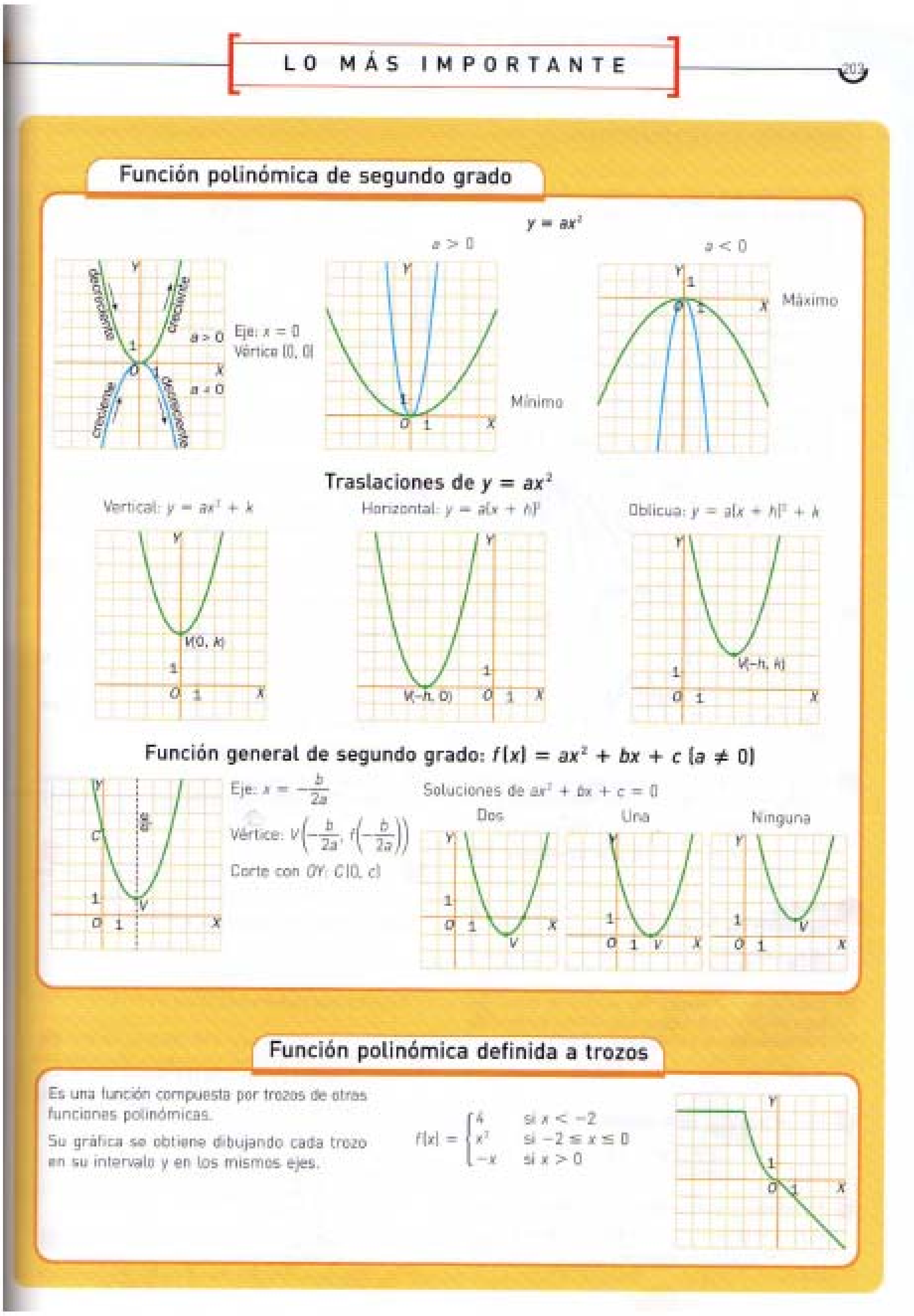
$$x = 5 \Rightarrow y = 10 - x = 10 - 5 = 5$$

El corral para encerrar las ovejas debe tener 5 metros de largo y 5 de ancho.

PARA APLICAR

51 En el campeonato de Matemáticas del centro nos proponen la siguiente prueba.
Tienes 30 bolas que hay que repartir en dos cajas, de forma que el producto del número de bolas que haya en cada caja sea el mayor posible.
¿Cómo hay que distribuir las bolas para superar la prueba?

52 Calcula las dimensiones de una ventana rectangular de 6 metros de perímetro para que tenga la máxima superficie posible y así pueda entrar más luz.



LO MÁS IMPORTANTE 203

Función polinómica de segundo grado

$y = ax^2$

Eje: $x = 0$
Vértice $(0, 0)$

$a > 0$ Mínimo

$a < 0$ Máximo

Traslaciones de $y = ax^2$

Vertical: $y = ax^2 + k$ — $V(0, k)$

Horizontal: $y = a(x + h)^2$ — $V(-h, 0)$

Oblicua: $y = a(x + h)^2 + k$ — $V(-h, k)$

Función general de segundo grado: $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

Eje: $x = -\frac{b}{2a}$

Vértice: $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Corte con OY: $C(0, c)$

Soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$

Dos — Una — Ninguna

Función polinómica definida a trozos

Es una función compuesta por trozos de otras funciones polinómicas.

Su gráfica se obtiene dibujando cada trozo en su intervalo y en los mismos ejes.

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

PARA PRACTICAR Y APLICAR

53 Sin dibujar sus gráficas, contesta a las siguientes preguntas relativas a las parábolas.

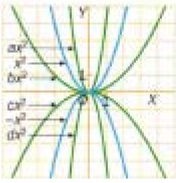
$f(x) = \frac{3}{4}x^2$ $\qquad g(x) = -\frac{4}{3}x^2$

a) ¿Tienen máximos o mínimos?

b) ¿En qué intervalos son crecientes y en cuáles son decrecientes?

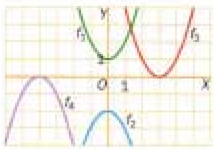
c) ¿Cuál tiene sus ramas más abiertas?

54 ¿Qué puedes decir sobre los valores de a, b, c y d de las parábolas $y = ax^2$, $y = bx^2$, $y = cx^2$ e $y = dx^2$, que están representadas en el dibujo adjunto?



55 Las funciones de la figura son trasladadas de las funciones $y = x^2$ o $y = -x^2$.

Halla sus ecuaciones.



56 Halla el vector de traslación que transforma la parábola $y = 9x^2$ en las siguientes parábolas.

a) $y = 9x^2 + 4$ $\qquad$ c) $y = 9(x + 2)^2 - 3$

b) $y = 9(x - 5)^2$ $\qquad$ d) $y = 9x^2 + 18x + 9$

57 Mediante traslaciones, dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = x^2 - 2x + 1$ $\qquad$ b) $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2$

58 Halla el eje, el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas –si existen–, el dominio y el recorrido de las siguientes parábolas.

a) $y = -x^2 - 11x - 10$ $\qquad$ b) $y = x^2 + 2x + 3$

59 Dibuja la gráfica de la función:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

60 Representa la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |x - 1|$ $\qquad$ c) $f(x) = |2x - 4|$

b) $f(x) = |x + 1|$ $\qquad$ d) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

61 Una parábola de vértice el origen de coordenadas pasa por el punto $A(2, -3)$. Halla la ecuación y la representación gráfica de la parábola que resulta cuando la parábola anterior se refleja sobre el eje de abscisas.

62 Sean A y B los puntos, respectivamente, del segundo y primer cuadrantes en que la recta $y = 2$ corta la parábola $y = \frac{x^2}{2}$. Y sean D y C los puntos del tercero y cuarto cuadrantes, respectivamente, en que la recta $y = -2$ corta la parábola $y = -2x^2$. Halla el área del trapecio $ABCD$.

63 Expresa $x^2 - 4x + 5$ como suma del cuadrado de un binomio y de un número, y dibuja la gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 5$ mediante traslaciones.

64 Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4x - 5$:

a) Halla el vértice y el eje.

b) Halla las coordenadas de los puntos de corte con los ejes.

c) Halla las coordenadas de otro punto de la parábola y dibuja su gráfica.

65 Halla la ecuación de la parábola que pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $A(2, 2)$ y $B(-1, -7)$.

66 La parábola $y = x^2 + bx + c$ corta el eje OX en el punto $A(4, 0)$ y tiene como eje la recta $x = 1$.

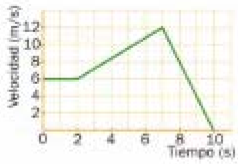
a) ¿En qué otro punto corta el eje OX?

b) Halla la ecuación de la parábola.

c) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?

d) ¿En qué punto corta el eje OY?

67 La siguiente gráfica representa la velocidad de un cuerpo en función del tiempo. Escribe la expresión de la función que corresponde a la gráfica.

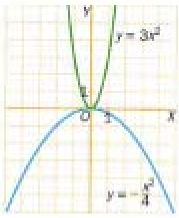


PARA REFORZAR

68 Sin elaborar previamente una tabla de valores, y a partir de las representaciones de la figura, dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = -3x^2$

b) $y = \frac{x^2}{4}$



69 Determina qué función del tipo $y = ax^2$ pasa por los siguientes puntos.

a) $A\left(-1, \frac{4}{5}\right)$

b) $B(3, -45)$

c) $C\left(-3, 9\sqrt{2}\right)$

70 La parábola $y = (x + h)^2 + k$ tiene su vértice en el punto $V(2, -4)$. Halla h y k.

71 Halla las coordenadas del vértice, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y representa las parábolas de las siguientes funciones.

a) $y = 2x^2 + 3$ b) $y = (x - 1)^2 - 2$

72 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = 2x^2 - 1$

b) $y = -3x^2 + 2$

c) $y = (x + 2)^2 - 3$

d) $y = 2(x - 3)^2 + 1$

73 Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 + x - 2$ c) $y = 2x^2 - x$

b) $y = 9x^2 - 1$ d) $y = -x^2 - 2x + 15$

74 La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $A(2, 0)$ y $B(4, 0)$, y la ordenada de su vértice es -1. Halla su ecuación.

75 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -|x|$ b) $f(x) = 1 + |x|$

76 Halla el dominio y el recorrido de la función $y = a(x + h)^2 + k$ según los valores de a.

PARA AMPLIAR

77 Dada la parábola de ecuación $y = -\frac{3x^2}{16}$.

a) Dibuja su gráfica.

b) Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, comprueba que la distancia de P al punto $F\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ es igual a la distancia de P a la recta r de ecuación $y = \frac{4}{3}$.

78 Sea la parábola de ecuación $f(x) = \frac{x^2}{2p}$, donde p es un número positivo. Considera entonces el punto $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ y la recta r de ecuación $y = -\frac{p}{2}$.
Calcula las distancias de un punto cualquiera de la parábola al punto F y a la recta r. ¿Qué observas? Representa gráficamente la situación si $p = 2$.

79 La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $A(1, -1)$, y las coordenadas de su vértice son $V(2, -3)$. Halla a, b y c.

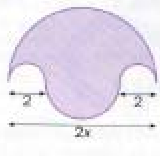
80 Sean las funciones:

$f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x^2 + 1$

a) Dibuja sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas.

b) Averigua cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$.

81 La siguiente región está limitada por semicircunferencias. Escribe la fórmula de la función que expresa su área en términos de x y representa su gráfica.



82 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |x^2 - 1|$ b) $f(x) = |-x^2 + 4|$

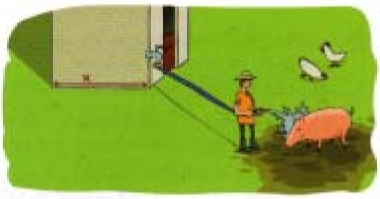
ACTIVIDADES FINALES

206

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

83 La manguera

El extremo de entrada de agua de una manguera de riego se encuentra en la esquina de una casa que tiene forma cuadrada de x metros de lado. La manguera mide un metro más que dicho lado.



a) Representa mediante un dibujo la zona del terreno que incluye todos los puntos adonde puede llegar el extremo de salida de la manguera.

b) Escribe la ecuación de la función que relaciona la longitud de x con el área de la zona descrita en el apartado anterior.

Calcula dicha área para el caso de que la manguera mida 4 metros.

84 Los tramos de la renta

Durante el mes de mayo, los habitantes de un país deben pagar los impuestos anuales en relación con la renta total que han ganado. La ley determina las siguientes disposiciones.

- Se considera una cantidad fija exenta de pago de 5050 euros, considerada como necesaria para cubrir algunos gastos esenciales.
- A la cantidad anterior se debe sumar una de las siguientes, según el número de hijos que dependan del declarante.

1 hijo	2 hijos	3 hijos
1800	3800	7400

- La renta restante tributa según la siguiente tabla.

De 0 a 17 360 euros	24%
De 17 360 a 32 360 euros	28%
De 32 360 a 52 360 euros	37%
De 52 360 euros en adelante	43%

a) Calcula los impuestos que debe pagar una persona que ha ganado 37 500 euros según tenga 0, 1, 2 ó 3 hijos.

b) Escribe la función que relaciona la renta anual conseguida por una persona y los impuestos que debe abonar sabiendo que tiene dos hijos.

AUTOEVALUACIÓN

1 Una parábola de vértice el origen de coordenadas pasa por el punto $P(-2, -5)$. Averigua si pasa también por alguno de los siguientes puntos.

a) $A(-2, 5)$ b) $B(2, 5)$ c) $C(2, -5)$

2 Escribe la ecuación de las funciones que expresan el área de un círculo en términos del radio y en términos de la longitud de la circunferencia. ¿Cuál de las dos tiene sus ramas más abiertas?

3 Halla las coordenadas del vértice y las ecuaciones del eje de las siguientes parábolas.

a) $y = -x^2 + 4$ c) $y = -(x - 7)^2$

b) $y = 2x^2 - 1$ d) $y = (x + 3)^2 + 1$

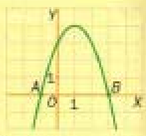
4 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{3x^2 + 5}{4}$ b) $y = 2 - (x - 1)^2$

5 Calcula el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas de las siguientes parábolas.

a) $y = 4x^2 - 1$ b) $y = -4x^2 + 1$

6 Halla la ecuación de la parábola cuya gráfica es la siguiente.



7 El eje de la parábola $(m + 6)x^2 - 2m^2x + 1 = 0$ es la recta $x = 1$. ¿Cuánto vale m?

8 En la gráfica se muestra la evolución de la temperatura en una ciudad durante un día.

Escribe la expresión algebraica de la función correspondiente.

Más actividades en www.librosvivos.net (Tu libro: 115511)

ENTRE MATEMÁTICOS

EL MATEMÁTICO... DIVULGADOR

Miguel de GUZMÁN (1936-2004)

El matemático español Miguel de Guzmán estaba empeñado en mostrar a la sociedad la cara amiga de las matemáticas. No escatimó esfuerzos a la hora de luchar en todos los frentes: profesor de universidad, autor de libros de texto, pionero en el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, promotor de innumerables proyectos sobre educación… Pero si hay algo que Guzmán hacía como nadie, era divulgar las matemáticas. Contagió su entusiasmo a todo el que le escuchaba, y con sus numerosos libros logró poner las matemáticas al alcance de todos.

... SU IDEA...

Miguel de Guzmán siempre estuvo preocupado por la educación matemática en todos los niveles, desde primaria hasta la universidad.

En 1999 fundó en Madrid el **proyecto ESTALMAT (Estimulación del Talento Matemático)** con el objetivo de detectar a jóvenes que tengan aptitudes especiales en matemáticas y ayudarles a desarrollar sus habilidades.

Con su incansable labor, Miguel de Guzmán consiguió la financiación adecuada para mantener el proyecto y extenderlo a otras regiones de España.
www.e-sm.net/mt4yeso02

... Y SU ÉPOCA

En España se aprobó la Constitución y se estableció un régimen democrático. Nació internet y se consolidó como la mayor red de transmisión de información.

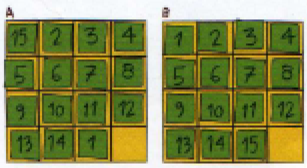
ENTREtenido

EL JUEGO DE LOS QUINCE

En su libro *Aventuras matemáticas*, Guzmán saca mucho partido a este juego que causó furor a finales del siglo XIX. Tú mismo puedes fabricar uno:

1. Pinta una cuadrícula de 4 x 4.
2. Recorta 15 fichas de cartón un poco más pequeñas que las cuadrículas y escribe en ellas los números del 1 al 15.
3. Colócalas en la cuadrícula igual que en la figura A.

El juego consiste en deslizar las piezas sin levantarlas, aprovechando el hueco, para conseguir colocar los números como en la figura B.



El creador del juego ofreció una enorme suma de dinero al primero que le presentase una solución. ¿Lo consigues tú?

ENTRE interrogantes

¿SON LAS MATEMÁTICAS UN DEPORTE OLÍMPICO?

Si buscas en internet información sobre las Olimpiadas, verás que las matemáticas no figuran entre los deportes olímpicos como el atletismo o el baloncesto... sin embargo, encontrarás referencia a las **Olimpiadas Matemáticas.** Estas competiciones son concursos entre estudiantes que han descubierto en las matemáticas otra forma de divertirse.

No se trata de batir ningún récord, sino de resolver problemas... y pasarlo bien.

Tampoco hace falta ser un superdotado, solo es necesario que te gusten las matemáticas, disfrutes con los retos *de pensar* y tengas ganas de trabajar para ser un atleta... matemático.

Logo de la Olimpiada Internacional de Matemáticas

B. Colección de ejercicios de refuerzo

fundación escuela teresiana

COLEGIO SANTA TERESA
PAMPLONA

FUNCIONES

1. Estudia el *Dominio de Definición* de las siguientes funciones:

a) $y=x-3$ b) $y=2x+7$ c) $y=\frac{x}{7}$

d) $y=\frac{1}{x-1}$ e) $y=\frac{5}{2x-6}$ f) $y=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$

g) $y=+\sqrt{x-2}$ h) $y=+\sqrt{2x+4}$ i) $y=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$

j) $y=x+2$ k) $y=x^2-5$ $(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)$ l) $y=x^5-x^4+245x-1$

m) $y=\frac{1}{x-2}$ n) $y=\frac{8}{2x+1}$ $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$ ñ) $y=\sqrt[4]{9-x}$ $9-x\geq 0$

o) $y=+\sqrt{x-1}$ p) $y=+\sqrt{5-x^2}$ q) $y=\frac{x}{x^3+2x^2-x-2}$

r) $y=\frac{x-1}{x^2+4}$ s) $y=\sqrt[3]{x-2}$ t) $y=\frac{3}{1-x}$

u) $y=\frac{x^2-4x}{x^2+6}$ v) $y=\frac{2x-1}{x^2-4x}$ w) $y=x^3-x$

2. Calcula la *Tasa de Variación* de las siguientes funciones en los intervalos que se indican y di si la función es creciente, decreciente o constante en dichos intervalos:

i) $f(x)=x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4].
ii) $f(x)=x^2$ en los intervalos [-3, -2], [-1, 1] y [2, 4].
iii) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ en los intervalos [-1,0] y [3,5].

3. Dibuja una gráfica que pueda corresponder a la función $y=f(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) Es creciente en [-4, 3]
b) Es decreciente en [-2, 5]
c) Es constante en [3, 7]
d) Es creciente en [-3, 0] y decreciente en [0, 2]
e) No es creciente ni decreciente en [0, 5]
f) Tiene un máximo, un mínimo y dos puntos de corte con el eje OX.
g) Es creciente en [-3, 0], decreciente en [0, 3] y constante en [3, 5].

4. Representa las siguientes funciones definidas a trozos y di si son continuas o no:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<-1 \\ x+2 & si\ -1\leq x\leq 1 \\ 2 & si\ x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si\ x<1 \\ -1 & si\ 1\leq x\leq 4 \\ x-2 & si\ x>4 \end{cases}$

c) $f(x)=|x|=\begin{cases} -x & si\ x<0 \\ x & si\ x\geq 0 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x\geq 0 \\ -x-1 & si\ x<0 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x\leq 2 \\ 2x-1 & si\ x>2 \end{cases}$

5. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $y=x^3+x$ b) $y=x^4+x^2$ c) $y=-x^2$

d) $y=x^5+x^3+x$ e) $y=\frac{6}{x}$ f) $y=x^6+x^4+x^2$

6. Indica si las siguientes funciones son lineales, afines o constantes y dibuja sus gráficas:

a) $f(x)=2x+3$ b) $f(x)=2x$ c) $f(x)=-2$

d) $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ e) $f(x)=-2x+1$ f) $f(x)=\frac{1}{2}x$

g) $f(x)=-2x-7$ h) $f(x)=-\frac{1}{2}x$ i) $f(x)=-\frac{1}{2}x-7$

7. Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x)=x^2+2x$ b) $f(x)=-x^2+4x-6$
c) $f(x)=-4x^2-8x$ d) $f(x)=-2x^2+8x-6$
e) $f(x)=-x^2+4$ f) $f(x)=3x^2-6x+4$

8. Encuentra la función cuadrática cuya gráfica pasa por los puntos (1,0), (2,3) y (3,-6). Dibuja la gráfica correspondiente.

9. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

a) $f(x)=\frac{8}{x}$ b) $f(x)=-\frac{8}{x}$ c) $f(x)=\frac{1}{8x}$

C. Actividades de refuerzo en el aula de informática

C1. Coeficientes

Coeficientes

El estudio de las familias de funciones es especialmente sencillo con GeoGebra. Basta crear los deslizadores correspondientes a los coeficientes o parámetros que deseamos variar para observar su efecto en la gráfica de la función.

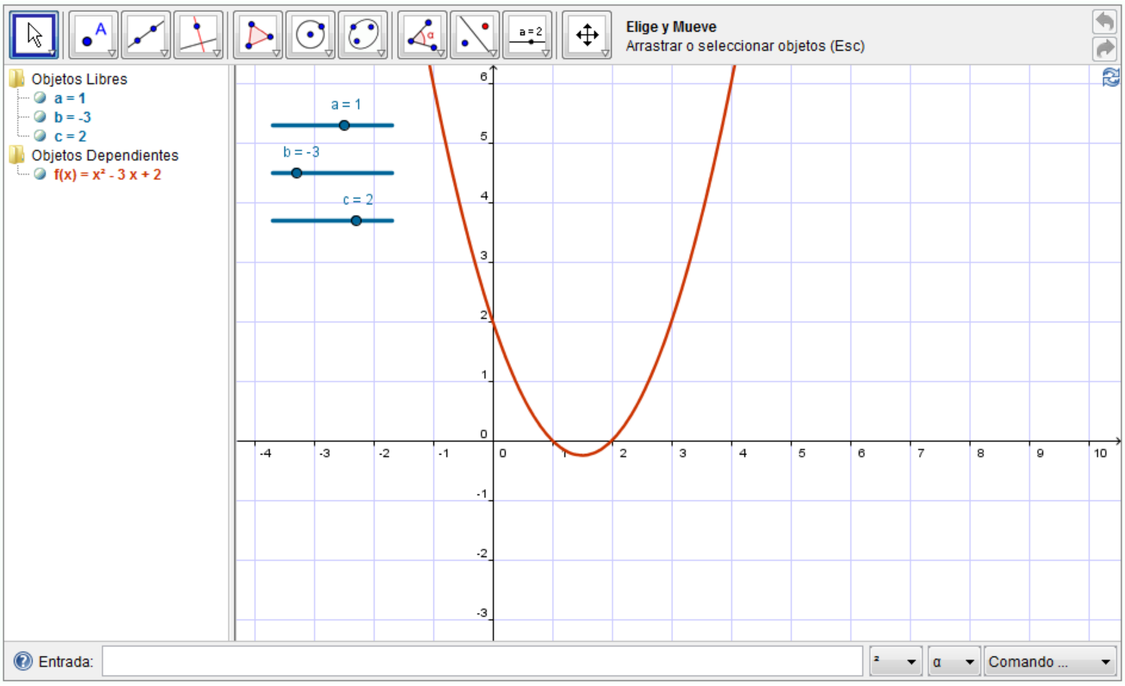
Al iniciarse, la aplicación muestra una cuadrática. Para crearla hemos seguido dos pasos:

- Creamos los deslizadores a, b y c con la herramienta Deslizador.
- Escribimos en la barra de Entrada: a x^2 + b x + c (esto crea la función f).

En la expresión anterior, no hay que omitir el espacio entre "a" y "x", y entre "b" y "x", pues tal espacio es el operador de multiplicación (equivale al signo *). Si se omite, GeoGebra consideraría "ax" y "bx" como variables no definidas. También hay que dejar espacio entre un coeficiente y un paréntesis de apertura, para evitar que GeoGebra interprete el coeficiente como el nombre de una función.

> Nota: Por otra parte, si en vez de los coeficientes generales a, b y c colocamos números concretos (por ejemplo, 3x^2 + 5x + 2) podríamos omitir el operador de multiplicación, pues GeoGebra solo puede interpretar "5x" como un producto, nunca como el nombre de un objeto (los nombres siempre comienzan con una letra).

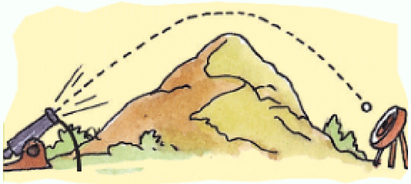
Puedes variar a voluntad los valores extremos de los deslizadores haciendo clic derecho sobre ellos.



Preguntas

1. ¿Qué efecto produce en la gráfica variar el signo del coeficiente principal (a)?
2. ¿Qué efecto produce en la gráfica variar el valor absoluto del coeficiente principal (a)?
3. ¿Qué efecto produce en la gráfica variar el valor de c?
4. ¿Qué efecto produce en la gráfica variar el valor de b? ¿Qué trayectoria crees que sigue el vértice de la parábola al variar b?
5. Escribe en la barra de Entrada: f(x) = a (x-b)^2 + c. ¿Qué tipo de funciones son estas?
6. ¿Qué representan ahora los valores de b y c? Compruébalo moviendo esos deslizadores.
7. Escribe en la barra de Entrada: f(x) = a (x-b) (x-c). ¿Qué tipo de funciones son estas?
8. ¿Qué representan ahora los valores de b y c? Compruébalo moviendo esos deslizadores.
9. Escribe en la barra de Entrada: f(x) = a/x. ¿Qué tipo de funciones son estas? ¿Qué representa el valor de "a"?
10. ¿Qué sucede con las gráficas de las funciones afines definidas como f(x) = a x + a? ¿Cuál es la raíz común a estas funciones?
11. ¿Qué sucede con las gráficas de las funciones cuadráticas definidas como f(x) = a x^2 + a x + a?
12. Escribe en la barra de Entrada: f(x) = a^x. ¿Qué tipo de funciones son estas? ¿Qué sucede cuando "a" es negativo? ¿Para qué valores de "a" la función es decreciente?

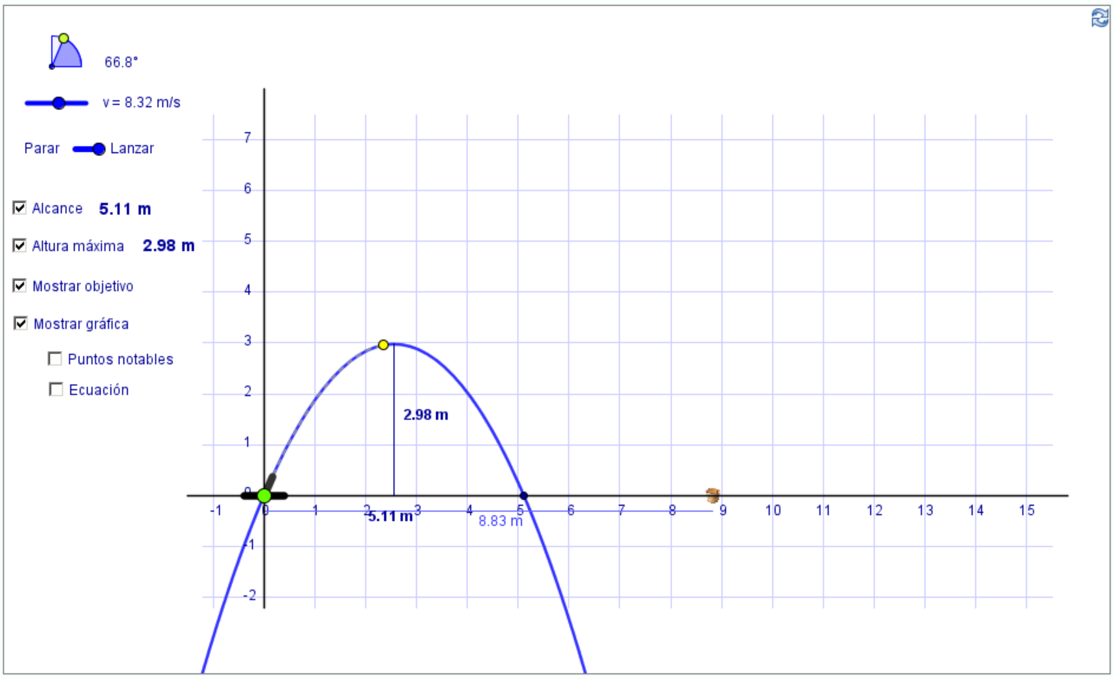
Tiro parabólico



Hacia finales del siglo XV la sociedad tenía planteados importantes problemas prácticos: de navegación, tecnológicos, contables... Resolver esos problemas fue uno de los motores que facilitaron el rápido avance de las matemáticas renacentistas y posteriores.

Uno de estos problemas era el tiro parabólico. La trayectoria de un proyectil, lanzado con una cierta velocidad y un determinado ángulo de inclinación, se ve afectada por la acción de la gravedad. Encontrar las leyes matemáticas que rigen el movimiento de los proyectiles fue una tarea en la que se embarcaron grandes matemáticos, como Tartaglia y Galileo.

En esta aplicación vamos a manejar un pequeño cañón que lanza pelotas de tenis. Se trata de investigar cómo depende el resultado del lanzamiento del ángulo de inclinación del cañón, que también llamamos ángulo de tiro, y de la velocidad con la que se impulsa la pelota. Determinaremos la trayectoria de la pelota, la máxima altura alcanzada y el alcance, es decir, la distancia desde el punto de lanzamiento al punto en que la pelota toca el suelo.



Preguntas

1. Selecciona la posición "Lanzar" y modifica a tu gusto la velocidad y el ángulo de inclinación, con los controles de la parte superior izquierda de la ventana. Observa los resultados. ¿Qué tipo de trayectoria sigue la pelota? Si se modifica la velocidad de lanzamiento o el ángulo de tiro, ¿cambia la trayectoria de la pelota? ¿Cómo influyen la velocidad y el ángulo de inclinación en la trayectoria de la pelota?

2. Activa las casillas "Alcance" y "Altura máxima". Fija la velocidad en 10 m/s (puedes mover el deslizador con más precisión si lo seleccionas con el ratón y utilizas las teclas + y - o las flechas del cursor). Vete variando ahora el ángulo de tiro (también puedes mover el punto verde con más precisión si lo seleccionas con el ratón y utilizas las teclas + y - o las flechas del cursor). ¿Con qué ángulo obtienes el máximo alcance? Para ese ángulo, ¿cuál es la máxima altura que alcanza la pelota?

3. Repite ahora el mismo proceso para otras velocidades: 7 m/s, 9 m/s, 12 m/s... ¿Obtienes el mismo resultado en todos los casos? Escribe tus conclusiones. ¿Cuál es el alcance de este cañón, es decir, la máxima distancia a la que podemos lanzar una pelota?

4. Haz clic en el botón Reiniciar. Activa ahora la casilla "Mostrar objetivo". Selecciona una velocidad de 10 m/s y la posición Lanzar. ¿Con qué ángulo de tiro puedes alcanzar el objetivo? (Cuando la pelota cae en la cesta aparecerá el rótulo "¡¡ Diana !!") ¿Puede haber más de una posibilidad? ¿Encuentras alguna relación entre esos ángulos y el ángulo con el que logras el máximo alcance (que has calculado en la pregunta 2)?

5. Cambia ahora la velocidad a 12 m/s y coloca la cesta a 10 m del cañón. Determina los dos ángulos de inclinación del cañón con los que la pelota cae dentro de la cesta. Conocido uno de ellos, ¿cómo podríamos calcular el otro? Compruébalo en algunos casos más.

6. Sitúa ahora la cesta a una distancia de 8.5 m del cañón. ¿Podemos alcanzar la cesta con una velocidad de 8 m/s? A esa distancia, ¿cuál es la mínima velocidad con la que la pelota cae en la cesta?

7. Haz clic en el botón Reiniciar. Activa la casilla "Mostrar gráfica". Activa también la casilla "Puntos notables". ¿Qué representan esos puntos en la parábola? ¿Qué significado práctico tienen las coordenadas de estos puntos en el contexto del problema?

8. ¿Cuál debe ser la velocidad, con un ángulo de tiro de 65º, para que la parábola corte al eje OX en el punto (6,0)? ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola? ¿Qué significado práctico tienen esos valores?

9. Obtén el ángulo de tiro y la velocidad con los cuales el vértice de la parábola es el punto (4, 3.21). ¿Cuál es el alcance del cañón con esas condiciones?

10. Activa la ecuación. Fija el ángulo de inclinación en 45º. Modifica ahora la velocidad. ¿Qué es lo que cambia en la ecuación? ¿Qué efecto tienen esos cambios en el arco visible de la parábola?

11. Haz clic en el botón Reiniciar. Selecciona un ángulo de inclinación de 45º y una velocidad de 8.86 m/s y activa las casillas "Mostrar gráfica" y "Puntos notables". Con el origen y los dos puntos notables señalados tienes los datos necesarios para hallar la ecuación de la parábola. Hállala y comprueba tu resultado activando la casilla "Mostrar ecuación".

12. Halla la ecuación de la parábola cuando el ángulo de tiro es de 45º y la velocidad 10.85 m/s. Comprueba tu resultado con la aplicación.

13. Encuentra el ángulo de inclinación y la velocidad con los que la parábola tiene por ecuación $y=-0.2x^2+x$. Indica el vértice y los puntos de corte de la parábola con el eje OX.