Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Resolución de problemas de semejanza y triángulos por estudiantes de 2º ESO

Cynthia Martínez Ibero

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Índice

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la Semejanza y los triángulos.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre semejanza y triángulos que se ha puesto en marcha en un aula de 2º ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:
La semejanza y los triángulos en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de semejanza y triángulos en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a semejanza y triángulos en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades tipo (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) propuestas en un libro de texto de 2º ESO, así como en dos cursos anteriores y en dos cursos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1
La semejanza y los triángulos en el currículo vigente

En este capítulo se analiza la semejanza y los triángulos en el currículo vigente. Para ello se analizan tanto la *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*, como los siguientes reales decretos:

- *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.*
- *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO*.
- *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*

Se analiza un libro de texto por curso. Los libros que se han utilizado son los siguientes:

- 3er Ciclo Primaria: *Matemáticas. 5 Primaria. Proyecto Timonel.* Editorial sm.
  Matemáticas. 6 Primaria. Proyecto Timonel. Editorial sm.
- 1º ESO: *Matemáticas, Ábaco. 1º ESO.* Editorial sm.
- 2º ESO: *Matemáticas, Ábaco. 2º ESO.* Editorial sm.
- 3º ESO: *Matemáticas 3º ESO. Proyecto La Casa del Saber.* Editorial Santillana.
- 4º ESO A: *Matemáticas 4º ESO. Opción A. Proyecto La Casa del Saber*. Editorial Santillana.
- 4º ESO B: *Matemáticas 4º ESO. Opción B. Proyecto La Casa del Saber.* Editorial Santillana.

La notación utilizada a lo largo de todo el capítulo se explica en la siguiente leyenda:

- Ci: Descriptor del contenido específico que es abordado en cada uno de los grados. Por ejemplo: triángulos, semejanza, escalas, etc.
- La ralla (—) significa que en ese grado no se explicita un contenido en el currículo vigente específico del contenido. Nota: en ocasiones un contenido puede “desaparecer” en un grado y “aparecer” en otro.

1.1. Contenidos en Eduación Primaria

	3er Ciclo de Primaria
Descriptor	**Contenido**
C_1: Triángulos	Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo.
C_2: Semejanza	Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.
C_3: Escalas	La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
C_4: Simetría	Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos. Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado.
C_5: Resolución de problemas mediante geometría	Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones ante situaciones de incertidumbre relacionadas con la organización y utilización del espacio. Confianza en las propias posibilidades para utilizar las construcciones

	3er Ciclo de Primaria
Descriptor	**Contenido**
C_1: Triángulos	Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo.
C_2: Semejanza	Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.
C_3: Escalas	La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
C_4: Simetría	Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos. Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado.
	geométricas y los objetos y las relaciones espaciales para resolver problemas en situaciones reales.
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	Utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para la construcción y exploración de formas geométricas.

Tabla 1. *Contenidos 3er Ciclo de Primaria*

1.2. Contenidos en ESO

	1er Ciclo ESO	
Descriptor	**Contenido 1º**	**Contenido 2º**
C_1: Triángulos	Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos.	Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.
C_2: Semejanza	—	Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. Razón entre las superficies de figuras semejantes.
C_3: Escalas	—	Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado.
C_4: Simetría	Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.	—

C_5: Resolución de problemas mediante geometría	Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico.	—
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos. Construcción de polígonos regulares con los instrumentos de dibujo habituales.	—

Figura 2. *Contenidos 1er Ciclo de ESO*

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">2º Ciclo ESO</th></tr>
<tr><th>Descriptor</th><th>Contenido 3º</th><th>Contenido 4º Opción A</th><th>Contenido 4º Opción B</th></tr>
<tr><td>C_1: Triángulos</td><td>Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.</td><td rowspan="2">Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas.</td><td>Relaciones métricas en los triángulos.</td></tr>
<tr><td>C_2: Semejanza</td><td>—</td><td>Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.</td></tr>
<tr><td>C_3: Escalas</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C_4: Simetría</td><td>Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

C_5: Resolución de problemas mediante geometría	Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.	Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana. Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.	Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	—	—	—

Figura 3. *Contenidos 2º Ciclo de ESO*

1.3. Contenidos en Bachillerato

En este capítulo se realiza un análisis de los contenidos de matemáticas de Bachillerato. Se ha considerado conveniente realizar un análisis en este nivel de la asignatura de Dibujo, dado el carácter geométrico que pueden presentar sus contenidos. Esta asignatura se cursa en la modalidad de artes (artes plásticas, imagen y diseño) y en la modalidad de Ciencias y Tecnología.

	Bachillerato - Ciencias y Tecnología	
Descriptor	**Contenido 1º**	**Contenido 2º**
C_1: Triángulos	Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.	—
C_2: Semejanza	—	—
C_3: Escalas	—	—
C_4: Simetría	—	—
C_5: Resolución de problemas mediante geometría	Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.	Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	—	—

Figura 4. *Contenidos Bachillerato Ciencias Sociales*

	Bachillerato – Ciencias Sociales	
Descriptor	**Contenido 1º**	**Contenido 2º**
C_1: Triángulos	—	—
C_2: Semejanza	—	—
C_3: Escalas	—	—
C_4: Simetría	—	—
C_5: Resolución de problemas mediante geometría	—	—
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	—	—

Figura 5. *Contenidos Bachillerato Ciencias Sociales*

	Dibujo Técnico	
Descriptor	**Contenido 1º**	**Contenido 2º**
C_1: Triángulos	Trazados geométricos: – Trazados fundamentales. – Trazado de polígonos regulares.	Trazados geométricos: – Trazados en el plano: ángulos en la circunferencia, arco capaz. – Polígonos: construcción de triángulos, aplicación del arco capaz. Construcción de polígonos regulares a partir del lado.
C_2: Semejanza	Trazados geométricos: – Proporcionalidad y semejanza. Escalas. – Transformaciones geométricas.	Trazados geométricos: – Proporcionalidad y semejanza: escalas normalizadas, triángulo universal de escalas y de escalas transversales. – Transformaciones geométricas: la homología, la afinidad y la inversión.
C_3: Escalas	Trazados geométricos: – Proporcionalidad y semejanza. Escalas.	—
C_4: Simetría	Trazados geométricos: – Transformaciones geométricas.	Trazados geométricos: – Transformaciones geométricas: la homología, la afinidad y la inversión.
C_5: Resolución de problemas mediante geometría	—	—
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	—	—

Figura 6. *Contenidos Dibujo Técnico*

Capítulo 2
Los criterios de evaluación de semejanza y triángulos en el currículo vigente

En este capítulo se analiza la semejanza y los triángulos en el currículo vigente.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

<table>
<tr><th></th><th>3er Ciclo de Primaria</th></tr>
<tr><th>Descriptor</th><th>Criterios de evaluación</th></tr>
<tr><td>C_1: Triángulos</td><td>5. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno.</td></tr>
<tr><td>C_2: Semejanza</td><td>5. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno.

6. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.</td></tr>
<tr><td>C_3: Escalas</td><td>6. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.</td></tr>
<tr><td>C_4: Simetría</td><td rowspan="2">5. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si</td></tr>
<tr><td>C_5: Resolución de problemas mediante geometría</td></tr>
</table>

	dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno.
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	—

Figura 7. *Criterios de Evaluación 3er Ciclo de Primaria*

2.2. Criterios de evaluación en ESO

	1er Ciclo ESO	
Descriptor	**Criterios de evaluación 1º**	**Criterios de evaluación 2º**
C_1: Triángulos	4. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas. 5. Estimar y calcular perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando la unidad de medida adecuada. Se pretende valorar la capacidad de estimar algunas medidas de figuras planas por diferentes métodos y de emplear la unidad y precisión más adecuada. Se valorará también el empleo de métodos de descomposición por medio de figuras elementales para el cálculo de áreas de figuras planas del entorno.	—

<table>
<tr><td>C_2: Semejanza</td><td>—</td><td rowspan="4">2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.

Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td>C_3: Escalas</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C_4: Simetría</td><td>—</td></tr>
<tr><td>C_5: Resolución de problemas mediante geometría</td><td>4. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.</td></tr>
<tr><td>C_6: Herramientas informáticas y de dibujo</td><td>—</td><td>—</td></tr>
</table>

Figura 8. *Criterios de Evaluación 1^er^ Ciclo de ESO*

	2º Ciclo ESO		
Descriptor	**Contenido 3º**	**Contenido 4º Opción A**	**Contenido 4º Opción B**
C_1: Triángulos	—		—
C_2: Semejanza	4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. Con este criterio se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, para que puedan ser utilizados como un recurso más de análisis en una formación natural o en una creación artística. El reconocimiento de los movimientos lleva consigo la identificación de sus elementos característicos: ejes de simetría, centro y amplitud de giro, etc. Igualmente los lugares geométricos se reconocerán por sus propiedades, no por su expresión algebraica. Se trata de evaluar, además, la creatividad y capacidad para manipular objetos y componer movimientos para generar creaciones propias.	—	—
C_3: Escalas		—	—
C_4: Simetría		—	—

C_5: Resolución de problemas mediante geometría	—	4. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.	3. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar la capacidad de desarrollar estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	—	—	—

Figura 9. *Criterios de evaluación 2º Ciclo de ESO*

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

	Bachillerato - Ciencias y Tecnología	
Descriptor	**Contenido 1º**	**Contenido 2º**
C_1: Triángulos	2. Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; así como, identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas. Se pretende evaluar la capacidad para representar geométricamente una situación planteada, eligiendo y aplicando adecuadamente las definiciones y transformaciones geométricas que permitan interpretar las soluciones encontradas; en especial, la capacidad para incorporar al esquema geométrico las representaciones simbólicas o gráficas auxiliares como paso previo al cálculo. Asimismo, se pretende comprobar la adquisición de las capacidades necesarias en la utilización de técnicas propias de la geometría analítica para aplicarlas al estudio de las ecuaciones reducidas de las cónicas y de otros lugares geométricos sencillos.	—
C_2: Semejanza	—	—
C_3: Escalas	—	—
C_4: Simetría	—	—

C_5: Resolución de problemas mediante geometría	3. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones. La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el plano.	3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	—	—

Figura 10. *Criterios de evaluación Bachillerato Ciencias y Tecnología*

	Bachillerato – Ciencias Sociales	
Descriptor	**Contenido 1º**	**Contenido 2º**
C_1: Triángulos	—	—
C_2: Semejanza	—	—
C_3: Escalas	—	—
C_4: Simetría	—	—
C_5: Resolución de problemas mediante geometría	—	—
C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	—	—

Figura 11. *Criterios de evaluación Bachillerato Ciencias Sociales*

	Dibujo Técnico	
Descriptor	**Contenido 1º**	**Contenido 2º**
C_3: Escalas	2. Utilizar y construir escalas gráficas para la interpretación de planos y elaboración de dibujos. Este criterio indicará en qué medida se ha comprendido el fundamento de las escalas, no sólo como concepto abstracto-matemático sino para aplicarlas a distintas situaciones que pueden darse en la vida cotidiana, ya sea para interpretar las medidas en un plano técnico, mapa o diagrama, o para elaborar dibujos tomados de la realidad.	2. Ejecutar dibujos técnicos a distinta escala, utilizando la escala establecida previamente y las escalas normalizadas. Se trata de valorar en qué medida se aplican en la práctica los conceptos relativos a las escalas y se trabaja con distintas escalas gráficas en la ejecución o reproducción de dibujos técnicos. Se valorará igualmente la destreza y precisión.
C_1: Triángulos	1. Resolver problemas geométricos, valorando el método y el razonamiento utilizados en las construcciones, así como su acabado y presentación. Con la aplicación de este criterio se pretende averiguar el nivel alcanzado por el alumnado en el dominio de los trazados geométricos fundamentales en el plano y su aplicación práctica en la construcción de triángulos, cuadriláteros y polígonos en general, construcción de figuras semejantes y transformaciones geométricas.	1. Resolver problemas geométricos valorando el método y el razonamiento de las construcciones, su acabado y presentación. Con la aplicación de este criterio se pretende averiguar el nivel alcanzado en el dominio y conocimiento de los trazados geométricos en el plano y su aplicación práctica en la construcción de triángulos, cuadriláteros y polígonos en general y construcción de figuras semejantes, equivalentes, homólogas o afines a otras dadas.
C_2: Semejanza		
C_4: Simetría		
C_5: Resolución de problemas mediante geometría		

C_6: Herramientas informáticas y de dibujo	9. Culminar los trabajos de dibujo técnico utilizando los diferentes procedimientos y recursos gráficos, de forma que estos sean claros, limpios y respondan al objetivo para los que han sido realizados. Con este criterio se quiere valorar la capacidad para dar distintos tratamientos o aplicar diferentes recursos gráficos o informáticos, en función del tipo de dibujo que se ha de realizar y de las finalidades del mismo. Este criterio no deberá ser un criterio aislado, sino que deberá integrarse en el resto de los criterios de evaluación en la medida que les afecte.	8. Culminar los trabajos de dibujo técnico utilizando los diferentes recursos gráficos de forma que estos sean claros, limpios y respondan al objetivo para los que han sido realizados. Con este criterio se quiere valorar la capacidad para dar distintos tratamientos o aplicar diferentes recursos gráficos o incluso informáticos en función del tipo de dibujo que se ha de realizar y de las distintas finalidades del mismo. Este criterio deberá integrarse en el resto de criterios de evaluación en la medida que les afecte.

Figura 12. *Criterios de evaluación Dibujo Técnico*

Capítulo 3

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la semejanza y los triángulos en el currículo vigente

En este capítulo se verán las actividades típicas que se han encontrado en los libros de texto analizados para los cursos de 5º y 6º de primaria, 1ºESO, 2ºESO, 3ºESO y 4ºESO. Las actividades se clasifican según sean ejercicio, problema, cuestión o situación.

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en tercer ciclo de Primaria

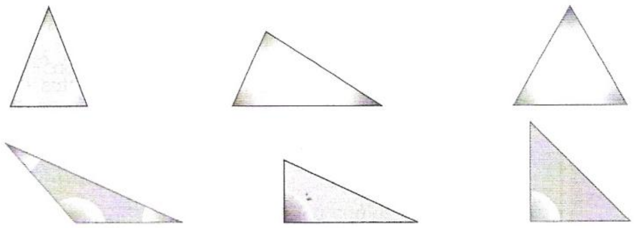
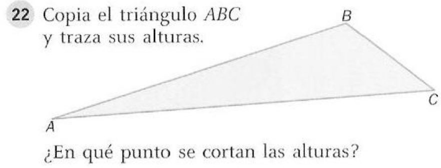
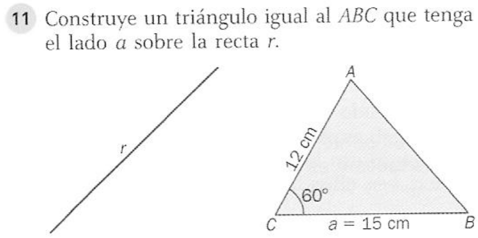
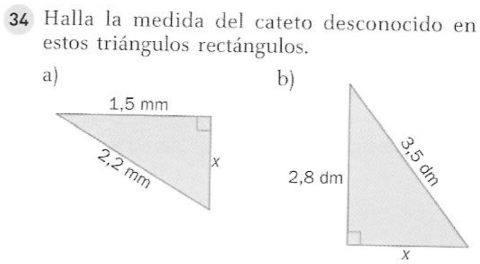
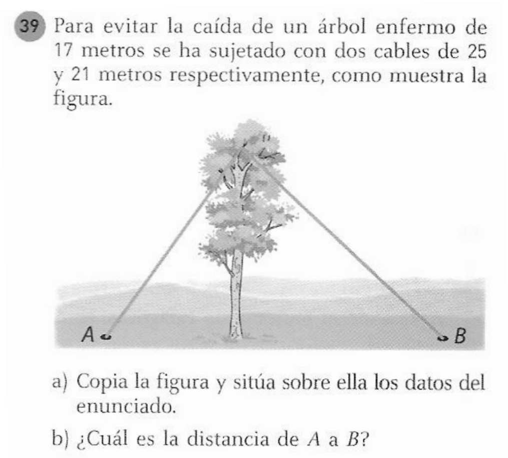
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Identificación de triángulos. Libro 5º primaria.			
Ejemplo:	10. Clasifica estos triángulos según sus lados y según sus ángulos. 			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Identificación de lados de un triángulo rectángulo.			
Ejemplo:	11. Copia en tu cuaderno los triángulos rectángulos de la actividad anterior y nombra sus lados.			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Construcción de triángulos semejantes e identificación de propiedades. Libro 5º primaria.			
Ejemplo:	5. Dibuja tres triángulos equiláteros de 3 cm, 5 cm y 9 cm de lado respectivamente. Mide sus ángulos y clasifícalos. ¿Qué observas? ¿Crees que ocurrirá siempre?			

Figura 13. *Actividades 3er Ciclo de Primaria*

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1ºESO

El libro clasifica las actividades en tres niveles de dificultad: sencillo, medio y difícil.

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Reconocimiento de triángulos rectángulos mediante el Teorema de Pitágoras. Nivel medio.			
Ejemplo:	45 Un alumno ha dibujado un triángulo cuyos lados miden 21, 72 y 74 centímetros, respectivamente. ¿Es un triángulo rectángulo? Si no es así, ¿qué tipo de triángulo es?			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación

Descripción:	Identificación de rectas y puntos notables de un triángulo.			
Ejemplo:	 22 Copia el triángulo *ABC* y traza sus alturas. ¿En qué punto se cortan las alturas?			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Se define la igualdad de triángulos, pero todavía no se trabaja con la semejanza. Ejercicio clasificado como sencillo.			
Ejemplo:	 11 Construye un triángulo igual al *ABC* que tenga el lado *a* sobre la recta *r*. 			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Ejercicio de práctica del Teorema de Pitágoras. Nivel medio.			
Ejemplo:	 34 Halla la medida del cateto desconocido en estos triángulos rectángulos. 			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Pitágoras. Nivel difícil.			
Ejemplo:	 39 Para evitar la caída de un árbol enfermo de 17 metros se ha sujetado con dos cables de 25 y 21 metros respectivamente, como muestra la figura. a) Copia la figura y sitúa sobre ella los datos del enunciado. b) ¿Cuál es la distancia de *A* a *B*?			

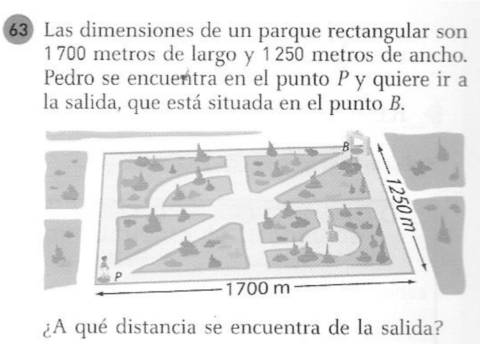
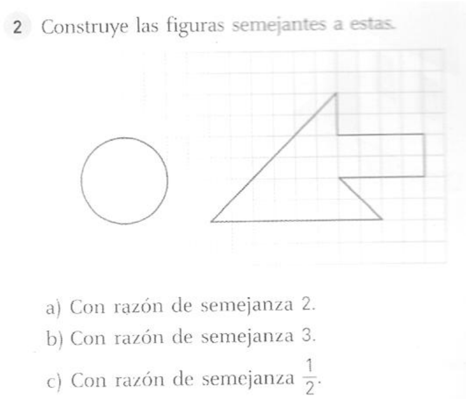
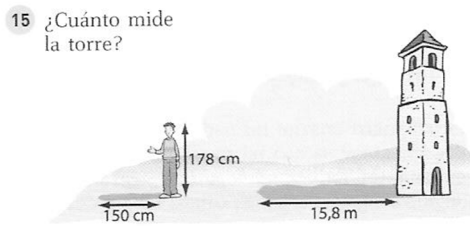
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Pitágoras para el cálculo de distancias. Nivel difícil.			
Ejemplo:	 63 Las dimensiones de un parque rectangular son 1 700 metros de largo y 1 250 metros de ancho. Pedro se encuentra en el punto *P* y quiere ir a la salida, que está situada en el punto *B*. ¿A qué distancia se encuentra de la salida?			

Figura 14. *Actividades 1º ESO*

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2ºESO

El libro clasifica las actividades en tres niveles de dificultad: sencillo, medio y difícil.

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	El ejercicio se clasifica como sencillo. Está dentro de la sección de semejanza.			
Ejemplo:	 2 Construye las figuras semejantes a estas. a) Con razón de semejanza 2. b) Con razón de semejanza 3. c) Con razón de semejanza $\frac{1}{2}$.			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación de Teorema de Tales. Clasificado como nivel medio.			
Ejemplo:	 15 ¿Cuánto mide la torre? 			

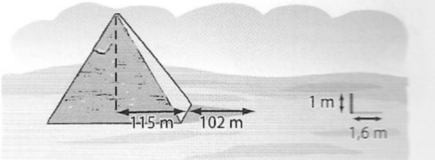
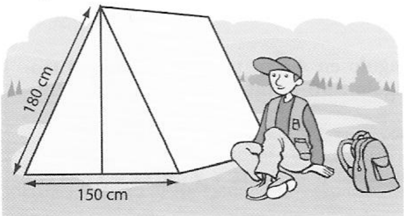
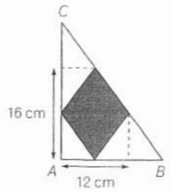
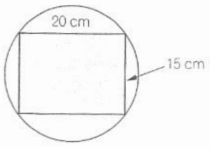
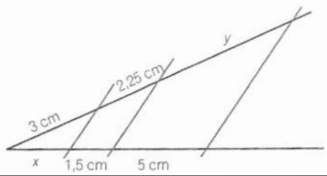
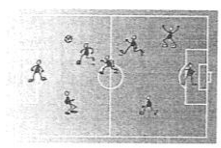
<table>
<tr><td>Actividad tipo:</td><td>Ejercicio</td><td>Problema</td><td>Cuestión</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción:</td><td colspan="4">Aplicación de semejanza de triángulos. Nivel medio.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:</td><td colspan="4">26 Cuentan que para calcular la altura de la Gran Pirámide de Keops, Tales clavó en el suelo una estaca, y midió su altura y las sombras de la estaca y de la pirámide. Observa el dibujo y calcula la altura de la pirámide.

</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo:</td><td>Ejercicio</td><td>Problema</td><td>Cuestión</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción:</td><td colspan="4">Práctica de utilización de escalas. Clasificado como difícil.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:</td><td colspan="4">32 En un mapa, la distancia entre dos poblaciones es de 5 centímetros, y en la realidad es de 115 kilómetros. Calcula la escala con la que ha sido representado el mapa. Expresa la escala de forma gráfica y numérica.</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo:</td><td>Ejercicio</td><td>Problema</td><td>Cuestión</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción:</td><td colspan="4">Aplicación del Teorema de Pitágoras. Nivel medio.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:</td><td colspan="4">44 Calcula la altura de la tienda de campaña de la figura.

</td></tr>
<tr><td>Actividad tipo:</td><td>Ejercicio</td><td>Problema</td><td>Cuestión</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción:</td><td colspan="4">Aplicación de cálculo de distancias en polígonos. Nivel sencillo.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:</td><td colspan="4">59 Pedro nada según la diagonal de una piscina rectangular de 15 × 8 metros. ¿Cuántas diagonales tendrá que nadar para recorrer un kilómetro?</td></tr>
</table>

Figura 15. *Actividades 2º ESO*

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3ºESO

<table>
<tr><td>Actividad tipo:</td><td>Ejercicio</td><td>Problema</td><td>Cuestión</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción:</td><td colspan="4">Ejercicio para practicar el Teorema de Pitágoras</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:</td><td colspan="4">11 Evalúa si las siguientes medidas determinan los lados de un triángulo rectángulo.
a) 8 cm, 5 cm y 4 cm   b) 10 cm, 8 cm y 6 cm</td></tr>
</table>

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Pitágoras en el cálculo de alturas y lados de polígonos.			
Ejemplo:	53. ●● Observa la figura y calcula.  a) El lado del rombo. b) La longitud del cateto *AB*, del cateto *AC* y de la hipotenusa *BC*.			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Pitágoras en el cálculo de la diagonal de un polígono			
Ejemplo:	55. ●● Observa la siguiente figura.  Si los lados del rectángulo son 15 cm y 20 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia?			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Identificación del concepto de semejanza.			
Ejemplo:	20 Determina si un triángulo de lados de 3, 4 y 5 cm es semejante a otro de lados de 1,5; 2 y 2,5 cm.			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Tales en el cálculo de longitudes.			
Ejemplo:	22 Halla las longitudes desconocidas. 			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Tales para dividir un segmento en partes iguales.			
Ejemplo:	26 Divide gráficamente el segmento *AB*, de 16 cm de longitud, en partes proporcionales a dos segmentos de longitudes 2 cm y 3 cm.			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Cálculo de longitudes mediante escalas.			
Ejemplo:	28 Halla las dimensiones reales de este campo de fútbol.  1 : 3.000			

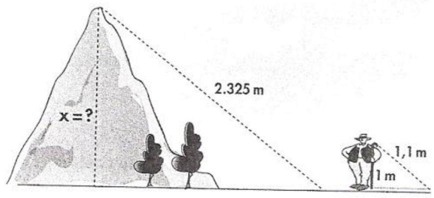
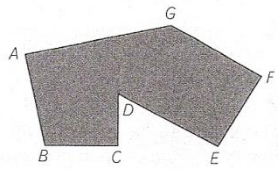
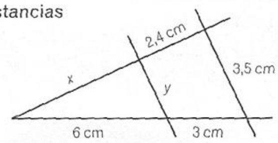
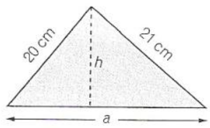
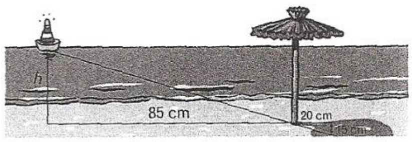
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Tales en el cálculo de longitudes.			
Ejemplo:	81. ●●● Calcula la altura x de una montaña si desde el extremo de su sombra podemos medir la distancia a la cima, y esta es de 2.325 m, y, en ese momento, un bastón de 1 m produce una sombra de 1,1 m. 			

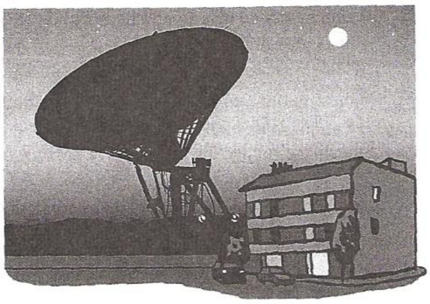
__Figura 16.__ Actividades 3º ESO

3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4ºESO. Opción A y B

Este tema coincide en su totalidad en los libros de texto de las dos opciones.

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Noción de semejanza y cálculo de razón.			
Ejemplo:	2 Ana ha dibujado dos cuadrados cuyos lados miden 1 y 3 cm, respectivamente. ¿Son semejantes? Calcula su razón de semejanza.			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Construcción de figuras semejantes			
Ejemplo:	4 Calca esta figura y construye dos figuras semejantes a ella con razones 3 y 0,5. 			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Tales en el cálculo de longitudes.			
Ejemplo:	8 Halla las distancias que faltan. 			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Tales para dividir un segmento en partes iguales.			
Ejemplo:	9 Utiliza el teorema de Tales para dividir un segmento de 4 cm en tres partes iguales.			

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Noción de semejanza de triángulos.			
Ejemplo:	12 ¿Cuáles son las condiciones necesarias para que dos triángulos isósceles sean semejantes? ¿Y si fueran equiláteros?			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación de semejanza de triángulos rectángulos.			
Ejemplo:	16 Halla la medida de la hipotenusa y la altura sobre la hipotenusa de este triángulo rectángulo.  			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación de escalas.			
Ejemplo:	22 Las dimensiones de un campo de fútbol son 70 y 100 m, respectivamente. ¿Cuál es la superficie de un futbolín hecho a escala 1:75?			
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Aplicación del Teorema de Tales.			
Ejemplo:	21 ¿Qué distancia hay de la boya a la playa?  			

<table>
<tr><td>Actividad tipo:</td><td>Ejercicio</td><td>Problema</td><td>Cuestión</td><td>Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción:</td><td colspan="4">Aplicación del Teorema de Tales.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:</td><td colspan="4">
74. ●●● Se ha colocado una antena cerca de un edificio de viviendas. La comunidad de vecinos piensa que la zona de acceso restringido es insuficiente para garantizar su seguridad.

Algunos vecinos aseguran que si la antena se cayera afectaría al edificio.


El informe municipal afirma que no existe ningún riesgo. ¿Es correcta esta información?
</td></tr>
</table>

Figura 17. *Actividades 4º ESO*

Capítulo 4
Resultados

Tras la observación y estudio del currículo de Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato por un lado, y de los libros de texto por otro lado, se procede a su comparación para analizar las ausencias, presencias y la coherencia entre ambos.

En el desarrollo de este apartado se ha utilizado como libro de referencia el libro *Revolutions of Geometry*, de Michael O'Leary, de la editorial Wiley, recomendado por Gustavo Ochoa, director de este proyecto de fin de máster. El libro está escrito tanto para estudiantes como para profesores de matemáticas, y es una guía de geometría a través de las grandes obras y los grandes autores, desde la antigüedad hasta nuestros días. Es un libro utilizado en cursos de geometría moderna e historia de matemáticas de nivel universitario, y también es una referencia valiosa para los educadores en el campo de las matemáticas.

Se han utilizado también los libros de texto de los dos niveles anteriores y los dos niveles posteriores a 2º ESO mencionados en el Capítulo 1.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Se ha realizado una comparación entre los libros de texto escolares y el libro de referencia, para poder observar las posibles ausencias y las presencias de los contenidos en estudio.

En primer lugar se ha observado la estructura. Los contenidos en los libros de texto vienen dados por los reales decretos, y en general estos no permiten seguir un hilo conductor que relacione unos contenidos con otros. Es verdad que lo aprendido en una unidad didáctica a veces se practica en las siguientes, pero los alumnos pueden pensar que una vez aprendida una noción y superado el correspondiente examen, la siguiente unidad no tendrá ninguna relación con ésta. El libro de referencia, sin embargo, puede tener más coherencia en este sentido, ya que al presentarse los temas en orden cronológico, el lector puede apreciar la relevancia de la geometría en el desarrollo histórico de las matemáticas.

Otro aspecto reseñable en este sentido, es el de la extensión de las materias. Puesto que el libro de referencia es un único libro, debe aportar todo el contenido posible, por lo que recoge para cada noción, desde la definición más básica hasta las demostraciones más completas. Los libros de texto, sin embargo, tienen en cuenta que el aprendizaje que se realiza con ellos es de tipo espiral, y por eso podrá incidirse en los conceptos en cursos posteriores. Por eso, en los niveles básicos se introducen las nociones a un nivel muy bajo, adaptado a la edad, y se va profundizando en niveles posteriores, no solo en complicidad de ejercicios, sino también en dificultad de contenidos. Se tiene en cuenta si en el nivel siguiente se va a continuar con el aprendizaje de la noción, y en el caso de que no se vuelva a incidir en el tema, se profundiza al máximo posible a un nivel adecuado a la edad. En general, no contienen demostraciones, porque los alumnos a los que van dirigidos no tienen la capacidad cognitiva necesaria para entenderlas.

En el libro de texto analizado en 6º de primaria, no encontramos ningún tema dedicado a la semejanza, contenido si especificado en el currículo. Sin embargo, analizando el libro de 5º de primaria, encontramos dichos contenidos. Los contenidos mínimos de estos niveles se especifican en común para el último ciclo de primaria, es decir, para 5º y 6º. Es común por este motivo dividir los contenidos del currículo entre los dos cursos, como ocurre en este caso concreto. Si se quieren repasar las nociones aprendidas en 5º corresponderá al profesor buscar o preparar el material necesario, puesto que el libro de texto no repasa en 6º los contenidos dados en 5º de primaria.

Como aspecto en común entre el libro de referencia y los libros de texto, se puede observar que mantienen una misma línea de aprendizaje o estudio de las matemáticas: a través de la práctica. Por esta razón contienen una parte de ejercicios, más amplia en el caso de los libros de texto pero considerable también en el libro de referencia.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Tras el análisis realizado se puede observar una gran coherencia entre el currículo y los libros de texto. Las editoriales siguen los contenidos marcados en los reales decretos: Real Decreto 1513/2006 y Real Decreto 1631/2006, los cuales marcan los contenidos mínimos de cada ciclo. Incluso en algunos de los libros de texto analizados, concretamente en el libro del profesor de 1º y 2º ESO, se hace referencia a la ley, recogiendo no sólo los contenidos mínimos de matemáticas, sino también especificando las competencias básicas, y la contribución de las matemáticas a la adquisición de dichas competencias (Anexo 2).

La principal diferencia encontrada entre los contenidos marcados por la ley y los contenidos de los libros de texto se puede observar en el libro analizado en 3º ESO. Este libro añade materia no mencionada en los contenidos mínimos marcados por la ley, aunque relacionada con estos. En el tema de semejanza, puede observarse que el libro no sólo se centra en la aplicación de Tales, sino que hace una revisión en profundidad (no solo como repaso de contenidos iniciales) de contenidos específicos de 2º ESO como son las homotecias y semejanzas y las escalas. Esto aunque pueda parecerlo, no se aparta del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO sino que refuerza el carácter de aprendizaje en espiral en el que se basa la ley. El índice del tema es el siguiente:

10. Movimientos y semejanzas

    Vectores

    Movimientos en el plano

    Traslaciones

    Giros

    Simetrías

    Homotecias y semejanzas

    Teorema de Tales

    Aplicaciones del teorema de Tales

    Escalas

    Lo esencial

    Actividades

    En la vida cotidiana

Y en la figura 3 puede observarse que en los contenidos mínimos de 3º de ESO no se incluían contenidos de semejanza ni de escalas.

Además del libro de texto, las editoriales facilitan material añadido a los centros. En el caso analizado de 1º y 2º ESO, los libros de texto se acompañan con: el solucionario del libro; un CD de programación; un CD de banco de actividades; un CD de recursos interactivos para la enseñanza y el aprendizaje; un cuaderno de evaluación con evaluaciones iniciales, por unidades y evaluación global; un cuaderno con actividades de atención a la diversidad (de refuerzo y ampliación); y un cuaderno de actividades de investigaciones matemáticas.

Todos los libros analizados, aun siendo de diferentes editoriales, contienen en las últimas páginas de cada tema, tras el repaso de los contenidos del mismo, una parte de aplicación a la vida cotidiana, que puede añadir otra perspectiva al contenido, pero que no siempre es aprovechada por los docentes.

Una parte interesante que contienen los libros de primaria analizados a diferencia de los de ESO, es que en estos últimos viene dado un resumen o esquema del tema, mientras que en los de primaria, el esquema debe ser completado por el alumno en una sección titulada "aprende a aprender" favoreciendo el aprendizaje de técnicas de estudio individual, o el llamado "aprender a aprender".

Este tipo de secciones, tanto las de aplicación como las de resumen de contenidos, o introducción de contenidos mínimos a principios de tema, así como el material suplementario que ofrece cada editorial, son los que hacen que un docente pueda decantarse por una u otra editorial, ya que como se desprende del análisis realizado, todas las editoriales son totalmente coherentes con el currículo.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de semejanza y triángulos en 2ºESO

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se realiza un análisis de la resolución de problemas de semejanza y triángulos por alumnos de 2º de ESO. Esta parte está basada en la docencia llevada a cabo en el Prácticum II del Máster, realizada en el centro Luis Amigó de Pamplona.

El contenido se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se analiza el tema de triángulos y semejanza en el libro de texto utilizado. En el segundo capítulo se plantean las hipótesis sobre las dificultades y errores previsibles en los alumnos. Por último, en el tercer y cuarto capítulo se explican respectivamente el proceso de estudio y la experimentación realizadas.

Capítulo 5
La semejanza y los triángulos en el libro de texto de referencia

En este capítulo se analiza la semejanza y los triángulos tal y como aparecen en el libro de texto de 2º de ESO de la editorial sm. Se escoge el citado libro por ser el utilizado en el centro donde se realizaron las prácticas. Se trata de la unidad didáctica 11, que lleva el título “Semejanza. Triángulos”.

El análisis se apoya en el artículo de *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*, de Juan D.Godino, Vincenç Font y Miguel R. Wilhelmi de 2006.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

En este apartado se realiza un análisis similar al realizado en el artículo de referencia para estudiar los objetos matemáticos involucrados en la unidad didáctica.

LENGUAJE
Verbal
- Razón de semejanza, razón de proporcionalidad, constante de proporcionalidad, razón entre superficies, Teorema de Tales, semejanza, triángulos semejantes, figuras semejantes, lados proporcionales, ángulos iguales, ángulo comprendido entre dos lados, razón de áreas, mapa, plano, maqueta, escala, escala gráfica, escala numérica, Teorema de Pitágoras, cateto, hipotenusa, terna pitagórica, triángulo rectángulo, polígono, polígono regular, diagonal, apotema
Gráfico
- Escalas gráficas, figuras semejantes, dibujos en los que se representan situaciones contextualizadas de realización de figuras semejantes mediante el uso de una cuadrícula, dibujos en los que se presentan situaciones contextualizadas de aplicación del Teorema de Tales, dibujos de triángulos en los que se representan los criterios de semejanza de triángulos.
Simbólico
- 1:200.000 (escalas numéricas), AB-A’B’, k, k^2, $a^2= b^2+c^2$, escala gráfica: 
SITUACIONES
- Problemas contextualizados de escalas, construcción de figuras semejantes o cálculo de razón de semejanza, y de aplicación del Teorema de Pitágoras. - Problemas contextualizados en los que hay que hallar distancias utilizando escalas o razón de semejanza. - Problemas contextualizados en los que hay que aplicar el Teorema de Tales para calcular una magnitud a partir de triángulos semejantes. - Problemas contextualizados en los que hay que calcular uno de los lados de un triángulo conociendo los otros dos, mediante aplicación del Teorema de Pitágoras.
CONCEPTOS
Previos
- Figuras planas desde un punto de vista descriptivo, clasificación de triángulos y cuadriláteros, propiedades generales, criterios de igualdad de triángulos, ángulos,

transformaciones mediante simetría, escalas sencillas, Teorema de Pitágoras.
Emergentes
- Razón de semejanza, semejanza entre áreas, Teorema de Tales, criterios de semejanza de triángulos, aplicación de escalas a mapas, planos y maquetas, aplicación del Teorema de Pitágoras
PROCEDIMIENTOS
- Cálculo de distancias y longitudes reales mediante la escala de mapas, planos y maquetas. Identificación de figuras semejantes mediante el cálculo de la razón de semejanza. - Construcción de figuras semejantes conocida la razón de semejanza. - Reconocimiento de triángulos semejantes mediante los criterios de semejanza. - Cálculos de las dimensiones de un triángulo semejante a otro dado. - Aplicación del Teorema de Tales a la división de un segmento en partes iguales y a la construcción de polígonos semejantes a uno dado. - Aplicación del Teorema de Pitágoras a la resolución de triángulos rectángulos y elementos de polígonos. - Resolución de problemas de la vida cotidiana mediante la semejanza y el Teorema de Pitágoras.
PROPIEDADES
- Al ampliar o reducir una figura se obtiene otra figura semejante. - Las dimensiones de las figuras semejantes son proporcionales. - La constante que permite pasar de las dimensiones de una figura a las de su semejante se llama razón de semejanza. - Si un conjunto de rectas paralelas entre sí, cortan a otras dos rectas, entonces los segmentos que determina en ellas son proporcionales, por tanto: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = k$ - Donde k es la razón de semejanza. - Criterios de semejanza de triángulos: - Tres lados proporcionales - Tres ángulos iguales - Dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual - La escala es la razón entre la distancia entre dos puntos de un mapa, plano o maqueta, y la distancia de sus correspondientes en la realidad. - En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. $a^2=b^2+c^2$
ARGUMENTOS
- Comprobación dimensiones de figuras semejantes en casos particulares. - Comprobación de escalas con planos particulares. - Justificación de los criterios de semejanza de triángulos, utilizando elementos genéricos. - Comprobación del Teorema de Tales en casos particulares. - Comprobación del Teorema de Pitágoras en casos particulares.

Figura 18 . *Configuración epistémica de semejanza y triángulos.*

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

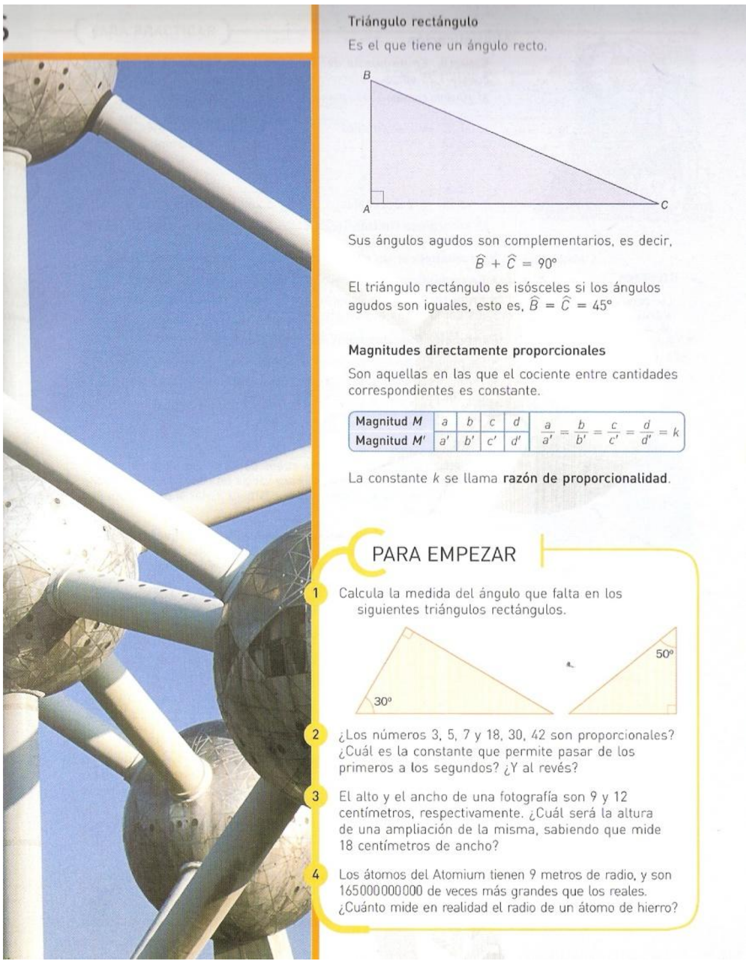
La unidad didáctica en estudio se adjunta escaneada en el anexo A de este trabajo de fin de máster. Su estructura es la siguiente:

Semejanza. Triángulos.

1. Figuras semejantes
2. Teorema de Tales
3. Triángulos semejantes
4. Mapas, planos y maquetas: Escalas
5. Teorema de Pitágoras
6. Cálculo de distancias en polígonos

La unidad, siguiendo una estructura común a todo el libro, comienza con una imagen, una fotografía real, y sobre ella, una pequeña introducción que tiene relación con el contenido de la unidad didáctica. En este caso, la fotografía es del edificio Atomium, en Bruselas, que es una representación a escala de la red atómica del hierro, y la introducción es sobre las ampliaciones y reducciones que a menudo se realizan, en las que se conservan las formas de los objetos.

Sobre esa misma imagen, en la página siguiente se realiza un repaso de los contenidos mínimos relacionados, en un apartado denominado "RECUERDA", y a continuación se hacen unos ejercicios en el apartado "PARA EMPEZAR" para reforzar esos contenidos:



Triángulo rectángulo

Es el que tiene un ángulo recto.

Sus ángulos agudos son complementarios, es decir,

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$$

El triángulo rectángulo es isósceles si los ángulos agudos son iguales, esto es, $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$

Magnitudes directamente proporcionales

Son aquellas en las que el cociente entre cantidades correspondientes es constante.

Magnitud M	a	b	c	d	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$
Magnitud M'	a'	b'	c'	d'	

La constante k se llama **razón de proporcionalidad**.

PARA EMPEZAR

1 Calcula la medida del ángulo que falta en los siguientes triángulos rectángulos.

2 ¿Los números 3, 5, 7 y 18, 30, 42 son proporcionales? ¿Cuál es la constante que permite pasar de los primeros a los segundos? ¿Y al revés?

3 El alto y el ancho de una fotografía son 9 y 12 centímetros, respectivamente. ¿Cuál será la altura de una ampliación de la misma, sabiendo que mide 18 centímetros de ancho?

4 Los átomos del Atomium tienen 9 metros de radio, y son 165000000000 de veces más grandes que los reales. ¿Cuánto mide en realidad el radio de un átomo de hierro?

Figura 18.

A continuación comienza la explicación de los contenidos propios de la unidad didáctica. El apartado 1 de esta unidad se titula "Figuras semejantes". Comienza con un ejemplo contextualizado de ampliación y reducción de fotografías, y la correspondiente explicación sobre figuras semejantes y razón de semejanza. A continuación se remarcan en un recuadro las nociones de figuras semejantes y razón de semejanza, y el significado de la razón según sea mayor o menor que uno, es decir, ampliación o reducción. En la página siguiente se pueden encontrar actividades sobre los conceptos explicados, que vienen calificados por niveles: en verde los de nivel básico, en amarillo los de nivel medio y en rojo los de nivel más complicado. Están divididos en dos grupos: "PARA PRACTICAR" y "PARA APLICAR". En el primero de ellos aparecen tres ejercicios de nivel básico, como el siguiente:

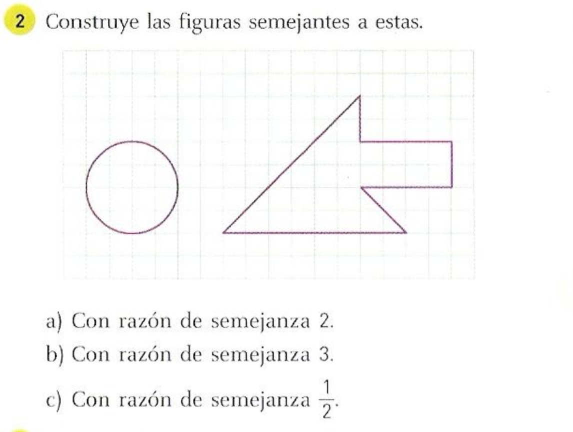


Figura 19.

En el segundo grupo aparecen cuatro actividades, mezcla de ejercicios de nivel medio y problemas. Es de señalar que sólo dos de los siete ejercicios están contextualizados. Las imágenes que aparecen en este primer apartado están bien elegidas con respecto a los ejercicios o teoría explicada, como se puede apreciar en la descripción de realización de imágenes semejantes:

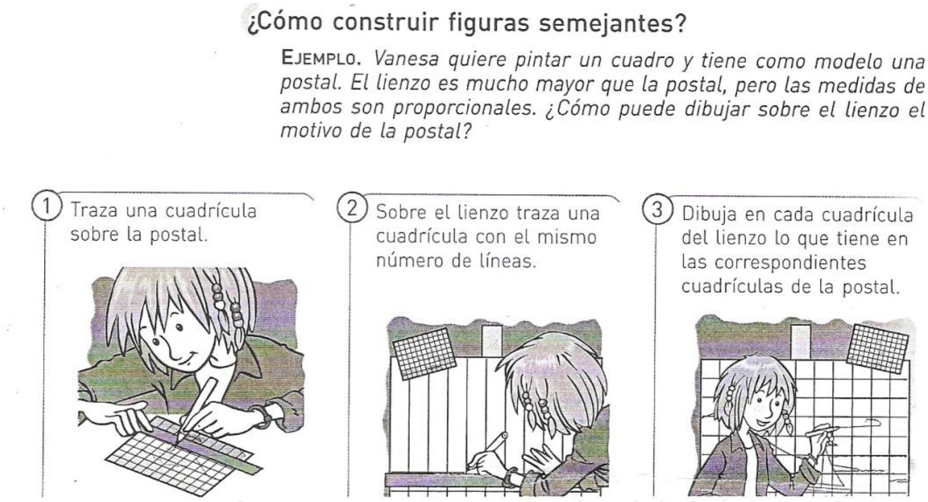


Figura 20.

La siguiente página corresponde al inicio del apartado 2 de la unidad, dedicado al Teorema de Tales. La relación está implícita en la definición de la constante de proporcionalidad o semejanza, que no se realiza hasta el final de la página, antes del ejercicio resuelto. La estructura seguida en este apartado es la misma que en el apartado 1, que se repite también en el resto de apartados:

- Ejemplo contextualizado
- Resolución del ejemplo y conclusión teórica
- Recuadro aclarativo de la teoría
- Ejercicio resuelto
- Actividades enmarcadas en la sección "PARA PRACTICAR"
- Actividades enmarcadas en la sección "PARA APLICAR"

La relación entre actividades contextualizadas y no contextualizadas es de 2 frente a 6 respectivamente. De las actividades de la sección "PARA PRACTICAR", dos están resueltas en el libro a modo de ejemplo para que el alumno sepa cómo realizar el resto de actividades similares.

Las imágenes al igual que en las páginas anteriores también están bien elegidas y no llevan a errores.

En el apartado 3, correspondiente a triángulos semejantes, hay en primer lugar un ejemplo y a continuación se da la definición de triángulos semejantes:

Dos **triángulos** son **semejantes** si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales.

$$\left.\begin{matrix} a' = k \cdot a & \widehat{A} = \widehat{A'} \\ b' = k \cdot b & \widehat{B} = \widehat{B'} \\ c' = k \cdot c & \widehat{C} = \widehat{C'} \end{matrix}\right\}$$

La constante de proporcionalidad entre las longitudes de los lados se llama razón de semejanza.

Figura 21.

Aunque ya se ha enunciado el criterio que debe cumplirse para que dos triángulos sean semejantes, se explican a continuación tres criterios que sirven para que en la práctica se identifiquen triángulos semejantes:

CRITERIO 1	CRITERIO 2	CRITERIO 3
Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados correspondientes proporcionales.	Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales.	Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos iguales.

Figura 22.

Este apartado finaliza con explicación de la razón de semejanza entre las áreas de triángulos semejantes. Se realiza de nuevo mediante un ejemplo contextualizado y el posterior recuadro- resumen teórico.

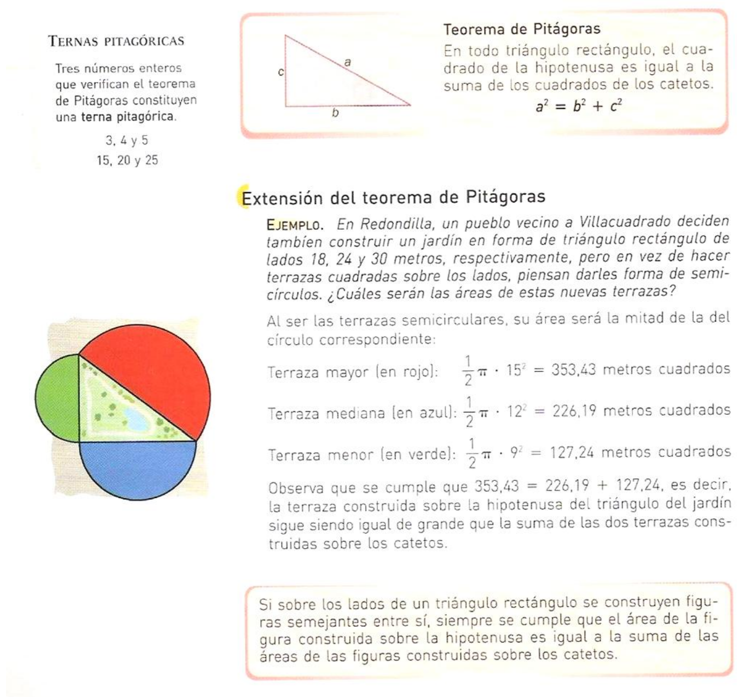
En la página siguiente se profundiza en la teoría de este apartado, con siete actividades (dos de ellas resueltas) en las que se ponen en práctica los criterios de semejanza en el primer grupo de ejercicios. En el apartado de actividades de aplicación se dedican dos ejercicios a aplicación de razón de semejanza entre áreas, y otro ejercicio contextualizado a aplicación de Tales para medir alturas.

El apartado 4 está dedicado a "Mapas, Planos y Maquetas: Escalas". La primera página de este apartado está dedicada a explicar las nociones de mapa, plano, maqueta y escalas, y la segunda a realización de actividades. Cada noción se explica mediante un ejemplo resuelto y contextualizado acompañado de un dibujo, y el posterior recuadro con la definición.

Las actividades sobre este apartado son nueve, con un ejercicio resuelto. A diferencia de los apartados anteriores, en este caso todos los ejercicios están contextualizados.

En el apartado 5 se explica el Teorema de Pitágoras. Se plantea un ejemplo, y después se enuncia el teorema. Se plantea un nuevo ejemplo, y se hace una extensión del teorema para las áreas de las figuras semejantes construidas sobre cada lado de un triángulo rectángulo:

También encontramos un pequeño recuadro, con la explicación de la noción de "terna pitagórica". Por su tamaño y colocación parece no ser una noción importante.



TERNAS PITAGÓRICAS

Tres números enteros que verifican el teorema de Pitágoras constituyen una **terna pitagórica**.

3, 4 y 5
15, 20 y 25

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Extensión del teorema de Pitágoras

EJEMPLO. *En Redondilla, un pueblo vecino a Villacuadrado deciden también construir un jardín en forma de triángulo rectángulo de lados 18, 24 y 30 metros, respectivamente, pero en vez de hacer terrazas cuadradas sobre los lados, piensan darles forma de semicírculos. ¿Cuáles serán las áreas de estas nuevas terrazas?*

Al ser las terrazas semicirculares, su área será la mitad de la del círculo correspondiente:

Terraza mayor (en rojo): $\frac{1}{2}\pi \cdot 15^2 = 353{,}43$ metros cuadrados

Terraza mediana (en azul): $\frac{1}{2}\pi \cdot 12^2 = 226{,}19$ metros cuadrados

Terraza menor (en verde): $\frac{1}{2}\pi \cdot 9^2 = 127{,}24$ metros cuadrados

Observa que se cumple que $353{,}43 = 226{,}19 + 127{,}24$, es decir, la terraza construida sobre la hipotenusa del triángulo del jardín sigue siendo igual de grande que la suma de las dos terrazas construidas sobre los catetos.

Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen figuras semejantes entre sí, siempre se cumple que el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos.

Figura 23.

La relación con los apartados anteriores, en caso de existir, no aparece señalada explícitamente.

La página siguiente contiene actividades para la práctica y aplicación del teorema de Pitágoras. No hay ningún ejercicio para aplicar la extensión del Teorema de Pitágoras a las áreas de figuras semejantes trazadas sobre los lados de un triángulo rectángulo, y sí que lo hay en relación a las ternas pitagóricas.

El siguiente apartado, el apartado 6, se titula "Cálculo de distancias en polígonos". Es una aplicación del Teorema de Pitágoras por descomposición de polígonos regulares en triángulos rectángulos. Se explica un ejemplo de cálculo de la apotema de un hexágono regular conociendo los lados, y otro de cálculo de la diagonal de un rombo conocida la otra diagonal y el lado. También aparecen otros dos problemas resueltos: cálculo del lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de la que se conoce el radio, y cálculo del perímetro de un trapecio isósceles conocida la altura y las bases. El apartado de actividades se compone de ocho ejercicios sin contextualizar en la sección "PARA PRACTICAR" y cinco contextualizadas en la sección "PARA APLICAR".

La página siguiente contiene un apartado de "MATEMÁTICAS COTIDIANAS" donde se aplica Tales para el cálculo de la altura de una torre, situación que puede ser aplicada por los alumnos de forma sencilla en la vida real.


¡QUÉ TORRE TAN ALTA!

En el pueblo de Beatriz hay un castillo en ruinas del que solo queda una torre completa. Para medir la altura de esta torre, Beatriz ha pedido ayuda a su hermano Alejandro. Este debe situarse en punto fijo *A* mientras que Beatriz va moviendo un espejo sobre la trayectoria que une los pies de Alejandro con el de la torre. Alejandro debe avisar en el momento exacto en el que vea el punto más alto de la torre reflejado en el espejo. En ese momento resulta que el espejo está situado a 2,5 metros de Alejandro y a 12 de la torre. ¿Cómo se puede calcular la altura de la torre sabiendo que Alejandro mide 165 centímetros?

DATOS

Ahora estoy viendo el punto más alto de la torre.

En los problemas de geometría ayuda elaborar un esquema o **dibujo en el que aparezcan señalados los datos** proporcionados en el enunciado y **las incógnitas** que se solicitan.

PLANTEAMIENTO

Los triángulos *ABC* y *AB'C'* son semejantes, ya que son rectángulos y, además, tienen otro ángulo igual. Entonces, los lados de los dos triángulos son proporcionales.

Recuerda que en física estudiamos que al reflejarse la luz, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

En ocasiones, a la hora de resolver problemas de geometría conviene **buscar triángulos semejantes** y aplicar la propiedad de **proporcionalidad de los lados**.

Figura 24

La siguiente página contiene un resumen de toda la teoría dada en esta unidad.

Después de esta página-resumen, hay otras 3 páginas de actividades, para practicar todo lo aprendido en el tema. Están divididas en apartados: "CÁLCULO MENTAL", "PARA PRACTICAR Y APLICAR", "PARA REFORZAR", "PARA AMPLIAR", "PARA INTERPRETAR Y RESOLVER", y un apartado final de ejercicios de autoevaluación. En esta autoevaluación, se indica a los alumnos dónde pueden encontrar más actividades sobre el tema:

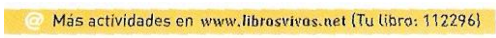


Figura 25.

En estos apartados casi todos los ejercicios están contextualizados, excepto algunos de aplicación de Pitágoras del apartado "PARA REFORZAR". Los dibujos que los acompañan están bien elegidos, siendo una buena ayuda para el alumno.

Finalmente hay una página dedicada a la sección "MATEMÁTICAS A TU ALREDEDOR" con contenidos transversales, dónde se da a conocer otro tipo de mapa distinto a los que se han visto: el mapa del cerebro. También se explica alguna curiosidad, y una actividad relacionada con la geometría que puede ser atractiva para los alumnos:

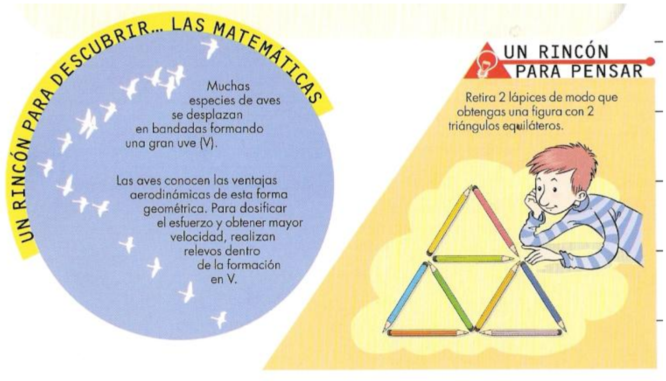


Figura 26.

5.3. Otros aspectos relevantes

Se puede observar que el tema tiene dos contenidos diferenciados. Por un lado está la semejanza, que incluye el Teorema de Tales, y por otro lado el Teorema de Pitágoras. Estas dos secciones son las que han marcado la docencia del tema. Se ha impartido primero la parte de semejanza, y después la del Teorema de Pitágoras. Este teorema ya era conocido por los alumnos, por lo que terminar con este apartado me permitiría avanzar más rápido en caso de faltarme algo de tiempo, por ejemplo no realizando todas las actividades propuestas por el libro.

Durante la docencia del contenido de semejanza, no se siguió el orden establecido por el libro. Se desarrolló primero la semejanza en todo tipo de figuras planas, incluyendo escalas y mapas, y posteriormente se pasó a la semejanza en triángulos y al Teorema de Tales. Este orden tenía más sentido desde mi punto de vista que dejar los mapas para la última parte de la semejanza, con la semejanza de figuras planas, porque puede parecer que no tiene relación, y yo consideraba también más correcto ver el concepto de triángulos semejantes antes de enseñar el teorema de Tales y su relación con este tipo de triángulos.

Comenzar con figuras semejantes me permitía además aportarles material suplementario, como mapas y planos para que pudieran practicar con algo cotidiano y diferente a trabajar con el libro de matemáticas, lo que puede suponer una motivación extra. Se adjunta la hoja de ejercicios en el anexo 3.

También en el apartado del Teorema de Tales, se les pasó una hoja de ejercicios, para profundizar en el teorema y en el cálculo de distancias en triángulos semejantes. La hoja de ejercicios se adjunta igualmente en el anexo 3.

Fueron varios los alumnos que se extrañaban o preguntaban por qué el orden seguido en clase no era el mismo que el establecido en el libro. Esta actitud se explica por la falta de costumbre a separarse del contenido del libro. Pude observar antes de la docencia autónoma, que el profesor de matemáticas no introduce material, contenidos o actividades distintas a las del libro, y que generalmente realizan todos los ejercicios que acompañan a las unidades didácticas.

Capítulo 6
Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se planteará una visión previa a la docencia sobre cuáles podían ser las dificultades y errores previsibles en el alumnado, que nociones y conceptos se les podían hacer más difíciles.

6.1. Dificultades

Durante la docencia de esta unidad didáctica se han puesto de manifiesto algunas dificultades en los alumnos. Las describiremos a continuación.

La primera duda común a varios alumnos que surgió en el aula, fue la del manejo de la escala gráfica. Se aprecia que están muy acostumbrados a realizar operaciones de forma muy metódica, pero los significados de las nociones parece que no quedan tan claros. No había dudas con la escala numérica porque la usaban de manera mecánica, sin embargo la escala gráfica que parece más sencilla, porque se puede utilizar como una regla común, les causaba problemas.

Otra dificultad que se encontraron fue la de construir figuras semejantes a partir del teorema de Tales. Pese a estar bien explicado en el libro, dedicarle tiempo en clase, y realizar varios ejercicios, fue una cuestión bastante preguntada en clase.

Con respecto a Tales, se pensaba que su comprensión causaría más dificultades entre los alumnos por ser una noción no estudiada en cursos anteriores, y sin embargo no fue así. Exceptuando los problemas ya mencionados de dibujar figuras semejantes, no se tuvo un gran problema en la comprensión, realización y corrección de los problemas de este tipo en el aula.

6.2. Errores y su posible origen

Los alumnos están acostumbrados a utilizar calculadora, y cometen muchos errores de cálculo cuando corrigen los problemas en la pizarra. En los exámenes parece que tienen más cuidado, o que la situación es más propicia (no están siendo observados por el resto de la clase) y los errores no son tan comunes como lo son en el día a día. Un error asociado al uso de la calculadora que surgió en clase, es que los alumnos no se acordaban cómo se realizaban las raíces cuadradas, a pesar de que lo habían practicado en la unidad didáctica 6 de este mismo curso.

Otro error frecuente fue la no resolución de los ejercicios de semejanza entre superficies que se propusieron como tarea, pese a haberse insistido en la explicación. Se preveía que el trabajo en dos dimensiones les podía resultar algo complicado, puesto que se había observado a los alumnos de un curso menos trabajar las nociones de perímetro y superficie y tenían muchas dificultades. Este error puede deberse a la costumbre de trabajar en una única dimensión, quizás debieran introducirse conceptos como la superficie en cursos anteriores aunque fuera sólo de forma muy básica.

Se observó también que tienen poca costumbre de dibujar los ejercicios, quieren hacerlo todo a través de cálculos, por eso los ejercicios de realizar figuras semejantes, que son muy sencillos, les suponían bastante trabajo. Incluso algunos alumnos, ante proporciones sencillas, en ejercicios que había que utilizar el compás para hallar figuras semejantes por Tales, utilizaban la regla para medir un lado, y hallaban el lado correspondiente de la figura semejante multiplicando por la razón con la calculadora. Esto hacía que cometieran grandes errores de imprecisión. Los errores de este tipo pueden deberse a un concepto de las matemáticas poco práctico y basado únicamente en realizar operaciones y dar soluciones numéricas.

Capítulo 7
El proceso de estudio

En este capítulo se analiza el proceso de estudio llevado a cabo durante la docencia de las prácticas. Se plantea cómo se ha distribuido el tiempo en las clases y las actividades planificadas tanto dentro como fuera del aula.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

Inicialmente se planificaron ocho sesiones (dos semanas) para desarrollar el contenido de la unidad. Esta planificación tuvo que ser modificada, puesto que la segunda semana una parte del alumnado estaba de intercambio en Francia. El examen previsto inicialmente para la octava sesión, primera de la tercera semana, se pasó a la siguiente sesión dejando una clase más para repaso o puesta al día de los alumnos que habían estado fuera. Así, finalmente, salieron nueve sesiones.

En todas las sesiones se hace una primera parte de repaso de los conceptos iniciales o vistos en la sesión anterior. Este repaso se hace de forma dialógica mediante preguntas y respuestas a los alumnos.

La explicación de nuevas nociones se hace sobre el contenido del libro. Es leída en voz alto por algún alumno, con interrupciones por parte del profesor para explicarlo de nuevo sobre la pizarra.

Los ejercicios son corregidos en la pizarra por los alumnos, aprovechando la actitud favorable que mantienen en este sentido, y siendo ayudados en algunos momentos por el profesor. Exceptuando a dos o tres alumnos el resto están deseando salir a la pizarra.

1ª Sesión: lunes 23 de abril

- Introducción del tema: **20min**

- Repaso de contenidos iniciales:
    - Tipos de triángulos, clasificaciones según sus lados y sus ángulos, propiedades de los triángulos,… hasta llegar al teorema de Pitágoras sabiendo con que triángulos se puede aplicar.
    - Idea de semejanza contrapuesta con igualdad.
- Se realizan entre todos los ejercicios que propone el libro para iniciar el tema.

- Apartado 1. Figuras semejantes. **15min**

- Lectura y explicación del apartado 1. Búsqueda de ejemplos de figuras semejantes en la realidad: ampliaciones de fotos, proyectores, ampliación de imágenes con la ruleta del ratón en el ordenador,…

- Tarea: se les deja tiempo para que comiencen a realizar la tarea en clase. Uno de los ejercicios que propone el libro no se les manda, porque lleva mucho tiempo y no añade nada nuevo sobre el resto de ejercicios. **10min**

2ª Sesión: miércoles 25 de abril

- Repaso de los contenidos introducidos en la sesión anterior. **5min**

- Corrección de tarea. Y resolución de dudas. **30min**

- Apartado 4. Mapas, planos y maquetas: escalas. Lectura y explicación de los contenidos del libro. Se enseña un mapa real, un plano, y un escalímetro. Se les dos mapas para que utilicen en uno de ellos la escala numérica, y en el otro la escala gráfica. Además de hacer los ejercicios que se plantean en esta fotocopia, tienen que realizar como tarea los ejercicios del libro para este apartado. **30min**

3ª Sesión: jueves 26 de abril

- Repaso de los contenidos introducidos en la sesión anterior. **5min**

- Corrección de tarea. Y resolución de dudas, que surgen sobre todo en el uso de la escala gráfica. **30min**

- Repaso del concepto de semejanza e introducción del apartado 3, triángulos semejantes. Los ejercicios de cuestiones teóricas que propone el libro se resuelven en clase, y el resto se mandan como tarea para casa. **20min**

4ª Sesión: viernes 27 de abril

- Repaso de los contenidos introducidos en la sesión anterior. **5min**

- En esta ocasión se aprovecha este primer tiempo para explicar el apartado 2 del tema, Teorema de Tales, aprovechando que están más atentos y menos cansados que en la segunda mitad de la clase.

- Corrección de la tarea y resolución de dudas. **20min**

- Se mandan como tarea para realizar en casa las actividades propuestas por el libro, que no son muchas, y se les proporciona una hoja con tres ejercicios más sobre cálculo de distancias por aplicación de Pitágoras, ya que en el libro no hay ninguno del tipo 1 y 2 propuestos. Ver Anexo 3. **10min**

5ª Sesión: miércoles 2 de mayo

- Repaso de los contenidos vistos en la sección anterior. **5min**

- Corrección de tarea y resolución de dudas, que surgen sobre todo con los ejercicios propuestos de fuera del libro. Se les enseña una forma ordenada para resolver estos ejercicios sin equivocarse convirtiendo el ejercicio dado, en otro del tipo de alturas de torres. **50min**

- Como tarea se realizarán los ejercicios que no habían salido bien.

6ª Sesión: jueves 3 de mayo

- Repaso del Teorema de Pitágoras y de las condiciones para poder aplicarlo. **5min**

- Lectura y explicación del apartado 5 y 6, Teorema de Pitágoras y Cálculo de distancias en polígonos. **20min**

- Realización de los ejercicios del apartado 5 en clase, en común, y se mandan como tarea los ejercicios del apartado 6. **30min**

7ª Sesión: viernes 4 de mayo

- Repaso de los contenidos vistos en la sección anterior. **5min**

- Corrección de tarea y resolución de dudas. Hay alguna duda de comprensión de enunciados, pero no sobre aplicación del Teorema de Pitágoras en sí. **45min**

- Como tarea se propone la realización de las actividades finales del tema, que tratan sobre todos los apartados.

8ª Sesión: lunes 7 de abril

Sesión de repaso de todos los contenidos que se han visto en la unidad. Se resuelven dudas y se recuerdan las principales pautas que se han dado de cara al cuestionario de la siguiente sesión: no se puede usar calculadora, las raíces cuadradas se realizan sacando dos decimales,…

Se señala a los alumnos que han estado fuera que deben repasar conceptos de geometría que les van a aparecer en los ejercicios de aplicación de Pitágoras, por ejemplo el concepto de apotema. Se intenta poner atención en los puntos en los que el resto de alumnos ha tenido más problemas o dudas, como el Teorema de Tales. **30min**

- Corrección de tarea y resolución de dudas. Como no va a dar tiempo a resolver todas las actividades, se resuelven aquellas en las que los alumnos han tenido más dudas, y las que me parecen más interesantes o complicadas. **25min**

- Como tarea se propone la realización de las actividades de autoevaluación del libro.

9ª Sesión: jueves 9 de abril

Esta sesión se dedica de pleno a la realización del cuestionario (el miércoles no tienen clase de matemáticas porque es la semana cultural del centro y tienen otras actividades).

7.2. Actividades adicionales planificadas

Al comenzar con el apartado de mapas, planos, maquetas y escalas se aporta material para trabajar de forma distinta a la del libro de texto. Se enseñan mapas con los distintos tipos de escalas (gráfica y numérica), un escalímetro para el uso de planos, y una hoja de ejercicios con escalas. Acostumbrados a utilizar la calculadora y a realizar cuentas, los alumnos tienen más dificultades para entender y realizar los ejercicios de la escala gráfica que para utilizar la escala numérica. Los ejercicios planteados están en el Anexo 2. En éstos, se pregunta por pueblos y ciudades, para acercarlos a la geografía de Navarra.

Los ejercicios de Tales que plantea el libro son prácticamente todos de dibujar. Se les aporta una hoja con ejercicios para enseñarles a calcular distancias sobre triángulos semejantes, y prepararlos para los ejercicios que verán en años posteriores. Para que no tengan dificultades, se les enseña un método de trabajo:

- Dibujar los triángulos separados
- Hallar dos lados correspondientes
- Calcular la razón de semejanza entre dichos lados
- Buscar un lado correspondiente a aquel que hay que calcular
- Obtener la distancia pedida mediante el lado correspondiente y la razón de semejanza.

Los alumnos no tienen grandes dificultades en la realización de esta tarea.

7.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista

Se aprovecha que los alumnos están acostumbrados a realizar tarea todos los días para seguir en esa línea.

Se calcula un trabajo en casa que puede ocuparles entre media hora y tres cuartos de hora, según las dificultades del alumno. Sin embargo, como se aprecia después este cálculo no es bueno, puesto que los alumnos con más dificultades son los que menos tiempo dedican a la realización de tarea, puesto que cuando hay un ejercicio que no entienden no hacen esfuerzo por enfrentarse a él, sino que lo dejan sin hacer. Las sesiones en las que se explican los apartados en los que el libro presenta más actividades, se intenta dejar tiempo para realización de tarea en clase, o resolver ejercicios en común.

Las tareas sobre material distinto al del libro de texto tienen bastante éxito en cuanto a realización y esfuerzo. Aunque la actividad de escala gráfica no haya sido resuelta por demasiados alumnos, el resto se interesan sobre su resolución correcta. Esto no ocurre cuando fallan con la tarea del libro, que simplemente no la hacen, y no se preocupan por saber cómo se realiza, exceptuando a algún alumno en concreto.

Como se ha variado el orden seguido en el tema, algún ejercicio no puede ser realizado dentro del apartado que marca el libro (puesto que tiene que ver con algún apartado anterior que no se ha explicado). Estos ejercicios no se proponen como tarea, y se realizan en clase una vez explicada su teoría. Tampoco el alumnado está acostumbrado a esto, por lo que para ellos solamente significa menos tarea, no se dan cuenta que el ejercicio se va a ver después.

Tipo	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
Sesión 1		
Actividades	30’	Aplicación y Práctica
Estudio personal	10’	Refuerzo
Sesión 2		
Actividades	30’	Aplicación y Práctica
Estudio personal	10’	Refuerzo
Sesión 3		
Actividades	25’	Aplicación y Práctica
Estudio personal	10’	Refuerzo
Sesión 4		
Actividades	30’	Aplicación y Práctica
Estudio personal	15’	Refuerzo
Sesión 5		
Actividades	15’	Refuerzo
Estudio personal	15’	Refuerzo
Sesión 6		
Actividades	40’	Aplicación y Práctica
Estudio personal	15’	Refuerzo
Sesión 6		
Actividades	40’	Aplicación y Práctica
Estudio personal	10’	Refuerzo
Sesión 7		
Actividades	20’	Aplicación y Práctica
Estudio personal	20’	Refuerzo

Figura 27. *Distribución del tiempo de trabajo individual*

Capítulo 8
Experimentación

En este capítulo se explica la experimentación llevada a cabo en el centro.
Se explican las principales características de la muestra y el diseño de la experimentación. A continuación se presenta el cuestionario realizado por el alumnado y los planteamientos previos y posteriores sobre su resolución.

8.1. Método

La evolución de una teoría en didáctica de las matemáticas puede determinarse por el contraste entre un análisis a priori y un análisis a posteriori. La teoría busca validar las hipótesis que formula (a priori). Los hechos observados permiten (a posteriori) validar o refutar, total o parcialmente, las hipótesis enunciadas.

La ingeniería didáctica (Artigue, 1989) permite abordar el contraste experimental necesario, que permita determinar condiciones de reproducibilidad de situaciones didácticas. Aquí, las variables didácticas actúan de “contraste o reactivo” que permiten de manera controlada provocar en los sujetos modificaciones en sus estrategias de acción para adaptarlas al medio.

El estudio de la adecuación de las variables didácticas para determinar cambios en las estrategias de acción representa un instrumento de validación interna de las conclusiones que puedan extraerse de una observación concreta. En estas condiciones, se puede definir una situación reproducible; es decir, en condiciones similares, con un control del medio, la construcción del conocimiento pretendido será la misma.

La cuestión de la reproducibilidad de las situaciones incide sobre la fiabilidad de las observaciones y, sobre todo, sobre su validez. La fiabilidad presupone una estabilidad en el funcionamiento del sistema didáctico; el contraste repetido entre el análisis a priori y el análisis a posteriori permite hacer evolucionar las condiciones del medio (incluidas las intervenciones del profesor) que garanticen la construcción del saber pretendido, de tal manera que la situación devenga reproducible. Es entonces cuando su validez puede ser aceptada, puesto que la situación es exitosa y aplicable de manera estable.

En este trabajo, la parte I “La semejanza y los triángulos en el currículo vigente y en los libros de texto” constituye el estudio previo de la dimensión de enseñanza, desde una perspectiva eminentemente institucional; a saber:

- El contenido matemático en el currículo vigente, incluidas las orientaciones y criterios de evaluación.
- El desarrollo de estas directrices oficiales en los libros de texto escolares.

Este estudio precede al análisis a priori realizado en los capítulos 5, 6 y 7, donde se abordan las dimensiones:

- Epistemológica: las matemáticas presentes en la unidad didáctica objeto de estudio.
- Cognitiva: dificultades y errores de los estudiantes en el aprendizaje de la unidad didáctica.
- De enseñanza: descripción del proceso de estudio implementado.

En el capítulo 8, este análisis a priori es contrastado con los resultados de la experimentación, permitiendo una valoración de los mismos basada en las “expectativas previas” (discusión de los resultados), que supone la fase última del método de la ingeniería didáctica.

8.2. Muestra y diseño de la experimentación

Los estudiantes que formaban la muestra eran los alumnos de las dos clases de 2º de ESO del colegio Luis Amigó. Estas clases estaban formadas por 31 alumnos en 2ºA y 31 alumnos en 2ºB. Se trata de grupos pertenecientes a una clase social media-alta, muchos de ellos pertenecientes a la cercana localidad de Mutilva. Hay solamente dos alumnos inmigrantes muy bien integrados. Todos son de la misma edad, excepto un alumno de clase A que repitió un curso anterior.

Se encuentra una diferencia grande entre el comportamiento de ambas clases. Una de ellas funciona muy bien como grupo, es muy compacto, no en capacidades, pero si en actitud. Se respetan entre ellos y saben cuando tienen que trabajar, facilitan mucho la labor del profesor. La clase B por el contrario no está tan cohesionada, aprovechan la mínima ocasión para meterse unos con otros, y esto hace más difícil que se centren en la asignatura y en seguir al profesor.

El diseño de la experimentación se ha realizado con total libertad. El profesor tutor ayudó en la elección del nivel de algún ejercicio del cuestionario, y posteriormente confió totalmente en mi corrección y en las notas de los cuestionarios. Éstos últimos contaban como un examen más de la asignatura.

8.3. El cuestionario

Se escogen los ejercicios de manera que encajen con lo realizado en clase, y que cubran todos los apartados del tema. Se preparan ejercicios de nivel básico hasta llegar a una puntuación de 5 (aprobado). A partir de ahí, se van complicando hasta el 10.

Inicialmente se valora la posibilidad de hacer 10 ejercicios o hacer 8. Se opta por esto último, ya que los ejercicios pueden ser un poco largos, hay que tener en cuenta que no pueden utilizar la calculadora, por lo que tendrán que realizar raíces cuadradas a mano que añaden un tiempo extra a la resolución.

Hay algún dato que se cambiará de una clase a otra, se expondrá primero el examen de 2ºA y después las modificaciones.

1.- En un mapa, la distancia entre dos poblaciones es de 6 centímetros. Calcula la distancia real, sabiendo que el mapa está representado a las siguientes escalas. Expresa la distancia en la unidad más adecuada.

a) 1:600 000 *b) 1:350 000*

2.- Construye la figura semejante a la dada, con razón de semejanza 2,5.

3.- ¿Hasta qué altura llegará una escalera de 3 metros de altura que se apoya contra una pared y está separada de ella 1,5 metros? (DIBÚJALO)

4.- Visitando un museo, la madre de Carolina le dice a su hija que se parece a una niña de un cuadro. Si Carolina mide 1,50 metros de altura y la niña del cuadro 30 centímetros, ¿cuál es la razón de semejanza entre sus alturas?

5.- En una fotocopiadora hacemos una ampliación de una hoja al 135%. En dicha hoja aparecía un círculo de 4,8 centímetros de diámetro. Calcula el diámetro del círculo en la ampliación. Halla la razón de semejanza del círculo grande con respecto al pequeño.

6.- Para calcular la altura de una torre, se han medido a la misma hora su sombra y la de una persona, resultando ser de 22,5 metros y de 15 centímetros respectivamente. Si la persona mide 172 centímetros, calcula la altura de la torre.

7.- Halla la apotema de un hexágono regular de 14 centímetros de lado.

8.- Los lados correspondientes de dos triángulos semejantes miden 16 y 24 metros, respectivamente. Calcula el área del triángulo mayor, sabiendo que el área del pequeño mide 15 metros cuadrados.

A continuación se expondrán los ejercicios cuyos datos se han variado para el examen de 2ºB. Hay cambios en los ejercicios 4, 5, 7 y 8.

4.- Visitando un museo, la madre de Carolina le dice a su hija que se parece a una niña de un cuadro. Si Carolina mide 1,50 metros de altura y la niña del cuadro 40 centímetros, ¿cuál es la razón de semejanza entre sus alturas?

5.- En una fotocopiadora hacemos una ampliación de una hoja al 145%. En dicha hoja aparecía un círculo de 4,8 centímetros de diámetro. Calcula el diámetro del círculo en la ampliación. Halla la razón de semejanza del círculo pequeño con respecto al grande.

7.- Halla la apotema de un hexágono regular de 16 centímetros de lado.

8.- Los lados correspondientes de dos triángulos semejantes miden 16 y 40 metros, respectivamente. Calcula el área del triángulo mayor, sabiendo que el área del pequeño mide 15 metros cuadrados.

8.4. Cuestiones y comportamientos esperados

Aunque no se planteen por escrito, durante la realización del examen se esperan ciertas dudas o errores, que pueden ser comunes en la mayoría de los alumnos. A continuación se explican para cada ejercicio, y también errores que pueden influir a varios ejercicios al mismo tiempo.

El ejercicio 1 se espera que se realice correctamente porque se ha trabajado bien en clase, aunque pueda haber errores en el cambio de unidades. No se esperan errores en la elección de la unidad más apropiada porque se ha incidido bastante en esta cuestión.

Se espera que el ejercicio 2 sea resuelto de forma correcta por casi todo el alumnado, y si hay dudas que vengan porque la razón no es un número entero. Se dudó entre plantear un ejercicio con cuadrícula o plantearlo mediante rectas paralelas, aplicando Tales, pero se escogió la cuadrícula por considerarse más sencillo.

En el ejercicio 3, puede haber algún error de lectura de datos, por ejemplo tomar la altura de la escalera como 3m, en vez de la dimensión de la misma, es decir, confundir la medida del cateto con la de la hipotenusa. Sin embargo, como durante la realización del examen se insiste en que tengan cuidado al dibujarlo, y no confundan un dato con otro, no debería haber problemas en esto. Además se dice que lo dibujen para evitar errores. No se esperan dudas en el planteamiento del Teorema de Pitágoras.

En el ejercicio 4, no debería haber grandes problemas, porque se ha trabajado mucho la noción de razón de semejanza.

En el ejercicio 5, puede haber problemas de interpretación entre porcentajes, si el 145% es antes o después de realizar la fotocopia, pero se han respondido dudas sobre esto en clase, en voz alta. Como puede haber errores de interpretación en el cálculo de la razón, se explica en clase que "hallen la razón que permita pasar del triángulo pequeño al grande" (en el caso de 2º A) o "del grande al pequeño" (en 2º B).

Ejercicios del tipo 6 se han realizado varios en clase, por lo que los alumnos que hayan estudiado bien, deberían sacarlo fácilmente.

El ejercicio 7 puede plantear problemas si no tienen claro qué es la apotema, pero ya se ha repasado en clase, por lo que tampoco debería resultar muy difícil. Puede haber despistes al plantear Pitágoras, y que tomen la medida de todo el lado del hexágono como cateto, en vez de tomar la mitad del lado.

En el ejercicio 8, se espera que resuelvan la razón, y que no todos hallen el área del triángulo grande, que la resuelvan como el área del pequeño por la razón en vez de por la razón al cuadrado.

También se cree que no debería haber errores debidos a los datos que se han cambiado entre clase y clase, y en todo caso, que el examen sea resuelto mejor en 2ºB, porque su examen es el que se realiza después y los alumnos de esta clase pueden consultar a los de 2ºA en el recreo qué preguntas se les han hecho.

Se espera también que pueda haber errores en la realización de las raíces cuadradas, porque están acostumbrados a utilizar calculadora, y han preguntado mucho sobre eso en clase, así que puede que no esté claro del todo.

8.5. Resultados

Tras la corrección de los exámenes se realiza un análisis permita obtener conclusiones y el examen sirva no únicamente a los alumnos, sino también al profesor, ya que puede ayudar a saber cómo debería plantear los conocimientos en futuras ocasiones.

El cuestionario A fue realizado por 27 alumnos (uno faltó a clase y tres realizaron el examen con 2ºB, hacen así los 31 alumnos). El cuestionario B lo realizaron 33 alumnos (también faltó al examen un alumno). Los ejercicios 1, 2, 3 y 6 pueden analizarse para el total de alumnos, mientras que en el resto lo primero es ver si los cambios han supuesto diferencias entre una clase y la otra.

En principio se realizaron los cambios teniendo en cuenta que las operaciones no se complicaran más en un caso que en el otro, por ejemplo que en un caso saliera una división con decimales y en el otro no. Sin embargo, tras la corrección, se puede decir que los cambios de datos realizados en el ejercicio 5 afectaron a su resolución. Los alumnos, aunque en clase parecía que asimilaban bien el significado de que la razón fuera mayor o menor que 1, en el examen no supieron sacar la razón de reducción. Sólo la obtuvieron tres alumnos de los 33 que realizaron el examen en B, pero muchos hallaron la razón de ampliación, por lo que no se pueden comparar los resultados de ambas clases.

Por este motivo, se va a considerar toda la muestra para todos los ejercicios excepto el 5, en el que los resultados se analizarán de forma independiente según la clase. Tenemos en cuenta que este análisis caerá en cierto error debido a que los exámenes no se produjeron al mismo tiempo, y los alumnos de ambas clases pudieron estar en contacto entre el examen de una clase y el de la otra.

Una vez planteada la forma en que se va a analizar la muestra, se plantean las variables en estudio:

- V_{01}: Aplicación correcta de la escala.
- V_{02}: Elección correcta de unidades.
- V_{03}: Obtención de figura semejante dada la razón.
- V_{04}: Error en la raíz cuadrada. Se quiere analizar por separado debido al interés y dudas mostradas por los alumnos en clase, acostumbrados a usar calculadora.
- V_{05}: Planteamiento correcto del Teorema de Pitágoras.
- V_{06}: Obtención de la razón de semejanza.
- V_{07}: Aplicación correcta de la semejanza entre áreas.
- V_{08}: Aplicación correcta del Teorema de Tales.

Por último se realiza un análisis del ejercicio 5.

Estas variables son observadas durante la corrección de los ejercicios de los alumnos, y a continuación se muestra el resultado.

Variable V_{01}

Esta variable se corresponde con la resolución del ejercicio 1. Se consideraba un ejercicio sencillo, y la hipótesis ha sido correcta, porque ha sido bien resuelto por la mayoría de alumnos. Los resultados se observan en el siguiente gráfico.

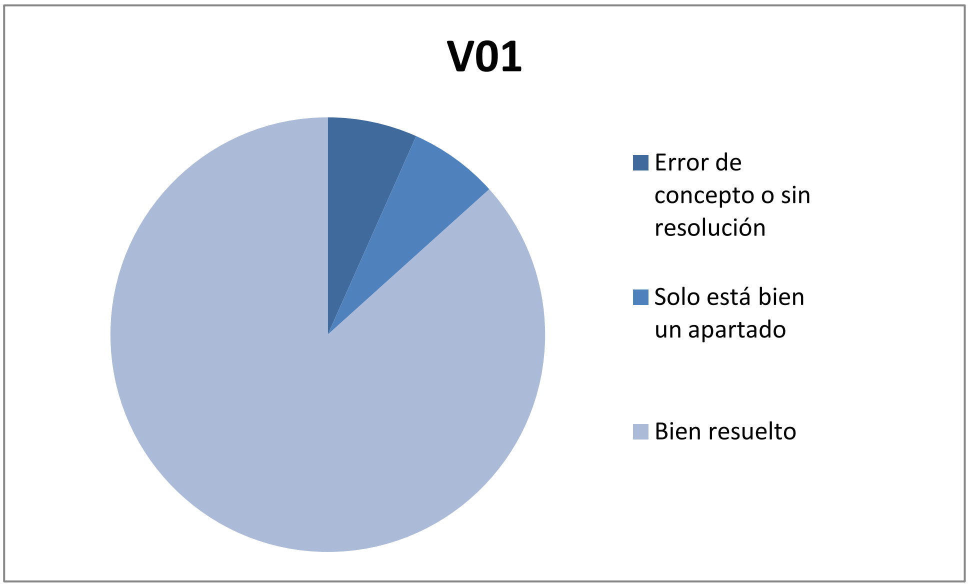


Figura 28. *Gráfico de distribución de Variable V_{01}*

Variable V_{02}

Esta variable se corresponde también con la resolución del ejercicio 1. Se puede observar en la gráfica lo esperado, que utilicen los km para expresar la distancia entre las ciudades, tal como se había trabajado en clase. De los alumnos que realizan bien el paso de escalas, sólo hay uno que no elige el kilómetro como unidad para expresar la distancia. No se habían contemplado los posibles errores en el paso de una unidad a otra puesto que es algo que lo tienen muy trabajado, sin embargo se han producido más errores de este tipo que en la variable V_{02}. Dicho error lo han cometido 7 alumnos. La gráfica de V_{02} se muestra a continuación:

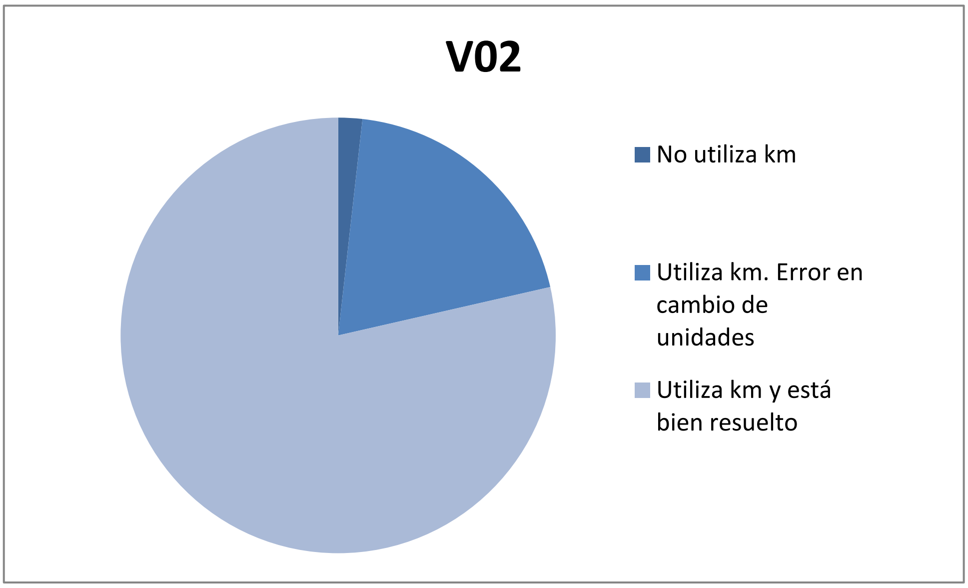


Figura 29. *Gráfico de distribución de Variable* V_{02}

Variable V_{03}

Esta variable se puede comprobar en la realización del ejercicio 2. En este ejercicio, que se suponía el más sencillo, se han encontrado más errores de los esperados. Su corrección ha sido complicada, y finalmente se optó por contar algo si solamente había un error (se suponía error de despiste, aunque se daba por entendido el concepto de razón de semejanza). A continuación se muestra un ejemplo de este tipo:

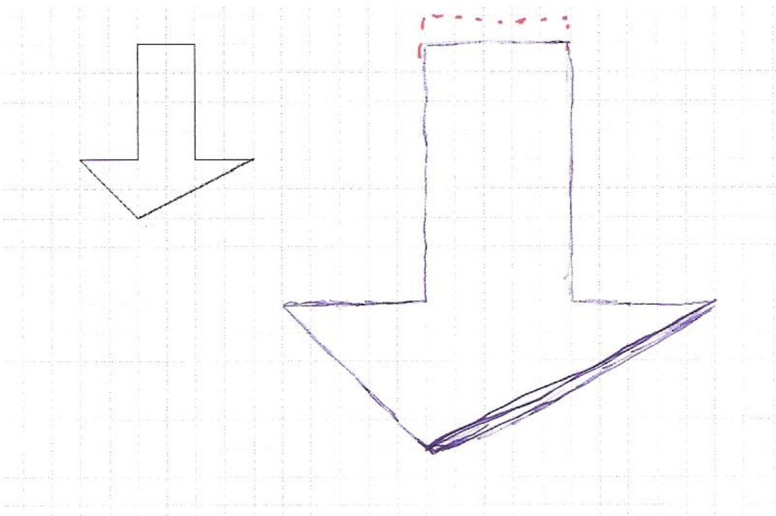


Figura 30. *Resolución ej. 2 por un alumno*

En el siguiente gráfico se distingue únicamente si el ejercicio está bien, se ha cometido un pequeño error o está mal (no se entiende el concepto). Señalar también que hubo dos alumnos que no utilizaron la cuadrícula, sino que lo hicieron midiendo la distancia con regla y multiplicando dicha medida por la razón dada. A estos alumnos se les contó el ejercicio como correcto, ya que la cuadrícula estaba dada a modo de ayuda, pero no se especificaba cómo construir la figura semejante.

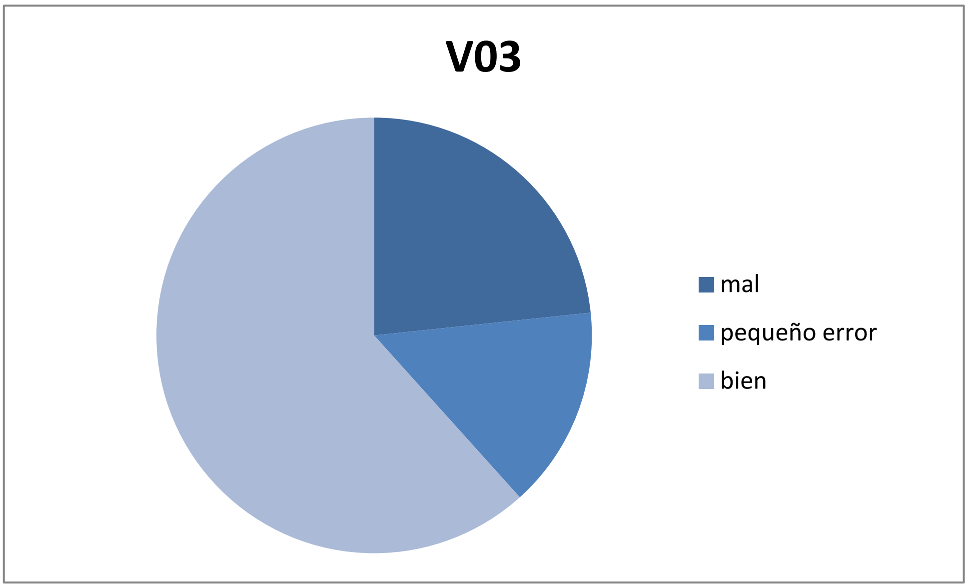


Figura 31. *Gráfico de distribución de Variable V_{03}*

Variable V_{04}

Esta variable se refiere a los errores que se han producido en las raíces cuadradas. Estos errores se podían producir en el ejercicio 3 y en el 7. Se han producido errores en las operaciones pero se sabía el método para realizar raíces. Únicamente un alumno ha dejado las raíces sin resolver, tanto en el ejercicio 3 como en el 7. En la siguiente gráfica se muestra de entre los alumnos que han planteado bien los ejercicios (supone el 100% de la gráfica), cuáles han resuelto bien el ejercicio, cuáles se han equivocado en las operaciones, y cuáles no han sabido realizar la raíz.

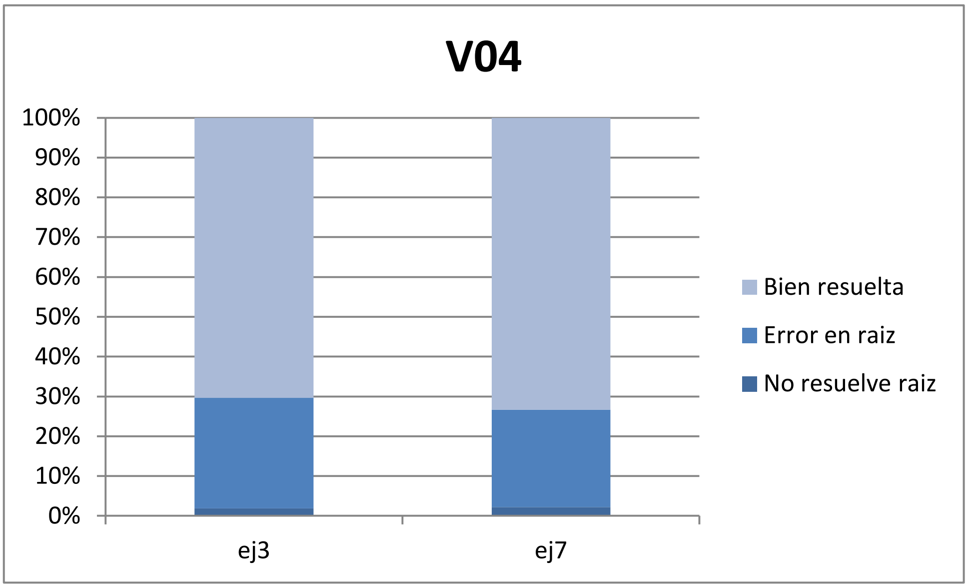


Figura 32. *Gráfico de distribución de Variable V_{04}*

Vemos que las gráficas de ambos ejercicios son prácticamente idénticas. El porcentaje de alumnos que no realiza bien las operaciones en el ejercicio 3, es similar al que no realiza bien las operaciones en el ejercicio 7.

Variable V_{05}

Esta variable indica si se plantea bien el Teorema de Pitágoras. Esto lleva consigo conocer el teorema, saber cuándo puede ser aplicado e identificar los lados del triángulo rectángulo en el teorema. Se puede observar en el problema 3 y en el 7.

Observando las gráficas podemos ver en cuanto a la variable V_{05} que son pocos alumnos los que no saben plantear bien Pitágoras.

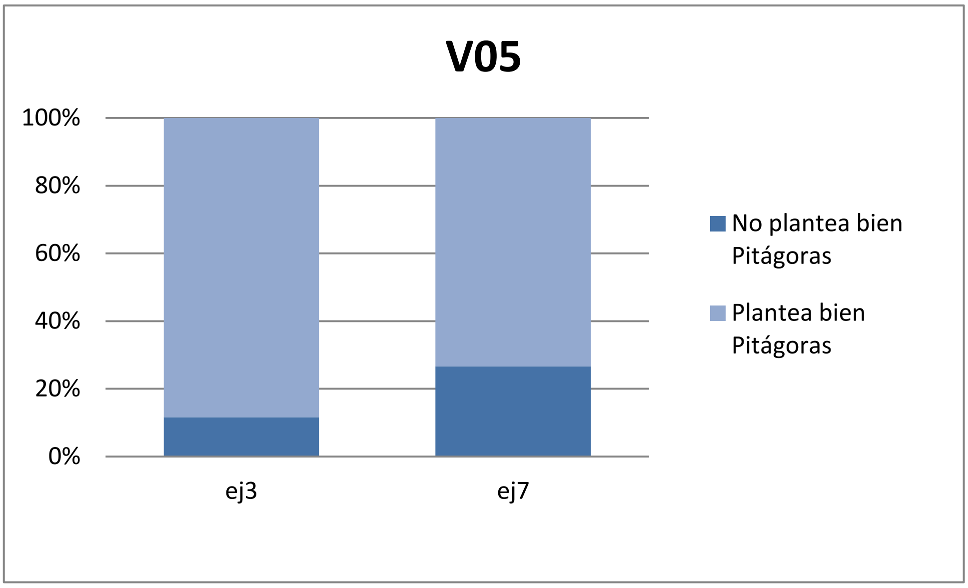


Figura 33. *Gráfico de distribución de Variable V_{05}*

Se observa que el ejercicio 7 es más difícil, puesto que el planteamiento exige conocer que es la apotema, mientras que en el ejercicio 3, el planteamiento consistía simplemente en aplicar Pitágoras.

Merece la pena mostrar el ejercicio 3 de una alumna que no supo plantearlo. Recordemos que en el ejercicio 3 se pedía dibujar una escalera apoyada en una pared y separada de ésta en su base en 1,5 metros. Su dibujo nos permite identificar su falta de visión en varias dimensiones:

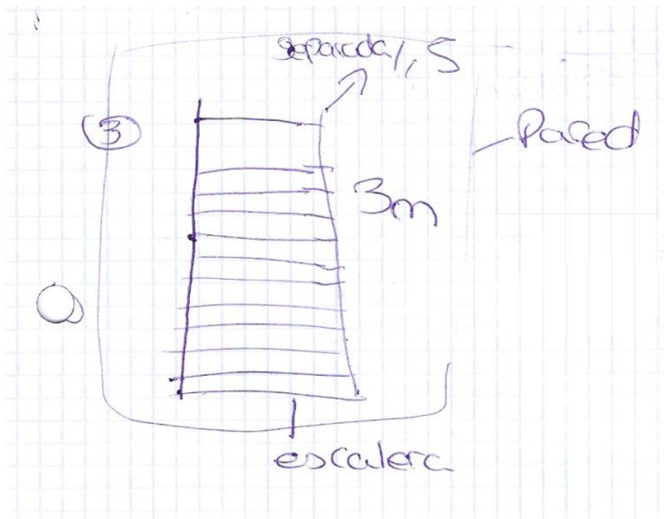


Figura 34. *Resolución ej. 3 por un alumno*

Variable V_{06}

Esta variable se identifica con los ejercicios 4 y 8. Se analizan los resultados del ejercicio 4, en el que se ve más clara esta variable, puesto que el 8 tiene más apartados e implica identificar primero que se trata de un ejercicio de semejanza, cosa que algunos alumnos no hicieron.

Se observan tres grupos: los que obtienen bien la razón de semejanza, los que no lo plantean o lo plantean mal, y los que no obtienen la razón a partir de las dimensiones en la misma unidad. Estos últimos se colocan en un grupo aparte porque no se puede saber si lo han hecho por despiste, o porque no conocen bien el concepto de semejanza.

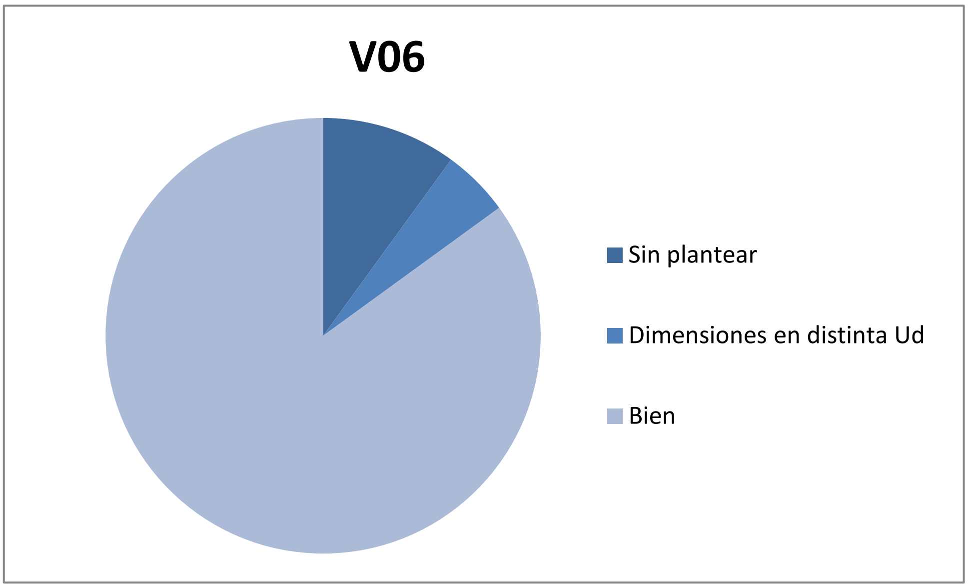


Figura 35. *Gráfico de distribución de Variable V_{06}*

Variable V_{07}

Esta variable se identifica con el ejercicio 8. La hipótesis planteada para este ejercicio era que utilizarían como razón entre áreas la razón, en vez de la misma al cuadrado. Este ha sido uno de los grandes errores, pero también en muchos casos se ha obtenido la razón y no se ha sabido cómo utilizarla, dejando el ejercicio a medias. Era uno de los ejercicios que creía que podía salir mejor en B que en A, pero no ha sido así, como se observa en las gráficas separadas por clases. No se ha producido intercambio de información. En este sentido, si se ha visto que un alumno ha intentado aplicar la razón al cuadrado en el ejercicio 4, por lo que quizás le habían avisado y no ha sabido dónde usarla.

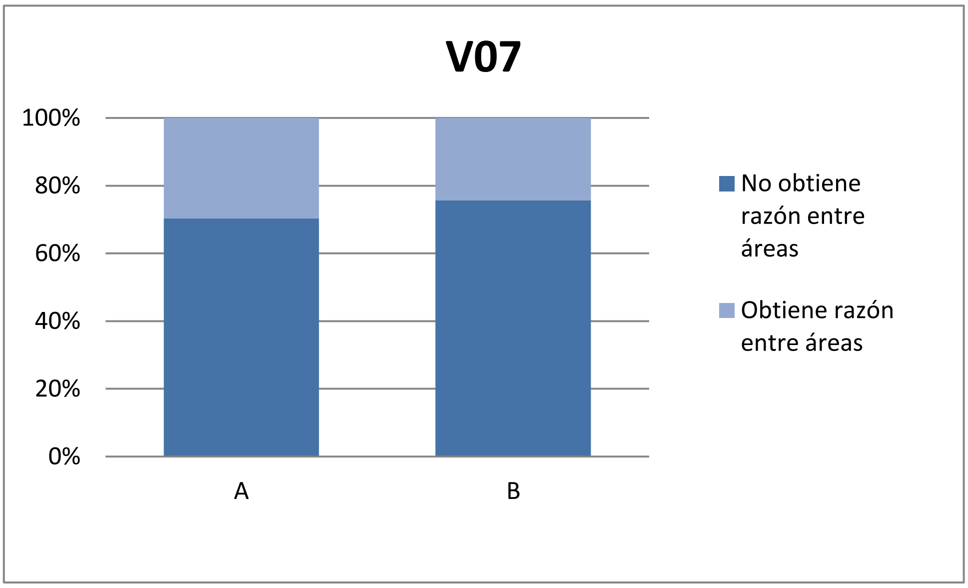


Figura 36. *Gráfico de distribución de Variable V_{07}*

Variable V_{08}

La aplicación del Teorema de Tales se observa en el ejercicio 6. Es un ejercicio que podía resultarles complicado por ser una noción nueva, a pesar de haberse trabajado bastante en clase. En este ejercicio se observa que hay bastantes errores de planteamiento, o lo que es lo mismo, no se aplica bien el Teorema de Tales.

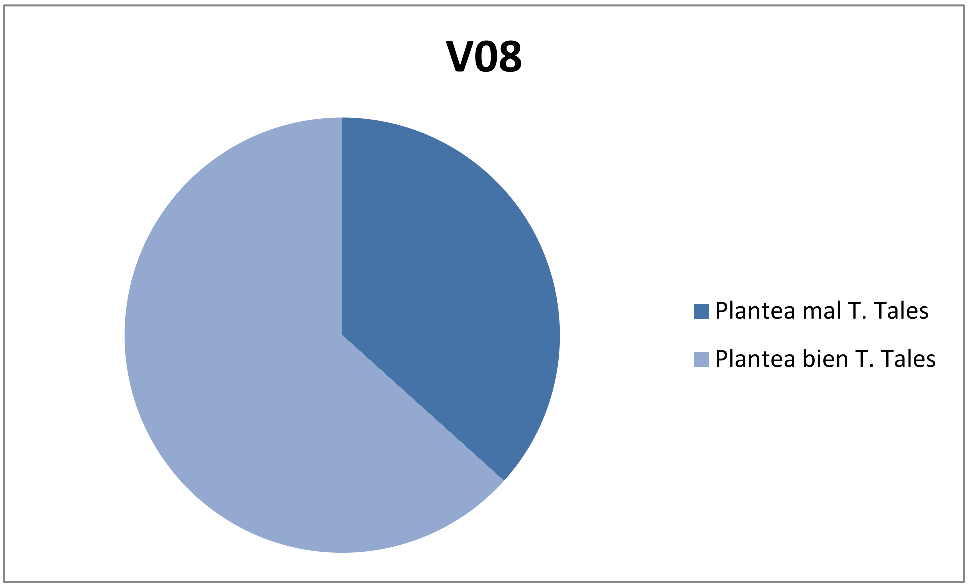


Figura 37. *Gráfico de distribución de Variable V_{08}*

Análisis del ejercicio 5

Este ejercicio contiene varias variables, pero se va a analizar en conjunto. Los errores que se han producido han sido de varios tipos:

- Aplicación incorrecta de porcentajes
- Obtención de la razón de semejanza (V_{06})
- No se realiza ni plantea el ejercicio

Se van a comparar los resultados de ambas clases en cuatro grupos: los que han realizado bien el ejercicio, los que no han planteado nada, los que han planteado mal las proporciones y los que no han obtenido bien la razón de semejanza.

La gráfica de resolución del ejercicio es la siguiente:

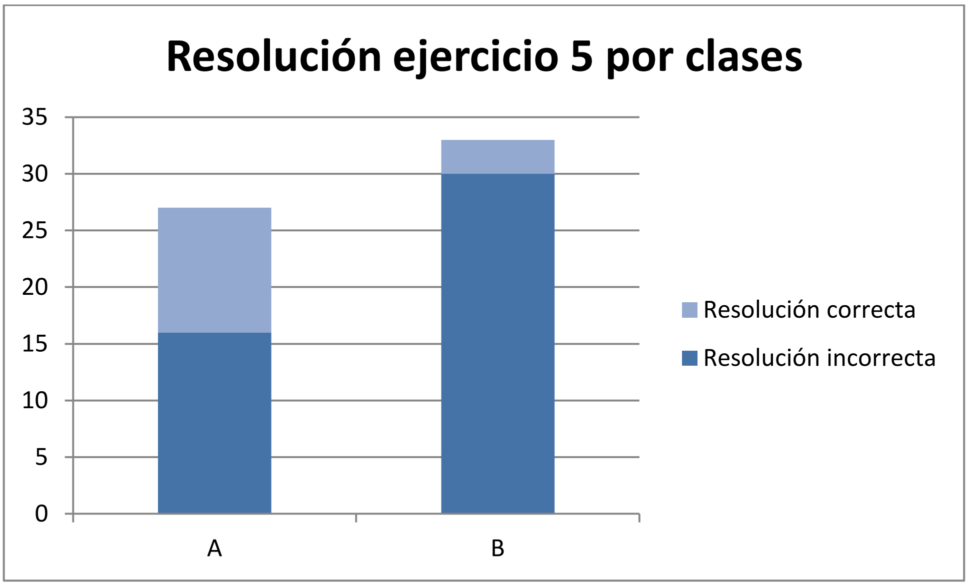


Figura 38. *Gráfico de distribución ejercicio 5*

A continuación se expresa mediante una gráfica cuáles de las resoluciones incorrectas se deben a un error en la aplicación de porcentajes, cuáles se deben a que no se halla bien la razón, y cuáles son por la no realización del ejercicio. Se representan por separado para cada clase.

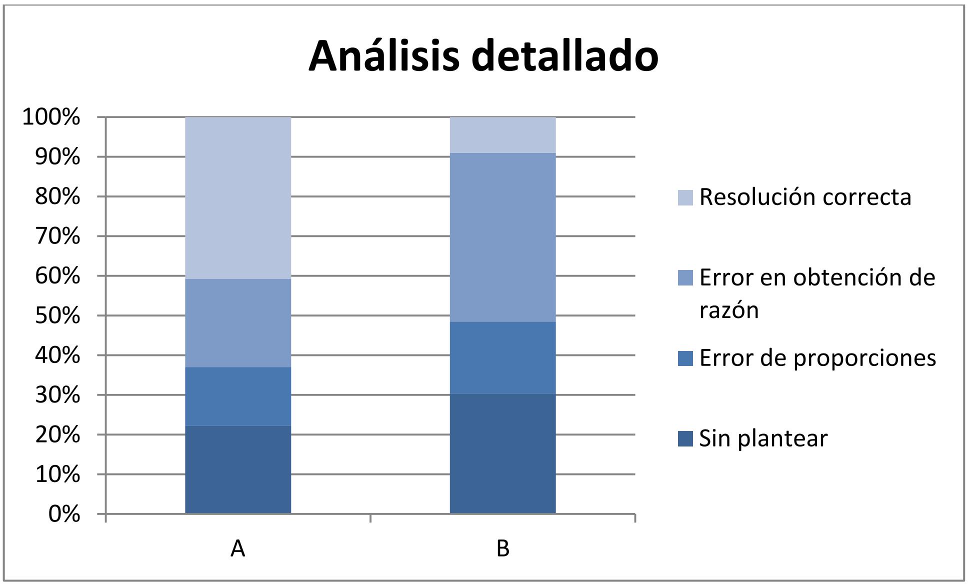


Figura 39. *Gráfico de distribución ejercicio 5 detallado*

Comparando las dos clases se puede apreciar que las mayores diferencias están en el porcentaje de alumnos de cada clase que realizaron bien el ejercicio, y entre el porcentaje de alumnos que hallaron bien la razón. Se puede decir también que el porcentaje de alumnos que fallan en la aplicación de porcentajes es similar.

Al haber tanta diferencia entre los que fallaron en la obtención de la razón en una clase y en otra, se puede concluir que el cambio en el dato del ejercicio afectó a su resolución.

8.6. Discusión de los resultados

A continuación se van a reseñar los resultados más importantes que se han obtenido de la realización del cuestionario, en relación a las hipótesis previamente señaladas.

Por un lado mencionar que el nivel de los ejercicios a la vista de su resolución, ha sido el esperado. Los cuatro primeros ejercicios son los que menos problemas han presentado, por lo que el objetivo propuesto se ha cumplido. Destacar, sin embargo, que en el ejercicio 2, que era considerado muy sencillo, se han producido más errores de los esperados, quizás por falta de costumbre de ejercicios de dibujo en matemáticas, o por despiste.

En los ejercicios 3 y 7, se aprecia bastante facilidad para aplicar el Teorema de Pitágoras, aunque se produzcan errores en operaciones y no todos los alumnos lleguen a dar la solución correcta. Estos errores por otra parte no han sido tan altos como hacía esperar la resistencia del alumnado al no uso de la calculadora en el examen.

En los ejercicios 4 y 8, y a través de las variables V_{06} y V_{07}, se puede ver como la mayoría de los alumnos obtienen bien la razón de semejanza en una dimensión (longitudes) pero no en dos dimensiones (entre áreas), en las que están menos acostumbrados a trabajar.

Sobre el Teorema de Tales, se puede concluir que los alumnos, no lo tienen del todo claro. Algo más de la mitad de los alumnos ha sabido plantearlo bien, pero en referencia a lo que se ha trabajado en clase en comparación con otras nociones, no se ve una relación adecuada.

Por otro lado, no se ha producido el intercambio de información esperado en el recreo. Esto se ha visto sobre todo en el ejercicio 8, que ha salido peor en la clase que realizó el examen después.

Destacable también el error en la hipótesis de que el cambio de dato no iba a afectar a la dificultad del problema en el ejercicio 5. Este cambio se realizó pensando que no iba a variar significativamente la resolución de una clase a otra, y sin embargo supuso un salto de nivel importante. Este error ha supuesto que no se pueda comparar el resultado de este ejercicio entre las dos clases. Sin embargo, gracias a esto también se ha podido obtener información muy interesante sobre la dificultad que plantea hallar una razón de reducción (<1) frente a una razón de ampliación (>1).

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

Este trabajo de fin de máster quiere aprovechar la experiencia vivida durante las prácticas del máster, para realizar un análisis completo del tema de semejanza y triángulos en 2º de ESO.

El trabajo se ha dividido en dos partes, en la primera se han tratado los contenidos desde el punto de vista institucional, estudiando el curriculum vigente marcado por la legislación y los libros de texto de secundaria. La segunda parte se centra en el polo del alumno y en el profesor, estudiando los problemas, errores y resoluciones de un grupo concreto de alumnos que se enfrentaron a estas nociones, e intentando sacar conclusiones de esta experiencia.

Conclusiones generales del trabajo

Gracias a esta experimentación, he podido comprobar actitudes de los alumnos en su relación con las matemáticas que se exponen a continuación a modo de conclusiones.

Una de estas actitudes o conclusiones ha sido la del aprendizaje por repetición. Los alumnos de estos cursos están muy acostumbrados a trabajar y entender las matemáticas a través de la realización y repetición de ejercicios. Esto se aprecia en la cantidad de ejercicios que presentan los libros de texto a modo de práctica y aplicación, e incluso en la propia teoría, donde encontramos ejemplos resueltos para introducir las nociones.

Por otro lado, se observa que los contenidos que los alumnos ya han trabajado, como el Teorema de Pitágoras, están muy afianzados por el trabajo y práctica que llevan detrás, mientras que los contenidos más novedosos, pese a que puedan ser más sencillos, no son aplicados tan correctamente. Esto puede hacer pensar que más importante que la complicidad o nivel de dificultad de los contenidos, es la ejercitación que se realice sobre ellos.

Esta conclusión también nos permite aprender que ninguna noción por sencilla que parezca, debe ser dada por sabida, y que todas las nociones o conceptos necesitan de ejercitación y práctica. A este nivel no sirven de mucho las clases magistrales.

Otro punto importante observado en la realización de este trabajo es relación de los alumnos con las matemáticas. Tratan la asignatura, los problemas, etc. como algo muy mecánico. Como se ha comentado en el trabajo, los ejercicios de dibujar, o aplicar conceptos les resultan mucho más complicados que problemas en los que tienen que aplicar una fórmula o un método más sistemático. Como conclusión sobre este aspecto, decir que parece que busquen únicamente métodos de resolución sin centrarse en entender las nociones que hay detrás.

Cuestiones abiertas

Pese a haber comenzado la unidad didáctica repasando los contenidos básicos sobre triángulos y Pitágoras principalmente, una vez finalizada la memoria, creo que realizar un cuestionario de contenidos iniciales hubiese aportado más datos y más interesantes, especialmente al compararlo con el examen realizado al finalizar la unidad.

El cuestionario inicial, además, podría permitir analizar la actitud de los alumnos que han sacado peor nota en el examen. Con esto se podría poner más atención sobre ellos desde el principio e intentar averiguar si el fallo viene producido por una falta de estudio o de unas bajas capacidades del alumno. En base a esto sería más fácil prestarles la ayuda necesaria, bien con ejercicios o actividades que puedan provocar mayor motivación, y esto les ayude a estudiar más, o bien buscando otras formas de explicar y enseñar, para ver en el día a día si los alumnos van comprendiendo y ayudarles antes del cuestionario final.

Se ha observado también que los contenidos se plantean en los libros de texto sin un hilo que los relacione, esto podría dar lugar a un estudio sobre la conveniencia o no de estudiar los contenidos atomizados, o de estudiarlos en un contexto de relación con el resto de las matemáticas.

Referencias

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 282–307.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial pp. 131-155.

Real Decreto 1513/2006, *de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.*

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO.

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Miriam Peña, Elsa Santaolalla, Valvanera Aranzubía, Belén Sanz. (2009). *Matemáticas 5º Primaria. Proyecto TIMONEL*. Editorial sm.

Miriam Peña, Elsa Santaolalla, Valvanera Aranzubía, Belén Sanz. (2009). *Matemáticas 6º Primaria. Proyecto TIMONEL*. Editorial sm.

Rafaela Arévalo, José Luis González, Rafael A. Martínez. (2007). *Matemáticas, Ábaco 1º ESO.* Editorial sm.

Juana Municio, Francisco José Valencia. (2008). *Matemáticas, Ábaco 2º ESO*. Editorial sm.

M.D. Álvarez y otros. (2008). *Matemáticas 3º ESO*. (2008). *Proyecto La Casa del Saber.* Editorial Santillana.

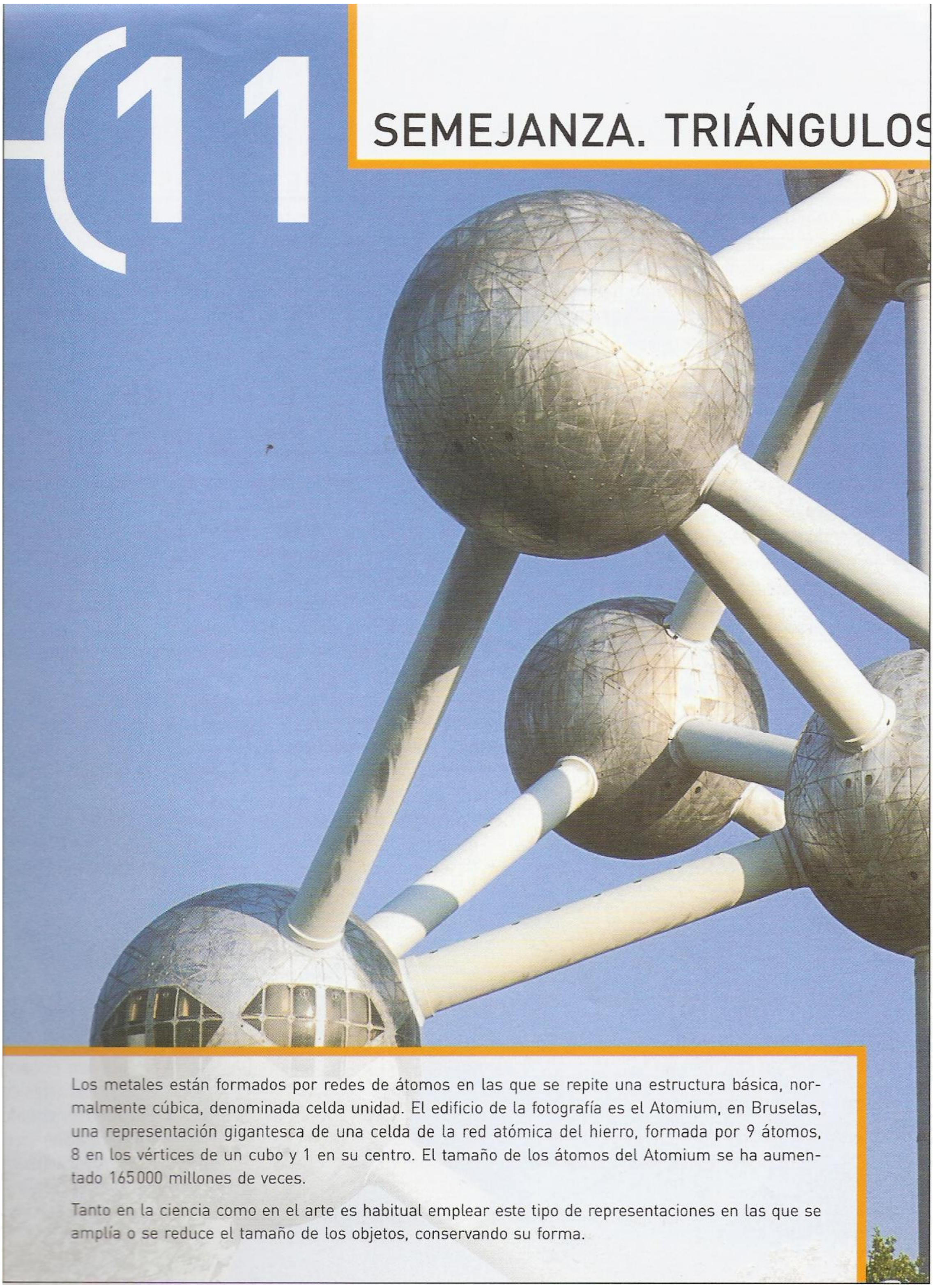
M.D. Álvarez y otros. (2008). *Matemáticas 4º ESO. Opción A. Proyecto La Casa del Saber.* Editorial Santillana.

M.D. Álvarez y otros. (2008). *Matemáticas 4º ESO. Opción B. Proyecto La Casa del Saber.* Editorial Santillana.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Competencias básicas en el libro de texto
C. Material suplementario y exámenes

A. Unidad didáctica del libro de texto

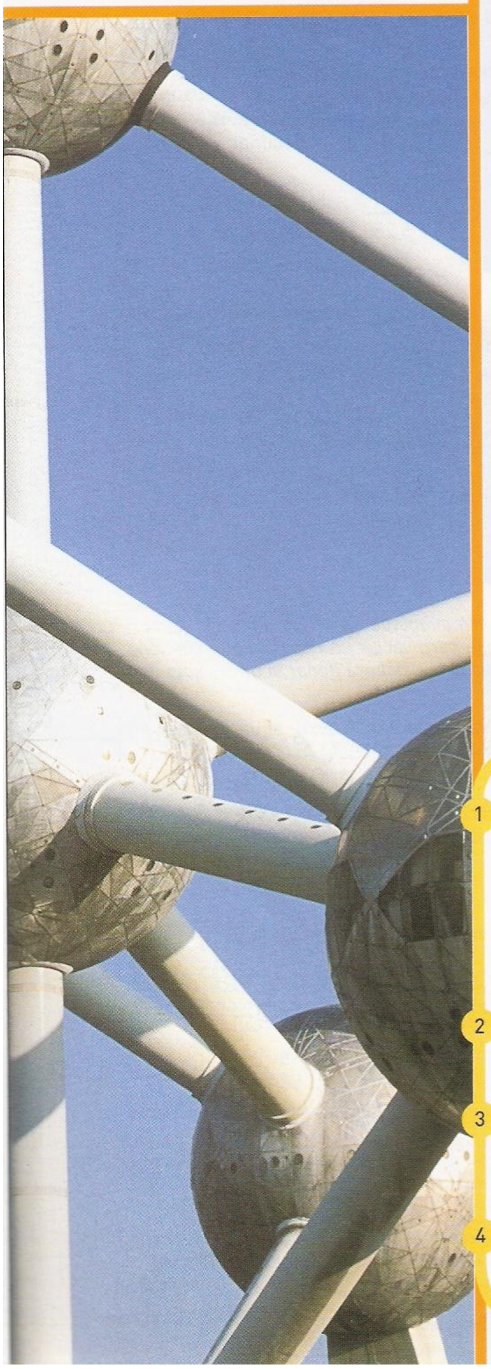


11

SEMEJANZA. TRIÁNGULOS

Los metales están formados por redes de átomos en las que se repite una estructura básica, normalmente cúbica, denominada celda unidad. El edificio de la fotografía es el Atomium, en Bruselas, una representación gigantesca de una celda de la red atómica del hierro, formada por 9 átomos, 8 en los vértices de un cubo y 1 en su centro. El tamaño de los átomos del Atomium se ha aumentado 165 000 millones de veces.

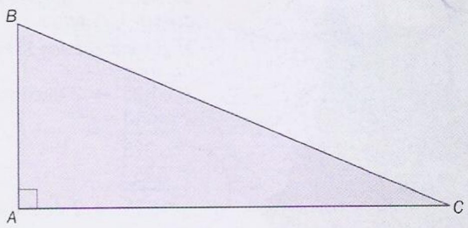
Tanto en la ciencia como en el arte es habitual emplear este tipo de representaciones en las que se amplía o se reduce el tamaño de los objetos, conservando su forma.



RECUERDA

Triángulo rectángulo

Es el que tiene un ángulo recto.



Sus ángulos agudos son complementarios, es decir,

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$$

El triángulo rectángulo es isósceles si los ángulos agudos son iguales, esto es, $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$

Magnitudes directamente proporcionales

Son aquellas en las que el cociente entre cantidades correspondientes es constante.

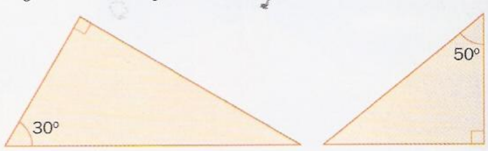
Magnitud M	a	b	c	d
Magnitud M'	a'	b'	c'	d'

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

La constante k se llama **razón de proporcionalidad**.

PARA EMPEZAR

1. Calcula la medida del ángulo que falta en los siguientes triángulos rectángulos.



2. ¿Los números 3, 5, 7 y 18, 30, 42 son proporcionales? ¿Cuál es la constante que permite pasar de los primeros a los segundos? ¿Y al revés?

3. El alto y el ancho de una fotografía son 9 y 12 centímetros, respectivamente. ¿Cuál será la altura de una ampliación de la misma, sabiendo que mide 18 centímetros de ancho?

4. Los átomos del Atomium tienen 9 metros de radio, y son 165 000 000 000 de veces más grandes que los reales. ¿Cuánto mide en realidad el radio de un átomo de hierro?

1. Figuras semejantes

Razón de semejanza

Ejemplo. *Luisa ha hecho una foto de 10 × 7 centímetros a su hermano pequeño y ha encargado una ampliación de la misma de 15 × 10,5 centímetros para ponerla en un marco en su casa, y una reducción de 5 × 3,5 centímetros para llevarla en el monedero.*

Forma una tabla con las dimensiones de las tres fotos y estudia si son proporcionales.

Si construimos la tabla:

	Foto inicial	Ampliación	Reducción
Ancho	10	15	5
Alto	7	10,5	3,5

Observamos que se cumple:

$$\frac{15}{10} = \frac{10,5}{7} = 1,5 \quad \text{y} \quad \frac{5}{10} = \frac{3,5}{7} = 0,5$$

Vemos que aunque las fotos no son iguales, pues tienen distintas dimensiones, en cambio estas son proporcionales. Por tanto, decimos que las fotos son **semejantes**.

Para obtener la ampliación multiplicamos las dimensiones de la foto inicial por 1,5, y para obtener la foto reducida las multiplicamos por 0,5. Los números 1,5 y 0,5 se llaman **razones de semejanza**.

Al ampliar o reducir una figura, se obtiene otra **figura semejante**.

Las figuras semejantes tienen sus **dimensiones proporcionales**.

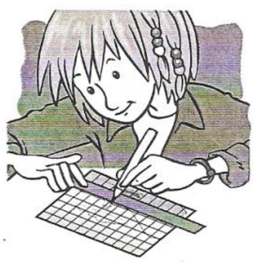
Razón de semejanza es la razón de proporcionalidad.

La razón de semejanza es **mayor que 1** cuando realizamos una **ampliación** y **menor que 1** cuando realizamos una **reducción**.

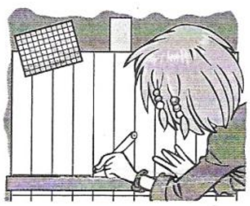
¿Cómo construir figuras semejantes?

Ejemplo. *Vanesa quiere pintar un cuadro y tiene como modelo una postal. El lienzo es mucho mayor que la postal, pero las medidas de ambos son proporcionales. ¿Cómo puede dibujar sobre el lienzo el motivo de la postal?*

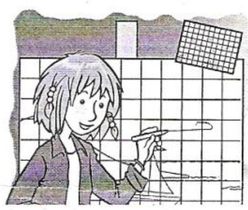
(1) Traza una cuadrícula sobre la postal.



(2) Sobre el lienzo traza una cuadrícula con el mismo número de líneas.



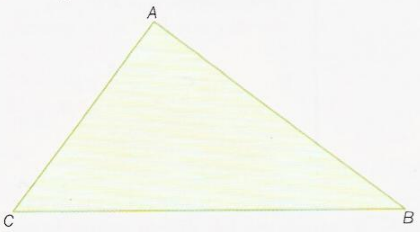
(3) Dibuja en cada cuadrícula del lienzo lo que tiene en las correspondientes cuadrículas de la postal.



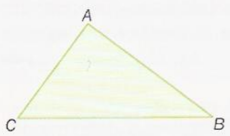
PARA PRACTICAR

EJERCICIO RESUELTO

1 Construye un triángulo semejante al triángulo ABC de la figura con razón de semejanza $\frac{1}{2}$.



La medida de los lados del triángulo pedido $A'B'C'$ será la mitad de los del triángulo dado ABC.

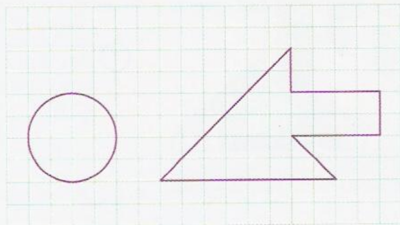


$$A'C' = \frac{1}{2}AC$$

$$A'B' = \frac{1}{2}AB$$

$$C'B' = \frac{1}{2}CB$$

2 Construye las figuras semejantes a estas.

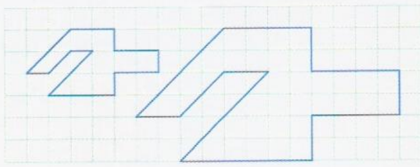


a) Con razón de semejanza 2.

b) Con razón de semejanza 3.

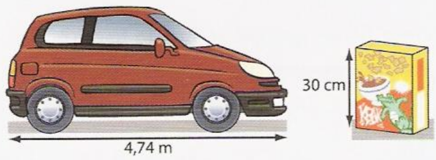
c) Con razón de semejanza $\frac{1}{2}$.

3 Comprueba si las siguientes figuras son semejantes y, en su caso afirmativo, halla la razón de semejanza.

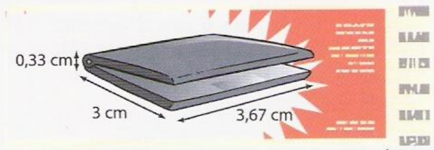


PARA APLICAR

4 En los siguientes dibujos, mide el largo y el ancho. Compara con las medidas reales, que están señaladas, y calcula la razón de semejanza.

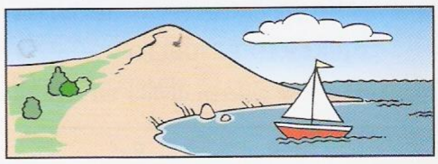


5 Se anuncia la venta de ordenadores portátiles mediante el siguiente dibujo.



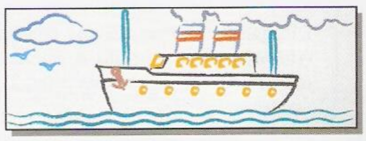
Sabiendo que la razón de semejanza es $\frac{1}{9}$, halla las dimensiones reales del ordenador.

6 Dibuja la figura semejante a la dada con razón de semejanza 2.



Para ello, construye una cuadrícula cuyo lado sea el doble del de la cuadrícula dada.

7 El boceto que se usará para pintar un cuadro es el siguiente.

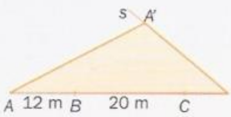


Calcula las medidas del cuadro, en metros, sabiendo que es semejante al boceto con razón de semejanza $k = 68$.

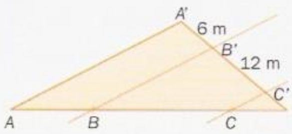
2. Teorema de Tales

Ejemplo. *Dos vallas bajas delimitan un pequeño jardín según la figura. Sobre la valla horizontal tenemos pintados dos segmentos* AB *y* BC *, de longitudes 12 y 20 metros, respectivamente. Queremos pintar en la valla inclinada dos segmentos proporcionales a* AB *y a* BC*. ¿Cómo lo haremos?*

1. Desde el punto A trazamos una línea que corta a la recta s en A'.



2. Desde B y desde C trazamos líneas paralelas a AA'. Comprobamos que $A'B' = 6$ metros y que $B'C' = 10$ metros.



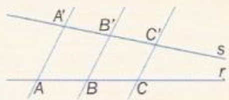
Observa que se verifica:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{20}{10} = 2$$

La razón de semejanza entre los segmentos en las dos rectas es 2.

Lo que acabamos de ver es igualmente válido para cualquier recta paralela a la recta AA'. Este resultado se conoce con el nombre de **teorema de Tales**.

Teorema de Tales: Si un conjunto de rectas paralelas entre sí cortan a otras dos rectas, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.



Por tanto: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = k$

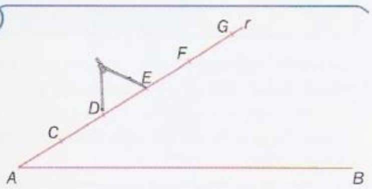
La constante k es la **razón de proporcionalidad o semejanza**.

Podemos usar el teorema de Tales para dividir un segmento en partes iguales.

EJERCICIO RESUELTO

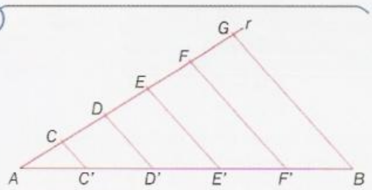
8 **Rosa y José quieren dividir un segmento AB en cinco partes iguales. ¿Cómo lo harán?**

1.



Dibujamos una semirrecta cualquiera con origen en el punto A. Sobre ella marcamos con un compás a igual distancia.

2.



Unimos el extremo G con el extremo B y trazamos paralelas a la recta GB que corten el segmento, obteniendo así los puntos C', D', E' y F'.

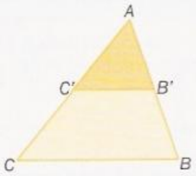
Por el teorema de Tales tenemos que: $\frac{AC}{AC'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FC}{F'B}$ y, por tanto, el segmento AB queda dividido en cinco partes iguales.

ACTIVIDADES

PARA PRACTICAR

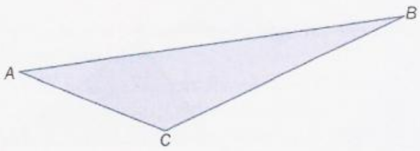
EJERCICIO RESUELTO

9 **Utilizando el teorema de Tales construye un triángulo semejante al dado *ABC* con razón de semajanza $\frac{1}{2}$.**



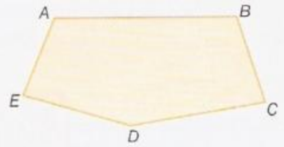
Sea *B'* el punto medio del segmento *AB* y *C'* en el punto medio del segmento *AC*. Entonces el triángulo *AB'C'* es semejante al dado con razón de semjanza $\frac{1}{2}$.

10 Con ayuda del teorema de Tales, construye un triángulo semejante al triángulo *ABC* con razón de semejanza 3,5.



11 Con ayuda del teorema de Tales, construye un trapecio semejante al trapecio *ABCD* con razón de semejanza 2.

12 Aplica el teorema de Tales para construir figuras semejantes al pentágono *ABCDE*.



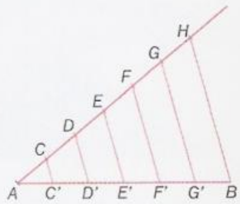
a) Con razón de semejanza 2,5.

b) Con razón de semejanza $\frac{1}{2}$.

EJERCICIO RESUELTO

13 **Dado el segmento de extremos *A* y *B*, divídelo en 6 partes iguales.**

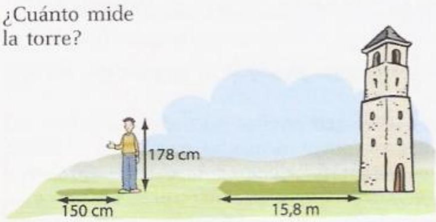
Construimos una semirrecta auxiliar que parte de *A* y sobre ella llevamos seis unidades iguales, obteniendo los puntos *C, D, E, F, G* y *H*. Unimos *H* con *B*, trazamos paralelas a esta recta que pasen por los puntos anteriores y obtenemos el resultado.



14 Divide el segmento *PQ* en cinco partes iguales.

PARA APLICAR

15 ¿Cuánto mide la torre?

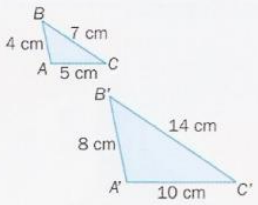


16 Un proyector de diapositivas proyecta una imagen sobre una pantalla que mide 4 metros de ancho.

a) ¿Cuál será la altura de la imagen proyectada, sabiendo que las dimensiones de la diapositiva son 35 milímetros de largo y 24 milímetros de ancho?

b) ¿Cuál es la razón de semejanza?

3. Triángulos semejantes



Ejemplo. *Tenemos el triángulo de vértices ABC y lo ampliamos en una fotocopiadora para duplicar sus lados, obteniendo el triángulo A'B'C'. ¿Cómo son sus lados y sus ángulos?*

Observamos que los lados de los dos triángulos son proporcionales. Además, si medimos sus ángulos, obtenemos que los ángulos correspondientes son iguales.

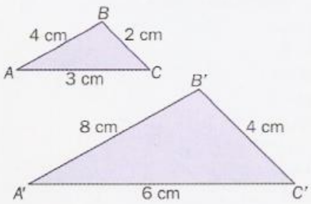
Dos **triángulos** son **semejantes** si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales.

$$\begin{array}{ll} a' = k \cdot a & \widehat{A} = \widehat{A'} \\ b' = k \cdot b & \widehat{B} = \widehat{B'} \\ c' = k \cdot c & \widehat{C} = \widehat{C'} \end{array}\Bigg\}$$

La constante de proporcionalidad entre las longitudes de los lados se llama razón de semejanza.

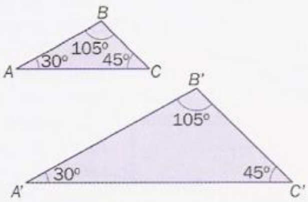
En la práctica, para ver que dos triángulos son semejantes basta con que se cumpla uno de los siguientes criterios de semejanza.

CRITERIO 1



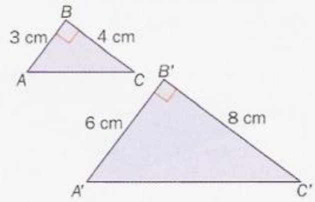
Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados correspondientes proporcionales.

CRITERIO 2



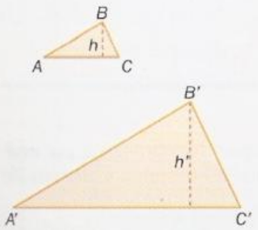
Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales.

CRITERIO 3



Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos iguales.

La razón de semejanza y la razón de áreas



Ejemplo. *Lucía y Julián han construido dos triángulos con una razón de semejanza igual a 3. ¿Cuál será la razón de semejanza de las áreas?*

Observa el triángulo *ABC* y su semejante *A'B'C'* en una semejanza de razón 3. Verificarás que todos los segmentos correspondientes en el segundo triángulo son 3 veces los del primero. En particular, esto sucede para la altura y la base del triángulo *A'B'C'*, por lo que

$A_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \quad A'B'h' = \frac{1}{2} \quad 3AB \cdot 3h = 9\frac{1}{2} \quad ABh = 9\,S_{ABC} = 3^2\,S_{ABC}$

Si dos **triángulos** son **semejantes** en una semejanza de **razón** k, la **razón de** sus **áreas** es k^2.

PARA PRACTICAR

EJERCICIO RESUELTO

17 **Comprueba cuáles de las siguientes parejas de triángulos dados por las medidas de sus lados, en centímetros, son semejantes o no. En caso afirmativo, calcula la razón de semejanza.**

a) 7, 9, 12 y 21, 27, 37

b) 13, 15, 18 y 19,5, 22,5, 27

a) Los triángulos no son semejantes, ya que:

$\frac{21}{7} = 3 \qquad \frac{27}{9} = 3 \qquad \frac{37}{12} = 2{,}25$

b) Los triángulos son semejantes, ya que:

$\frac{19{,}5}{13} = 1{,}5 \qquad \frac{22{,}5}{15} = 1{,}5 \qquad \frac{27}{18} = 1{,}5$

La razón de semejanza es 1,5.

18 Calcula la medida de los lados de tres triángulos semejantes al triángulo cuyos lados miden 7, 9 y 11 centímetros, respectivamente, indicando, en cada caso, la razón de semejanza.

19 Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales.

b) Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido también es proporcional.

c) Dos triángulos son semejantes si a cada uno de los lados del primero se le suma una cantidad constante para obtener los lados del segundo.

d) Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes iguales.

20 Si dos triángulos son semejantes, ¿es semejante a ellos el triángulo cuyas medidas son la suma de los lados correspondientes de los dos?

Justifica tu contestación con un ejemplo.

exactos

21 Halla el triángulo de lados enteros más pequeño semejante a cada uno de los siguientes triángulos cuyas medidas están dadas en centímetros.

a) 16, 20 y 24 b) 32, 36 y 38

EJERCICIO RESUELTO

22 **Calcula el valor de los datos desconocidos para que las parejas de triángulos siguientes sean semejantes.**

a) 6 cm, 9 cm, x cm 4 cm, y cm, 5 cm

b) 78°, 20°, x° 78°, y°, 82°

a) Los triángulos son semejantes si:

$$\frac{6}{4} = \frac{9}{y} \Rightarrow y = \frac{36}{6} = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{30}{4} = 7{,}5 \text{ cm}$$

b) Los triángulos son semejantes si:

$y = 20° \qquad x = 82°$

23 Los lados del triángulo ABC miden 15, 17 y 17 centímetros, respectivamente. Calcula las medidas de otro triángulo semejante al ABC en una semejanza de razón $\frac{5}{7}$. Expresa las medidas de los lados en forma de fracción.

PARA APLICAR

24 Sean dos triángulos rectángulos ABC, de lados 3, 4 y 5 centímetros, y $A'B'C'$, de lados 15, 20 y 25 centímetros.

a) Comprueba si son semejantes y, en su caso, halla la razón de semejanza.

b) Halla sus áreas y su razón de semejanza.

25 Cuatro ONG reciben un terreno triangular en donación para financiar con su venta sus actividades. ¿Cómo se deberá dividir el terreno para obtener cuatro parcelas triangulares iguales y semejantes entre sí?

26 Cuentan que para calcular la altura de la Gran Pirámide de Keops, Tales clavó en el suelo una estaca, y midió su altura y las sombras de la estaca y de la pirámide. Observa el dibujo y calcula la altura de la pirámide.

4. MAPAS, PLANOS Y MAQUETAS: ESCALAS

Mapas

EJEMPLO. *Ramón tiene que buscar las principales ciudades de Italia para un trabajo de geografía. En su casa encuentra los dos mapas de Italia del dibujo. ¿Qué diferencia hay entre ellos? ¿Cuál le da más información?*

- En el primer mapa la escala es gráfica, y expresa que 1,5 centímetros en el mapa representan 30 kilómetros en la realidad, es decir, un centímetro representa 20 kilómetros.
- En el segundo la escala es numérica, y expresa que un centímetro del mapa representa 5 000 000 de centímetros de la realidad, es decir, 50 kilómetros.

Por tanto, aunque Ramón puede utilizar cualquiera de los dos, con el primero tendrá más detalles de la zona.

Un **mapa** es una representación gráfica de la superficie terrestre o de una parte de ella, en la que la realidad se representa de forma semejante.
La razón de proporcionalidad en este caso se llama **escala**.

Planos

EJEMPLO. *Beatriz está buscando casa y encuentra una oferta en la que aparece el plano de un estudio a escala 1 : 150. ¿Cómo puede averiguar las dimensiones reales del mismo?*

Que la escala sea 1 : 150 quiere decir que cada centímetro del plano corresponde a 150 centímetros de la realidad. Por tanto las medidas reales son:

$$4{,}5 \cdot 1{,}5 = 6{,}75 \text{ m}$$
$$3{,}5 \cdot 1{,}5 = 5{,}25 \text{ m}$$

Las dimensiones reales del estudio son 6,75 y 5,25 metros.

Un **plano** es una representación gráfica a escala de la planta de un edificio, de un terreno, de una ciudad, etc.

Maquetas

EJEMPLO. *A Álvaro le han regalado una maqueta de un avión a escala 1 : 40. Si una vez montada, la maqueta mide 50 centímetros de largo, ¿cuál es la longitud real del avión?*

Como la escala es 1 : 40, los 50 centímetros de la maqueta corresponden a $50 \cdot 40 = 2\,000$ cm $= 20$ metros en la realidad.

Una **maqueta** es una representación tridimensional a escala de un objeto o lugar real.

PARA PRACTICAR

EJERCICIO RESUELTO

27 La escala de un mapa es 1 : 400 000.

a) Si dos ciudades distan 8 centímetros en el mapa, ¿a qué distancia están en la realidad?

b) Si en la realidad dos lugares se encuentran a 150 kilómetros, ¿cuál será su separación en el mapa?

La escala 1 : 400 000 significa que 1 cm del mapa representa 400 000 cm = 4 km en la realidad.

a) Entonces, 8 cm de distancia corresponden a $8 \cdot 4 = 32$ km en la realidad.

b) Por otra parte, 150 km en la realidad se corresponden con $150 : 4 = 27{,}5$ cm de separación en el mapa.

28 Halla las distancias reales entre dos ciudades sabiendo que en un mapa a escala 1 : 500 000 están separadas por las siguientes distancias.

a) 4,2 cm
b) 21 cm
c) 12,5 cm
d) 32 cm

29 En un mapa, la distancia entre dos poblaciones es de 5 centímetros. Calcula la distancia real, sabiendo que el mapa está representado a las siguientes escalas.

a) 1 : 650 000
b) 1 : 300 000
c) 1 : 1 000 000
d) 1 : 250 000

30 La distancia real entre dos ciudades es de 120 kilómetros. Halla la distancia que habrá entre ellas en un mapa con las siguientes escalas.

a) 1 : 180 000
b) 1 : 300 000
c) 1 : 700 000
d) 1 : 1 200 000

31 La distancia real entre dos ciudades es de 60 kilómetros, y en un mapa es de 2 centímetros. ¿Con qué escala está representado el mapa?

32 En un mapa, la distancia entre dos poblaciones es de 5 centímetros, y en la realidad es de 115 kilómetros. Calcula la escala con la que ha sido representado el mapa. Expresa la escala de forma gráfica y numérica.

PARA APLICAR

33 El plano de un museo realizado a escala 1 : 75 mide 2 metros de ancho × 1 de alto.

a) ¿Cuáles serán las medidas reales del museo?

b) Calcula el área del plano del museo y el área del museo real.

c) ¿Cuál es la razón de las áreas obtenidas?

34 El plano de una vivienda está representado en un plano que ocupa 25 × 12 centímetros, y la vivienda tiene una superficie real de 120 metros cuadrados.

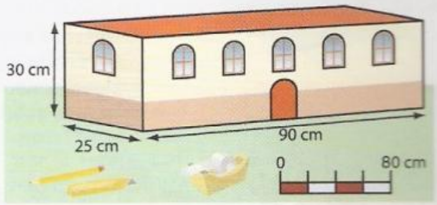
a) Calcula la escala con la que se ha representado el plano.

b) Calcula las medidas reales de ancho y largo de la vivienda.

c) Si la cocina en la realidad tiene 15 metros cuadrados, ¿cuánto medirá en el plano?

35 Un Ayuntamiento ha convocado un concurso para construir un edificio destinado a la cultura y a la educación de la ciudadanía. Los arquitectos que participan en el concurso deben presentar una maqueta del edificio.

La obra ganadora corresponde a una maqueta con forma de ortoedro con las medidas y escala indicadas en la figura.

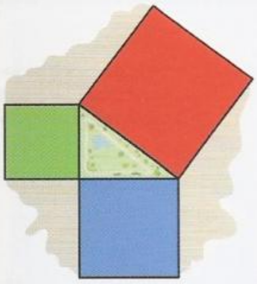


a) Calcula las medidas reales del edificio.

b) Calcula el área de la planta del edificio.

c) ¿Cuál es la razón de las áreas?

5. TEOREMA DE PITÁGORAS



EJEMPLO. *En Villacuadrado se ha proyectado un jardín con forma de triángulo rectángulo cuyos lados miden 15, 20 y 25 metros, respectivamente. Sobre cada lado se va a construir una terraza cuadrada. ¿Cuál será el área de cada terraza?*

Al ser terrazas cuadradas, su superficie será simplemente el área del cuadrado correspondiente:

Terraza mayor (en rojo): $25 \cdot 25 = 25^2 = 625$ metros cuadrados.

Terraza mediana (en azul): $20 \cdot 20 = 20^2 = 400$ metros cuadrados.

Terraza menor (en verde): $15 \cdot 15 = 15^2 = 225$ metros cuadrados.

Observa que $625 = 400 + 225$, es decir, $25^2 = 20^2 + 15^2$. Por tanto, la terraza construida sobre el lado mayor del jardín (la hipotenusa del triángulo rectángulo) es igual a la suma de las áreas de las terrazas construidas sobre los otros dos lados (los catetos).

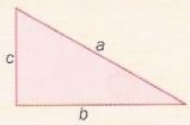
Este resultado se verifica en todos los triángulos rectángulos y se llama **teorema de Pitágoras**.

TERNAS PITAGÓRICAS

Tres números enteros que verifican el teorema de Pitágoras constituyen una **terna pitagórica**.

3, 4 y 5

15, 20 y 25



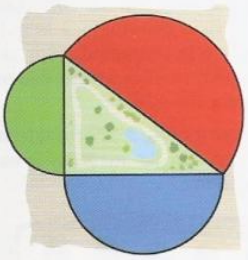
Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Extensión del teorema de Pitágoras

EJEMPLO. *En Redondilla, un pueblo vecino a Villacuadrado deciden también construir un jardín en forma de triángulo rectángulo de lados 18, 24 y 30 metros, respectivamente, pero en vez de hacer terrazas cuadradas sobre los lados, piensan darles forma de semicírculos. ¿Cuáles serán las áreas de estas nuevas terrazas?*



Al ser las terrazas semicirculares, su área será la mitad de la del círculo correspondiente:

Terraza mayor (en rojo): $\frac{1}{2}\pi \cdot 15^2 = 353{,}43$ metros cuadrados

Terraza mediana (en azul): $\frac{1}{2}\pi \cdot 12^2 = 226{,}19$ metros cuadrados

Terraza menor (en verde): $\frac{1}{2}\pi \cdot 9^2 = 127{,}24$ metros cuadrados

Observa que se cumple que $353{,}43 = 226{,}19 + 127{,}24$, es decir, la terraza construida sobre la hipotenusa del triángulo del jardín sigue siendo igual de grande que la suma de las dos terrazas construidas sobre los catetos.

Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen figuras semejantes entre sí, siempre se cumple que el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos.

PARA PRACTICAR

EJERCICIO RESUELTO

36 **Un cateto mide 6 centímetros, y otro, $\frac{4}{3}$ del anterior. Calcula la medida de la hipotenusa.**

$c = 6$ cm

$b = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8$ cm

Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow$$

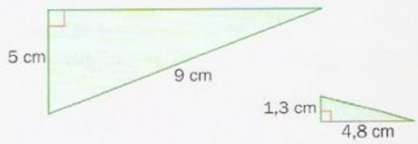
$$\Rightarrow a = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

37 Copia y completa la siguiente tabla. La hipotenusa la representamos por a, y los catetos, por b y c. Las medidas están dadas en centímetros.

a	b	c
15	10	
	7	9
40		28

38 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 centímetros, y un cateto mide las dos terceras partes de ella. Calcula la medida del otro cateto.

39 Calcula el lado desconocido de los siguientes triángulos rectángulos.



40 La suma de los dos catetos de un triángulo vale 17 centímetros, y uno de ellos es igual a 8 centímetros. Calcula la medida de la hipotenusa.

EJERCICIO RESUELTO

41 **Comprueba si las siguientes ternas de números enteros forman una terna pitagórica.**

a) 3, 4, 6 **b) 15, 10, 25**

Tenemos que ver si los tres números dados verifican el teorema de Pitágoras.

a) $6^2 = 36 \neq 9 + 16 = 3^2 + 4^2 = 25$ falso

b) $25^2 = 625 = 225 + 400 = 15^2 + 20^2$ cierto

Por tanto, solo es pitagórica la segunda terna.

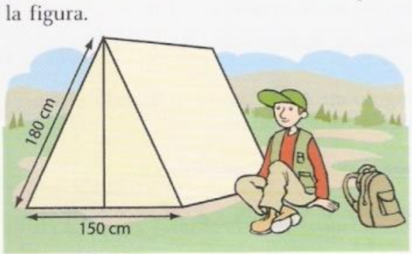
42 Comprueba si las siguientes ternas de números enteros son pitagóricas.

a) 25, 60, 65
b) 20, 21, 29
c) 11, 35, 37
d) 51, 68, 85

PARA APLICAR

43 La pantalla de un ordenador mide 42 centímetros de ancho por 36 de alto. ¿Cuánto mide la diagonal?

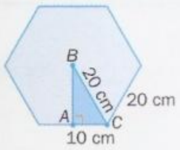
44 Calcula la altura de la tienda de campaña de la figura.



45 Se quiere sujetar la antena de un poste de telefonía con un cable de acero. La altura del poste es de 2,5 metros, y la distancia de la base del poste al extremo del cable es de 1,3. Calcula la medida del cable de acero.

46 Una escalera está apoyada sobre una pared como muestra la figura. Calcula a qué altura llega.

6. CÁLCULO DE DISTANCIAS EN POLÍGONOS



RECUERDA

El área de un hexágono regular es $A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$

EJEMPLO. *Un Ayuntamiento ha pavimentado las aceras de las calles con baldosas con forma de hexágono regular de 20 centímetros de lado. Halla el área de cada baldosa.*

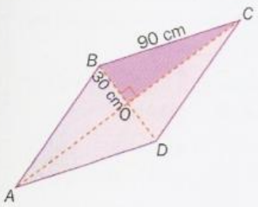
Además del lado, necesitamos conocer la apotema del hexágono. En el triángulo rectángulo *ABC* de la figura conocemos un cateto y la hipotenusa, así, aplicando el teorema de Pitágoras podemos hallar el otro cateto, que es la apotema que necesitamos.

$$20^2 = a^2 + 10^2 \Rightarrow a = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}32 \text{ cm}$$

La apotema de la baldosa mide 17,32 centímetros, con lo que el área de la misma será:

$$A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 20 \cdot 17{,}32}{2} = 1\,039{,}2 \text{ cm}^2$$

EJEMPLO. *Dado un rombo de 90 metros de lado en el que la longitud de una de las diagonales es de 60 metros, calcula la longitud de la otra diagonal.*



Las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente; por tanto, el ángulo $\widehat{O}$ es recto.

Si la diagonal *BD* mide 60 m, se deduce que el segmento *BO* mide 30 m, ya que es la mitad. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo *OBC* se tiene:

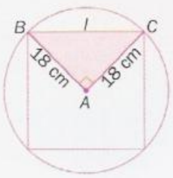
$$90^2 = 30^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{90^2 - 30^2} = 84{,}85 \text{ m}$$

Luego la otra diagonal del rombo mide el doble que el lado *b*, es decir, $AC = 2 \cdot 84{,}85 = 169{,}7$ metros.

El teorema de Pitágoras permite calcular distancias entre puntos. Para ello se construye un triángulo rectángulo en el que dos lados serán conocidos, y el desconocido será la distancia que queremos hallar.

PROBLEMAS RESUELTOS

47 **Se ha cortado una *pizza* de 36 centímetros de diámetro y se ha obtenido un cuadrado inscrito en la circunferencia. Calcula la medida del lado del cuadrado.**

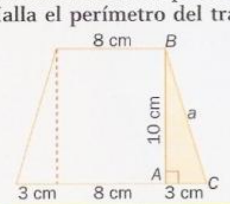


El triángulo *ABC* es rectángulo en *A*. Conocemos la medida de sus catetos, que son iguales al radio de la circunferencia circunscrita. Para obtener el lado *l* aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo *ABC*.

$$l^2 = 18^2 + 18^2 \Rightarrow l = \sqrt{18^2 + 18^2} \simeq 25{,}46 \text{ m}$$

Por tanto, el lado del cuadrado mide 25,46 cm.

48 **Las bases de un trapecio isósceles miden 8 y 14 centímetros, respectivamente, y la altura, 10. Halla el perímetro del trapecio.**



El triángulo *ABC* es rectángulo en *A*. Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo *ABC* resulta:

$$a^2 = 10^2 + 3^2 \Rightarrow a = \sqrt{10^2 + 3^2} \simeq 10{,}44 \text{ cm}$$

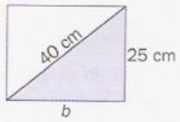
Y el perímetro del trapecio mide $p = 8 + 14 + 2 \cdot 10{,}44 = 42{,}88$ cm

ACTIVIDADES

PARA PRACTICAR

EJERCICIO RESUELTO

49 **Calcula el perímetro del rectángulo sabiendo que mide 25 centímetros de alto y que su diagonal es de 40 centímetros.**



Calculamos la base b aplicando el teorema de Pitágoras.

$$b = \sqrt{40^2 - 25^2} = 31{,}22 \text{ cm}$$

Por tanto, el perímetro del rectángulo mide:

$$p = 2(25 + 31{,}22) = 112{,}44 \text{ cm}$$

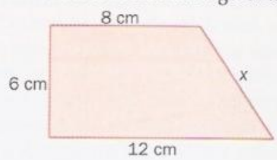
50 Calcula la altura de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro mide 16 centímetros.

51 Halla la altura del triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 16 centímetros, y los lados iguales, 8 centímetros.

52 Halla el perímetro de un triángulo isósceles cuya altura mide 10 centímetros, y el lado desigual, 28.

53 Halla la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 7,3 centímetros.

54 Calcula el lado desconocido del siguiente trapecio.



55 Las diagonales de un rombo miden 40 y 25 centímetros, respectivamente.

a) Calcula el lado del rombo.

b) Halla el perímetro del rombo.

56 Un cuadrado de 10 centímetros de lado se inscribe en una circunferencia. Calcula la medida del radio de esta.

57 Un triángulo equilátero de 12 centímetros de lado se inscribe en una circunferencia. Calcula el radio de dicha circunferencia.

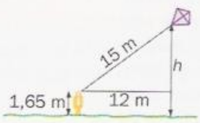
58 La diagonal de un rectángulo mide las $\frac{5}{3}$ partes de la base, y esta mide 12 centímetros. Calcula las medidas del rectángulo.

PARA APLICAR

59 Pedro nada según la diagonal de una piscina rectangular de 15 × 8 metros. ¿Cuántas diagonales tendrá que nadar para recorrer un kilómetro?

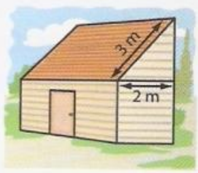
60 Las puntas de un compás de 10 centímetros de largo distan entre sí 4 centímetros. Halla la altura del compás.

61 Julián mide 1,6 metros y está volando su cometa con una cuerda de 15 metros, como muestra el esquema.

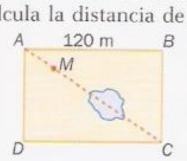


Calcula la altura h de la cometa respecto del suelo.

62 Para almacenar las piezas encontradas en una excavación se ha construido una cabaña como la de la figura. Halla la altura del tejado.



63 Un parque de 10 320 metros cuadrados tiene la forma de la figura. Una persona quiere calcular la distancia de M al vértice C, pero no puede medirla, ya que por medio hay un lago. Entonces mide la distancia de M a A, que es de 7 metros. Calcula la distancia de A a C.

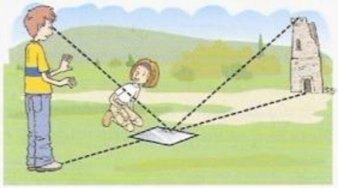


¡QUÉ TORRE TAN ALTA!

En el pueblo de Beatriz hay un castillo en ruinas del que solo queda una torre completa. Para medir la altura de esta torre, Beatriz ha pedido ayuda a su hermano Alejandro. Este debe situarse en punto fijo *A* mientras que Beatriz va moviendo un espejo sobre la trayectoria que une los pies de Alejandro con el de la torre. Alejandro debe avisar en el momento exacto en el que vea el punto más alto de la torre reflejado en el espejo. En ese momento resulta que el espejo está situado a 2,5 metros de Alejandro y a 12 de la torre. ¿Cómo se puede calcular la altura de la torre sabiendo que Alejandro mide 165 centímetros?

DATOS

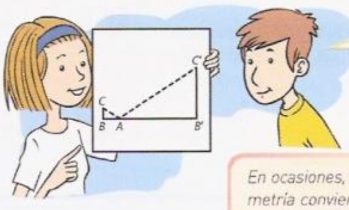
Ahora estoy viendo el punto más alto de la torre.



En los problemas de geometría ayuda elaborar un esquema o ***dibujo en el que aparezcan señalados los datos*** *proporcionados en el enunciado y* ***las incógnitas*** *que se solicitan.*

PLANTEAMIENTO

Los triángulos *ABC* y *AB'C'* son semejantes, ya que son rectángulos y, además, tienen otro ángulo igual. Entonces, los lados de los dos triángulos son proporcionales.

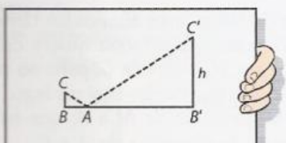


Recuerda que en física estudiamos que al reflejarse la luz, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

En ocasiones, a la hora de resolver problemas de geometría conviene ***buscar triángulos semejantes*** *y aplicar la propiedad de* ***proporcionalidad de los lados****.*

RESOLUCIÓN

Con estos datos planteamos la proporción para resolver el problema.



$$\frac{h}{12} = \frac{1,65}{2,5}$$

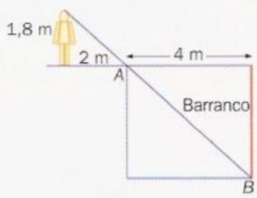
$$\Downarrow$$

$$h = \frac{12 \cdot 1,65}{2,5} = 7,92$$

Solución: *La altura de la torre es de 7,92 metros.*

PARA APLICAR

64 Para conseguir ver alineados los puntos *A* y *B* de un barranco, una persona de 1,80 metros de alto debe situarse a 2 metros de *A*. Calcula la profundidad del barranco si se sabe que su anchura es de 4 metros, tal y como muestra la figura.



Figuras semejantes

Al ampliar o reducir una figura, se obtiene otra **figura semejante**.

Las dimensiones de las figuras semejantes son **proporcionales**.

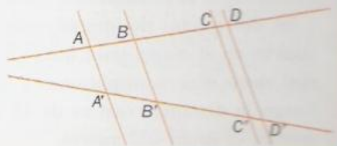
La constante que permite pasar de las dimensiones de una figura a las de su semejante se llama **razón de semejanza**.

Teorema de Tales

Teorema de Tales: Si un conjunto de rectas paralelas entre sí cortan a otras dos rectas, entonces los segmentos que determina en ellas son proporcionales.

Por tanto: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C} = \dfrac{CD}{CD'} = k$

La constante k es la **razón de proporcionalidad o semejanza**.



Triángulos semejantes

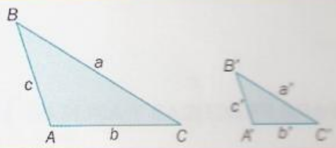
Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si se cumple:

$a = k \cdot a'$ $\quad b = k \cdot b'$ $\quad c = k \cdot c'$

$\widehat{A} = \widehat{A'}$ $\quad \widehat{B} = \widehat{B'}$ $\quad \widehat{C} = \widehat{C'}$

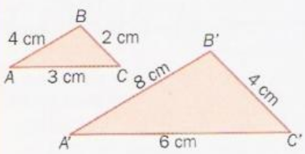
k es la razón de semejanza de los triángulos.

k^2 es la razón de semejanza de las áreas de los triángulos.



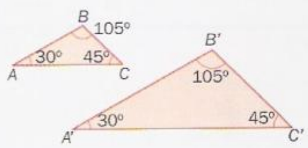
Criterios de semejanza

Criterio 1



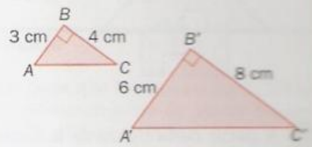
Tres lados proporcionales.

Criterio 2



Tres ángulos iguales.

Criterio 3



Dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

Mapas, planos y maquetas

Mapa: Representación a escala de la superficie terrestre o de una parte de ella.

Plano: Representación a escala de la planta de un edificio, de un terreno, etc.

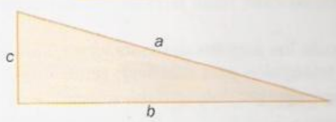
Maqueta: Representación a escala y en tres dimensiones de un edificio, máquina, etc.

La **escala** es la razón entre la distancia entre dos puntos del mapa, plano o maqueta, y la distancia de sus correspondientes en la realidad.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



CÁLCULO MENTAL

Para calcular mentalmente la distancia real entre dos lugares marcados en un mapa, basta con medir la distancia entre ellos en el mapa y multiplicarla por la escala del mismo.

Por ejemplo, si el mapa es a escala 1 : 20 000 y los dos puntos de interés están a 2 centímetros en el mapa, para hallar la distancia real entre ellos multiplicamos 2 por 20 000. Luego la distancia real es de 40 000 centímetros, es decir, 400 metros.

65 En un mapa a escala 1 : 20 000, dos puntos distan 3 centímetros. Calcula la distancia real entre ambos.

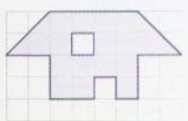
66 En un mapa a escala 1 : 1 000 000, dos ciudades están separadas por 15 centímetros.
¿Cuál es la distancia real entre ambas?

67 En un plano confeccionado a escala 1 : 150, el largo de una habitación mide 8 centímetros. Calcula su medida real.

68 Las dimensiones de la maqueta de un edificio son: 2 metros de largo, 0,90 de ancho y 1,10 de alto. La escala de la maqueta es 1 : 20. Calcula las dimensiones reales del edificio.

PARA PRACTICAR Y APLICAR

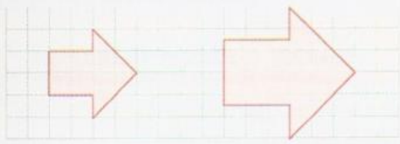
69 Dada la figura, construye la figura semejante con las siguientes razones de semejanza.



a) Razón 3

b) Razón $\frac{1}{2}$

70 A partir de la figura de la izquierda se ha construido la figura de la derecha mediante una semejanza. Halla la razón de esta.



71 Los lados de un triángulo miden 12, 11 y 13 centímetros, respectivamente, mientras que los de otro triángulo miden 16, $\frac{44}{3}$ y $\frac{52}{3}$ centímetros.

a) Investiga si son semejantes.

b) En su caso, halla la razón de semejanza.

72 Calcula los ángulos desconocidos en los siguientes triángulos para que sean semejantes.

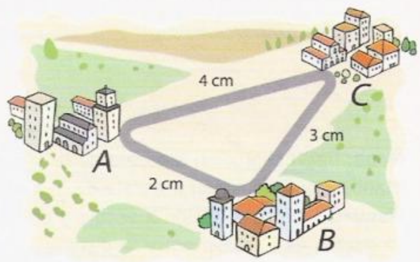
a) 50°, 80°, x° y 50°, z°, 50°

b) 60°, 60°, x° y 60°, z°, 60°

73 Divide un segmento de 7 centímetros de longitud en nueve partes iguales.

74 En un mapa realizado a escala 1 : 150 000, la distancia entre dos ciudades es de 12,4 centímetros. Calcula la distancia real.

75 Tres ciudades A, B y C están situadas en un mapa del siguiente modo.



Calcula las distancias reales si el mapa está realizado a escala 1 : 1 800 000.

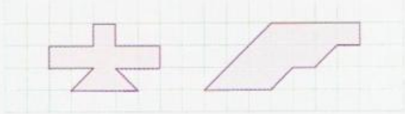
76 Halla las medidas de las copias de un documento de 15 centímetros de largo y 6 de ancho cuando se realiza:

a) Una ampliación del 150 %.

b) Una reducción del 75 %

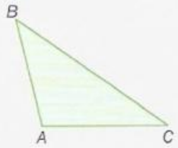
PARA REFORZAR

77 Construye figuras semejantes a las dadas con las siguientes razones de semejanza.



a) 2 b) $\frac{1}{2}$

78 Aplicando el teorema de Tales, construye un triángulo semejante al triángulo *ABC* con las siguientes razones de semejanza.



a) 4

b) $\frac{1}{3}$

79 Comprueba cuáles de las siguientes parejas de triángulos dados por las medidas de sus lados, en centímetros, son semejantes o no. En su caso, indica la razón de semejanza.

a) 9, 6 y 6 13,5; 9 y 9

b) 18, 15 y 21 6, 5 y 8

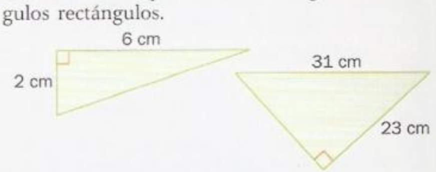
80 a) Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, ¿son semejantes?

b) Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales, ¿son semejantes?

c) Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido igual, ¿son semejantes?

81 Dos ciudades *A* y *B* representadas sobre un mapa realizado a escala 1 : 300 000 distan en el mismo 3,5 centímetros. ¿Cuánto distan en la realidad?

82 Calcula el lado que falta en los siguientes triángulos rectángulos.



83 Halla la apotema de un hexágono regular de 12,5 metros de lado.

84 Calcula la altura de un triángulo equilátero de 17,3 centímetros de lado.

PARA AMPLIAR

85 Los lados correspondientes de dos triángulos semejantes miden 15 y 23 metros, respectivamente. Calcula el área del triángulo mayor, sabiendo que el área del pequeño mide 75 metros cuadrados.

86 La diagonal de un cuadrado mide 12 metros, y el área de otro cuadrado, 725 metros cuadrados.

a) Calcula la diagonal del cuadrado mayor.

b) Calcula el área del cuadrado menor.

87 Con un hilo de alambre de 64 centímetros se construyen:

a) Un triángulo equilátero.

b) Un triángulo rectángulo en el que un cateto es igual a las $\frac{3}{4}$ partes del otro.

c) Un triángulo isósceles de base (lado desigual) igual a los $\frac{2}{5}$ del lado.

Calcula el área de los tres triángulos. ¿Qué observas?

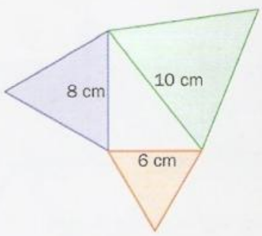
88 El perímetro de un triángulo rectángulo isósceles mide 24 centímetros. Halla la longitud de sus tres lados.

89 Un delineante tiene que hacer a escala 1 : 120 un plano de un edificio singular de planta hexagonal regular de 17 metros de lado.

a) Halla la medida de la apotema en la realidad.

b) Calcula la medida del lado y de la apotema en el plano.

90 Sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo de lados 6, 8 y 10 centímetros se construye un triángulo equilátero.



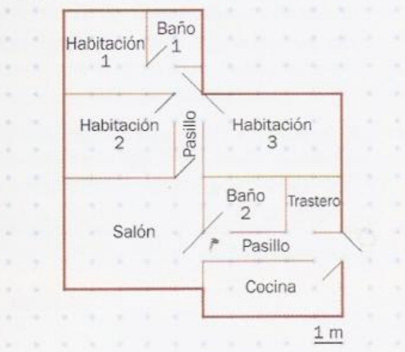
Comprueba que el área del triángulo verde es igual a la suma de las áreas de los triángulos azul y rojo.

ACTIVIDADES FINALES

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

91 El plano de mi casa

En la figura se representa el plano de la casa de Violeta.



a) Calcula las superficies de cada una de las habitaciones, los baños, el trastero, el salón, la cocina y los pasillos.

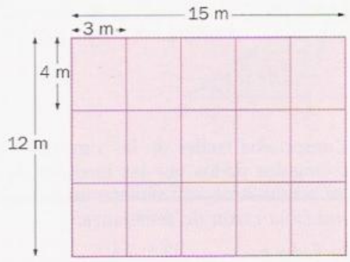
b) Si el metro cuadrado cuesta 2 575 euros, ¿cuál será el precio de la vivienda?

92 Los almendros

Augusto quiere plantar 12 almendros en un terreno rectangular de 15 × 12 metros, pero de forma que la distancia entre dos árboles cualesquiera no sea inferior a 5 metros.

Para ello divide el terreno en 15 rectángulos tal y como muestra la figura.

Calcula la medida de la diagonal de cada uno de estos rectángulos, indican si dos árboles pueden ser plantados en dos esquinas opuestas de uno de los rectángulos y diseña una posible solución al problema de Augusto.

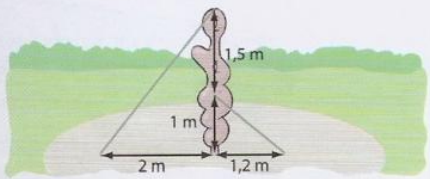


AUTOEVALUACIÓN

1 Las diagonales de un rombo miden 48 y 90 centímetros. Calcula el lado del rombo.

2 Calcula la base, la altura y la diagonal de un rectángulo sabiendo que la suma de la base y la altura es de 144 centímetros, y que la base supera en 4 centímetros el triple de la altura.

3 Se han colocado dos cables para sostener una gran escultura, como muestra la figura. ¿Cuántos metros de alambre han empleado?



4 Para calcular la altura de una torre, se han medido a la misma hora su sombra y la de una persona, resultando ser de 24,5 metros y de 16 centímetros, respectivamente. Si la persona mide 178 centímetros, calcula la altura de la torre.

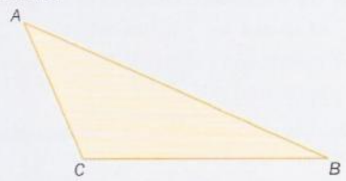
5 El plano de una casa está realizado a escala 1 : 110. ¿Cuánto medirá en la realidad el salón, si en el plano mide 7 centímetros de largo y 5 de ancho?

6 Un boceto de un diseño de alfombra mide 13 centímetros de largo por 8 de ancho, y se quiere que el largo de la alfombra real mida 149,5 centímetros.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza?

b) ¿Cuánto medirá el ancho de la alfombra?

7 Aplica el teorema de Tales para construir un triángulo semejante al triángulo *ABC* con razón de semejanza 2,5.



8 La maqueta de una presa tiene 2,5 metros de largo y 0,7 de ancho. ¿Cuáles serán las medidas reales sabiendo que está realizada a escala 1 : 3 800?

Más actividades en www.librosvivos.net [Tu libro: 112296]

MATEMÁTICAS A TU ALREDEDOR

EL MAPA DEL CEREBRO

Mapas del tiempo, mapas de carreteras, mapas de España, del mundo, del cielo, del tesoro... Hay muchos tipos de mapas, y seguro que has oído hablar de ellos, los has visto o incluso sabes interpretarlos. Pero ¿sabías que los investigadores trabajan para conseguir elaborar también un mapa preciso de nuestro cerebro?

Cuando lo consigan podrán identificar cuál es la misión de cada una de sus partes; por ejemplo, sabrán en qué zona del cerebro se resuelven las ecuaciones. Pero el mapa también tendrá otras aplicaciones: se podrá buscar el mejor tratamiento para un cierto tipo de tumor cerebral e incluso luchar contra la diabetes, el sida o las enfermedades del corazón.

A primera vista, parece que hacer un mapa del cerebro debe ser parecido a hacer un mapa de la Tierra; pero es muchísimo más complicado porque este órgano está lleno de pliegues y, además, interesa representar también su interior.

Con un escáner podemos observar imágenes de “rebanadas” del cerebro, pero hay información importante que permanece escondida. Por eso, en los últimos años las matemáticas se han vuelto imprescindibles para entender el funcionamiento del cerebro.

Los **números** y la **geometría** resultan **claves para** poder **confeccionar el mapa de este complejo órgano**. Y de momento ya se han conseguido notables progresos en el conocimiento de enfermedades como el párkinson o el alzhéimer.

UN RINCÓN PARA DESCUBRIR... LAS MATEMÁTICAS

Muchas especies de aves se desplazan en bandadas formando una gran uve (V).

Las aves conocen las ventajas aerodinámicas de esta forma geométrica. Para dosificar el esfuerzo y obtener mayor velocidad, realizan relevos dentro de la formación en V.

UN RINCÓN PARA PENSAR

Retira 2 lápices de modo que obtengas una figura con 2 triángulos equiláteros.

B. Competencias básicas en el libro de texto

LAS COMPETENCIAS BÁSICAS

La incorporación de las competencias básicas al currículo pretende resaltar los aprendizajes imprescindibles, sobre todo, aquellos dirigidos a la práctica y a la aplicación de los saberes. Las competencias son aquellas que debe haber desarrollado un joven al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida. Con las áreas y materias del currículo se pretende que los alumnos y las alumnas alcancen los objetivos educativos y, consecuentemente, que adquieran también las competencias básicas.

La inclusión de las competencias básicas en el currículo tiene varias finalidades:

- En primer lugar, integrar **los diferentes aprendizajes**, tanto los formales, incorporados a las diferentes áreas o materias, como los informales y no formales.
- En segundo lugar, **permitir a todos los estudiantes integrar sus aprendizajes**, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando les resulten necesarios en diferentes situaciones y contextos.
- Y, por último, **orientar la enseñanza**, al permitir identificar los contenidos y los criterios de evaluación que tienen carácter imprescindible y, en general, inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje.

En el marco de la propuesta realizada por la Unión Europea, el Ministerio de Educación y Ciencia ha identificado ocho competencias básicas:

1. COMPETENCIA EN COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA (C1)

Se refiere a la utilización del lenguaje como instrumento de comunicación, de representación, de interpretación y de comprensión de la realidad, de construcción y comunicación del conocimiento y de organización y autorregulación del pensamiento, de las emociones y de la conducta.

Los conocimientos, las destrezas y las actitudes propios de esta competencia permiten expresar pensamientos, emociones, vivencias y opiniones, así como dialogar, formarse un juicio, generar ideas, estructurar el conocimiento, dar coherencia y cohesión al discurso y a las propias acciones y tareas, adoptar decisiones, y disfrutar escuchando, leyendo o expresándose de forma oral y escrita, todo lo cual contribuye además al desarrollo de la autoestima y de la confianza en sí mismo.

En definitiva, el desarrollo de la competencia lingüística al final de la educación obligatoria comporta el dominio de la lengua oral y escrita en múltiples contextos, y el uso funcional de, al menos, una lengua extranjera.

2. COMPETENCIA MATEMÁTICA (C2)

Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

En síntesis, con el desarrollo de la competencia matemática se pretende utilizar espontáneamente los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

3. COMPETENCIA EN EL CONOCIMIENTO Y LA INTERACCIÓN CON EL MUNDO FÍSICO (C3)

Se centra en la posibilidad del ser humano de interactuar con el mundo físico, tanto en sus aspectos naturales como en los generados por la acción humana, de tal modo que se posibilite la comprensión de sucesos, la predicción de consecuencias y la actividad dirigida a la mejora y preservación de las condiciones de vida propia, de las demás personas y del resto de los seres vivos. En definitiva, incorpora habilidades para desenvolverse adecuadamente, con autonomía e iniciativa personal en ámbitos de la vida y del conocimiento muy diversos (salud, actividad productiva, consumo, ciencia, procesos tecnológicos, etc.), y para interpretar el mundo, lo que exige la aplicación de los conceptos y principios básicos que permiten el análisis de los fenómenos desde los diferentes campos de conocimiento científico involucrados.

En conclusión, esta competencia supone el desarrollo y aplicación del pensamiento científico-técnico para interpretar la información que se recibe y para predecir y tomar decisiones con iniciativa y autonomía personal en un mundo en el que los avances que se van produciendo en los ámbitos científico y tecnológico tienen una influencia decisiva en la vida personal, la sociedad y el mundo natural. Asimismo, implica la diferenciación y valoración del conocimiento científico al lado de otras formas de conocimiento, y la utilización de valores y criterios éticos asociados a la ciencia y al desarrollo tecnológico.

4. TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN Y COMPETENCIA DIGITAL (C4)

Con esta competencia se pretende dotar de habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar información, y para transformarla en conocimiento. Incorpora diferentes habilidades, que van desde el acceso a la información hasta su transmisión en distintos soportes una vez tratada, incluyendo la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación como elemento esencial para informarse, aprender y comunicarse.

En síntesis, el tratamiento de la información y la competencia digital implican ser una persona autónoma, eficaz, responsable, crítica y reflexiva al seleccionar, tratar y utilizar la información y sus fuentes, así como las distintas herramientas tecnológicas; también tener una actitud crítica y reflexiva en la valoración de la información disponible, contrastándola cuando es necesario, y respetar las normas de conducta acordadas socialmente para regular el uso de la información y sus fuentes en los distintos soportes.

5. COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA (C5)

Con esta competencia se pretende hacer posible la comprensión de la realidad social en que se vive, cooperar, convivir y ejercer la ciudadanía democrática en una sociedad plural, así como comprometerse a contribuir a su mejora.

Globalmente supone utilizar, para desenvolverse socialmente, el conocimiento sobre la evolución y organización de las sociedades y sobre los rasgos y valores del sistema democrático, así como utilizar el juicio moral para elegir y tomar decisiones, y ejercer activa y responsablemente los derechos y deberes de la ciudadanía.

Esta competencia supone comprender la realidad social en que se vive, afrontar la convivencia y los conflictos empleando el juicio ético basado en los valores y prácticas democráticas, y ejercer la ciudadanía, actuando con criterio propio, contribuyendo a la construcción de la paz y la democracia, y manteniendo una actitud constructiva, solidaria y responsable ante el cumplimiento de los derechos y obligaciones cívicas.

6. COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA (C6)

Esta competencia supone conocer, comprender, apreciar y valorar críticamente diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute y considerarlas como parte del patrimonio de los pueblos.

Apreciar el hecho cultural en general, y el hecho artístico en particular, lleva implícito disponer de aquellas habilidades y actitudes que permiten acceder a sus distintas manifestaciones, así como habilidades de pensamiento, perceptivas y comunicativas,

En definitiva, el conjunto de destrezas que configuran esta competencia se refiere tanto a la habilidad para apreciar y disfrutar con el arte y otras manifestaciones culturales, como a aquellas relacionadas con el empleo de algunos recursos de la expresión artística para realizar creaciones propias; implica un conocimiento básico de las distintas manifestaciones culturales y artísticas, la aplicación de habilidades de pensamiento divergente y de trabajo colaborador, una actitud abierta, respetuosa y crítica hacia la diversidad de expresiones artísticas y culturales, el deseo y voluntad de cultivar la propia capacidad estética y creadora, y un interés por participar en la vida cultural y por contribuir a la conservación del patrimonio cultural y artístico, tanto de la propia comunidad como de otras comunidades.

7. COMPETENCIA PARA APRENDER A APRENDER (C7)

Aprender a aprender supone disponer de habilidades para iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades.

Como conclusión, aprender a aprender implica la conciencia, gestión y control de las propias capacidades y conocimientos desde un sentimiento de competencia o eficacia personal, e incluye tanto el pensamiento estratégico como la capacidad de cooperar, de autoevaluarse, y el manejo eficiente de un conjunto de recursos y técnicas de trabajo intelectual, todo lo cual se desarrolla a través de experiencias de aprendizaje conscientes y gratificantes, tanto individuales como colectivas.

8. AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL (C8)

Esta competencia se refiere, por una parte, a la adquisición de la conciencia y aplicación de un conjunto de valores y actitudes personales interrelacionadas, como la responsabilidad, la perseverancia, el conocimiento de sí mismo y la autoestima, la creatividad, la autocrítica, el control emocional, la capacidad de elegir, de calcular riesgos y de afrontar los problemas, así como la capacidad de demorar la necesidad de satisfacción inmediata, de aprender de los errores y de asumir riesgos.

Por otra parte, remite a la capacidad de elegir con criterio propio, de imaginar proyectos, y de llevar adelante las acciones necesarias para desarrollar las opciones y planes personales en el marco de proyectos individuales o colectivos, responsabilizándose de ellos, tanto en el ámbito personal como en el social y laboral.

Supone poder transformar las ideas en acciones; es decir, proponerse objetivos y planificar y llevar a cabo proyectos.

En síntesis, la autonomía y la iniciativa personal suponen ser capaz de imaginar,

CONTRIBUCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS A LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS BÁSICAS

Además del conocimiento de las ocho competencias básicas identificadas en el currículo con carácter general, es imprescindible conocer, para poder organizar el trabajo en el aula en este ámbito, de qué manera cada materia en particular contribuye a la adquisición de todas o algunas de esas competencias básicas. En particular el área de Matemáticas tiene incidencia directa en la adquisición de las siguientes competencias básicas:

I) COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

Las matemáticas contribuyen a la competencia en **comunicación lingüística**, ya que son concebidas como un área de expresión oral y escrita en la formulación y exposición de las ideas.

Por ello, en todas las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en particular en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión tanto oral como escrita de los procesos realizados y de los razonamientos seguidos, puesto que ayudan a formalizar el pensamiento.

El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto.

II) COMPETENCIA MATEMÁTICA

Puede entenderse que todo el currículo de la materia contribuye a la adquisición de la **competencia matemática**, puesto que la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con objeto de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella, forma parte del propio objeto de aprendizaje.

Todos los bloques de contenidos están orientados a aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática, y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, mediante las herramientas adecuadas; e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad.

Conviene señalar que no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana.

III) COMPETENCIA EN EL CONOCIMIENTO Y LA INTERACCIÓN CON EL MUNDO FÍSICO

La discriminación de formas, relaciones y estructuras geométricas, especialmente con el desarrollo de la visión espacial y la capacidad para transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio, contribuye a profundizar la **competencia en conocimiento e interacción con el mundo físico**.

La modelización constituye otro referente en esta misma dirección. Elaborar modelos exige identificar y seleccionar las características relevantes de una situación real, representarla simbólicamente y determinar pautas de comportamiento, regularidades e invariantes, a partir de las que poder hacer predicciones sobre la evolución, la precisión y las limitaciones del modelo.

IV) COMPETENCIA EN EL TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN Y LA COMPETENCIA DIGITAL

La incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje y para la resolución de problemas, contribuye a mejorar la **competencia en el tratamiento de la información y la competencia digital** de los estudiantes, del mismo modo que la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico ayuda a interpretar mejor la realidad expresada por los medios de comunicación.

No menos importante resulta la interacción entre los distintos tipos de lenguaje: natural, numérico, gráfico, geométrico y algebraico como forma de aunar el tratamiento de la información con la experiencia de los alumnos.

V) COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA

La aportación a la **competencia social y ciudadana** desde la consideración del uso de las matemáticas para describir fenómenos sociales. Las matemáticas, fundamentalmente a través del análisis funcional y de la estadística, aportan criterios científicos para predecir y tomar decisiones.

También se contribuye a esta competencia enfocando los errores cometidos en los procesos de resolución de problemas con espíritu constructivo, lo que permite de paso valorar los puntos de vista ajenos en plano de igualdad con los propios como formas alternativas de abordar una situación.

VI) COMPETENCIA EN EXPRESIÓN CULTURAL Y ARTÍSTICA

Las matemáticas contribuyen a la **competencia en expresión cultural y artística** porque el mismo conocimiento matemático es expresión universal de la cultura; en particular, la geometría forma parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras que ha creado.

Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético son objetivos de esta materia.

VII) COMPETENCIA PARA APRENDER A APRENDER

Las técnicas heurísticas que desarrolla constituyen modelos generales de tratamiento de la información y de razonamiento, y consolida la adquisición de destrezas involucradas en la **competencia de aprender a aprender** tales como la autonomía, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo.

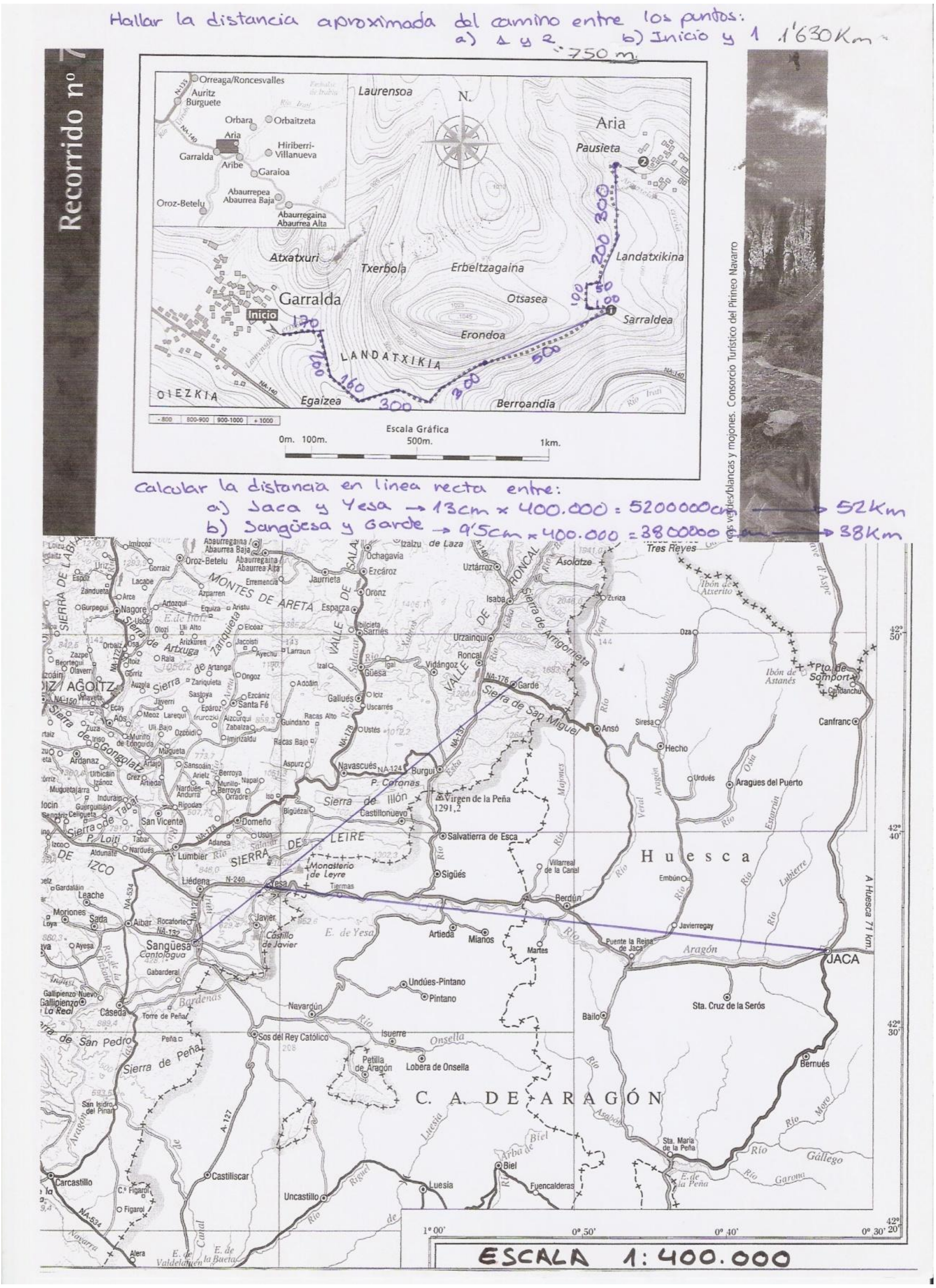
VIII) AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL

El desarrollo de la **autonomía e iniciativa personal** se favorece haciendo hincapié en la formación de un espíritu crítico, capaz de cuestionar los dogmas y enfrentarse a los prejuicios.

Los propios procesos de resolución de problemas contribuyen de forma especial a fomentar la autonomía e iniciativa personal porque se utilizan para planificar estrategias, asumir retos y contribuyen a convivir con la incertidumbre controlando al mismo tiempo los procesos de toma de decisiones.

Esta competencia incluye una faceta relacionada con la habilidad para comenzar y desarrollar proyectos, que se podrá potenciar mediante el desarrollo de la capacidad para analizar situaciones, incluyendo la valoración de los factores que las han condicionado, así como las consecuencias que estas puedan tener.

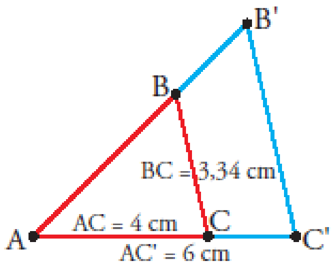
C. Material suplementario



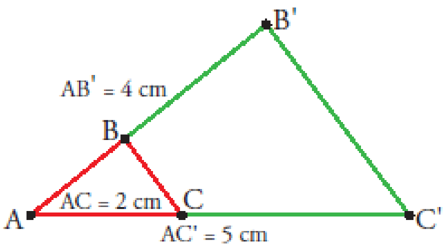
Matemáticas 2º ESO. Tema 11. Semejanza. Triángulos.

Teorema de Tales

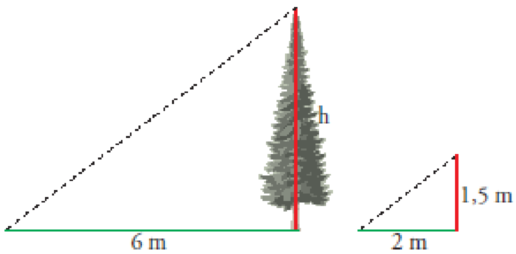
1. Calcula la longitud B'C' en la figura adjunta.



2. Calcula la longitud AB en la figura adjunta.



3. Un árbol proyecta una sombra de 6m y, a la misma hora y en el mismo sitio, un palo de 1,5m proyecta una sombra de 2m. Calcula la altura del árbol.



MATEMÁTICAS 2º ESO

TEMA 11. TRIÁNGULOS. SEMEJANZA.

1.- En un mapa, la distancia entre dos poblaciones es de 6 centímetros. Calcula la distancia real, sabiendo que el mapa está representado a las siguientes escalas. Expresa la distancia en la unidad más adecuada.

a) 1:600 000 b) 1:350 000

2.- Construye la figura semejante a la dada, con razón de semejanza 2,5.

3.- ¿Hasta qué altura llegará una escalera de 3 metros de altura que se apoya contra una pared y está separada de ella 1,5 metros? (DIBÚJALO)

4.- Visitando un museo, la madre de Carolina le dice a su hija que se parece a una niña de un cuadro. Si Carolina mide 1,50 metros de altura y la niña del cuadro 30 centímetros, ¿cuál es la razón de semejanza entre sus alturas?

5.- En una fotocopiadora hacemos una ampliación de una hoja al 135%. En dicha hoja aparecía un círculo de 4,8 centímetros de diámetro. Calcula el diámetro del círculo en la ampliación. Halla la razón de semejanza del círculo grande con respecto al pequeño.

6.- Para calcular la altura de una torre, se han medido a la misma hora su sombra y la de una persona, resultando ser de 22,5 metros y de 15 centímetros respectivamente. Si la persona mide 172 centímetros, calcula la altura de la torre.

7.- Halla la apotema de un hexágono regular de 14 centímetros de lado.

8.- Los lados correspondientes de dos triángulos semejantes miden 16 y 24 metros, respectivamente. Calcula el área del triángulo mayor, sabiendo que el área del pequeño mide 15 metros cuadrados.

MATEMÁTICAS 2º ESO

TEMA 11. TRIÁNGULOS. SEMEJANZA.

1.- En un mapa, la distancia entre dos poblaciones es de 6 centímetros. Calcula la distancia real, sabiendo que el mapa está representado a las siguientes escalas. Expresa la distancia en la unidad más adecuada.

a) 1:600 000 b) 1:350 000

2.- Construye la figura semejante a la dada, con razón de semejanza 2,5.

3.- ¿Hasta qué altura llegará una escalera de 3 metros de altura que se apoya contra una pared y está separada de ella 1,5 metros? (DIBÚJALO)

4.- Visitando un museo, la madre de Carolina le dice a su hija que se parece a una niña de un cuadro. Si Carolina mide 1,50 metros de altura y la niña del cuadro 40 centímetros, ¿cuál es la razón de semejanza entre sus alturas?

5.- En una fotocopiadora hacemos una ampliación de una hoja al 145%. En dicha hoja aparecía un círculo de 4,8 centímetros de diámetro. Calcula el diámetro del círculo en la ampliación. Halla la razón de semejanza del círculo pequeño con respecto al grande.

6.- Para calcular la altura de una torre, se han medido a la misma hora su sombra y la de una persona, resultando ser de 22,5 metros y de 15 centímetros respectivamente. Si la persona mide 172 centímetros, calcula la altura de la torre.

7.- Halla la apotema de un hexágono regular de 16 centímetros de lado.

8.- Los lados correspondientes de dos triángulos semejantes miden 16 y 40 metros, respectivamente. Calcula el área del triángulo mayor, sabiendo que el área del pequeño mide 15 metros cuadrados.