Diego MALUMBRES PASQUIER

MÚSICA

MÚSICA Y MATEMÁTICAS : UNA RELACIÓN EDUCATIVA

TFG/*GBL* 2014

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Grado en Maestro de Educación Primaria
/
Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Grado en Maestro en Educación Primaria

Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Trabajo Fin de Grado
Gradu Bukaerako Lana

MÚSICA Y MATEMÁTICAS : UNA RELACIÓN EDUCATIVA

Diego MALUMBRES PASQUIER

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y SOCIALES
GIZA ETA GIZARTE ZIENTZIEN FAKULTATEA

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Estudiante / Ikaslea
Diego MALUMBRES PASQUIER

Título / Izenburua
Música y Matemáticas: una relación

Grado / Gradu
Grado en Maestro en Educación Primaria / Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Centro / Ikastegia
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales / Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea
Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Director-a / Zuzendaria
Ana LAUCIRICA LARRINAGA

Departamento / Saila
Psicología y Pedagogía/ Psikologia eta Pedagogia. Departamento de Didáctica de la Expresión Musical

Curso académico / Ikasturte akademikoa
2013/2014

Semestre / Seihilekoa
Primavera / Udaberria

Preámbulo

El Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, modificado por el Real Decreto 861/2010, establece en el Capítulo III, dedicado a las enseñanzas oficiales de Grado, que “estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa de un Trabajo Fin de Grado […] El Trabajo Fin de Grado tendrá entre 6 y 30 créditos, deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título”.

El Grado en Maestro en Educación Primaria por la Universidad Pública de Navarra tiene una extensión de 12 ECTS, según la memoria del título verificada por la ANECA. El título está regido por la *Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria*; con la aplicación, con carácter subsidiario, del reglamento de Trabajos Fin de Grado, aprobado por el Consejo de Gobierno de la Universidad el 12 de marzo de 2013.

Todos los planes de estudios de Maestro en Educación Primaria se estructuran, según la Orden ECI/3857/2007, en tres grandes módulos: uno, *de formación básica*, donde se desarrollan los contenidos socio-psico-pedagógicos; otro, *didáctico y disciplinar*, que recoge los contenidos de las disciplinares y su didáctica; y, por último, *Practicum*, donde se describen las competencias que tendrán que adquirir los estudiantes del Grado en las prácticas escolares. En este último módulo, se enmarca el Trabajo Fin de Grado, que debe reflejar la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas. Finalmente, dado que la Orden ECI/3857/2007 no concreta la distribución de los 240 ECTS necesarios para la obtención del Grado, las universidades tienen la facultad de determinar un número de créditos, estableciendo, en general, asignaturas de carácter optativo.

Así, en cumplimiento de la Orden ECI/3857/2007, es requisito necesario que en el Trabajo Fin de Grado el estudiante demuestre competencias relativas a los módulos de formación básica, didáctico-disciplinar y practicum, exigidas para todos los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria.

En este trabajo, el módulo de formación básica nos ha proporcionado un corpus de conocimientos y competencias de primer orden para el discernimiento del proceso de enseñanza - aprendizaje y las variables implicadas en el mismo.

El módulo didáctico y disciplinar se concreta en la adscripción de una metodología analítica comparativa de las Matemáticas y la Música desde una perspectiva histórica, comenzando en la Antigua Grecia y acabando en la actualidad.

Asimismo, el módulo Practicum se concreta en la reflexión de la práctica docente por medio del análisis de los materiales de aula del área de Música, estableciéndose así un vínculo auténtico entre el marco teórico y la praxis desde una perspectiva integradora del currículo de ambas disciplinas.

Resumen

La relación entre la Música y las Matemáticas se remonta a la Antigua Grecia, donde ambas disciplinas disfrutaban de idéntica consideración por los grandes pensadores. En el presente trabajo analizaremos la naturaleza de este vínculo, así como describiremos la evolución del mismo a lo largo de la Historia a través de unos hilos conductores en torno a los cuales se ha producido esta fructífera asociación. Por último procederemos al análisis de unos materiales de aula con objeto de abogar por la integración curricular en general y de estas áreas de conocimiento en particular, como así lo atestigua el espectacular desarrollo de las mismas fruto de su colaboración.

Palabras clave: Música; Matemáticas; integración curricular; educación; didáctica

Abstract

The relationship between Music and Maths dates back to Ancient Greece, where both disciplines were equally regarded by the great thinkers. In this project we will analyse the essence of that link as well as we will interpret the way it has evolved throughout History by using connecting threads by which this fruitful partnership has taken place. Finally, we will proceed to examine some classroom resources with the aim of promoting an integrated curriculum approach as a whole and of these two areas of knowledge in particular, as the great development of those through their association shows.

Keywords: Music; Maths; integrated curriculum; education; didactics

Índice

INTRODUCCIÓN

A todo el mundo le gusta la música. Esta es una creencia prácticamente incuestionable y profundamente arraigada en la cultura popular. Muchas personas incluso, llegarían hasta el punto, nada descabellado, por otra parte, de afirmar que no pueden vivir sin ella. Poco importa si unos prefieren a Beethoven o a los Beatles, si uno es un músico amateur, concertista o un simple ávido oyente musical, si piensa que Rachmaninov es un jugador de fútbol o si ocupa una parcela de su tiempo libre al coleccionismo de discos de vinilo; lo cierto es que, a pesar del espectro tan amplio de registros, estilos, métodos, aptitudes y mensajes, el gusto y disfrute por la música es un rasgo inherente en todos los seres humanos.

Por el contrario, pocas asignaturas como las matemáticas son capaces de crear reacciones tan dispares en las personas, puesto que a pesar de existir un acuerdo unánime en su ubicación primordial dentro del saber humano, pocos pueden presumir de qué procesos como el planteamiento de problemas, resolución de incógnitas o búsqueda de regularidades les resulte altamente atractivos o reconfortantes. Desgraciadamente, es mayor el número de personas cuya actitud frente a las mismas indica una disposición caracterizada por su inseguridad, comprensión insuficiente o rechazo.

Ahora bien: ¿existe alguna relación entre la Música y las Matemáticas? ¿qué elementos de la segunda podemos encontrar en la primera? ¿qué implicaciones educativas supone todo esto?

Una de las razones que me han llevado a la elección de este tema como parte del Trabajo de Fin de Grado de Maestro en Educación Primaria ha sido la ignorancia sobre las causas del desaprovechamiento de este vínculo desde el punto de vista curricular a pesar de la existencia de una conexión entre estas dos áreas, a lo que debemos añadir la incoherencia que supone la carencia de un enfoque disciplinar con un carácter integrador en la escuela cuando el fenómeno descriptivo por excelencia de la sociedad en la que vivimos es su globalización.

A lo largo del presente trabajo, intentaremos dar respuesta a estas cuestiones realizando un recorrido histórico a través de los orígenes de ambas disciplinas, tras lo cual procederemos a analizar unos materiales de Música para primer ciclo de Primaria desde la perspectiva de este binomio.

1.- MÚSICA Y MATEMÁTICA

Como señala Ibaibarriaga (2006), en un principio las Matemáticas surgieron ante la necesidad de registrar el paso del tiempo, nacimientos, defunciones, inundaciones, cosechas o cabezas de ganado. Posteriormente, la concepción aritmética de esta ciencia dejó paso a otra instrumental que servía, por ejemplo, para maximizar el rendimiento de los cultivos en función de su disposición. No fue hasta la Grecia Clásica, sin embargo, con Tales de Mileto y Pitágoras como figuras prominentes, que estas nociones fueron superadas hasta convertirse las Matemáticas por méritos propios en un arte por el arte.

La Música, en cambio, nació en un contexto caracterizado por el pensamiento mítico en el que el hombre necesitaba bien una protección frente a fenómenos naturales, bien la invocación de la providencia divina para su alabanza o intersección ante espíritus malignos; o bien una celebración de la recolección de la cosecha o el solsticio de verano en acontecimientos de carácter festivo. El instrumento utilizado para tal fin era la voz humana, cuyo desarrollo estaba en una relación directamente proporcional al experimentado por el lenguaje, y con el paso del tiempo se fueron construyendo rudimentarios instrumentos musicales a semejanza de la misma, como así atestiguan numerosos restos arqueológicos.

La Matemática, grosso modo, es el estudio científico y abstracto de lo susceptible de ser cuantificado y ordenado; la Música, el arte de combinar sonidos para expresar ideas o sentimientos. Ambas disciplinas representan la lucha del Logos, la razón, el orden, Apolo, contra el Pathos, el sentimiento, la pasión, Dionisos. Ahora bien, la disparidad que manifiestan aparentemente, lejos de ser cierta, no deja de ser un formalismo superficial, pues lo cierto es que están íntimamente relacionadas, como veremos en los siguientes apartados de este trabajo

1.1 Escuela Pitagórica

Pitágoras de Samos (ca 560 - 470AC), hombre polifacético en cuya obra cultivó áreas tan variadas como la ciencia, política, religión y educación, acuñó la palabra Matemáticas, que etimológicamente significa "lo que es aprendido", de la que la

Música, i.e. “relativo a las Musas”, consideraba una parte importante de la primera, tal y como apunta Ibaibarriaga (2006).

Fue el fundador de la escuela homónima tras diferentes viajes por Oriente, se estableció en Crotona e instauró este culto caracterizado por rasgos como la observancia de un estricto modo de vida, el ascetismo, la creencia en la transmigración de las almas y el culto a las Matemáticas.

Tal y como afirma De Guzmán (1986), esta sociedad estaba compuesta por dos tipos de miembros: los acusmáticos (akousmatikoi, oidores), transmisores de los conocimientos y creencias que, a pesar de desconocer las causas bajo las que se cimentan estas enseñanzas, deseaban que se conservaran íntegra y literalmente; y los mathematikoi (conocedores) quienes eran elegidos por Pitágoras para compartir sus conocimientos científicos , por lo que al ser considerados discípulos, podían perfeccionar su corpus epistemológico.

Otro aspecto relevante característico de esta hermandad es el Juramento como requisito de entrada a esta entidad con una organización interna compleja, donde se ponía a prueba a sus novicios a través de la realización de diversos obstáculos con el fin de cultivar la humildad y asimilar progresivamente el espíritu pitagórico.

En lo relativo a la transmigración de las almas, De Guzmán (1986) apunta que esta escuela concebía la vida como una continua etapa de purificación cuyo objetivo era la elevación al cielo de los bienaventurados y la liberación del alma de la prisión del cuerpo.

De entre todas las doctrinas de esta escuela podemos destacar la teoría del número, cuyo postulado principal era el de la consideración del número como principio o arjé de todas las cosas sin el cual nada pueda ser concebido ni conocido Márquez (2010). Los fenómenos de la naturaleza son susceptibles de ser cuantificados y medidos a través del número, que lo es todo. La ontología pitagórica se construía a partir de los números uno, dos, tres y cuatro, que conformaban la Tetraktis o cuaterna. Asimismo, los números tienen un origen divino y llevan adscritos un símbolo, v.gr. el número 3 se identifica con el matrimonio; el 4, con la justicia…. Esta teoría relativa al número es de capital importancia para comprender los apartados que vamos a desarrollar a continuación.

1.1.1 Monocordio

Márquez (2010) recoge la leyenda acerca de Pitágoras según la cual, mientras este matemático daba un paseo, oyó en la fragua de Pan Meleator el ruido de los martillos golpeando el yunque, lo que constituyó el germen de su investigación al hipotetizar que la consonancia de esos sonidos, el hecho de que produzcan una sensación placentera y agradable al oído, venía determinada no por la fuerza ni el lugar del golpe sino por el peso del martillo, esto es, la existencia de una relación numérica entre una serie de sonidos y la naturaleza acústica que emitían.

Para el estudio de este vínculo entre sonido y longitud de una cuerda, Pitágoras se sirvió de un monocordio, i.e., instrumento consistente en una caja de resonancia sobre la que una cuerda se tensa en los dos extremos sobre los que se apoyan dos caballetes (Espinar Ojeda, 2011). Partiendo de una cuerda determinada con longitud x, observó que al acortar la cuerda por la mitad (x/2), el sonido producido se correspondía al de una octava más aguda con respecto a la cuerda dispuesta en su longitud original. Del mismo modo, si la cuerda se reducía a 2/3 de la cuerda inicial, el intervalo que se dibujaba entre el sonido resultante y el inicial era de quinta justa. Por otra parte, si la cuerda se reducía hasta tres cuartas partes de su longitud inicial (3x/4), la distancia entre los dos sonidos era de una cuarta justa. Dicho de otro modo, si tomamos como referencia que la cuerda inicial al vibrar produce un sonido correspondiente a la nota Do, al acortar la cuerda 2/3 resultaría en la nota Sol, y si hiciésemos el mismo procedimiento en un intervalo de 3/4, el sonido que escuchásemos sería el relativo a la nota Fa. A estos intervalos, Pitágoras los denominó diapasón, diapente y diatesarón, respectivamente y los utiliza para formar el resto de intervalos. Miyara (2005) afirma la existencia de un patrón armónico si se cumple la siguiente fórmula: n+1/n. En la tabla 1 se muestran las relaciones de frecuencias de las diversas consonancias con su nombre actual.

Tabla 1. Relaciones de frecuencia entre los sonidos de las diversas consonancias

Intervalo	Unísono	8^{va}	5^{ta}	4^{ta}	3^{ra} mayor	3^{ra} menor	6^{ta} mayor	6^{ta} menor
f_2/f_1	1	2	$^3/_2$	$^4/_3$	$^5/_4$	$^6/_5$	$^5/_3$	$^8/_5$

Gracias a esta contribución, no es casual que a Pitágoras se le considere el primer teórico de la música occidental, máxime teniendo en cuenta su desconocimiento de la teoría de los armónicos, que desarrollaremos en el apartado correspondiente a intervalos y escalas musicales.

1.1.2 Música de las Esferas

El carácter hermético de los pitagóricos al que hemos hecho alusión anteriormente, se traducía en la no revelación de sus enseñanzas a los no iniciados, de la misma manera que no registraron por escrito sus teorías y descubrimientos. Sin embargo, Aristóteles en De Caelo (Libro II.9 s.f.) explica, en alusión a ellos, que "algunos pensadores suponen que el movimiento de los cuerpos celestes debe producir un sonido, dado que en la Tierra el movimiento de cuerpos de mucho menor tamaño produce dicho efecto. Afirman, también, que cuando el sol, la luna y las estrellas, tan grandes y en tal cantidad, se mueven tan rápidamente ¿cómo podrían no producir un sonido inmensamente grande? A partir de este argumento y de la observación de que sus velocidades, medidas por sus distancias, guardan igual proporción que las consonancias musicales, aseveran que el sonido proveniente del movimiento circular de las estrellas corresponde a una armonía."

Pitágoras consideraba que, de la misma manera que un objeto produce un sonido por su vibración en el aire, las esferas de los planetas actuaban igualmente en contacto con el éter. Cada planeta produce un sonido equivalente al de una nota de la escala musical determinado por el radio de su órbita.

Ahora bien, la música poseía una duración permanente y eterna, cualidad por la que argumentaba la incapacidad de las personas para escuchar esta música en la percepción del sonido y el silencio por contraposición, al haber estado expuesto a ella desde el momento de nuestro nacimiento.

Esta teoría ha perdurado casi 2000 años hasta ser superada por la de Kepler, quien en su obra "Harmonices Mundi" (1619) validó la tesis heliocéntrica de los planetas y coincidía con Pitágoras en el hecho de que los planetas producían diferentes sonidos en función de su velocidad de giro, sonidos que afirmaba poder calcular conociendo la masa y la velocidad.

La influencia de esta teoría se puede apreciar en obras como La Creación de Haydn, Así habló Zaratustra de R. Strauss y La Consagración de la Primavera de Stravinski.

1.2 Quadrivium

Clerc González (2003) apunta que la cultura griega clasificó las Artes en dos grupos principales: apoteléctico, donde el autor es el único que interviene en la producción de la obra y a las que pertenecen manifestaciones como la Pintura, la Escultura y la Arquitectura. El grupo de las artes músicas, por el contrario, necesita de uno o varios ejecutantes para la compleción, e incluye disciplinas como la Música, la Danza y la Poesía.

Tal y como expone De Guzmán (1986), el corpus de las ciencias exactas ya estaba sistematizado y articulado gracias a los pitagóricos en el sIV a.c, y lo componían los cuatro mathemata: aritmética, geometría, astronomía y música. Éstos constituían, por tanto, el saber por antonomasia. Como ya hemos visto, la Escuela Pitagórica consideraba la Música como una disciplina estrictamente matemática por el manejo de proporciones, razones y números, lo que llevó a considerarla como la ciencia del sonido y la armonía, rechazando toda noción relativa a la expresión musical.

Siglos más tarde y notablemente influenciado por la cultura de la antigüedad clásica, se articula el concepto de las siete Artes Liberales en la tradición medieval conformado por la conjunción del "Trivium", que consta de la Gramática , la Lógica y la Retórica, conformando la triple vía conducente a la elocuencia, cuya analogía contemporánea serían las Humanidades ; el "Quadrivium", en cambio, está compuesto de las mismas disciplinas que en la época pitagórica: Aritmética -estudio de los números en reposo; Música números en movimiento; Geometría -magnitudes en reposo; y Astronomía -magnitudes en movimiento, y conforma lo que en la actualidad denominaríamos por aproximación Ciencias Exactas. Peralta (2003).

El Trivium se estudiaba con anterioridad al Quadrivium porque confería al estudiante una autonomía intelectual necesaria para afrontar el segundo grupo, Una vez finalizado el aprendizaje combinado de todas las artes liberales, la persona alcanzaba el grado conducente a la reflexión filosófica, el más alto honor en el escalafón intelectual al que una persona podía aspirar.

Al igual que la consideración mística que del número, y por tanto, de la música hicieron los pitagóricos, en la tradición alquímica el "Trivium" está compuesto por mercurio azufre y sal, de acuerdo a la Paracelso. El “Quadrivium”, en cambio, lo conforma el conjunto compuesto por los cuatro elementos fundamentales de la Naturaleza: agua, fuego, tierra y aire…

1.3 Sonido y afinación

Afirma Peralta (2003) que el sonido puede definirse, desde el punto de vista de la Física, como la percepción acústica producida por la vibración de un objeto elástico en el aire. Lo que diferencia la música del ruido es la existencia de una periodicidad o patrón temporal en las ondas sonoras. Otra característica del sonido es, tal y como hemos señalado en el apartado correspondiente a la investigación pitagórica con el monocordio, el hecho de que la altura del sonido al vibrar una cuerda es inversamente proporcional a su longitud y a su tensión, por lo que al acortar la longitud, el número de oscilaciones será mayor. La unidad de medida adoptada para el cálculo de frecuencia de la vibración de una cuerda es el Hertzio, equivalente a una oscilación por segundo.

Si tomamos como referencia que una nota tiene una frecuencia f, a la misma nota una octava superior le corresponderá una frecuencia 2f. Si multiplicamos o dividimos entre dos, sabremos la sucesión de las diferentes octavas en la escala.

Parrondo (2005) sostiene que las matemáticas nos ayudan a la comprensión de la teoría de la consonancia formulada por Plomp y Levelt, i.e., lo agradable que resultan los sonidos al oído, fundamentada en la tesis de que si las frecuencias de dos tonos puros son próximas, la sensación que produce en el oído es desagradable. Con algunas suposiciones adicionales, puede calcularse el grado de disonancia o de “desagrado” entre dos sonidos producidos por un piano o una guitarra, para lo cual se debe sumar la disonancia de cada pareja de tonos puros.

Beer (2005) señala que si una cuerda cuya longitud define una frecuencia de 220 Hz vibraciones, el sonido que se genera contiene elementos de las frecuencias 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, 1100 Hz. El oyente percibe fundamentalmente la nota fundamental y los armónicos son los que definen el carácter de un instrumento. Esta distribución de la energía sonora a través del espectro de frecuencias es, junto con la envolvente global de onda descrita por Helmholtz y la variable de amplitud espectral en el tiempo que señala, una de las razones por la que un violín y una flauta no emiten un sonido similar al tocar la misma nota.

En lo referente a la afinación instrumental, se requiere la fijación de una frecuencia determinada para cada nota, lo que la Organización Internacional de Estandarización aprobó en 1953 al establecer para la nota La una frecuencia equivalente a 440 Hercios. El instrumento a través del que se producía esa vibración específica era el diapasón, que estaba compuesto por una varilla metálica a modo de U fija en su punto intermedio, si bien en la actualidad es más habitual su uso en soporte digital.

Tal y como Aristóteles consideraba la música como la ciencia de toda proporción y toda relación como tal, el oído humano percibe al escuchar dos sonidos simultáneos la proporcionalidad de sus frecuencias, no la diferencia, por lo que se colige que la división de la escala en notas musicales no reside en una razón aritmética sino logarítmica. Este punto es primordial para el entendimiento de los diferentes sistemas de afinación que vamos a estudiar.

La afinación pitagórica se centraba en el descubrimiento de los intervalos básicos armónicos de octava, quinta y cuarta, a partir de los cuales podíamos calcular numéricamente cualquier intervalo de la escala diatónica. Sumando octavas produce sonidos equivalentes pero iguales; sumando quintas si genera sonidos nuevos, pero la segunda quinta crea un intervalo mayor que la octava. Por lo tanto, si sumamos quintas (↑3:2) y restamos las octavas correspondientes (↓2:1) podemos calcular todos los intervalos en el ámbito de una octava, tal y como se muestra a continuación:

1) Conociendo los intervalos que están perfectamente afinados, calculamos el resto de notas de la escala diatónica sumando quintas justas (↑3:2) y restando octavas justas (↓2:1)

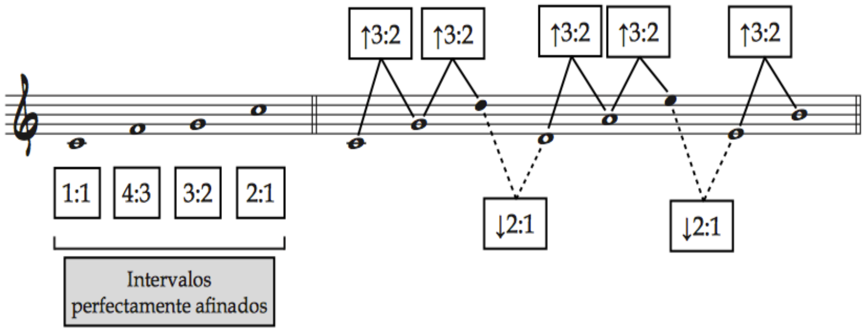


Figura 1. Intervalos de escala diatónica.

2) Hecho esto, calculamos el resto de notas de la escala diatónica sumando quintas justas (↑3:2) y restando cuartas justas (↓4:3):

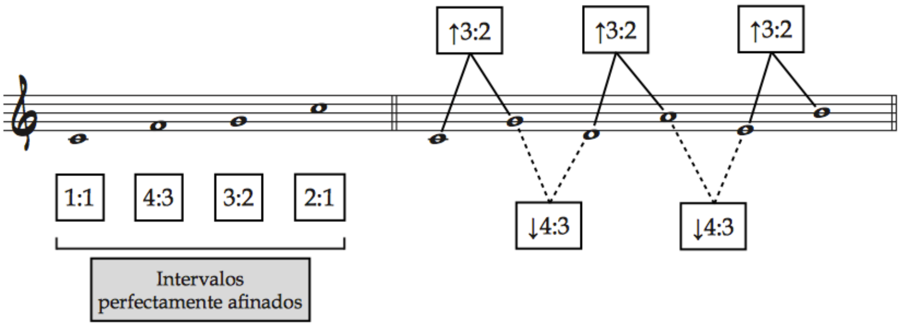


Figura 2. Cálculo de notas.

3) El resultado es la escala de Do M:

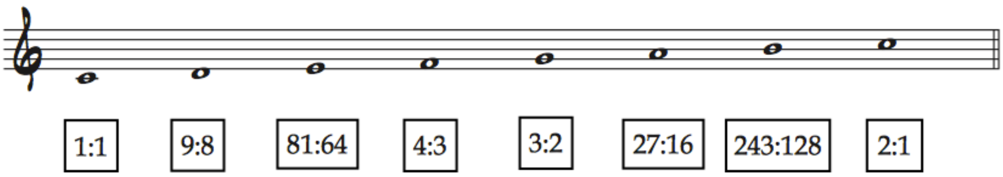


Figura 3. Escala de Do M.

4) Ahora, restamos los intervalos consecutivos para saber qué distancia separa a cada nota:

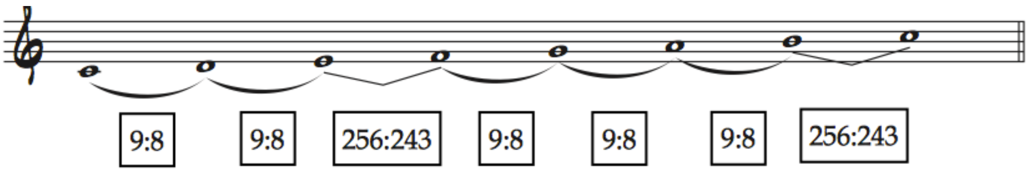


Figura 4. Distancia entre las notas.

La afinación pitagórica se centra en afinar perfectamente los intervalos de octava, quinta y cuarta a costa de desafinar las terceras. La tercera mayor (ej. do–mi) sigue la proporción 81:64 mientras que la tercera menor (ej. la–do) sigue la proporción 32:27, relaciones complejas que las hacen sonar desafinadas respecto a los intervalos generados por la naturaleza.

Los intervalos básicos de octava y quinta son inconmensurables entre sí, i.e., por muchas intervalos de quinta que sumemos no calcularemos exactamente una octava. Las doce quintas justas que son necesarias para recorrer el círculo completo no igualan a siete octavas, sino que las sobrepasan. Esta diferencia, conocida como comma pitagórica, provoca que el circulo de quintas no se cierre, formando así una espiral indefinida.

La nota con que iniciamos el ciclo de quintas dependía del músico por lo que, al no estar fijada, dificultaba la practica musical de dos músicos ya que la elección de las notas iniciales distintas provocaba una afinación distinta...

Escogeremos, por ejemplo, la nota do como inicio del ciclo de quintas. Los sonidos llamados enarmónicos no coinciden nunca pero esto no pareció ser un hecho problemático en la música griega hasta que se empezó a aumentar el número de alteraciones en las obras de finales de la Edad Media. Si se desea cerrar la espiral para formar un circulo, es preciso que una de las quintas no tenga la proporción 3:2 sino que sea una comma pitagórica menor. Tal quinta era conocida como quinta del lobo. Solía situarse entre las notas sol# y mi y era musicalmente impracticable.

Antes del año 1000, prácticamente toda composición musical era monódica. Por aquel entonces la principal motivación de los teóricos era la de estudiar las relaciones entre notas en un contexto melódico. Cuando en el siglo XI surgió la polifonía (varias notas sonando simultáneamente), se cantaban solo los intervalos de octava, quinta y cuarta, ya que eran los únicos que estaban perfectamente afinados (resultando agradables al oído) mientras que las terceras eran consideradas disonancias que debían evitarse.

Los avances en la teoría y en la notación musical durante los siglos XI, XII y XIII permitieron que los músicos pusieran por escrito la polifonía y desarrollaran progresivamente variedades más elaboradas de composición, como lo fueron el organum, el conductus y el motete, que dieron pie a los conceptos de: dirección, tensión y resolución, rasgos característicos de la música occidental.

La música polifónica exige que una nota pueda cambiar su significado tonal en cualquier momento, pasando de ser tercera de un acorde a quinta o séptima de los acordes sucesivos. Sin embargo, ningún sistema de afinación permite que la misma nota desempeñe todas estas funciones sin variar su altura. Por lo tanto, si queremos que en todo momento los intervalos estén afinados con respecto a la serie armónica, las distintas notas de la escala tienen que poder variarse en altura. Esto era posible con instrumentos sin trastes como el violín pero imposible con instrumentos de notas fijas, como el clave.

La afinación temperada consiste en "templar", "suavizar" las consonancias de manera equilibrada con la finalidad de hacer practicable una escala. A pesar de existieron diferentes variaciones, el más conocido es el temperamento igual de doce notas, donde la octava (único intervalo perfectamente afinado) se divide en doce partes iguales, cada una de ellas correspondientes a un semitono temperado. En el temperamento igual de doce notas, todos los semitonos son iguales, por lo que nos encontramos con notas distintas que representan el mismo sonido (ej. re#=mib). Éstas son conocidas como notas enarmónicas y como dichas notas representan el mismo sonido, el que lo escribamos de una manera u otra dependerá del contexto. La practicidad del sistema temperado, donde el mismo sonido puede ser representado con distintos nombres favoreció su aceptación. Por lo tanto, nuestro sistema musical funciona sólo con doce sonidos o bien, diecisiete notas, tal como se muestra a continuación:

Aunque la guitarra y el piano utilizan este temperamento, ninguno de ellos lo hace de una manera pura ya que los armónicos que generan cada una de las notas afinadas en dichos instrumentos nunca pueden estar afinados según este sistema. Es decir, se limitan a tener temperadas las frecuencias fundamentales, dejando desafinados los armónicos superiores.

Los afinadores electrónicos dividen la octava en 1200 partes, llamadas cents. Esto significa que con el temperamento igual, cada semitono corresponde a 100 cents. Nos referiremos a afinación cuando el objetivo del sistema sea conseguir consonancias puras, como lo es la afinación pitagórica con las quintas y octavas. Por otro lado, nos referiremos a temperamentos cuando exista un "ajuste" de consonancias de manera que el sistema adquiera algunas ventajas, como lo es la modulación a otras escalas.

La escala pitagórica se centraba en la perfecta afinación de cuartas, quintas y octavas. El hecho de tener bien afinados tan solo tres intervalos favorecía la modulación a otras escalas pero hacía imposible el uso de las terceras como parte de una estructura armónica, ya que se encontraban desafinadas. Por otro lado, la entonación justa mejora notablemente la afinación de los intervalos en el seno de una escala y favorece la aparición de triadas en la música del Renacimiento. Sin embargo, el hecho de tener perfectamente afinados los intervalos de tercera, cuarta, quinta y octava, dificultaba enormemente la modulación a tonalidades lejanas.

Estos y otros sistemas trataron de afinar sus intervalos acorde con la naturaleza del sonido, pero este hecho impedía la ejecución de música cada vez más compleja. Finalmente, la naturaleza y la música tuvieron que seguir caminos distintos en beneficio de la creación musical, adoptando el sistema que hoy sigue vigente, el temperamento igual de doce notas.

1.4 Intervalos y escalas

Un intervalo entre dos notas es la distancia entre las mismas calculada al contar el número de las que las separan, ambas incluidas; así, la distancia mínima de entonación en el sistema occidental tradicional es un semitono (medio tono), que en la escala diatónica mayor de Do se establece entre las notas Mi–Fa y Si–Do; siendo la distancia entre dos notas consecutivas cualesquiera de las restantes de un tono. En una octava hay por tanto, en cinco ocasiones, la distancia de un tono y, en dos, la de un semitono y constará de doce semitonos como máximo.

El intervalo acústico entre dos notas consecutivas es una segunda (segunda mayor si es un tono y segunda menor si es un semitono); una tercera es el intervalo acústico entre cinco tres (consecutivas), etc.

Cada intervalo de un tono entre dos notas inmediatas tiene una entonación intermedia que divide al tono en dos semitonos, originando las alteraciones, que son: sostenido (#) y bemol (b), las cuales significan que a una nota le corresponde a un semitono más alto que la misma, o más bajo, respectivamente. Sírvase como ejemplo que entre Do y Re están Do # y Re b Las notas están agrupadas en escalas, en caso de que se corresponden a la posición natural de los siete grados de una tonalidad se denominan diatónicas, y si se corresponde con las posibles posiciones alteradas de las mismas, cromáticas.

En la Antigua Grecia el grupo intervalito básico era el tetracordio, un grupo de cuatro notas entre las que mediaba una distancia de cuarta justa, y donde las notas extremas se consideraban fijas y las interiores, móviles. La Armónica de Aristógeno, el tratado musical más antiguo de la historia, clasifica los tetracordios en tres clases: enarmónico, cromático y diatónico, donde la notación de las dos notas internas es sólo aproximada y cuyo criterio para cálculo de los intervalos es el auditivo frente al matemático, y la medición se basa en un sistema de fracciones donde el tono entero se divide en doce partes iguales.

Figura 5: Clases de tetracordios.

La combinación de dos tetracordios podía realizarse de dos maneras diferentes. Si la última nota de uno era asimismo la primera nota del otro, se decía que los tetracordios eran conjuntos. En caso de que existiera un tono entero entre ambos, los tetracordios eran disjuntos. Finalmente se desarrolló el sistema perfecto mayor, compuesto por una escala de dos octavas al disponerse tres tetracordios conjuntos y disjuntos del modo que figura en el siguiente ejemplo:

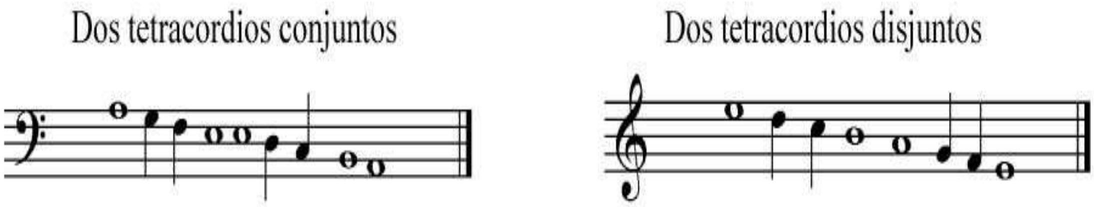


Figura 6. Ejemplos de tetracordios.

El sistema perfecto mayor era, una estructura teórica a la cual se había llegado por agregado de un tetracordio cordial como conjunto a cada extremo de esa octava.

En otro orden de cosas, los modos musicales que señalamos a continuación tenían la propiedad de ser distintos entre sí, y cada uno de ellos ejerce una influencia diferente sobre la afectividad humana. Algunos de ellos vuelven serios a los hombres, otros debilitan la mente, otros producen un estado de ánimo moderado y estable. Esta es la relación de escalas según Ptolomeo:

Figura 7. Escalas de Ptlomeo.

La Escala Pentatónica es una de las más antiguas con un gran influencia en países de oriente como China y Japón, así como regiones africanas y americanas, Seguí (1985). Se compone de cinco grados en los que no existe entre ellos ningún semitono de distancia. Puede también formarse a partir de cualquier sonido del modo fundamental, dando lugar a cuatro escalas pentatónicas adicionales.

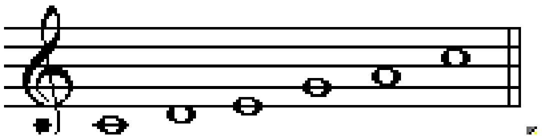


Figura 8. Escala pentatónica

La Escala Diatónica se compone de doce sonidos resultantes de aplicar los logaritmos pitagóricos limitados a la funcionalidad apreciativa del oyente y constituye la más utilizada en todo el mundo, sobre todo en occidente. Es importante advertir el defecto de esta escala en su aplicación matemática puesto que si aplicamos las fórmulas de la división de frecuencias de forma estricta, descubriremos un pequeño desfase en la consecución de octavas. Por conveniencia práctica se despreció este detalle que resultaba irrelevante y acústicamente inapreciable para el oído humano, hasta que en el siglo XV el desarrollo de instrumentos más sofisticados facilitó a los compositores una exploración armónica más extensa en el siglo XV. Bach ya lo advirtió en sus composiciones para el clavicordio, precursor de instrumentos armónicos como el piano. El problema, aunque resuelto en el plano auditivo, sigue siendo una pequeña pesadilla para los afinadores de pianos. De ahí que ésta actividad siga suponiendo una dedicación profesional.

La escala Natural delimita la escala anterior a siete sonidos. Proviene de Grecia, donde se usaban conjuntos de 4 sonidos (tetracordios) que tenían una estructura de distancias concretas. Sumando 2 de estos conjuntos se lograban 8 sonidos, coincidiendo el último con el primero. De este modo se lograban 7 sonidos. Dependiendo de la correlación y uso de estos sonidos se configuran dos modos, el mayor y el menor. Igualmente hoy es de uso común en la música moderna y de conocimiento imprescindible para la formación de los músicos e instrumentistas.

La escala natural se forma partiendo de una nota fundamental y creando una quinta (3/2) a partir de ella; en un segundo paso se forma una quinta de la quinta anterior y así sucesivamente vamos rellenando la octava con las notas que vamos obteniendo hasta llegar a 12 notas porque si añadimos una más, la nota que obtenemos es prácticamente la octava o la de partida si dividimos por 2.

1.5 Razón áurea y serie Fibonacci

La razón áurea es conocida con diversos nombres como número de oro, número dorado, sección áurea, proporción áurea o divina proporción. Podríamos definirla según Shah (2010) como un número irracional que establece una relación entre dos segmentos pertenecientes a una misma recta de la manera siguiente: la suma de los segmentos es al segmento mayor lo que el segmento mayor es al pequeño.

Podemos representarlo de la siguiente manera:

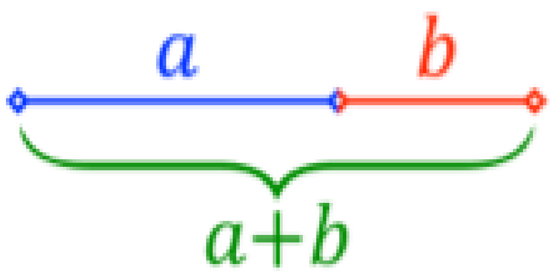


Figura 9. Representación de la sección áurea.

El cálculo de su valor se realiza de la siguiente manera:

Dos números *a* y *b* están en proporción áurea si se cumple:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Si φ es igual a $\frac{a}{b}$ entonces la ecuación queda:

$$1 + \varphi^{-1} = \varphi$$

Multiplicando ambos miembros por φ, obtenemos:

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$

Igualamos a cero:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

La solución positiva de la ecuación de segundo grado es:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989\ldots$$

que es el valor del número áureo, equivalente a la relación $\frac{a}{b}$.

Figura 10. Cálculo de la sección áurea.

Como se muestra en la figura 10, la sección áurea tiene un valor de 1,6180339887… y se representa con la letra phi.

Esta proporción ha sido considerada a lo largo de la Historia como paradigma de lo bello, lo estético, armónico, y la existencia de infinidad de ejemplos donde se encuentra ha provocado que muchos la consideren el “número divino”.

Así, en la Naturaleza, observamos esta sección en las curvas de una concha de un caracol, el número de abejas macho y hembra en un panal, la disposición del pétalo de las flores como la margarita o el girasol, entre el grosor de las ramas principales y el tronco o la distancia entre las espirales de una piña.

Desde el punto de vista arquitectónico podemos encontrar esta proporción en la relación en la Pirámide de Keops, el Partenón de Atenas, la gran muralla chinas, la catedral londinense de San Pablo o la torre Eiffel.

En el mundo de la pintura podemos admirar este número diferentes obras de Leonardo da Vinci como la Santa Cena y el hombre de Vitrubio, así como en la Creación de Miguel Ángel y las Meninas de Velázquez.

El hecho de que el fabricante Stradivarius utilizaba esta proporción en las distancias entre los diferentes elementos de los violines también posibilita que veamos esta proporción en la Música, como también podemos apreciarla en la estructura formal de la quinta sinfonía de Beethoven y ciertas sonatas de Mozart.

La anatomía humana tampoco se escapa a la aparición de esta relación, existente entre la altura de las personas y la de su ombligo, la distancia del hombro a los dedos y del codo a los dedos. Tanto es así que existe una relación directamente proporcional entre el número de proporciones áureas de una persona y la percepción de sus rasgos como armónicos y proporcionados.

El matemático italiano Leonardo de Pisa ideó en el s.XIII una sucesión infinita de números dispuesta de manera que cada uno de ellos es resultante de la suma de los dos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34… Se conoce como serie de Fibonacci, por su pseudónimo, y originalmente se concibió como solución al siguiente problema: “Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también”.

Tabla 2. Solución del problema de Fibonacci

Número de Mes	Explicación de la genealogía	Parejas de conejos totales
Comienzo del mes 1	Nace una pareja de conejos (pareja A).	1 pareja en total.
Fin del mes 1	La pareja A tiene un mes de edad. Se cruza la pareja A.	1+0=1 pareja en total.
Fin del mes 2	La pareja A da a luz a la pareja B. Se vuelve a cruzar la pareja A.	1+1=2 parejas en total.
Fin del mes 3	La pareja A da a luz a la pareja C. La pareja B cumple 1 mes. Se cruzan las parejas A y B.	2+1=3 parejas en total.
Fin del mes 4	Las parejas A y B dan a luz a D y E. La pareja C cumple 1 mes. Se cruzan las parejas A, B y C.	3+2=5 parejas en total.
Fin del mes 5	A, B y C dan a luz a F, G y H. D y E cumplen un mes. Se cruzan A, B, C, D y E.	5+3=8 parejas en total.
Fin del mes 6	A, B, C, D y E dan a luz a I, J, K, L y M. F, G y H cumplen un mes. Se cruzan A, B, C, D, E, F, G y H.	8+5=13 parejas en total.
...	...	...

Ahora bien, ¿existe algún nexo de unión entre la razón áurea y la serie Fibonacci? Pues bien, si dividimos cada número de la serie por su anterior, observaremos que: 1/1=1; 2/1=2; 3/2= 1,5; 5/3=1,66; 8/5=1,6; 13/8=1,625; 21/13= 1,615; 34/21=1,619I.e., el límite de esta sucesión tiende al valor de la sección áurea.

1.6 Representación matemática en la música

Los diagramas utilizados en música son similares a los gráficos matemáticos de funciones discretas en coordenadas cartesianas, donde la variable correspondiente al tiempo queda representada en el eje de abscisas, y la de la altura de las notas, en el eje de ordenadas. Las notas, por tanto, constituyen las coordenadas.

Figura 11. Analogía entre pentagrama y eje de coordenadas.

Al comienzo de una obra musical Shah (2010) expone que primero se establece la clave y posteriormente la armadura, que se representa a través de una fracción en el pentagrama musical. Ejemplos de compases habituales son los siguientes: 2/4, 3/4, 4/4 y 6/8. La unidad de medida es el denominador de la fracción, denotando el pulso. El numerador, por otra parte, indica el número de unidades del denominador de la fracción Los grupos de pulsos débiles y fuertes en música se denomina medidas. la medida también se pone en el numerador del compás, siendo habitual el empleo de 2, 3, 4, 6, 9, 12 denotando el número de pulsos.

Más allá de notación y lenguaje abstracto, conceptos matemáticas como simetría, periodicidad, proporción o continuidad forman una obra musical. Los números también poseen un carácter muy práctico al determinar la longitud de un intervalo, ritmo, duración y tiempo.

Estas dos áreas han sido estudiadas de manera tan simultánea que palabras musicales se han aplicado a las matemáticas, como por ejemplo en la palabra armónicos, ampliamente estudiada en las matemáticas y sin embargo es un concepto musical en origen.

Las transformaciones geométricas que en matemáticas conservan la forma de una figura, en música se corresponden con transformaciones que conservan los intervalos (en los movimientos) o la proporción entre ellos (en caso de las homotecias).

Figura 12. Transformaciones.

En casi cualquier composición se pueden encontrar ejemplos de este tipo de transformaciones sin que implique la consciencia del compositor sea consciente de estar realizando una “transformación geométrica”, aunque de manera intuitiva sepa que la conservación de los intervalos o sus proporciones familiariza al oyente con el motivo musical sin que este tenga que ser repetido exactamente. En el caso de las simetrías, existen cuatro variantes: en primer lugar, la simetría en la altura de la melodía por medio de un eje vertical; segundo, la Simetría vertical de la altura de un acorde; tercero, La Simetría del ritmo en el tiempo (A tempo - accel - ritard - a tempo) y por último, la simetría de la intensidad del sonido (Piano - Forte - Piano).

De la misma manera, también existen rotaciones y una inversión. El primer ejemplo consta de un giro o rotación respecto a SI, manteniéndose los intervalos en orden inversa: RE - MIb - RE • SOL - FA# - SOL. En el segundo ejemplo se realiza una reflexión (simetría respecto a la nota SOL, en clave de FA) mantienen los intervalos en el mismo orden pero con distinto sentido al ser una reflexión. Ahora observemos reflexión desplazada y dos tipos de reflexión con homotecia:

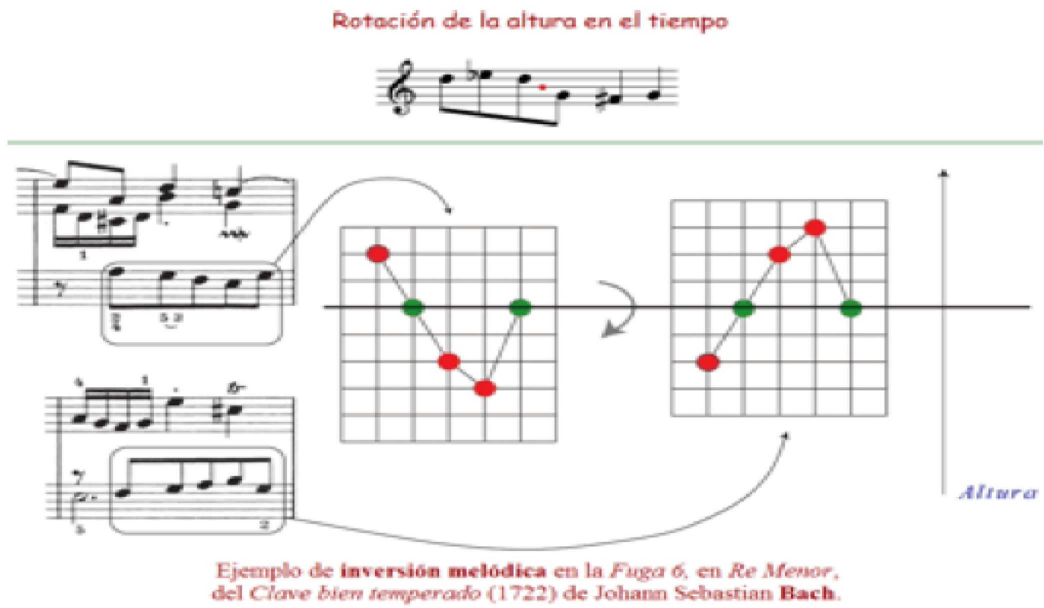
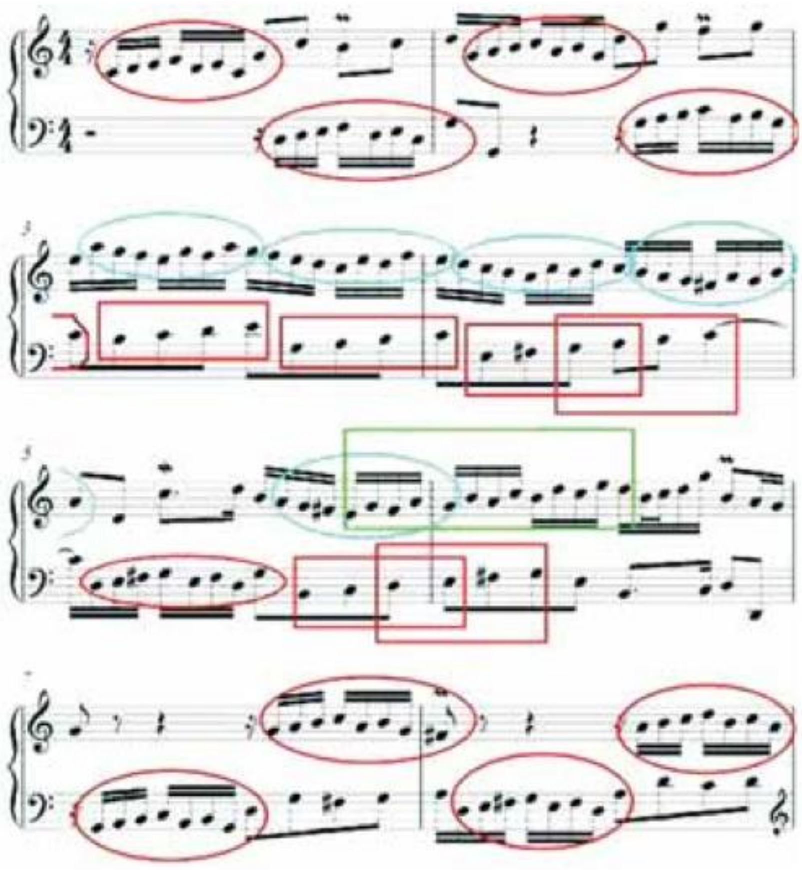


Figura 13. Rotación y reflexión.

Pero si existe un compositor en el que este fenómeno se dé en todo su esplendor, ese es J.S. Bach. En “El Arte de la Fuga”, obra didáctica incompleta compuesta de catorce fugas y cuatro cánones, probablemente compuesta entre 1738 y 1742 donde se



muestran ejemplos muy relevantes de giros, transformaciones y reflexiones:

Figura 14. Fragmento de la Invención I a dos voces (BWV 772).

Otro autor que explora también con este tipo de modificaciones y reflexiones es Mozart, quien en compuso un divertimento en Sol M para dos violines, “El dueto del espejo”, pensada para que la interpretación conjunta pero la lectura de la partitura se realiza en orden inverso:

Figura 15. El "dueto del espejo".

1.7 Matemáticas en la composición

Uno de los aspectos que también han sido explorados en el estudio de la relación entre Música y Matemáticas ha sido la creación musical desde el punto de vista matemático. A continuación, veremos cómo han abordado este ámbito compositivo figuras como Mozart, Xenakis o Schönberg.

1.7.1 Mozart y su Juego de dados

Por todos es conocida la espectacular curiosidad de este austríaco que le conducía a la exploración de prácticamente todos los elementos que conformaban la música y la búsqueda constante de retos con los que incentivar su talento. Uno de los más conocidos es la composición de la obra publicada por primera vez en la Edición de Hummel, Berlín-Ámsterdam, 1793 y que lleva por título: “Juego de dados musical para escribir valses con la ayuda de dos dados, sin ser músico ni saber nada de composición” (K 294), una experimentación compositiva basada en la combinatoria probabilística en la que con un par de dados como y completar una plantilla, acerca la composición de un minueto a cualquier persona con independencia de su formación musical.

Previamente al comienzo del juego, partimos de la composición de una plantilla con 176 compases en tiempo ternario como punto de partida, a los cuales se les asigna un número determinado. En segundo lugar, existen dos tablas (correspondientes a cada parte del minueto) en las que el número de las columnas reflejan la posición de los compases: del uno al ocho, y del nueve al dieciséis, respectivamente). Las filas, por otra parte, indican el resultado de la tirada conjunta de dados (del dos al doce).

La dinámica del juego consiste en la incorporación progresiva de las notas musicales a los 16 compases que formarán el vals. Empecemos por el primer compás: tiramos dos dados y sumamos los números que obtenemos, que siempre tendrán un valor entre 2 y 12. Después, buscamos en las Tablas de Compases de Mozart el número correspondiente, mirando el número de la columna del compás en el que estamos -en nuestro caso el compás primero-, y localizando el número de fila de la tabla que se corresponde con el valor de la suma que nos ha salido de los dos dados. En las casillas habremos encontrado uno de los 176 compases que Mozart compuso, lo buscamos en las Tablas de Música y lo copiamos en nuestro pentagrama que acogerá la creación musical que estamos haciendo. Procederemos de manera análoga con el resto de compases hasta completar la tirada dieciséis.

Cada minueto de Mozart está formado de dos partes. La primera consiste en 8 compases con repetición tras los que se continúa con la segunda, compuesta de otros 8 siguientes también con repetición. Esta peculiaridad formal está tenida en cuenta en las tablas puesto que los compases localizados en la columna octava (por ejemplo 30, 81, 24) de cada tabla contienen barra de repetición. Paralelamente este último compás es idéntico, por lo que carece de sentido tirar los dados en los últimos compases de cada parte, resultando en una cierta incongruencia probabilística.

El motivo por el que esta experimentación en el campo del azar tiene sentido musical se debe al hecho de que los compases alineados por columnas están compuestos sobre una misma base armónica, las cuales a su vez conforman una frase armónica coherente, tal y como apunta Mayara (2009).

Como dato anecdótico, mencionar que el total de compases posibles es equivalente a 11 elevado a la potencia 16, equivalente a unos 45.000 billones aproximadamente, por lo que, por razones obvias únicamente se ha podido interpretar a una mínima fracción de ellos.

1.7.2 Schoenberg

El serialismo es una corriente aparecida a principios del siglo XX caracterizada por el empleo de una serie o grupos de notas en un orden determinado sin que puedan repetirse a lo largo de una composición musical, como señala Ibaibarriaga (2006). Esta técnica surge como reacción a la jerarquía que conformaba la tonalidad con respecto a la disposición de las notas en una escala, la cual venía siendo adoptada como método de composición hegemónico de la música occidental desde el Renacimiento.

En este paradigma se inscribe Arthur Schoenberg, un compositor austríaco quien inventó el dodecafonismo o música de doce tonos, en donde las doce notas pertenecientes a la escala cromática tienen igual importancia.

Este método compositivo está fundamentado en cuatro axiomas, como indica Romero (2004):

1. La serie consta de las doce notas de la escala cromática.
2. Ninguna nota puede aparecer más de una vez en la serie.
3. La serie puede ser expuesta en cualquiera de sus aspectos lineales: aspecto básico,
   inversión, retrogradación e inversión retrogradada.
4. La serie puede utilizarse en cualquiera de los cuatro aspectos desde cualquier nota de la escala.

Los dos primeros postulados implican que cada una de las doce notas aparece una única vez en la serie, con lo que constituye una combinación de la escala cromática:

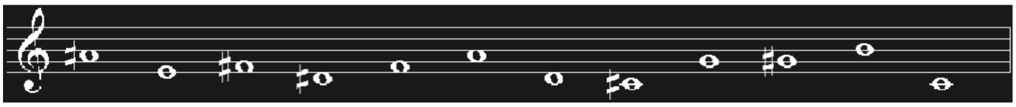


Figura 16.Schoenberg, “Variaciones para Orquesta op. 31” (1928)

El tercer punto establece que, para evitar la monotonía de una obra en caso de que la serie de partida únicamente pudiera utilizarse sin alteraciones, el autor pueda aumentar sus recursos compositivos a través de la retrogradación y la inversión.

La retrogradación, cuya raíz etimológica significa andar hacia atrás, consiste en la lectura inversa de la serie dada; de manera que la primera nota de la serie original será la última de la serie retrogradada y recíprocamente, la primera de ésta corresponde a la última de aquélla.

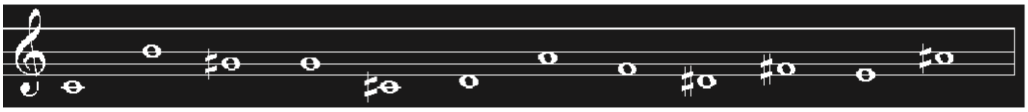


Figura 17. La retrogradación de la serie anterior.

La inversión consiste en "subir lo que baje y bajar lo que suba la misma distancia”, construyendo la serie de forma que dos notas consecutivas de ésta disten tantos semitonos como las correspondientes de la serie a invertir, pero en sentido contrario, por lo que una quinta justa ascendente puede transformarse en una quinta justa descendente.

El cuarto punto hace referencia al transporte, lo que supone significa subir o bajar una secuencia de sonidos sin modificar los intervalos entre ellos, cambiando sólo la nota de comienzo–. Por ejemplo, para transportar dos semitonos la secuencia Re-La#-Sol,

sumamos 2 a la serie de números correspondiente, 2-10-7. Se obtiene: 2+2 = 4 (nota Mi); 10 + 2 = 12 (0 mod 12 (nota Do); 7+2 = 9 (nota La).
En otro orden de cosas, aunque la serie determina la sucesión de notas utilizada en una pieza, no señala ni sus registros y sus duraciones. Tampoco señala la disposición de la textura o la forma de la música. Por ejemplo, en la primera obra en la que utilizó completamente el sistema dodecafónico, la Suite para piano, opus 25 (1924), Schoenberg utilizó solamente ocho series distintas.

1.7.3 Iannis Xenakis

Iannis Xenakis (1922-2001) fue un compositor, arquitecto y matemático francés de origen griego, quien aplicó teorías de probabilidad matemática al ámbito musical, concretado en la matematización del espacio sonoro, tal y como apunta Ibaibarriaga (2006).
Xenakis desarrolló los primeros años de su vida profesional como arquitecto en el estudio de Le Corbusier, y consiguió introducirse en el mundo de la composición musical gracias a la habilidad de su maestro Messiaen. Fue un precursor del estocastismo (cuyo significado etimológico quiere decir habilidad en conjeturar) en esta disciplina, al que describía por antítesis al principio de determinación. La música estocástica se caracteriza por masas de sonido, "nubes", "galaxias", donde el número de elementos es tan alto que el papel de un componente individual queda diluido en su relación con el todo, sin embargo, aunque posee ese carácter indeterminado en sus detalles, sin la música tiende sin embargo hacia una final definido.
Otro de los rasgos de la música de Xenakis es la preferencia por los grandes bloques de sonidos, si bien las ideas relativas a la composición en Xenakis se basan en principios diferentes a los del serialismo.
La composición más famosa de Xenakis es su primera pieza estocástica, Metástasis, compuesta para orquesta de 61 músicos en 1954. La obra se basa en el desplazamiento continuo de una línea recta, representándose musicalmente como un glisando continuo. La contracción y expansión del registro y la densidad a través del movimiento continuo son ilustraciones de las leyes estocásticas.
Del mismo modo que se interesaba por el estudio de las similitudes existentes entre la música y la arquitectura, a las que consideraba como realizaciones concretas de

cálculos matemáticos abstractos, las cuestiones acerca de la estructura musical. Sírvase como nexo de unión entre estas dos disciplinas la relación entre la obra citada en el párrafo anterior, Metástasis (1954) con el Pabellón Philips (1958) , donde puede apreciarse las líneas dispuestas de forma continua, fluyendo linealmente del edificio y por los glisandos convergentes y divergentes de la música.

Prosigue Ibaibarriaga (2006) explicando que el compositor, investigando la causalidad apropiada a los efectos sonoros en masa, comenzó a aplicar a la música teorías de probabilidad matemática, especialmente la "ley de los números largos" formulada en el siglo XVIII por el matemático suizo Jacques Bernoulli, la que establece que cuanto más aumente el número de ocasiones en que se produzca un hecho casual, como por ejemplo el lanzar una moneda al aire, más posibilidades hay de que el resultado se encamine hacia un fin determinado. La música compuesta bajo esta formulación la definió como música estocástica, i.e. música indeterminada en sus detalles pero que, sin embargo, se dirige hacia un final definido.

La nota individual es solamente una más dentro de una colección de notas que interactúan de forma compleja cada una de ellas con poco peso o importancia por sí misma. Sin embargo, la estructura general está cuidadosamente calculada para producir un resultado definitivo y predecible. Y aunque Xenakis utilice los cálculos matemáticos para ayudar a dar forma a estos hechos musicales probabilísticos y para determinar su distribución a lo largo de la composición, él mantiene que "la música tiene que dominar".

La matemática es solamente una herramienta y cuando traslada los cálculos a unas indicaciones musicales concretas, Xenakis los ajusta con propósitos puramente musicales. El proceso de construir gráficos basados en cálculos matemáticos traducidos a una notación musical puede verse en el libro Música Formalizada (Xenakis, 1963) en el que muestra su acercamiento con considerable detalle técnico.

La obra Metástasis comienza con dos ataques sobre clusters cromáticos, el primero en los instrumentos de cuerda más graves y segundo en los más agudos, tras los cuales ambos grupos instrumentales se dispersan rápidamente por medio de glisando, con algunos instrumentos que cesan de tocar, mientras que otros continúan.

El pasaje, prosigue Ibaibarriaga (2006) se ha concebido de acuerdo con un proceso generalizado de transformación textural: un cambio de la extensión del registro y de la densidad mediante movimientos sonoros continuos (glisandos), primero en una dirección limitada y luego en una más extensa.

Como es típico en la música de Xenakis, sin embargo, el proceso no está totalmente "determinado", ya que en él todas las partes no contribuyen a este modelo. De hecho, algunos modelos contradicen directamente el patrón general. El pasaje, por lo tanto, sólo "tiende" hacia su final definido y determinado.

Algunos de los modelos matemáticos empleados por Xenakis tanto en obras de naturaleza musical y arquitectónica son:

1. Distribución aleatoria de puntos en un plano. (Diamorphoses)
2. Ley de Maxwell-Boltzmann. (Pithoprakta)
3. Restricciones Mínimas. (Achorripsis)
4. Cadenas de Markov. (Analógicas)
5. Distribución de Gauss. (ST/IO, Atrés)

Análogamente, también se nutre de la teoría de juegos (Duelo, Estrategia), teoría de grupos (Nomos Alpha) y teoría de conjuntos y álgebra Booleana

1.8 La música como recurso en la enseñanza de las matemáticas

1.8.1 Principales Investigaciones

En los últimos años han aparecido una serie de investigaciones que no sólo han puesto manifiesto la correlación entre música y matemáticas sino la existencia de una serie de implicaciones didácticas que explican cómo afecta la primera a la segunda. A continuación enumeramos aquellas que por su relevancia y trascendencia merecen la pena reseñar:

En primer lugar, Rascher y Shaw (1999), llevaron a cabo una investigación consistente en la audición de la Sonata para dos pianos de Mozart K448 a una muestra de 36 adultos por espacio de diez minutos, tras los cuales comprobaron que su razonamiento espacio-temporal mejoraba considerablemente con respecto a otros dos grupos que habían escuchado música de relajación. El único inconveniente era que el efecto sólo duraba aproximadamente quince minutos. Posteriormente, el experimento se replicó en varias ocasiones, aunque los resultados no llegaron a ser concluyentes. Una de las razones por la que se ha convertido en una de las investigaciones más conocidas de los últimos años reside en que la prensa se hizo rápidamente eco de esta investigación y no tardó en dar la vuelta al mundo bajo el epígrafe de “El efecto Mozart”. La otra, sin duda es la aparición de una mercadotecnia pseudo-científica alrededor de este fenómeno con un amplio catálogo de materiales (principalmente libros y CD) que prometen el ansiado incremento del cociente intelectual en niños, a pesar de que hasta la fecha se ha realizado este experimento con este segmento de población e insistimos, los resultados son cuando menos dudosos.

Cheek y Smith, (1991) llevaron a cabo una investigación con objeto de estudiar la relación entre la instrucción musical y la rendimiento matemático en estudiantes de noveno grado. El estudio se realizó con 113 alumnos, de los cuales todos habían cursado Música en la escuela y 3 de ellos además habían recibido clases extraescolares en casa. Los resultados de los exámenes de Matemáticas no mostraron diferencias significativas por género ni entre los alumnos que habían recibido clases particulares de música. Sí, en cambio, habían puntuado significativamente mejor aquellos alumnos que habían recibido clases de Música durante dos o más años, y también los que habían aprendido a tocar el piano frente a los que habían elegido otro instrumento.

Existen tres conjeturas como explicación a estos resultados: por una parte, la combinación de clases de música en el colegio y particulares en casa alcanza un umbral máximo de exposición; por otra, los recursos económicos de las familias posibilitan el poder costearse las clases particulares; y por último, el aprendizaje del piano mejora el rendimiento matemático frente a otros instrumentos, lo que refrenda la investigación de Fisher y O’Malley.

Graziano, Peterson y Shaw (1999), por otra parte, analizaron el impacto de la música sobre el razonamiento matemático en una población de ciento treinta y seis personas con edades comprendidas entre los siete y los nueve años. Un grupo recibió una instrucción en la que se combinaba una formación matemática través de un videojuego con elementos espacio-temporales con una formación instrumental al recibir clases de piano; otro segundo grupo recibió la misma exposición al videojuego pero, en vez de combinarlo con expresión instrumental recibieron en cambio clases de lengua inglesa por ordenador; un tercer grupo no recibió formación alguna. Por último, se expuso el videojuego a tres grupos adicionales con carácter exclusivo por espacio uno, dos y tres meses respectivamente.

El grupo que recibió una formación conjunta de matemáticas y de clases de piano obtuvo puntuaciones más altas en razonamiento matemático-espacial que el grupo que combinó su formación con clases de inglés. Ambos grupos rindieron mejor que el grupo con ningún tipo de formación. En el caso de los grupos adicionales, se comprobó una relación directamente proporcional entre el tiempo de exposición al videojuego y la puntuación obtenida.

Similarmente, también existen investigaciones neurológicas que prueban el impacto de la música en la matemática. Así, Schmithorst y Holland (2004) estudiaron el efecto de la formación musical en los correlatos neuronales del procesamiento matemático. Tomaron una muestra de quince personas, de los cuales siete habían recibido formación musical desde la infancia y ocho estaban desprovistos de ella) mientras realizaban operaciones básicas (adición y substracción) mentales con fracciones. La herramienta de medición utilizada fue las imágenes por resonancia magnética. En las personas con estudios de música se observó un incremento en la activación del giro fusiforme izquierdo y la corteza prefrontal así como una reducción en la activación de áreas de asociación visual u el lóbulo parietal inferior izquierdo durante la realización del cálculo mental. Los resultados hipotetizan que la correlación existente entre instrucción musical y rendimiento matemático pueden asociarse con una mejora en el rendimiento de la memoria a corto plazo y también en la representación abstracta de las cantidades numéricas, y aconsejan la realización de esta investigación en una muestra mayor con niños con el objetivo de verificar la relación causal entre instrucción musical y las diferencias existentes en la arquitectura neuronal implicada en el procesamiento matemático.

1.8.2 Estudios relacionados con el marco teórico:

En lo referente al estudio pitagórico de la consonancia, el proyecto de innovación de Abellán (2008) propone al alumnado de quinto de primaria la construcción de un monocordio con la ayuda de una tabla de madera, unos clavos, una cuerda de guitarra y una goma elástica con el objetivo de alcanzar una mejor comprensión del concepto de fracciones. Desde nuestro punto de vista, se trata de un experimento óptimo para su utilización en el aula al permitir exploraciones que establezcan asociaciones entre una distancia decimal y la producción de un sonido determinado.

Tal y como recoge Fernández (2006), el satélite Transition Region and Coronal Explorer (TRACE) enviado al espacio, por la NASA, encontró en 2004 las primeras evidencias de música originada en un cuerpo celeste, tal como habían imaginado los pitagóricos primero y Kepler más tarde al descubrir que la atmósfera del Sol emite una música al estar llena de ultrasonidos en forma de ondas. Asimismo interpreta una partitura formada, según el satélite de la NASA, por ondas 300 veces más profundas que el sonido audible por el oído humano, con una frecuencia de 100 mili Hertz en periodos de 10 segundos teniendo en cuenta que el rango que puede percibir el ser humano se encuentra desde 16 Hz (sonidos infrasónicos) hasta 20 kHz (sonidos ultrasónicos o supersónicos). Llegado este punto es importante apuntar que, si bien las leyes físicas de Kepler constituyen un contenido de aprendizaje propio de cuarto curso de E.S.O., se puede presentar este descubrimiento en educación primaria acercando el concepto de los ultrasonidos a campos de la vida cotidiana como la medicina (ecografía o limpieza dental) o los animales (murciélagos)

El sistema educativo a partir de la L.O.G.S.E. recupera la música como asignatura integrante del plan de estudios de las enseñanzas primarias, lo cual tiene su origen en el Quadrivium, si bien como afirma Margarita Morais en Rodrigo (2013), la música no está articulada de manera progresiva y lógica en la escuela al contrario otras asignaturas, por lo que los alumnos deben acudir a Conservatorios o Escuelas de música para suplir esa carencia.

Vlashi y Cruz (2011) afirman que si todos los números que representan la frecuencia de los sonidos son racionales, i.e. puedan expresarse en forma de fracción, entonces podemos hablar de afinación. Por el contrario, si algún número es irracional en ese caso tenemos que hablar de temperamento. Como ejemplo de trabajo de la afinación pitagórica, proponen ejercicios de cálculo de intervalos de quinta y cuarta a partir de una nota dada. Así, si tenemos una nota llamada sol definida por una longitud 3/2, halla el intervalo correspondiente a su quinta ascendente Re.

El trabajo de la escala pentatónica se puede realizar a través de la expresión vocal según la metodología Kodaly, tal y como realiza Wagner (2010) durante el primer año de Primaria. Una vez bien interiorizada esta escala, puede introducirse las notas fa y si con el objetivo de trabajar la escala diatónica puesto que es la más utilizada en la música popular occidental.

Una manera de explotar la proporción áurea como recurso de creación musical está descrito en la lección séptima editada por The contemporary music centre (2009): Irish composers, donde se promueve la improvisación y la composición de una obra coral conjunta alrededor de la premisa de que el clímax de la misma se alcanza a los dos tercios de su duración. Del mismo modo Vlashi y Cruz (2011) ofrecen otra propuesta más sencilla para los alumnos consistente en la medición de las falanges primera, segunda y tercera del dedo medio (corazón) de la mano izquierda y calcular las razones entre ellas. Se puede proceder similarmente con las falanges del dedo índice de la mano izquierda.

La simetría musical puede abordarse a través de juegos de expresión corporal. Así, Quesada (2004) resalta la importancia de la expresión corporal y los múltiples beneficios que aporta para el desarrollo integral de la persona.

Una propuesta sobre el juego de dados compuesto por Mozart puede ser a través de la exploración de elementos que introducen variables aleatorias como los dados o unas monedas. Vlashi y Cruz (2011) proponen interpretar un fragmento del mismo para proceder a calcular y registrar su duración. Por último, deben estimar el número de veces que deben interpretarlo para que dure un intervalo de tiempo concreto (un día, una semana, un mes).

2. LA INTEGRACIÓN DE RECURSOS MATEMÁTICOS EN LA ASIGNATURA DE MÚSICA EN PRIMER CURSO DE PRIMARIA

2.1 Descripción

En el capítulo anterior hemos podido comprobar la interrelación entre la Música y la Matemática en el transcurso de la Historia desde Pitágoras hasta la actualidad. Así como en épocas como la helenística y la medieval la consideración de la Música se establecía a la par que la de las Matemáticas, desafortunadamente no han sido pocos los momentos en los que ha sido curricularmente relegada a un papel inferior, incluso testimonial, como así lo atestigua el marco legal en el que se especifica la relevancia de esta asignatura en España para el curso académico 2014-15, que aboca prácticamente a esta disciplina a su desaparición.

La lectura de los apartados anteriores ha evidenciado la existencia de un lenguaje común entre ambas disciplinas, y un transvase de aportaciones que realizan mutuamente, lo que, más allá del establecimiento de un corpus epistemológico, conlleva unas implicaciones educativas determinadas, las cuales pueden generalizarse en la necesidad de la enseñanza integrada de ambas disciplinas para una mejor adquisición y comprensión de las mismas.

Por otra parte, es necesario recordar que La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, establece que el Gobierno fija las enseñanzas mínimas referidas en la Ley Orgánica 8/1985, de 3 de junio, que regula el Derecho a la Educación. Una vez publicado el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre en el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Primaria, y que, según lo dispuesto en el artículo 47 de la Ley Orgánica de Reintegración y Amejoramiento del Régimen Foral de Navarra y el Real Decreto 1070/1990, de 31 de agosto, se transfiere las funciones y servicios del Estado en materia de Enseñanzas no Universitarias a la Comunidad Foral de Navarra, corresponde al Gobierno de la misma establecer el currículo para el ámbito territorial de su competencia a través del DECRETO FORAL 24/2007, de 19 de marzo.

Este Decreto describe el Lenguaje Musical, el que se refiere a la expresión de ideas y sentimientos mediante el conocimiento y la utilización de distintos códigos y técnicas artísticas. El primer bloque que se trabaja es el de la percepción referida como la audición musical, que se centra en el desarrollo de capacidades de discriminación auditiva y de audición comprensiva, durante los procesos de interpretación y creación musical así como en los de audición de piezas musicales grabadas o en vivo.

La expresión alude a la interpretación musical desarrollando habilidades técnicas y capacidades vinculadas con la interpretación vocal e instrumental y con la expresión corporal y la danza. A través de uno u otro lenguaje se estimula la invención y la creación de distintas producciones musicales.

El área artística contribuye al desarrollo de la competencia matemática al abordar conceptos y representaciones geométricas presentes en la arquitectura, en el diseño, en el mobiliario, en los objetos cotidianos, en el espacio natural, y en aquellas ocasiones en las que se necesitan referentes para organizar la obra artística en el espacio. Asimismo, cuando en música se trabajan el ritmo o las escalas, se está haciendo una aportación al desarrollo de la competencia matemática. Por su parte, las

Matemáticas contribuyen a la competencia en expresión cultural y artística desde la consideración del conocimiento matemático como contribución al desarrollo cultural de la humanidad. Así mismo, el reconocimiento de las relaciones y formas geométricas ayuda en el análisis de determinadas producciones artísticas.

El currículo organiza los contenidos de Música para primer ciclo de primaria en torno a los bloques de Escucha e Interpretación y creación musical; en lo referente al área de Matemáticas, se describen cuatro bloques en el siguiente orden: "Números y operaciones"; La medida: estimación y calculo de magnitudes; Geometría y Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

El material de aula propone una metodología que atiende al nivel de desarrollo físico y emocional puesto que se basa, fundamentalmente, en el principio pedagógico de aprender jugando, ya que en los primeros años de la enseñanza, el juego es la principal tarea de los niños. El objetivo, por tanto, es hacer que los niños se sumerjan en las actividades a través del entretenimiento; de este modo el aprendizaje se produce de una forma natural.

El método pretende involucrar a los niños de modo activo y, en la medida de lo posible, autónomo, por lo que los materiales de este método están preparados para conseguir un aprendizaje personalizado y desarrollar las habilidades necesarias para un adecuado progreso emocional y físico. En todos los grupos existen diversidad de estilos y niveles de aprendizaje.

Numerosos estudios prueban que las personas tienden a utilizar de manera más frecuente uno de los dos hemisferios del cerebro, el que controla el aspecto emocional o el que maneja la lógica. La metodología de Siente la música permite trabajar ambos hemisferios, con ejercicios que potencian, bien la capacidad de razonar (actividades de relacionar, secuenciaciones, memorizar canciones, producción vocal, etc.) o bien el terreno emocional (expresión corporal o vocal, improvisación, etc.).

A través del material se intenta fomentar y desarrollar el proceso de aprendizaje cumpliendo los siguientes objetivos:

- Promover, no sólo el desarrollo de las habilidades musicales, sino también otras destrezas necesarias en el desarrollo global del niño.

• Desarrollar la creatividad y la imaginación de los niños mientras aprenden Música.

• Integrar los problemas sociales y morales como parte de la experiencia de aprendizaje.

• Infundir confianza y hacer que los niños disfruten con las actividades musicales dentro de un ambiente libre y divertido, para proporcionarles las mayores oportunidades de éxito.

• Fomentar, desde nuestra materia, el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, a través del material multimedia que va en la carpeta del alumno y del soft ware para pizarras interactivas del profesor.

2.2 Procedimiento

Aprovechando nuestra labor docente como profesor de Música en un centro de educación primaria, vamos a proceder al análisis de los materiales de dicha materia para primer ciclo, y valorar en qué medida las actividades propuestas utilizan recursos matemáticos que faciliten y promueven estos aprendizajes musicales. Es necesario apuntar que la asignatura está organizada a razón de una sesión semanal de cincuenta minutos, la lengua vehicular es el inglés, motivo por el que los libros de texto que el Departamento de Música seleccionó están escritos en esa lengua. Concretamente la colección"Feel the Music" Martín de Argenta et al. (2011) editada por la editorial Pearson como material de aula en el curso académico 2010-11, de la que tomaremos el número 1 correspondiente al primer curso de educación primaria. No obstante y en aras de dotar a este trabajo de una uniformidad lingüística, así como ayudar a una mejor comprensión del mismo al lector, toda referencia al contenido explícito en Inglés se traducirá al castellano.

En primer lugar describiremos únicamente aquellos aspectos generales que sean imprescindibles para la comprensión de la situación didáctica, realizando un análisis más pormenorizado de las actividades que por su naturaleza sean susceptibles de vincularse con la Matemática, donde apuntaremos los aspectos matemáticos incluidos u omitidos, en cuyo caso razonaremos la pertinencia de introducirse y de qué manera.

2.3 Análisis

El libro del alumno de primer curso se compone de seis unidades didácticas, todas ellas estructuradas en torno a seis aspectos musicales secuenciados en este orden: Música en mi vida, Canto, Lenguaje Musical, Práctica musical, Movimiento y Juego.

La unidad primera lleva por título “Escuchemos”. Comienza con el apartado “Música en mi vida” en el que a partir de una ilustración a doble página, deben reconocer los objetos y acciones cotidianas y categorizarlos en función de si producen sonido o están en silencio. Una de las actividades propuestas para la mejor comprensión del concepto de silencio es la escucha de un extracto de la Sinfonía nº101 de Haydn “El Reloj” en el que se imita el tictac del reloj hasta que en un momento se detiene y, transcurrido unos segundos, se pone en funcionamiento de nuevo. Siendo esta audición un recurso muy válido, está quizás un tanto utilizada de soslayo puesto que invita a la presentación de un metrónomo y su funcionamiento, así como la realización de breves ejercicios sobre su relación con unidades de tiempo como horas y minutos ya que así está establecido en el segundo bloque de contenidos de Matemáticas, lo que representa por una parte, una excelente oportunidad de trabajo previo al contenido de la medición del tiempo que se realiza en cursos superiores

La sección dedicada a Lenguaje Musical, aparece como contenido de aprendizaje la figura de negra y su correspondiente silencio, tras lo que se practica un ritmo con estos dos elementos. Asimismo, en el capítulo contiguo dedicado a Práctica musical se trabaja la percusión corporal con ritmo de palmadas, chasquidos, rodillas y pies. Ambos casos suponen dos nuevas oportunidades para trabajar los números, ya que por una parte permite la sustitución de número de iguales figuras por el número correspondiente, y por otra, constituye una introducción al concepto matemático de serie numérica, iniciando así al educando en dos mecanismos inherentes al pensamiento humano: la búsqueda de regularidades y la confirmación de expectativas.

La unidad número dos se denomina “Sonidos cotidianos”, en cuya ilustración inicial figura una serie de seis situaciones cotidianas numeradas por orden cronológico: el sonido de un despertador al inicio de un día, la megafonía de un colegio que anuncia el inicio de jornada escolar, la expresión vocal en clase de Música, el sonido de risas, viento y ladridos en un parque, los sonidos habituales que tienen lugar en la cocina de una casa, y por último la lectura antes de acostarse. De nuevo, supone una ocasión perfecta para extrapolar esta secuenciación de sonidos fácilmente reconocibles a otras disciplinas como la matemática. Del mismo modo, en la sección "Canto" deben interpretar vocal y gestualmente una canción llamada "Diez dedos", una manera lúdica de reforzar el conocimiento del propio cuerpo y de los números del uno al diez en inglés. En este caso, sí se introduce una actividad de repaso de operaciones matemáticas básicas como: "si tengo 8 dedos pero le quito uno, ¿cuántos dedos me quedan?"…

En el apartado "Práctica musical", aparecen dos instrumentos de percusión: el triángulo y las claves, con los que deben practicar una serie de ritmos. Una sugerencia para la enseñanza de aspectos geométricos es promover un debate en el que los alumnos describan que el triángulo tiene los tres lados iguales y lo razonen, que comparen las similitudes y diferencias con respecto a las claves, y que sean capaces de extrapolar estas figuras a objetos de la vida cotidiana (señales de peligro, velas…)

La unidad número tres lleva por título "Sonidos urbanos" y comienza con una ilustración mostrando diferentes situaciones sonoras en una intersección urbana controlada por un guardia de tráfico, donde representa una oportunidad para mostrar estrategias de prevención de contaminación acústica, cuya efectividad se ha comprobado frente a medidas prohibitivas y sancionadoras. En el capítulo relacionado con el "Lenguaje musical", se introduce la nota mi en contraposición a sol, lo que sirve de preámbulo para introducir una diferenciación de los sonidos según el criterio de altura: agudo y grave. Esto podría constituir una ocasión fantástica para establecer una analogía entre altura musical y matemática, calculando la distancia entre las dos notas sirviéndonos de línea y espacio, y sustituyendo las notas por números, i.e., 5 y 3, de manera que concluyan las similitudes entre los dos procedimientos.

De la misma manera, en el apartado correspondiente a "Práctica Musical" aparecen instrumentos como el tambor, pandereta o timbales de los que, además de establecer las comparaciones relativas a familias de instrumentos y cualidades tímbricas, podría introducirse también la relación de un elemento geométrico como la longitud de circunferencia con el sonido que produce, fomentar la transferencia de objetos circulares en nuestra vida diaria como CDs, esfera de un reloj, y realización también operaciones básicas con monedas.

“Los sonidos de la Naturaleza” es como se denomina la unidad número cuatro. La sección dedicada a “Lenguaje Musical” introduce la nota La, tras lo cual se expone un breve ejercicio de reconocimiento de alturas con objeto de discriminarla visualmente frente a Sol y Mi. Análogamente, se presentaría una ocasión excelente para introducir el diapasón puesto que toma como referencia la misma nota, así como para repasar en Matemáticas las series con tres números en los que exista la misma relación que con las notas, verbigracia 5,3 y 6.

Por otra parte, se introduce el concepto de diferenciación sonora basándose en el criterio de duración, por el cual los sonidos se categorizan en corto y largo. Esto, en matemáticas, es fácilmente aplicable al medir, en primer lugar, la longitud de personas u objetos cotidianos (pudiendo utilizarse como unidades de medida algunas no estándares como pies o manos) estableciendo inferencias; y por otro lado, al trabajar la duración del tiempo con unidades sencillas o de referencia personal (cumpleaños, horario escolar)…

La unidad número cinco tiene por título “Sonidos de los Animales”. En la sección dedicada a Canto, deben aprenderse una canción en la que se enumeran una serie de animales con sus acciones correspondientes. Por otra parte, el apartado correspondiente a “Lenguaje Musical” introduce la discriminación de sonidos en función del criterio de velocidad: rápido y lento. Una sugerencia para la clase de matemáticas sería, respectivamente, la utilización de nomenclatura y rasgos animales en el enunciado de problemas, así como la manipulación de datos referentes a distintas velocidades de desplazamiento animal (como la fábula clásica de la tortuga y la liebre). Sin embargo, tenemos la convicción de que un punto de partida previo a la exposición de estos problemas sería la utilización del propio cuerpo como instrumento para la exploración de la relación espacio-temporal y, por ejemplo, registrar con la ayuda de un cronómetro el tiempo que una muestra de personas tarda en recorrer una determinada distancia d diversas formas: andando, saltando, corriendo…

La unidad seis, constituye la última y posee un carácter sintetizador de lo aprendido en las anteriores y no introducirse ningún contenido de aprendizaje nuevo, por lo que preferimos no hacer ninguna sugerencia salvo las actividades de repaso pertinentes que guarden relación con las que se proponen relativas al área específica de música.

2.4 Valoración

Una vez realizado el análisis textual, nos gustaría exponer las siguientes reflexiones:

En primer lugar, es importante resaltar el enfoque interdisciplinar y multisensorial de este material. Afortunadamente, la didáctica de la Música ha superado esa concepción magistral en la que no se tenían en cuenta los intereses del alumnado y cuyo contenido se reducía exclusivamente al del lenguaje musical. Gracias a estudios de autores como Gardner (1983), sabemos que existen diferentes estilos de aprendizaje, y que, por tanto, es necesario incluir la mayor variedad posible en las situaciones de enseñanza aprendizaje para propiciar oportunidades de aprendizaje. Por eso, el material está elaborado desde la premisa que gran parte de lo que aprende el alumno se hace a través de juegos y actividades lúdicas de manera que permitan la activación de ambos hemisferios cerebrales: "desarrollo de capacidad de razonamiento (canciones para memorizar, secuencias para unir o completar, expresión vocal y corporal e improvisación y creación en el aspecto emocional" (Martín de Argenta et al. (2011), p.VII).

De manera similar, otro aspecto a destacar positivamente es la estructuración clara y ordenada de las unidades didácticas en secciones que posibilitan el abordaje de una amplia variedad de aprendizajes de elementos musicales, así como una mejor comprensión global de los bloques temáticos. Cada unidad comienza con un apartado denominado "Música en mi vida" en la que una ilustración a doble página presenta los elementos sensoriales de su vida cotidiana que luego se complementan con la audición de sonidos en un CD. En segundo lugar aparece la sección "Canto" en la que, como su propio nombre indica, se trabajan aspectos relativos a la expresión vocal, respiración, y la dramatización tan importantes en esta etapa escolar. "Lenguaje Musical" es el siguiente apartado en el que se persigue la familiarización del alumnado con nociones elementales relativas a las figuras y signos, así como elementos dinámicos y agógicos. El apartado de "Práctica", por otra parte, comprende el aprendizaje de lo perteneciente al ritmo dentro de la percusión instrumental y corporal. "Movimiento" es el nombre de la siguiente sección en la que se promueve lo relativo al aprendizaje de coreografías. El último apartado lo compone “Juego”, donde se trabaja la relación lúdica entre música y la dimensión interpersonal.

Otro aspecto a tener en cuenta es la capacidad de la música como recurso en la enseñanza de la lengua inglesa. Aquí es importante hacer notar, que todo lo relativo al Canto, Movimiento y Juego suponen una herramienta de primordial importancia para el aprendizaje de la cultura de ese país puesto que en estos se manifiesta muy significativamente.

Así, entre los efectos que producen las canciones, Fuentes y Mora (2013) señalan que afectan al desarrollo de las cuatro destrezas básicas del aprendizaje de lenguas, es decir, la lectura, la escritura, la audición y el habla además de influir positivamente en la revisión o incorporación de nuevos elementos gramaticales y de vocabulario. Las canciones activan ambas partes del cerebro debido a que la pronunciación de las palabras, la comprensión, la supervisión de las mismas, el ritmo y la ejecución musical están suscritas al hemisferio izquierdo, mientras que la expresión melódica y el timbre que cubre a las palabras, las emociones y la expresión artística (comunicación no verbal) son propios del hemisferio derecho.

La evaluación propuesta en este método tiene una triple vertiente: Inicial, a través de las propuestas didácticas de las páginas de apertura de cada unidad, con el objetivo de detectar ideas previas, intereses, experiencias musicales, aptitudes rítmicas, melódicas y auditivas para la educación musical; formativa, a través de las actividades que se proponen a lo largo del curso, cuya intención es valorar sobre todo los procesos llevados a cabo en el aprendizaje; y por último, sumativa, con las pruebas de evaluación que se realizan al final de cada unidad didáctica y que informan sobre la evolución de las capacidades de los alumnos en un momento determinado del proceso educativo.

Asimismo, los instrumentos de evaluación empleados son, en primer lugar, la observación sistemática pudiéndose anotar en las hojas de registro de los alumnos al final de la guía didáctica. El diálogo, que permite evaluar los conocimientos previos, así como detectar las carencias o las potencialidades del grupo en las primeras páginas de cada unidad. También debemos mencionar

la existencia de pruebas específicas de evaluación para obtener información sobre aspectos concretos difíciles de apreciar a través de otros instrumentos. No debemos olvidarnos de la
autoevaluación, como indicador para el alumnado de su situación en el propio proceso de aprendizaje, pero que también puede servir al profesorado para realizar sus valoraciones.

Por último, apuntaríamos como un aspecto a mejorar en este método la inclusión de actividades correspondientes al área de Matemáticas, puesto que, como señalan Ackerman y Perkins (2002), el diseño curricular es más coherente aunque exija la unificación de criterios y objetivos entre los diferentes departamentos escolares desde el punto de vista del profesor, pero sobre todo, permite al educando la interrelación de conceptos y destrezas, interpretando y construyendo su propio aprendizaje al propiciar que se relacionen con sus intereses y cobren, por tanto, mayor significatividad.

Murray Gell-Mann, premio Nobel de Física, afirma que la especialización es un rasgo necesario de nuestra civilización pero debe complementarse con la integración a través del pensamiento interdisciplinario. Uno de los factores que impiden que se produzca esa integración es la separación existente entre los que se sienten cómodos con las matemáticas y los que no. Como refleja Carrión (2011), Antoine de Saint-Exupéry constataba en El principito el gusto por las cifras de los mayores. Cuando se les habla de un nuevo amigo, jamás preguntan sobre lo esencial del mismo. Nunca se les ocurre preguntar: ¿Qué tono tiene su voz? ¿Qué juegos prefiere? ¿Le gusta coleccionar mariposas? Pero en cambio preguntan: ¿Qué edad tiene? ¿Cuántos hermanos? ¿Cuánto pesa? ¿Cuánto gana su padre? Solamente con estos detalles creen conocerle. Teniendo en cuenta que, de la misma manera, "todos los mayores han sido primero niños (pero pocos lo recuerdan)", debemos aprovechar la ocasión brindada que nos ofrece la Música para que el niño sea consciente de que las Matemáticas no son aburridas y tienen sentido como parte de un todo. Experiencias como la prueba de integración curricular elaborada por Carrión (2011) demuestran que los aprendizajes del área de matemáticas pueden presentarse de manera lúdica y mucho más significativa. Consiste en el planteamiento y desarrollo de unas actividades de trabajo de las Matemáticas desde la Música, fundamentadas en dos elementos: los valores de las figuras (las notas y sus silencios) y el compás.

Su propuesta incluye las relaciones matemáticas entre las diferentes figuras musicales:

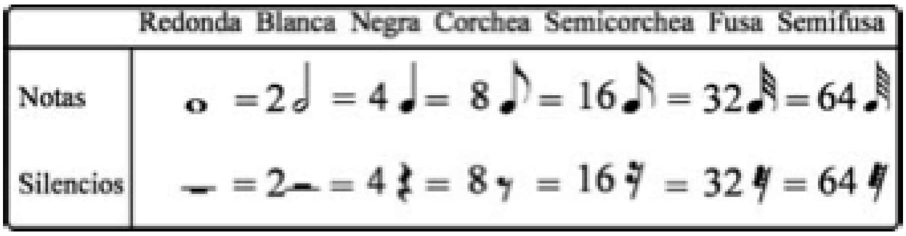


Figura 18. Relaciones matemáticas entre las diferentes figuras.

Así como su representación por medio de porciones de una circunferencia:

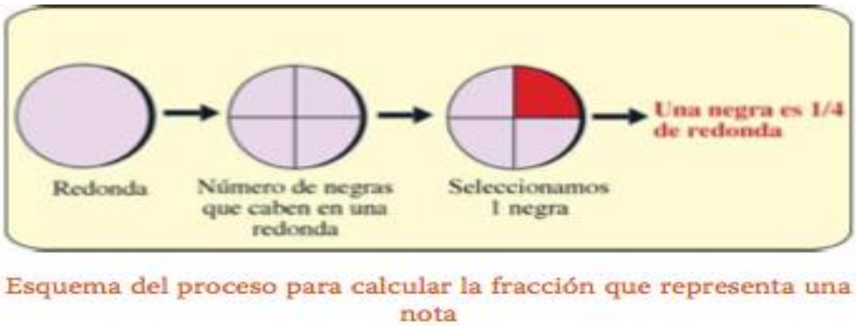


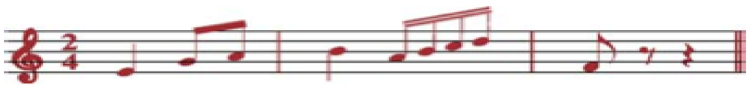
Figura 19. Representación de figuras a través de porciones de circunferencia.

La elaboración de un dominó con notas y fracciones:

Figura 20. Dominó musical.

Y la representación a través de fracciones:

Ejemplo 2: Expresa como suma de fracciones las notas que aparecen en el pentagrama siguiente:



Como el compás que aparece es 2/4, el alumno debe comprobar que las fracciones que aparecen en cada compás suman 2/4. Las fracciones asociadas al pentagrama anterior son las siguientes:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \quad \Big| \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} \quad \Big| \quad \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$$

Figura 21. Representación a través de fracciones.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

A lo largo de estas páginas hemos comprobado el vínculo existente entre la Música y las Matemáticas, formulado principalmente en torno a la idea de que las últimas constituyen el código a partir del cual la primera se hace inteligible. Del mismo modo que existen numerosos conceptos, relaciones y características musicales que pueden describirse a través de términos aritméticos (de hecho Leibniz definió la música como un ejercicio inconsciente de la Aritmética), no debemos suscribir este pensamiento hasta el extremo de equiparar una ciencia a la otra, o lo que es peor, creer que el arte de las musas forma parte de las Matemáticas.

En cualquiera de los casos, creemos que esta tesis no deja de ser un reduccionismo, puesto que, al igual que un ordenador está programado a partir de un código binario o el hecho de que la práctica totalidad de fenómenos relativos al cuerpo humano pueda interpretarse desde un prisma interdisciplinar, la Música transciende cualquier intento de acotamiento científico.

Del mismo modo que una patología médica como la depresión puede estudiarse desde el punto de vista biológico, neurológico, nutricional, psicológico, farmacológico, económico o demográfico; una obra musical puede explicarse en términos acústicos cualitativos (duración, timbre, altura, intensidad), melódicos, armónicos, históricos, compositivos, interpretativos… los cuales contribuyen a una mejor comprensión de la misma cuantitativa y cualitativamente.

Así, cualquier oyente o intérprete, con independencia de la formación musical recibida, frente a la interpretación de una obra como el Concierto para piano número 5 en Mib Mayor, op.73 de Beethoven, percidé algo más que un instrumento, un movimiento, una forma, una tonalidad o un compás determinado propiamente musical; análoga experiencia sucede desde el patio de butacas un pianista al valorar la técnica de su colega del escenario,o un ingeniero de sonido al analizar las cualidades acústico-físicas del recinto y de su relación con los instrumentos, o el historiador al relacionar la obra con el momento histórico en el que se compuso, etc..

Esto reside en el hecho de que la percepción musical tiene un carácter subjetivo puesto que implica nuestra dimensión afectivo-emocional y estética con otra de carácter cognitivo, como también lo es la división de las diferentes ramas del saber en categorías al ser fruto de la acción humana. Todo esto hace que la Música, como las Matemáticas, al igual que cualquier manifestación artística, contenga esa cualidad abstracta, intangible, que la hace tan difícil de aprehender, ya que, como bien afirmó Goethe, “el arte es el mediador de lo inexpresable” (citado en Gaarder, 1991, prefacio)

Finalmente, no nos gustaría pasar por alto algo ya apuntado en el marco práctico de este trabajo, como es la necesidad de superar la concepción disgregada de contenidos de aprendizaj en favor de un currículum integrado, que se concreta en torno a tres bloques de actuación: una mayor interdisciplinariedad entre las diferentes asignaturas, la consideración a las necesidades psico-afectivas del educando y el establecimiento de un vínculo con la comunidad a la que pertenece. Esto, lejos de ser una teoría educativa más, se ha convertido en un imperativo socio-político cuyo factor determinante ha sido la creación y desarrollo de Internet; nadie se atreve ya a menoscabar su influencia con independencia del grado de afección y alfabetización digital que posea, y es que el hecho de que puedas hablar o enviar un mensaje a otra persona situada en cualquier punto del planeta en cuestión de segundos, evidencia nuestra pertenencia a un mundo cada vez más interrelacionado y globalizado.

En áreas como la enseñanza de Lenguas se ha llevado a la práctica la integración curricular a partir de la hipótesis de la competencia subyacente común acuñada por Cummins (1978). Lo cierto es que, a pesar de su demostrada eficacia, la implantación de esta metodología en nuestro país ha venido motivada por una política educativa caracterizada por un esnobismo institucional agravado por un acuciante complejo de inferioridad.

Sea como fuere, esperamos haber proporcionado en el conjunto de estas páginas los suficientes argumentos en favor del necesario desarrollo de la asignatura de Música en el currículo actual, así como de su integración curricular con las Matemáticas. Y por otra parte, refutar categóricamente el papel testimonial al que se pretende reducir esta disciplina con la entrada en vigor de la notoria Ley Orgánica para la Calidad de la Mejora Educativa el próximo curso académico 2014-15.

REFERENCIAS

Carrión, V. L. (2011). MUSYMÁTICAS: Música y matemáticas en educación primaria. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (66), 107-112.

Cheek, J. M., & Smith, L. R. (1999). *Music training and mathematics achievement*. Adolescence, 34(136), 759-761.

Clerc González, G. (2003). *La arquitectura es música congelada (Doctoral dissertation, Arquitectura*).

Fuentes, C. M. T., & Mora, M. C. F. (2013). La música como herramienta facilitadora del aprendizaje del inglés como lengua extranjera. Teoría de la Educación. *Revista Interuniversitaria*, 24(2), 197-213.

Gobierno de Navarra, F. DECRETO FORAL 25/2007, de 19 de marzo, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de la Educación Primaria y Secundaria en la Comunidad.

Ibaibarriaga, I. (2006). *Música y matemáticas.*

Martín, A. P. (2008). *Matemáticas en la música. Ritmo*

Martín de Argenta Pallarés, F. et al. (2011). *Feel the music 1. Pupil's book*

Miyara, F. (2005). La música de las Esferas: de Pitágoras a Xenakis... y más acá.

Parrondo, J. M. R. (2005). Matemáticas y música. *Matematicalia: revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española,* 1(1), 8.

Peralta, J. (2003). Matemáticas para no desafinar. *Gaceta De La Real Sociedad Matemática Española*, 6(2), 437-456.

Quesada, C. A. (2004). La expresión musical y el currículo escolar. *Revista Educación,* 28(1), 111-122.

Ramos, E. M. (2011). *La Música En La Antigua Grecia Como Transmisora De Valores, Repercusiones en La Educación Musical Actual.*

Rauscher, F. H. (2003). ¿Puede afectar la instrucción en música el desarrollo cognitivo de los niños? ERIC digest. (can music instruction affect children's cognitive development? ERIC digest).

Rauscher, F. H., Shaw, G. L., & Ky, K. N. (1995). Listening to Mozart enhances spatial-temporal reasoning: Towards a neurophysiological basis. *Neuroscience Letters*, 185(1), 44-47.

Rodrigo, M. S. (2013). Entrevista con... Margarita Morais. Música y educación: *Revista trimestral de pedagogía musical,* 26(2), 6-17.

Romero**,** M. D. (2004). Las matemáticas en el serialismo musical. *Sigma: Revista De Matemáticas= Matematika Aldizkaria*, (24), 93-98.

Seguí, S. (1985). *Teoría musical*. Unión Musical Española.

Schmithorst, V. J., & Holland, S. K. (2004). The effect of musical training on the neural correlates of math processing: A functional magnetic resonance imaging study in humans. *Neuroscience Letters*, 354(3), 193-196.

Shah, S. (2010). *An exploration of the relationship between mathematics and music*.

Wagner, C. (2010). *Aportes desde el uso de la concepción Kodály en el primer año de primaria*

Diego Malumbres Pasquier