MATEMATIKA

Odei SAGARDOI SORIA

MAGNITUDEAK LANTZEKO EGOERA DIDAKTIKOAK: TXANPON SISTEMA

TFG/*GBL* 2015

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Grado en Maestro de Educación Primaria
/
Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Grado en Maestro en Educación Primaria

Gradu Bukaerako Lana
Trabajo Fin de Grado

MAGNITUDEAK LANTZEKO EGOERA DIDAKTIKOAK: TXANPON SISTEMA

Odei SAGARDOI SORIA

GIZA ETA GIZARTE ZIENTZIEN FAKULTATEA
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y SOCIALES

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA
UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

Ikaslea / Estudiante
Odei SAGARDOI SORIA

Izenburua / Título
Magnitudeak lantzeko egoera didaktikoak: txanpon sistema.

Gradu / Grado
Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua / Grado en Maestro en Educación Primaria

Ikastegia / Centro
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea / Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Nafarroako Unibertsitate Publikoa / Universidad Pública de Navarra

Zuzendaria / Director-a
Aitzol LASA OYARBIDE

Saila / Departamento
Matematikako saila

Ikasturte akademikoa / Curso académico
2014/2015

Seihilekoa / Semestre
Udaberrikoa / Primavera

Hitzaurrea

2007ko urriaren 29ko 1393/2007 Errege Dekretua, 2010eko 861/2010 Errege Dekretuak aldatuak, Gradu ikasketa ofizialei buruzko bere III. kapituluan hau ezartzen du: “ikasketa horien bukaeran, ikasleek Gradu Amaierako Lan bat egin eta defendatu behar dute […] Gradu Amaierako Lanak 6 eta 30 kreditu artean edukiko ditu, ikasketa planaren amaieran egin behar da, eta tituluarekin lotutako gaitasunak eskuratu eta ebaluatu behar ditu”.

Nafarroako Unibertsitate Publikoaren Haur Hezkuntzako Irakaslearen Graduak, ANECAk egiaztatutako tituluaren txostenaren arabera, 12 ECTSko edukia dauka. Abenduaren 27ko ECI/3857/2007 Aginduak, Haur Hezkuntzako irakasle lanetan aritzeko gaitzen duten unibertsitateko titulu ofizialak egiaztatzeko baldintzak ezartzen dituenak arautzen du titulu hau; era subsidiarioan, Unibertsitatearen Gobernu Kontseiluak, 2013ko martxoaren 12ko bileran onetsitako Gradu Amaierako Lanen arautegia aplikatzen da.

ECI/3857/2007 Aginduaren arabera, Haur Hezkuntzako Irakaslearen ikasketa-plan guztiak hiru modulutan egituratzen dira: lehena, oinarrizko prestakuntzaz arduratzen da, eduki sozio-psiko-pedagokikoak garatzeko; bigarrena, didaktikoa eta diziplinakoa da, eta diziplinen didaktika biltzen du; azkenik, Practicum daukagu, zeinean graduko ikasleek eskola praktiketan lortu behar dituzten gaitasunak deskribatzen baitira. Azken modulu honetan dago Gradu Amaierako Lana, irakaskuntza guztien bidez lortutako gaitasun guztiak islatu behar dituena. Azkenik, ECI/3857/2007 Aginduak ez duenez zehazten gradua lortzeko beharrezkoak diren 240 ECTSak nola banatu behar diren, unibertsitateek ahalmena daukate kreditu kopuru bat zehazteko, aukerako irakasgaiak ezarriz, gehienetan.

Beraz, ECI/3857/2007 Agindua betez, beharrezkoa da ikasleak, Gradu Amaierako Lanean, erakuts dezan gaitasunak dituela hiru moduluetan, hots, oinarrizko prestakuntzan, didaktikan eta diziplinan, eta Practicumean, horiek eskatzen baitira Haur Hezkuntzako Irakasle aritzeko gaitzen duten unibertsitateko titulu ofizial guztietan.

Lan honetan, oinarrizko prestakuntzako modulua lanean aurkezturiko proposamenak ziklo eta mailara egokitzeko bide eman digu. Honi esker maila bakoitzean ikasleen garapen psikologikoa nahiz soziala zein den argi izan da eta beraz, proposamenak mailara egokitu ahal dira. Proposamena praktikara eraman denez, klasearen garapena ere kontuan izateko estrategia eta teknikak oso beharrezkoak dira.

Didaktika eta diziplinako modulua gehien bat matematikaren didaktika moduluetan lorturiko ikaskuntzak guztiz beharrezkoak izan dira bertan azaltzen diren kontzeptu guztiak ulertu ahal izateko. Honetaz aparte, beste didaktiketan ere ikasleekin nola tratatu eta egoerak diseinatzen ikasi da.

Halaber, Practicum modulua guztiz beharrezkoak izan dira lan hau aurrera eramateko. Lehenik eta behin Practicum aldietan klase bat nolakoa den eta bere beharrak ikusten direlako eta bestetik proposaturiko egoera didaktikoa Practicum aldian egondako klasean aurrera eraman delako.

Azkenik, aukerako modulua asko lagundu naute lan hau aurrera eramateko orduan. Ez eduki didaktikoengatik izan ere nik Gorputz heziketako aipamena egin dut eta honen edukiak eta matematikarenak ez dira antzekoak. Baina ikasleak tratatzeko moduak eta hauek motibatzeko estrategiak bereganatzeko funtsezko atala izan da.

Beste alde batetik, ECI/3857/2007 Aginduak ezartzen du, Gradua amaitzerako, ikasleek gaztelaniazko C1 maila eskuratuta behar dutela. Horregatik, hizkuntza gaitasun hau erakusteko, hizkuntza honetan idatziko dira “Aurrekariak, helburuak eta galdeak” eta “Ondorioak eta galdera irekiak” atalak, baita hurrengo atalean aipatzen den laburpen derrigorrezkoa ere.

ECI/3857/2007 Aginduak ezartzen duen arabera, Graduaren bukaeran hizkuntza koofizial bat ezagutzen duten ikasle elebidunek C1 maila ere izan behar dute erkidegoaren beste hizkuntzan, alegia, gure kasuan, euskaran. Hori dela eta, euskaraz hizkuntza gaitasuna erakusteko, lana bere osotasunean gure hizkuntzan idatziko da.

Laburpena

Lan honen helburua ikasleek magnitudeen jarduera aritmetizatuak egiteko zailtasunak gainditzea eta buruketak egiteko ikasleei estrategia berriak ematea da. Galera hauek gainditzeko marko teoriko bat diseinatu da zeinean buruketak egiteko teknikak desberdinak, irakasleak buruketak diseinatzeko teoriak eta buruketak zergatik egiten diren gaizki ulertzeko teoriak azalduko diren. Ondoren magnitudeen inguruko bi proposamen diseinatu dira eta bat lehenengo zikloko bigarren maila batean praktikoki eraman da aurrera. Lorturiko emaitzekin analisi bat egin da eta marko teorikoaren eta emaitza hauen arteko alderaketa egin da. Gradu amaierako lan honen helburua bete egin da, izan ere magnitudeak irakasteko teknika desberdinak adierazi dira baita buruketa matematikoak ebazteko teknika desberdinak ere. Gainera marko emaitza oso interesgarriak lortu dira marko teorikoaren ikuspuntutik.

Hitz gakoak: magnitudeak; egoera didaktikoen teoria; buruketa matematikoak; estrategia berriak; txanpon sistema.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es conseguir que los alumnos superen las dificultades que tienen a la hora de realizar ejercicios aritmetizados de las magnitudes y dotarles de estrategias nuevas para la resolución de problemas. Para superar estos errores se ha diseñado un marco teórico en el que se explican diversas técnicas para resolver problemas, teorías para el diseño de problemas y razones por las cuales se solventan mal los problemas. Después, se han diseñado dos propuestas relacionadas con las magnitudes y una de ellas se llevará a cabo en un aula. Con los resultados obtenidos, se ha realizado un análisis y se han comparado los resultados con el marco teórico. El objetivo de este trabajo de fin de grado se ha cumplido, ya que se han explicado diferentes técnicas para la explicación de las magnitudes y nuevas técnicas para resolver problemas. Además se han obtenido unos resultados muy interesantes desde el punto de vista del marco teórico.

Palabras clave: magnitudes; teoría de las situaciones didácticas; problemas matemáticos; nuevas estrategias; sistema monetario.

Abstract

The aim of this paper is to help students overcome the difficulties when doing magnitude arithmetic exercises and to provide them with new problem solving techniques. In order to overcome these errors, a theoretical framework has been established where different problem solving techniques are explained; diverse theories about how to design mathematical problems, and reasons why mathematical problems are incorrectly solved by students. Two proposals related to magnitudes have been designed, and one of them will be tested in a real school environment. Using the results obtained, an analysis and a comparison between the theoretical framework has been made. The goal of this undergraduate thesis has been fully achieved, as different techniques for working with magnitudes and new techniques for solving problems have been explained. Moreover, some very interesting results have been obtained from the point of view of the theoretical framework.

Keywords: magnitudes; didactic situation theory; mathematical problems; new strategies; monetary system.

Aurkibidea

1. AURREKARIAK, HELBURUAK ETA GALDERAK

Gradu amaierako lan hau esleitzearen arrazoiak anitzak dira. Hasteko, esan beharra dago matematikaren irakaskuntza plano afektiboari lotua dagoela. Diziplinarekin ongi moldatzen diren ikasleek gustuko dute eta aurrera eramaten dituzte euren ikasketak. Aldiz, buruketak ebazterako orduan, ikasleak ez dira moldatzen irakaslearen ohiko metodologietara. Hain zuzen ere, matematikan ongi moldatzen diren ikasleek prozedura pertsonalak erabiltzeko joera izaten dute. Kasu batzuetan, gainera, irakasleak penalizatu egiten du prozedura pertsonalen erabilera. Beraz, lehenengo arrazoia da ikasleek buruketekin arazo pertsonalak izaten dituztela. Bigarrenik, Practicum III ikusi egiten da ikasleek magnitudeei loturiko jarduera aritmetizatuak ez dituztela ondo egiten. Zailtasun asko dituzte errepresentazio grafikoak egiteko eta klasearen erdiak baino gehiagok ariketak ez ditu modu egokian egiten hau gehien bat abstrakzio puntu hori oraindik bereganatua ez dutelako da. Bestetik buruketak egiterako orduan zailtasun handiak ikusi ditut. Ez dira gai irakurritakoaren laburpen edo puntu nagusiak esateko. Askotan datuak ez dituzte ulertzen, ezta galdera ere, eta gertatu ohi da ere egin beharreko eragiketa mota ez jakitea, esate baterako, batuketa beharrean kenketa egitea. Beraz honako arrazoi hauek determinanteak izan dira gradu amaierako lana esleitzerako orduan. Izan ere, curriculumaren arabera, ikasleek buruketak ondo ebazteko gaitasuna izan behar dute. Azken finean, mundu errealean ez daude biderketa taulak, baizik eta buruketa errealak. Horregatik, guztiz beharrezkoa da ikasleei etorkizun batean planteatuko zaizkien buruketei aurre egiteko estrategia eta teknikak ematea.

Aurreko paragrafoan esandakoarekin gradu amaierako lan honen helburua argi geratu da. Ikasle hauek dituzten gabeziei aurre egitea, alegia. Egia da ez dela lan erraza, baina bederen saiatzea beharrezkoa da.

Galderen atalaren inguruan, asko dira burura etortzen diren galderak baina bi ideia konkretutan bildu daitezke. Alde batetik, eta aurreko paragrafoko helburuak betetzeko, posible al da buruketak ebazteko marko teoriko konstruktibista bat erabiltzea? Eta bestetik, metodologia desberdin bat erabiliz, hots, egoera didaktikoen metodologia, ikasleek buruketekiko duten jarrera aldatzea? Bi hauek dira zalantza gehien sortzen dituzten bi galderak.

Zalantza hauen argitzeko, bigarren kapituluak, hots marko teorikoan zenbait autoreren ideiak azalduko dira. Lehenik eta behin problemak ebazteko bi teoria desberdina azalduko dira, George Polyak egindako eta MBS eskema. Egia da bigarrena lehenengoaren jarraipena dela baina biak azaldu behar direla esleitu da hobeto ulertzeko zein izan de historia eta nondik atera diren teoria desberdinak. Honen barne bakoitzak dituen azpiatal desberdinak azalduko dira ere. Bi teoria hauek azaldu eta gero, buruketak beste ariketak eta saioen artean diseinatzerako orduan erabili beharreko teoria azalduko da, egoera didaktikoak hain zuzen ere. Hau Brousseauren "Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas" liburuaren laguntzaz azalduko da. Ondoren ikasleen galerak azaltzen saiatzeko zenbait oztopo eta fenomeno azalduko dira, atal hau aurrekoan aipaturiko liburu beraren laguntzarekin azalduko da. Bukatzeko Ikasleak egoera desberdinetara ohitzea: jauziak eta oztopoak azpiatala azalduko da zeina Brousseauren eskutik datorren ere.

Bigarren puntua bukatuta, hau da, marko teorikoa bukatuta, atal praktikoari hasiera emango zaio, bertan bi proposamen didaktiko desberdin diseinatuko dira. Hauek diseinatzerako orduan María del Carmen Chamorroren "Didáctica de las matemáticas" liburutik ideiak hartuko dira eta aldez aurretik marko teorikoan azalduriko bi egoera didaktiko diseinatuko dira.

Behin bi egoera didaktikoak diseinaturik daudela bideratzeko aproposena esleituko da eta praktikara eramango da. Praktika honetan jasotako erantzunekin analisi bat egingo da eta bukatzeko marko teorikoaren eta emaitzen arteko konparaketa bat egingo da.

1. ANTECEDENTES, OBJETIVOS Y CUESTIONES ABIERTAS

La elección de este Trabajo de fin de grado no ha sido por una única razón. Para empezar hay que decir que enseñanza de las matemáticas esta unida al plano afectivo. A los alumnos que les gusta esta disciplina se les suele dar bien y suelen llevar adelante sus estudios sin ningún problema. Sin embargo, a la hora de resolver los problemas matemáticos, hay alumnos que no se amoldan a la metodología propuesta por el profesor. De hecho, los alumnos que se les dan bien las matemáticas suelen buscar procedimientos personales. En algunos casos, además, los profesores penalizan este tipo de procedimientos personales. Por consiguiente, la primera razón es que los alumnos tienen dificultades a la hora de resolver problemas. Y la segunda como se ve en el III Practicum, los alumnos tienen problemas cuanto tienen que hacer los ejercicios aritmetizados de las magnitudes. Tienen muchas dificultades a la hora de hacer representaciones gráficas y más de la mitad de la clase no es capaz de hacer los ejercicios correctamente, esto se debe en gran parte a aún no han interiorizado el proceso de abstracción. Por otro lado, tienen muchos problemas a la hora de realizar problemas matemáticos. No son capaces de resumir lo leído o de decir los puntos principales del problema. Muchas veces no son capaces ni de entender los datos ni la pregunta y también suele pasar que no son capaces de saber qué tipo de operación han de utilizar es decir, pueden confundir una resta con una suma. Por consiguiente, las razones aquí señaladas son muy determinantes a la hora de elegir el trabajo de fin de grado. Puesto que es muy importante adquirir estrategias para a hacer bien los problemas. Al fin y al cabo, en el mundo real no hay tablas de multiplicar. Por esto, es completamente necesario que a los alumnos se les den técnicas y estrategias para resolver futuros problemas.

En el anterior párrafo ha quedado bastante claro cuál es objetivo principal de este trabajo de fin de grado. Hacerles frente a las carencias que tienen estos alumnos. Es cierto que no es un trabajo fácil, pero al menos hay que intentarlo.

Respecto al apartado de las preguntas, son muchas las preguntas que vienen a la cabeza, pero todas ellas se pueden englobar en dos preguntas muy concretas. Por un lado, ¿es posible utilizar un marco teórico constructivista para resolver los problemas? Y por otro lado, ¿utilizando una metodología diferente, las situaciones didácticas para ser más concretos, se puede cambiar la actitud de los alumnos respecto a los problemas matemáticos? Estas son las dos preguntas que crean más dudas.

Para resolver estas dos preguntas, en el segundo capítulo, es decir, en el marco teórico, se hablará sobre diversos autores. Para empezar se explicaran dos teorías para la resolución de problemas matemáticos, por un lado la teoría de George Polya, y por otro lado el esquema MBS. Es cierto que el segundo es la continuación del primero pero he decidido explicar los dos para poder entender cuál ha sido la historia y de donde han salido las diferentes teorías.

Se explicaran también las subsecciones que hay dentro de cada una. Después de explicar estas dos teorías, se explicara que teoría se ha utilizado para diseñar los diferentes problemas, más concretamente las situaciones didácticas. Para realizar estas explicaciones se ha recurrido al libro “Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas” de Brousseau. Una vez explicada la teoría con la que se va a proceder a realizar las propuestas, se intentaran explicar las carencias que tienen los alumnos, para ellos contaremos con la subsección obstáculos y fenómenos el cual también se basa en el libro anteriormente citado. Para terminar con el marco teórico se explicara el último apartado que trata de acostumbrar al alumno a situaciones no convencionales: saltos y obstáculos. Este apartado también se basa en el libro de Brousseau.

Una vez acabado el primer punto, es decir, el marco teórico, se le dará comienzo al apartado práctico, en el cual se diseñaran dos propuestas diferentes. Para diseñar estas propuestas se cogerán ideas del libro “Didáctica de las matemáticas” de María del Carmen Chamorro.

Con las dos propuestas diseñadas se elegirá una de ellas y se llevará a la práctica. Con las respuestas obtenidas en este apartado, se realizara un análisis y para terminar se hará una comparativa entre el marco teórico y las respuestas obtenidas en la práctica.

2. MARKO TEORIKOA

2.1 atalean problemen ebazpenerako autore klasiko baten ikuspuntua landuko da, Polyarena (1965), hain zuzen ere. 2.2 atalean, berriz, buruketa matematikoak ebazteko metodologia bat azalduko da, MBS eskema (Mason, Burton eta Stacey, 1988) hain zuzen ere zeinean hauek ebazteko teknika desberdinak adieraziko diren. 2.3 atalaren egoera didaktikoen teoria (Brousseau, 2007 azalduko da eta honen barne, hiru azpiatal garrantzitsu daude, oztopoak, fenomenoak eta ikasleak egoera desberdinetara ohitze (Brousseau, 2007) atalak.

2.1. George Polya

George Polyak buruketa bat aurrera eramateko orduan lau fase garatu zituen, *problemaren ulerpen fasea, planifikazio fasea, plana gauzatzearen fasea* eta *atzera bueltatze fasea* (Polya, 1965) hain zuzen ere. Baina buruketa bat aurrera eramaten den momentuan lau fase hauek jarraitzearekin ez da zertan arrakasta izan behar. Horregatik Polyak argia adierazi zuen askotan beharrezkoa dela egindakoaren notazioak, krokisak etab egitea. Hau *oharrak hartzea* (Polya, 1965) bezala definitu zuen.

Honako esaldietan Polyak definituriko lau faseak zertan diren definituko da. Problema baten ebazpena egiterako orduan, problemaren inguruko ikuspuntua aldatuz doa. Esaterako, arazoa irakurtzen den lehenengo aldian, honen inguruan dagoen ikusmoldea oraindik murritza da, honen inguruan lanean jartzean ikusmoldea desberdina izango da eta hau berriz aldatuko da problema ebaztear dagoenean. Beraz, problema bat ez da modu berdinean ikusten problema irakurtzen den momentuan eta emaitza lortzear dagoenean.

Ikasleari laguntzeko eman ahal zaizkion bai galderak baita iradokizunak ere 4 lan fasetan bereiz daitezke. Lehenik eta behin, *problemaren ulerpen* fasea dator, zeinean zehazki zer eskatzen den jakin behar den. Bigarrenik, probleman agertzen diren elementuen arteko erlazioak existitzen diren edo ez antzeman behar dira, hau da, ikusi egin behar da ezezagunaren eta datuen arteko harreman non dagoen *planifikazio* *fasea* aurrera eraman ahal izateko. Hirugarrenik, *plana gauzatzea* martxan paratu behar da. Laugarren eta azkenik, ebazpena lortu denean *atzera bueltatze fasea* egin behar da lorturiko emaitzak birpasatzeko eta eztabaidatzeko.

Goian aipatuak dauden fase guztiak garrantzitsuak dira. Izan daiteke ikasle batek kasualitatez burutazio on bat izatea eta zuzenean emaitza lortzea. Baina askotan honako kasualitateek emaitza desegokiak sortzen dituzte. Gertakizun hau, gehien bat, ikasleak problema guztiz *ulertu* gabe kalkuluak egiten hasten denean gertatzen da. Orokorrean ez du ezertarako balio xehetasunez arduratzea arazoaren hein handia ulertu ez baldin bada baina honekin ez da esan nahi xehetasunei ez zaiela garrantzia eman behar. *Ulerpen fasea* guztiz kontrolatua izateko buruketaren ildo guztiak ulertu behar dira. Akats asko ekiditen dira ere pauso edota fase bakoitzaren ondoren egindako *pauso hori egiaztatzen* bada *plana* aurrera eramaten den bitartean. Eta emaitzarik hoberenak galdu egin daitezke ikaslea *berriz pentsatzen* ez baldin badu.

Lehen esan bezala, Polyak azalduriko lau faseek garrantzi berdina dute, batak bestea gabe ez duelako zentzurik eta beraz, hauetako pausu bat ematen ez baldin bada, edota gaizki egiten baldin bada, ezin izango da problema modu egoki batean ebatzi. Beraz, lehenik eta behin *problemaren ulerpena* dator. Zentzugabekeria bat da ulertzen ez den galdera bat erantzuten saiatzea, baita oso deserosoa ere. Baina honen inguruko arazoak maiz gertatzen dira buruketa bat ebazterakoan, bai eskolaren barne baita kanpo ere eta hau da zehazki irakaslearen lana. Ez ulertze hori ekiditea. Baina ikasleak ez du soilik problema ulertu behar, hau ebazteko grina izan behar du ere. Askotan, ikasleak buruketak egiteko gogo gutxi izaten dituzte eta arazo hau ez da zergatik ikaslearena izan behar. Gehiago esanda, sarritan irakaslearen errua da buruketa gaizki aukeratzeagatik edota grina sortzeko tresnak eta teknikak ez erabiltzeagatik. Esleitutako problema egokia izan behar da, hau da ez oso zaila ezta oso erraza ere; honetaz aparte, ikasleen aurrean azaltzeko modua ere oso garrantzitsua da. Behar den denbora erabili behar da azalpenean eta modu natural eta erakargarri batean aurkeztu behar zaie. Ikusi egin behar dute buruketa bat ez dela soilik paper baten gainean gertatzen, baizik eta mundu errealean sarritan ematen direla.

Baina garrantzitsuena beti ikasleak buruketak aurkezturiko enuntziatua argi eta garbi ulertzea da. Irakasleak hein handi batean hau konproba dezake ikasleari irakurritakoa bere hitzekin azaltzeko eskatuz. Argi eta trabatu gabe esaten baldin badu guztiz ulertu duela frogatzen da. Ikaslea buruketaren atal desberdinak zatitzeko gai izan behar da, hau da, datuak, galdera eta baldintzak. Eta hau modu erraz batean konprobatu daiteke ikasleari honako estiloko galderak eginez: Zer eskatzen zaizu?; Zeintzuk dira datuak?; Zein da baldintza?

Ikasleak buruketa guztiz ulertzeko bertan dauden atal guztiak ulertu behar dira eta hau lortzeko, atal bakoitza lasai, behin baino gehiagotan eta ikuspuntu desberdinak erabiliz irakurri behar da. Gomendagarria da oso buruketaren datuekin krokis bat egitea, datuak eta galdera nabarmenduz. Elementu hauei izen bat jarri behar zaie eta beraz, *ohar bat sartzea* egokia da ere, baina kontu handia izan behar da hautatzen diren sinboloekin.

Goian azalduriko guztiak hobeto ulertzeko adibide bat erabiliko da eta praktikara eramango da. Honako adibidea esleitu da oso garbia baita: “paralelepipedo angeluzuzen baten luzera, zabalera eta altuera izanda, lor ezazu honen diagonala” (Polya 1965, 29). Honako planteamendua egiten hasteko ikasleak Pitagorasen teorema ezagutu behar dute baita honen aplikazio geometrikoak ere, baina gerta daiteke ikasleak soilik geometriako zenbait ezagutza izatea. Nahiz eta ikasleak geometria edota Pitagorasen teorema ez ezagutu buruketa hau ebatzi dezakete irakasleak modu egokian aurkezten baldin badie. Hau egiteko, zehaztasuna beharrezkoa da, eta hau lortzeko irakasleak abstraktutik konkretura pasa beharko da, hau da, arbelean paralelepipedo laukizuzen bat marraztetik, errealitateko paralelepipedo laukizuzen bat ikustera. Demagun irakasleak bere klasea jartzen duela eredu (neurriak estimazioak edo neurri zehatzak izan daitezke). Irakaslearen eta ikasleen arteko elkarrizketa modu honetan gauzatuko da:

- Zein da galdera?
  Paralelepipedo laukizuzenaren diagonalaren luzera.
- Zeintzuk dira ematen dizkiguten datuak?
  Luzera zabalera eta paralelepipedoaren altuera.

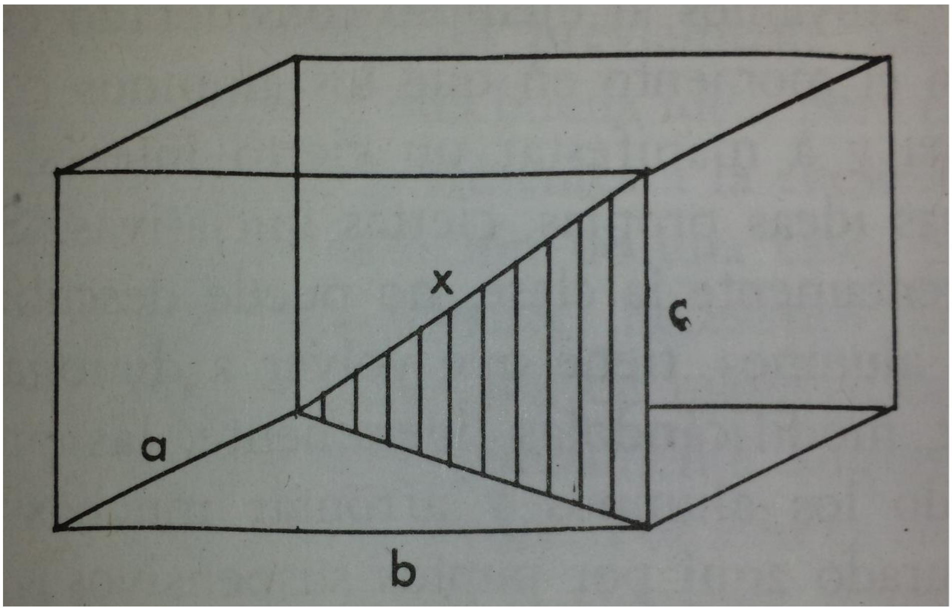
- Sar ezazue ohar bat, ze letra erabiliko zenukete ezezaguna izendatzeko?
  x
- Ze letrak erabiliko dituzue luzera, zabalera eta altuera izendatzeko?
  a, *b* eta *c*
- Zein baldintzak erlazionatzen ditu *a*, *b* eta *c* *x*-rekin?
  x, paralelepipedo laukizuzenaren diagonala da non honen luzera, zabalera eta altuera *a*, *b* eta *c* diren.
- Buruketa hau arrazoitua dago, hau da, ematen diren datuekin ebazpena lortu daiteke?
  Bai. *a*, *b* eta *c* ezagutzen baditugu, paralelepipedoa ere ezagutzen dugu, paralelepipedoa determinatua baldin badago, honen diagonala ere determinatua dago.

Buruketa guztiz ulertua dagoenean, Polyaren bigarren fasera pasa behar da, hau da, *planifikazio fasea.* Modu orokor batean baldin bada ere, ezezaguna lortzeko zein kalkulu, zein arrazoibide edota eragiketa egin behar diren bilatzen saiatu behar da ikaslea. Baina lehenengo fasetik, hau da, *problemaren ulerpenetik* bigarren fasera, hau da, *planifikazio fasera* pasatzea ez da gauza erraza, askotan trabak suertatzen dira eta erraza dirudiena bide luze bat izatera pasa daiteke. Izan ere, buruketa baten ebazpena ondo egiteko plan bat zehaztea guztiz beharrezkoa da. Baina ideia hau ez da zergatik bat batean agertu behar, forma hartzen joango da bai pixkanaka-pixkanaka edota saiakuntza eta errorearen bidez. Irakasle baten lana ikasleak ideia on batera bideratzea da baina inoiz ez bidea inposatuz. Ikasleak pertsonak izanda ikuskera desberdinak dituzte eta nahiz eta gehiengo bati irakasleak emandako gidapena oso egokia izan, gerta daiteke ikasle bati gidapen hori ez funtzionatzea eta beste bide bat beharrezkoa izatea. Orain adieraziko diren galderak eta iradokizunak, ikasleen ideiak garatzen laguntzea dute helburu.

Irakasle batek ikasle baten egoera ulertzeko, bere baitako esperientzietan pentsatu behar du, bere zailtasun propioetan baita hauek gainditzeko estrategietan ere. Baina ikasle bat gidatzeko, irakasleak gaia guztiz kontrolatu behar du, izan ere irakasleak gai bat ez baldin badu kontrolatzen ikasleari egindako gidapena desegokia izan daiteke. Ideia onak pasaturiko esperientzietan eta aurretik bereganaturiko ezagutzetan oinarritzen dira. Hau da, ideia on bat ez da lortzen soilik buruz ikasitako zerbaitekin, baina ideia bat gauzatzeko beharrezkoak dira aldez aurretiko ezagutza batzuk izatea. Adibide batekin hobetu ulertzen da: etxe bat eraikitzeko materialak soilik izatearekin ez da etxea eraikitzen baina materialik gabe ezin da etxe bat eraiki. Berdina gertatzen da ikaskuntzarekin. Ikaskuntza esanguratsu bat sortzea ez da soilik ezagutzak pilatzea baina ezinezkoa da ezagutzarik gabe ikaskuntza esanguratsu bat sortzea. Matematikaren kasuan *materialez* (Polya, 1965) hitz egiterakoan ikaslearen ikaskuntzan zehar egindako buruketa ebatziak, ariketak, teoremak dira, beste askoren artean. Beraz, gidapena asterako orduan honako galdera planteatzea oso egokia da. *Norbaitek buruketa hau besteren batekin erlaziona dezake?* Baina galdera hau ez du beti ebazpen edota soluzio bat ematen, askotan iradokitzen den buruketarekin erlazioatuak dauden beste buruketak asko dira, hau da, zenbait puntu komunean dituzte. Eta beraz, zein da hainbesteren artean aukeratu behar dena? Zein da egokia? Galdera hauei erantzuna emateko, ezezaguna begiratu behar da, eta ezezagun berdina edota antzekoa duen buruketa batean pentsatu behar da. Aldez aurretik ebatzitako buruketa bat aurkitzen baldin bada, zorte handia izan dugula kontsidera dezakegu. Hau gertatzen denean, aurreko buruketa hori erabil dezaket? galdera planteatu behar da. Galdera hauek guztiak ondo ulertuak eta ondo aztertuak baldin badaude, hasieran planteaturiko buruketa ebazteko pistak ematen dizkigute eta askotan laguntza gisa erabiltzen dira ideia berriak sortzerako orduan; baina honek ez du zergatik funtzionatu behar. Hau gertatzen denean, beste ikuspuntu bat bilatu behar da eta ikuspuntu berri honetatik ikerketa fasea, hau da, *planifikazio fasea* hasi behar da berriz ere. Hau egiteko buruketa aldatzen saiatu behar gara, honekin ez da esan nahi buruketaren funtsa aldatu behar denik, baizik eta honen galdetzeko modua, hau da, konkreturik abstraktura pasa, alderantzizko pausua egin, analogiak bilatzen saiatu. Baina honek guztiak funtzionatzen ez baldin badu, saiatu gaitezke erlazionaturik dagoen beste problema bat ebazten.

Beste buruketa edota teorema bat erabiltzen denean dagoen arriskurik handiena da hasierako problematik desbideratzea eta ikaslearen funtsetik aldentzea, hau ekiditeko, datu guztiak eta buruketaren baldintza izan behar dira kontuan beti.

Paralelepipedo laukizuzenaren buruketari jarraipena emateko, *planifikazio fasearekin* hasi behar da. Ikaslea jada buruketa ulertzen hasia da eta honen inguruko interesa adierazten du. Ikasleak diagrama baten bitartez jada ikusia izan behar dute ezezaguna triangelu baten barne dagoela, zehazki triangeluaren hipotenusa dela, eta beraz, gai izan beharko lirateke ebazteko.



1. Irudia. Paralelepipedo buruketaren krokisa.

Baina gerta daiteke ikasleak zeharkako aipamen hau ez ikustea, hau gertatzen baldin bada, irakasleak geroz eta aipamen argiagoak egiten joango da. Baina inoiz ere ez dio emaitza bat galdera moduan emango. Izan ere hau gertatzen baldin bada *Topaze efektu* baten aurrean egongo gara (fenomeno hau marko teorikoaren 2.3.2 atalean azalduko da) Ikasleak, irakaslearen laguntzarekin, beharrezkoa den puntua lortzen dutenean, irakaslea ikasleak lorturiko arrazoiketa egokia den ziurtatu behar du kalkulu errealetara bideratu baino lehen. Horretarako aipamenak erabiliko ditu berriz ere, gehien bat pistak emango dizkio, baina inoiz ez erantzun bat. Ikasleak izan behar dira beraien kabuz erantzuna lortzen dutenak. Ikasleek plan bat argi dutenean, aurrera jarraitzeko “baimena” izango dute eta Polyaren hirugarren fasea egitera pasako dira, hau da, *Plana gauzatzera*. *Planifikazio fasearekin* alderatzen baldin badugu, hirugarren fase hau egitea nahiko erraza da, behar den gauza bakarra denbora eta pazientzia da. Baina izan daiteke ikasleak plana ez jarraitzea. Hau normalean gertatzen da ikasleek beraiek propioki plana sortu ez dutenean eta irakasle batengatik kopiatzen dutenean.

Horregatik oso garrantzitsua da ikasleek propioki plana sortzea, modu horretan beren plana jarraitzen dutelako eta beraz, hirugarren fase honetan arrakasta izateko probabilitateak handiagoak izango dira. Honek ez du esan nahi ikaslea *planifikazio fasean* bakarrik utzi behar denik, lehen aipatu den bezala, irakaslea ikasleak bideratu behar ditu.
Plan bat aurrera eramaten denean, ikasleak ematen duen urrats bakoitza *egiaztatu* (Polya, 1965) behar du. Emandako urrats bakoitza *egiaztatu* egin behar da eta horretarako bai "intuizioa" baita "frogapen formala" erabil daitezke. Irakasleak ikasleei ikusi eta frogaturen arteko desberdintasunak erakusten saiatuko da, galdera desberdinak eginez, esaterako hauek: *argi eta garbi esan dezakezu eginiko urrats hori ondo dagoela?* baina, *froga zenezake?* Azkeneko puntu hau errazago ulertuko da ondorengo adibidearekin.

Paralelepipedo laukizuzenaren adibideari hirugarren fasea aplikatuko zaio. Ikasleak jada ebazteko ideia izan du, gai da triangelu zuzenaren hipotenusa bere ezezaguna, *x*, dela ikusteko. Horretaz aparte, konturatu da triangelu horren katetoetako bat paralelepipedo laukizuzenaren altuera dela eta beste paralelepipedo laukizuzenaren oinaren diagonala. Beraz, konturatu da emaitza lortzeko beste ezezagun bat beharrezkoa duela, *y*, zehazki. Non *y* paralelepipedo laukizuzenaren oinaren diagonala den. Eta bi ezezagunak izanda, honako adierazpena lortzera ailegatuko da:

$$x^2 = y^2 + c^2$$

$$y^2 = a^2 + b^2$$

eta, ordezkatuz ezezagun laguntzailea y^2:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Irakasleak ez dio ikasleari ezer esango, soilik *egiaztatzeko* eskatuko dio. Esaterako irakasleak ikasleari galdetu diezaioke ea gai den ikusteko *x*, *y* eta *c* zuzenkiek triangelu zuzena osatzen dutela. Galdera honi "bai" erantzun dezake oso modu zintzoan, baina estutasun batean egongo da irakasleak frogatzeko eskatzen baldin badio.

Askotan azkeneko galdera hau ekiditen saiatzen da, gehien bat ikasleak ondo prestatuak ez baldin badaude. Honako galdera bat nahiko zaila suertatu baitaiteke ondo prestatuak ez baldin badaude. Baina beharrezkoa da. Galdera honen baitan ikaskuntza esanguratsua baitago.

Bukatzeko, *atzera bueltatze fasea* dago. Normalean honako fase hau ez da egiten eta akats larri bat da. Honako fase honen bitartez, lehen egindako lan guztia birbegiratzen eta egiaztatzen da. Nahiz eta ikaslerik hoberenak izan emaitza lortu eta gero beren koadernoak itxi eta beste gauza bat egitera doaz. Hau egitean, lana ez dute bukatzen izan ere fase bat ez dutelako egiten. Honako fase honek bi funtzio ditu: alde batetik ikasleak birbegiratzearekin aurretiko faseren batean akatsen bat egin baldin badu zuzen dezake, eta bestetik (garrantzi handiagoa duena) emaitzaren inguruan hausnartuz, emaitza birpasatuz eta emaitza lortzerainoko bidea berrikusiz ikasitako ezagutzak finkatuko dira eta buruketa berriak ebazteko teknika berriak garatuko dira, soilik bi hauek lortzen direnean ikaskuntza esanguratsua izan dela esango da.

Irakasle bat saiatu behar da beti matematikako buruketak mundu errealarekin harremanetan jartzen. Izan ere ikasleak esfortzu handia egin dute buruketa ebazteko eta ikusi egin nahi dute egindako esfortzu hori beren bizitzan aplikagarria izango dela. Irakaslea saiatu behar da ikasleei mundu errealeko kasuak ematen zeinetan buruketan erabilitako teknika edota planteamendu berdinak edo antzekoak erabilgarriak izango diren.

Paralelepipedo laukizuzenaren adibideari bukaera emateko, irakasleak honako galderak planteatuko dizkie ikasleei. *Erantzuna frogatu daiteke?* Galdera hau zaila izan daiteke eta askotan ikasleek arazoak izaten dituzte frogapenak egiteko. *Datu guztiak erabili dira?*, *arrazonamendua frogatu daiteke?* eta *erabilitako metodologia edota emaitza beste buruketa batean aplikagarria izan daiteke?* honako galdera hauen bitartez, irakasleak ziurtatu dezake ikasleak *atzera bueltatze fasea* modu egokian egin dela eta beraz, ikaskuntza esanguratsua izan dela.

Irakasleak ikasleei galderak egiterako momentuan argi izan behar du nola egin behar dizkien. Hasieran proposaturiko galderak irekiak eta orokorrak izan behar dira eta gutxinaka-gutxinaka galdera zehatzagoetara pasa behar da ikasleak erantzun bat ematen duten arte. Inoiz ez galderaren barne erantzuna emanez, hau *topaze efektuak* bailitzake. Gainera, irakasleak ematen dituen galdera guztiak ikasleari bururatu ahal zaizkion galderak izan behar dira. Galdera bat orokorra eta irekia izan behar dela esaten denean beste problema batzuetara aplikagarria izan behar dela esan nahi du. Modu honetan ikasleak *gaitasunak* (Polya, 1965) garatuko ditu eta ez teknika indibidualak. Ematen diren iradokizun guztiak naturalak izan behar dira bestela desegokia suertatu daiteke. Gainera hauek ematerakoan denbora utzi behar da bat eta bestearen artean, ikaslea pentsa eta lan egin dezan.

Galderak egiterako orduan galdera mota desberdinak daudela jakin behar da eta kontuan izanda zein egiten den egokia izan daiteke edo ez. Galdera bat egiterako orduan kontu handia izan behar da, gaizki egiten baldin bada, honakoak gerta daitezkeelako:

1. Ikaslea ebazpena lortzear baldin badago, irakasleak planteaturiko iradokizuna uler dezake baina ebaztear ez baldin badago, galdera ez du ulertuko eta beraz, galdera horrek ez dio ezertan lagunduko, izan daiteke ere galdera baten bitartez ikaslea nahastea.
2. Ikasleak iradokizun bat baino gehiago pista garbi bat ematen baldin bazaio (erantzun bat galdera moduan etab), buruketaren problematika guztia eginda emango zaio. Honek ikasleak ez pentsatzea ezta lan egitea dakar eta beraz ikaskuntza esanguratsua ez da lortzen.
3. Egiten diren galderak naturala ez baldin badira, galdera ez hezigarriak izango dira eta beste buruketa batzuk planteatzerako orduan ezin izango ditu erabili.
4. Ikasleak iradokizuna ulertzen baldin badu ere, ez du ulertuko zergatik irakasleak egin duen galdera hori eta nola lortuko duen ikasleak ideia hori. Ustekabean eta modu antinaturalean ailegatu baitzaio erantzuna, azken finean beste batengatik lortu duelako. Hau guztiz ez hezigarria da ere.

Jada hitz egin da Polyak eginiko lau faseen inguruan, baina honako atal honetan fase bakoitza gauzatzeko modua azalduko da:

Lehenengo fasea *problemaren ulerpena* fasea da eta bertan buruketa nola hasi behar den azaltzen da. Lehenik eta behin, *nondik hasi behar da?* galdera planteatu behar da, eta galdera honen erantzuna beti buruketaren enuntziatuarekin hastea da, baina *zer egin daiteke?* ikaslea saiatu behar da buruketa hein oso bat bezala ulertzen, bere osotasuna ahalik eta hobekien ulertzen momentuz xehetasunak alde batera utziz. Eta *hau eginez zer lortzen da?* buruketa ulertu egiten da, irakurlea problemarekin ohitzen da eta bere helburua argitzen du.

Teorikoki, goian azalduriko guztiak erraza iruditu arren arazoak eta zailtasunak sortzen dira, hauek ekiditeko edota modu errazago batean gailentzeko hona hemen hau trabatzeko zenbait gomendio:

Askotan zailena nondik hastea erabakitzea da. Goian esan bezala, beti enuntziatua irakurtzen hasi behar da buruketa bat, zer daukagun eta zer egin behar den jakiteko. *Zer egin dezaket?* behin enuntziatua ondo irakurri dela eta orokorrean ulertu egin denean, buruketaren atalak isolatu egin behar dira. Hipotesia eta konklusioa buruketa baten atal nagusiak dira eta frogatzeko atalak deitzen zaizkie, galdera, datuak eta baldintza ebazten diren atalak dira. Hasieran atal bakoitza banan-banan pentsatu behar da, gero atalen arteko konbinazioak egin behar dira beraien arteko erlazioak ikusteko. Bukaeran atal guztien konbinazio bat egin behar da eta hauen arteko erlazio ikusten saiatu behar da. Baina, *zer lortzen da pauso honekin?* Pauso hau ematearekin batera, buruketaren atal guztiak guztiz ulertzen dira baita xehetasun guztiak ere (zeinak garrantzitsuak izango diren hurrengo faseetarako).

Bigarren fasea *planifikazio fasea* da eta bertan ideia on bat bilatzea da helburua. Berriz ere bi galdera planteatuko dira. *Nondik hasi behar da?* Eta *zer egin dezaket?* Hasteko lehenengo faseko atal guztiak argi izan behar dira, hauek argi izan ezkero, beraiekin zer egin daitekeen atala hasten da. Buruketa ikuspuntu desberdinetatik begiratu behar da, xehetasun desberdinak aztertu behar dira, xehetasun berdinak ikuspuntu desberdinak erabiliz aztertu behar dira, xehetasunak indibidualki eta konbinatuko aztertu behar dira eta berriz ere ikuspuntu desberdinen bitartez aztertu behar dira. Saiatu behar da ikaslearen aldez aurretiko ikaskuntzak eta azterturiko puntuen arteko komuneko zerbait bilatzen. Honek *zer aurki dezaket?* galdera planteatzen du. Izenburuak berak esaten duen bezala *planifikazio fasea* da eta beraz, ideia bat bilatzen da, ahalik eta ideia gehien eta egokienak aurkitzea da helburua. Baina ideia bat aurkitzen denean ez du zergatik osoa izan behar eta beraz, *zer egiten da ideia osatugabe batekin?* Galderari erantzun behar zaio. Lehenik eta behin, hausnartu egin behar da. Ideia on bat baldin bada, hausnarketa handiago bat egingo da eta hau egiteko ikuspuntu desberdinak erabili beharko dira ideiaren puntu guztiak aztertzeko. Askotan ikasleak *zer lortzen dut honekin?* Galdera planteatzen diote beren buruei. Aurreko pausuaren bitartez, eta zortea izan ezkero, ideia on batetik emaitza lor daiteke. Baina nahiz eta ideia on bat ez izan ideia guztiek emaitza onera bideratzen gaituzte azken finean saiakuntza errorearen bitartez ere emaitza egokia lor daiteke.

Behin erabiliko den plana garbi dagoenean, *plana gauzatzea* fasea dator, bertan berriz ere *nondik hasi behar da?* Eta *zer egin dezaket?* galderak planteatu behar dira. Hasteko ideia on bat izan behar da eta hau aurrera eramateko modua argi izan behar da ere. *Plana gauzatzen* den bitartean saiatu behar da eragiketa aljebraiko guztiak eta pauso guztiak pentsatuak eta landuak egiten. Hau da, arazo bat edota eragiketa bat zailegia baldin bada, saiatu behar da atal sinpleagoetan banatzen errazago eta eraginkorrago izan dadin.

Bukatzeko *atzera bueltatze fasea* dago zeinean lehenengo hiru faseetan emandako pausoak birpasatu behar diren. Hau egiteko lehenik eta behin emaitza ondo eta eskatzen den guztia dagoela ziurtatu behar da, horretarako emaitza puntu desberdinetatik begiratu behar da eta aldez aurretiko ezagutzekin konparatu eta egiaztatu behar da. Modu honetan ikaskuntza esanguratsua lortuko da. Alde batetik lorturiko informazioa zuzena dela eta bestetik, ikaslearen aldez aurretiko informazioarekin alderatzen denean, ikasleak jada dakienari buruketaren bitartez ikasitakoa gehituko du.

2.2. MBS eskema:

MBS eskemaren (Mason, Burton eta Stacey, 1988) egitura bi atal nagusietan banatzen da: *prozesuak* deituriko bat eta *lan faseak* deituriko beste bat. Lehenengoaren barne, hau da, *prozesuak* barne bi azpiatal aipatzen ditu autoreak *partikularizazioa* eta *generalizazioa* hain zuzen ere. Bigarren atalean aldiz, hau da, *lan faseen* atalean, hiru fase deskribatzen ditu autoreak, *abordatze, eraso* eta *berrikusketa faseak* alegia.

2.2.1 *Prozesuak*

Lehenengo atal honetan bi azpi atal dauden. *Partikularizazioa* eta *generalizazioa.*

Partikularizazio atal hau hobeto ulertzeko hoberena adibide batetik hastea da, zehazki buruketa batetik. Buruketa biltegia izenburua dauka eta honakoan datza:

“Biltegi batean %20 beherapena lor daiteke, baina aldi berean %15eko zerga ordaindu behar da. Zer nahiagoko zenuke lehenengo kalkulatzea, deskontua edo zerga?”

Buruketa honekin hasteko lehenik eta behin eskatzen denaren ideia konkretu eta oso bat izan behar da eta hau lortzeko hasierako zirriborro batzuk egitea oso komenigarria da. Askotan buruketa abstraktu bat zaila suertatzen da eta beraz, errazagoa da partikularizazio batetik hastea. Demagun 100€ko artikulu bat erosi nahi dugula.

$$(100 * 0.8) * 1.15 = 92$$

$$(100 * 1.15) * 0.8 = 92$$

Erantzuna berdina lortzen da, baina honekin ez da frogatu kasu guztietarako berdina lortuko denik. Oraingoan beste zenbaki batekin saiatzea komenigarria da. Demagun 120€ko artikulu bat erosi dugula.

$$(120 * \ 0.8) * 1.15 = 110.4$$

$$(120 * 1.15) * 0.8 = 110.4$$

Kasu honetan berdina lortzen da ere. Hau ezusteko bat izaten da ikasleentzat ez baitute espero. Eta hau da zehazki arrazonamendu matematikoa elikatzen duen grina. Honen bidez ikaskuntza esanguratsu bat lortzea errazagoa da. Prozesu hau errepikatzen den heinean, ikaslea geroz eta ziurrago egongo da eta bere buruan eskema bat sortzen hasiko da. Eskema hau egiten duten bitartean saiatuko dira ez soilik prezio konkretu baterako funtzionatzen duen. Baizik eta *P* prezio guztietarako frogapena lortzeko grina izango dute. Prozesu hau behin baino gehiagotan egin eta gero, seguruenik ikaslea honako arrazonamenduetara iritsiko dela.

a) Prezioa bati %20a kentzea prezio horren %80 ordaintzearen berdina da, beraz, prezioaren 0.80 ordainduko da.

b) Prezioa bati %15 gehitzea prezio horren %115 ordaintzearen berdina da, beraz, prezioaren 1.15 ordainduko da.

Lehenengo bi kasu konkretuei aplikaturik, argi ikusten da berdina dela zerga edota deskontua lehenengo edo bigarren aplikatzea. Prezio berdina lortzen dela. Hau kontuan izanda ikasleak egin beharko lukeen hurrengo saiaketa abstraktua izan beharko luke eta honako moduan irudikatu beharko luke:

Lehenengo deskontua aplikatuz:

$$(P * 0.8) * 1.15$$

Lehenengo zerga aplikatuz:

$$(P * 1.15) * 0.8$$

Prozesu hau egitea oso garrantzitsua da, xehetasunetatik urruntzean analisi handiagoa egin daitekeelako eta mota hauetako jarduerak arrazonamendu matematikoa garatzeko funtsezkoak direlako.

Buruketa hau aurrera eramateko *partikularizazio* teknika erabili dugu, zeinean adibide konkretuen bitartez galdera hobeto ulertzea zuen helburu. Aukeraturiko adibideak kasu partikularrak dira zeinak helburu konkretu batetik atera diren. Baina askotan zaila da buruketarekin hastea edota jarraitzea. Momentu honi *Trabatua* (Mason, Burton eta Stacey, 1988) egotea deitzen zaio. Oso egoera normala da eta hau gertatzen denean irtenbide bat bilatu behar da, kasu honetan *partikularizazioa* proposatu da. Teknika hau oso erraza da eta kasu orokor batetik adibideak edota kasu konkretuak egitean datza, hau geroz eta gehiagotan egin, orduan eta kasu orokorraren ulerpen maila handiagoa izango da eta beraz, buruketa ebazteko aukera gehiago egongo dira. Teknika hau klase batean aurrera eramateko honako gomendioak eman daitezke: *Saiatu egin ahal zara adibide batekin?* Edota *zer gertatuko litzateke kasu partikular batean?*

Partikularizazioa hobeto ulertzeko, Banwell, Saunders eta Tahta (1972) liburutik harturiko adibidea azalduko da. Buruketa honen izenburua “paperezko tirak” deitzen da eta honetan datza:

“Imajina ezazu mahai baten gainean paperezko tira luze eta fin bat daukazula. Ezkerreko kirtenetik hartu ezazu tira eta eskuineko kirtenaren justu gainean jar ezazu, hau egin eta gero zure eskua erabiliz tira osoa zapal ezazu. Modu honetan justu-justu tira erditik tolestua egongo da. Prozesu hau beste bitan errepika ezazu, zenbat tolestura izango ditu paperezko tirak? Eta prozesua 10 aldiz errepikatzen baldin bada?”

Estilo honetako buruketak ebazteko unean arazoak izatea oso arrunta da, hau da, t*rabatua* egotea. Beraz, emaitza lortzeko ideiak sortzen saiatu behar da ikaslea.

- Kontatu itzazu zenbat tolesdura dauden prozesua bi aldiz egin eta gero.
- Marrazki bat egin ezazu.
- Kasu konkretu bat egin ezazu, hau da, har ezazu paperezko tira bat eta saiatu zaitez problemako kasu bat egiten.
- Bi, hiru edo lau tolesdura egin itzazu eta saia zaitez arau orokor bat sortzen
- Tolesdurek zerbaitekin dute harremana?

Ikasle bati erantzun bat ematea ez du ezertarako balio. Erantzun batekin ikasle batek ez du pentsatzen eta beraz, ikaskuntza esanguratsua ez da lortuko. Hau bermatzeko ikaslea lan egin behar du, ikaslea t*rabatua* dagoenean ikasteko aukera du. Adibidez buruketa hau *partikularizazio* teknikarekin ebatzi daiteke. Ez da “biltegia” buruketan erabilitako *partikularizazio* teknika berdina erabiliko, oraingo honetan esperimentazio fase bat izango da, zeinean paper erreal batekin edota marrazki batekin esperimentuak egingo diren. “Biltegia” buruketarekin konparatze bada desberdina da oso. Oraingoan esperimentu fisiko bat da eta “biltegia” buruketan esperimentazio teorikoa (matematikoa).

Baina kontuan izan behar da *partikularizazio* fasean ez dela buruketaren ebazpena lortzen, emaitza lortzeko laguntza bat besterik ez da, buruketa ulertzeko eta hau errazago erasotzeko modu bat alegia. Gainera kasu konkretuen bitartez buruketaren xehetasunak eta orokorkeriak hobetu ulertuko dira eta beraz, emaitza bat lortzea errazagoa izango da. Emaitza lortzerako prozesuan lana egin baldin bada, ikaskuntza esanguratsuagoa izango da.

Partikularizazioaren inguruan hitz egiten denean, beharrezkoa da txanponaren beste aldearen ingurua hitz egitea ere, hau da, *generalizazioaz*. Prozesu honen bitartez, adibideetatik susmoak sortzen dira, hau da, kasu erreal eta konkretutatik ideia orokorrak sortzea. *Generalizazioak* matematikaren funtsa dira, hau da, helburu gorena. Egia da *partikularizazioak* oso erabilgarriak izan daitezkeela baina erantzun matematiko purua emaitza orokorra da, hau da, kasu partikular guztietarako balio duena. “Biltegia” adibidearen kasuan, 100 eurorekin zer gertatzen den jakitea garrantzitsua da, baita 120 eurorekin gertatzen dena, baina askoz adierazgarriagoa da jakitea deskontuaren eta zergaren ordenak ez duela inporta, hau da, biderketak trukatze propietatea duela. Bi kasuetan prezio berdina lortzen baita.

Baina prozesu honi hasiera ematea ez da erraza. *Generalizazio* bat hasi egiten da ikasleak eskema orokorraren azpiatalak susmatzen hasten denean. “Biltegiaren” adibidean, zenbait prezioren kalkulua egin eta gero, ikusgai geratzen da faktoreen ordenak ez duela azken prezioan eraginik, hau da zehazki eskema orokorraren azpi egitura eta beraz, *generalizazioa*. Eta prozesu hori aurrera eramateko ikusitako eskema orokor horren azpiegitura idatzi egin behar da, hau egiteko sinboloak erabili behar dira. Kasu honetan “P” hizkia erabiliko da “prezioa guztiak” irudikatzeko. Baina nahiz eta iruditu *generalizazio* fasea bukatu egin dela, azkeneko urrats bat egin behar da oraindik. Lehen azaldu den bezala, *generalizazio* fasea bukatu egiten da lege edota arau orokor bat sortzen denean eta kasu guztietarako erabilgarri denean. Beraz honako bi galdera hauek ere kontuan hartu behar dira: “zer gertatuko litzateke zergak edota deskontua aldatuko balituzte?” Eta “noizbait garrantzia izango du faktoreen ordenak?”

Galdera hauei erantzuna emateko buruketako datuei adierazpen sinboliko bat emango diegu. Deskontuari, zatiki moduan edota ehuneko moduan, D deituko diogu eta zergari, zatiki moduan edota ehuneko moduan Z deituko diogu. Orduan, lehenengo deskontua eginez gero:

$$P(1-D)(1+Z)$$

Eta, lehenengo zerga eginez gero:

$$P(1+Z)(1-D)$$

Beti lorturiko azken emaitza berdina izango da biderketen trukakortasun propietatea dela eta. Sinboloak erabiliz arrazoiketa modu bisual eta sinple batean adieraztea dakar eta gainera izan daitezkeen aukera eta kasu guztiak adieraziak geratzen dira ("biltegiaren" kasuan dauden deskontu eta zerga guztiak). Baina nahiz eta teknikarik bisualena izan, sinbologiaren erabilpena ez da batere erreza, hau modu egokian egiteko lan asko egi behar da eta sinboloetara ohitu egin behar da zenbakiak erabiliko baliza bezala sentitu arte.

"Biltegia" adibidea oso esanguratsua da bertan *partikularizazio* eta *generalizazio* faseak argi eta garbi ikusten direlako. *Generalizazio* fasea egin ahal izateko ebidentziak *partikularizazio* fasean bereganatuko dira. Ulertu egin den eskema orokor bat adieraztean, susmo bat sortzen da zeinak geroko *partikularizazioetan* finkatu edota hautsi egin daitezkeen. Susmo berri bat sortzeak *generalizazio* fase berri bat dakar, baina oraingo honetan helburua egiazko arau bat sortzea edota arau hori zergatik den egiazkoa frogatzea da. Normalean *generalizazio* bat egiten denean araua sortzea "erraza" da edo beste modu batean esanda, arau orokorra da lortzen den lehenengo gauza, honen ondoren arau honen frogapena dator eta atal hau askoz konplexuagoa da.

Partikularizazioen eta *generalizazioen* adibideak egiten direnean, apunteak hartu behar dira, gero hauetatik ikasteko eta beraz, ikaskuntza esanguratsua izateko. Oharrak hiru gauzen inguruan hartu behar dira:

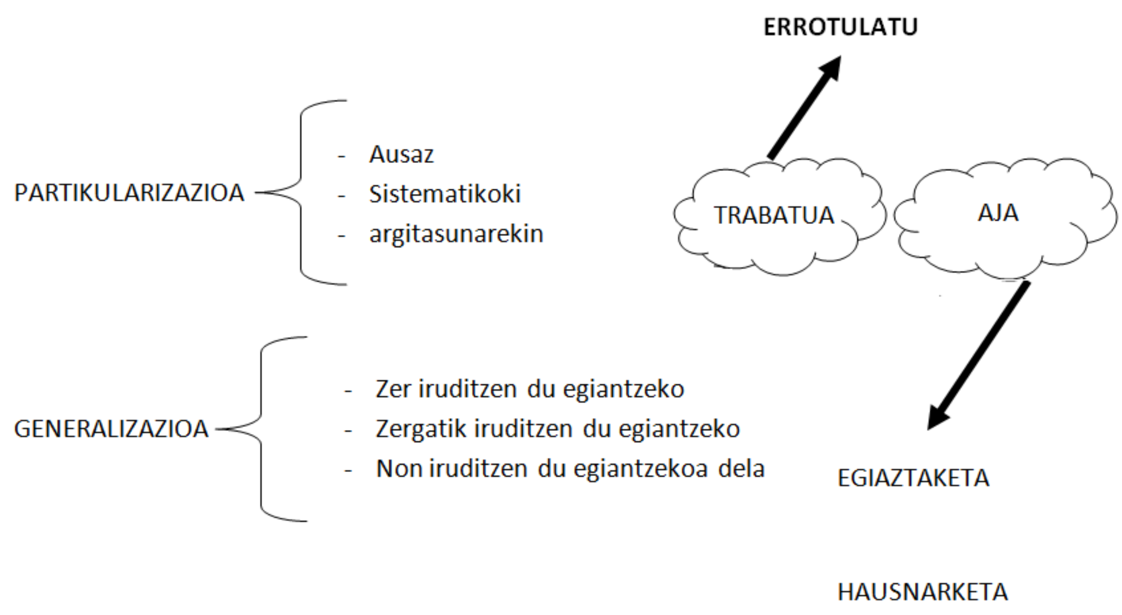
- Buruketa egiten ari zaren bitartean bururatzen diren ideia garrantzitsu guztiak.
- Egiten saiatzen ari zarena
- Egiten hari zaren horren inguruko zure ikuskera.

Egia da hau guztia apuntatzea nahiko zaila dela, baina pena merezi du saiatzea. Modu honetan *trabatua* zaudenean zerbait berri egiteko aukera ematen dizu.

Oso ideia ona da ere buruketa *trabatua* dagoenean, *trabatua* hitza idaztea. Azken finean hau da egoera honetarik ateratzeko lehengo pausua. Baina bi gauza hauek ez dira egin behar soilik teorialari batzuek esan zutelako, hau egiten da ikasleentzako zailtasun handiena orri zuriaren zuritasuna delako, hau da, askotan izandako ideia matematikoak, edota *trabatua* hitza idazteak orri zuri batek duen “sorginkeria” hautsi egiten du. Ikasle askok problema baten aurrean ez dakite zer egin, ez dakite nola hasi, teknika honen bidez egoera hau hautsi egiten da. Behin hasteko hesi hori hautsi egin dela, ideiak modu azkarrago, naturaltasun eta askatasun handiagoarekin bururatzen hasiko dira. Momentu horretan burura etortzen diren ideia guztiak eta egiten hasten den hori apuntatzea oso garrantzitsua da askotan egiten ari denaren haria galtzen delako, eta idatzia baldin badago, haria berriz hartzea errazagoa delako.

Baina oharrak idazten direnean ez da guztia idatzi behar, soilik beharrezkoa iruditzen den hori eta bakoitzak bere barnerako idazkera erabili behar du. Bestela denbora asko galtzen da eta ez da erabilgarria suertatzen.

Honako idatzi honetan matematikan funtsezkoak diren bi prozesu azaldu dira, *partikularizazioa* eta *generalizazioa*. *Partikularizaioa* prozesua egiterako orduan, adibideak ausaz, sistematikoki edo abilezia handiarekin hautatu behar dira eta gero azpiegitura bati aplikatu behar zaizkio, hau da, eskema orokor bat sortu. *Generalizazio* prozesua lege edota arau orokor bat aurkitzean datza eta hau egiteko susmoak, frogapenak eta beste problemendako eskemak sortzea egin behar da.



2. Irudia. *Partikularizazio* eta *Generalizazioaren* eskema

Behin *partikularizazio* eta *generalizazio* prozesuak azaldu eta gero, bigarren atalari hasiera emango zaio.

2.2.2 *Lan faseak*

Atal honen barne ere azpi atal desberdinak daude, hiru zehazki: *abordatze*, *eraso* eta *berrikusketa.* Fase hauek bereizten jakitea oso garrantzitsua da fase hauen bitartez buruketa baten momentu guztietan zer egin behar den jakiten delako. Hasiera batean eman dezake *erasoaren* fasea garrantzitsuena dela baina aitzitik, garrantzi gutxien duen fasea da (daukan garrantzia kendu gabe). Faserik garrantzitsuenak lehenengoa eta azkena dira, hau da, *abordatze* eta *berrikusketa* faseak. Buruketa bat gaizki egiten duten gehiengoak ez dute emaitza on bat ateratzen bi fase hauei garrantzi gutxiegia emateagatik. *Erasoaren* fasea soilik ondo egin daiteke buruketa modu egoki batean planteatu baldin bada, hau da, *abordatzean* planteamendu egoki bat egin baldin bada, eta eginda arrazoiketa matematikoei eta buruketaren momentu klabeei behar den garrantzia eman baldin bazaio.

Abordatze fasea

Fase hau beti egon behar da buruketa bat ebazterako orduan, jende askok uste du buruketa behin edo bitan irakurtzearekin azkeneko ebazpen batera ailegatuko direla, baina hau gutxitan gertatzen da. *Abordatze* fasea ongi egitea beharrezkoa da. Fase hau buruketa irakurtzen hastearekin batera (normalean idatziak egoten ohi direlako) hasi egiten da, beraz, *abordatzean* eman daitekeen lehenengo gomendioa ondo irakurtzea da, izan ere hau da fase hau ondo egiteko gakoa. *Abordatzean* buruketa zertaz hitz egiten duen argi geratu behar da eta hau bi punturen bidez lortzen da. Lehenik eta behin buruketak ematen duen informazioa ondo ulertu behar da eta ondoren, buruketak eskatzen duena. *Abordatze* fasean prestakuntza teknikoak egitea ere oso gomendagarria da, adibidez oharrak hartzea edota *partikularizazioaren* oharrak apuntatzea. Beraz, *abordatzearen* fase ondo egituratzeko honako hiru galderei erantzuna eman behar zaie:

- Zer dakit?
- Zer nahi dut?

- Zer erabil dezaket?

Hiru galdera hauen ordena ez da garrantzitsua, baizik eta hiru hauen erantzunen arteko erlazioak.

Zer dakit galdera erantzuteko *ezagutzak* bi modutatik lor daitezke. Alde batetik probleman dauden datuak daude eta bestetik indibiduoak dituen aldez aurretiko ezagutzak. Indibiduoarengan jada dagoen informazio hau irakurtzen den bitartean sortu edota burura etortzen da eta prozesu honi *berezko oihartzuna* esaten zaio. Baina honetaz aparte, buruketa irakurri eta gero, indibiduoak bere buruari horren inguruko zerbait ikusi duen galdetu egin beharko dio. Baina ez da pentsatu behar guztia indibiduoaren barne dagoela, enuntziatua ondo irakurri behar da. Nahiz eta tontakeria bat iruditu gaizki irakurtzea oso ohikoa da eta hau gertatzen denean informazio galdu egin daiteke. Hau argi adierazia geratzen da hitz jokoetan edota buruhausteak esaterako:

San Lucasera nindoala
Zazpi emakume zituen gizon batekin topo egin nuen.
Emakume bakoitzak zaku bat zuen.
Zaku bakoitzean zazpi katu zeuden.
Katu bakoitzak zazpi katakume zituen.
Katakumeak, katuak, zakuak eta emaztea,
zenbat zihoazen San Lucasera? (Mason, Burton eta Stacey, 1988, 41. orrialdea)

Jende gehienari buruketa hau planteatu bezain pronto kalkuluak egiten hasten dira, baina ondo irakurriz gero, ikusgai dago erantzuna lortzeko ez direla kalkuluak egin behar, erantzuna hasieratik garbi dagoela.

Fenomeno honen anteko zerbait gertatu ohi da buruketekin. Askotan ikasleak *eraso* fasera pasa nahi dira uste dutelako faserik garrantzitsuena dela eta ez diote behar bezalako garrantzia ematen *abordatze* faseari. Buruketa bat modu egokian gauzatzeko ondo irakurri behar da, behin baino gehiagotan eta kalkuluak hasi baino lehen zer lortu nahi den garbi izan behar da.

Beraz, zer dakit ondo jakiteko hoberena, beste ikasle bati ulerturikoa hitz propioetan ulerturikoa kontatzea, datuak idaztea eta ahal bada diagrama bat egitea eta dira. Beste pertsona bati ulerturikoa kontatzean ulerpen propioak azalean geratzen dira, datuak idaztean informazioa galtzeko aukerak behera egiten dute eta diagrama baten bitartez, informazioa modu bisualago batean geratzen da adierazia.

Zer nahi dut galderak funts nagusi bat du, determinatu egiten du zer den buruketa horretan indibiduoak lortu nahi duena. Beraz, galdera honek bi helburu ditu: lehenengoa erantzun bat lortzea da eta bigarrena frogapen bat aurrera eramatea. Nahiz eta iruditu galdera hau zentzugabekeria bat dela, buruketa asko zailak izatearen arrazoia aitzitik hau da, gaizki kalifikatu delako buruketan lortu nahi zena. Beraz oso gomendagarria da buruketa bat ebazterako orduan “zer nahi dut” bezalako galderak erantzutea. Modu honetan momentuan nahi dena zehaztu egiten da geroko errebisioetan edota zailtasun egoeretan zergatik egin den errazago ulertzeko. Askotan galdera hau erantzutea erraza da, adibidez lehen azalduriko “paperezko tirak” buruketan zenbaki bat da zehazki nahi dena. Hau sinbolikoki, demagun X batekin, adieraztea gomendagarria da modu honetan behar denari izen bat jartzen zaiolako eta beraz, lehen esaldi batekin definitu behar zen hori orain letra batekin adierazten delako buruketa erosoago eta azkarrago eginez. Baina sinbolo bat erabiltzerako orduan argi izan behar da zer den adierazi behar dena eta hobe da bederen paperaren izkina batean zehazki zer esan nahi duen idaztea.

Baina askotan ez da hain erraza, askotan zer nahi dut galderak arazoak ematen ditu buruketa baten arazoa beste buruketa baten barne dagoenean. Baina nahiz eta arazoak izan galdera hau erantzuteko, beti saiatu behar da erantzuten, honek abantaila handia ematen baitu buruketa ebazteko unean.

Azkeneko galderan, zer erabil dezaket, alegia buruketan ematen dizkigun datuen artean erabilgarrienak direnak eta gure aurretiko ezagutzetatik zer erabili behar den erantzuten laguntzen duen galdera da. Askotan informazioa hobeto ikusteko eta adierazgarriagoa izateko diagramak, taulak, grafikoak edota sinboloak erabiltzea komenigarria da. Teknika hauek erabiltzearen arrazoia askotan buruketa batzuk oso zailak eta konplikatuak diruditelako eta teknika hauek erabiliz argitasun handiagoarekin ikusteko aukera gehiago daudelako da. Baina aurrera eraman daitezkeen teknikak ez dute zergatik sinbolikoak izan behar, esaterako “paperezko tirak” buruketan oso teknika egokia da paper erreal batekin saiakuntzak egitea.

Eraso fasea

Trantsizio fasea da, *abordatze fasean* eginiko planak aurrera eramaten diren fasea alegia. Fase honetan *generalizazio* eta *partikularizazio* momentuak ematen dira eta plan desberdinak baita ikuspuntu desberdinak jar daitezke martxan.

Errebisio fasea

Fase hau oso garrantzitsua da, bai lana bukatu baldin bada baita buruketa uzteko momentuan ere. Fase honen izenak adierazten duen bezala, atzera begiratzeko unea da. Hau egiten da aurkituriko emaitzak marko orokor batean jartzeko, honek atzera bueltatzea, egiaztatzea eta hausnartzea eskatzen du. Hau egin eta gero, emaitzak testuinguru zabalago eta orokorrago batean kokatzeko gai izatea da helburua. Beraz, fase hau ondo egiteko honako hiru esaldi hauek izan behar dira kontuan:

- Erantzuna EGIAZTATU
- Izandako ideien eta momentu klaseen inguruan HAUSNARTU
- Testuinguru zabalago batean OROKORTU

Errebisio faseari etekin handiena ateratzeko lorturiko emaitzak beste pertsona batek irakurri beharko balitu bezala idaztea da, idazlan hau sortzeko kontuan izan behar dira lehen adierazitako hiru esaldiak eta argi geratu behar da zer egin den eta zergatik. Honakoa egiterakoan ideia berriak sortuko dira eta izandako emaitzak eta orokortasunak hobetu ahalko dira.

Errebisio fase bat aurrera eramaten denean asko dira egiaztatu behar diren atalak. Hona hemen hauetako batzuk eta orokorrenak:

- Aritmetika eragiketak eta kalkuluak egiaztatu.
- Aljebra eragiketak eta kalkuluak egiaztatu.
- Egindako arrazoiketak eta hauen zergatia egiaztatu.

- Lorturiko susmoak egiaztatu.
- Buruketaren benetako ebazpena lortu den edo ez egiaztatu.

Askotan fase honen aurretik egindako egiaztapenak ez dira oso fidagarriak berotasun momentuan egiten direlako eta errazagoa da egindako akatsak errepikatzea edota ez ikustea. Horregatik fase honetan egindako eragiketa eta prozesu guztiak birpasatu behar dira. Baina nahiz eta beste momentu batean birpasatzea egin akats berdinak egiten dira, hau gertatzeko aukera gehiago daude beti pauso berdinak erabiltzen baldin badira. Beraz, hobe da egiaztapena egiterako momentuan beste modu batez jardutea.

Errebisioa matematika alorrean ikasteko momenturik garrantzitsuena eta ikaskuntza sortzen den momenturik altuena da?. Askotan pentsatu ohi da ikaskuntza esperientziatik sortzen dela, baina ez da horrela. Ikaskuntza sortzeko esperientziaren hausnarketa egin behar da. Baina prozesu hau egitea ez da erraza, beraz hobe da eman beharreko pausoak argi izatea, hau egiteko buruketaren une gakoak eta ideiak identifikatu behar dira. Izan ere, une gakoen bitartez esperientzia pertsonala eraiki egiten da eta norbanakoaren teknika matematikoak hobetzen dira. Bukatzeko, *errebisio fase* hau bukatzeko esan beharra dago oso lotua dagoela *generalizazio prozesuarekin*. Azken finean "atzera begiratze" honek buruketatik aldentzeko eta hein orokorrago bat ikusteko aukera ematen du. Izan ere askotan buruketa bat bukatu eta gero "eta orain zer?" sentsazioa geratzen da, zer egin, zertarako egin da, zer lortu dut galderak sortzen dira. *Errebisio faseari* esker, buruketa konkreturik urruntzea lortzen da eta honek *generalizazio prozesu* bat sortzea dakar (honek dakarren ikaskuntza esanguratsuarekin). Arrazoibide matematikoa ez baita hasten indibiduoa buruketarekin guztiz konprometitua dagoen arte eta hau lortzen da arrakasta handienarekin indibiduo horrek berak sorturiko buruketekin nahiz *partikularizazioekin*.

2.3. Egoera didaktikoak

Egoera (Brousseau, 2007) bat inguru baten eta subjektu baten arteko elkarreragina da. Subjektu batek dituen baliabideak erabiliz, jada duen edota lortu nahi duen inguru ezagun batean egoera baikor bat izaten saiatuko da. Hau lortzeko erabaki desberdinen artean hautatu beharko du eta erabaki hau egokia izango da segun eta zein ezagutza konkretu erabiltzen dituen. *Inguru* (Brousseau, 2007) subjektuaren antagonista bat da, azpisistema autonomo bat alegia.

1970. hamarkadaren hasieran, *egoera didaktikoak* (Brousseau, 2007) irakaslearen rola kontuan izan gabeko irakasteko egoerak ziren. Irakasteko teknika desberdinak erabiltzen ziren, hala nola, testuak, materialak beste askoren artean. *Egoera* bat beraz, irakasle batek diseinaturiko eta manipulaturiko ingurugiro bat da zeina tresna bat bezala erabiltzen den. Baina *egoera* guztiak ez dira berdinak eta kontuan izanda zein arloko *egoera* den, modu desberdinean definitzen dira. *Matematikako egoerak* irakaslearen esku-hartze gabeko egoera bat da zeinean ikasle batek matematikekin zer ikusia duen jarduera bat egiten duen.

Konparatuz 1970. hamarkadako *egoera didaktikoen* definizioa eta gaur egungo definizioaren artean alde nagusi bat dago. Gaur egun *egoera* inguruan hitz egiterakoan ez dugu soilik ikaslearen paperaz hitz egiten irakaslea kontuan hartu gabe, baizik eta irakaslearen eta ikaslearen modeloak kontuan hartzen dira. Beraz, *egoera didaktikoak* ikaslearen ingurugiro guztia da zeinean irakaslea eta hezkuntza sistema kontuan hartu behar diren ere.

Kontuan izanda gailu bat pertsona batek diseinatu duela zeinaren bitartez ezagutza bat irakatsi edota eskuratze bat kontrolatu nahi den. Gailu hau *inguru* (Brousseau, 2007) materiala- esaterako joko baten atalak, erronka bat, buruketa bat, edota ariketa edo fitxa bat- eta jokoaren barne arauak bere baitan hartzen ditu. Baina soilik jokoaren funtzionamenduak eta honen garapen eraginkorrak, jokaturiko partidak, buruketaren ebazpenak etab sor dezakete ikaskuntza bat. Beraz, guztiz beharrezkoa da honen barne egoeren ebaluazioaren ikaskuntza sartzea izan ere onartu egin behar da ikaskuntza sortzen dela subjektu batek ingurune batean moldaketak egiten dituenean, irakaslearen parte-hartzea egonda edo ez.

Hau hobeto ulertzeko, “20rako lasterketa” jokoa erabiliko da. Ikaskuntza honen helburua teorema desberdinen frogapena edota aurkikuntza da. Jokoa bi “etsairen” artekoa da. helburua 20 zenbakia esatea da eta horretarako 1 edo 2 zenbakia gehituko zaio besteak esandako zenbakiari. Prozesu hau errepikatuko da bietako bat 20ra ailegatu arte. 20-ra iristen dena irabazlea izango da. Joko honek estrategia bat du, honako zenbakiak esaterakoan irabazi egiten da: 2, 5, 8, 11, 14, 17 eta 20.

Joko hau klasean aurrera eramateko, irakasleak jokoaren arauak azalduko ditu eta arbelean ikasle baten kontra partida bat hasiko du. Ondoren bere lekua beste ikasle bati utziko dio. Behin ikasle guztiak jokatzeko modua ulertu dutenean hiru fase banatuko behar dira.

1. Fasea: 1 vs 1; *akzio egoera*
   Haurrak binaka jarriko dira, bata bestearen kontra jokatuko dute eta jokatzen duten bitartean erabilitako zenbakiak eta irabazlea apuntatuko dute. Zenbait partida jokatu eta gero, ikusiko dute zoriz erantzutea ez dela estrategia hoberena eta azkar konturatuko dira irabazteko 17 esan behar dela.
2. Fasea: talde bat beste talde baten kontra; *formulazio egoera*
   Ikasleak bi talde osatuko dituzte eta ausaz talde bakoitzeko ikasle bat aterako da eta bi hauen artean partida bat jokatuko dute. Taldeko beste partaideak bitartean ezin dute ezer esan baina ikusitakoa apuntatu eta estrategiak garatu ditzakete. Partida baten eta hurrengoaren artean talde bakoitza minutu bateko denbora izango du hitz egiteko eta irabazteko estrategia bat bilatzeko.
3. Fasea: teoremen aurkikuntza; *balioztatze egoera*
   Irakasleak talde bakoitzari egindako aurkikuntzak aurkezteko eskatuko die. Oraingo jokoa beste taldeko aurkikuntzak kritikatzean eta zure taldearen aurkikuntzak frogatzean datza.

Egoera didaktikoak sailkatzerako orduan, 3 egoera bereizi behar dira. Hau hobetu ulertzeko, “20rako lasterketa” adibidearekin azalduko da.

Jokoaren lehenengo fasean ikasle bakoitzak erabakiak hartu behar ditu, ondoren beste ikasleak esaten duen zenbakiarekin batuketa egingo da eta puntu horretan, hau da, 1. Ikasleari berriz zenbakia esatea egokitzen zaionean, jokoa hautematen saiatu behar da bere hurrengo zenbakia egokia izan dadin. Honi guztiari *akzio fase* esaten zaio. Pauso hau zenbaitetan errepikatu eta gero, emaitza bat egongo da, hau da, galtzaile eta irabazle bat. Geroz eta partida gehiago jolastu, orduan eta estrategia berri gehiago garatuko dira. Hasieran gerta daiteke sorturiko estrategia hauek desegokiak izatea. Adibidez pentsatzea 10 zenbakia lortzea 9 zenbakia lortzea baino hobea dela uste duelako hamarrekoen inguruko zerbaitekin erlazionatua dagoelako. Baina estrategia egokiak ere sortuko dituzte. Adibidez konturatuko dira hobe dela 17 zenbakira iristea 16 zenbakira baino. Momentu honetatik aurrera, *akzioaren teoremak* fasea hasiko da. Ematen du ikasleak erronka irabazteko teknika oso bat duela, baina errealitatean, partida gehiago beharko ditu taktika oso bat izateko eta oraindik gehiago taktika hori frogatzeko eta justifikatzeko.

Orokorrean, estrategia bat intuiziotik edota aurretiko beste estrategia batetik sortzen da eta estrategia berri hau partida batean probatu egiten da, hau da esperientziaren bitartez ebaluatzen da. *Akzio egoera* beraz, prozesu bat da zeinean ikasleak problemak ebazteko metodologia bat ikasiko duen, esaterako “20rako lasterketa” jolasaren hasieran zenbaki guztiak garrantzi berdina dute, baina jokoa aurrera joan ahala konturatuko dira 17 zenbakia jokatzen baldin badute irabazi egingo dutela, eta berdina gertatzen dela 14 zenbakiarekin. Erlazio multzo hau inplizituki ikaslearen barnean dago eta honen arabera jokatuko du formulatzeko gai ez baldin bada ere. Egoera honi *eredu inplizitua* (Brousseau, 2007) deitzen zaio eta ikasleak kontziente izan gabe sortzen diren erlazio multzoak edota ikasleak erabakiak hartzerako orduan kontuan izandako arauak dira zeinak geroago formulatzeko gai izango den.

Akzio faseez gainera, formulazio faseak ere badira. Bigarren fase honetan bi une desberdindu behar dira:

a) Talde bakoitzeko ordezkariak bata bestearen kontra jokatzen dutenean
b) Talde bakoitza bere baitan argudiatzea egiten dutenean.

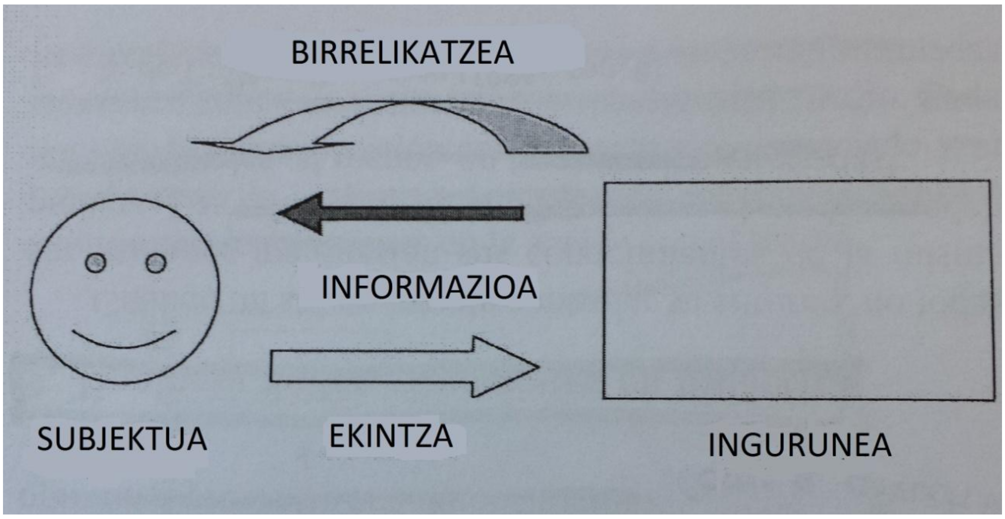
a) Kasuan jokatzen ari ez diren ikasle guztiak informazio jasoko dute baina ezin diote jokatzen ari denari ezer esan, beraz, jokatzen hari dena *akzio egoeran* dago oraindik eta beste guztiak formulazio egoeran. b) egoeran daudenean, *inguru* bat dute zeina ikasle bakoitzak jokaturiko partida multzoaren arabera eraikia dagoen, baina bietatik azkenekoak du garrantzi gehien. Izan ere irabazteko ez da nahikoa ikasle batek irabazten jakitearekin, ikasle hau besteei azaltzen ere jakin behar du, beraz, komunikazio bat egon behar da ikasleen artean eta komunikazio hau bi atzera-eragin, hau da feed back, izango ditu, bat berehalakoa (ikasle batek beste ikasleei azalpenak ematen dienean ulertu edo ez) eta bestea ez berehalakoa *inguruneagatik* (Brousseau, 2007) ematen dena.

Hirugarren fasean, hau da, *balioztatze fasean*, talde bakoitzak txandaka 20 esatera iristeko enuntziatu bat sortu eta adierazi egin behar dute eta beste taldekoak esandako enuntziatua faltsua dela frogatu behar dute. Fase honetan beraz, ikasleak teoriak (egokiak edo desegokiak) eraikiko dituzte. Honetaz gain, argudiatze egokia erabiltzen ikasiko dute ere (eta ez betiko arrazoi erretoriko edota autoritatezkoak).

Ikaslea eta *ingurunearen* artean egon daitezkeen erlazioak 3 modutara sailka daitezke:

- Ez kodifikaturiko edota hizkuntza gabeko informazioren trukaketa (akzioak eta erabakiak)
- Hizkuntza batean kodifikaturiko informazioaren trukaketa (mezua)
- Esaldien trukaketa (teoria rol bat duen esaldi multzoa)

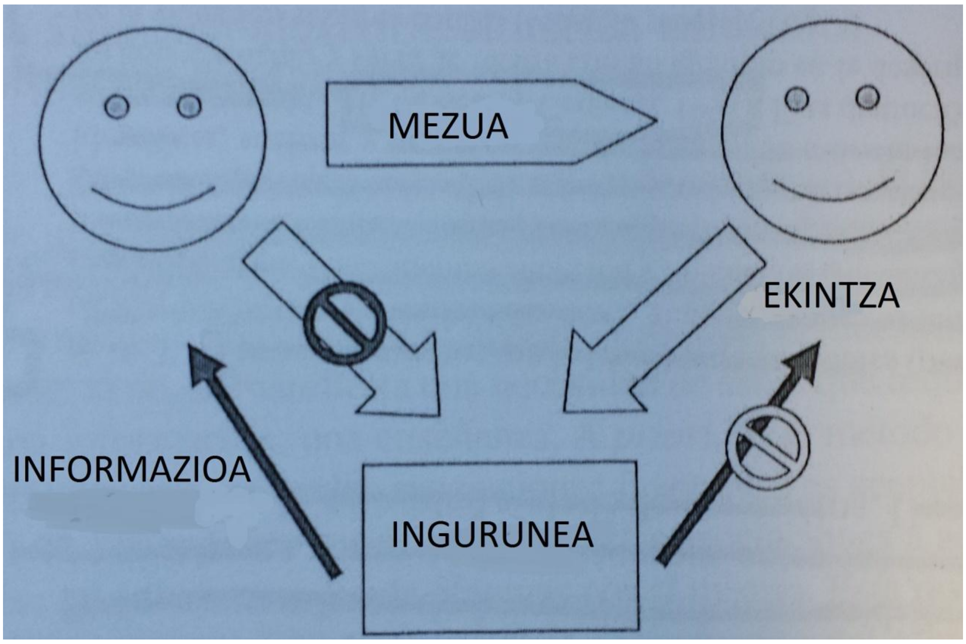
Akzio fase baten eskema orokorrean, egoerak hautatu egiten dira, halakoak non subjektuaren *ekintzek* (Brousseau, 2007) talka egingo duten, modu zuzen batean, *ingurune* baten kontra. Inguruneak modu egonkor batean erreakzionatzen baldin badu, subjektuak erlazioak sor ditzake eta beraz, *berrelikatzea* (Brousseau, 2007) eman daiteke. Azken finean ikaskuntza prozesu bat da zeinean aldez aurretiko ezagutzak aldatzen diren. Honako diagramarekin hobetu ulertuko da ikaskuntza prozesua.



3. Irudia. Akzio egoera baten eskema orokorra

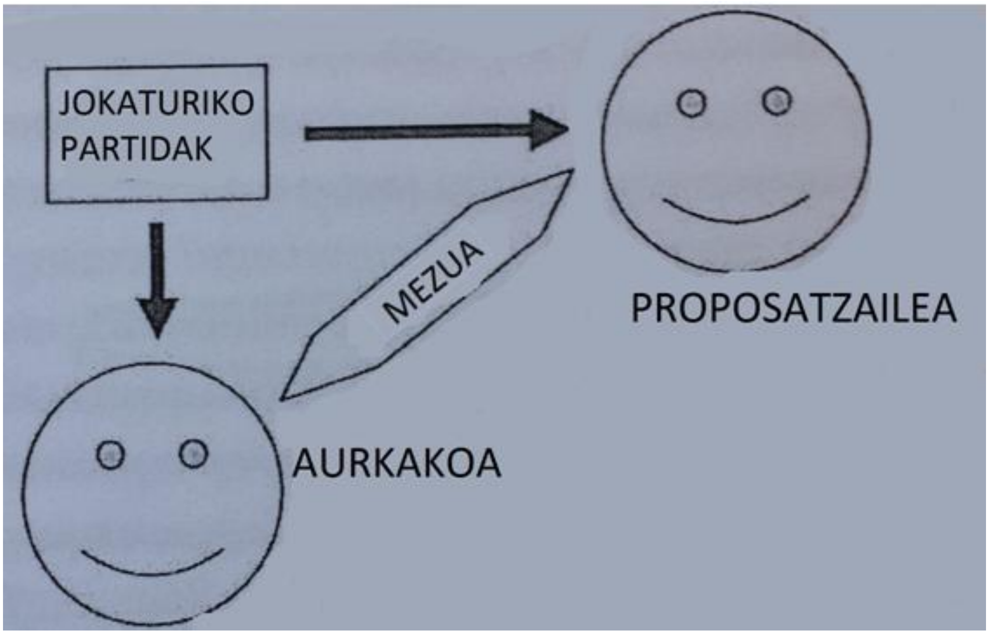
Ezagutza inplizitu baten formulazioa aldatu egiten da segun eta zeintzuk diren trataera, eskuratze eta ikaskuntza aukerak. Azken finean formulazio batek momentuan

eskuraturiko ikaskuntza bat geroagoko momentu batean erabilgarri izateko teknika bat da. *Inguru* batek subjektu bati formulazio bat egotea eskatuko dio, baina formulazio hau ez da inoiz osoa izango bigarren subjektuak izango duen informazioa gabe. Beraz, beharrezkoa da bi subjektuen arteko interakzioa informazio osoa jaso ahal izateko eta modu honetan formulazio egokia egin ahal izateko. Hau hobeto ulertuko da honako eskemaren bitartez:



4. Irudia. Formulazio egoera baten eskema orokorra

Akzio eta formulazio egoerak zuzenduak izan behar dira ondo egiten ari direla ziurtatu ahal izateko, hau da, balioztatzeko, baina modelizazioak formulatzeko metodologia berri bat adierazten du. Igorlea ez da soilik informazioa ematen duen subjektu bat baizik eta proposatzaile bat eta hartzailea berriz etsai bat. Biak batera egiaren bila lan egiten dute baina aurka egiten dute zalantzak daudenean. Biak batera *inguru* (Brousseau, 2007) batean formulaturiko erlazioez eta *ingurune* (Brousseau, 2007) horren ezagutzez arduratzen dira. Subjektu bakoitzak enuntziatuarekiko jarrera bat har dezake eta desadostasunak baldin badaude, frogapen bat eska dezake. Hau hobeto ulertuko da honako irudi honen bitartez:



5. Irudia. Balioztatze egoera baten eskema orokorra

Akzio, formulazio eta balioztatze egoerekin ez dira egon daitezkeen egoera guztiak azaltzen, beste egoera bat falta da, *instituzionalizazio* egoera zehazki. Egoera hau aurreko beste hiruen ondoren doa eta bertan, ikasitakoa modu instituzionalizatu batean adierazten ikasten da. Egoera hau aurreko beste hiru egoerak baino lehenago egiten baldin bada edota aurreko 3 egoeretako bat egiten ez baldin bada, subjektuaren ikaskuntza ez da esanguratsua izango. Hasieran uste zen ikaskuntza egoerak izatearekin nahikoa zela, baina Jules Michelet ikastolan ikusi zuten egoera hauek eman eta gero irakasleak, denbora bat pasa eta gero, ikasitako ezagutzak espazioan ordenatu nahi zituztela eta ez zirela gai batetik bestera pasa nahi gaian ikusitakoa birbegiratu gabe. Honen beharra arrazoi sinple bat zuen, irakasleak ikasleak ikasitakoa birbegiratu nahi zuten ikasleei adierazteko ikasitakotik zer eta nola erabil zezaketen hurrengo ikaskuntza baterako.

2.3.1 *Oztopoak*

Bercheland *oztopo* (Bacherlard, 1938) epistemologikoak definitu zituen eta adierazi zuen hauek ez zirela soilik matematiketan ematen. Baina Brousseau ez zegoen guztiz ados ideia honekin eta birdefinitu zituen:

- *Oztopo* (Borusseau, 2007) bat ezagutza bat da zeinak modu erregular batean egoera multzoak baliatzen dituen.
- Ezagutza hau egokiak diren erantzunak ematen ditu baina soilik esparru baten barne, esparru horretatik ateratakoan erantzun okerrak ematen ditu.
- Esparru berrian erabil beharreko ezagutza berria ez da aurretiko ezagutzatik sortzen baizik eta honen kontran sortzen da, hau da, bi kontzeptuen artean dagoen aldea txikia da eta logikaren aldetik ezin da deskreditatu. Beste aldetik, antzinako kontzeptuarengatik borrokatu egiten dute.
- Ezagutzaren eraikuntza hauek ez dira pertsonalak. Eremu konkretu batzuen erantzun "unibertsalak" dira.

Definizio honetatik *oztopoen* zenbait karaktere ikusgai daude:

Oztopo bat akats baten bidez agertzen da. Akats hau aurretiko ikaskuntza batean izandako egoera batetik sortzen da. Aurretiko ikaskuntzan egokia zen planteamendu bat egoera berri batean aplikatzeagatik eta egoera berri horretan ez funtzionatzeagatik. Uste baldin bada ere *oztopoa* ikaskuntza berria ikastearekin desagertuko dela ez da modu honetan gertatzen, justu kontrakoa sortzen da, ikaskuntza berria bereganatzeko trabak sortzen ditu. Beraz, ezin da *oztopo* bat alde batera utzi. Izan ere hau egiten baldin bada, ikaskuntza berria ez da bereganatuko eta ezagutza betiko akasduna izango da. Baina honek ez du esan nahi *oztopo* guztiak "faltsuak" direnik. Esaterako biderketen kasua. Ikasleak hasieran zenbaki osoen arteko biderkadurak ikasten dituzte eta adibidez bi bider hiru berdin sei dela ikasten dute.

$$2 * 3 = 6$$

Baina zenbaki hamartarren arteko biderketak ikasterakoan *oztopoak* sortzen dira askotan. Izan ere ikasleak aurretiko ezagutzak martxan jartzen dituzte baitakite bi bider hiru sei dela beraz, zero koma bi bider zero koma hiru, zero koma sei izan beharko luke.

$$0.2 * 0.3 = 0.6$$

Baina zenbaki hamartarretan ez doa horrela. Ikaslea ez baita gai ikusteko desberdina dela biderketa bat egitea zenbaki osoekin eta zenbaki hamartarrekin. Askotan gertatzen da irakasleak ez duela modu egokian azaltzen fenomeno honen zergatia eta soilik erantzuna ematen du. Eta ikasleak ezin du ulertu zergatik zero koma bi bider zero koma hiru zero koma zero sei den.

$$0.2 * 0.3 = 0.06$$

2.3.2 Fenomenoak

Fenomenoen artean badira hauetako mota desberdinak eta atal honetan matematikan garrantzi gehien dutenak eta adierazgarrienak azalduko dira. Fenomeno horiek dira, *Topaze efektua, Jourdain efektua edo funtsezko gaizkiulertua, Irristaketa metakognitiboak eta metadidaktikoak: iragazkortasun didaktikoa, Analogiaren gehiegizko erabilpena* eta *Egoera didaktikoen zahartzea.*

Lehenengo fenomenoa, hau da, *Topaze efektua* Brousseauk egoera bat bezala identifikatu zuen non ikaslea problema baten emaitza lortzera ailegatzen den baina ez bere kabuz baizik eta irakasle batek bere baitan jasan duelako problemaren erresoluzioa. Hau gertatzen da gehien bat irakasle batek jarritako buruketa bat ikasle bati edota batzuei zaila egiten zaienean edota zailtasunak dituztenean, honek sortzen du irakasleak bere barne laguntzeko beharra sentitzea eta laguntza horretan buruketa aurrera eramateko planteamendua esatea. Eta honek aldi berean ikaskuntza prozesua ez eraikitzea dakarkie ikasleei. Marcel Pagnolek *Topaze* efektuaren funtsezko prozesu bat adierazi zuen. Horretarako adibide hau planteatu zuen: irakasle (Topaze) bat arazoak ditu irakasle bat egiten hari duen diktaketa jarraitzeko. Irakasleak ezin ditu oso akats larriak onartu baina ezta ere ezin du zuzenean ortografia egokia eman, beraz, erantzuna modu disimulatu batean "iradoki" egiten du. "… txerriakkkkk eta behiakkkkk eskorta batean daude…" ikaslearendako honako hau gramatika eta ortografia ariketa bat da, baina irakasleak emandako "k" indartuekin zailtasuna guztiz aldatu da. Egondako porrot guztiekin irakasleak "laguntza" bat ematen saiatzen da baina lortzen duena da ikasleak ezagutza barneratu gabe "k" bat kokatzea, soilik indartua entzun duelako. Gramatikalki eta ortografikoki ezer ikasi gabe.

Ikasleak eman behar duen erantzuna aldez aurretik pentsatua dago eta irakasleak erantzun hauek lortzeko beharrezkoak diren galderak planteatuko ditu. Baina logikoa den bezala, erantzunak eman ahal izateko beharrezkoak diren ezagutzak aldatu egiten dira. Geroz eta galdera errazagoak planteatuz, saiatzen da lortzen esanahi maximoa ikasle gehienentzako. Baina ikaskuntzak guztiz desagertzen baldin badira *topaze efektu* baten aurrean gaude. Irakaslea guztizko arrakasta lortu nahi duenez ez da konturatzen ikasleei erantzuna ematen hari diela eta beraz ikaskuntza ez dela esanguratsua izaten hari.

Bigarren fenomenoa, hau da, *Jourdain efektua edo funtsezko gaizkiulertuaren* izena *Burgués gentilhombre* egiten dio erreferentzia non filosofiako irakasleak Jourdiani prosa edota bokalak zer diren esaten dionean. Beraz, *topaze efektuaren* bariante bat da. Ikasleak erantzun oker bat ematen duenean irakasleak hau gogoak ez galtzeko ondo dagoela esaten dionean sortzen da efektu hau. Ikaslearen erantzun hutsala erantzun on bat bezala onartu egin delako.

Irakasleak ikasleekin eztabaida batean ez sartzeagatik eta ez konturatzeko porrota bat egon dela, ikaslearen erantzuna onartu egiten du nahiz eta modu xume edo zoriz aurkitu izana.

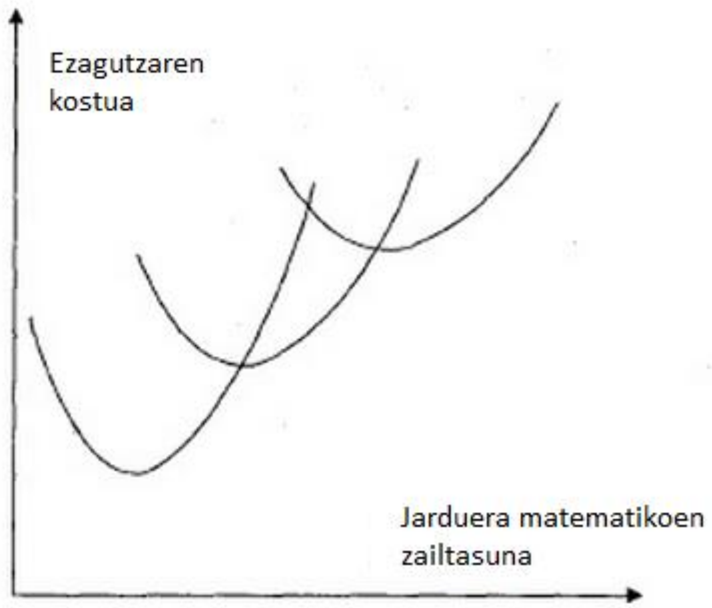
Hirugarren fenomenoa, hau da, *Irristaketa metakognitiboak eta metadidaktikoak: iragazkortasun didaktikoa* ikaskuntza objektu gisa izanda, buruketa baten ebazpenean jarrera heuristiko bat hartzea eta onartzea da. Adibide bat bateratasun teorian erabilitako Venn-en Diagrama da. Vennen diagramak aztertzen hasterakoan teoria alde batera uzten da eta diagrama teoriatzat hartzen da. Hau *irristaketa metakognitibo* bat da. ikaskuntzarako ariketa bat porrot egiten duenean eman daiteke irakasleak justifikazio bat bilatzen saiatzea eta ekintzarekin jarraitzeko bere azalpen propioak erabiltzea eta ez ezagutza matematikoak. Ordezkapen hau askotan gertatzen da.

Laugarren fenomenoa, hau da, *Analogiaren gehiegizko erabilpena* analogiaren erabilera buruketak ebazteko momentuan oso erabilgarria dela ari dago baina ikasle bat ezin da geratu soilik buruketa analogikoekin, baizik eta buruketa originalera bueltatu behar da, hau da, analogia buruketa bat hobeto ulertzeko erabil daiteke baina ezin da gerat soilik buruketaren analogiarekin. Hau gertatzen baldin bada *analogiaren gehiegizko erabilpena* ematen hari da. Izan ere *topaze efektuak* sortzeko arrisku handia dago.

Azkenik, bosgarren fenomenoa, hau da, *Egoera didaktikoen zahartzea* sortzen da irakasleak aitzinean egindako klase berdina errepikatzeko arazoak ditu, nahiz eta ikasle berriak izan. Errepikapen hau ez da guztiz perfektua eta beraz ez du efektu berdina eta lortzen diren emaitzak txarragoak izan ohi dira. Aldatzeko behar bat sortzen zaio irakasleari eta efektu hau handiagotzen doa geroz eta gehiagotan errepikatzen baldin bada. Zahartze prozesu hau azkarragoa da irakaslearen eta ikaslearen arteko interakzioak sarritan ematen diren kasuetan. Geroz eta interakzio gehiago orduan eta azkarrago zahartuko da *egoera didaktikoa*.

2.3.3 Ikasleak egoera desberdinetara ohitzea: jauziak eta oztopoak.

Subjektuak baita instituzioak ere egoera berrietara ohitu egiten dira eta honen bidez ezagutzak eta ikaskuntzak eraikitzen dira. Izan ere matematikaren kontzeptu batek zailtasun maila desberdinak ditu eta beraz, hauek aurrera eramateko estrategia desberdinak erabili daitezke. Hau errazago ulertzen da adibide baten laguntzaz: esaterako ez ditugu modu berean egiten batuketen segida guztiak. Esaterako n=2 denean edo n= 27 denean. Geroaz eta zailtasun maila handiagoa, orduan eta estregia berrien behar handiagoa sortuko da. Baina estrategia batetik hurrengorako jauzia egiterako orduan zailtasunak sor daiteke. Metodo bakoitza hasieran zaila da (oraindik ondo barneratu ez delako) gero erraztu egiten da (ondo barneratzearen arrazoia) eta zaildu egiten da berriro ere (metodo horrekin egin daitezkeen eragiketak zailtzen direlako). Gorakada ematen den momentuan ikaskuntza berri bat ikasteko momentua da, baina hau ondo barneratzeko ikaslearendako esanahi pertsonala izan behar du eta gero, esanahi instituzionalizatua eman beharko dio ikasleak berak. Aldaketa hau emateko beraz, ikasleak aldaketa emateko motibazioa izan behar du eta hau lortzeko ikusi behar du erraztasun handiagoa ematen duela bigarren ikaskuntza (hau da, estrategia berria) lehenengoa baino. Aldaketa hau egiten ez baldin bada zailtasunak agertuko dira baita akatsak ere, beraz, ikasleak *jauzi informatiboak (*Brousseau, 2007) egin behar ditu estrategia batetik bestera. Izan ere aldagaiak didaktikoak modifikatuz aldaketa bultzatzen da modu natural batean. Hau guztia hobeto ulertuko da honako grafiaren laguntzarekin:



6. Irudia. Estrategia batetik besterako jauzia eta zailtasunak

3. PROPOSAMENA

Proposamen atalarekin hasi baino lehen, hau aurrera eramateko ideiak nondik lortu diren adierazi nahi da. Egoera didaktiko bat diseinatu behar denez, honen inguruan adibide asko ematen dituen liburu bat irakurri da, María del Carmen Chamorroren "Didáctica de las matemáticas" hain zuzen ere. Liburu honetako adibideetan oinarritua dago gehien bat hurrengoetan azalduko diren proposamen didaktikoak.

Ikaskuntza esanguratsu bat lortzeko Marko Teorikoan azalduriko teoria praktikara eraman behar da, horretarako *egoera didaktikoak* diseinatu behar dira. Egoera didaktiko bat diseinatzerako orduan, funtsezkoak diren hiru faseak izan behar dira kontuan, hau da, *akzio fasea*, *formulazio fasea* eta *balioztatze fasea.*

Proposamen hau aurrera eramateko magnitudeen inguruko bi *egoera didaktikoen* diseinua egingo da. Zehazki edukiera eta txanpon sistemaren ingurukoa diseinatuko dira. Hau aukeratzearen arrazoia sinplea da. Bi adibide hauek oso adierazgarria dira baita bisuala ere. Ikasleentzako bai edukierak baita txanpon sistemak ulertzea lan zaila da, orokorrean ez direlako modu egokiak irakatsi. Matematikaren arlo hau irakasteko ikaskuntza trasmitiboa erabili izan da normalean, hau da, ikasleei zer egin eta nola egin adierazten zaie, azalpen xumeak edota sinpleak emanez. Honek ikasleei arazoak sortzen dizkie ez baitute ulertzen eta sistematikoki egiten ikasten dute. Modu honetan sistematizazio horretatik aldentzean landu egiten dira eta ez dira gai kritikotasunez jardueren aurrean jokatzeko. Arazo hau gailentzeko, *egoera didaktiko* baten bidez aurrera eramatea da konponbiderik hoberena.

3.1 Edukierak lantzeko jarduerak:

Proposamen hau aurrera eramaterako orduan hiru atal izan behar dira kontuan:

Helburua: Proposamen honen helburu nagusia ikasleak edukierak ulertzea da, horretarako litroekin zenbait jarduera diseinatuko dira. Ikaskuntza esanguratsu bat lortzeko eta beraz, bermatzeko ulertu egiten dela, ikasleak material desberdina erabiliz edukierak esperimentatuko dituzte eta fisikoki manipulazioa egingo dutenez edukierak guztiz ulertzea espero da.

Materiala: materialaren aldetik zenbait alderdi izan behar dira kontuan. Alde batetik *egoera didaktiko* batean kontuan izan beharrezko bi atalak,hau da, “ikaslearen materiala” fitxa eta “irakaslearen materiala” fitxa. *Akzio faserako* material fisikoak beharrezkoak da, hau da, litro bateko, litro erdiko eta litro laurdeneko botilak (ikasle bakoitzarendako klase bakoitzeko bederen lau botila) eta inbutua , klasean hauetako nahiko ez izatekotan, irakasleak aldez aurretik ikasleei ekartzeko eskatuko die. Material hauetaz aparte, ikasleak arkatza, borragoma, papera eta ikasleak nahi izatekotan margoak beharko dute *akzio fasean* egindakoak *formulazio fasean* idatziz edota marrazki baten bidez adierazteko.

Faseak: proposamena klasean gauzatzeko beharrezkoak diren pauso guztiak:

i. Lehenik eta behin, saioa aurrera eraman ahal izateko, ikasleei hiru tamainetako botilak ekartzeko eskatuko zaie, inbutu bat eta aldatzeko beste kamiseta bat (bustitzen baldin badira ez hozteko). Hau aste bat lehenago esatea komeni da ikasleak denbora izateko tamaina desberdineko botilak lortzeko.
ii. Irakasleak ikasleei zer egingo dute azalduko die, zehazki edukierak ulertzeko klase praktiko bat izango dela. Azalduko zaie praktika hau egiteko inbutua erabiliz banatuko dien fitxan agertzen diren buruketak ebazten saiatu behar direla, eta azpimarratuko du buruketa hauetan ez dagoela erantzun zehatz bat. Baina ez du esango zenbat erantzun posible dauden bakoitzean.
iii. Irakasleak ikasleak binaka edo hirunaka (segun eta ikasle kopurua bikoitia edo bakoitia den) jarriko ditu
iv. Bikote bakoitzari beharrezkoa den materiala, hau da, botilak eta inbutua eta ikasleendako fitxa banatuko zaie. “Ikaslearendako materiala” fitxa bana emango zaie *formulazio fasean* eman beharrezko komunikazioa (bai ahozkoa baita idatzizkoa ere) areagotzeko.
v. Irakaslearen papera ikuskariarena izatera pasako da eta ikasleak beren baitan saiakuntzak egin beharko dituzte. Ikusten baldin bada talderen bat hiru

galderak modu azkar batean egin dutela talde honi material fisikoa aldenduko zaio eta abstraktuki galdera zailago bat planteatuko zaie, esaterako “litro bateko hamar botila erabiliz zenbat litro erdiko botila eta litro laurdeneko botila bete daitezke?”

vi. *Balioztatze faseari* hasiera emateko bikoteak talde txikietan kokatuko dira eta bertan bikote bat besteei bere erantzunak adieraziko dizkie eta hauek defenditzen saiatuko da, prozesu hau beste bikoteekin egingo da eta azkenean akordio batera iritsiko dira.

vii. *Balioztatze fasearekin* jarraitzeko talde txikiak batuko dira bi talde handi osatu arte eta aurreko taldeetan egindako metodologia berdina jarraituko da.

viii. *Balioztatze fasearekin* bukatzeko bi talde handiekin aurreko metodologia berdina jarraituko da.

Ikaslearendako materiala:

IZENA:____

DATA:____________________

Litroekin jolasean:

Neurri desberdinetako botilak eta inbutua erabiliz egin ezazu esperimentalki honako buruketak?

Litro bateko bi ur botila erabiliz zenbat modutara bete daitezke $\frac{1}{2}$ eta $\frac{1}{4}$eko botilak?

Ikaslearendako materiala:

IZENA:____

DATA:__________________

Litroekin jolasean:

Litro erdiko 6 botila erabiliz zenbat modutara bete daitezke $\frac{1}{4}$ eko eta litroko botilak?

Ikaslearendako materiala:

IZENA:____

DATA:________________

Litro laurdeneko 16 botila erabiliz zenbat modutara bete daiteke litro erdiko eta litroko botilak?

Irakaslearendako materiala:

IZENA:___________________ DATA:___________________

Litroekin jolasean:

Neurri desberdinetako botilak eta inbutua erabiliz egin ezazu esperimentalki honako buruketak?

Litro bateko bi ur botila erabiliz zenbat modutara bete daitezke $\frac{1}{2}$ eta $\frac{1}{4}$eko botilak?

- 4 litro erdiko botilak
- 3 litro erdi eta 2 litro laurden
- 2 litro erdi eta 4 litro laurden
- Litro erdi bat eta 6 litro laurden
- 8 litro laurden

Litro erdiko 6 botila erabiliz zenbat modutara bete daitezke $\frac{1}{4}$ eko, eta litroko botilak?

- 3 litro oso
- 2 litro oso eta 4 laurden
- Litro oso bat eta 8 laurden
- 12 litro laurden

Litro laurdeneko 16 botila erabiliz zenbat modutara bete daiteke litro erdiko eta litroko botilak?

- 4 litro oso
- 3 litro oso eta bi erdi
- 2 litro oso eta 4 erdi
- Litro bat eta 6 erdi
- 8 litro erdi

3.2 Txanpon sistema lantzeko jarduerak:

Proposamen hau aurrera eramaterako orduan hiru atal izan behar dira kontuan:

Helburua: Proposamen honen helburu nagusia ikasleak txanpon sistema ulertzea da, horretarako Euroekin zenbait jarduera diseinatuko dira. Ikaskuntza esanguratsu bat lortzeko eta beraz, bermatzeko ulertu egiten dela, ikasleak material desberdinak erabiliz (bai txanponak baita billeteak ere) txanpon sistema esperimentatuko dituzte eta fisikoki manipulazioa egingo dutenez gai hau guztiz ulertzea espero da.

Materiala: materialaren aldetik zenbait alderdi izan behar dira kontuan. Alde batetik *egoera didaktiko* batean kontuan izan beharrezko bi atalak,hau da, “ikaslearen materiala” fitxa eta “irakaslearen materiala” fitxa. *Akzio faserako* material fisikoak beharrezkoak da, hau da, Euro dibisak dituen txanpon eta billeteak (zentimo batekoa, bi zentimokoa, bost zentimokoa, hamar zentimokoa, hogei zentimokoa, berrogeita hamar zentimokoa, euro batekoa, bi eurokoa txanponen aldetik eta bost euroko, hamar eurokoa, hogei eurokoa eta berrogeita hamar eurokoa. Honaino mugatu da gehiago igotzea baliogarria ez delako) erabiliko dira, baina dirua eskuartean ez izateko, gezurretako Euroak erabiliko dira. Material hauetaz aparte, ikasleak arkatza, borragoma, papera eta ikasleak nahi izatekotan margoak beharko dute *akzio fasean* egindakoak *formulazio fasean* idatziz edota marrazki baten bidez adierazteko.

Faseak: proposamena klasean gauzatzeko beharrezkoak diren pauso guztiak:

i. Irakasleak ikasleei zer egingo dute azalduko die, zehazki txanpon sistema ulertzeko klase praktiko bat izango dela. Azalduko zaie praktika hau egiteko Euroko txanponak erabiliz banatuko dien fitxan agertzen diren buruketak ebazten saiatu behar direla, eta azpimarratuko du buruketa hauetan ez dagoela erantzun zehatz bat. Baina ez du esango zenbat erantzun posible dauden bakoitzean.
ii. Irakasleak ikasleak binaka edo hirunaka (segun eta ikasle kopurua bikoitia edo bakoitia den) jarriko ditu.

iii. Bikote bakoitzari beharrezkoa den materiala, hau da, Txanpon eta billeteak eta ikasleendako fitxa banatuko zaie. “Ikaslearendako materiala” fitxa bana emango zaie *formulazio fasean* eman beharrezko komunikazioa (bai ahozkoa baita idatzizkoa ere) areagotzeko.

iv. Irakaslearen papera ikuskariarena izatera pasako da eta ikasleak beren baitan saiakuntzak egin beharko dituzte. Ikusten baldin bada talderen bat hiru galderak modu azkar batean egin dutela talde honi material fisikoa aldenduko zaio eta abstraktuki galdera zailago bat planteatuko zaie, esaterako “50€ko bizikleta bat erosteko zenbat 5€ko, 10€ko, 20€ko eta 50€ko billete behar dira? Lortu itzazu aukera guztiak”

v. *Balioztatze faseari* hasiera emateko bikoteak talde txikietan kokatuko dira eta bertan bikote bat besteei bere erantzunak adieraziko dizkie eta hauek defenditzen saiatuko da, prozesu hau beste bikoteekin egingo da eta azkenean akordio batera iritsiko dira.

vi. *Balioztatze fasearekin* jarraitzeko talde txikiak batuko dira bi talde handi osatu arte eta aurreko taldeetan egindako metodologia berdina jarraituko da.

vii. *Balioztatze fasearekin* bukatzeko bi talde handiekin aurreko metodologia berdina jarraituko da.

Ikaslearendako materiala:

IZENA:____

DATA:___________________

"Diruarekin" jolasean:

Billete eta txanponak erabiliz egin itzazu esperimentalki honako buruketak?

20€ko kamiseta bat erosteko zenbat 5€ko eta 10€ko billete erabili behar dira? Lortu itzazu aukera guztiak

Ikaslearendako materiala:

IZENA:____

DATA:_________________

30€ko praka batzuk erosteko zenbat 5€ko, 10€ko eta 20€ko billete erabili behar dira? Lortu itzazu aukera guztiak

Ikaslearendako materiala:

IZENA:____

DATA:________________

35€ko praka batzuk erosteko zenbat 5€ko, 10€ko eta 20€ko billete erabili behar dira? Lortu itzazu aukera guztiak

Irakaslearendako materiala:

IZENA:____________________ DATA:____________________

"Diruarekin" jolasean:

Billete eta txanponak erabiliz egin itzazu esperimentalki honako buruketak?

20€ko kamiseta bat erosteko zenbat 5€ko eta 10€ko billete erabili behar dira? Lortu itzazu aukera guztiak

- 5 euroko 4 billete
- 5 euroko 2 billete eta 10eko bat
- 10 euroko bi billete

30€ko praka batzuk erosteko zenbat 5€ko, 10€ko eta 20€ko billete erabili behar dira? Lortu itzazu aukera guztiak

- 5ko 6 billete
- 5ko 4 billete eta 10eko bat
- 5ko 2 billete eta 10eko bi
- 5ko bi billete eta 20 bat
- 10eko 3 billete
- 10eko billete bat eta 20ko bat

35€ko praka batzuk erosteko zenbat 5€ko, 10€ko eta 20€ko billete erabili behar dira? Lortu itzazu aukera guztiak

- 5ko 7 billete
- 5ko 5 billete eta 10eko bat
- 5ko 3billete eta hamarreko 2
- 5ko billete bat eta hamarreko 3
- 5ko 3 billete eta 20ko bat
- 5ko billete bat 10eko beste bat eta 20ko beste bat

4.EMAITZAK

3. atalean azalduriko bi proposamenetatik bigarrena eramango da aurrera, hau da, “txanpon sistemaren” proposamena. Hau esleitzearen arrazoia sinplea da. Bi proposamenak eraman zitezkeen aurrera klase batean inongo arazorik gabe, bai materiala lortzea erraza delako baita aurrera eramateko zailtasunak oso handiak ez direlako. Beraz denbora izan da soilik bat egitearen arrazoia. Gainera, bietan antzeko ikaskuntzak lantzen dira. Edukien proposamenean litroen banaketak eta hauen arteko erlazio sinpleak latzen dira eta txanpon sistemaren proposamenean euroak eta hauen arteko erlazioak. Beraz, biak oso antzekoak izanda eta kontuan izanda klasean litroak jada landuak zeudela bigarrena esleitu da. Behin zergatia azaldua jardueraren deskribapena adierazko da.

Proposamena 2014/2015 ikasturtean bideratu da D ereduko ikastetxe publiko batean. Proposamenak bi saio izan ditu, bi saioek 50 minutuko iraupena izan dute. Lagina lehenengo zikloko bigarren mailako 27 ikaslek osatzen dute. Ikasle horietatik 20 mutilak dira, eta beste 7, neska.

27 ikasleak 12 bikote eta hirukote batean banatu dira, baina saioa gauzatu behar den egunean, 27 ikasleetako bat ez da klasera etorri, eta beraz, 13 bikotek egin dute lehenengo saioa. Bigarren saioan, aldiz, lehenengo saioan faltaturiko ikaslea agertu da, eta ikasle hau beste bikote baten barne kokatu da. Bertan, hirukotearen beste bi partaideek aurreko klasean egindakoa azaldu behar diote. Balioztatze fasea hasterakoan, bere hirukoteko bi ikasleak ez diren beste bikoteetako ikasleek ere jarduera ulertzen lagundu behar diote. Aipatzeko modukoa da, baita ere, egindako 13 bikoteetatik soilik batek ez duela ongi funtzionatu, eta ez dela klasearen dinamikan sartu. Seguru aski, hau gertatu da bikoteko ikasleetako batek kanpoko presioa beharrezkoa duelako, eta proposamen honetan askatasun handiagoa ematen zaienez, horrek ikasleari ez diola onurarik ekarri. Gainerako 12 bikoteak oso ondo aritu dira eta klasearen dinamikan sartu egin dira, inongo arazorik gabe. Kontuan izanda oso klase kopurutsua dela eta honen inguruko jarduerak egiten dituzten lehenengo aldia dela ondo funtzionatu duela esan daiteke. Behin jarduera aurrera eramateko intzidentziak

komentatu direla, jardueraren deskribapen objektiboa adieraziko da. Horretarako argazki batzuen laguntza egongo da.

Lehenik eta behin, irakasleak ikasleei saio horretan egin beharrezkoa laburki azaldu die arbelaren laguntzaz. Irakasleak askotan azpimarratu du buruketa hauek aurrera eramaterako momentuan ez dagoela soilik erantzun bakar bat baizik eta aukera desberdinak daudela eta ahalik eta gehien lortzen ahalegindu behar direla. Hau azalduta aldez aurretik egindako banaketa erabiliz ikasleak binaka kokatu dira eta bikote bakoitzari lehenengo fitxa banatu zaie (hau da, lehenengo galdera) baita hogei euroko, hamar euroko eta bost euroko billeteak (bakoitzetik hamar ale eman dizkie). Fitxa banatzen den bitartean, irakasleak izenak, abizenak eta data jartzeko esan dizkio bikote bakoitzari pasatzen den bitartean. Behin fitxa guztiak eta “billeteak” banatuta daudenean, irakasleak behatzaile papera hartu du. Ikasleak beraien kabuz saiakuntzak egiten joan dira eta irakasleak esku hartzeko beharra egon denean modu Socratiko batean egin du, hau da, galdera irekiak eginez: hauek dira erantzun guztiak? Erantzun posible gehiago daudela uste duzue? Birpasatu dituzue erantzuna?

7. Irudia. Bi ikasle akzio eta formulazio fasea egiten

Bikoteren batek bukatzerakoan, irakasleak bigarren fitxa ematen die, hau da, proposamenaren bigarren galdera. Bikote bakoitzak bere erritmoa eraman du eta bakoitzak behar adina denbora izan du proposameneko galdera bakoitza ahalik eta hobekien egiteko. Bikoteren batek hiru galderak denbora baino lehen bukatu baldin baditu, irakasleak euro “billeteak” kenduko dizkio eta honako galdera planteatuko die: “50€ko bizikleta bat erosteko zenbat 5€ko, 10€ko, 20€ko eta 50€ko billete behar dira? Lortu itzazu aukera guztiak” galdera hau egitera soilik 5 talde ailegatu dira. Beste guztiek hiru galderekin nahiko eta sobera izan dute. Saioa bukatu baino lehen, hiru orrialdeak entregatzeko modua azaldu du (lehenengoa, fitxa, bigarren fitxa eta azkenik hirugarren fitxa) eta berriz ere izena eta abizenak jartzeko gogoratu du.

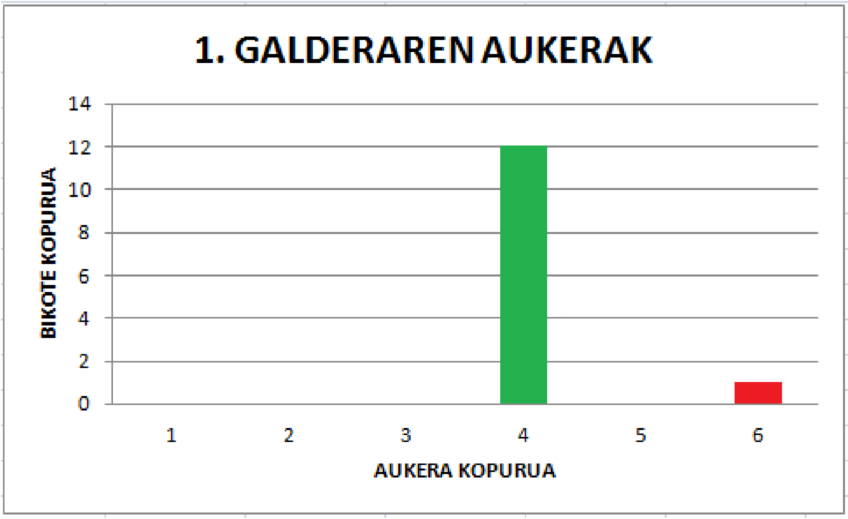
Bigarren saioan, irakasleak egin beharrezkoa azaldu du modu laburrez. Ikasleei komentatu die saio honen helburua ez dela berriz ere aukera desberdinak lortzea baizik eta lorturiko aukerekin eztabaida bat sortzea beste bikote batekin. Hau egiteko bikote batek besteari lorturiko aukerak banan bana esan behar dizkie baita hauek argudiatu ere. Desadostasunen bat dagoenean, hau da, bikote batek besteak emandako aukera gaizki dagoela uste baldin badu, aukeraren bat falta bazaio, soberan baldin badu aukeraren bat, e.a, eztabaida hasiko da eta bakoitza bere hipotesia ahalik eta hobekien argudiatzen saiatuko da. Ikasleak pasa den saioan egondako bikote berdinetan kokatu ditu eta bikote bakoitzari beren hiru fitxak banatu dizkie. Honen ondoren, bikoteak bi bikoteko taldetan, hau da, 4 pertsonatako taldeetan kokatu ditu. Bertan argudiatzea hasi da. Egindako 6 taldeetatik (talde bat zazpi pertsonetakoa da 3 bikote eta aurreko egunean faltaturiko ikaslea) hiru oso ondo funtzionatzen ari dira eta oso ondo hartu dute dinamika. Hiru talde hauek oso azkar egin dute balioztatze fasea talde txikietan eta talde handi bat sortu da hauekin, 12 pertsonetakoa zehazki. Hau egin eta berehala irakasleak esku hartu behar izan du ikasleak nahiz eta talde handi batean egon binaka jarduten hasi direlako. Baina irakasleak emandako jarraibideen ondoren, berriz ere dinamika onean hasi dira eta eztabaida hasi da berriro ere. 7 pertsonetako taldea bakarrik utzi da hasiera batean, izan ere, nahiko eztabaida ona sortzen ari delako. Hau gertatu da, gehien bat, aurrerago azalduko diren adierazle ostentsiboak direla eta. Beste zortzi ikasleekin talde handi bat sortu da, non dinamikak ez duen aski ongi funtzionatu. Hori gertatu da dinamika gaizki hartu duen bikote bat dagoelako. Nahiz eta irakaslea dinamika txar hori hausten saiatu ezin izan du guztiz lortu. Izan ere bikoteko ikasle bat dinamikaz paso egiten zuelako (ikasle horrek ondo jarduten du soilik bakarrik dagoenean, eta atentzioa kendu diezaiokeen ezer gabe).

Baina orokorrean dinamikak oso ondo funtzionatu du eta ikasleak argi adierazi dute txanpon sistema eta zehazki Euroak ulertzen dituztela.

Emaitzen analisia hasterako orduan komentatu beharra da lehenik eta behin bikoteek galdera bakoitzean lorturiko emaitzak adieraziko direla, eta ondoren adierazpen ostentsiboak azalduko direla. Analisia egiteko, bai datu konkretuak baita ehunekoak erabiliko dira, eta guztia taulen eta argazkien bitartez laburtuko da.

Formulazioari dagokionez, adierazpen ostentsibo desberdinak ikusi daitezke ikasleak emaitzak idazteko moduetan. Hauen analisia egingo da hurrengo esaldietan. Hiru adierazpen ostentsibo nagusi desberdin ikus daitezke, eta hauen barnean zenbait azpiatal ere eramango dira analisira. Analisi bat aurrera eramateko alde batetik galderaz galderakoa egingo da eta gero osotara gauzatuko da analisia. Baina lehen azaldu den bezala, adierazpen ostentsiboaren analisiari ekin baino lehen, galdera bakoitzean lorturiko aukerak adieraziko dira bai idatziz baita grafikoen bidez. Modu honetan aukera guztiak idatziak geratuko dira baita modu azkar batean ikusteko tauletan ere.

Lehenik, galderaz galdera lorturiko emaitzak adieraziko dira. Lehenengo galderan hiru erantzun zuzen daude eta 13 bikoteek lortu dituzte bederen hiru erantzun posible hauek. Baina egon da bikote bat zeinak 3 erantzun posibleez aparte, beste bi erantzun berri jarri dituen. 8 irudian ikus daiteke 1. galderaren erantzun posible eta bikote kopuruaren arteko barra diagrama.



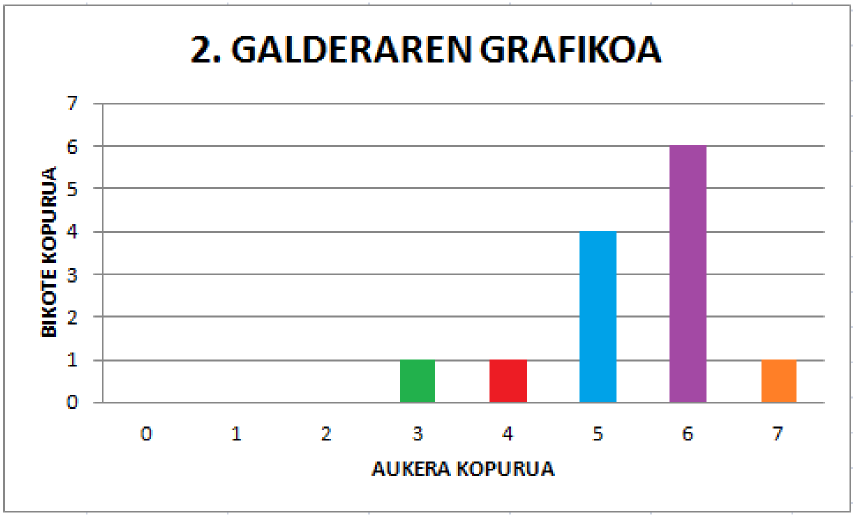
8. irudia. 1. galdera: Aukera kopurua eta bikote kopurua arteko barra diagrama

Gorriz markaturiko ikasleak 5 aukera lortu ditu eta hauek izan dira lorturiko aukerak:

1. 5+5+5+5= 20
2. 10+10=20
3. 10+5+5=20
4. 10 x 2=20
5. 5 x 4=20

Beste ikasle guztiak lehenengo galderan 3 emaitza lortu dituzte eta bertan geratu dira.

Bigarren galderari dagokionez, 6 erantzun posible daude eta bertan aukera desberdin gehiago ikusi dira. Bikote batek hiru erantzun lortu ditu (bikote hau da dinamikan ondo murgildu ez dena), beste bikote batek lau lortu ditu, lau bikotek bost erantzun lortu dituzte, bost bikotek sei aukera lortu dituzte eta bikote batek 7 aukera lortu ditu. 9 irudian ikus daiteke 2. galderaren erantzun posible eta bikote kopuruaren arteko barra diagrama.



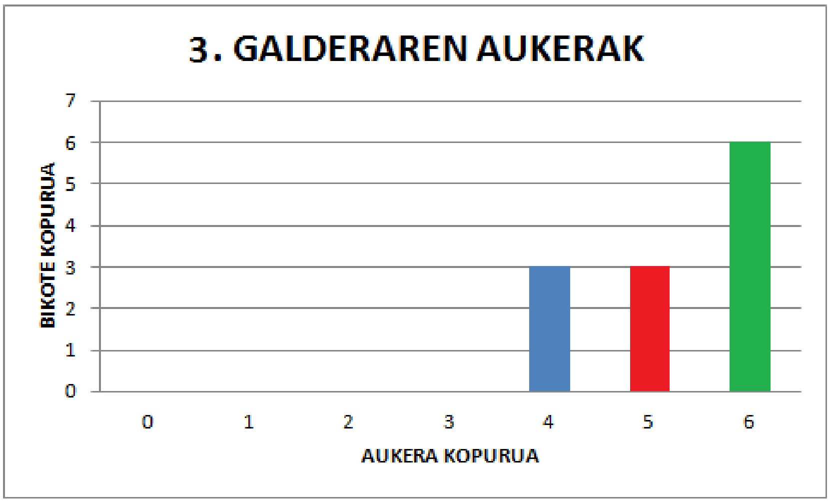
9. irudia. 2. Galdera: Aukera kopurua eta bikote kopurua arteko barra diagrama

Galdera honetan aniztasun handiagoa dago. Diagraman ikusi daitekeen bezala, bost tipologia desberdin ikus daitezke. Gehiengo batek bost eta sei erantzun lortu ditu, beraz, ikasleen %75ak baino gehiagok erantzun posible guztiak edo ia-ia guztiak lortu dituzte. Berriz ere bikote batek biderketak eta batuketak bi aukera desberdin bezala ikusi ditu, hauek izan dira talde honek lorturiko erantzunak:

- 10+20=30
- 5 x 6=30
- 3 x 10=30
- 20+5+5=30
- 10+10+5+5=30
- 10+5+5+5+5=30
- 5+5+5+5+5+5=30

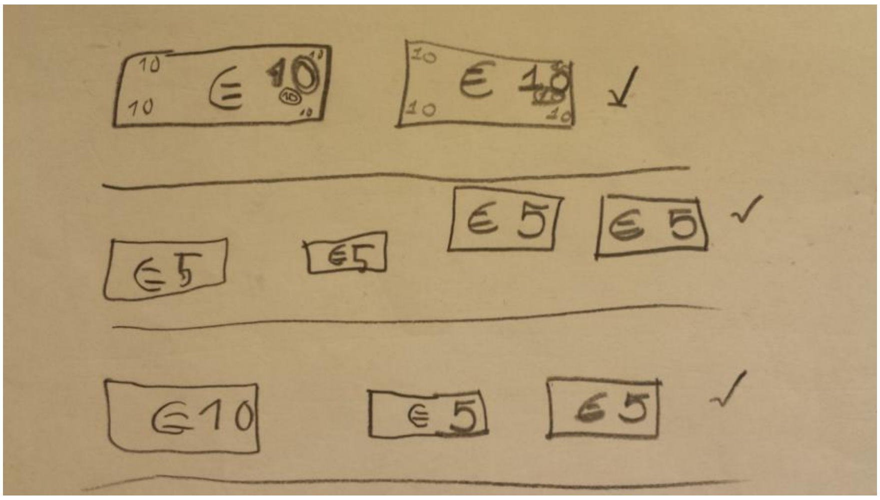
Hirugarren galderari dagokionez, bigarren galderan gertatzen den bezala, berriz ere aukera aniztasun handia ikusten da. oso hantzekoa bigarren galderarekin konparatzen baldin bada. Galdera honetan ere 6 erantzun zuzen daude. Hiru bikotek lau erantzun lortu dituzte, beste hiru bikote bost erantzun eta zazpi bikotek 6 erantzunak. Oraingoan ez da egon bikoterik 6 erantzunetatik pasa denik.

10 irudian ikus daiteke 3. galderaren erantzun posible eta bikote kopuruaren arteko barra diagrama.



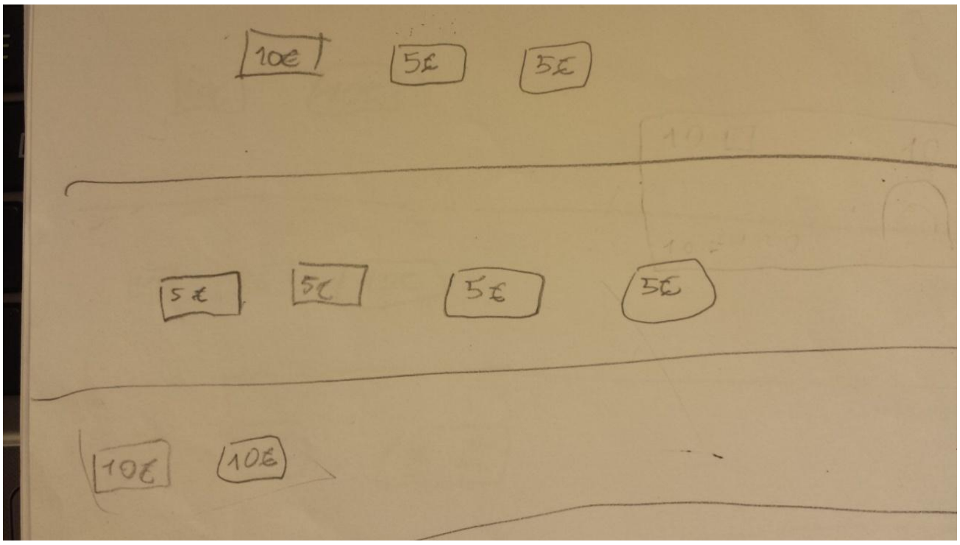
10. irudia. 3. Galdera: Aukera kopurua eta bikote kopurua arteko barra diagrama

Hiru galderen emaitzak adierazi eta gero, adierazpen ostentsiboen analisiari hasiera emango zaio hurrengo esaldietan. Analisi hau egiteko, formulazio fasen ikasleek haien erantzunak adierazteko erabili dituzten tipologien analisia egingo da. Lehen esan bezala, analisi honek 3 atal nagusi izanen ditu, eta ondoren, hauen barne, zenbait azpiatal egingo dira. Analisia aurrera eramango da sinpleenetik zailtasun handiena duenera. Analisia hasteko kontuan izango den lehenengo tipologia adierazpen analogikoa izanen da. Teknika honen bidez, ikasleek billeteen errepresentazio grafikoak egin dituzte (11 irudia). Batzuk detaile gehiagorekin beste batzuk gutxiagorekin baina beti errepresentazio grafikoa.



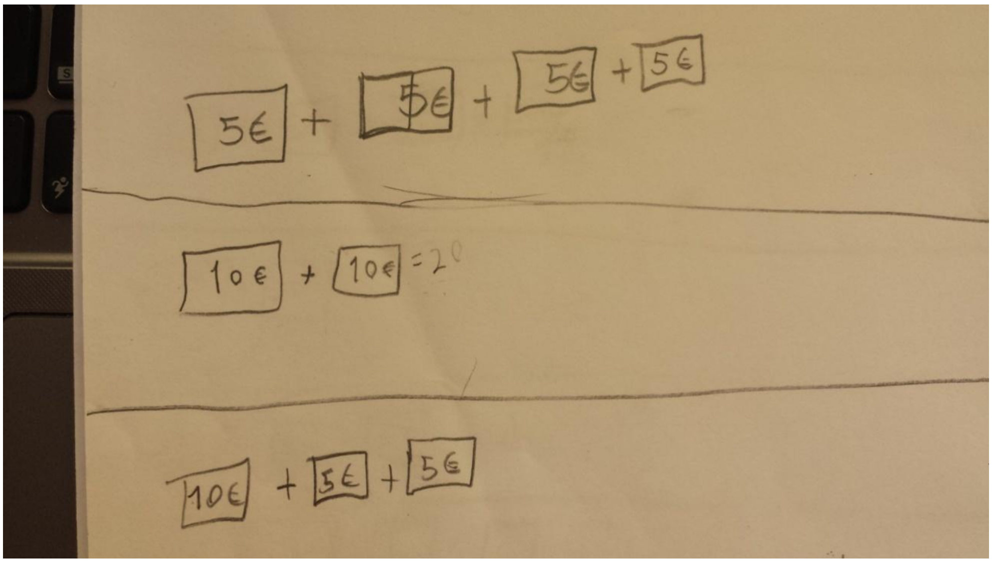
11. irudia. Bikote baten adierazpen analogikoak

Adierazpen analogikoaren barnean lau azpiatal desberdin ikus daitezke. Alde batetik, bikote batzuek soilik errepresentazio grafikoak egin dituzte, hau da, soilik fisikoki duten materialaren errepresentazioa egin dute, zehazki euroen billeteak marraztu dituzte. Bikote hauen kasuan emandako emaitzak sinpleagoak dira izan ere ez da egon hausnarketa maila handirik soilik fisikoki duten materialaren errepresentazioa egin baitute. 12 irudian ikus daiteke teknika hau erabili duen bikote baten adierazpena.



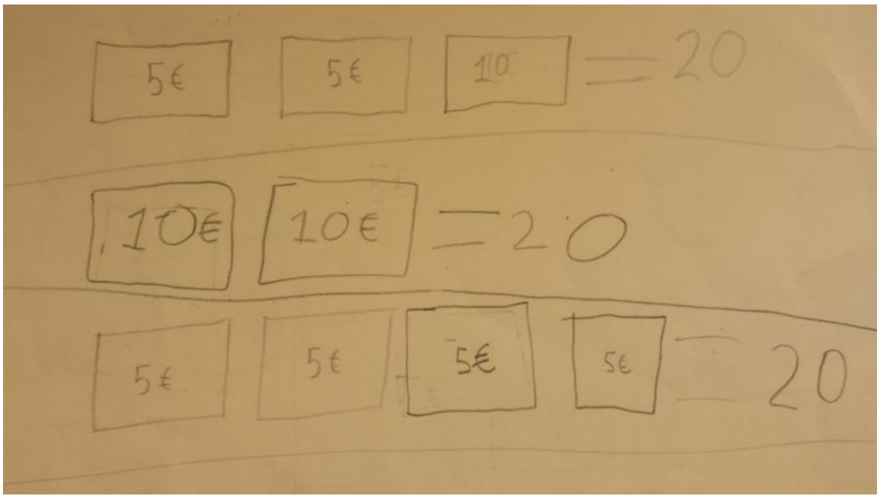
12. irudia. Bikote baten adierazpen analogiko sinpleak

Beste alde batetik, badaude bikote batzuk zeinak billeteen errepresentazioa egin ez ezik, “+” ikurra erabili duten ere. Bikote hauen kasuan ikasleak fisikoki duten materialaren errepresentazioak egin dituzte baina gainera bi billetek sortzen dute harremana ere ikusi dute, hau da, ordaintzen denean, balioak batu egiten direla. 13 irudian ikus daiteke teknika hau erabili duen bikote baten adierazpena.



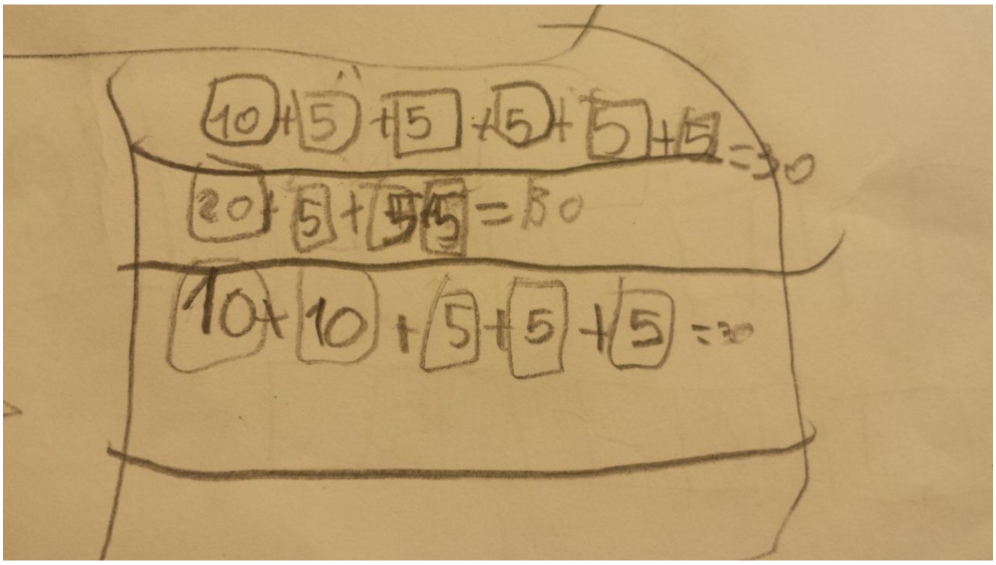
13. irudia. Bikote baten adierazpen analogikoak “+” ikurrarekin

Hirugarrenik, billeteen errepresentazio grafikoa egin ditu eta honi jarraiki, “=” adierazlea erabili dute. Bikote hauen kasuan badakite billeteak emaitza zenbaki bat sortzen duela eta hori lortu eta adierazten saiatu dira. 14 irudian ikus daiteke teknika hau erabili duen bikote baten adierazpena.



14. irudia. Bikote baten adierazpen analogikoak “=” ikurrarekin

Adierazpen analogikoaren atalari bukaera emateko, atal honen adierazpenik konplexuena adieraziko da. Bertan, bikoteak billeteen errepresentazio grafikoez gain, billeteak zenbakien modura batu daitezkeela adierazi dute eta emaitza, hau da, prezioa adierazi dute. Hau da, billeteen adierazpen grafikoez aparte, “+” eta “=” ikurrak erabili dituzte. 15 irudian ikus daiteke teknika hau erabili duen bikote baten adierazpena.



14. irudia. Bikote baten adierazpen analogikoak “+” eta “=” ikurrekin

Bukatzeko ez ohiko errepresentazio bat dago. Bikote honek lehenengo galderan adierazpen analitikoa erabili du baina beste bi galderetan guarimoak erabiltzen ditu. Hau egitearen arrazoia taula eta geroa zalduko da.

13 bikoteetatik hamarrek adierazpen analogikoaren bitartez adierazi dute eta beste bik beste modu batean. Bikote batek ez ohiko errepresentazio bat erabili du.

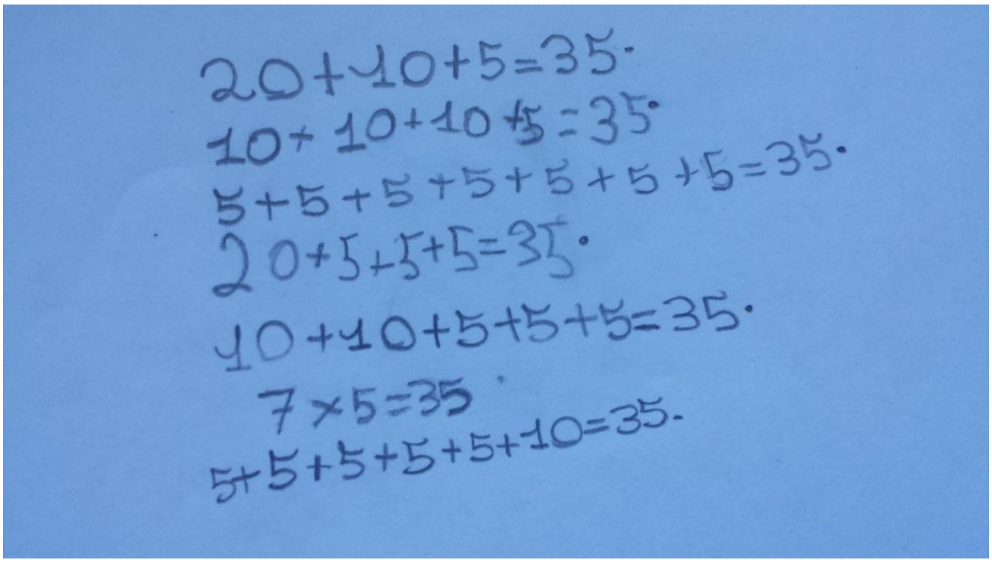
Hona hemen adierazpen analogikoaren bidez bikote bakoitzak erabilitako azpitalde bakoitzaren taula bat.

1. Taula . Adierazpen analitiko motak

Adierazpen analogiaren motak	Bikote kopura	Ehunekoak
Billeteen errepresentazioa	Sei bikote	%46
Billeteen errepresentazioa eta “+” ikurra	Bikote bakarra	%7.5
Billeteen errepresentazioa eta “=” ikurra	Bi bikote	%15
Billeteen errepresentazioa, “+” eta “=” ikurrak	Bikote bakarra	%7.5
Ez ohiko errepresentazioa	Bikote bakarra	%7.5
Osotara	Hamaika bikote	%85

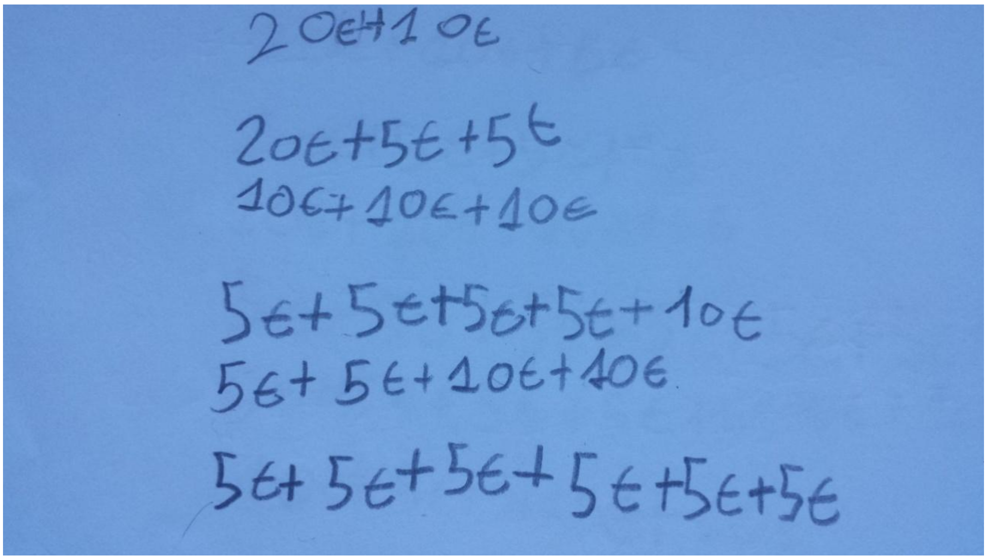
Ez ohiko errepresentazioa lehen esan bezala, bikote batek hiru galderak egiterako orduan modu ez ohiko batean egin ditu eta horregatik adierazi da taula honetan baina esaldi hauetan ere.

Behin adierazpen analitikoarekin bukatuta, bigarren multzoari hasiera eman behar zaio. Multzo honetan bikoteak jada adierazpen grafikoak alde batera utzi dituzte eta konplexutasun maila handiago batean adierazi dituzte beren formulazioa. Bigarren atal honetan bikoteak guarismoen erabilpena, hau da, zenbakien erabilpena ematen da. Adierazpen mota hau bikote bakar batek eraman du aurrera (kontuan izan gabe bikote batek adierazpen analitikoarekin hasi dela eta bigarren galdera guarismoak erabiltzera pasa dela). 16 irudian ikus daiteke bikote honek nola adierazi dituen akzio fasean lorturiko emaitzak.



15. irudia. Bikote bat guarismoak erabiltzen

Akzio fasean gauzaturiko esperimentazioak adierazteko hirugarren modua magnitudeen erabilpena da. Bertan bikoteak zenbakien bidezko irudikapenaz gain, zenbaki horiek zer diren adierazi dute, hau da, digitu bakoitzak zer adierazi nahi duen. Hau emandako hiru kasu nagusietatik konplexutasun maila handiena duena da bertan ikasleak ez dituztelako soilik zenbakiak edota errealitatearen errepresentazioak egiten baizik eta errealitate horren abstrakzio bat. 16 irudian ikus daitezke bikote horren adierazpenak.



16. irudia. Bikote bat magnitudeak erabiltzen

ONDORIOAK ETA GALDERA IREKIAK

Hiru aspektu desberdin bereizi behar dira ondorioen inguruan hitz egiterakoan. Hiru aspektu hauek marko teorikoaren eta emaitzen analisiaren arteko alderaketatik sortzen dira. Alde batetik marko teorian azaldurikoa eta emaitzetan ikusitakoa. Bigarrenik, marko teorikoan azaldurikoa eta emaitzetan ikusi ez dena. Hirugarren eta azkenik, marko teorikoan azaldu ez arren, emaitzetan interesgarri ikusi dena. Hiru aspektu hauen inguruan aterako dira lan honen ondorio guztiak.

Lehenengo aspektuari dagokionez, oso adierazgarria da bikote batek egindakoa. Bertan marko teorikoaren eta emaitzen arteko alderaketa argi ikusten delako. Aukera gehiago lortzeko bikote honek erantzun berdin bat beste modu batera kokatu du. Zehazki batuketa bat biderketa modura adierazi du, eta bitan zenbatu, kasu ezberdina balitz bezala. Honek adierazten du ikasleak biderketaren ezagutza instituzionala baduela, baina ez diola esanahi pertsonalik ematen. Hau da, marko teorikoaren 2.5 atalean azaldurikoaren arabera, biderketaren prozedura mekanikoa egiteko gai da, baina ez dio esanahirik ematen. Teknika berria ezagutzen du baina oraindik ez dio esanahi pertsonala eman, soilik algoritmikoki ikasi du. Beraz, lehenengo teknikari dagokionez, jada zailtasun handiegiak sortzen hari dizkio baina oraindik bigarren teknikarekin ez du topo egin. Hau izan da gaizki egitearen arrazoia, jauzia denbora baino lehen egiten saiatu dela.

Baina ez da eman den kasu bakarra. Aurrekoan, bikote batek jauzia denbora baino lehen egin du eta beraz, ez du bigarren estrategia ondo egin; baina honakoan aldiz, jauzia behar den momentuan egin du eta bigarren estrategia modu egokian erabili du. Bikote honek lehenengo galderan lorturiko emaitzak modu analogikoan adierazi ditu baina ondoren bigarren eta hirugarren galderetan adierazpen analitikoa alde batera utzi du eta konplexutasun handiagoa duen adierazpen bat erabili du, guarismoak hain zuzen ere. Jauzi hau azaltzeko marko teorikoaren 2.3.3 atalean azalduriko estrategia batetik besterako jauzien grafikoarekin azaltzen da. Bikotea estrategia batekin hasi da, eta estrategia hori baliatuz , 1. galdera erantzun du; baina bigarren galderak konplexutasun maila handiagoa eskatzen duenez, jauzi bat eman dute hurrengo estrategiara, hau da, guarismoetara. Bertan, emandako jauzia bikotea bi estrategien arteko talka puntua jada pasa dutenean eman da eta horregatik bigarren estrategia ondo egiteko gai izan dira, zehazki esanahi pertsonala emana diotelako estrategia horri.

Bigarren aspektuari dagokionez, hau da, marko teorikoan agertzea baina emaitzetan ez ikustea. Marko teorikoaren 2.3.1 Oztopoak eta 2.3.2 Fenomenoak atala ez da emaitzetan ikusi. Ez da ez fenomenorik ezta oztoporik ikusi. Gradu bukaerako lan honetan efektu desberdinak azaldu dira baina hauek ez dira emaitzetan ikusi. Izan ere efektu hauek negatiboak dira eta normalean irakaskuntza transmisibo bat ematen denean sortzen dira. Kasu honetan egoera didaktiko bat diseinatu denez, honako efektuak ekidin egin dira. Oztopoei dagokienez, marko teorikoan ere azaldu egin dira, baina fenomenoekin gertatu den bezala, ez dira praktikan ikusi. Egia da akatsak egon direla, baina ezin dira oztopo kontsideratu, egondako akatsak esporadikoak izan baitira.

Bukatzeko, marko teorian azaldu ez arren, emaitzetan agertu den aspektu bat dago. Proposamenean hiru zeregin aurkeztu zaizkie ikasleei, G1, G2 eta G3, eta zeregin horiek antolatuta daude errazenetik zailenera. Hala ere, bikote dezentek zailagoa den zereginean arrakasta handiagoa lortu dute, errazagoa zen batean baino. Gertaera hori zorizkoa den azaltzeko, Guttmanen eskalograma erabiliko da. Guttmanen eskalogramaren arabera, erabaki nahi da Marko teorikoan kontenplatu ez den faktoreren bat ote dagoen emaitzetan. Ez dago zehazki jakiterik faktore ezezagun hori zein den, baina Guttmanen eskalogramaren arabera haren existentzia erabaki nahi da 2. taulan ikus daitezke Guttmanen eskalograma eta indizea.

2. Taula . Guttmanen eskalogramaren emaitzak

G1	G2	G3	esperotakoak	esperogabeak
1	0	0	3	0
1	0	0	3	0
1	0	0	3	0
1	0	0	3	0
1	0	0	3	0
0	1	0	1	2
1	1	0	3	0
1	0	1	1	2
1	0	1	1	2
1	0	1	1	2
1	1	1	3	0
1	1	1	3	0
1	1	1	3	0
39	item		31	8

Guttmanen indizea nahiko baxua da zehazki 0.79487195 eta izan beharko luke 0,9tik gorakoa. Horren arabera, jardueraren zailtasunaz gainera, esan daiteke badagoela beste faktore bat (guretzat ezezaguna) erantzun horiek baldintzatzen ari dena. Bigarren galdearen eta hirugarren galderaren artean kontuan hartu ez den zerbait gertatu da. Izan daiteke bigarrenaren eta hirugarrenaren arteko zailtasun jauzia ez ematea, ikasleak dinamikan oso barneratuak egotea, denboraren kudeaketa txar bat ematea edota ikasleak klasearen erdia atentzioa galtzea; beste aukera askoren artean. Lan honek duen marko teorikoarekin ezin da jakin zehazki zein izan den gertaera horren arrazoia, horretarako beste marko teoriko desberdin bat eta beste lan bat beharko litzateke. Interesgarria litzateke, etorkizunean, aspektu hori argituko duen beste Gradu Bukaerako Lan bat egitea.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

A la hora de hablar de las conclusiones es necesario comentar tres aspectos diferentes. Estos tres aspectos salen de la comparación entre el marco teórico y los resultados. Para comenzar, lo explicado en el marco teórico que a la vez se ve en los resultados, en segundo lugar lo explicado en el marco teórico que no aparece en los resultados y por tercer y último lugar, último las cuestiones que no se han explicado en el marco teórico pero que si han aparecido en los resultados. Estos son los tres aspectos de los cuales saldrán las conclusiones.

Respecto al primero aspecto, es muy significativo lo realizado por una de las parejas. Ya que se ve claramente la comparación entre el marco teórico y los resultados. Esta pareja para lograr más soluciones utilizo el mismo método pero colocado de diferente manera, más concretamente, colocó una suma en forma de multiplicación, sumando los dos casos como si fueran diferentes. Esto da a entender que el alumno tienen un conocimiento institucionalizado de la multiplicación, pero que aún no le ha dado carácter personal. Es decir como se ha explicado en la subsección 2.5 del marco teórico, es capaz de realizar la multiplicación como un proceso mecánico, pero no le a dado significado personal. Es cierto que conoce la nueva técnica pero aun no le ha dado un significado personal, sino que solamente la ha aprendido algorítmicamente. Y aunque la primera técnica ya le resulte difícil de aplicar no puede aplicar la segunda porque aún no se ha dado el punto de contacto entre las dos, es decir, esta pareja ha querido realizar el salto antes de tiempo.

Pero no es el único caso que se ha dado. La pareja anterior a dado el salto antes de tiempo, por lo que no ha podido realizar la segunda estrategia a la perfección; pero he este segundo esta pareja a realizado el salto en el momento oportuno y ha sido capaz de realizar la segunda estrategia perfectamente. Esta pareja en la primera pregunta ha utilizado una resolución en forma de expresión analógica pero en las dos siguientes a cambiado de forma y ha utilizado una más compleja, los guarismos. Para explicar este salto hay que remontarse otra vez a la subsección 2.5 del marco teórico en el que se explica el salto mediante un gráfico. La pareja ha comenzado utilizando una estrategia para realizar la primera pregunta pero como la segunda pregunta era más complicada han cambiado de estrategia y han dado un salto a la siguiente, es decir, a los guarismos. El salto que se ha dado ha sido cuando las dos estrategias ya se habían juntado, y esta es la razón por la cual esta pareja ha sido capaz de realizar la segunda y la tercera pregunta bien.

Respecto al segundo aspecto, es decir, lo explicado en el marco teórico pero que no se ve en los resultados. Las subsecciones del marco teórico 2.3.1, Obstáculos y 2.3.2 Fenómenos, no se ven reflejados en los resultados. No hay ni fenómenos ni obstáculos. En este trabajo de fin de grado se han explicado diferentes fenómenos pero ninguno de estos se da ha dado en la práctica. Hay que tener en cuenta que estos efectos son negativos y que de normal se crean en los modelos de enseñanza transmisiva. En este caso al haber diseñado una situación didáctica, se ha conseguido evitar estos fenómenos. En cuanto a los obstáculos se refiere, también se han explicado en el marco teórico pero al igual que con los fenómenos no se han dado en la práctica. Es cierto que ha habido algunos fallos por parte de los alumnos pero no se pueden considerar obstáculos sino fallos esporádicos.

Para finalizar la conclusión, aunque el marco teórico no se contemple, hay un aspecto que si que aparece en los resultados. En la propuesta se han presentado tres quehaceres, 1ªP, 2ªP y 3ªP, y estos quehaceres están ordenados de mejor a mayor dificultad. Aun así, muchas parejas han conseguido un mayor éxito en los quehaceres mas difícil que en los fáciles. Como este suceso es aleatorio, se ha utilizado el escalograma de Guttman. De acuerdo con el escalograma de Guttman, se quieres decidir si hay un factor que altera los resultados que no se haya contemplado en el marco teórico. No se puede saber con certeza cual es este factor desconocido pero según el escalograma de Guttman la existencia se quiere decidir en escalograma e índice de Guttman de la 2ª tabla.

2ª Tabla . Los resultados del Escalograma de Guttman

1ª P	2ª P	3ª P	Esperados	No esperados
1	0	0	3	0
1	0	0	3	0
1	0	0	3	0
1	0	0	3	0
1	0	0	3	0
0	1	0	1	2
1	1	0	3	0
1	0	1	1	2
1	0	1	1	2
1	0	1	1	2
1	1	1	3	0
1	1	1	3	0
1	1	1	3	0
39 items			31	8

El índice d Guttman ha sido bastante bajo, 0.79487195 exactamente y debía de ser superior a 0.9. Por lo que aparte de la dificultad del ejercicio, hay otros factores (para nosotros no conocidos) que condicionan las respuestas. En la segunda y en la tercera pregunta ha sucedido algo. En principio la segunda pregunta es más fácil que la primera pero se ha visto que en algunos casos no ha sucedido así. Esto puede deberse a múltiples razones como que los alumnos estén más involucrados en la dinámica, que no hayas sabido gestionar el tiempo o que los. Pero con el marco teórico de este trabajo de fin de grado no se puede dar una solución a este problema, para ello sería necesario otro marco teórico diferente y otro trabajo diferente.

AIPUAK

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.

Burton, L; Manson, J & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente.* Madrid. Centro de Publicaciones del MEC y Labor S.A.

Chamorro, M.C (2003) Didáctica de las matemáticas para primaria. Madrid. Pearson Education.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. [Erabilgarri(29/05/2015)] http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/teoria%20de%20las%20situaciones%20didacticas.pdf

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* México D. F. Trillas