

Izaskun ABENDAÑO ZOCO

FUNCIONES

Adaptación de la enseñanza de funciones al
grupo de 3º ESO PMAR

TFM 2016



Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL
PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria.

Bigarren Hezkuntzako Irakasletzan Masterra

Trabajo Fin de Máster
Ámbito Matemáticas

Master Amaierako Lana
Matematika Arloan

**Adaptación de la enseñanza de
funciones al grupo de 3º de ESO del
Programa de Mejora del
Rendimiento y Aprendizaje**

Izaskun Abendaño Zoco

**UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA**

ÍNDICE

Parte I: Las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto	
I. Atala Funtzioak indarrean dagoen kurrikulumean eta testu liburuetan	7
1. Las funciones en el currículo vigente	11
1.1. Contenidos en Educación Primaria	12
1.2. Contenidos en ESO	13
1.3. Contenidos en Bachillerato	18
1.4. Síntesis de la evolución de los contenidos.....	20
2. Los criterios de evaluación de las funciones en el currículo vigente.....	23
2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria.....	23
2.2. Criterios de evaluación en ESO	24
2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato.....	28
3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones en el currículo vigente	33
3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de ESO	33
3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO	36
3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO	40
3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO Opción B.....	43
3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO Opción A.....	46
3.6. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachiller de Ciencias Sociales	46
3.7. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachiller Científico... ..	49
4. Resultados	51
4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto.....	51
4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.....	52
Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las funciones en 3º PMAR	
II. Atala: Funtzioen ikasketa prozesu baten analisia 3.PMAR-en	53
* Los Programas de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento (PMAR).....	57
- Legislación vigente de aplicación	57
- Características y definición	57
- Contenidos del currículo en los grupos 3º PMAR	58
5. Las funciones en el libro de texto de referencia	61
5.1. Objetos matemáticos involucrados.....	61
5.2. Análisis global de la unidad didáctica	63
6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica	69
6.1. Dificultades	69

6.2. Errores y su posible origen	70
7. El proceso de estudio.....	71
7.1. Distribución del tiempo de la clase	71
7.2. Adaptaciones y actividades adicionales planificadas	73
7.3. Análisis cuantitativo de la tipología de adaptaciones aplicadas	86
7.4. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista	87
8. Experimentación	89
8.1. Muestra y diseño de la experimentación	89
8.2. El cuestionario.....	89
8.3. Cuestiones y comportamientos esperados	92
8.4. Resultados.....	94
8.5. Discusión de los resultados	101
Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas.....	103
Síntesis / Sintesia	103
Conclusiones / Ondorioak	104
Cuestiones abiertas / Galdera irekiak.....	105
Referencias.....	106
Anexos.....	107
Anexo 1. Currículo y contenidos 3ºPMAR vs. 3ºESO.....	107
Anexo 2. Libro de texto base utilizado	110
Anexo 3. Ejercicios para la sesión de repaso	118
Anexo 4. Test de evaluación inicial y resultados	121
Anexo 5. Test para resolver preguntas y utilizarlas como hilo conductor	129
Anexo 6. Test para tarea de casa. Cuestiones de función lineal y afín.....	132

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar las adaptaciones metodológicas y de materiales necesarias para la docencia de funciones en el aula del grupo de 3º de ESO del Programa de Mejora del Rendimiento y Aprendizaje (3º PMAR).

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre funciones, que se ha puesto en marcha en el aula del grupo de 3º PMAR en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Sarrera orokorra

Master Amaierako lan honen xedea 3. DBH mailako Ikaskuntza eta Errendimendua Hobetzeko Programetako taldean (3º PMAR) funtzioak gaia emateko metodologia eta materialetan egin beharreko egokitzapenak aztertzea da.

Lana bi ataletan egituratzen da. Lehenengo partea kurrikuloaren eta testu liburuen azterketa longitudinala egiten da Lehen Hezkuntzan, DBHn eta Batxilergoan adierazitako gaiaren gainean.

Bigarren atalean funtzioen inguruan ikasketa prozesu bat aztertzen da, 3.DBHn gela batean aurrera eramane Masterraren Practicum II aren barruan. Ikerlan honetatik ateratako ondorioak *ad hoc* sortutako galdetegi batean oinarri hartzen dute, beti ere erakundeen mugak kontuan hartuta.

Lana sintesi, konklusio eta galdera irekiekin amaitzen da.

Parte I:

Las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto

I. Atala

Funtzioak indarrean dagoen kurrikulumean eta testu liburuetan

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a funciones en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 3º de ESO así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Master Amaierako Lanaren lehen atal honetan Lehen Hezkuntzan, DBHn eta Batxilergoko kurrikulumetan eta testu liburuetan Funtzioen gaiari nola heltzen zaion aztertuko da.

Analisia lau ataletan zatitzen da. Lehenengo eta bigarren kapituluetan indarrean dagoen kurrikulumeko mail bakoitzean funtzioei dagozkien edukiak eta ebaluazio irizpideak taula moduan erakusten dira. Hirugarren atalean 3.DBHko aktibitate tipo bakoitzeko adibideak agertzen dira (ariketak, buruketak, kuestioak eta egoerak) eta baita bi kurtso lehenagokoak eta bi kurtso ondokoak ere.

Edukien bi iturburu ezberdinen konparaketatik (kurrikulum eta testu liburua) ateratako konklusioak laugarren kapitulan azaltzen dira. Helburua hemen eskuliburuaren kurrikuluarekiko koherentzia baloratzea da eta analisiaren xedea den gaiari dagokion kontzeptu matematikoen presentziak eta gabeziak nabarmentzea.

1. Las funciones en el currículo vigente

En este capítulo se analiza cómo se estructuran y abordan los contenidos de funciones establecidos en los currículos del tercer ciclo de primaria, ESO y bachillerato.

Los currículos de referencia utilizados para cada nivel son:

- PRIMARIA: RD 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria, BOE núm. 293.
- ESO: RD 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria
- BACHILLERATO: RD 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Se han extraído las partes que hacen referencia al tema objeto del presente trabajo y se han organizado en tablas organizadas por niveles y cursos, utilizando como línea de referencia y estructuración 5 descriptores que se pueden agrupar de la forma siguiente:

- **C-1. Modelización de situaciones reales mediante funciones. Resolución de problemas.**
- **C-2: La función**
 - o Representación gráfica de funciones
 - o Representación de funciones mediante tablas de valores
 - o Expresión analítica de una función
- **C-3: Familias de funciones**
 - o Función lineal y afín. Proporcionalidad
 - o Otras familias de funciones
- **C-4: Análisis**
- **C-5: Uso de tecnologías**

1.1. Contenidos en Educación Primaria

	DESCRIPTOR	3^{er} CICLO PRIMARIA
C-1	Modelización de situaciones reales mediante funciones. Resolución de problemas	<i>Bloque 1. Números y operaciones</i> - Cálculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales.
C-2	Representación gráfica de funciones	<i>Bloque 3. Geometría</i> - Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros... - La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
	Representación de funciones mediante tablas de valores.	<i>Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad</i> - Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. - Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. - Obtención y utilización de información para la realización de gráficos.
	Expresión analítica de una función	----
C-3	Proporcionalidad. Funciones lineales	<i>Bloque 1. Números y operaciones</i> - Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. <i>Bloque 3. Geometría</i> - Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones
	Otras familias de funciones	----
C-4	Uso de tecnologías	<i>Bloque 1. Números y operaciones</i> - Utilización de la calculadora en la resolución de problemas, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos.
C-5	Análisis	----

1.2. Contenidos en ESO

		1º ESO	2º ESO
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. - Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas. <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. 	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. <p><i>Bloque 2. Números</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Resolución de problemas relacionaos con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.
C-2	Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas. - Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una gráfica. -Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación. 	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. - Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. - Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
	Representación de funciones mediante tablas de valores	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Organización de datos en tablas de valores. - Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla de valores. 	<p><i>Bloque 2. Números</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores o de un enunciado.

	Expresión analítica de una función	<p><i>Bloque 3. Álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. - Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. - Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. 	<p><i>Bloque 3. Álgebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basados en la observación de pautas y regularidades. <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una expresión algebraica sencilla.
C-3	Proporcionalidad. Funciones lineales	<p><i>Bloque 2. Números</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. - Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. 	<p><i>Bloque 2. Números</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Proporcionalidad directa e inversa. Razón de proporcionalidad. - Aumentos y disminuciones porcentuales. <p><i>Bloque 4. Geometría</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - La semejanza. Identificación de relaciones de semejanza. - Razón entre las superficies de figuras semejantes. <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.
	Otras familias de funciones	----	----
C-4	Análisis	----	----
C-5	Uso de tecnologías	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas 	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

		3º ESO
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i> - Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. - Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
	Representación gráfica de funciones	<i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i> -Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. - Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte.
C-2	Representación de funciones mediante tablas de valores	<i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i> - Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
	Expresión analítica de una función	<i>Bloque 3. Álgebra</i> - Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico. - Transformación de expresiones algebraicas. <i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i> - Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta
C-3	Proporcionalidad. Funciones lineales	----
	Otras familias de funciones	----
C-4	Análisis	----
C-5	Uso de tecnologías	<i>Bloque 1. Contenidos comunes</i> - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. <i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> - Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.

		4º ESO A (aplicadas)	4º ESO B (académicas)
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <p>- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.</p>	
		----	<p>Análisis de resultados</p> <p>- Funciones definidas a trozos.</p> <p>Búsqueda e interpretación de situaciones reales.</p> <p>- Aplicaciones (<i>de funciones cuadráticas, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica</i>) a contextos y situaciones reales.</p>
C-2	Representación gráfica de funciones	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <p>- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.</p>	
	Representación de funciones mediante tablas de valores	<p>- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.</p>	
	Expresión analítica de una función	<p><i>Bloque 3. Álgebra</i></p> <p>- Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.</p>	<p><i>Bloque 3. Álgebra</i></p> <p>- Manejo de expresiones literales.</p>
C-3	Proporcionalidad. Funciones lineales	<p><i>Bloque 2. Números</i></p> <p>- Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.</p>	----
	Otras familias de funciones	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <p>- Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática.</p>	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i></p> <p>- Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.</p> <p>- Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica.</p>
C-4	Análisis	<p><i>Bloque 5. funciones y gráficas</i></p> <p>- La tasa de variación media.</p>	

<p>C-5</p>	<p>Uso de tecnologías</p>	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes</i> - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.</p> <p><i>Bloque 2. Números</i> - Uso de la hoja de cálculo para la organización de cálculos asociados a la resolución de problemas cotidianos y financieros.</p> <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i> - Utilización de tecnologías de la información para el análisis de modelos funcionales</p>	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes</i> - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.</p> <p><i>Bloque 2. Números</i> - Utilización de la calculadora para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica.</p> <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas</i> - Utilización de tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.</p>
-------------------	---------------------------	--	---

1.3. Contenidos en Bachillerato

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I Y II			
		1º BACH CC.SS.	2º BACH CC.SS.
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<i>Bloque 2. Análisis</i> - Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos. - Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales.	<i>Bloque 2. Análisis</i> - Aplicación de las derivadas a la resolución de problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía.
C-2	Representación gráfica de funciones	<i>Bloque 2. Análisis</i> - Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Aspectos globales de una función.	<i>Bloque 2. Análisis</i> - Aplicación de las derivadas al estudio de funciones habituales (...). - Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.
	Representación mediante tablas de valores		----
	Expresión analítica de una función		<i>Bloque 2. Análisis</i>
C-3	Familias de funciones	<i>Bloque 2. Análisis</i> - Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos.	- Aplicación de las derivadas al estudio de funciones habituales (...). - Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.
C-4	Análisis	<i>Bloque 2. Análisis</i> - Tendencias. - Tasa de variación ** <i>El currículo de la Comunidad Foral de Navarra incluye los límites y su cálculo así como las derivadas, su cálculo e interpretación geométricas.</i>	<i>Bloque 2. Análisis</i> - Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función. Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas. - Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto de interpretación geométrica.
C-5	Uso de tecnologías	-----	-----

MATEMÁTICAS I Y II			
		1º BACH CIENTÍF.	2º BACH CIENTÍF.
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<i>Bloque 3. Análisis</i> - Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.	<i>Bloque 3. Análisis</i> - Problemas de optimización.
C-2	Representación gráfica, mediante tablas de valores o expresión analítica de una función	<i>Bloque 3. Análisis</i> - Dominio, recorrido y extremos de una función. - Operaciones y composición de funciones.	----
C-3	Familias de funciones	<i>Bloque 3. Análisis</i> - Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.	----
C-4	Análisis	<i>Bloque 3. Análisis</i> - Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad. - Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo.	<i>Bloque 3. Análisis</i> - Concepto de límite de una función. Cálculo de límites. - Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad - Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. - Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.
C-8	Uso de tecnologías	-----	-----

1.4. Síntesis de la evolución de los contenidos

Como se puede ver en las tablas, y como se resume en la tabla síntesis adjunta a continuación, el descriptor C-1 presenta una continuidad longitudinal a lo largo de todas las etapas analizadas, si bien se adapta a las herramientas que los alumnos disponen en cada uno de los niveles. Se puede concluir por tanto que la importancia otorgada a la aplicación a casos prácticos de las funciones es sólida a lo largo del currículo.

Por otro lado, se puede ver cómo gran parte del peso hasta 4º de ESO recae sobre el concepto de función y sus diferentes representaciones gráfica, tabla de valores y analítica, descriptor C-2. En el tercer ciclo de primaria y primer curso de la ESO, se trabajan las herramientas que permitirán en 2º interrelacionarse en el concepto y análisis de las funciones como un único objeto con diferentes representaciones que se consolidará en los cursos siguientes. En Bachiller esto cambia y los contenidos se trasladan completamente al descriptor C-4 con el paso al límite y el cálculo infinitesimal.

De forma paralela, se van introduciendo y ampliando familias de funciones. En primaria y 1º de la ESO se trabaja la idea de proporcionalidad, en 2º y 3º de ESO se trabajan la función lineal y la afín y en 4º de ESO y bachiller, cuando el concepto función se domina, se van introduciendo el resto de funciones elementales progresivamente. Esto se ve mediante el descriptor C-3.

Hay que añadir, que el currículo para Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad Foral de Navarra aprobado mediante Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, y publicado en el BON de 2 de julio de 2015, (LOMCE) incluye contenidos adicionales. En 2º de ESO se amplía el trabajo con la función lineal y la afín, en 3º de ESO se incluyen las funciones cuadráticas. En 4º de ESO opción A la función de proporcionalidad inversa, y en 1º de Bachiller de matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales los cálculos de límites, la introducción de las ramas infinitas y asíntotas, el cálculo de la primera derivada y su aplicación al estudio de crecimiento y puntos singulares. Estos contenidos están, por tanto, incluidos en las programaciones de las asignaturas en el Instituto en el que se desarrolla el presente trabajo así como en los materiales estudiados en el capítulo 3.

Lo comentado se puede observar en la siguiente tabla resumen de evolución de contenidos.

	primaria	1 ESO	2 ESO	3 ESO	4 ESO A	4 ESO B	1ºB. CC.SS.	1ºB. CTFCO	2ºB. CC.SS.	2ºB. CTFCO
Modelización de situaciones	Aplicación de proporcionalidad y porcentajes a problemas	Identificación de relaciones de dependencia	Problemas de proporcionalidad directa e inversa	Problemas modelizados con funciones lineales y afines	Identificación de función que describe mejor un fenómeno dado	Identificación de función que describe mejor un fenómeno dado	Funciones para modelizar problemas de las CCSS y economía	Interpretación de funciones que describan situaciones reales.	Utilización de la información de la derivada	Problemas de optimización
Gráfica	Coord. Cartesianas	Gráfica	Gráfica	Análisis interrelacionado de funciones expresadas en sus tres formas	Análisis global de funciones	Análisis global de funciones	Análisis global de funciones	Análisis global de funciones operaciones y composición de funciones	Análisis global de funciones	-----
Tabla	Tablas datos	Tablas	Tablas							
Analítica	---	Expresión analítica	Expresión analítica							
Familias de funciones	Proporcionalidad	Proporcionalidad	Función lineal	Lineal/afín *Cuadrática (BON)	Lineal/afín Cuadrática Exponencial * Proporc. inversa (BON)	Lineal/afín Cuadrática Exponencial Prop. inversa Logarítmica	Polinómicas Exponencial Logarítmica Valor Abs. Parte Entera Racionales Sencillas	Polinómicas Exponencial Logarítmica Valor Abs. Parte Entera Racionales Sencillas Trigonométric.	Polinómicas Exponencial Logarítmica Valor Abs. Parte Entera Racionales Sencillas	Polinómicas Exponencial Logarítmica Valor Absoluto Parte Entera Racionales Sencillas Trigonométric.
Análisis	---	---	---	---	---	---	Tendencia Tasa de Variación *cálculo de límites sencillos. Ramas infinitas *cálculo de derivadas. Interpretación geométrica (BON)	Introducción al concepto de límite Introducción al concepto derivada	Concepto de límite Concepto de derivada y usos	- Cálculo de límites - Derivada de funciones simples, suma, producto, cociente y func. compuestas - Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades de una función - Introducción concepto integral definida

Tabla 1 síntesis de la evolución y presencia de los distintos descriptores en cada curso

2. Los criterios de evaluación de las funciones en el currículo vigente

En este capítulo se analizan los criterios de evaluación que establecen los citados Reales Decretos para comprobar la comprensión e interiorización de los contenidos. Esto se realizará, al igual que el capítulo 1, para los niveles de tercer ciclo de primaria, ESO y bachillerato y siguiendo los mismos descriptores.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

	DESCRIPTOR	3 ^{er} ciclo primaria
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<p>3. <i>Utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana.</i></p> <p>Con este criterio se pretende comprobar la utilización de los diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos y la capacidad de identificarlos y utilizarlos como operadores en la interpretación y la resolución de problemas.</p>
	Representación gráfica de funciones	<p>6. <i>Interpretar una representación espacial realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares.</i></p> <p>Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.</p>
C-2	Representación de funciones mediante tablas de valores	<p>7. <i>Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. (...)</i></p> <p>Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... y de comprender y comunicar la información así expresada (...).</p>
	Expresión analítica de una función	----
C-3	Proporcionalidad. Funciones lineales	----
	Otras familias	----
C-4	Análisis	----
C-5	Uso de tecnologías	<p>2. <i>Realización de operaciones y cálculos numéricos sencillos mediante diferentes procedimientos (...).</i></p> <p>Se trata de apreciar las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora).</p>

2.2. Criterios de evaluación en ESO

	DESCRIPTOR	1º ESO
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	----
C-2	Representación gráfica de funciones	6. <i>Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.</i> Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.
	Representación de funciones mediante tablas de valores	
	Representación en forma analítica de funciones	3. <i>Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas.</i> Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida. Se pretende, asimismo, valorar el uso del signo igual como asignado y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Forma parte de este criterio también la obtención del valor numérico en fórmulas simples con una sola letra.
C-3	Proporcionalidad. Funciones lineales.	----
	Otras familias elementales de funciones	----
C-4	Análisis	----
C-5	Uso de tecnologías	----

	DESCRIPTOR	2º ESO
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones.	<p>2. <i>Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.</i></p> <p>Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.</p>
C-2	Representación gráfica de funciones	<p>5. <i>Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.</i></p> <p>Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.</p>
	Representación de funciones mediante tablas de valores	
	Expresión analítica de una función	<p>3. <i>Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.</i></p> <p>Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones (...).</p>
C-3	Proporcionalidad. Funciones lineales.	<p>2. <i>Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.</i></p> <p>Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.</p>
	Otras familias de func.	----
C-4	Análisis	----
C-5	Uso de tecnologías	----

	DESCRIPTORES	3º ESO
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<p>5. <i>Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.</i></p> <p>Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la grafica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.</p>
	Representación gráfica de funciones	
C-2	Representación de funciones mediante tablas de valores	
	Expresión analítica de una función	<p>2. <i>Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos.</i></p> <p>A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.</p>
C-3	Proporcionalidad. Funciones lineales	<p>5. <i>Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.</i></p> <p>Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la grafica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.</p>
	Otras familias de funciones	----
C-4	Análisis	----
C-5	Uso de tecnologías	----

	DESCRIPTORES	4º ESO A	4º ESO B
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<p>5. <i>Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas.</i></p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis cuando sea preciso, las tecnologías de la información.</p>	<p>4. <i>Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.</i></p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será precisa la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.</p>
C-2	Representación gráfica de funciones	<p>6. <i>Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento.</i></p> <p>A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.</p>	<p>2. <i>Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos para resolver problemas.</i></p> <p>Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad de usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas (...).</p>
	Representación de funciones mediante tablas de valores		
	Expresión analítica de una función		
C-3	Proporcionalidad. Funciones lineales Otras familias de funciones	5. <i>Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas.</i>	4. <i>Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas.</i>
C-4	Análisis	----	----
C-5	Uso de tecnologías	----	----

Es de destacar que, aunque el uso de tecnologías aparece como un contenido específico en el currículo para todos los niveles de la ESO, en ninguno aparece un criterio de evaluación en el que se tenga en cuenta.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I Y II			
	DESCRIPTOR	1º BACH CC.SS.	2º BACH CC.SS.
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<p>5. <i>Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos.</i></p> <p>Este criterio está relacionado con el manejo de datos numéricos y en general de relaciones no expresadas en forma algebraica. Se dirige a comprobar la capacidad para ajustar a una función conocida los datos extraídos de experimentos concretos y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas.</p>	<p>3. <i>Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.</i></p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir al lenguaje de las funciones determinados aspectos de las ciencias sociales y para extraer, de esta interpretación matemática, información que permita analizar con criterios de objetividad el fenómeno estudiado y posibilitar un análisis crítico a partir del estudio de las propiedades globales y locales de la función.</p>
	Representación gráfica de funciones	<p>4. <i>Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas.</i></p>	
	Representación de funciones mediante tablas de valores Expresión analítica de una función		
C-3	Familias de funciones	<p>Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas.</p>	

C-4	Análisis	----	<p>4. <i>Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función y resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social.</i></p> <p>Este criterio no pretende medir la habilidad de los alumnos en complejos cálculos de funciones derivadas, sino valorar su capacidad para utilizar la información que proporciona su cálculo y su destreza a la hora de emplear los recursos a su alcance para determinar relaciones y restricciones en forma algebraica, detectar valores extremos, resolver problemas de optimización y extraer conclusiones de fenómenos relacionados con las ciencias sociales.</p>
C-5	Uso de tecnologías	----	----

MATEMÁTICAS I Y II			
	DESCRIPTOR	1º BACH CIENTÍF.	2º BACH CIENTÍF.
C-1	Resolución de problemas. Modelización de situaciones reales mediante funciones	<p>4. <i>Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos.</i></p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global.</p>	<p>4. <i>Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita.</i></p> <p>Se pretende comprobar con este criterio que los alumnos son capaces de utilizar los conceptos básicos del análisis y que han adquirido el conocimiento de la terminología adecuada y los aplican adecuadamente al estudio de una función concreta</p>
	Representación gráfica		----
	Representación mediante tablas de valores		----
C-2	Expresión analítica de una función	<p>5. <i>Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente.</i></p> <p>Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiarlas características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la</p>	----

C-3	Familias de funciones	función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.	5. <i>Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales tecnológicos a la resolución de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización.</i> Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las unciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido.
C-7	Análisis		6. <i>Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables.</i> Este criterio pretende evaluar la capacidad para medir el área de una región plana mediante el cálculo integral utilizando técnicas de integración inmediata, integración por partes y cambios de variables sencillos.
C-8	Uso de tecnologías	----	----

3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones en el currículo vigente

En este capítulo se presentan y analizan los ejercicios, problemas y cuestiones más representativos que se presentan en los libros de texto desde 1º de ESO hasta 1º Bachiller, es decir, del curso referencia más menos dos cursos.

El objetivo es ver en qué forma los contenidos y criterios de evaluación establecidos en los currículos oficiales se materializan en los libros de texto. Veremos que se encuentran tanto los contenidos aprobados a nivel Estatal como los aprobados a nivel Autonómico.

Las prácticas se realizaron un centro público de modelo D, que utiliza para la asignatura de matemáticas y en todos los cursos los libros de la editorial Anaya Haritza. Por tanto, será de éstos de los que se extraigan los materiales para su estudio.

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de ESO

En el libro de referencia para 1º de ESO no hay ninguna unidad didáctica específica de funciones. Los temas en los que se encuentran los contenidos relacionados con las mismas son:

9. Proporzionaltasuna eta portzentajea	/	Proporcionalidad y porcentaje
10. Aljebra	/	Álgebra
14. Taula eta grafikoak. Zoria	/	Tablas y gráficos. Azar

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	✓Cuestión	Situación
Descripción:	La actividad pretende contextualizar y trabajar el concepto de proporcionalidad , directa e inversa, en situaciones y contextos cotidianos, haciendo que el alumno reflexione. Se proponen diferentes parejas de magnitudes y se debe indicar si éstas son o no proporcionales.			
Ejemplos:	<p>1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Esan zer magnitude bikote diren zuzenean proportzionalak (Z), zein diren alderantziz proportzionalak (A), eta zeintzuek ez duten proportzionaltasunik (X).</p> <p>a) Farol batek piztuta egiten duen denbora eta gastatzen duen energia kantitatea.</p> <p>b) Egunkari baten orrialde kopurua eta prezioa.</p> <p>c) Tren baten abiadura eta Kordobatik Badajozera joateko behar duen denbora.</p> <p>d) Gazta baten pisua eta prezioa.</p> <p>e) Iturri baten emaria eta pitxer bat betetzeko behar den denbora.</p> <p>f) Pitxer baten helduleku kopurua eta edukiera.</p>			
Traducción del enunciado:	“Indica cuáles de estas parejas de magnitudes son directamente proporcionales (D), inversamente proporcionales (I) y cuáles no guardan relación de proporcionalidad (X). <p>a. El tiempo que una farola está encendida y la cantidad de energía que gasta</p> <p>b. La cantidad de páginas de un periódico y su precio</p> <p>c. La velocidad de un tren y el tiempo que necesita para ir de Córdoba a Badajoz</p>			

- d. El peso de un queso y su precio
- e. El caudal de una fuente y el tiempo que se tarda en llenar una jarra
- f. La cantidad de asas de un recipiente y su capacidad

Actividad tipo:	✓ Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación																
Descripción: Obtener valores proporcionales a otros con una razón de proporcionalidad dada. Se trabaja tanto la noción de proporcionalidad como la organización de valores en tablas . Es un ejercicio repetitivo, automático, del que se conocen los pasos y algoritmos a utilizar. En 2º de ESO también se encontrarán ejercicios similares.																				
Ejemplos: 2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Osatu zuzenean proportzionalak diren balioen taula hau:																				
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">8</td> <td style="padding: 5px;">10</td> <td style="padding: 5px;">15</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">10</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>					1	2	3	4	5	8	10	15		5		10				
1	2	3	4	5	8	10	15													
	5		10																	
6 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Lau galleta-kaxak 2,4 kg-ko pisua dute. Zer pisu dute aurrekoen moduko bost kaxak?																				
Traducción del enunciado: (2) Completa la tabla con valores que sean directamente proporcionales (6) Cuatro cajas de galletas pesan 2,4 kg. ¿Cuánto pesarán 5 cajas del mismo tipo que las anteriores?																				

Actividad tipo:	✓ Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación									
Descripción: Trabajo diverso con porcentajes . El objetivo es ejercitar los cálculos con porcentajes e interiorizar la utilidad del porcentaje como expresión de una proporción.													
Ejemplos: 27 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Kalkulatu, eta, emaitza zehatza ez bada, biribildu unitateetara.													
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 33%;">a) 470en % 16</td> <td style="width: 33%;">b) 288ren % 14</td> <td style="width: 33%;">c) 1 522ren % 57</td> </tr> <tr> <td>d) 3 640ren % 7</td> <td>e) 895en % 6</td> <td>f) 2 630en % 92</td> </tr> <tr> <td>g) 94ren % 115</td> <td>h) 751ren % 120</td> <td></td> </tr> </table>					a) 470en % 16	b) 288ren % 14	c) 1 522ren % 57	d) 3 640ren % 7	e) 895en % 6	f) 2 630en % 92	g) 94ren % 115	h) 751ren % 120	
a) 470en % 16	b) 288ren % 14	c) 1 522ren % 57											
d) 3 640ren % 7	e) 895en % 6	f) 2 630en % 92											
g) 94ren % 115	h) 751ren % 120												
29 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Osatu ehuneko egokiarekin kasu bakoitzean:													
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%;">a) 70en % <input type="text"/> = 35</td> <td style="width: 50%;">b) 230en % <input type="text"/> = 115</td> </tr> <tr> <td>c) 800en % <input type="text"/> = 200</td> <td>d) 370en % <input type="text"/> = 37</td> </tr> <tr> <td>e) 56ren % <input type="text"/> = 5,6</td> <td>f) 30en % <input type="text"/> = 6</td> </tr> </table>					a) 70en % <input type="text"/> = 35	b) 230en % <input type="text"/> = 115	c) 800en % <input type="text"/> = 200	d) 370en % <input type="text"/> = 37	e) 56ren % <input type="text"/> = 5,6	f) 30en % <input type="text"/> = 6			
a) 70en % <input type="text"/> = 35	b) 230en % <input type="text"/> = 115												
c) 800en % <input type="text"/> = 200	d) 370en % <input type="text"/> = 37												
e) 56ren % <input type="text"/> = 5,6	f) 30en % <input type="text"/> = 6												
Traducción del enunciado: (27) Calcula, y si el resultado no es exacto, redondea a la unidad. (29) Completa con el porcentaje adecuado en cada caso: a.) el ____% de 70=35 b.) el ____% de 230=115 c.) el ____% de 800=200													

Actividad tipo:	✓ Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Se trabajan las coordenadas cartesianas con puntos situados en los cuatro cuadrantes. Se trabajan los dos sentidos de coordenadas a representar el punto y de punto representado obtener coordenadas. Algunos ejercicios también trabajan la traslación de puntos con simetría a uno de los ejes.				

Ejemplos:

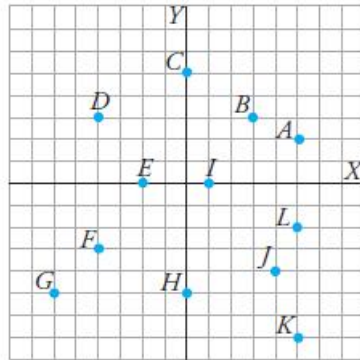
1 Adierazi honako puntu hauek.

a) $A(3, 2)$, $B(5, 1)$, $C(0, 2)$, $D(5, 5)$, $E(3, 0)$.

b) $A(-3, 5)$, $B(0, -6)$, $C(-1, -3)$, $D(3, 4)$, $E(5, -2)$.

c) $A(3; 0,5)$, $B(2; -2,5)$, $C(-4,5; 2)$, $D(0; 3,5)$, $E(-3,5; -4,5)$.

3 Idatzi honako puntu hauek koordinatuak.



Traducción del enunciado:

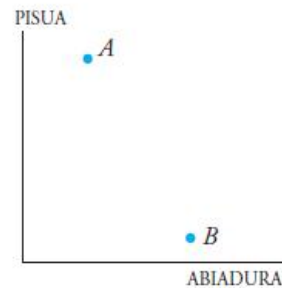
- (1) Representa los siguientes puntos
- (3) Escribe las coordenadas de los siguientes puntos

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	✓Cuestión	Situación
-----------------	-----------	----------	-----------	-----------

Descripción: Interpretación de puntos cuyas coordenadas no indican una posición sino un determinado valor de una variable dada. Por tanto, cada punto representa una combinación de valores de dos variables que se pide interpretar. Ofrece una primera aproximación a la representación gráfica de funciones aunque no se cita explícitamente el objeto función en ningún momento.

Ejemplo:

6 Ondeko grafiko honetan erbi-txakur bat eta elefante bat daude adierazita. Zer puntu dagokio bakoitzari?

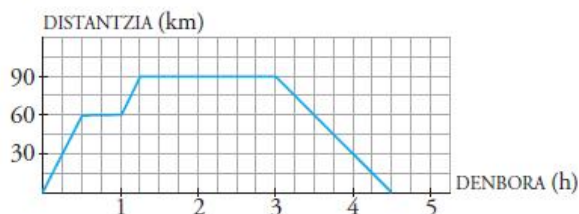


Traducción del enunciado: En el gráfico se muestran un galgo y un elefante. ¿A cuál le corresponde cada punto? (velocidad en el eje de abscisas y peso en ordenadas)

Actividad tipo:	Ejercicio	✓Problema	Cuestión	Situación
-----------------	-----------	-----------	----------	-----------

Descripción: Interpretación puntual y/o global de gráficos. Se presentan gráficos que representan situaciones cotidianas que se pide interpretar tanto globalmente como por tramo o en determinados puntos.

Ejemplos: 8 ■ □ □ Aztertu automobil batek egindako bidaia hau:



- Zenbat kilometro egin ditu lehenengo ordu erdian?
- Zenbat denboran egon da geldia, guztira?
- Abiapuntutik zer distantziatara egin du lehenengo geldialdia? Eta bigarrena?
- Deskribatu bidaia urratsez urrats.

Traducción del enunciado: Estudia el viaje hecho por un coche. (El gráfico presenta distancia en km en función del tiempo) a.) ¿Cuántos km ha hecho en la primera media hora? b.) ¿Cuánto tiempo ha estado quieto en total? c.) ¿A cuánta distancia de la salida ha hecho la primera parada? ¿Y la segunda? d.) Describe el viaje.

Se han seleccionado 6 ejemplos de actividades dirigidas a trabajar los objetos que posteriormente permitirán introducir el concepto de función. Las 3 primeras están relacionadas con la **proporcionalidad**, una enfocada a comprender qué son dos magnitudes proporcionales, las otras para ejercitar los algoritmos de cálculo y porcentajes. El siguiente grupo de actividades están relacionadas con la representación gráfica de funciones: **coordenadas cartesianas**, interpretación de información en puntos de dos variables, interpretación de gráficos y organización de datos en tablas.

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO

En el libro de texto de 2º de la ESO aparece por primera vez una unidad didáctica específica dedicada a las funciones. Además de los ejercicios de esta unidad, se han seleccionado ejercicios tipo que trabajan conceptos de otras unidades relacionados con las funciones. Es decir, contenidos del currículo relacionados que se han señalado en el capítulo 1 pero fuera del Bloque 5 Funciones y Gráficas.

El libro se divide en 12 temas, de los cuales se analizan los siguientes:

- | | | |
|--|---|--------------------------------|
| 2. Proporzionaltasuna eta portzentaiak | / | Proporcionalidad y porcentajes |
| 5. Aljebra | / | Álgebra |
| 11. Funtzioak | / | Funciones |

Las actividades incluidas en los temas 2 y 5 son de consolidación de objetos previos que darán lugar, en este curso, al trabajo con funciones.

Actividad tipo:	✓ Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación																				
Descripción:	Ejercicios para recordar y consolidar el concepto de proporcionalidad y los algoritmos utilizados para los cálculos de valores proporcionales.																							
Ejemplos:	<p>7 <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/> Osatu alderantzizko proportzionaltasuneko taula hauek:</p> <p>a) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>20</td><td>10</td><td></td><td></td><td>2</td></tr> </table> b) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>18</td><td></td><td>9</td><td>6</td></tr> </table></p>				1	2	4	5		20	10			2	1	2	3	4			18		9	6
1	2	4	5																					
20	10			2																				
1	2	3	4																					
	18		9	6																				
Traducción del enunciado: (7) Completa las tablas siguientes, los valores son inversamente proporcionales.																								

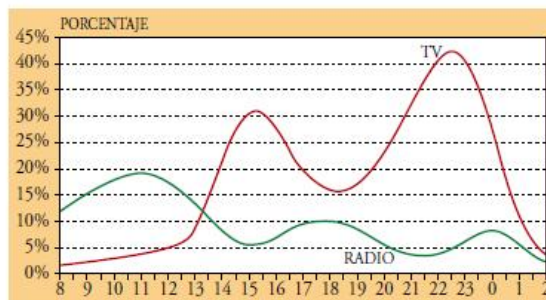
Actividad tipo:	Ejercicio	✓Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Resolución de problemas cotidianos: con relación de proporcionalidad directa o inversa o con aplicación de proporcionalidad mediante escalas.			
Ejemplos	<p>13 <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/> Automobil batek 30 kilometro 18 minutuan egin ditu. Abiadura berean jarraitzen badu, zenbateko distantzia egingo du hurrengo ordu laurdenean?</p> <p>21 <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/> Igerileku batek hiru hustubide berdin ditu. Bi irekiz gero, igerilekua 45 minutuan husten da. Zenbat denbora beharko husteko, hiru hustubideak zabalduz gero?</p>			
Traducción del enunciado: (13) Un coche ha hecho 30 km en 18 minutos. Si continúa con la misma velocidad, ¿qué distancia hará en el próximo cuarto de hora? (21) Una piscina tiene tres desagües iguales. Abriendo dos, la piscina se vacía en 45 minutos. ¿Cuánto tiempo hará falta para vaciarse si abrimos los tres desagües?				

Actividad tipo:	Ejercicio	✓Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Consolidación del lenguaje algebraico. Traducción de enunciados sencillos al lenguaje algebraico . Aproximación a lo que en cursos posteriores será la obtención de expresiones analíticas de funciones para resolución de problemas.			
Ejemplo:	<p>7 <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/> Langile batek hilean irabazten duen soldatari x esaten badiogu, adierazi era aljebraikoan:</p> <p>a) Aparteko soldata baten balioa, soldata normalaren % 80 dela jakinda.</p> <p>b) Abenduko nomina, jakinda hilabete horretan betiko soldataz gain apartekoa ere hartuko duela.</p> <p>c) Urte osoko diru-sarrerak, jakinda aparteko bi soldata dituela: udan bata, eta Gabonetan bestea.</p>			
Traducción del enunciado: Si al sueldo que un trabajador gana al mes le llamamos x , expresa de forma algebraica: a.) El valor de una paga extraordinaria, sabiendo que es el 80% de un sueldo normal. b.) La nómina de diciembre, sabiendo que ese mes además del sueldo habitual, cobrará una paga extraordinaria. c.) Los ingresos totales en un año, sabiendo que se cobran dos pagas extraordinarias.				

Actividad tipo:	Ejercicio	✓Problema	Cuestión	Situación
Descripción:	Descripción global y local de fenómenos presentados en forma gráfica en contextos reales, haciendo reflexionar sobre las formas gráficas que tomas las distintas situaciones. Análisis de sus características: dominio, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, valores extremos, cortes con los ejes.			

Ejemplo:

9 Beheko grafikoak egunear zehar telebista ikusten edo irratia entzuten dauden pertsonen ehuneko zenbatekoa den adierazten digu.



- a) Deskribatu telebistari dagokion kurba: non den gorakorra, non den beherakorra, maximoak, minimoak... Erlazionatu egunero egiten ditugun gauzeekin: altxatu, lo egin, bazkaldu, afaldu...
- b) Egin gauza bera irratitari dagokion kurbarekin.
- c) Konparatu bi kurbak, eta erlazionatu.

Traducción del enunciado: En el gráfico se presentan las personas que ven la TV o escuchan la radio a lo largo del día. Se pide: a.) Describir cómo es la curva que corresponde a la TV: dónde es creciente, decreciente, máximos, mínimos...y relacionarlo con las cosas que hacemos a diario: comer, dormir, etc. y b) Ídem para la radio. c.) Comparar ambas gráficas y relacionarlas.

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
------------------------	------------	----------	----------	-----------

Descripción: Obtener la **representación gráfica** de una función dada **mediante su tabla de valores**. Aunque en el currículo no se incluyen funciones a parte de las lineales y las afines, en los libros de texto se encuentran ejercicios en los que se incluyen otro tipo de funciones. Estos ejercicios son mecánicos, y en última instancia se trata de representar funciones mediante su tabla de valores, pero, en lugar de tener como dato la tabla, se tiene la relación algebraica que se deben aplicar, e incluso los valores que se deben dar la variable independiente.

Ejemplos:

13 Ume baten altuera hilero neurtu dugu, jaio zenetik urtebete egin duen arte. Emaitzak hauek dira:

ADINA (HILAK)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ALTUERA (CM)	54	58	62	64	67	69	71	72	74	75	77	78	80

Traducción del enunciado: Se ha medido la altura de un niño cada mes desde su nacimiento. Representa los resultados en una gráfica.

Arikotak

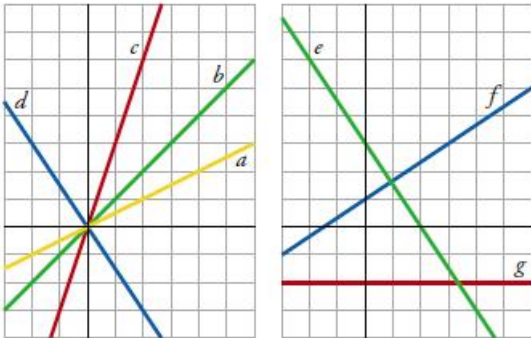
3 Adierazi $y = \frac{x+2}{2}$ ekuazioa, x -ri 0, 2, 4, 6, 8, 10 eta 12 balioak emanez.

4 Adierazi $y = x + 4$ ekuazioa, x -ri 0, 1, 2, 3, 4, 5 eta 6 balioak emanez.

5 Adierazi $y = x^2 - 6x + 3$ ekuazioa, x -ri 0, 1, 2, 3, 4, 5 eta 6 balioak emanez.

6 Adierazi $y = x \cdot (10 - x)$ ekuazioa, x -ri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eta 10 balioak emanez.

Traducción del enunciado: Representa estas funciones dando en cada caso los valores de x que se muestran.

Actividad tipo:	Ejercicio	✓ Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Trabajo con representación gráfica y ecuación de funciones lineales y afines . Se ejercita la obtención de la pendiente de gráficas dadas (relación entre las magnitudes) el paso de expresión analítica a gráfica (16) y viceversa (17). Se insiste en relacionar las dos formas de expresar la misma función y se hace reflexionar en el efecto sobre la gráfica que tienen los coeficientes de las ecuaciones (m y n).				
Ejemplos:				
16 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Adierazi honako funtzio hauek:				
a) $y = 2x$		b) $y = \frac{1}{2}x$	Traducción del enunciado: Representa las siguientes funciones	
c) $y = -3x$		d) $y = \frac{4}{3}x$		
17 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Idatzi honako funtzio hauetako bakoitzaren ekuazioa:				
			Traducción: Obtén la expresión analítica de las funciones representadas	

Se han seleccionado 6 actividades tipo para particularizar las relacionadas con las funciones. Éstas incluyen actividades sobre **proporcionalidad**, ejercicios para la **consolidación del lenguaje algebraico**, estudio de situaciones representadas en forma **gráfica**, **representación de funciones** a partir de su tabla de valores y actividades dirigidas a **observar las características y conectar** las formas **gráficas** y **ecuación** de una recta. La representación de funciones a partir de su expresión analítica comienza en este curso, con la obtención de la tabla de valores, y se mantendrá, adaptándose a los niveles correspondientes, hasta bachillerato. Se trata del ejercicio tipo transversal que aparecerá en todos los niveles a partir de este. En cursos posteriores se incluirán distintas familias de funciones a representar y las técnicas usadas evolucionarán de la obtención de la tabla de valores al estudio de límites e información obtenida en las derivadas

Se ha observado que en los libros de referencia no hay problemas o cuestiones que pidan interpretar o hagan reflexionar sobre el significado de la pendiente de una función lineal o afín. El trabajo en problemas con relación de proporcionalidad incluyen trabajo punto a punto, parece que podría incluirse de una forma natural tras el concepto de función el hecho que esas relaciones que se mantienen punto a punto son una función que podría extenderse a todo el dominio de la misma.

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO

En total, el libro de texto de 3º de ESO se divide en 14 unidades didácticas, de las cuales dos se dedican a las funciones. La unidad 7, Funtzioak/Funciones, al concepto de función, análisis de información presentada en forma de gráfico y de sus características, y la unidad 8, al estudio de las funciones lineales y afines.

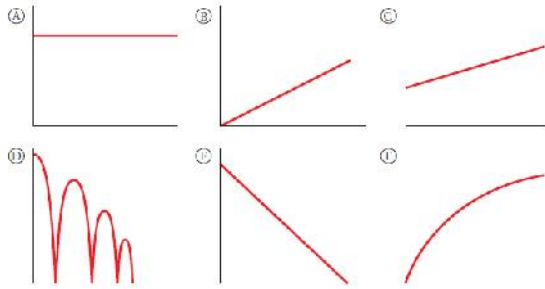
Además, es interesante comentar que algunas de las herramientas necesarias para trabajar con funciones se han visto en unidades anteriores. En el tema 3. Polinomioak/Polinomios se trabajan conocimientos que servirán para la correcta manipulación de expresiones analíticas y se practica el cálculo de la imagen para valores dados de la variable independiente. En el tema 5 Ekuazio Sistemak/Sistemas de ecuaciones, se estudia la resolución de forma gráfica de sistemas de ecuaciones.

En el tema 7 se incluyen actividades del mismo tipo a las que encontramos en 2º de ESO: descripción de fenómenos representados en forma de gráfica y comparación de éstos. Al tratarse del mismo tipo de ejercicios, no los incluimos.

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Análisis de las características de una función dada en forma gráfica, obtener el dominio, tramos crecientes y decrecientes, máximos y mínimos relativos si los hubiera, cortes con los ejes, tendencias, periodicidad y observar si es o no continua. Las funciones presentadas pueden o no estar contextualizadas.				
Ejemplos:				
<p>1 Honako grafiko honek gaixo batek lau egunean zehar izan duen temperatura erakusten du:</p>				
Traducción del enunciado: En el gráfico adjunto se muestra la temperatura de un enfermo a lo largo de cuatro días. Se pide: dominio, tramos crecientes-decrecientes, máximos mínimos.				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	✓Cuestión	Situación
Descripción: Relación situación-gráfica/ecuación-gráfica. Unir un enunciado o descripción de una situación con la gráfica correspondiente (2) o unir la expresión analítica con el gráfico que le corresponde (19 y 16). Este último tipo, suele incluir funciones cuadráticas, racionales o con raíces (19), por lo que se convierte en un ejercicio con contenidos más elevados que lo que se pide en el currículo de 3º de ESO. Estas actividades se utilizan como introducción o mención a este tipo de funciones.				
Ejemplos:				

2 Honako grafiko hauek behean ageri diren egoerarekin dira. Lotu grafikoetako bakoitza bertan adierazten den egoerarekin, eta esan, kasuetako bakoitzean, zer adierazten duten abzisa-ardatzak eta ordenatuaren ardatzak.



1. Puzpaka ari den pilota batek denbora (arte batean) hartuako altuera.
2. Hasi erabiltzen hutsik zegoen eta betetzen hasi den depositu bateko uraren altuera.
3. Puzpaka batek ez zanda egin arte hartu duen altuera.
4. Interneten kostua, tarifa laua edukita.
5. Hutsi erabiltzen den depositu bateko uraren altuera.
6. Interneten kostua, 15 € tarifa finkoa gehi orduko 0,5 €-koa edukita.

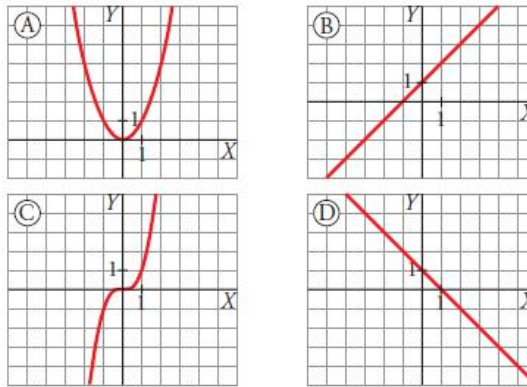
(2) Traducción del enunciado:

Se pide unir la situación con una de las gráficas:

1. la altura de una pelota que está botando, respecto al tiempo
2. la altura de agua en un depósito que empieza vacío y se va llenando
3. la altura que coge un globo hasta que explota
4. el coste de internet teniendo tarifa plana
5. la altura de agua en un depósito que se está vaciando
6. el coste de internet, siendo 15€ de tarifa fija más 0,5€ por hora

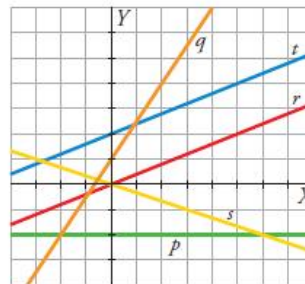
19 Lotu beheko grafikoetako bakoitza honako adierazpen analitikoetako batekin:

- 1) $y = x + 1$ 2) $y = x^3$ 3) $y = x^2$ 4) $y = -x + 1$



16 Lotu r , s , t , p eta q letrak dituzten honako zuzen hauekiko bakoitza behean ageri diren ekuazioetako batekin:

- a) $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = \frac{3}{2}x + 1$
 c) $y = \frac{2}{5}x$ d) $y = \frac{2}{5}x + 2$
 e) $y = -2$



Traducción del enunciado: (19) y (16) Une cada gráfico con una de las expresiones analíticas dadas.

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
<p>Descripción: Trabajo con representación gráfica de funciones lineales y afines dadas en forma analítica. Se repiten, por tanto, el mismo tipo de ejercicios que en el curso anterior, pero, se pide un análisis y utilización crítica de la pendiente y la ordenada en el origen obtenida de la ecuación. Además, se añaden rectas con coeficientes que obligan a elegir escalas adecuadas (3) o ejercicios en los que hay que manipular la expresión analítica para obtener una ecuación conocida y representable del tipo $y=mx+n$</p>				

Ejemplo: Representa las siguientes funciones

1 Adierazi ardatz cartesiarretan, paper koadrikulatuan, ekuazioa hauen zuzenak:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = 7 - 4x$

c) $y = x - 1$

d) $y = -\frac{3}{4}x + 2$

e) $y = 5$

f) $y = -2$

3 Adierazi honako zuzen hauek, eskala egokia aukeratuz:

a) $y = 15x$

b) $y = -25x$

c) $y = \frac{x}{200}$

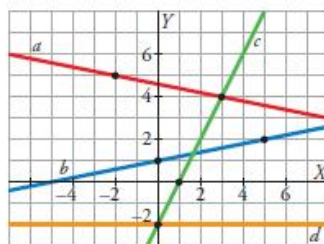
d) $y = -\frac{1}{120}x$

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
-----------------	------------	----------	----------	-----------

Descripción: Se trabajan las diferentes formas de **encontrar la ecuación** de una recta dada en forma gráfica: expresión punto pendiente, recta que pasa por dos puntos o cálculo de pendiente y ordenada en el origen. Se debe encontrar a partir de la gráfica (14) o a partir de un enunciado dado (9).

Ejemplos:

14 a) Idatzi zuzen bakoitzaren ekuazioa:



b) Zein dira funtzio gorakorrek eta zein dira beherakorrek? Egiaztatu maldaren zeinua kasuetako bakoitzean.

9 Aurkitu zein den koordinatuen jatorritik eta P puntutik igarotzen den zuzenaren ekuazioa, honako kasu hauetako bakoitzean:

a) $P(12, -3)$

b) $P(-2, \frac{3}{4})$

c) $P(-7, -21)$

d) $P(30, 63)$

Traducción del enunciado: (14) a.) Escribe la ecuación de cada una de estas rectas. b) ¿Cuáles son funciones crecientes y cuáles decrecientes? Comprueba el signo de la pendiente en cada caso. (9) Encuentra las rectas que pasan por el origen de coordenadas y por el punto P en cada caso.

Actividad tipo:	Ejercicio	✓Problema	Cuestión	Situación
-----------------	-----------	-----------	----------	-----------

Descripción: **Resolución de problemas** en contextos habituales mediante la utilización de **modelos lineales**. Puede requerir la obtención y representación de una sola función que describa la situación o la comparación de dos funciones diferentes para obtener una conclusión, como en el caso del ejemplo. Se trabaja el significado de la pendiente como relación entre dos variables.

Ejemplo:

39 ■■■ Automobilen alokairurako agentzia batean, modelo jakin bat alokatzean, 50 € ordaindu behar dira, gehi 0,2 € egindako kilometro bakoitzeko.

Beste agentzia batean, 20 € ordaindu behar dira, eta beste 0,3 € egindako kilometro bakoitzeko.

a) Idatzi, bi kasu horietan, kilometroen araberako gastua ematen digun funtzioaren adierazpen analitikoa.

b) Marraztu ardatz berdinetan aurreko bi funtzioak. (Aukeratu eskala egokia, kilometroak 100etik 100era hartuz).

Traducción del enunciado: En una compañía de alquiler de vehículos, al alquilar un modelo debemos pagar 50€ más 0,20€ por cada km hecho. En otra agencia, debemos pagar 20€ más otros 0,30€ por cada km recorrido.

a) Escribe, para cada caso, la expresión analítica de la función que nos dará el gasto según los km hechos.

b) Dibuja en los mismos ejes de coordenadas las dos funciones anteriores (elige escalas adecuadas, escribiendo los km de 100 en 100).

Se han seleccionado 5 actividades representativas de lo que se puede encontrar en los libros de texto de 3º de la ESO. Las 2 primeras trabajan la comprensión de funciones dadas en **forma de gráfica** (comprensión cualitativa, análisis de características y unión con el enunciado o expresión analítica correspondiente). La 3ª actividad es la **representación** de funciones a partir de su **expresión analítica**, protagonista desde 2º como hemos explicado. La 4ª actividad es un ejemplo de utilización de los distintos métodos de **obtención de la ecuación** de la función dada de forma gráfica, y la última, la **resolución de problemas** utilizando funciones, tema que vemos se repite en los currículos de todos los niveles.

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO Opción B

El libro de 4º de ESO opción B está dividido en 11 unidades didácticas además de una unidad para mejorar las habilidades en la resolución de problemas (*Trebatu problemak ebazten*). De éstas, 2 están dedicadas a las funciones:

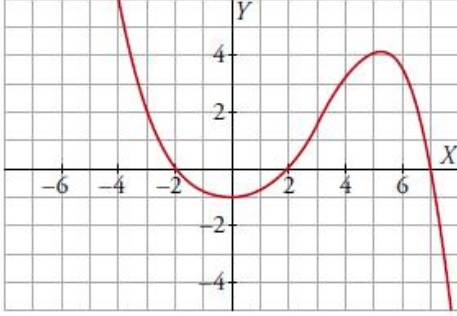
4 Funtzioak. Karakteristikak / Funciones. Características

En esta unidad se trabajan los conceptos de dominio, recorrido, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, periodicidad, continuidad.

5. Oinarrizko funtzioak / Funciones elementales

En esta unidad se trabajan las funciones lineales y afines, las funciones definidas por trozos, cuadráticas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y la función valor absoluto.

En la unidad 4 aparecen ejercicios de repaso y recuerdo de lo visto en cursos anteriores: actividades de interpretación de fenómenos representados en forma de gráfica y de obtención de características de una función en una gráfica dada. Al tratarse actividades ya analizadas, no se incluyen en este apartado.

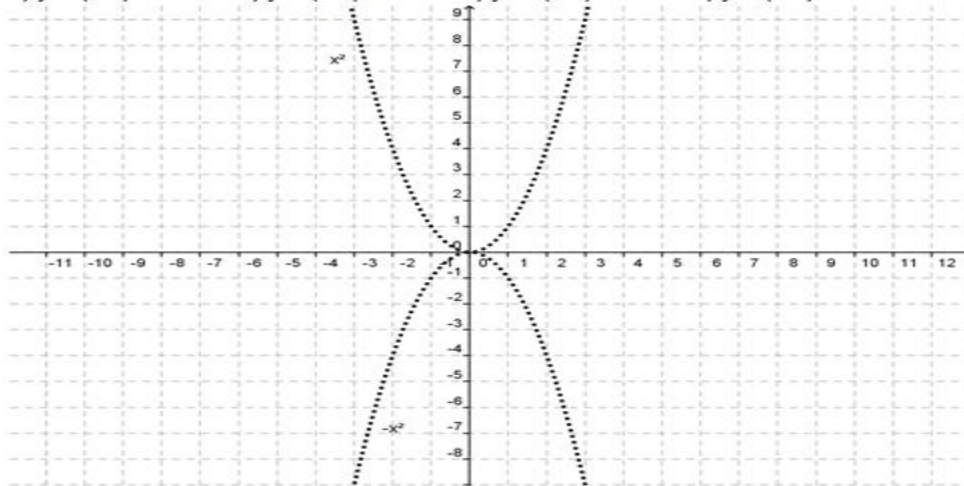
Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Ejercicios para trabajar la obtención de la Tasa de Variación Media y la interpretación de la misma como la pendiente de la recta al unir los extremos del tramo de función que se estudia.				
Ejemplo:				
<p>14 <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/> Aztertu grafiko bidez adierazitako honako funtzio hau:</p> <p>Kalkulatu horren B.A.T. $[0, 4]$, $[0, 5]$, $[5, 7]$, $[0, 7]$, $[-4, 0]$ eta $[-4, -2]$ tartetan.</p> <p>Kopiatu grafikoa koadernoan eta marraztu, kasu bakoitzean, zer zuzenkiren malda ari zaren aurkitzen.</p>				
				
Traducción del enunciado: Calcula la T.V.M. en los tramos indicados. Copia la gráfica en tu cuaderno y dibuja, en cada tramo, la pendiente que estás calculando.				

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Representación gráfica de funciones dada su expresión analítica. También hay ejercicios en los que se pide obtener la expresión algebraica dada una gráfica o de unir la gráfica y expresión correspondiente, en cualquier caso, se trata del mismo tipo de saber: la relación entre las diferentes formas de representar una función.				
Además, con funciones cuadráticas, se obtiene eje de simetría, coordenadas del vértice y cortes con los ejes de una expresión dada.				
Ejemplos				
<p>12 <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/> Adierazi grafiko batean honako funtzio hauek:</p> <p>a) $y = \sqrt{x} + 2$ b) $y = 2 - \sqrt{x}$ c) $y = 2\sqrt{-x}$ d) $y = -\sqrt{-x}$</p> <p>13 <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/> Marraztu funtzio hauen grafikoak:</p> <p>a) $y = -\frac{1}{x}$ b) $y = \frac{2}{x}$ c) $y = \frac{1}{x} - 3$ d) $y = \frac{3}{x} + 2$</p> <p>14 <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/> Adierazi honako funtzio hauek, kasu bakoitzean balio-taula bat eginez. (Erabili kalkulagailua).</p> <p>a) $y = 2^{-x}$ b) $y = 3^x + 1$ c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$ d) $y = 0,75^{-x}$</p>				
Traducción del enunciado: Representa las funciones dadas. En el caso de las funciones exponenciales (14) se indica en el enunciado que se utilice la calculadora. En el caso de las racionales, se pide calcular las asíntotas y el dominio.				

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Trabajar la relación gráfica-expresión analítica , representar una función dada su expresión algebraica mediante transformaciones elementales (traslación, simetría) de funciones simples, de la misma familia, con representación conocida. Se utiliza para ecuaciones polinómicas de grado 2, funciones racionales, radicales, exponenciales y de valor absoluto.				

Ejemplos

1. $y = x^2$ eta $y = -x^2$ paraboletatik abiatuz, Adierazi grafikoki honako parabola hauek:
 a) $y = (x-1)^2 + 2$ b) $y = (x-3)^2 - 4$ c) $y = -(x-1)^2 + 2$ d) $y = (x-3)^2 - 4$



Traducción del enunciado: Partiendo de la representación de las parábolas $y=x^2$ e $y=-x^2$ representa las siguientes funciones.

Actividad tipo:	Ejercicio	✓Problema	Cuestión	Situación
-----------------	-----------	-----------	----------	-----------

Descripción: Resolución de **problemas** cotidianos o de otros ámbitos (física, economía,...) mediante la utilización de funciones.

Ejemplo 36 ■ ■ ■ Gorantz bertikalean 20 m/s-ko abiaduraz jaurti dugun harri bat t , une bakoitzean, h , zenbateko altueran dagoen, $h = 20t - 5t^2$ adierazpenak ematen digu.

- Egin adierazpen grafikoa.
- Esan zein den definizio-eremua.
- Zer unetan lortuko du altuera maximoa? Zenbatekoa da altuera hori?
- Zer unetan eroriko da harria lurrera?
- Zer denbora-tartetan dago harria lurretik 15 metro baino gehiagora?

Traducción del enunciado: Se lanza una piedra hacia arriba con una velocidad de 20 m/s, la función $h(t)$ nos da la altura h a la que se encuentra la piedra en cada momento t . Se pide: a) dibujar la función b) dominio c) el máximo d) cuándo cae al suelo e) cuándo estará a más 15 m del suelo.

Muchas de las actividades incluidas en el libro son del mismo tipo que las del curso anterior: hay actividades de comprensión de gráficas y estudio de sus características, de presentación de expresiones analíticas, la relación entre ambas y la aplicación de funciones en casos prácticos para resolución de problemas. Se trata de una típica evolución en espiral, en la que se tratan los mismos objetos pero se profundiza en ellos añadiendo más características al estudio de representaciones gráficas y más familias de funciones.

No obstante, aparece la representación de funciones mediante transformaciones elementales de funciones dada como actividad nueva. Se trata de actividades que se trabajan en el Centro con fichas, ya que no están en el libro.

Además aparece un concepto nuevo que es la Tasa de Variación Media, que permitirá, con su paso al límite, introducir en bachillerato la derivada de una función.

3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO Opción A

El libro de 4º de ESO opción A está dividido en 14 unidades didácticas además de una primera unidad de repaso de los contenidos de cursos anteriores (*berrikusketa*) y otra de resolución de problemas (*Trebatu problemak ebazten*). De las unidades didácticas, 3 están dedicadas a las funciones:

- 9. Funtzioak / Funciones
- 10. Funtzio polinomikoak eta arrazionalak / Funciones polinómicas y racionales
- 11. Funtzio esponenzialak eta logaritmikoak / Func.s exponenciales y logarítmicas

Las actividades en la opción A del curso de 4º de ESO son las mismas que en la opción B, solo que se utilizan menos familias de funciones. En los ejercicios de representación de funciones no se incluyen ni las exponenciales ni las logarítmicas y las funciones definidas por trozos son más sencillas.

3.6. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachiller de Ciencias Sociales

El libro de referencia para Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º de Bachiller está dividido en 3 bloques. El bloque relacionado con las funciones, llamado Análisis, lo comprenden un total de 4 unidades didácticas:

- 4. Oinarrizko funtzioak / Funciones elementales
Realiza un repaso a los conceptos y las familias de funciones elementales que se han visto en la etapa de ESO. Además se introduce un nuevo objeto: la interpolación y extrapolación lineal para la resolución de problemas.
- 5. Funtzio esponenzialak, logaritmikoak eta trigonometrikoak / Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas
- 6. Funtzioen limiteak, jarraitasuna eta adar infinituak / límite de funciones, continuidad y ramas infinitas
- 7. Deribatuen kalkulua. Erabilerak / Cálculo de derivadas. Aplicaciones

Como se puede ver ya en los títulos de las unidades, se incluyen varias cosas no presentes en el currículo aprobado mediante RD 1467/2007, de 2 de noviembre como son las funciones trigonométricas, el cálculo de límites, el estudio de la continuidad de funciones y el cálculo de derivadas y sus aplicaciones. Estos contenidos, en cambio, sí se encuentran formalmente incluidos en el currículo aprobado por Decreto Foral 25/2015 de 22 de abril de 2015 y se han venido impartiendo e incluyendo en los libros de texto anteriormente.

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Ejercicios para los nuevos conceptos de funciones compuestas y funciones inversas . Obtención de éstas, demostración de que una es inversa de otra dada etc.				
Ejemplo				
<p>2. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 5$, badira, lortu $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ eta $g \circ g$. Kalkulatu funtzio horien balioa $x = 0$ eta $x = 2$ kasuetan.</p> <p>3. $f(x) = x + 1$ eta $g(x) = x - 1$ badira, egiaztatu $f[g(x)] = x$ dela. $f(x)$ eta $g(x)$ alderantzizko funtzioak dira? Egiaztatu $(a, a + 1)$ puntua f-ren grafikoan dagoela eta $(a + 1, a)$ puntua g-ren grafikoan dagoela. Adierazi bi funtzioak eta aztertu euren simetria $y = x$ zuzenarekiko.</p>				
<p>Traducción del enunciado: <u>g · e g a l k a n d a z</u> <u>a u e i n k a s e .</u></p> <p>(2) Dadas $f(x)$ y $g(x)$ calcular $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ f$ y $g \circ g$ sus v. lores para $x=0$ y $x=2$.</p> <p>(3) Siendo $f(x)=x+1$ y $g(x)=x-1$, demuestra que $f[g(x)] = x$. ¿Son $f(x)$ y $g(x)$ inversas? Demuestra que el punto $(a, a+1)$ pertenece a $f(x)$ y $(a+1, a)$ a $g(x)$. Representa ambas funciones y estudia su simetría respecto a la recta $y=x$.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	✓Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Resolución de problemas reales mediante la aplicación de funciones lineales: interpolación y extrapolación lineal.				
Ejemplo				
<p>1. Unibertsitate batean, 2002. urtean, 10 400 ikasle matrikulatu ziren. 2007. urtean, berriz, 13 200 ikasle. Estimatu zenbat ikasle zeuden:</p> <p>a) 2003an. b) 2005ean. c) 2000n.</p> <p>d) Zenbat egongo dira 2010ean?</p> <p>e) Eta 2040an?</p>				
<p>Traducción del enunciado: En una Universidad había 10400 alumnos en 2002 y 13200 en 2007. Estima cuántos alumnos había en 2003, 2005 y 2000 y cuántos habrá en 2010 y 2040.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	✓Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Aplicación de funciones resolución de problemas extra matemáticos. Se deben hallar máximos, mínimos, puntos de intersección entre dos funciones, pero sin recurrir al estudio de la función derivada, sino recurriendo a las características conocidas de las funciones lineales, parábolas.				
Ejemplo				
<p>32 Empresa batek x telebista egiteagatik hilean izaten dituen gastu finkoak $G = 2000 + 25x$ dira, milaka eurotan, eta hileko diru-sarrerak $I = 60x - 0,01x^2$, horiek ere milaka eurotan. Zenbat telebista egin behar dituzte etekina (diru-sarrerak ken gastuak) maximoak izateko?</p>				
<p>Traducción del enunciado: Una empresa hace x TV al mes, sus gastos fijos vienen determinados por $G(x)$ y sus ingresos por $I(x)$. ¿Cuántas TV debe hacer para que sus beneficios sean máximos?</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	✓Cuestión	Situación
Descripción: Aproximación al concepto de límite de una función en el infinito: ramas infinitas y asíntotas.				
Ejemplo				
1. Esan zein den limitea $x \rightarrow +\infty$ doanean grafikoen bitartez adierazitako honako funtzio hauetako bakoitzean:				
Traducción del enunciado: Indica cuál es el límite en de cada una de las funciones				

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Cálculo de límites sencillos en un punto y en el . El límite para el estudio de la <u>continuidad</u> y <u>asíntotas</u> de funciones en funciones polinómicas, cocientes de polinomios y funciones definidas a trozos.				
Ejemplo				
4. Kalkulatu honako funtzio hauen limiteak adierazten diren puntuetan. Komeni denean, zehaztu zein den limitearen balioa puntuaren eskuinera eta ezkerre-ra. Adierazi emaitzak grafikoetan:				
a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ en $-2, 0$ eta 2 puntuetan b) $f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ en $2, 0$ eta 3 puntuetan c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ en 1 eta -3 puntuetan d) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ en 0 eta -3 puntuetan				
1. Honako funtzio hauetako bakoitzak etena den puntu bat edo gehiago ditu. Esan zein diren puntu horiek eta zer eten mota duten:				
a) $y = \frac{x + 2}{x - 3}$ b) $y = \frac{x^2 - 3x}{x}$ c) $y = \frac{x^2 - 3}{x}$ d) $y = \begin{cases} 3 & \text{bada } x \neq 4 \\ 1 & \text{bada } x = 4 \end{cases}$				
Traducción del enunciado:				
(4) Calcula los límites indicados				
(1) Las funciones dadas tienen, al menos, un punto de discontinuidad. Di cuáles son y de qué tipo.				

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Cálculo de derivadas				
Ejemplo				
<p>PROPOSATUTAKO ARIKETAK</p> <p>Kalkulatu honako funtzio hauen funtzio deribatua:</p> <ol style="list-style-type: none"> $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$ $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ $f(x) = \sin x \cos x$ $f(x) = \operatorname{tg} x$. $f(x) = x e^x$ $f(x) = x \cdot 2^x$ $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$ $f(x) = \frac{\log x}{x}$ $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 - 1}$ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}$ <p>Adierazi $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ eta deribatu zatidura moduan. Sinplifikatzean, kontuan hartu:</p> $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$				
Traducción del enunciado: calcula la función derivada de las funciones dadas.				

Nótese que el libro de texto incluye cálculo de derivadas de funciones logarítmicas, exponenciales, radicales, trigonométricas. Éstos ejercicios no se utilizan en todos los grupos, y en todo caso, se utilizan únicamente para trabajar las reglas de derivación.

También incluyen unos últimos ejercicios de representación de funciones polinómicas y racionales utilizando la información obtenida de la función derivada, aunque son más representativos del 2º curso de bachiller.

3.7. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachiller Científico.

El libro del primer curso de Bachillerato científico-tecnológico está dividido en 5 bloques. El bloque de análisis, a su vez, contiene 3 unidades didácticas:

- Oinarrizko funtzioak / Funciones elementales
Aglutina los temas 4 y 5 de la versión aplicada a las ciencias sociales.
- Funtzioen limiteak, jarraitasuna eta adar infinituak / límite de funciones, continuidad y ramas infinitas
- Deribatuen kalkulua. Erabilerak / Cálculo de derivadas. Aplicaciones

Las actividades tipo son básicamente las mismas que en el caso de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Pero los contenidos se tratan con algo más de profundidad e incluye funciones con expresiones que integran algo más de dificultad, aunque no difieren en exceso. Sí es verdad que la selección de actividades a realizar en el aula que realizan los docentes en una y otra modalidad de bachiller difieren. Por tanto, se entiende que con las actividades tipo adjuntas en el apartado anterior se describe también este curso.

4. Resultados

En los capítulos 1 y 2 se ha desarrollado el análisis de los contenidos y criterios de evaluación presentes en los currículos oficiales, y en el capítulo 3 se ha analizado cómo éstos se reflejan en los libros de texto, extrayendo una muestra de las actividades tipo más representativas de cada nivel.

A lo largo de los tres primeros capítulos se han ido incluyendo resúmenes, reflexiones y anotaciones de las que se realiza una síntesis en este 4º. En primer lugar se indican las ausencias y presencias observadas tanto en los currículos como en los libros de texto, y posteriormente, se analiza la coherencia entre ambos.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Como se puede ver en el capítulo uno, y como se resume en el apartado 1.4, todos los descriptores presentan continuidad a lo largo de los distintos niveles, en los que se va profundizando y ampliando el campo de conocimiento progresivamente. Este tipo de estructuración de contenidos, que se repiten en el tiempo mientras se profundiza en ellos, se denomina *en espiral*.

En general, todos los contenidos presentes tienen asociado algún criterio de evaluación, si bien es muy común que los criterios de evaluación aglutinen la consecución de varios contenidos. Sin embargo, es importante indicar que no se dispone de criterio de evaluación alguno, en ninguno de los niveles, referido a la utilización o dominio de las herramientas TIC.

Esta gran ausencia se observa también en los libros de texto, que no tienen actividades que requieran la utilización expresa de herramientas TIC. Los libros de texto analizados son de la edición del 2007, y parece que se han quedado algo anticuados en estos tiempos de cambios veloces y digitalización. De hecho, el departamento se encuentra decidiendo qué material va a utilizar a partir del curso que viene. Es por esto que no extraña encontrar dicha carencia. No hay problemas, actividades o pequeños proyectos diseñados específicamente para el uso de las herramientas TIC. Por tanto, el incluir estos contenidos y capacitar a los alumnos en competencias digitales recae íntegramente en el profesor y en su capacidad de crear actividades complementarias para ello.

En cuanto a la distribución del tipo de actividades, se ve que los ejercicios son los más numerosos seguidos de los problemas y, por último, las cuestiones que hagan reflexionar o enlazar unos contenidos con otros.

En cuanto a los problemas para aplicación de funciones a contextos reales, si bien se incluyen en todos los cursos, no parece que se les otorgue a éstos la importancia que se le da en el currículo. Sobre todo en los primeros cursos de la ESO, la diferencia entre la cantidad de ejercicios y de problemas de aplicación es muy elevada.

Cada unidad didáctica tiene numerosos ejercicios y el libro incluye un CD con la resolución de todos ellos. Además hay muchas actividades que incluyen trabajo con

funciones de niveles superiores. Por ejemplo, representación punto a punto de ecuaciones con radicales o parábolas en 2º de ESO. También hay actividades de mínimos o de refuerzo. Todo esto que permite atender la diversidad de los alumnos.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Los libros de texto son coherentes con la profundización de los contenidos en espiral. Se puede ver cómo se repiten en cada curso muchas de las actividades tipo pero añadiendo más características al estudio de representaciones gráficas o más familias de funciones. Todas las unidades didácticas presentan un mismo patrón que favorece el aprendizaje de nuevos contenidos relacionándolos con los ya conocidos:

- Ejercicios de recordatorio de los conocimientos previos necesarios.
- Ejercicios, problemas y cuestiones de los nuevos objetos matemáticos.
- Ejercicios y problemas que requieren la integración de algunos de los diferentes objetos vistos en la unidad didáctica.
- Problemas de contextualización de los objetos o aplicación de éstos como herramientas para resolución de problemas cotidianos.

Como comentario negativo hay que indicar que en el libro de 2º de la ESO no se han encontrado ejercicios o problemas que hagan reflexionar sobre el significado de la pendiente como constante de proporcionalidad, como pide el currículo. Se trabaja la resolución de problemas de proporcionalidad punto a punto, pero no se unen éstos con el concepto de función lineal de forma explícita, es decir, parece que la institucionalización de esta unión queda ausente.

Por otro lado, el libro de 3º de la ESO no incluye ningún apartado para el trabajo con la función cuadrática. Para subsanarlo, en el centro de referencia los profesores toman actividades de otros libros o las crean ellos mismos. Sobre todo representación por puntos de parábolas y a veces resolución de problemas en contextos reales mediante la aplicación de funciones de segundo grado.

En contraste con lo anterior, como se ha explicado en el capítulo 3, se observa que los contenidos del libro de 1º de Bachiller de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales son prácticamente iguales a los de Matemáticas I. Se incluyen ejercicios con un nivel muy por encima del mínimo requerido en el currículo, lo que permitirá al profesor que así lo estime oportuno, trabajar contenidos extra en función de las posibilidades del grupo.

Por tanto, se puede concluir diciendo que los contenidos referidos a funciones son continuos y consistentes a lo largo de toda la educación secundaria y que los libros de texto los incluyen y reflejan de forma coherente incluyendo una cantidad amplia y variada de actividades salvo las ausencias del trabajo para la consecución de competencias digitales y las puntuales indicadas en 2º y 3º de ESO.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de las funciones en 3º PMAR

II. Atala:

Funtzioen ikasketa prozesu baten analisia

3.PMAR-en

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio de funciones llevado a cabo con un grupo de estudiantes de 3°PMAR en la asignatura de ámbito científico matemático.

En primer lugar, se incluye una sección auxiliar para la presentar los Programas de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento (PMAR) y las particularidades del currículo asociado a éstos. A continuación, se presentan dos capítulos para contextualizar el proceso de estudio: en el capítulo 5 se analizan los materiales de la asignatura y en el 6 las dificultades y errores previsibles. En el capítulo 7 se describirá dicho proceso, la distribución de tiempo y las tareas adicionales previstas, y en el 8 y último, se incluye la descripción de la experimentación realizada con el grupo de estudiantes así como la discusión de los resultados obtenidos.

Para finalizar, se incluyen la síntesis y conclusiones del proceso así como algunas cuestiones abiertas extraídas del análisis.

Master Amaierako Lanaren bigarren atal honetan, 3.PMAR taldeko ikasleekin esparru zientifiko matematiko ikasgaiaren burutu den funtzioen ikasketa prozesu baten analisisa azaltzen da.

Lehenik eta behin, Ikaskuntza eta Errendimendua Hobetzeko Programetako taldeak (PMAR) aurkezteko eta bai taldeen naiz hauen kurrikuluaren berezitasunak ezagutzeko atal osagarri bat dago. Ondoren, ikasketa prozesuaren testuingurua aurkezten da: 5. kapitulan ikasgaiaren materialak aztertzen dira eta 6. prozesuak izandako zailtasun eta errore aurreikusiak. 7. kapitulan prozesua, denboraren antolakuntza eta aktibitate osagarriak, deskribatuko da. Eta azkenekoa den 8. kapitulan, ikasle taldearekin aurrera eramandako esperimendazioa deskribatzen da, eta baita honetan lortutako emaitzen eztabaida ere.

Amaitzeko, prozesuaren sintesia eta ondorioak naiz analisitik sortutako zenbait galdera ireki aurkezten dira.

*** Los Programas de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento (PMAR)**

El proceso de estudio objeto de análisis de este TFM se ha llevado a cabo en un grupo de 3º de ESO que se encuentra dentro de los denominados Programas de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento (PMAR). En esta sección, se describe la legislación aplicable a los mismos prestando especial atención a las particularidades que éstos presentan en los contenidos y criterios de evaluación establecidos en los currículos.

- Legislación vigente de aplicación

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) modificó la hasta entonces vigente Ley Orgánica de Educación (LOE) de 2006. Uno de los cambios introducidos en la misma fue la sustitución de los Programas de Diversificación Curricular por los actualmente en proceso de implantación PMAR. El Gobierno Foral de Navarra, en virtud de sus competencias, desarrolló la regulación de estos programas PMAR mediante la Orden Foral 54/2015, de 22 de mayo, aplicable en los centros educativos de la Comunidad Foral de Navarra.

- Características y definición

En la introducción de la citada Orden Foral, se define los PMAR como “una medida de atención a la diversidad que se desarrollará a partir de 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria que utilizará una metodología específica a través de la organización de contenidos, actividades prácticas y, en su caso, de materias diferente a la establecida con carácter general, con la finalidad de que los alumnos y alumnas puedan cursar el cuarto curso por la vía ordinaria y obtengan el título de Graduado en ESO”.

Además, en su Artículo 2. Definición de los PMAR, se indica que:

1. Están dirigidos preferentemente a alumnos que presentan dificultades relevantes de aprendizaje no imputables a falta de estudio o esfuerzo.
2. Se pretende que los alumnos y alumnas puedan cursar el cuarto curso por la vía ordinaria para obtener el Título.
3. Los grupos estarán constituidos por un mínimo de 12 y un máximo de 14 alumnos y alumnas salvo que el Departamento de Educación autorice situaciones específicas diferentes.

Si comparamos esto con lo incluido en el desarrollo legislativo de los antiguos programas de diversificación curricular¹ observamos grandes cambios:

¹ Orden Foral 169/2007 de 23 de Octubre: Introducción: “Estos programas, cuyo objetivo es la obtención del título, se establecen desde tercer curso de la etapa y van dirigidos para el alumnado que precise una organización de los contenidos, actividades prácticas y materias del currículo diferente a la establecida con carácter general” Artículo 2. Apartado 2: “Los Programas de diversificación curricular tendrán una

Adaptación de la enseñanza de funciones al grupo de 3º de ESO PMAR

1. Se aplica en 2º y 3º de ESO y tras cursar PMAR se debe cursar 4ºESO ordinario.

Nivel:	LOE	LOMCE	Estado actual
1º	Desdoble/refuerzo	Desdoble/refuerzo	Desdoble/refuerzo
2º	Desdoble/refuerzo	PMAR	Sigue LOE (desdoble)
3º	DIVERSIFICACIÓN	PMAR	Implementada LOMCE (PMAR)
4º	DIVERSIFICACIÓN	Ordinario (enseñanzas aplicadas)	Sigue LOE (diversificación)

2. Se deben adquirir los mismos contenidos que en el grupo ordinario para poder obtener el título (se debe cursar 4º de ESO). Esto es, los programas incluyen únicamente modificaciones metodológicas y no adaptaciones curriculares. Los contenidos de los programas de diversificación estaban orientados a la adquisición de los objetivos y competencias básicas establecidas para la etapa.
3. Se establece un número mínimo de alumnos en la propia Orden Foral (doce). Hasta ahora el criterio del departamento era admitir grupos de diversificación con un mínimo de 6 alumnos.

- Contenidos del currículo en los grupos 3º PMAR

Como reflejo de la LOMCE, el currículo establecido por el Gobierno de Navarra está estructurado en contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Se han comparado los currículos de 3º de ESO enseñanzas académicas, 3º ESO enseñanzas aplicadas y 3º PMAR. Se constata que:

- El currículo del programa PMAR es exactamente el mismo que el currículo de 3º enseñanzas aplicadas.
- 3º PMAR y 3º enseñanzas aplicadas difieren ligeramente de 3º enseñanzas académicas únicamente en los estándares evaluables.

A continuación se incluye una tabla comparativa de los estándares de evaluación. Además, en el Anexo 1, se incluye una tabla comparativa en detalle tanto de las distintas opciones de 3º de la ESO como 4º de ESO de enseñanzas aplicadas (nivel a superar por las personas en 3º PMAR para obtener el Título de ESO), así como los contenidos del antiguo programa de Diversificación Curricular.

metodología específica (...) para alcanzar los objetivos y las competencias básicas de la etapa y por consiguiente el título”.

3º ACADÉMICAS ESTÁNDARES	3º APLICADAS ESTÁNDARES	3ºPMAR ESTÁNDARES (igual que aplicadas)
<p>1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de Problemas contextualizados a gráficas.</p> <p>1.2. Identifica las características más relevantes De una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.</p> <p>1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.</p> <p>1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.</p> <p>2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.</p> <p>2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.</p> <p>2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.</p> <p>3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.</p> <p>3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.</p>	<p>1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.</p> <p>1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica, interpretándolos dentro de su contexto.</p> <p>1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.</p> <p>1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente.</p> <p>2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto- pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente.</p> <p>2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.</p> <p>3.1. Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características.</p> <p>3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.</p>	<p>1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.</p> <p>1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica, interpretándolos dentro de su contexto.</p> <p>1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.</p> <p>1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente.</p> <p>2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto- pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente.</p> <p>2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.</p> <p>3.1. Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características.</p> <p>3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.</p>

Tabla 2 Comparación de los estándares de aprendizaje evaluable en 3º de ESO. (En negrita se resaltan las diferencias)

5. Las funciones en el libro de texto de referencia

En este capítulo se realizará un análisis de las funciones en el libro de texto de referencia utilizado en la clase. El libro es “M3 Matematika DBH 3 zeure esku” de la editorial Anaya Haritza, edición de 2007. Este libro incluye dos unidades didácticas sobre el tema de funciones: 7. Funciones y gráficos y 8. Funciones lineales.

El análisis de las unidades se realizará utilizando como referencia el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* (Godino, Font y Wilhelmi, 2006). En el primer apartado se resumen los principales elementos o componentes (objetos matemáticos previos y emergentes) implicados en la práctica matemática estudiada. En el segundo apartado, se analizan las unidades del libro de forma global.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

En este apartado se presentan en forma de tabla los principales objetos matemáticos involucrados en la configuración epistémica empírica del aprendizaje de funciones en el nivel de 3º de ESO. Hay que tener en cuenta que los objetos representados están relacionados entre sí, aunque se representen de forma separada.

Siguiendo el texto *Análisis ontosemiótico de una lección* (Godino, Font y Wilhelmi, 2006) los tipos de objetos que se estudian son el lenguaje verbal, gráfico y simbólico, los conceptos previos y emergentes que entran en funcionamiento, las situaciones-problemas y los procedimientos que se presentan y los argumentos y las propiedades que permiten la realización de las operaciones.

LENGUAJE
VERBAL
Función, ejes, escala, unidades, gráfica, coordenadas, abscisa, ordenada, características, dominio, recorrido, creciente, decreciente, máximo, mínimo, variable dependiente o independiente, en función de, cuando x vale...y vale..., relación, representar, punto, tramo, tendencia, interpretar, describir, pendiente, inclinación, ordenada en origen, cortes con ejes, función lineal, proporcionalidad directa, función afín, función cuadrática, recta, parábola, segundo grado, paralelas, pasa por, constante, sustituir, dar valores, hallar, relación, encontrar, expresión algebraica, ecuación, hallar, encontrar, obtener, interpretar, dibujar, representar, explicar, estudiar, asociar, unir, calcular, resolver, indicar, fenómeno, descripción
GRÁFICO
Representación gráfica de funciones. Anotaciones y descripciones en las tablas y gráficos para describir la información que contienen “precio”, “cantidad”, x, y. Organización de valores en tablas.
SIMBÓLICO
x, y, expresión algebraica de funciones, m, n, t (tiempo), d (distancia) o v (velocidad). +, -, ·, =, %, h, s, min, m, km, €, kg, paréntesis para denotar conjuntos, →.

SITUACIONES	CONCEPTOS
PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS	PREVIOS
<ul style="list-style-type: none"> - Obtener la función que describe una situación dada. - Unir un enunciado o descripción de un evento con su gráfica correspondiente. - Describir lo que representa una gráfica. - Obtener las características de una gráfica. - Resolver problemas por medio de funciones. 	<ul style="list-style-type: none"> - Resolución de sistemas de ecuaciones de forma gráfica. - Traducir un enunciado a lenguaje algebraico. - Representación de funciones por puntos. - Tablas de valores. - El concepto de proporcionalidad y su uso en resolución de problemas. - Concepto de función. Funciones lineales y afines - Lectura e interpretación de gráficas.
PROBLEMAS DESCONTEXTUALIZADOS	EMERGENTES
<ul style="list-style-type: none"> - Representar funciones dadas en forma analítica o en tablas de datos. - Unir representaciones gráficas y expresiones analíticas. - Obtener características de la gráfica en la expresión analítica de rectas y parábolas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Interpretación de características y su significado: dominio, monotonía, continuidad, máximos y mínimos relativos y absolutos. - Modelización de sucesos con funciones afines y lineales. Obtención de gráfica, ecuación y tabla de valores. - Información dada en la expresión analítica. - Interpretación y significado de la pendiente. - Comparación de fenómenos/funciones. - Representación de funciones dada expresión implícita o explícita, selección de escala adecuada. - Obtener expresión analítica de gráfica dada.
PROCEDIMIENTOS	PROPIEDADES
<ul style="list-style-type: none"> - Interpretación y obtención de información y características de una gráfica. - Descontextualización del enunciado del problema. - Contextualización de enunciados descontextualizados. - Interpretación de una tabla como una gráfica y viceversa. - Obtención de expresiones algebraicas para gráficas o tablas o viceversa. - Representación gráfica de una función dada como expresión algebraica o tabla. - Interpretación de características de una función. - Obtención de la ecuación de una recta. - Distinción entre función lineal y función afín. 	<ul style="list-style-type: none"> - La expresión algebraica general de las funciones afines es $y = mx + n$. Son rectas. La pendiente es m. Si $m < 0$ será decreciente y si $m > 0$ creciente. Cuanto mayor el valor absoluto de m más inclinación. La recta corta el eje OY en el punto $(0, n)$. Modelizan numerosas situaciones reales. - Cuando $n=0$, son funciones de proporcionalidad. Representan variables directamente proporcionales. - Si una expresión algebraica de una función es de grado 2 ($ax^2 + bx + c = 0$), su representación gráfica corresponde a una parábola. Si $a < 0$ será convexa, si $a > 0$ cóncava. - Si el punto (x_i, y_i) está en una función, sustituyendo x_i en la expresión algebraica obtenemos y_i.
ARGUMENTOS	
<ul style="list-style-type: none"> - Comprobación de las propiedades en casos particulares. - Justificación de las propiedades utilizando elementos genéricos. - Comprobación de que la representación gráfica de una recta concuerda con su expresión algebraica y viceversa. - Comprobación de que un fenómeno descrito concuerda con su expresión algebraica o con la representación gráfica. 	

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

Las unidades didácticas a analizar en el libro de texto de referencia, de la editorial Anaya Haritza, son dos: la unidad 7. Funtzioak eta grafikoak / Funciones y gráficos, y la unidad 8. Funtzio linealak / Funciones lineales.

Las dos unidades siguen un mismo esquema de organización de contenidos:

1. En la primera página se presenta una situación-problema a modo de **introducción** del tema. Incluyen 3 preguntas, para trabajar cuestiones relacionadas.
2. En la segunda página se encuentra un apartado denominado *Hasi aurretik, gogoratu* / *Recuerda antes de comenzar*. En él aparecen, en forma de tabla, las cuestiones fundamentales vistas en los cursos anteriores y ejemplos de las mismas que se deben **recordar** antes de iniciar el aprendizaje de los nuevos contenidos.

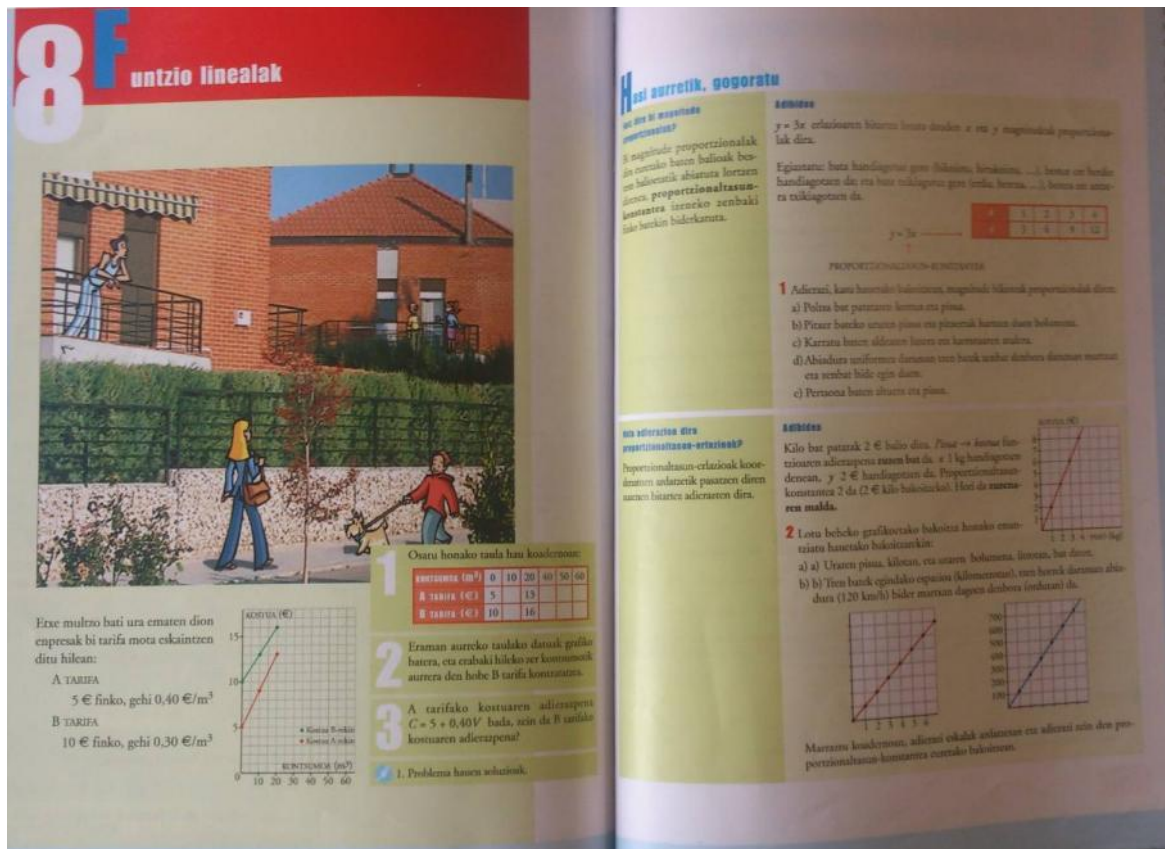


Imagen 1. Hojas 1º y 2º de la unidad 8 funciones.

Es muy interesante que se inicie la unidad de esta forma, ya que la activación de los conceptos previos permitirá optimizar el denominado aprendizaje significativo de Ausubel. Además, ayuda a detectar las carencias que uno o varios alumnos pueden tener y permitirá, si fuera necesario, establecer actuaciones para solucionarlas antes de proseguir con la unidad.

3. En las siguientes páginas se encuentra el cuerpo de la unidad, en el que se desarrollan los **contenidos** organizados en apartados.

La unidad 7. Funciones y gráficos se divide en 4 apartados:

- Variación de una función
- Tendencias
- Continuidad
- Expresión algebraica de una función

La unidad 8 Funciones lineales se divide a su vez en 5 apartados:

- $y=mx$ Funciones de proporcionalidad
- La función $y=mx+n$
- Recta con 1 punto y pendiente conocidas
- La ecuación de una recta que pasa por dos puntos
- La forma general (implícita) de la ecuación de una recta.

Cada apartado sigue además la siguiente estructura común:

- Título numerado del apartado.
- Exposición del contenido utilizando como base un problema resuelto incluido en el epígrafe.
- Síntesis del contenido o ideas clave en uno o varios recuadros amarillos.
- Ejercicio resuelto (sólo en algunas).
- Varios ejercicios para resolver por el alumno enmarcados en un cuadro verde que tratan los contenidos desarrollados en esa página.
- En ocasiones incluyen recuadros en los laterales bajo el epígrafe “Ez ahaztu”/”No olvides” o “Kontuan hartu”/”ten en cuenta” que introducen cuestiones auxiliares relacionadas.
- Si el apartado incluye varios contenidos diferenciados, se incluyen sub-apartados con título en azul que también responden al esquema exposición / recuadro de síntesis / ejercicios

En la siguiente imagen se presentan dos páginas del libro y se adjuntan anotaciones con la ubicación de cada parte.

Título del apartado

Cuerpo de la exposición y ejercicios del epígrafe

Síntesis

Ejercicios

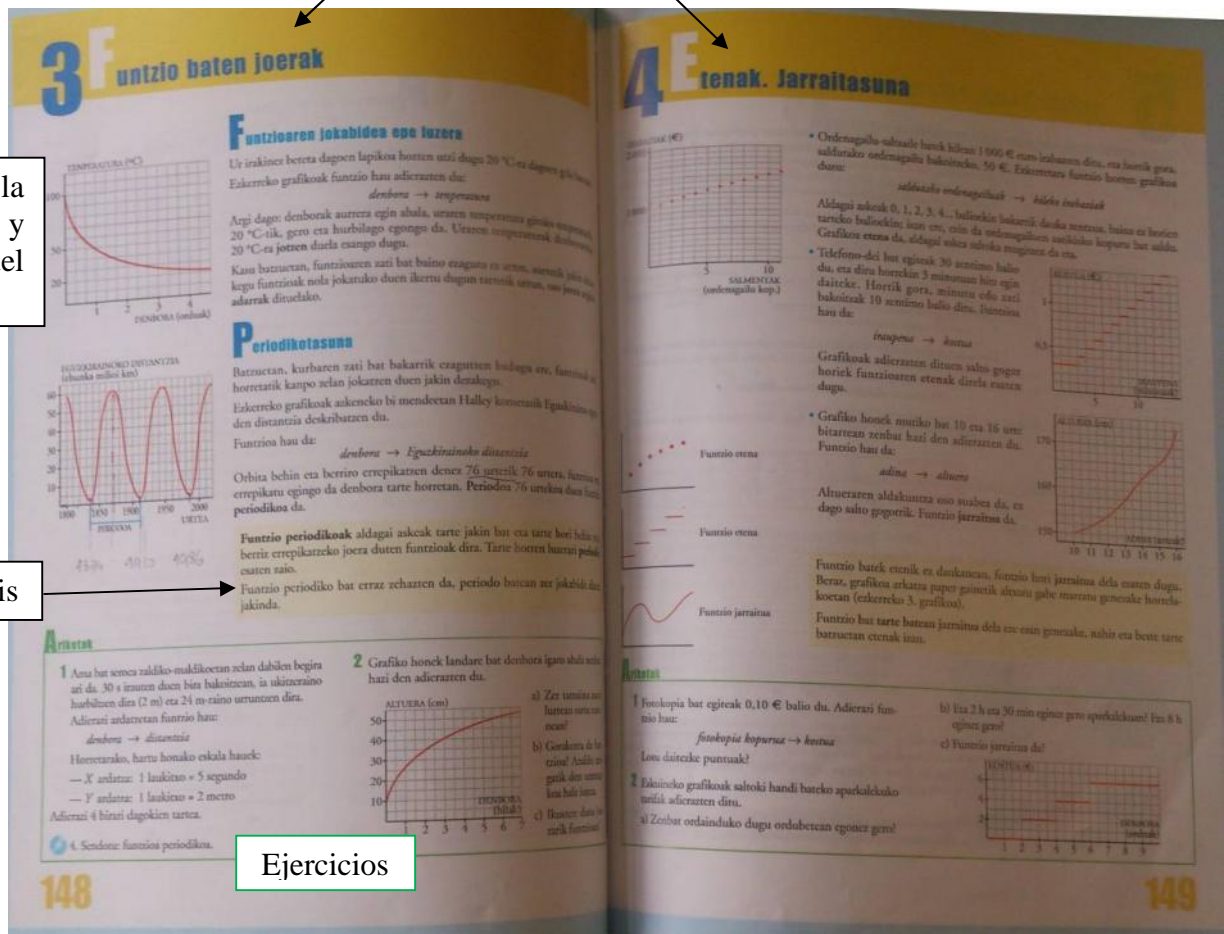


Imagen 2. Vista de dos de los apartados de la unidad 7 donde se pueden observar los patrones de organización que utiliza el libro de texto

La organización de las unidades es clara y permite localizar a simple vista las partes con las ideas fundamentales ya que se encuentran en resaltadas con fondo amarillo.

4. Las siguientes 6 páginas de cada unidad incluyen **ejercicios, problemas y algunas cuestiones** bajo el título *Ariketak eta problemak/Ejercicios y problemas*. Los ejercicios están ordenados por apartados:

- *Trebatu/Practica* donde se incluyen ejercicios mecánicos para practicar
- *Pentsatu eta ebatzi/Piensa y resuelve* que incluye problemas en contexto real
- *Egin gogoeta teoriari buruz/Reflexiona sobre la teoría* donde se incluyen cuestiones
- *Sakondu/Profundiza* que incluye problemas que no son de resolución inmediata

En la siguiente tabla se presenta el resumen de la cantidad incluida en cada uno de los apartados.

	Unidad 7	%	Unidad 8	%
Ejercicios	9	32%	27	45%
Problemas	9	32%	17	28%
Cuestiones	7	25%	12	20%
Profundizar	3	11%	4	7%
Total	28		60	

Tabla 3. Cantidad de actividades incluidas en el apartado “Ejercicios y problemas” de cada unidad

Se puede ver cómo en la unidad 7 la proporción ejercicios-problemas-cuestiones está bastante equilibrada. En cambio, en la unidad 8 casi la mitad del total de actividades son ejercicios.

Este reparto de actividades no parece muy acorde a la importancia que se le da en el currículo a la aplicación de las ecuaciones a situaciones reales, a la utilización de las mismas como herramienta para la resolución de distintos problemas y a saber encontrar la función que describe una situación real dada, que es un descriptor que veíamos se mantenía presente en todos los niveles. Este tipo de aplicaciones y conocimientos se desarrollan con problemas.

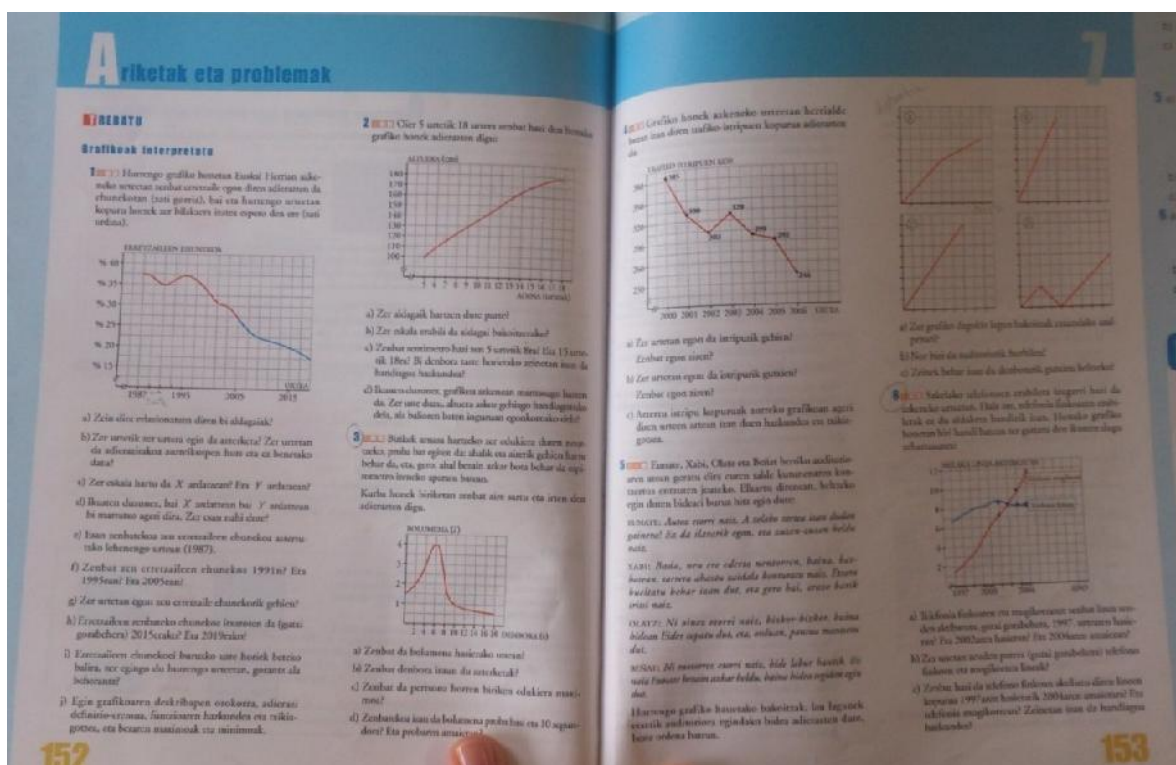


Imagen 3. Vista de las dos primeras páginas de ejercicios y problemas de la unidad 7

Se ve en la imagen que para cada actividad se indica su nivel de dificultad en una escala de 1 a 3, donde el nivel 3 es el de mayor dificultad. El grado se indica con cuadritos rojos 1, 2 ó 3.

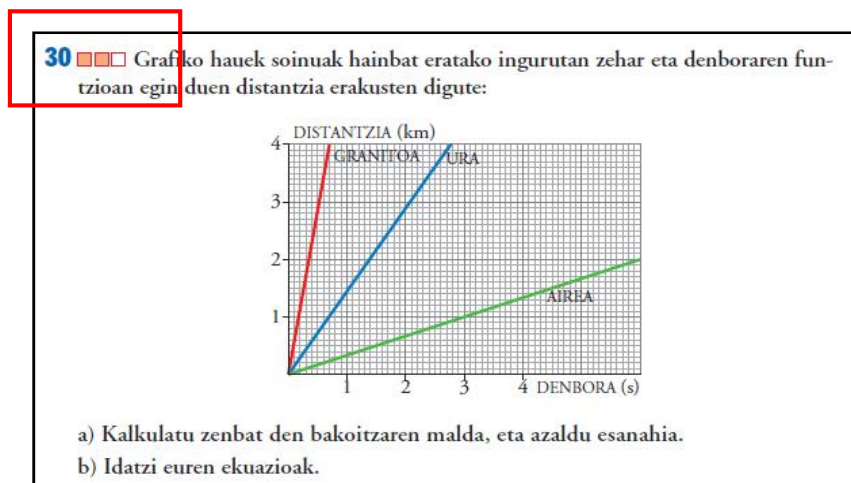


Imagen 4. Vista de detalle de un problema donde se observa, junto al número, que es de nivel 2/3

En la siguiente tabla se presenta la clasificación de cada tipo de actividad por dificultad establecida en el libro. Un asterisco equivale a un cuadrado rojo.

	Unidad 7	dificultad			%	Unidad 8	dificultad			%
		*	**	***			*	**	***	
Ejercicios	9	5	4	0	32%	27	16	9	0	45%
Problemas	9	0	8	1	32%	17	5	10	2	28%
Cuestiones	7	3	3	1	25%	12	5	7	0	20%
Profundizar	3	0	0	3	11%	4	0	3	1	7%
Total	28	8	15	5		60	26	29	3	
		29%	54%	18%			43%	48%	5%	

Tabla 4 Distribución de los niveles de dificultad en las actividades en cada unidad

Como se ve, hay muy pocos problemas de nivel 1 que serían adecuados para trabajar la aplicación de funciones a casos reales en una clase PMAR. Esto se tendrá que compensar con la creación de actividades complementarias. En cambio hay suficientes ejercicios de nivel 1.

- Tras los ejercicios y problemas se incluye un apartado denominado *Gaitasunak garatu/Desarrolla tus habilidades* donde se presentan cuestiones y problemas de **profundización y reflexión**.

Este tipo de actividades resultan *a priori* excesivas para una clase de PMAR.

- Al final de la unidad, en la parte inferior de la última página, se incluyen algunas preguntas de reflexión y resumen de lo visto en el tema bajo el título *Autoebaluzioa. Zer dakizu? / Autoevaluación. ¿Qué sabes?* Además, en el CD aparecen 8 ejercicios de **autoevaluación**.

Este apartado resulta útil para el repaso de contenidos antes del examen.

6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

Tras analizar las unidades didácticas del libro de texto, se estudiará cuáles son las dificultades y errores previsibles en el proceso de enseñanza de las funciones en el aula de 3º de ESO PMAR.

El estudio de las dificultades y errores y su posible origen permitirá realizar adaptaciones del material *a priori* que facilitarán la docencia posterior. No obstante, siempre habrá problemas que se deberán solucionar *in situ* durante las sesiones. Por tanto, no se debe olvidar que este ejercicio previo será siempre una primera aproximación y que como en todos los grupos de alumnos, y especialmente con este tipo de clases de necesidades específicas, se prestará atención al *feedback* ofrecido por las alumnas para comprobar si el proceso se está llevando a cabo de forma satisfactoria.

6.1. Dificultades

En el tema de funciones casi todos los contenidos son ampliación de conceptos que ya se han visto en cursos anteriores, por tanto no parece que pueda haber grandes dificultades en la comprensión de los objetos o conceptos. Habrá que tener en cuenta, no obstante, que se trata de alumnas que previsiblemente no hayan interiorizado de forma plena los contenidos de los cursos anteriores, por lo que necesitarán un primer repaso de los conceptos que se suponen sabidos.

Además se trata de una unidad didáctica larga tanto en contenidos como en duración, ya que se prolonga en el tiempo durante 5 semanas más una semana de vacaciones en medio de la unidad. Las alumnas de PMAR presentan el típico perfil del alumno que estudia todo el último día, y para entonces tendrían acumulada gran cantidad de materia que no parece que pudieran gestionar de forma satisfactoria. Esto unido a sus dificultades personales de aprendizaje, pueden hacer que el proceso sea un fracaso. Por tanto, resultará fundamental impulsar o en cierta medida forzar a que el trabajo se haga de forma constante y asegurar que los conceptos que se ven en clase son realmente comprendidos e interiorizados ayudando además a que las alumnas organicen los contenidos y las ideas.

Otra de las grandes dificultades de este grupo es la limitada capacidad de abstracción y generalización. Esto supone una traba que puede aparecer en numerosas ocasiones a lo largo de la unidad. Se espera que les resulte difícil interiorizar la relación entre funciones y casos prácticos reales y más concretamente la influencia que los distintos coeficientes tienen en los distintos tipos de funciones estudiadas y lo que éstos representan en situaciones reales. Y sobre todo, a la hora de obtener la generalización una situación dada, es decir, obtener la expresión analítica que la describe. También podría verse reflejado en dificultades para la lectura o creación de gráficos que representan situaciones de una forma genérica, que no dispongan de datos exactos, o a la hora de relacionar la pendiente de una función lineal o afín en forma analítica con lo que representa en la realidad (precio por unidad por ejemplo).

6.2. Errores y su posible origen

Antes de llevar a cabo el proceso de estudio objeto del presente informe, ya se ha asistido a varias sesiones de matemáticas, ciencias naturales y proyecto del grupo de 3º PMAR. Esto, unido a que son pocas alumnas en el grupo, ha permitido tener una aproximación a sus capacidades además de poder observar de primera mano los errores que cometen más frecuentemente.

El trabajo con números fraccionarios es un error recurrente, persistente y muy común. Es habitual identificar errores operatorios asociados al cálculo y al significado de la noción de fracción en alumnos de primer ciclo de ESO (Lacasta, Sáenz de Cabezón y Wilhelmi, 2007). Por tanto es esperable que dichos errores operatorios aparezcan de forma recurrente y extensiva en todas las alumnas del grupo a lo largo de todas las clases, máxime al tratarse de un grupo con dificultades de aprendizaje. Estos errores aparecerán de forma transversal, es decir, para cualquier objeto matemático que se esté trabajando y en cualquier tipo de actividad, ya que es un obstáculo asociado a una herramienta aritmética necesaria y no a un concepto propio de la unidad didáctica.

Además también se espera que aparezca un error de concepto por efecto de la combinación del obstáculo que suponen los números naturales para operar con números expresados en forma de fracción y a la manipulación de expresiones algebraicas que las alumnas realizan de forma meramente algorítmica y no comprensiva: no tienen claro cuando pueden o no eliminar los numeradores de expresiones algebraicas. Cuando se realiza la manipulación simbólica literal de ecuaciones para transformarlas en otras equivalentes en las que podamos obtener el valor de la incógnita buscada, uno de los pasos es la multiplicación de toda la expresión por un número igual en ambos lados de la ecuación para, de este modo, eliminar los denominadores de la expresión. Las alumnas lo utilizan como un mero paso o algoritmo en el que cuando los numeradores son iguales, éstos pueden eliminarse. Esto hace que cuando operan aritméticamente con fracciones para obtener un resultado, hagan lo mismo y eliminen el numerador.

Otro error muy recurrente en los cálculos es no respetar la regla de los signos. Generalmente sucede por despiste al operar o realizar cálculos, pero en el fondo puede que el problema resida en una falta de dominio y comprensión real de los números negativos. Este error aparece sobre todo cuando se trata de un número negativo que multiplica a varios números.

El problema de operar de manera coherente con la regla de los signos aparecerá agravado cuando se realicen cálculos en los que la variable independiente de la función tome valores negativos y además su coeficiente sea un número negativo. Por ejemplo, para calcular la imagen de -3 en la función $y = -x^2 - 6x + 2$.

Además, como ya se ha comentado, las alumnas presentan en general dificultades para la generalización y abstracción. Es muy previsible, por tanto, que cometan numerosos errores de concepto a la hora de obtener la expresión analítica que describa una situación o una gráfica dada.

7. El proceso de estudio

Al tratarse de docencia en un grupo PMAR, se ha dado mucha importancia a la idoneidad didáctica² de los materiales a utilizar en la clase, pues se entiende que se trata de alumnos especialmente sensibles. Tras el análisis de la unidad se han preparado para la misma tanto adaptaciones metodológicas como materiales adaptados con ejercicios y problemas que se han visto más apropiados.

Además, aunque con la nueva Ley de Mejora de la Calidad de la Educación no se aplican adaptaciones curriculares por defecto a estos grupos, ha habido que renunciar a algunos objetos y contenidos específicos por falta de tiempo.

A continuación se presentan las adaptaciones realizadas y las razones que han motivado las mismas.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

La unidad didáctica se desarrolló a lo largo de un total de 16 sesiones. Los contenidos de la asignatura, y por tanto las clases, se han diferenciado en cuatro bloques según el contenido que se trabaja.

A continuación se presenta un calendario esquemático con la distribución por bloques de las sesiones. Además de los contenidos, se han marcado en amarillo las sesiones globales y en gris los días en los que no hubo clase de matemáticas, éstos son los lunes, en los que no hay clase de ámbito científico matemático, y los viernes alternos en los que la sesión es de una hora y se dedica una semana a la parte de Ciencias Naturales y la siguiente a la parte de Matemáticas.

BLOQUES DE CONTENIDOS	
1	Funciones, interpretación y características
2	Función lineal
3	Función afín
4	Función cuadrática
OTRAS INDICACIONES	

² La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Es una herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva a otra prescriptiva al proporcionar un sistema de criterios de intervención sobre los cuales existe un consenso en la comunidad de educación matemática.

[www.http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html](http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html)

Adaptación de la enseñanza de funciones al grupo de 3º de ESO PMAR

	Sesiones globales de toda la unidad
	Días festivos
	Días sin clase

Tabla 5. Leyenda código de colores de la programación de la unidad

L 14	M 15	X 16	J 17	V 18 1 Evaluación Inicial en clase. Sesión en ordenador	S	D
L 21	M 22 2 Interpretación gráfica, escalas, variables	X 23 3 Dominio, Crecim, Max min, interpret. de pendiente, func. en situaciones reales	J 24	V 25	S	D
L 28	M 29	X 3 vacaciones semana santa	J 31	V 1	S	D
L 4	M 5 4 recorrido, pendiente: interpretación	X 6 5 unir gráfico-enunciado Problema introducc. F.Lineal expresión analítica represent. de func.	J 7 6 Informática: Representación de enunciados con Excel / funciones con Geogebra	V 8	S	D
L 11	M 12 7 calcular pendiente en gráficas	X 13 8 Función afín, problemas representación de func., calcular pendiente	J 14 9 Manipular expresiones Representar funciones dada exp. analítica	V 15 10 Encontrar expresión analítica	S	D Deberes Cuestiones sobre teoría: test online.
L 18	M 19 11 Problemas afín/prop.. Parábola representación	X 20 12 Problemas afín/prop. Situación parábola parábola representación	J 21 13 Problemas afín/prop. parábola representación	V 22 14 Problemas afín/prop. Representación afín/lineal/parábola esquema unidad	S	D
L 25	M 26 15 Repaso	X 27 16 Examen	J 28	V 29	S	D

Tabla 6. Calendario de la programación de la unidad didáctica

Al ser el objeto del presente TFM el análisis de global de la adaptación del proceso de enseñanza de la unidad completa, no se entra a particularizar la distribución del tiempo en cada clase.

7.2. Adaptaciones y actividades adicionales planificadas

El estudio de la idoneidad didáctica de la unidad y en consecuencia la justificación de las adaptaciones adoptadas, se ha hecho tomando como base los indicadores de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas según el Enfoque Ontosemiótico (EOS).

En Godino, Contreras y Font (2006) se introducen cinco criterios a tener en cuenta para valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático, usando en su formulación nociones teóricas del EOS³: idoneidad epistémica, cognitiva, emocional, interaccional, ecológica y mediacional. A continuación se definen y analizan en relación con el proceso de estudio objeto del TFM.

- 1. Idoneidad Epistémica:** se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados respecto al significado de referencia. No se realizan adaptaciones a este respecto, ya que la idoneidad de la unidad se ha encontrado adecuada.
- 2. Idoneidad Cognitiva:** expresa el grado de proximidad de los significados pretendidos y los conocimientos de los que los alumnos y alumnas disponen. Puede ser determinante si los conocimientos y objetos previos de las alumnas distan mucho de los del curso de referencia, algo que puede suceder en estos grupos especiales. Resultará fundamental conocer los conocimientos de referencia de los que se dispone para poder trabajar en base a éstos. En cualquier caso, y debido a las necesidades particulares del grupo, se ve que muchos de los ejercicios y problemas planteados en el libro no son adecuados a las capacidades cognitivas de las alumnas.
- 3. Idoneidad Interaccional:** se refiere al diálogo, interacción y comunicación que se establece entre el enseñante y los alumnos. Para la docencia en el grupo PMAR resultará clave establecer procesos que permitan identificar conflictos durante la instrucción que permitan modificar o corregir los métodos planteados para adaptarlos al aprendizaje realmente conseguido en cada momento.
- 4. Idoneidad Mediacional:** se refiere a la disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el correcto desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje. Este criterio si bien es muy importante se encuentra en nuestro caso completamente fijado y se tiene poco margen de adaptación. Aunque *a priori* parece lógico pensar que en el grupo PMAR harán falta más sesiones para conseguir la interiorización de los mismos contenidos, se dispone del mismo número de horas lectivas semanales que en el grupo ordinario y el currículo establece, como hemos visto, los mismos objetivos. Sobre los recursos materiales, debido al contrato pedagógico preestablecido en la clase, no es posible permitir el uso de calculadoras para evitar errores de cálculo derivados del escaso dominio de herramientas matemáticas como el cálculo mental o el trabajo con números decimales y fraccionarios.

³ Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*(2006)

5. **Idoneidad Emocional:** se refiere al grado de implicación del alumnado en el proceso de estudio. Se favorecerá con metodologías activas y participativas. Se transmitirá confianza a las alumnas ya que se ha visto que tienen poca autoestima y poca confianza en sus capacidades matemáticas. Es importante recordar que se favorece el aprendizaje cuando existe motivación, pero también que el aprendizaje favorece la motivación, por lo que se intenta plantear una secuencia didáctica estimulante pero al alcance de las alumnas.
6. **Idoneidad Ecológica:** es el grado en el que el proceso se ajusta a los condicionantes del entorno en el que se desarrolla y a los requerimientos del currículo. No se van a realizar cambios significativos con respecto al contrato pedagógico preexistente, se trabajará de forma similar a lo que vienen haciendo durante el curso, pero se incluirá el trabajo en ordenador para trabajar las competencias y contenidos referidos a los medios digitales.

LAS ADAPTACIONES REALIZADAS:

1. REALIZACIÓN DE UNA EVALUACIÓN INICIAL: cognitiva

Se diseñó una evaluación inicial tipo test con el doble objetivo de evaluar los conocimientos previos de las alumnas y las carencias existentes así como hacer que recuerden y activen los conocimientos previos de los que disponen. Esto facilita la conexión y construcción de los nuevos conocimientos sobre los que ya se tienen, el denominado aprendizaje significativo de Ausubel, y permite que el profesor defina cuáles son los conocimientos que se encuentran al alcance de las alumnas, o la zona de desarrollo próximo de Vigotsky.

Para que el test no fuera recibido con el rechazo que habitualmente generan los controles o evaluaciones, se planteó un test online a realizar en el aula de informática en la primera sesión de clase lo que le confiere una imagen menos formal al no tener el formato habitual de las evaluaciones escolares.

Para la realización del test se utilizó la plataforma web Socrative.com. Ésta permite crear un cuestionario con preguntas con opciones de respuesta múltiple, verdadero/falso o respuesta corta. Para la gestión de los cuestionarios la web dispone de distintas opciones. En este caso se utilizó la denominada “Cuestionario guiado por el estudiante: resultados inmediatos”. Las preguntas del cuestionario van apareciendo en la pantalla en orden, el alumno lee la pregunta, selecciona su respuesta y pulsa “enviar respuesta”. Cuando el alumno responde la aplicación le dice si es o no correcta su respuesta y en caso de no serlo, aparece indicada con color verde la corrección. Además, el profesor puede incluir comentarios o anotaciones que aparecerán en una ventana *pop up* después de que el alumno o la alumna envíe su respuesta. De esta forma cada alumna responde a su ritmo y recibe *feedback* instantáneo de los errores o aciertos que va cometiendo.

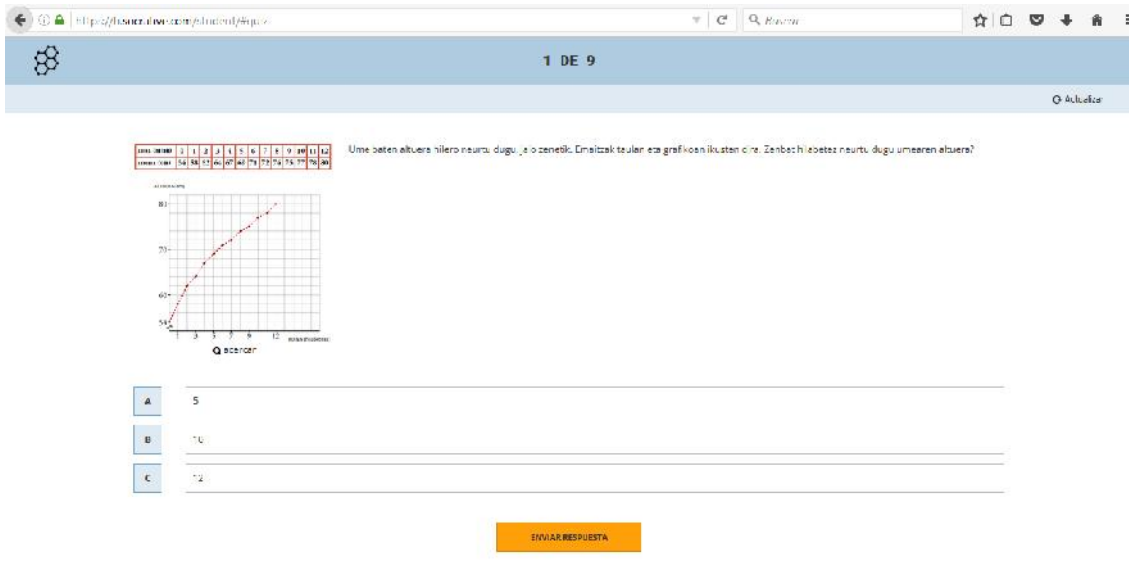


Imagen 5 Captura de la interface del alumno con una pregunta de tipo respuesta entre opciones múltiples

Los temas que se incluyeron en los test fueron los siguientes:

1. Coordenadas cartesianas
2. Interpretación de gráficas de puntos
3. Lectura de gráficos por puntos
4. Lectura de gráficos por tramos
5. Interpretación de gráficos. Relacionar situaciones y gráficos

En total se incluyeron 43 preguntas. Todas las alumnas respondieron a más del 60% de las preguntas de forma correcta y se concluyó que los conceptos previos se dominaban salvo la identificación de escalas y la lectura y comparación de tramos. Los cuestionarios completos y los resultados de los mismos se encuentran en el Anexo 4. Test de evaluación inicial y resultados.

El profesor o la profesora que gestiona el cuestionario recibe resultados en vivo, mientras las alumnas responden al cuestionario, y un informe con los resultados finales y estadísticas cuando se finaliza el test.

02. Koordinatu cartesianarrak esanahiarekin



Imagen 6 Captura de pantalla de la vista de seguimiento del profesor de una pregunta en particular. Contiene información sobre cuántos han respondido, cuántos han respondido bien y qué porcentaje ha optado por cada respuesta.

Nombre	Puntuación	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15
...	20%	B	C	A	D	C	C	D	A	D	D	D	B	C	D	C,D
...	17%	D	C	A	D	B	B	B	C	C	B	A	A	B	A	E, A, B
...	57%	E	D	A	D	A	C	B	A	D	B	B	A	C	A	E, B
...	20%	C	C	A	D	C	C	D	D	D	D	A	A	C	A	C, C, B
...	10%	C	A	A	D	C	B	A	F	F	D	A	B	C	A	C, F, B
Total de la clase		20%	60%	100%	100%	60%	60%	80%	40%	40%	80%	40%	60%	80%	80%	40%

Imagen 7 Captura parcial de la pantalla de seguimiento del profesor en la que se visualiza ordenado en tabla las respuestas de cada alumno y sus nombres (eliminados en esta imagen) en tiempo real. La vista adjunta corresponde al test finalizado.

2. METODOLOGÍAS ACTIVAS Y PARTICIPATIVAS interaccional + emocional

Se trata de favorecer el interés y la implicación de las alumnas con el objetivo último de conseguir mejorar su aprendizaje.

SESIONES DIALÓGICAS

El pequeño tamaño del grupo permite que la atención del profesor a las alumnas sea individualizada. El seguimiento individualizado se aplica tanto a la parte de implicación y trabajo que realizan las alumnas como a la evaluación continua de la evolución de su aprendizaje.

Por esto las clases se plantean eminentemente dialógicas, de forma que no sólo se permiten las preguntas y la interacción con el profesor mientras se exponen contenidos o se responde a las alumnas, si no que se anima a realizar intervenciones en cualquier momento. Además, se prestará especial atención para interpretar las intervenciones que realizan y reaccionar a las mismas modificando y adaptando el curso de la clase a lo que las alumnas efectivamente comprendan. El clima de la clase se plantea, por tanto, de conversación y diálogo constante entre alumnos y profesor, así como entre los propios alumnos.

TRABAJO COLABORATIVO

Unido a lo anterior y al clima que se pretende mantener en la clase, encontramos la necesidad de fomentar la colaboración y diálogo entre alumnos. En esta clase se ha observado que el funcionamiento habitual permite que tanto durante las explicaciones como durante el trabajo autónomo las alumnas colaboren unas con otras, preguntando y resolviendo dudas entre ellas, realizando los ejercicios por parejas o incluso, cuando la dificultad es alta, entre todas.

Esta forma de actuar es específica del grupo PMAR en el centro en el que se desarrolló el Practicum II, y se ha mantenido porque se ve presenta dos grandes ventajas: la primera, que es la base fundamental de los denominados Métodos de Aprendizaje Cooperativo, es que cuando las alumnas que han comprendido mejor los contenidos explican a las que no lo han hecho ambas aprenden, y la segunda, que la profesora puede obtener mucha información de lo que se ha entendido y de lo que se debe reforzar en estas conversaciones.

Por otro lado, teniendo en cuenta que se trata de un grupo muy reducido, no existe gran riesgo de barullo o alboroto, y mantener el control de la clase es relativamente fácil. No obstante se establecen de forma implícita unas normas

de civismo para el comportamiento a la hora de intervenir: se respeta a todos los compañeros, no se interrumpe y se habla de uno en uno, los temas de conversación serán los relativos al trabajo matemático que se está realizando y sus aplicaciones. Esto ayuda también a la formación integral de los alumnos.

Durante la práctica se vio que esta permisividad a la hora de que las alumnas participen, no sujeta a normas estrictas de levantar la mano por ejemplo, resulta ser un mecanismo muy útil que mantiene a las alumnas interesadas, atentas, concentradas e implicadas a la vez que evita las frustraciones y reacciones disruptivas que podría generar el pretender mantener un silencio absoluto durante el transcurso de la clase.

SITUACIÓN FUNCIÓN CUADRÁTICA

Se realizó una teatralización de una actividad del libro de texto (pág. 150 de la unidad 7, funciones, bajo el epígrafe *la expresión analítica de una función*), generando una aproximación a lo que sería una Situación Didáctica, aunque menos ambiciosa.

Los objetivos que se buscan son: comprender que existen otros modelos funcionales además de las funciones lineales y afines y que cada situación real requiere un modelo particular para ser explicada, practicar la experimentación y toma de datos in situ que nos llevará a encontrar el tipo de función y conseguir que las alumnas acepten retos y trabajos fuera de lo común en el aula.

Se repartió a cada pareja un trozo de hilo de 50 cm y se pidió que obtuvieran las diferentes áreas de los rectángulos que podían formarse en función de la longitud de la base.

La situación no fue recibida con una buena actitud ya que les pareció demasiado complicada. Además realizar las diversas multiplicaciones les resultó muy complicado, como el uso de calculadoras no está generalmente permitido no se previó que no dispondrían de éstas. Esto llevó a que varios de los puntos de la función no se calcularan correctamente y el gráfico que lograron no tuviera forma de parábola.

3. REFUERZO, REPASO Y ESQUEMA DE LA UNIDAD cognitiva - emocional

Las alumnas presentan baja confianza en sí mismas además de baja capacidad para pensar estrategias para utilizar y regular la propia actividad de aprendizaje, dificultades para organizar su tiempo y sus ideas (metacognición). Para compensar esto, se prevé una sesión en la que se reforzará la teoría vista hasta ese momento, parte de otra para dar visión global de la unidad y hacer un pequeño esquema de la misma y una última para realizar un repaso global resolviendo unos ejercicios tipo de cada bloque de contenidos visto. Esto se hace con los objetivos de dar tranquilidad a las alumnas, repasar los puntos flojos y resolver dudas finales.

CUESTIONES PARA REFUERZO DE LA TEORÍA

Se preparó como tarea autónoma para realizar en casa un test online en la web Socrative.com con cuestiones para reflexionar y reforzar la teoría al finalizar las sesiones de docencia de la función afín. Se utilizó, igual que para el test que se

resolvió en clase en la primera sesión, la opción “Cuestionario guiado por el estudiante: resultados inmediatos”.

El test incluía 15 preguntas en las que sobre todo se hizo hincapié en la comprensión del significado y la influencia de la pendiente y la ordenada en origen. El cuestionario completo así como los resultados están incluidos en el Anexo 5.

Se utilizó una plataforma digital porque además del trabajo con tecnologías digitales, permite incorporar imágenes a las preguntas lo que ofrece versatilidad y atractivo visual. El hecho de que sean preguntas tipo test, hace que se puedan incluir más preguntas que si se plantearan preguntas de respuesta a desarrollar o la resolución de problemas, ya que en general, requieren menos tiempo.

HACER ESQUEMA DE LA UNIDAD EN CLASE

Al final de la penúltima sesión se reserva un tiempo para hacer un esquema de la unidad didáctica, recordando los bloques en los que se divide, los contenidos vistos en cada bloque y los tipos de ejercicios que se hicieron en cada parte.

Se eligió la sesión penúltima porque no se espera que las alumnas comiencen a estudiar antes. Se espera que después de este ejercicio de visión global y ordenación de contenidos, las alumnas puedan preparar mejor tanto la sesión de repaso como el examen.

SESIÓN REPASO

La sesión previa a la sesión de evaluación se reserva para realizar un repaso y preparar el examen con las alumnas. Para que el tiempo no suponga un problema, se plantea el repaso en una de las sesiones de 2h de la asignatura, un lunes, y se utilizará además parte de la hora de la sesión que correspondería a ciencias naturales.

Se preparan ejercicios tipo similares a los que entrarán en el examen que se resolverán de forma conjunta en clase. Algunos de los ejercicios se plantean con una dificultad mayor a la que presentará el examen, para asegurar que las alumnas dominan los contenidos a evaluar. Los ejercicios preparados para esta sesión se encuentran adjuntos en el Anexo 3. Ejercicios para la sesión de repaso.

Aunque inicialmente se programó resolver sólo un problema, finalmente se resolvieron dos, añadiendo uno del libro durante la clase, ya que se comprobó que era el apartado en el que había más dificultades.

4. CREACIÓN DE ACTIVIDADES DE FUNCIONES CUADRÁTICAS ecológica

Como se ha concluido del análisis del libro de texto realizado en el capítulo 4, las unidades didácticas del material de referencia no incluyen actividades sobre ecuaciones cuadráticas. Por tanto se crean diferentes actividades para trabajar el tema en clase. Las actividades tipo se encuentran descritas a continuación.

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	✓Cuestión	Situación
Descripción: Cuestiones para trabajar la influencia de los coeficientes a y c por separado (donde $y=ax^2 + bx + c$), se toma $b=0$ para simplificar. a→ en la curvatura de las parábolas: cóncava o convexa, y mayor o menor curvatura. c→ desplazando la parábola hacia arriba o hacia abajo.				
Ejemplo: Representa las funciones $y=x^2$ y $y=-x^2$. Compara los valores que toma y en cada caso para un mismo valor de x. Representa las funciones $y=x^2$ y $y=2x^2$ sobre los mismos ejes.				

Actividad tipo:	✓Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación						
Descripción: Representación gráfica de parábolas dadas mediante su expresión analítica. Las expresiones analíticas dadas tienen generalmente tan sólo 2 términos siendo $b=0$ y los coeficientes son números enteros o fracciones con denominador 2, 3 ó 4. Se trabajan estrategias de selección de valores de la variable aleatoria de forma que su imagen sea un número entero (valores de x múltiplos del denominador de su coeficiente). Se insiste en tener cuidado con la regla de los signos y los números fraccionarios en los cálculos.										
Ejemplos: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%;">$y = x^2 + 1$</td> <td style="width: 50%;">$y = -x^2 - 7$</td> </tr> <tr> <td>$y = x^2 - 1$</td> <td>$y = 1/2x^2 - 2$</td> </tr> <tr> <td>$y = 3x^2 - 1$</td> <td>$y = 3x^2 + 3$</td> </tr> </table>					$y = x^2 + 1$	$y = -x^2 - 7$	$y = x^2 - 1$	$y = 1/2x^2 - 2$	$y = 3x^2 - 1$	$y = 3x^2 + 3$
$y = x^2 + 1$	$y = -x^2 - 7$									
$y = x^2 - 1$	$y = 1/2x^2 - 2$									
$y = 3x^2 - 1$	$y = 3x^2 + 3$									

5. ADAPTACIÓN DE ACTIVIDADES DEL LIBRO DE TEXTO *cognitiva*

Las particularidades del grupo PMAR hacen que se necesiten mucha cantidad de ejercicios o problemas de un mismo tipo para que las alumnas puedan repetir y practicar numerosas ocasiones y ejercitar hasta que se logre una comprensión real. Además, no todas las actividades planteadas en el libro pueden ser resueltas de forma satisfactoria por las alumnas, y se puede dar el caso extremo de que si son excesivamente complicadas generen frustración y rechazo en las alumnas, dilapidando por completo el clima de trabajo en la clase. Esto lleva a la necesidad de descartar algunas de las actividades del libro y a la creación de ejercicios, problemas y cuestiones nuevas más adecuadas, en ocasiones variando o modificando ejercicios del libro, y en otras creándolas desde cero.

EJERCICIOS

Como se ha indicado en el capítulo 6 se espera que las funciones con coeficientes decimales o coeficientes expresados en forma de fracción generen numerosos errores en la realización de cálculos. Por esto en algunos ejercicios del libro no se eliminan algunos de los apartados o se han modificado y adaptado simplificando las expresiones analíticas de las funciones que entran en juego. También se debe tener en cuenta que no se permite el uso de calculadoras a la hora de seleccionar los ejercicios y apartados que se resolverán en clase.

En las siguientes imágenes se presentan algunos ejemplos de ejercicios del libro que se han variado parcialmente.

2 Adierazi zuzen hauek:

a) $y = 0,6x$

b) $y = \frac{1}{2}x$

c) $y = -2,4x$

d) $y = -\frac{2}{5}x$

En el ejemplo adjunto (2) no se realizaron ni el apartado a ni el c

Imagen 8 ejercicio del libro del que no se utilizaron todos los apartados

4 Adierazi honako zuzen hauek:

a) $y = -2x + 1$

c) $y = -\frac{8}{5}$

e) $y = 2,5x - 1$

b) $y = -\frac{x}{2} + 3$

d) $y = \frac{3x-5}{2}$

f) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

En el ejemplo adjunto (4) hay que tener en cuenta que los apartados d, e y f supondrán un gran esfuerzo, por lo que no es muy conveniente hacerlos seguidos, si se hacen los tres.

Imagen 9 ejercicio del libro que requieren adaptación

Durante el desarrollo de las primeras clases se vio que la lectura de escalas que representan fracciones de la unidad resulta problemática, así como interpolar valores entre líneas dadas en una gráfica. Para evitar estos problemas, se crearon gráficos cuyos datos se leyeran de forma sencilla y exacta para resolver en casa. Además, se crearon más gráficos con tramos rectos porque los gráficos con muchas curvas resultan más complicados de leer.

Algunos ejemplos de gráficos creados para su análisis e interpretación de la situación que representan en clase se adjuntan a continuación:

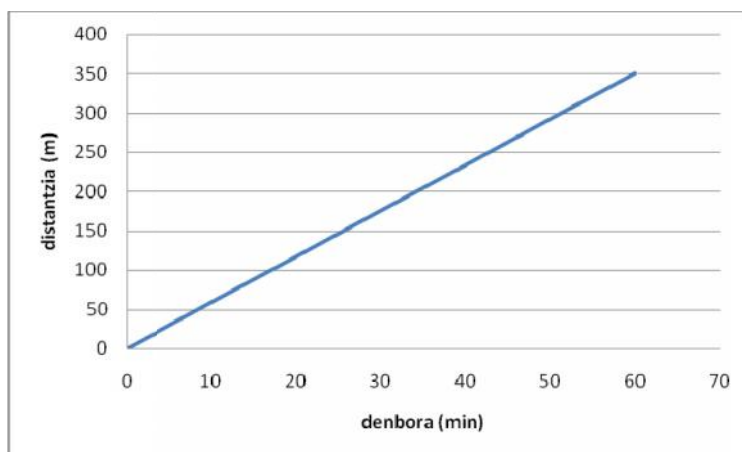


Imagen 10 gráfico tiempo – distancia (1)

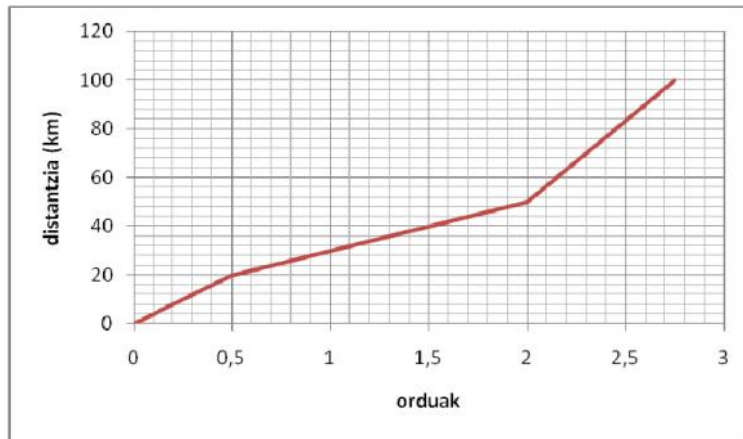


Imagen 11 gráfico tiempo – distancia (2)

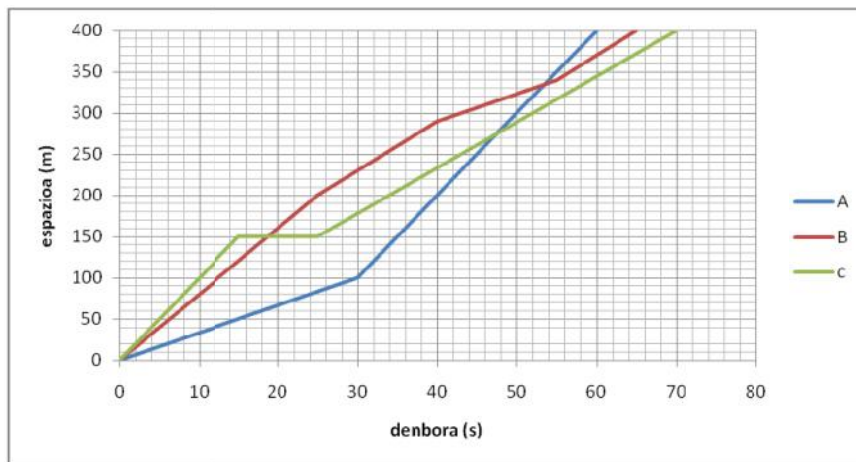


Imagen 12 gráfico tiempo – distancia en el que se comparan 3 corredores

PROBLEMAS

El último tipo de actividades del libro que se han adaptado son los problemas. Como se representa en la Tabla 4 Distribución de los niveles de dificultad en las actividades en cada unidad” de la página 67, tan sólo 5 de los 26 problemas están categorizados como de nivel 1/3, el 19%. La mayoría de los de nivel 2 ó 3 se encontraron no adecuados para la clase PMAR y por tanto, no se utilizarán en el proceso de enseñanza.

40 ■■■ Kooperatiba batean etekin handiak lortu dituzte, eta, beraz, kideei soldata % 4 igotzea erabaki dute, eta, gainera, 50 € emango diote hilean bakoitzari.

- Zenbat irabaziko du Loreak igoyeraren ondoren, lehenengo hilean 1 500 € irabazten bazituen?
- Idatzi soldata berria (y) soldata zaharraren (x) arabera ematen digun funtzioaren ekuazioa.
- Jagobak igoyeraren ondoren 1 298 € irabazten baditu, zer soldata zeukan lehen?
- Adierazi funtzioa grafiko batean.

Traducción: En una cooperativa han conseguido grandes beneficios, por tanto, deciden subirles a los socios el sueldo un 4%, y además, les van a dar 50€ más al mes a todos.

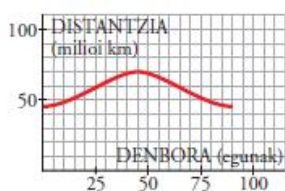
- ¿Cuánto va a ganar Lorea tras la subida, si antes ganaba 1500€ al mes?

- b) Escribe la ecuación de la función que relaciona el nuevo sueldo (y) con el sueldo anterior (x).
c) Si Jagoba cobra después de la subida 1298€, ¿cuál era su sueldo antes?
d) Representa la función gráficamente.

Imagen 13 problema descartado por su complejidad de cálculo y de comprensión de la situación

También hay que tener en cuenta que estas alumnas tienen problemas de comprensión lectora, por lo que enunciados demasiado complicados por su longitud o con terminología o situaciones muy alejados de su realidad cotidiana se descartan por los problemas que generarían en su comprensión y en la abstracción para su modelización.

- 10 Mercuriok 88 egunean egiten du Eguzkiaren inguruko orbita. Eguzkiraino duen distantzia, berriz, 70 eta 46 milioi kilometro artean dago.
Osatu Merkuriotik Eguzkira 300 egunean dagoen distantziari buruzko grafikoa.



traducción: La órbita de Mercurio alrededor del sol es de 88 días. La distancia de éste hasta el sol, en cambio, varía entre 70 y 46 millones de kilómetros. Completa el gráfico de la distancia que hay entre mercurio y el sol a lo largo de 300 días.

Imagen 14 problema descartado por su lejanía a la realidad de las alumnas y la complejidad de su contexto

Además, como no se vio en clase la obtención de la expresión analítica de una función afín dada con un punto y su pendiente o dados dos puntos, parte de los problemas del libro no se podrán resolver, los que necesitan de esto para su resolución, por lo que también se descartan.

Por otro lado, por las dificultades de aprendizaje que presentan las alumnas, necesitan muchas repeticiones de un mismo tipo de ejercicio tal y como hemos dicho. Esto se verá especialmente necesario en el caso de los problemas, ya que requieren un paso de generalización y abstracción para encontrar la expresión analítica que se espera les resultará muy costoso. Por esto, como se puede ver en la programación incluida en el punto 7.1, al inicio de todas las sesiones de la última semana de docencia se reserva un tiempo para la resolución de dos problemas.

En consecuencia, hubo que crear varios problemas alineados con todas las consideraciones anteriores. A continuación se incluyen como ejemplo las traducciones al castellano de algunos de los problemas creados. Como se puede ver se trató de que estuvieran encuadrados en aspectos cercanos o situaciones en las que realmente hubieran podido experimentar las alumnas.

- La compañía de teléfonos BBB tiene la siguiente tarifa: se pagan 6€ al mes por la tarifa plana de datos para conexión a internet y, además, 0,20€ por cada llamada que se realice, sin importar la duración. ¿Cuánto pagaré según el

número de llamadas? Representalo gráficamente, obtén la tabla de valores y la expresión analítica.

- En mi pueblo alquilan bicicletas con la siguiente tarifa: se pagan 3€ en concepto de seguro para poder alquilar las bicis y después 1 € más por cada hora que se use hasta un máximo de 18 h. ¿Cuánto se paga según el tiempo que usemos la bicicleta? Representalo gráficamente, obtén la tabla de valores y la expresión analítica.
- El grifo que llena un depósito de 10 litros de volumen tiene un caudal de 2 litros por segundo. Si abrimos el grifo cuando el depósito está vacío, ¿cuánto volumen de agua habrá dentro en cada momento? Representalo gráficamente, obtén la tabla de valores y la expresión analítica.
- Un depósito de agua contiene 200 l. Se abre el desagüe que lo vacía, que tiene un caudal de 10 litros por minuto, ¿cuánto volumen de agua habrá dentro en cada momento? Representalo gráficamente, obtén la tabla de valores y la expresión analítica. (ligera variación sobre el ejercicio 35 de la página 173 con el objetivo de repetir el mismo caso).
- En un programa de televisión los concursantes comienzan con 10 puntos en su marcador. Si por cada respuesta que responden erróneamente pierden un punto, ¿cuántos puntos tendrán en función de los fallos cometidos? Representalo gráficamente, obtén la tabla de valores y la expresión analítica.

6. FORMACIÓN EN COMPETENCIA DIGITAL ecológica + emocional + mediacional

Como se extrae del análisis del libro de texto realizado y su comparación con los contenidos incluidos en el currículo, la parte de trabajo con TIC-s y el desarrollo de competencias digitales no se tienen en cuenta en el libro de referencia. Como consecuencia, se decidió diseñar e incluir algunas sesiones de trabajo en ordenador, que además de para el desarrollo de competencias digitales, se espera que sirvan para aumentar la motivación de las alumnas.

En total se planificaron 4 sesiones en el aula de informática (sesiones 1ª, 2ª, 6ª y 11ª) más una actividad de trabajo autónomo en casa vía online. A continuación se describen las sesiones.

SESIONES EN CLASE ONLINE.

Las dos primeras sesiones de la unidad se basaron en cuestionarios online realizados en la web Socrative. En la primera sesión se realizó la evaluación inicial en el aula de informática utilizando un cuestionario en el que el alumno responde a las preguntas a su ritmo y recibe *feedback* instantáneo, tal y como se ha explicado en la adaptación 1.

Como soporte visual e hilo conductor de la introducción a las funciones realizada en la segunda sesión se diseña un pequeño cuestionario online que se encuentra incluido en el Anexo 5. Test para resolver preguntas y utilizarlas como hilo conductor Este cuestionario durará sólo parte de la sesión, se espera que unos 20 minutos. Se plantea utilizar también la web Socrative y desplazarse al aula de informática, donde cada alumna dispone de un ordenador y la pantalla de

la profesora se proyecta para que todas la vean. En esta ocasión se utiliza la opción “cuestionario guiado por el profesor” con la que la profesora lanza una pregunta, las alumnas responden cada una en su ordenador pero no recibirán feedback de si es o no la respuesta correcta. Mientras, en el proyector del aula, se ve qué porcentaje ha respondido cada una de las opciones. Cuando toda la clase ha respondido, y antes de que las alumnas vean cuál es la respuesta correcta, la profesora guiará en un proceso de reflexión, se comentan los resultados y opiniones, aprovechando para introducir y recordando los objetos que se quieren trabajar. Cuando la profesora lo decida, se proyecta la respuesta y cada alumna verá si ha respondido o no correctamente o no.

La utilización de soportes digitales e interactivos para conducir la clase se espera que, además de la mejora en competencias digitales, que la implicación y la participación de las alumnas mejoren considerablemente. Por un lado, tener las preguntas con soporte de imagen en una pantalla grande en lugar de en el libro resulta más atractivo para las alumnas. Y por otro, ir viendo el porcentaje de la clase que elige una opción de respuesta u otra genera en la clase una sensación de concurso televisivo que fomenta la participación activa y el deseo de responder de forma correcta.

DEBERES ONLINE

Como se ha explicado, aprovechando que las alumnas ya están familiarizadas con la web Socrative, se diseñó un cuestionario para su resolución en casa de forma autónoma.

SESIÓN DE USO DE APLICACIONES INFORMÁTICAS.

Para la sexta sesión se planificó el trabajo en el aula de ordenadores para representar funciones por tramos, o representar situaciones gráficamente obteniendo la tabla de valores. Se preparan varios ejercicios. En general la sesión no resultó muy productiva, las alumnas no prestaron atención, no había clima de trabajo y el aprovechamiento fue muy escaso. El principal motivo fue que el trabajo en el ordenador no se veía reflejado en la calificación sumativa de manera directa, ya que el examen sería en papel. También influyó que la sesión fue en Jueves (final de semana) y a sexta hora (última hora). En estas últimas sesiones de la semana la concentración de las alumnas es mucho menor.

Para la sesión 11 había previsto un ejercicio con Geogebra, pero debido fundamentalmente al escaso resultado y mala aceptación de la sesión de Office y en parte al retraso que se estaba acumulando en la enseñanza de contenidos, se decidió eliminar. En lugar de esto se realizó una visión de la influencia de los coeficientes en las funciones cuadráticas utilizando Geogebra en la que la profesora proyecta en la pantalla lo que se realiza en su ordenador.

7. CONTENIDOS A LOS QUE SE HA RENUNCIADO *cognitiva + mediacional*

Como se ha indicado anteriormente, aunque no les corresponden *per se* adaptaciones curriculares a este tipo de grupos, por necesidades de tiempo se ha tenido que renunciar a algunas de las partes del currículo.

Para decidir qué partes son las que se eliminan se han tenido en cuenta fundamentalmente dos criterios:

1. Que el objeto matemático que se elimina de la unidad no resulte fundamental para la posterior consecución de objetivos y contenidos del curso siguiente, presumiblemente la opción de Enseñanzas Aplicadas de 4º de ESO, y por tanto la obtención del título de Graduado en ESO. Para ello se comparan los objetivos de ambos cursos. A continuación se presentan los estándares evaluables de 4ºESO.

Estándares de aprendizaje evaluables 4ºESO enseñanzas Aplicadas
1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional, asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial.
1.3. Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad).
1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores.
1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.
1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, y exponenciales.
2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.
2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.
2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos.
2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión.
2.5. Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.

2. Que el objeto matemático que se elimina requiera un número muy elevado de sesiones para su completa comprensión, es decir, se eliminan objetos que por su naturaleza se presupongan complicados de trabajar con las alumnas del grupo.

Los contenidos a los que se decidió renunciar por completo fueron:

- Ecuación punto pendiente para expresar una recta
- Obtener la ecuación de una recta dados dos puntos por los que pasa

Además, ciertas partes del libro de texto se vieron de forma más práctica, como aplicación en actividades, utilizando ejercicios para la aproximación a las mismas pero dándoles una profundidad inferior a la que se le da en el libro. Estas fueron:

- Tendencia y periodicidad de funciones. Apartado 3 de la unidad 7
- Continuidad de funciones Apartado 4 de la unidad 7. se estudia en gráficos. Se presenta un ejemplo práctico en el que dibujar la función continua no tiene

sentido: “representa en una función en número de personas que hay en tu casa en cada hora del día” No tiene sentido que por unir puntos en algún momento haya 2,5 personas en casa.

- Expresión analítica de situaciones. Apartado 5 de la unidad 7. Se ven únicamente aplicaciones de las funciones lineal y afín.

En resumen, los contenidos que se trabajan quedan modificados de la siguiente manera:

Estándares evaluables de 3º ESO
1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica, interpretándolos dentro de su contexto.
1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.
1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente.
2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto-pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente. <u>para una ecuación explícita dada y transforma una ecuación dada de forma implícita para obtener la ecuación explícita.</u>
2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.
3.1. Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características.
3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

7.3. Análisis cuantitativo de la tipología de adaptaciones aplicadas

En la siguiente tabla se presenta una clasificación de los criterios a los que responden cada una de las adaptaciones realizadas.

ADAPTACIÓN	EPISTÉMICA	COGNITIVA	INTERACCIONAL	MEDIACIONAL	EMOCIONAL	ECOLÓGICA
1. Evaluación inicial online		x				
2. sesiones dialógicas y trabajo colaborativo			x		x	
3. refuerzo, repaso y esquema		x			x	
4. Función cuadrática						x
5. Adaptación de actividades del libro de texto		x				
6. Trabajo TICs				x	x	x
7. Eliminación de contenidos		x		x		

Tabla 7 criterios que motivan cada una de las adaptaciones

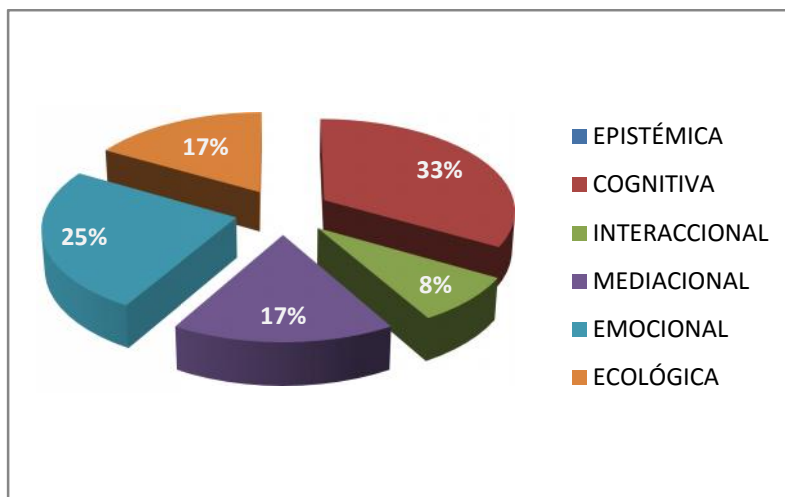


Imagen 15 Clasificación de los criterios de idoneidad que han motivado las adaptaciones

Si se analiza la importancia relativa que se le ha dado a cada criterio atendiendo a la cantidad de adaptaciones que han motivado, vemos que el criterio que ha motivado la mayor parte de éstas es la idoneidad **cognitiva**. No sorprende, ya que estos grupos están dirigidos preferentemente a alumnos que presentan dificultades relevantes de aprendizaje no imputables a falta de estudio o esfuerzo.

Le siguen las adaptaciones para la mejorar la idoneidad **emocional**. Esto es debido a que los alumnos y alumnas de los grupos de PMAR y Diversificación presentan en mayor o menor grado falta de motivación, frustración, baja autoestima, problemas de implicación y trabajo e incluso problemas de actitud fruto, en parte, a sus dificultades de aprendizaje. Por tanto, conseguir enganchar a los alumnos en el trabajo a realizar es un objetivo clave.

Por último las realizadas desde el punto de vista ecológico y mediacional. Éstas no han surgido tanto de la especificidad del grupo como del libro de texto de referencia, ya que son las referidas al trabajo con TICs y a los contenidos sobre funciones cuadráticas.

En último lugar se encuentran las adaptaciones para mejorar la idoneidad interaccional, esto se debe a que aunque poder calibrar el proceso a tiempo real con el *feedback* recibido de las alumnas es fundamental, el hecho de que las clases se den en un grupo pequeño es la gran ventaja de éstos grupos pequeños y por tanto, no requiere adaptaciones extra.

7.4. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista

La tarea o actividad autónoma en este grupo de diversificación tiene una doble función. Por un lado sirve para que las alumnas refuercen y profundicen en los contenidos y por otro para generar una rutina de trabajo. Las alumnas y alumnos de este tipo de grupos presentan generalmente o un perfil de estudiante muy “aplicado” que asiste a clases de refuerzo y estudia a diario, o un perfil de estudiante que estudia sólo la víspera de examen. Para forzar a los alumnos del segundo tipo a repasar lo visto en clase se pone tarea a resolver en casa al menos una vez a la semana.

Además, se le da un peso específico importante a la realización regular de esta, ya que representa el 10% de la calificación final de la evaluación.

Se preparó tarea para todas las semanas y en formatos diversos: fichas, ejercicios del libro y un test online. Las actividades incluidas fueron mayoritariamente ejercicios de repaso.

1. Grafikoki adierazita dauden hurrengo funtzio bakoitzean identifikatu eta idatzi:

- Aldagai askea eta menpeko aldagaia
- Aldagaien unitateak
- Grafikoan abzisa ardatzean eta ordenatu ardatzean erabiltzen diren eskalak
- Definizio eremua
- Gorakor eta beherakorrek diren tarteak.
- Maximo eta minimoak (baldin badaude)

i. 142. orrialdean. Dutzaren grafikoa

Andonik dutxatzeko erabili duen uraren temperatura.

Se pide encontrar las variables, unidades, escalas, el dominio, los tramos crecientes/decrecientes, máx. y mín.

Imagen 16 Ejemplo de ejercicio incluido en una de las fichas de tarea para casa

8 Kalkulatu maldak eta idatzi honako zuzen hauen ekuazioak:

Se pide obtener la expresión analítica de las funciones dadas en forma gráfica

Imagen 17 Ejemplo de ejercicio del libro utilizado para tarea para casa

8. Experimentación

En este capítulo se presentan los cuestionarios realizados por las alumnas del aula de 3º PMAR y los resultados obtenidos en los mismos. Además se realiza un análisis y contraste entre el estudio realizado *a priori* y los resultados realmente obtenidos. El objetivo último será tratar de obtener conclusiones sobre si las adaptaciones realizadas han permitido que las alumnas logren los objetivos buscados, si es posible lograr todos los objetivos del currículo y plantear en el siguiente capítulo posibles alternativas en los casos en los que se concluya que la adaptación realizada no ha resultado exitosa.

8.1. Muestra y diseño de la experimentación

El centro en el que se ha llevado a cabo el estudio objeto de este TFM es un instituto público sito en la zona Norte de Pamplona. Es un centro en el que se imparten todos los niveles de ESO y Bachillerato en modelo D. Al ser docencia íntegra en Euskera, la documentación base de este trabajo está en dicho idioma, aunque el desarrollo y descripción del mismo esté en castellano.

En la clase en la que se ha realizado la experimentación es en la que se ha impartido docencia de manera autónoma durante el Practicum II, es decir el grupo de 3º de ESO del programa PMAR.

En total hay 6 alumnas matriculadas, todas chicas, pero dos de ellas sólo acudieron a clase las primeras semanas del curso. Por tanto, la muestra final la forman 4 alumnas.

El historial académico de las alumnas es bastante homogéneo:

- Han repetido una vez en primaria y otra en ESO
- En 2º de ESO estuvieron en los grupos pequeños o grupos de desdoble, al menos en matemáticas.
- Tienen problemas de aprendizaje de mayor o menor grado.

Hay que indicar que una de las alumnas rechazó su incorporación al grupo PMAR a principio de curso, pero tras suspender todas las asignaturas en la primera evaluación se incorporó al grupo.

8.2. El cuestionario

En la última sesión (sesión 16) se realizó un examen que consta de 6 preguntas.

La metodología que se sigue en el centro en los exámenes es la siguiente: se prepara un cuestionario que en una clase ordinaria podría realizarse en una sesión de 55 minutos, pero se permite a los alumnos utilizar hasta 1h 30 min para su resolución como medida de atención a la diversidad. Esto es posible ya que 3 de las 4 sesiones semanales de asignatura de ámbito científico matemático son de 2 horas.

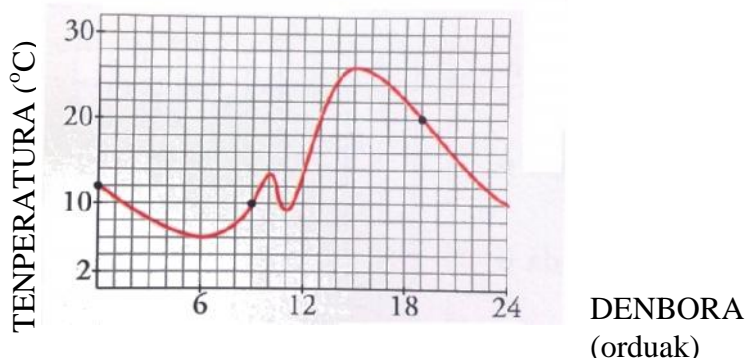
El objetivo del examen es que se apruebe con los conocimientos elementales de los contenidos reflejados en el currículo. Se incluyen ejercicios de dificultad añadida para obtener mejores calificaciones.

El examen consta de 6 preguntas que abarcan los distintos bloques de contenidos de la unidad. Las dos primeras preguntas, que suman un total de 2,75 puntos, versan sobre interpretación de situaciones dadas en forma de gráfico y obtención de sus características. Las 3 siguientes son de representación de funciones, la 3 es una cuestión en la que se deben relacionar diversas expresiones algebraicas y gráficas dadas, y en la 4 y la 5 se deben representar funciones dadas en forma analítica mediante la obtención de tabla de valores y mediante la interpretación obtenida en la fórmula explícita respectivamente. La última pregunta, de 1,75 puntos, se trata de un problema de aplicación de funciones afines a entornos cercanos.

A continuación se presenta el examen y su traducción al castellano.

Pregunta 1. 1,5 puntos

1. Irudian herri baten tenperaturak izan duen bilakaera agertzen da. Aztertu grafikoa eta aurkitu eskatzen dena: 1,50p



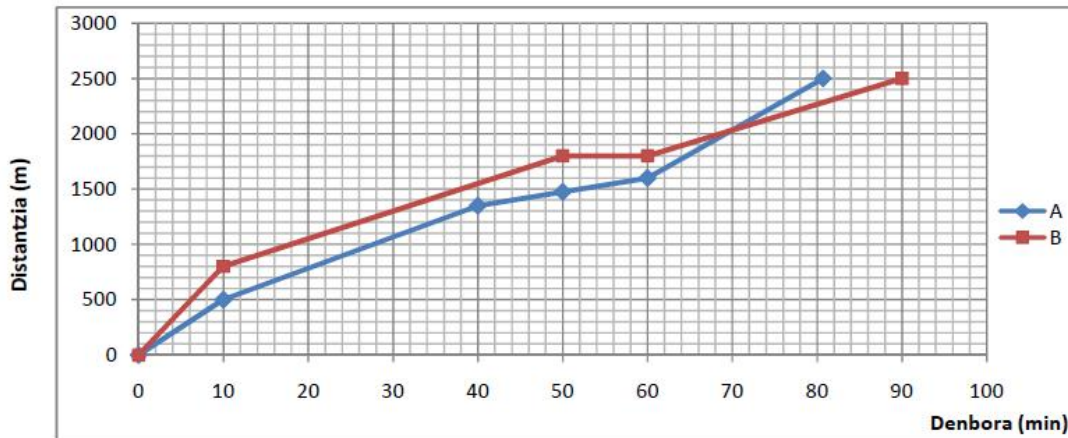
- Aldagaiak eta unitateak:
- Eskalak:
- Definizio eremua:
- Tarte gorakorrak:
- Tarte beherakorrak:
- Maximoak:
- Minimoak:

En la imagen se presenta la evolución de la temperatura de una ciudad a lo largo del tiempo. Estudia la gráfica y obtén lo que se pide.

- Las variables y sus unidades
- Las escalas
- El dominio
- Los tramos crecientes
- Los tramos decrecientes
- Los máximos
- Los mínimos

Pregunta 2. 1,25 puntos

2. Hurrengo grafikoan, A eta B kotxeen arteko lasterketa irudikatzen da. Aztertu irudian agertzen den grafikoa eta erantzun galderari: 1,25p



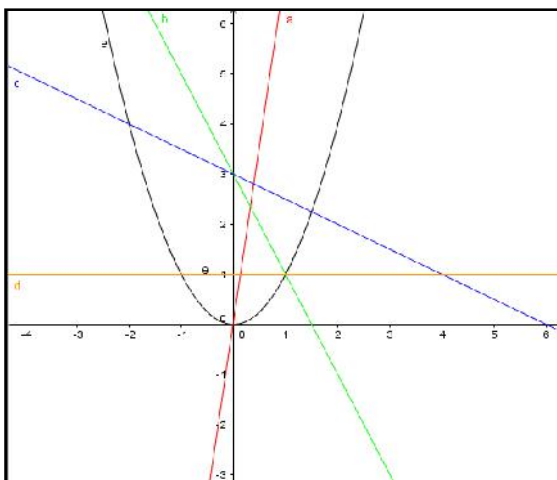
- Zeinek irabazi du lasterketa?
- Zein hasi da azkarrago?
- Aurreratu al du batuk besteari momenturen batean? Esan zeinek aurreratu duen zein eta noiz.
- Zer gertatu da 50 eta 60 minutuen artean?

En el siguiente gráfico se representa la carrera entre los coches A y B. Estudia la gráfica y responde a las siguientes preguntas.

- ¿Quién ha ganado la carrera?
- ¿Quién ha empezado más rápido?
- ¿Ha habido algún adelantamiento? Di quién y cuándo ha adelantado.
- ¿Qué ha pasado entre los minutos 50 y 60?

Pregunta 3. 1 punto

3. Esan grafikoak agertzen diren funtzio bakoitzari zein adierazpen analitikoa dagokion. 1 p



- $y = 1$
- $y = -\frac{1}{2}x + 3$
- $y = -2x + 3$
- $y = x^2$
- $y = 7x$

Indica qué expresión analítica le corresponde a cada una de las funciones representadas gráficamente.

Pregunta 4. 3 puntos.
<p>4. Irudikatu, balio taula lortuz (GUTXIENEZ x-ren 5 balio ezberdin hartu), ondorengo funtzioak. 3 p</p> <p style="text-align: center;"> $a.) y = -6x + 2$ $c.) y = -2x^2$ </p> <p style="text-align: center;"> $b.) y = \frac{2}{3}x - 2$ $d.) y = x^2 - 3$ </p>
<p><i>Representa las siguientes funciones obteniendo su tabla de valores. En la tabla deben tomarse AL MENOS 5 valores diferentes de x.</i></p>
Pregunta 5. 1,5 puntos
<p>5. Irudikatu, balio taula lortuz (GUTXIENEZ x-ren 5 balio ezberdin hartu), ondorengo funtzioak. 1,5p</p> <p style="text-align: center;"> $a.) y = 2x$ </p> <p style="text-align: center;"> $b.) y = -x + 2$ </p> <p style="text-align: center;"> $c.) y = -\frac{1}{2}x - 3$ </p>
<p><i>Representa las siguientes funciones sin obtener la tabla de valores</i></p>
Pregunta 6. 1,75 puntos
<p>6. Txantreako jaietan kontzertu batera joango gara. Sarrerak, 5€ kostatzen ditu eta freskagarri bakoitzak 2,5€. Zenbat diru gastatuko dut edaten ditudan freskagarri kopuruaren arabera? Gehienez 10 freskagarri hartuko ditut. Balio taula lortu, irudikatu grafikoki eta adierazpen analitikoa lortu : 1,75p</p>
<p><i>En las fiestas de la Chantrea vamos a ir a un concierto. La entrada cuesta 5€ y cada refresco 2,50€. ¿Cuánto dinero voy a gastar según la cantidad de refrescos que me beba? Como mucho voy a tomar 10 refrescos. Obtén la tabla de valores, la expresión analítica y represéntalo gráficamente.</i></p>

8.3. Cuestiones y comportamientos esperados

Como se puede ver, el examen abarca todos los contenidos vistos en clase. A continuación se analizarán los resultados esperados en cada una de las preguntas y las razones que hacen pensarlo.

Pregunta 1:

No se esperan problemas. Las escalas utilizadas son números enteros (1 y 2 unidades por cada cuadro). Se ha visto en clase que cuando se debe dividir la unidad y obtener escalas decimales surgen problemas (por ejemplo, si para cada unidad hay 5 cuadros, les cuesta mucho deducir que cada línea del dibujo corresponde a 0,2 unidades de la variable), pero no con la interpretación de escalas de unidades enteras.

Pregunta 2:

Puede que haya errores en la interpretación de que el adelantamiento es el punto en el que se cortan las gráficas (misma distancia en el mismo momento) pero en general lo harán bien porque han demostrado en clase que la comprensión de los fenómenos representados en gráficas no resulta un problema.

En cuanto a explicar qué ha sucedido entre los minutos 50 y 60, apartado d, se espera que los problemas se encuentren en la expresión escrita y la creación de una explicación conexas y coherente. Estas alumnas tienen también dificultades en el ámbito lingüístico.

Pregunta 3:

Algunas alumnas confundirán la expresión gráfica de $y=-1/2x+3$ con la de $y=-2x+3$. Se ha visto que muchas veces cometen errores puntuales calculando la pendiente de rectas y en lugar de colocar en el numerador el incremento de y sitúan el incremento de x .

Pregunta 4:

Los errores que puedan cometer las alumnas en esta pregunta dependerán de los coeficientes de las ecuaciones que representan las funciones de forma analítica. Aquellas funciones con coeficientes que sean números naturales no presentarán problemas, las que tienen coeficientes números enteros negativos serán más propensas al error y con las que la gran mayoría cometerá errores es con la que tiene coeficiente en forma de fracción. Es decir, en orden de menos a más errores tendríamos:

El apartado a) $y=-6x+2$, el apartado d) $y=x^2-3$ y el apartado c) $y=-2x^2-3$. Puede que comenten algún error calculando la tabla de valores, pero se espera que la mayoría los hagan bien.

En cambio se espera que todas o casi todas cometan al menos un error de cálculo resolviendo el apartado b.) $y= 2/3 x -2$. Tal y como se ha analizado en el capítulo 6 es habitual identificar errores operacionales asociados al cálculo con fracciones.

Pregunta 5:

En general no parece que pueda suponer grandes problemas. Quizá de las tres funciones a representar, puede que la función $y=2x$ se represente mal y en su lugar se represente $y=2$ ó $y=1/2x$ por despiste porque al final de la unidad se han trabajado más los problemas y las ecuaciones cuadráticas.

Pregunta 6:

Se trata de la resolución de un problema. En primer lugar puede que el hecho de que el valor de la pendiente sea un número decimal (2,5) complique de partida el ejercicio, pero, al tratarse de una cantidad de dinero, las alumnas pueden modificar la multiplicación de $2,5*2$ por una suma de 2 €y 50 céntimos más 2 €y 50 céntimos, que lo facilita al convertir los números decimales en números naturales.

A parte de esto, se prevé que la obtención de la tabla de valores sea lo más sencillo. La representación de la misma estará bien hecha, salvo errores de cálculo derivados de la utilización de decimales. Por último, donde más errores cometerán será en la obtención

de la expresión analítica, por los motivos explicados en el capítulo 6 y por lo que se ha venido observando en las sesiones de clase.

8.4. Resultados

El tiempo utilizado para la finalización del examen ha sido de entre 1 hora y 15 minutos hasta 1 h 35 min. Por tanto, vemos que efectivamente la extensión del tiempo permitido era necesaria.

En cuanto a las calificaciones obtenidas, tan solo una alumna ha suspendido el examen. Las otras tres presentan resultados variables entre un bien justito a un sobresaliente. En la siguiente tabla se muestran las calificaciones numéricas obtenidas por las alumnas.

apartado:	Interpretación Gráficos				Gráfica-Analítica					Problema		NOTA FINAL
nota máx:	1,5	1,3		2,75	1	3	1,5		5,5	1,75	1,75	
alumna	1	2	total	%	3	4	5	total	%	6		
1	1,4	1,3	2,65	96%	1,00	2,00	0,75	3,75	68%	0	0%	6,4
2	1,3	1	2,25	82%	0,60	2,50	1,00	4,10	75%	1,40	80%	7,75
3	1,3	1,3	2,55	93%	1,00	2,25	1,50	4,75	86%	1,75	100%	9,05
4	1	0,9	1,9	69%	0,60	1,25	1,00	2,85	52%	0	0%	4,75

Tabla 8 Resumen de calificaciones por ejercicios, bloques y nota final obtenida por las alumnas.

Como se puede ver, el bloque en el que mejor resultado se ha obtenido ha sido en el de interpretación de situaciones representadas en forma de gráfico, y en el que peor en la obtención de la función que representa una situación dada. Por ejercicios, los porcentajes de error han sido los siguientes:

		% error	¿Es esperado?
1		0%	
	b	50%	
2	a	0%	
	b	0%	
	c	25%	
	d	50%	sí
3	1, 4,		
	5	0%	
	2, 3	50%	sí
4	a	25%	se esperaba peor
	b	100%	sí
	c	25%	se esperaba peor
	d	0%	
5	a	50%	
	b	0%	
	c	0%	
6	tabla	50%	sí
	graf.	50%	sí
	anal.	50%	sí

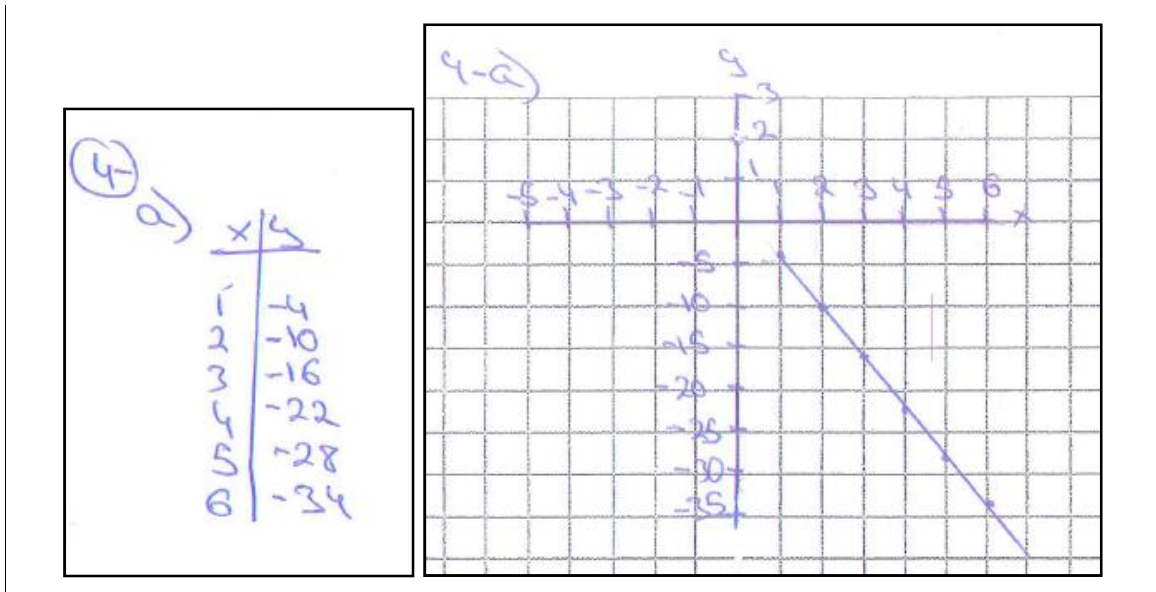
Tabla 9 resultados por preguntas

Como se puede ver, los grandes fracasos han sido los apartados 4b y el problema.

A continuación se presentan ejemplos de la tipología de errores cometidos, comenzado por el más repetido:

ERROR 1
<p>Descripción: Quitar el denominador en las operaciones con números expresados en forma de fracción como si fuera una ecuación.</p>
<p>Cometido por el 100% de la clase al menos una vez.</p>
<p>Ejemplo: En el ejercicio 4. c) representa gráficamente $y = \frac{2}{3}x - 2$. En el extracto de la hoja de cálculos de la alumna se ve cómo, al calcular la imagen para $x=1$ y $x=2$ elimina los numeradores de forma equivocada.</p>

ERROR 2
<p>Descripción: la representación gráfica acaba donde acaba la tabla de valores, puede que no se entienda el dominio.</p>
<p>Cometido por el 50% de la clase.</p>
<p>Ejemplo: En el ejercicio 4. a) representa gráficamente $y = -6x + 2$. La alumna sólo ha utilizado para la tabla de valores números positivos de la variable independiente, posiblemente para evitar problemas con la regla de signos. Al realizar la representación gráfica de la función, solo lo hace para los valores de x de la tabla.</p>



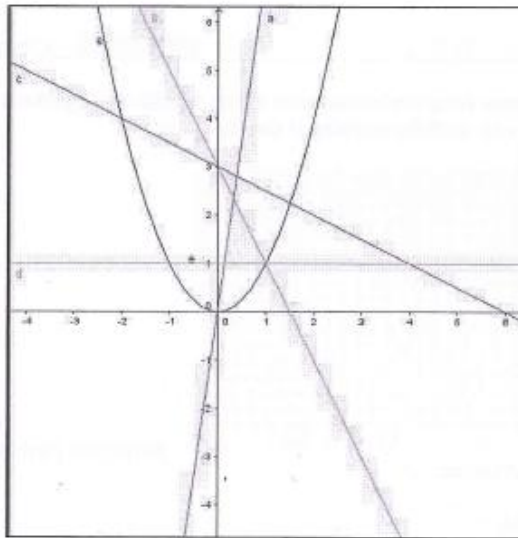
ERROR 3

Descripción: confundir la representación gráfica que corresponde a pendiente 1/2 y con la que tiene pendiente 2.

Cometido por el 50% de la clase.

Ejemplo:

3. Esan grafikoak agertzen diren funtzio bakoitzari zein adierazpen analitikoak dagokion. 1 p



- 1.) $y = 1$ d ✓
- 2.) $y = -\frac{1}{2}x + 3b$ X
- 3.) $y = -2x + 3c$ X
- 4.) $y = x^2$ e ✓
- 5.) $y = 7x$ a ✓

ERROR 4

Descripción: errores de cálculo por aplicar incorrectamente la jerarquía de operaciones.

Cometido por el 25% de la clase.

Ejemplo: para la obtención de la tabla de valores resolviendo el problema, los cálculos a realizar son $y=5+2,5x$, se ve cómo la alumna en la hoja de operaciones en su caso multiplica 7,5 por los valores de x ; es decir, ha hecho los cálculos con $y=(5+2,5)x$

⑥

x	y
0	5
2	$5+2,5 \cdot 2=15$
4	$5+2,5 \cdot 4=30$
6	45
8	59
10	75

Tabla de valores obtenida por la alumna

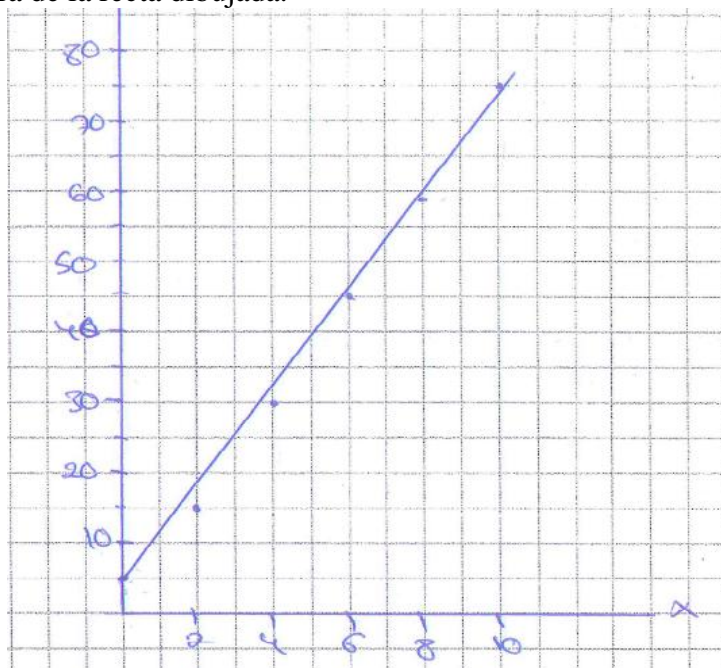
Handwritten calculations showing multiplication errors:

$$\begin{array}{r} 7,5 \\ \times 2 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7,5 \\ \times 4 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7,5 \\ \times 8 \\ \hline 306 \end{array}$$

Imagen de los cálculos realizados donde se ve que multiplica $7,5 \times 2$, $7,5 \times 4$ y $7,5 \times 8$. En la última multiplicación además comete un error al multiplicar 7×8 . Este error se ve reflejado en la representación gráfica, los puntos obtenidos no están alineados y fuera de la recta dibujada.



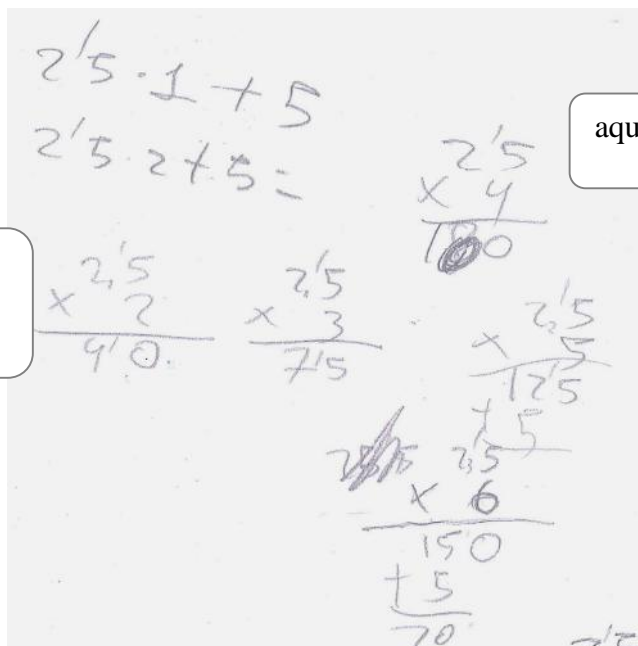
ERROR 5

Descripción: errores de cálculo al operar, sobre todo con números decimales.

El 75% comete al menos una vez errores aritméticos.

Ejemplos: en la obtención de la tabla de valores resolviendo el problema 6 se observar varios errores de cálculo distintos:

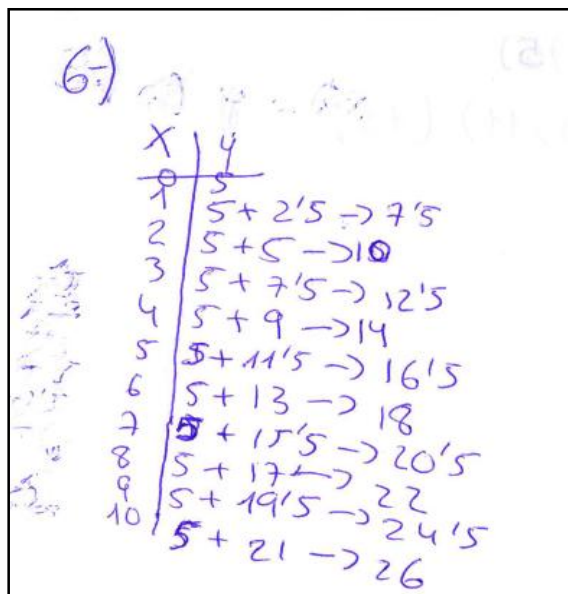
A • Despiste con las llevadas en una multiplicación, el resto de valores los calcula correctamente.



error porque olvida las llevadas

aquí ha corregido el mismo error

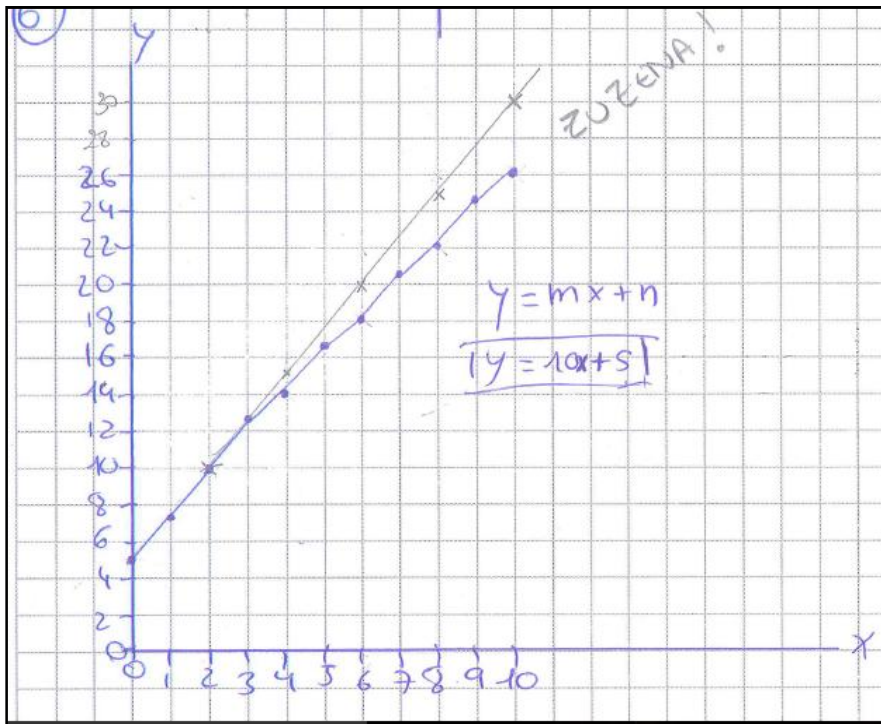
B • Lo resuelve con sumas sucesivas en lugar de multiplicando, pero aunque al sumar un número decimal a uno entero lo hace bien, cuando suma un decimal a otro decimal no, por lo que va arrastrando ese error.



A continuación vemos cómo estos errores se ven trasladados a la representación gráfica.

A • Como el error es en un único valor y une los puntos utilizando una regla, se camufla y la representación es correcta.

B• La alumna une los tres primeros puntos con regla, pero al ver que el resto no cuadran, acaba a mano haciendo una línea poligonal. La diferencia de la función trazada con recta por el profesor y la realizada por la alumna es cada vez mayor al ser un error que se va acumulando



ERROR 6

Descripción: no obtener la expresión analítica que describe la situación dada de forma correcta. Se da por causas variadas, algunas son despistes otros errores de concepto.

El 25% error leve o despiste, el 50% comete errores de concepto.

• obtiene los coeficientes correctamente, pero olvida poner x :

• obtiene la ordenada en origen correctamente, pero no la pendiente

• ninguno de los coeficientes de la expresión es correcto:

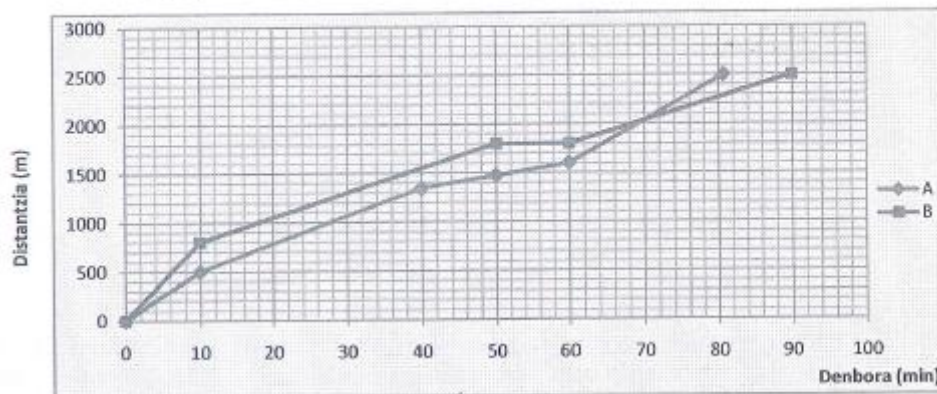
ERROR 7

Descripción: no interpretar el significado del punto de corte de las dos gráficas en la pregunta 2.

Cometido por el 25% de la clase.

Ejemplo:

2. Hurrengo grafikoan, A eta B kotxeen arteko lasterketa irudikatzen da. Aztertu irudian agertzen den grafikoa eta erantzun galderei: 1,25p



A la pregunta de si en algún momento un coche ha adelantado a otro, ha respondido que “entre el 0 y el 10”

ERROR 8

Descripción: cometer errores definiendo los tramos crecientes o decrecientes. Son errores por despiste, no por no comprender el concepto de crecimiento, ya que son aislados y en los extremos. Pueden deberse a errores leyendo la escala.

Cometido por el 75% de la clase.

Ejemplo:

Definizio eremuak: 0tik zurraino ✓
 Tarte gorakorrek: (11, 15) ✓ (7, 10) X
 Tarte beherakorrek: (0, 6) ✓ (10, 12) ✓ (16, 24) X
 d) (6-10) (11-15) ✓
 e) (0-6) (10-12) (15-24) X
 f) 10 eta 15 ✓

8.5. Discusión de los resultados

- El tiempo utilizado para el examen ha sido adecuado, y la elección de los ejercicios parece que también, pues ha permitido a las alumnas demostrar sus conocimientos sin encontrarse con excesivos obstáculos de cálculo. Han cometido errores por despiste, pero éstos dependen más de la concentración de las alumnas que del tipo de preparación de la unidad o de las actividades elegidas para la evaluación.
- Tan sólo una alumna ha suspendido el examen. Se deduce, por tanto, que la simplificación de tipología de ejercicios abarcando los contenidos necesarios ha permitido la adquisición de las herramientas necesarias de forma mayoritaria.
- Si organizamos en una tabla el número de alumnas que han cometido cada uno de los errores tipo y clasificamos éstos en función de su causa probable (por despiste, por conceptos erróneos o por mezcla de ambos) obtenemos la siguiente tabla.

	Despiste	Despiste- concepto	Concepto			
	Error calculo	Pendiente al revés	Grafica dom. incompleto	Error en jerarquía operaciones	Quitar denominador	Expresión analítica mal
ERROR 1					4	
ERROR 2			2			
ERROR 3		2				
ERROR 4				1		
ERROR 5	3					
ERROR 6	1					2
ERROR 7		1				
ERROR 8	3					
	7	3	9			

Tabla 10 frecuencia de errores tipo cometidos

Vemos que los errores más recurrentes, los cometidos de forma extensiva, son los errores de cálculo tanto por despiste como por obstáculos conceptuales. Vemos, por tanto, que la dificultad de la unidad no ha estribado en el concepto de función sino en las herramientas necesarias para operar y transformar éstas.

- Cuando cometen errores puntuales debidos a despistes o errores de cálculo, aunque éstos se reflejen en incoherencias identificables en las representaciones gráficas (funciones afines que no son rectas o puntos que quedan fuera de la recta por ejemplo) no los corrigen. Puede ser porque no sean capaces de identificarlos, o porque no tengan suficiente confianza en sus conocimientos y no estén seguras de que realmente es un error, porque no les dé tiempo a corregir, porque no les parezca que se trata de un error importante o porque “les de igual”.
- La interpretación de gráficas y obtención de sus características se domina. Se ha respondido correctamente al 85% de las cuestiones. Esto permitirá en 4º ESO el estudio de las características de familias de funciones al fijar conceptos como crecimiento, máximos y mínimos relativos, dominio, recorrido.

apartado:	Interpretación Gráficos			
nota máx:	1,5	1,3		2,75
alumna	1	2	total	%
1	1,4	1,3	2,65	96%
2	1,3	1	2,25	82%
3	1,3	1,3	2,55	93%
4	1	0,9	1,9	69%

Promedio global: 85%

Tabla 11 Resultados del bloque de interpretación de gráficos

- El trabajo con números fraccionarios se presenta como uno de los mayores obstáculos. En el ejercicio 4b y en el ejercicio 6, no operar de forma adecuada con números decimales les ha supuesto a las alumnas la pérdida de 2,50 puntos.
- Aunque parecía que iban a cometer errores al realizar cálculos de la tabla de valores con funciones con coeficientes negativos en pregunta 4 a.) $y=-6x+2$ y d.) $y=-2x^2+3$, todas lo han hecho bien.
- Se ha interiorizado bien el efecto de la pendiente negativa (decreciente) y en las cuadráticas el coeficiente de x^2 (convexa). Todas las representaciones son coherentes en este sentido. Puede que esto les haya ayudado, como se pretendía durante la docencia, a identificar los posibles errores por aplicación incorrecta de la regla de signos.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Síntesis / Sintesia

El objeto del presente Trabajo Fin de Máster es estudiar las adaptaciones metodológicas y de materiales que han sido necesarias para la docencia de funciones en el aula del grupo de 3º de ESO del Programa de Mejora del Rendimiento y Aprendizaje (3º PMAR).

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato formando una visión global del marco en el que se enclava el tema de funciones. En la segunda parte del trabajo se analiza un proceso de estudio sobre funciones que se ha puesto en marcha en el aula de un grupo de 3º PMAR en el marco del Practicum II del Máster. El análisis comienza con el estudio de las particularidades de los grupos PMAR y su currículo. Tras esto se expone la programación del proceso detallando y analizando las adaptaciones llevadas a cabo en el mismo así como los criterios que las han motivado. Seguidamente se incluyen el examen realizado por los estudiantes y finalmente se analizan las producciones de éstos así como los errores que han cometido y sus resultados.

Master Amaierako lan honen xedea 3. DBH mailako Ikaskuntza eta Errendimendua Hobetzeko Programetako taldean (3º PMAR) funtzioak gaia emateko metodologia eta materialetan egin beharreko egokitzapenak aztertzea da.

Lana bi ataletan egituratzen da. Lehenengo partea kurrikuloaren eta testu liburuen azterketa longitudinala egiten da Lehen Hezkuntzan, DBHn eta Batxilergoan adierazitako gaiaren gainean, honen testuinguruaren ikuspegi orokorrean kokatzeko. Lanaren bigarren atalean inguruan ikasketa prozesu bat aztertzen da, 3.DBHn gela batean aurrera eramane Masterraren Practicum II aren barruan. Análisis PMAR taldeen eta kurrikuluaren berezitasunen azterketarekin hasten da. Ondoren, ikasketa prozesuaren programazioa eta honen barruan egindako egokitzapenak eta hauen eragileak aurkeztu eta ikertzen dira. Jarraian ikasleek egindako azterketa aurkezten da eta azkenik ikasleen ekoizpenak, akatsak eta emaitzak aztertzen dira.

Conclusiones / Ondorioak

La docencia en los grupos PMAR requiere de numerosas adaptaciones debido a sus especiales características con alumnos con dificultades de aprendizaje, faltos de motivación y autoestima. Los cinco criterios de idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico presentan un sistema de herramientas teóricas sobre la que fundamentar el diseño de estas adaptaciones del proceso de instrucción, de manera que se garantice una idoneidad equilibrada de las distintas dimensiones implicadas (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

Los materiales y libros de texto que se utilizan en el centro tienen como referencia los alumnos de los grupos ordinarios, por lo que presentan en general baja idoneidad cognitiva en referencia a los grupos PMAR. Los ejercicios, problemas y actividades adicionales creados, así como la supresión de ciertos contenidos y actividades del libro han permitido optimizar el trabajo y la comprensión de conceptos de las alumnas. Esto se ve reflejado en que tan sólo hay una reproducción en el examen que muestra incoherencias graves o errores de falta de comprensión de las funciones (una función lineal no representada como una recta). El resto de los errores cometidos tienen su origen en obstáculos previos o en la falta de atención y concentración y no tanto en la interpretación incorrecta de los objetos de la unidad.

El funcionamiento específico de la clase PMAR, fomentando las interacciones alumno-profesor y alumno-alumno, unido al tamaño reducido de este grupo facilitan una atención personalizada que permite identificar y resolver los posibles conflictos, dudas y errores a lo largo de todo el proceso.

En definitiva, la atención personalizada, el refuerzo constante y la repetición de actividades y ejercicios tipo adecuados permiten optimizar la asimilación por comprensión de los contenidos como se refleja tanto en la alta proporción de aprobados como en la tipología de errores cometidos, donde los que prevalecen de forma extensiva son los errores de cálculo o representación debidos a despistes, falta de atención o prisas. De hecho la única alumna que ha suspendido el examen lo ha hecho debido a la gran acumulación de errores de cálculo y faltas de atención.

Es importante resaltar que aún y todo existen obstáculos muy recurrentes que cuesta mucho superar incluso en grupos con atención específica y personalizada como este. Por ejemplo confundir las operaciones con fracciones con la manipulación literal de ecuaciones para obtener otras equivalentes o las dificultades de cálculo con números decimales, errores que han aparecido en todas las alumnas.

Cuestiones abiertas / Galdera irekiak

¿Sería necesario que el departamento de matemáticas creara unos apuntes, fichas u hojas de actividades adaptadas a estos grupos de manera que se homogeneizaran los contenidos trabajados año a año? ¿Es esto útil teniendo en cuenta la diversidad de alumnado que participa en estos grupos, o es inevitable que el profesor adapte todos los años los contenidos al grupo cada año?

¿Es coherente que ya no se hagan adaptaciones curriculares en los grupos con dificultades de aprendizaje? ¿Es realmente posible que alumnos y alumnas con dificultades notables de aprendizaje interioricen todos los contenidos del currículo en el mismo número de horas que los alumnos que no tienen estas dificultades? ¿Es justo exigirles que lo hagan después de admitir que tienen estas dificultades y habilitar para la atención de las mismas un grupo reducido con metodología diferente?

¿Es coherente enviar a estos alumnos a una clase ordinaria de 26-30 personas después de haber admitido que deben cursar, al menos ciertas asignaturas, en grupos reducidos? Recordemos que la mayoría de este tipo de alumnos asistirá a las clases de desdoble de 1º de ESO, a 2º PMAR y 3º PMAR para, posteriormente, incorporarse a 4ºESO ordinario. ¿Cómo van a responder estas alumnas el curso que viene en el aula ordinaria? no van a disponer de atención tan personalizada, les va a suponer un gran hándicap. Ellas ya lo ven así. Cuando se les pregunta sobre las ventajas de PMAR todas responden que “entienden mejor porque el profesor puede atenderles mejor” y que “en el grupo grande hay 15 personas hablando a la vez y así no me entero”.

¿Podría la utilización de calculadora ayudar a que las operaciones con fracciones o números decimales no sean un obstáculo en la adquisición de conocimientos y en la resolución de problemas? Si se utiliza la calculadora de forma masiva, ¿existe riesgo de que las alumnas pierdan la capacidad de estimar resultados, que no sean capaces de conocer el orden de magnitud de los resultados que deberían obtener? Esto podría verse reflejado en que no tengan herramientas para poder regular el resultado que la calculadora ofrece, y por tanto, en que no podrían identificar posibles errores en la introducción de datos o errores en la sintaxis al introducir las operaciones.

Referencias

Legislación:

- Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria, BOE núm. 293.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.
- Decreto Foral 24/2015 de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad Foral de Navarra. (transposición de la LOMCE)
- Orden Foral 54/2015 de 22 de mayo de 2015, por la que se regulan los Programas de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento en la Educación Secundaria Obligatoria en los centros educativos de la Comunidad Foral de Navarra. (transposición de la LOMCE)
- Decreto Foral 24/2015 de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra. (transposición de la LOMCE)
- Decreto Foral 25/2007 de 19 de marzo, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad Foral de Navarra. (LOGSE)
- Orden Foral 169/2007 de 23 de octubre, por la que se regulan los programas de diversificación curricular de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra.

Bibliografía:

- Godino, J.D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis Ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.
- Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada.
- Godino, J.C., Bencomo, D., Font, V. Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas.

Anexo 1. Currículo y contenidos 3ºPMAR vs. 3ºESO

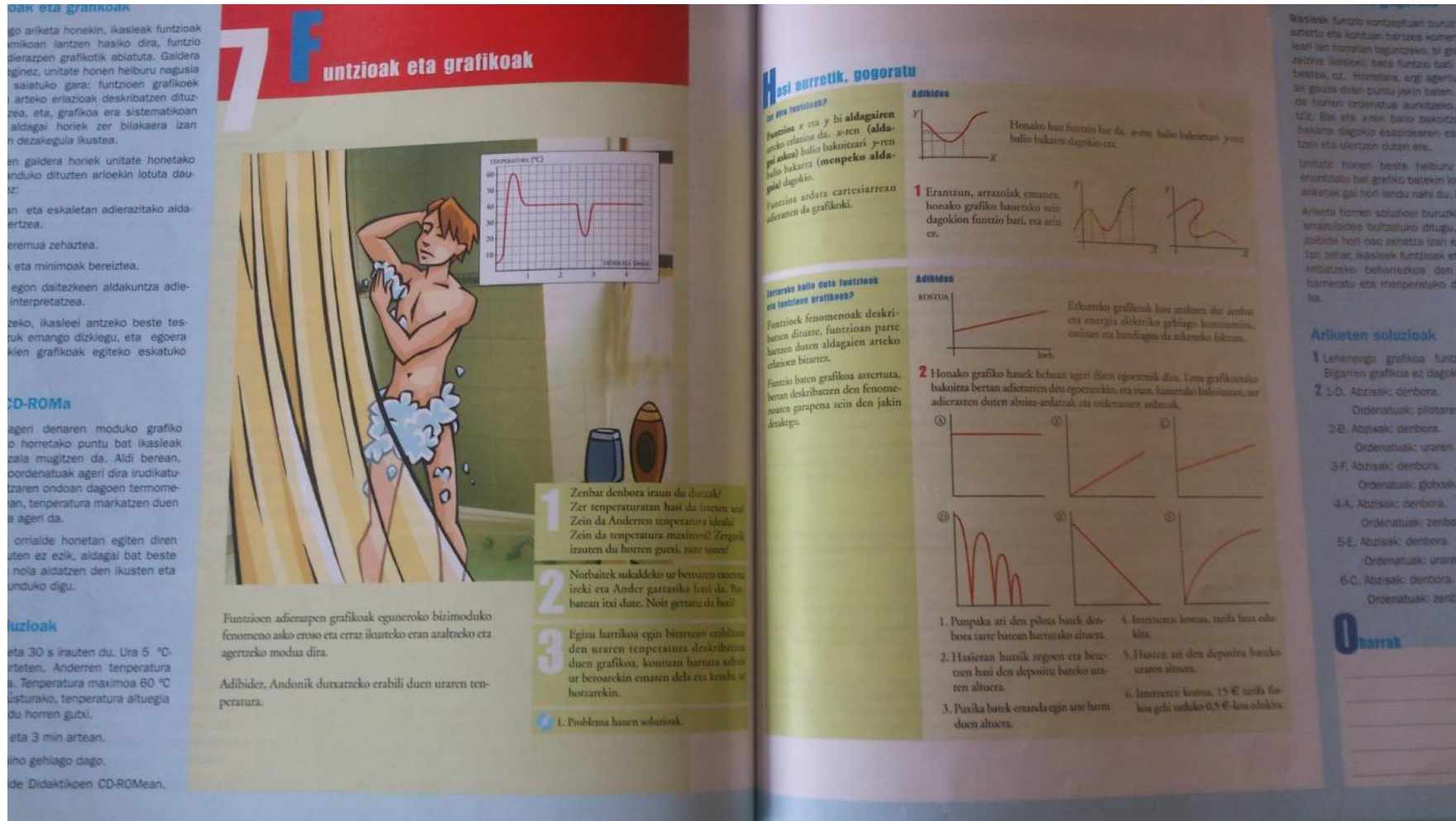
Adaptación de la enseñanza de funciones al grupo de 3º de ESO PMAR

3º ACADÉMICAS		3º APLICADAS		3º PMAR
CONTENIDOS	CRITERIOS	ESTANDARES	ESTANDARES	ESTANDARES (igual que aplicadas)
<p>Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.</p> <p>Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.</p> <p>Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.</p> <p>Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.</p> <p>Expresiones de la ecuación de la recta.</p> <p>Funciones cuadráticas. Representación gráfica.</p> <p>Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.</p>	<p>1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.</p> <p>2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.</p> <p>3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.</p>	<p>1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de Problemas contextualizados a gráficas.</p> <p>1.2. Identifica las características más relevantes De una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.</p> <p>1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.</p> <p>1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.</p> <p>2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.</p> <p>2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.</p> <p>2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.</p> <p>3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.</p> <p>3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.</p>	<p>1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.</p> <p>1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica, interpretándolos dentro de su contexto.</p> <p>1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.</p> <p>1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente.</p> <p>2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto-pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente.</p> <p>2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.</p> <p>3.1. Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características.</p> <p>3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.</p>	<p>1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.</p> <p>1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica, interpretándolos dentro de su contexto.</p> <p>1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.</p> <p>1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente.</p> <p>2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto-pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente.</p> <p>2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.</p> <p>3.1. Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características.</p> <p>3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.</p>

3ºDIVER	4ºDIVER	4ºAPLICADAS	
<p>- CONTENIDOS ADAPTADOS PARA DESARROLLAR COMPETENCIAS: El objetivo del programa es que los alumnos obtengan el título de ESO. Para se establece que el criterio aplicable para la superación de los cursos es que los alumnos alcancen los objetivos y competencias básicas de la etapa. El currículo del programa no se desarrolla, por tanto, en contenidos y criterios de evaluación. Se optó por presentar un currículo único para los dos grupos que define las competencias básicas necesarias, agrupa los contenidos, destrezas y actitudes mínimas del currículo necesarias para desarrollarlas cada una de ellas y establece unos criterios de evaluación de las mismas.</p>	<p>Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.</p>	<p>1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. 2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.</p>	<p>1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional, asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas. 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial. 1.3. Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad). 1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores. 1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. 1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, y exponenciales. 2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. 2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos. 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión. 2.5. Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.</p>

Anexo 2. Libro de texto base utilizado

UNIDAD 7. FUNCIONES

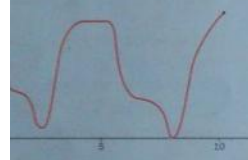


etabulatuari buruzko abiurak
 Hainbat problema batzuk emaitzatu bati aburak grafiko bat erabili da eta ondoren berri berritasun aburak grafiko puztean buru hain hain diren buruzko abiurak erabili dira. zati berritasun aburak eta aburak aburak, ber aburak berri berritasun aburak eta ber aburak erabili ber.

Hain aburak buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

Hain buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

eten soluzioak
 10 m.ra,
 0 m.ra,
 0 m.ra,
 minutura,
 minutu,
 0 m.ra,
 minutu.
 zteko abiadura = 45 m/min
 dez:



rak

1 Funtzioak eta grafikoak



Hainbat tiki bati buru bati buruzko abiurak da.
 Hainbat tiki, buru bati buruzko abiurak da. buru bati buruzko abiurak da. buru bati buruzko abiurak da. buru bati buruzko abiurak da. buru bati buruzko abiurak da. buru bati buruzko abiurak da.

BI ABURAK, BI ABURAK
 Aburak buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

ERKALAK
 Aburak buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

DEFINIZIO EREMUA
 Grafiko honet 0-18 zati hartzen du. Denbora tarte horretan baino ez dauka buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

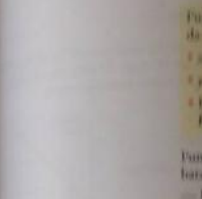
Ariketak

1 Aurreko grafiko kootan harruta, erantzer:
 a) Zer alucratan dago hana?
 b) Zer alucratan egon da buruzko abiurak, begira hana buruzko abiurak buruzko abiurak da.
 c) Zer alucratatik izani buruzko abiurak buruzko abiurak da?
 d) Zer unetan buruzko abiurak buruzko abiurak da?
 e) Zentat buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da.

f) Zer alucratan egon da buruzko abiurak buruzko abiurak da?
 g) Buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da.

2 Deskribat buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

7



Definizioak
 Funtzio bat buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

1 **aburak** aburak da buruzko abiurak buruzko abiurak da.
 2 **aburak** aburak da buruzko abiurak buruzko abiurak da.
 3 **aburak** aburak da buruzko abiurak buruzko abiurak da.

ADIERAZPEN GRAFIKUA
 Funtzio baten buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

• Aburak buruzko abiurak buruzko abiurak da.
 — x aburak buruzko abiurak buruzko abiurak da.
 — y aburak buruzko abiurak buruzko abiurak da.

• Grafiko buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

• Aburak buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

Ariketak

1 Hainbat buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

a) Buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

b) Grafiko buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

c) Buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

d) Aburak buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

2 Sendatu buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

Metodologiari buruzko abiurak

Hainbat buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

Hain buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

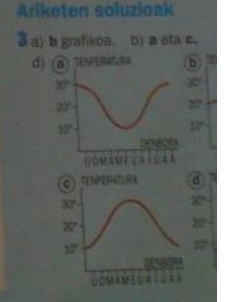
Hain buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

Irakleen CD-ROMa

2. B. iraketa. Buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.

Sentodu eta zabaldu

Iraketa buruzko abiurak buruzko abiurak da buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da. buruzko abiurak buruzko abiurak da.



Metodologiari buruzko oharrak

Atal honetan, grafiko baten deskribapen eta interpretazioari dagokion alderirik garrantzitsuenetako bat aztertuko dugu: hazkundera eta bukiagotzea, eta maximoak eta minimoak.

Ikasle askoren kasuan, funtzio baten hazkunderaren esanahi grafikoa azpimarratzea komeni izango da, eta honako hau azalduko diegu: ardatz horizontalaren gainean ezkerretik eskulera joatean, ardatz bertikalean behetik gora goazela. Gauza bera egingo dugu tarte behekorrekin eta konstanteekin.

Orokorrean, funtzio bat gorakorra izan daiteke tarte batzuetan, eta beherakorra edo konstantea beste batzuetan. Identifikatzeko eta esanahi azaltzeko, kontuan hartu behar dugu ikasleek ez dakitela oraindik tartearen kontzeptua eta notazioa erabiltzen. Beraz, aztertzen ari gareen funtzioari dagokion hizketa erabiliko dugu beti. Adibidez, presio atmosferikoaren aldakuntzari buruzko grafikoan, hau esan behar dugu: *presioa gorakorra da lehenengo hiru egunetan, eta beherakorra, 3. egunetik 10.enera.*

Oharrak

2 Funtzio baten aldakuntzak

Gorakorrek eta beherakorrek

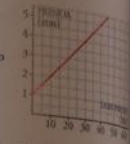


Uretan sartzen garenean, presioa modu uniformean handiagoz da. Gainazalean, presioa atmosferikoa da (1 atm). Zenbat eta sakonago joan, 10 m-tik 10 m-ra presioa atmosfera bat (1 atm) handiagoz da.

Alboko grafikoak funtzio honi dagokio:

ur barruko sakonera → *presioa*

Funtzio hau gorakorra da, zenbat eta sakonago presioa orduan eta gorago doa eta.

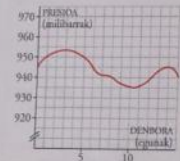
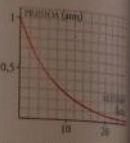


Atmosferaren presioa, berriz, itsasoaren mailaren gainetik zenbat eta gero egon, orduan eta txikiagoa da. Baina ez da era uniformean txikiagoz: hasieran gero baino azkarrago txikiagoz da.

Alboko grafikoak funtzio honi dagokio:

itsasoaren mailaren gaineko altuera → *presioa*

Funtzio hau beherakorra da, zenbat eta altuago egon, orduan eta presio gutxiago dago eta.

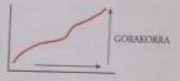


Leku batean atmosferaren presioa aldatzeko eguraldian aldaketak egingo diren iragaritzen du (horregatik esaten da *parte meteorologikoa, gai-presioen sentena, lebara*, etab.).

Ezkerreko grafikoak leku jakin batean, une bakoitzean eta 15 eguneko tarte batean atmosferiko egon den erakusten digu. Funtzio honi dagokio:

aldiunera → *presioa*

Funtzioa zati batzuetan gorakorra da, eta beste batzuetan, beherakorra.



Funtzio baten aldakuntzak aztertzeko, *grafikoari ezkerretik eskuera begira behar diegu*; hau da, *x* handiagoz denean *y* nola aldatzen den aztertzea behar dugu.

Funtzioa gorakorra da, *x* aldagai aska handiagoz denean, *y* merpeko aldagaiak ere handiagoz bada.

Funtzioa beherakorra da, *x* handiagoz denean, *y* txikiagoz egingo bada.

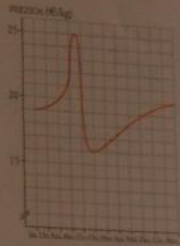
Horiez gain, funtzio baten zati bat gorakorra edo beherakorra dela ere azal dezakegu.

Maximoak eta minimoak

Alboko grafiko horiek atzemanaz ikasleak urte betean (irailtik abuztuaren amaierara) izan duen prezioa erakusten du. Funtzio honi dagokio:

denbora → *prezioa*

Grafikoan zati gorakorra ageri da irailtik abuztara arte. Hortik aurrera, zati beherakorra bat dago, urtarrilaren onaldetik arte, eta gero berriro gorakorra egingo da apurka-apurka, abuztuaren amaiera arte. Argi eta garbi ikusten dugu 25 €/kg-ko maximo bat, abuztuaren erdialdea, eta 16 €/kg-ko minimo bat, urtarrilaren amaierara.



Funtzio bateko puntu baten orientazio inguruko puntuen ordenamendua baino handiagoz denean, funtzioak puntu horretan maximo bat duakala esaten da.

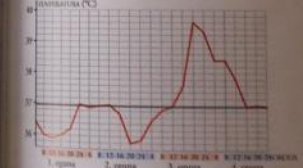
Maximoaren ezkerretara, funtzioa gorakorra da, eta eskuinera, beherakorra.

Funtzio bateko puntu baten orientazio inguruko puntuen ordenamendua baino txikiagoz denean, funtzioak puntu horretan minimo bat duakala esaten da.

Minimoaren ezkerretara, funtzioa beherakorra da, eta eskuinera, gorakorra.

1. zatia

1. Honako grafiko horiek gaixo batek lau egunetan zehar izan duen tenperatura erakusten du:



a) 1. eguneko eguerdiko 12etatik gaueko 12etara, zati gorakorra dago. Deskribatu funtzioa gorakorra den beste zati bat.

3. Sendotuz funtzio gorakorrek eta beherakorrek.

b) Deskribatu funtzioa beherakorra den bi zati.

c) Adierazi minimoa, azaldu zer unetan gertatzen den, eta zer tenperatura duen orduan gaueko.

d) Adierazi maximoa, azaldu zer unetan gertatzen den, eta gaueko tenperatura.

2. Paper koartxikulan marraztutako ardatz orotatuaren adierazi 2-10 tartean definituta dagoen eta zati horretan gorakorra izango den funtzio bat.

3. Adierazi 0-12 tartean definituta dagoen funtzio bat, minimoa (3, 2) puntuan izango dena, eta maximoa, (7, 8) puntuan. Deskribatu zati gorakorra bat eta zati beherakorra bat.

Metodologiari buruzko oharrak

Hasierak ez dute aparteko zailtasunik. Maximoen eta minimoen esanahiaren ulertzea ez da zehin diran beretzeko ere.

Irakasketa egoki ikusten bada, hainbat maximo minimo dituen funtzioaren baten atal proposatuko dugu esaterako, 1,44 cm zeluztutik ageri den arrainaren hegale funtzioaren modukoa den bat.

Normala da hasierak hainbat geratzen kontzeptu hori definitzean zehazten ez testierek, mutur erlatiboak aipatuko dituzten eta zer erlatibo dagoen aztertzen ari garen funtzioari eta eskuinera eta ezkerretara egingo diren hazkunderaren edota txikiagotzearen kontzeptuak.

Ikasleek CD-ROMa

3. Bi arraketa. Arraketa bakoitzean prezioa baten pisuak denboran zehar duen bilakaera deskribatzen duen erlatiboa da, eta hainbat galdara eg dezake. Tarte batzuetan dauden ekuazioak dira, eta beste batzuk, maximoaren modu jakapen eta deskribapenera.

Sendotuz eta zabaltuz

Hasierakoak sendotzeko eta zabaltzeko moduko arraketa 3. koadromoan ageri da. Bi arraketa hauek egites gomendatzen.

Sendotuz: 4. eta 5. orrialdeetako 2. eta 3. arraketa.

Zabaltuz: 5. orrialdeko 4. eta 5. arraketa.

Ariketen soluzioak

- 1 a) 2. eguneko 20:00etatik, 20:00etara.
- b) 2. eguneko 12:00etatik, 20:00etara.
- c) 3. eguneko 20:00etatik, 16:00etara.
- d) 3. eguneko 20:00, 39,6 °C.
- e) 2. eguneko 20:00, 35,8 °C.
- 2 Erantzun bat baino gehiago dago. Begiratu Baliabide Didaktikoen.
- 3 Erantzun bat baino gehiago dago. Begiratu Baliabide Didaktikoen.

Metodologiari buruzko oharrak

Atari honen helburua hau da: grafikoen zehaztutarik ageri den tartetik harago joan eta ikasleak funtzio baten jokabidea zein den jakiteko eta deskribatzeko gai izatea.

Eta gaitza izatea hainbat kasutan: menpeko aldagaiak balio jakin baterantz jotzen duenean, infiniturantz hazten zein bekiagotzen duenean, bai eta modu periodikoan jokatzen duenean ere. Deskribapena ahoz egin behar dute, funtzioan parte hartzen duten aldagaien esanahia aipatuz.

Ikasleen CD-ROMa

4. Funtzio periodiko baten periodoarekin lotuta dauden gaitzera baturik egiten dira.

Sendotu eta zabaldu

Ikasitakoak sendotzeko eta zabaltzeko, MATEMATIKO ARKETAK 3. koadernoan ageri diren honako ariketa hauek egitea gomendatzen dugu:

Sendotu: 6. orrialdeko 1., 2. eta 3. ariketak.
Zabaldu: 7. orrialdeko 4., 5. eta 6. ariketak.

Ariketen soluzioak

1

2 a) 10 cm b) Bai, gorakorra da.
c) Landareak 55 cm-ko altuera du, gutxi gorabehera.

Oharrak

3 Funtzio baten joerak

Funtzioaren jokabidea epa luzera

Ur irakinetan beteta dagoen lapikoaren hozten utzi dugu 20 °C-erain dagoen gela batean. Eskerreko grafikoa funtzio hau adierazten du:

denbora → temperatura

Argi dago: denborak aurrera egin ahala, uraren tenperatura gutxiago izango da, 20 °C-tik, gero eta hurbilago egingo da. Ura tenperatura gutxiago izango du, 20 °C-erain jotzen duela esango dugu.

Kasu horietan, funtzioaren zati bat baino ezagutu ez arren, zuzenki jakin daiteke funtzioak nola jokatuko duen ikertu dugu tenperatura, eta gero zati adarrek dirudiko.

Periodikotasuna

Batuetan, kurbaren zati bat bakarrik ezagutzen badugu, funtzioaren horretatik kanpo zelan jokatzen duen jakin dezakegu.

Eskerreko grafikoa azkeneko bi mendeetan Halley kometatik Egunakotara gertatzen den distantzia deskribatzen du.

Funtzioa hau da: *denbora → Egunakotara distantzia*

Orbita berrin eta berriro errepikatzen den 76 urteko 76 urteko, funtzioa errepikatzen egingo da denbora tarte horretan. Periodoa 76 urtekoa da funtzioaren periodikoa da.

Funtzio periodikoak aldagai azkark tartek jakin bat eta tartek berrin berrin errepikatzen joera duten funtzioak dira. Tartek horien luzerak periodikoak dira.

Funtzio periodiko bat eraz zehazten da, periodo batzuk ter jokabide jakin jakinda.

Ariketa

1 Ansa bat semea zirkulu-maldikoetan zelan dabilen berrin ari da, 30 s inuzen duen birak bakoitzean, ia ukieraino hurbiloen dira (2 m) eta 24 m-erain urrunen dira. Adierazi anslaren funtzio hau:

denbora → distantzia

Horretarako, hartu honako eskala hauek:
— X' ardatza: 1 laukizko = 5 segundo
— Y' ardatza: 1 laukizko = 2 metro
Adierazi 4 birak dagoen tartea.

4. Sendotu: funtzio periodikoak.

4 Etenak. Jarraitasuna

Funtzioaren jokabidea epa luzera

• Ondargailo-saltzaile baten bilakaera 1.000 €-erain irabazten dira, eta horiek gura, saltzaileko ondargailu bakoitzeko, 50 €. Eskerreko funtzio baten grafikoa dugu:

aldagaitza → bilakaera irabazitak

Aldagai azkark 0, 1, 2, 3, 4... balioekin bakarrik dauka arazoak, baina ez horien tarteko balioekin izan ere, ezin da ondargailuen azkarko kopuru bat saildu. Grafikoa etena da, aldagai azkark sailduko erantzunak da.

• Telefono-dei bati egiteko 30 sentimo balio du, eta diru horietatik 3 minutu hiet egin daitezke. Hortik gora, minutu edo zati bakoitzak 10 sentimo balio ditu. Funtzioa hau da:

irabazpen → kostua

Grafikoa adierazten dituen saildu gogor horiek funtzioaren etenak dirak erakusten dugu.

• Grafikoa honetako mutiko bat 10 eta 16 urte bitartean zehar hazi den adierazten du. Funtzioa hau da:

adina → altuera

Altueraren aldakuntza oso txikia da, ez dago saildu gogorrik. Funtzio jarraitua da.

Funtzio baten etenak ez daukanean, funtzio berrin jarraitua dela esaten dugu. Beraz, grafikoa azkark paper gisatik aldatu gabe marraztu geroa berrin jarraitua da (eskerreko 3. grafikoa).

Funtzio bati tartek berrin jarraitua dela ezan geroa, aahiz eta berrin tartek batuetan etenak izan.

Ariketa

1 Fotokopia bati egiteko 0,10 € balio du. Adierazi funtzio hau:

fotokopia kopurua → kostua

Leku daitezke puntuak?

2 Eguneko grafikoa saltoki handi bateko apartekoakotako tenperaturaren adierazten ditu.

a) Zehar ordainduko dugu ordubetean egonez gero?

b) Hiza 2 h eta 30 min eginez gero apartekoakotako? Eza 8 h eginez gero?

c) Funtzio jarraitua da?

Metodologiari buruzko oharrak

Orrialde horietan proposaturiko adierak hau lotu nahi dugu: ikasleak ari diren aldagai azkark eta menpeko aldagai dituzketen balioak, horietatik aldagai gura dagoen, funtzio baten zehar puntu a ta, puntu horiek elkarrekin lotu daitezke lotu ezin daitezkeen gertaerak, eta bai ala ez azaltzeko.

Aldagai diskretuko kasuetan, nahiko a zergatik ezin diren puntuak elkarrekin dago argi, berriz, menpeko aldagaiak diren jauzi-etenetan, aldagai azkark denean, kontzeptu hori azaltzeko, eg dira funtzio mailakotuen adierakotak delaren kostua edota apartekoakotak idatzitako euskarrietan sarri ohar hart ten da: jauzi-etenetan mailak elkarre zati berrin berrin bitartez.

Ikasleek argi eta garbi jakin behar o jarraitu grafikoa azkark papere gabe irudikatzen dirakoteguna dela tzeptu hori era formalean landuko ere.

Sendotu eta zabaldu

Ikasitakoak sendotzeko eta zabaltzeko, MATEMATIKO ARKETAK 3. koadernoan ageri diren honako ariketa hauek egitea gomendatzen dugu:

Sendotu: 9. orrialdeko 1. eta 2. ariketak.
Zabaldu: 9. orrialdeko 3. ariketa.

Ariketen soluzioak

1

2 a) Ezer ez.
b) 2 h eta 30 min eginez gero apartekoakotako, eta 8 h eginez gero apartekoakotako.
c) Ez da jarraitua.

UNIDAD 8. LA FUNCIÓN LINEAL

iziltzan, sartutan, ordaintzeko bi an erabaki behar izaten dugu. Eta ist aukeratu baino lehen, erarik den jakin behar dugu; eta, horrekin askearen balioak hartu behar n.

n problema oso egokia da egoera o.

san, bai bestean, 0 eta 60 m³ sumo jakin batzuekin (zuzeneko et ordaindu beharko dugun kalkan zaila izango ikasleentzat. Ez lo izan behar duen lortzea ere izan dadin bi modalitateetan.

t egoeratan kalkulatu eta gero, te adierazpen analitikoak: aurreko erabili duten prozeduraren orla.

behar dugu maila honetako ikas-oraindik tarte kontzeptua eta ezagutzen. Beraz, 2. galderaren teko, aztertzen ari garen funtziogiu erreferentzia: "B tarifa umoa 50 m³-tik gorakoa bada".

-ROMa

skoitzak bidailitako fakturaren ngo diguten funtzioko eta tautzen digu, kontsumituriko ura- tro kubikotan adierazita.

en grafikoan bitartez, bi fun- goen erlazioa ikus dezakegu, alitate bakoitzak zer onura zen diren metro kubikoen batetik gorakoa edota behe-


zioak

0	10	20	40	50	60
5	9	13	21	25	29
0	13	16	22	25	28

de Didaktikoen CD-ROMean eke. Hilean 25 m³-tik gora, hobe da B tarifa kontrata-

8

untzio linealak



1 Osatu honako taula hau koadrernom:

KONTSUMO (m ³)	0	10	20	40	50	60
A TARIFA (€)	5	13				
B TARIFA (€)	10	16				

2 Eraman aurreko taulako datuak grafiko batera, eta erabaki bilieko zer kontsumoak aurrera den hobe B tarifa kontratare.

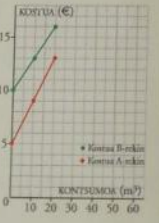
3 A tarifako kostuaren adierazpena $C = 5 + 0,40V$ bada, zein da B tarifako kostuaren adierazpena?

4 Problema hauen soluzioak.

5 Ezte multzo bati ura ematen dion enpresak bi tarifa mota eskaintzen ditu hilean:

A TARIFA
5 € finko, gchi 0,40 €/m³

B TARIFA
10 € finko, gchi 0,30 €/m³



6 **Hasi aurretik, pogoeratu**

7 **Hasi aurretik, pogoeratu**

8 **Hasi aurretik, pogoeratu**

9 **Hasi aurretik, pogoeratu**

10 **Hasi aurretik, pogoeratu**

11 **Hasi aurretik, pogoeratu**

12 **Hasi aurretik, pogoeratu**

13 **Hasi aurretik, pogoeratu**

14 **Hasi aurretik, pogoeratu**

15 **Hasi aurretik, pogoeratu**

16 **Hasi aurretik, pogoeratu**

17 **Hasi aurretik, pogoeratu**

18 **Hasi aurretik, pogoeratu**

19 **Hasi aurretik, pogoeratu**

20 **Hasi aurretik, pogoeratu**

21 **Hasi aurretik, pogoeratu**

22 **Hasi aurretik, pogoeratu**

23 **Hasi aurretik, pogoeratu**

24 **Hasi aurretik, pogoeratu**

25 **Hasi aurretik, pogoeratu**

26 **Hasi aurretik, pogoeratu**

27 **Hasi aurretik, pogoeratu**

28 **Hasi aurretik, pogoeratu**

29 **Hasi aurretik, pogoeratu**

30 **Hasi aurretik, pogoeratu**

31 **Hasi aurretik, pogoeratu**

32 **Hasi aurretik, pogoeratu**

33 **Hasi aurretik, pogoeratu**

34 **Hasi aurretik, pogoeratu**

35 **Hasi aurretik, pogoeratu**

36 **Hasi aurretik, pogoeratu**

37 **Hasi aurretik, pogoeratu**

38 **Hasi aurretik, pogoeratu**

39 **Hasi aurretik, pogoeratu**

40 **Hasi aurretik, pogoeratu**

41 **Hasi aurretik, pogoeratu**

42 **Hasi aurretik, pogoeratu**

43 **Hasi aurretik, pogoeratu**

44 **Hasi aurretik, pogoeratu**

45 **Hasi aurretik, pogoeratu**

46 **Hasi aurretik, pogoeratu**

47 **Hasi aurretik, pogoeratu**

48 **Hasi aurretik, pogoeratu**

49 **Hasi aurretik, pogoeratu**

50 **Hasi aurretik, pogoeratu**

51 **Hasi aurretik, pogoeratu**

52 **Hasi aurretik, pogoeratu**

53 **Hasi aurretik, pogoeratu**

54 **Hasi aurretik, pogoeratu**

55 **Hasi aurretik, pogoeratu**

56 **Hasi aurretik, pogoeratu**

57 **Hasi aurretik, pogoeratu**

58 **Hasi aurretik, pogoeratu**

59 **Hasi aurretik, pogoeratu**

60 **Hasi aurretik, pogoeratu**

61 **Hasi aurretik, pogoeratu**

62 **Hasi aurretik, pogoeratu**

63 **Hasi aurretik, pogoeratu**

64 **Hasi aurretik, pogoeratu**

65 **Hasi aurretik, pogoeratu**

66 **Hasi aurretik, pogoeratu**

67 **Hasi aurretik, pogoeratu**

68 **Hasi aurretik, pogoeratu**

69 **Hasi aurretik, pogoeratu**

70 **Hasi aurretik, pogoeratu**

71 **Hasi aurretik, pogoeratu**

72 **Hasi aurretik, pogoeratu**

73 **Hasi aurretik, pogoeratu**

74 **Hasi aurretik, pogoeratu**

75 **Hasi aurretik, pogoeratu**

76 **Hasi aurretik, pogoeratu**

77 **Hasi aurretik, pogoeratu**

78 **Hasi aurretik, pogoeratu**

79 **Hasi aurretik, pogoeratu**

80 **Hasi aurretik, pogoeratu**

81 **Hasi aurretik, pogoeratu**

82 **Hasi aurretik, pogoeratu**

83 **Hasi aurretik, pogoeratu**

84 **Hasi aurretik, pogoeratu**

85 **Hasi aurretik, pogoeratu**

86 **Hasi aurretik, pogoeratu**

87 **Hasi aurretik, pogoeratu**

88 **Hasi aurretik, pogoeratu**

89 **Hasi aurretik, pogoeratu**

90 **Hasi aurretik, pogoeratu**

91 **Hasi aurretik, pogoeratu**

92 **Hasi aurretik, pogoeratu**

93 **Hasi aurretik, pogoeratu**

94 **Hasi aurretik, pogoeratu**

95 **Hasi aurretik, pogoeratu**

96 **Hasi aurretik, pogoeratu**

97 **Hasi aurretik, pogoeratu**

98 **Hasi aurretik, pogoeratu**

99 **Hasi aurretik, pogoeratu**

100 **Hasi aurretik, pogoeratu**

logian buruzko oharra

$y = mx$ funtzioa aurkezten zaigu altasun zuzeneko erlazioak adieraztat. Oso garrantzitsua da m unitate kostuarekin edo proportzionaltasun-ekin lotzea, eta, horrela, *m* alda definitzea. Gero, maldaren inklinatuko dugu eta inklinazio horretatik aste mald batzuen inklinazio hantxiagoak hartuko ditugu aintzat.

Lehenengo, mald positiboa, osoa da duten zuzenekin egingo dugu, m , mald negatiboa dutenak landuadago horrelako kasu bat orrialde libide ebatzian). Azkenik, maldaren taren hazkunde edo txikiagotzearengi.

$y = mx$ adierazpena koordinatuen bitartean den zuzen batena dela jakin eta gauza izan behar dute zuzenaren grafikoa ikusita, horrelako ekuazioa idazteko. Horretarako, m jakitea, besterik ez dute behar.

ta zabaldu

erabotzeko eta zabalteko, MATEMATIKA 3. koadernoan ageri diren hona-ek egitea gomendatuko diegu:

orrialdeko 1., 2. eta 3. ariketak.
orrialdeko 1., 2., 3. eta 4. ariketak.
orrialdeko 1. eta 2. ariketak.

orrialdeko 5., 6., 7. eta 8. ariketak.
orrialdeko 3. ariketa.

luzioak

baino gehiago dago. (Begratu aktikoen CD-ROMean).

1 $y = mx$ proportzionaltasun-funtzioa



Aldagai biak proportzionalak dituzten funtzioak landuko ditugu. Adibidez: *bateik erositako kuantitatea* → *erositakoaren kostua*
substantzia baten bolumena → *substantzia horren pisua*

Zuzenaren bitartez adierazten diren funtzioak dira, eta antzeko adierazpen analitikoak dute: $y = mx$.

Azter ditzagun eredu hau betetzen duten hiru funtzio: *bolumena* → *kostua*

ESNEA: 1 €/l balio du. Alboko marra berdeak kostua deskribatzen du:

- 1 l → 1 € (1, 1) puntutik igarotzen da.
 - 4 l → 4 € (4, 4) puntutik igarotzen da.
 - y (kostua €-tan) eta x (bolumena l-tan) berdinak dira.
- Ekuazioa: $y = x$

OLIOA: 3 €/l balio du. Alboko marra urdinak kostua deskribatzen du:

- 1 l → 3 € (1, 3) puntutik igarotzen da.
 - 5 l → 15 € (5, 15) puntutik igarotzen da.
 - y (kostua) x -ren (bolumena) hirukoitza da.
- Ekuazioa: $y = 3x$

UR MINERALA: 0,5 €/l balio du. Alboko marra gorriak kostua deskribatzen du:

- 2 l → 1 € (2, 1) puntutik igarotzen da.
 - 10 l → 5 € (10, 5) puntutik igarotzen da.
 - y (kostua) x -ren (bolumena) erdia da.
- Ekuazioa: $y = \frac{1}{2}x$

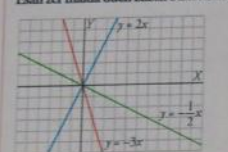
Proportzionaltasun-funtzioak ekuazio hau dauka: $y = mx$.
(0, 0) puntutik igarotzen den zuzen baten bitartez adierazten da.
Proportzionaltasun-konstantea, m (positiboa zein negatiboa izan daiteke), zuzenaren *mald*a esaten zaio, eta inklinazioarekin dauka zerikusia.

Ez ahaztu

Zenbat eta handiagoa izan proportzionaltasun-konstantea, orduan eta handiagoa da zuzenaren mald; hau da, orduan eta inklinatuago dago.

Ariketa ebatzia

Esan zer mald duen zuzen bakoitzak:



- $y = 2x$. (0, 0) eta (1, 2) puntuetatik igarotzen da. Mald 2 da.
 - $y = -\frac{1}{2}x$. (0, 0) eta (2, -1) puntuetatik igarotzen da. Mald $-\frac{1}{2}$ da.
 - $y = -3x$. (0, 0) eta (1, -3) puntuetatik igarotzen da. Mald -3 da.
- Ikus duzunez, zenbat eta balio absolutu handiagoa izan maldak, orduan eta handiagoa da inklinazioa. Mald positiboa bada, zuzena gorakorra da; eta mald negatiboa bada, zuzena beherakorra da.

Ariketak

- Marratzu, ardatz kartesiarretan eta paper koadrikulatuan, jatorritik igarotzen diren lau zuzen: mald positiboa duten bi, eta mald negatiboa duten beste bi.

8 Grafikoa ekuazioetik abiatuta adierazi

Proportzionaltasun-funtzio bat, $y = mx$, adierazteko, honako hau bermatu behar dugu kontuan:

— Zuzen bat da, x -ren aldakuntza berdinean, y -ren aldakuntza berdinean dagoelako eta.

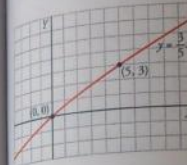
— (0, 0) puntutik igarotzen da, $x = 0$ bada, $y = m \cdot 0 = 0$ da eta.

Beraz, adierazteko beste puntu bat bermatu behar dugu. Eta, horretarako, m -ri adierazten balio emango diegu, eta dagoen y -ren balioa lortuko dugu.

Adibidez, $y = \frac{3}{5}x$ adierazteko, $x = 5$ balioari dagokien puntua lortuko dugu.

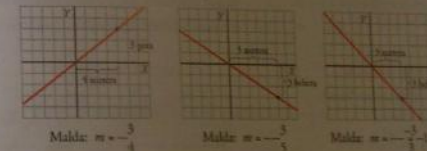
$$y = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$$

(0, 0) eta (5, 3) puntuetatik igarotzen den zuzen bat da.



Ekuazioa, grafikotik abiatuta. Mald kalkulatu

Funtzio baten grafikoa jatorritik igarotzen den zuzen bat bada, orduan, proportzionaltasun-funtzio bat da, $y = mx$. Ekuazioa zein duen zehazteko, m -ren balioa (mald) jakitea baino ez zaigu falta.



Mald: $m = -\frac{3}{4}$ Mald: $m = -\frac{3}{5}$ Mald: $m = -\frac{3}{3} = -1$

Mald (m -ren koefizientea) hau da: x unitate bat handiagotzen denean, y -k izaten duen aldakuntza (positiboa zein negatiboa). Mald jakinik, y -ren aldakuntza x -k bere bi punturen artean daukan aldakuntzarekin zuzen behar da.

Ez ahaztu

Zuzen baten mald, $y = mx$ y bakanak dagoenean x -k duen berdinak da.

Ariketak

- Adierazi honako funtzio hauek:
 - a) $y = x$
 - b) $y = 2x$
 - c) $y = -x$
 - d) $y = -2x$
 - e) $y = \frac{1}{3}x$
 - f) $y = -\frac{1}{3}x$
 - g) $y = \frac{3}{2}x$
 - h) $y = -\frac{3}{2}x$
 - i) $y = \frac{2}{3}x$
2. Sendotu: $y = mx$ proportzionaltasun-funtzioa.
- Esan zein diren honako zuzen baten ekuazioak:
 - 1. Mald 2 duen zuzen bat.
 - 2. Mald $-\frac{1}{2}$ duen zuzen bat.
 - 3. Mald -3 duen zuzen bat.
 - 4. Mald $\frac{1}{2}$ duen zuzen bat.

Metodologiari buruzko

Proportzionaltasuneko funtzioak gogoratu gero (bata garrantzitsua den zuzen bat, adierazteko beste puntu bat jakin behar dugu; eta horretarako, m -ri adierazten balio emango diegu, eta dagoen y -ren balioa lortuko dugu).

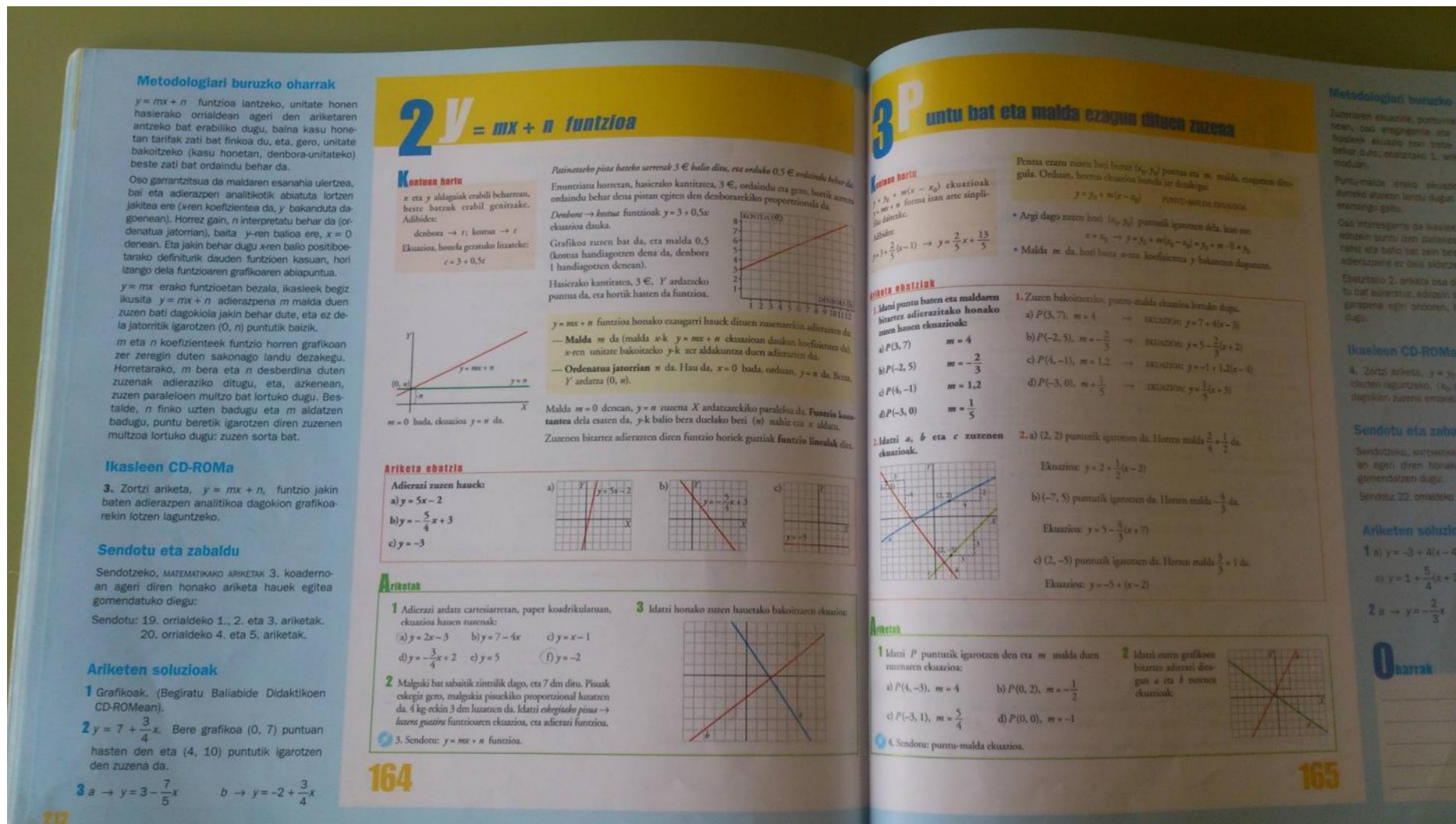
Ikaslearen CD-ROMa

2. Zortzi ariketa, proportzionaltasun-funtzio baten bitartez adierazten diren zuzenaren bitartez adierazteko.

Ariketen soluzioak

- a) $y = x$
 - b) $y = 2x$
 - c) $y = -x$
 - d) $y = -2x$
 - e) $y = \frac{1}{3}x$
 - f) $y = -\frac{1}{3}x$
 - g) $y = \frac{3}{2}x$
 - h) $y = -\frac{3}{2}x$
 - i) $y = \frac{2}{3}x$
- 3 a) $y = (3/4)x$
c) $y = 4x$

Oharra



Metodologiari buruzko oharrrak

Unitate honetako lehen atalean, maldak konzeptua x unitate bat handiagotzen denean y -k izaten duen aldakuntza dela azaldu dugu. Eta maldak lortzeko, nahikoa genuen puntu bat kalkulatzeko; izan ere, $y = mx$ ekuazioa duten zuzen guztiak $(0, 0)$ puntutik igarotzen dira.

Prozesu hori orokortu egingo dugu orain, bi puntu ezagun dituen edozein zuzenerako. Malda hau izango da: y -ren aldakuntzaren (ordenatuen arteko diferentzia) eta x -ren aldakuntzaren (abzisen arteko diferentzia) arteko zatiketaren emaitza.

Maldak kalkulatzeko, ikasleek zalantza izaten dute emandako bi puntu horietatik zein den P_1 eta zein P_2 erabakitzeko. Zenbait egiaztapen eginda, ikasleak erak ordorio honetara iritsiko dira: puntuen ordenak ez duela maldaren balioa aldatzen.

Beste ordorio bat ere aterako dute: puntu-maldak ekuazioa idazteko behar dugun puntua emandako bi puntuetako edozein izan daitekeela, eta zuzenetik hartzen ditugun puntuak beste bi izan daitezkeela, eta horrek ez duela ekuazioa aldatuko.

Emandako bi puntutatik igarotzen den zuzenaren adierazpen grafikoa laguntza ona izango da lortutako maldak irudikatutako zuzenaren inklinazioarekin bat datorren aztertzeko, zeinuan behintzat.

Ikasleen CD-ROMA

5. Lau ariketa daude, bi puntutatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa idazten laguntzeko.

Sendotu eta zabaldu

MATEMATIKARAK ARIKETAK 3, koordenatu ageri diren tonako ariketa hauek egitea gomendatzen lugu:

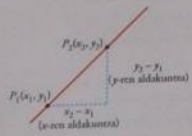
- sendotu: 21. orrialdeko 1. eta 2. ariketak.
- 23. orrialdeko 1. eta 2. ariketak.
- abaldu: 23. orrialdeko 3. ariketa.

Ariketen soluzioak

- a) $y = 5 - \frac{1}{5}(x - 2)$ b) $y = -4 - \frac{3}{5}(x - 3)$
- c) $y = \frac{5}{2}(x + 1)$ d) $y = 1 + \frac{3}{4}(x + 7)$

4

Bi puntutik igarotzen den zuzenaren ekuazioa



Zuzen bati buruz bi puntu ezagutzen baditugu, horren maldak punta horietatik lor dezakegu, eta, gero, maldarekin eta puntuetako batekin, zuzenaren ekuazioa lortu, aurreko orrialdean ikusi dugun moduan.

Maldak lortu, bi puntu jakinda

Bi puntu ezagunetik igarotzen den zuzenaren maldak jakiteko, grafikoki jakin dezakegu, x -ren aldakuntza eta y -ren aldakuntza neurtuz (edo koordenatuak erabiziz).

$$Baina kalkularen bitartez ere lor dezakegu (azkarrago eta errazago):$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ariketa ebazitzak

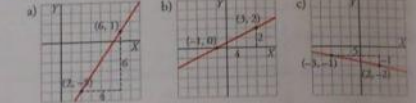
1. Zer maldak da bi punturen bitartez emandako zuzen honen?

- a) $(2, -5)$, $(6, 1)$
- b) $(-1, 0)$, $(3, 2)$
- c) $(-3, -1)$, $(2, -2)$

2. Lortu P eta Q -tik igarotzen den zuzenaren ekuazioa:

- a) $P(5, 3)$, $Q(-3, 4)$
- b) $P(-3, 5)$, $Q(-2, 3)$

1. GRAFIKORAK:



$$m = \frac{6 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$m = \frac{2 - 0}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{-2 - (-1)}{2 - (-3)} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$$

ERAGIKETAK EGITZEA:

a) $m = \frac{1 - (-5)}{6 - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ b) $m = \frac{2 - 0}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c) $m = \frac{-2 - (-1)}{2 - (-3)} = -\frac{1}{5}$

2. a) $m = \frac{4 - 3}{-3 - 5} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8} \rightarrow$ Ekuazioa: $y = 3 - \frac{1}{8}(x - 5)$

b) $m = \frac{3 - 5}{-2 - (-3)} = \frac{-2}{1} = -2 \rightarrow$ Ekuazioa: $y = 5 - 2(x + 3)$

Ariketak

1 Idatzi, kasu hauekako bakoitzeko, P eta Q puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa:

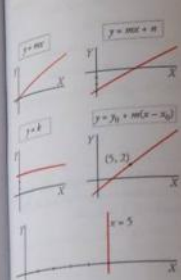
a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ b) $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$ c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$ d) $P(-7, 1)$, $Q(3, -4)$

5. Sendotu: bi puntutatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa.

166

5

Zuzen baten ekuazioaren forma orokorra



Orain arte, zuzen baten ekuazioa emateko soilik modu ikusi dugu. Baina bihurtzen dazunuz, eragiketak egiten, denak forma orokorra lor dezakegu: $ax + by = c$

ERAZTEKIA	Forma orokorra	a , b , c eta x , y balioak
$y = mx$	$y = \frac{1}{2}x$	$a = 3y + 6$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$
$y = mx + n$	$y = \frac{1}{2}x + 3$	$a = 3y + 6$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 6$
$y = k$ (X ardatzarekiko perpendikulara)	$y = 5$	$a = 3y + 6$, $a = 6$, $b = 1$, $c = 3$
$y = kx + m(x - x_0)$	$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 5)$	$3x - 4y = 7$, $a = 3$, $b = -4$, $c = 7$

Y ardatzarekiko perpendikulara duen zuzen baten ekuazioa $x = k$ izango da. Baina zuzen horietan ez dira funtzioak grafikatu, x eta y balio bati gaitzeko ezin direnak.

Eragiketak egiten, zuzen baten ekuazioa emateko, $ax + by = c$ forma larriko dugu. Horietatik ezin dugu zuzenaren ekuazioaren forma orokorra lortu.

$a = 0$ eta $b = 0$ diren bitartean, zuzen Y ardatzarekiko perpendikulara da, eta a dugun funtzio baten grafikoa.

$b = 0$ denean, kasu partikular, zuzen horietatik dugunok. Horien guztian, funtzio lineal zuzen dugu.

Forma orokorraren bitartez emandako zuzen bati adierazpen hori ere emateko:

- Zuzenak bi puntuek hartzen ditu, baldin eta baldin baldin.
- y bakandu, $y = mx + n$ formako adierazpena lortuko.

Ariketa ebazitzak

Adierazi $3x + 4y = 12$. Zer ematen du:

- Balioak emazterik: $x = 0 \rightarrow y = 3$, $(0, 3)$ -tik pasatzen da.
- $x = 4 \rightarrow y = 0$, $(4, 0)$ -tik pasatzen da.
- y bakandu: $y = -\frac{3}{4}x + 3$
- Maldak: $-\frac{3}{4}$ da. x -ren koefizientea da, y bakandua duguneko.

1. Ariketak

1. Adierazi zuzen hauek: a) $2x + 5y = 0$ b) $x - 3y = 6$ c) $3x = 12$ d) $y = 3 - \frac{1}{6}(x + 6)$

2. Sendotu: zuzen baten ekuazioaren forma orokorra.

Metodologiari buruzko oharrrak

Zuzenaren ekuazioaren $ax + by = c$ form larriko ekuazio honetatik ekuazioaren forma orokorra lortzeko, zuzenaren ekuazioa emateko modu ikusi dugu eta.

Ariketa orokorra geratu dugu. OX eta OY zuzen guztietatik zuzen orokorra lortzeko, maldak emateko, $m = 0$ dutez eta OY zuzenaren ekuazioa lortzeko, maldak emateko.

Forma orokorra emateko, bi puntu bati zuzen baten ekuazioa emateko, bi puntu bati zuzen baten ekuazioa emateko, bi puntu bati zuzen baten ekuazioa emateko, bi puntu bati zuzen baten ekuazioa emateko.

Kalkuluaren bitartez emandako zuzen bati adierazpen hori ere emateko, zuzen baten ekuazioaren forma orokorra lortzeko, zuzen baten ekuazioa emateko, zuzen baten ekuazioa emateko.

Ikasleen CD-ROMA

2. Lau ariketa, ekuazioaren forma orokorra emandako zuzen bati laguntzeko.

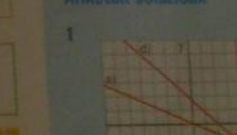
Lau ariketa: bi punturen bitartez igarotzen den zuzenaren ekuazioa idazten laguntzeko.

Sendotu eta zabaldu

Sendotu: 24. orrialdeko 1., 2. eta 3. ariketak.

Zabaldu: 24. orrialdeko 3. ariketa.

Ariketen soluzioak

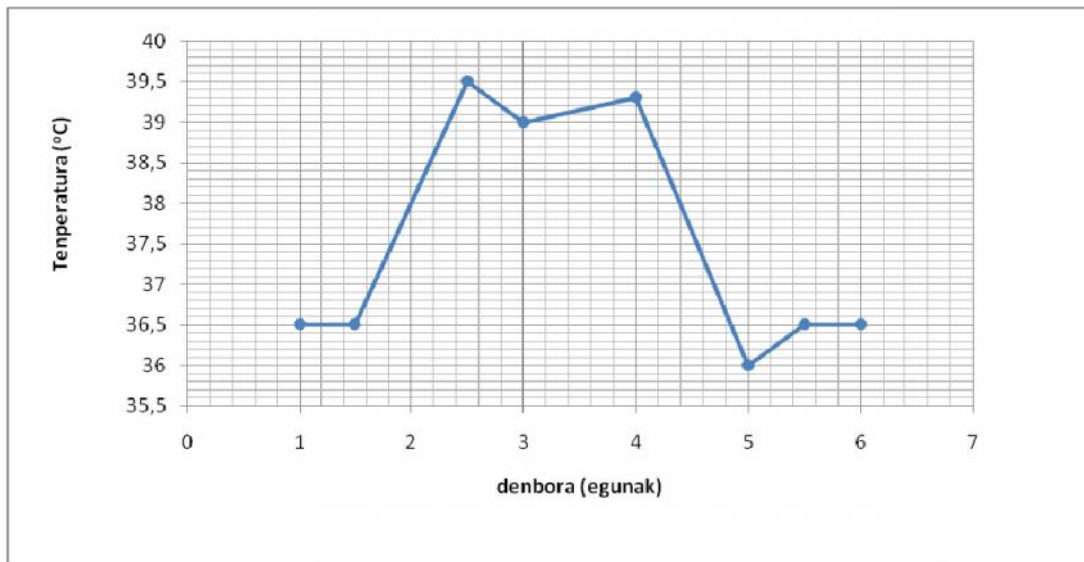


167

Anexo 3. Ejercicios para la sesión de repaso

EJERCICIO 1. Interpretación de gráficos. Creación propia.

Irudian gaixo baten temperaturak izan duen bilakaera agertzen da. Aztertu grafikoa eta aurkitu eskatzen dena:

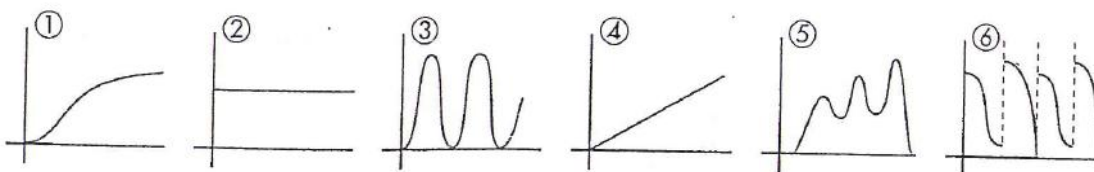


- Aldagaiak eta unitateak:
- Eskalak:
- Definizio eremua:
- Tarte gorakorrak:
- Tarte beherakorrak:
- Maximoak:
- Minimoak:

En la imagen se presenta la evolución de la temperatura de un enfermo. Encuentra: a. Variables y unidades; b. Escalas; c. Dominio; d. Tramos crecientes; e. Tramos decrecientes f. Máximos g. Mínimos

EJERCICIO 2. Unión de gráficos y situaciones.

Lotu esaten dutena irudikatutako grafikoekin. Zein irudi dagokio bakoitzari?

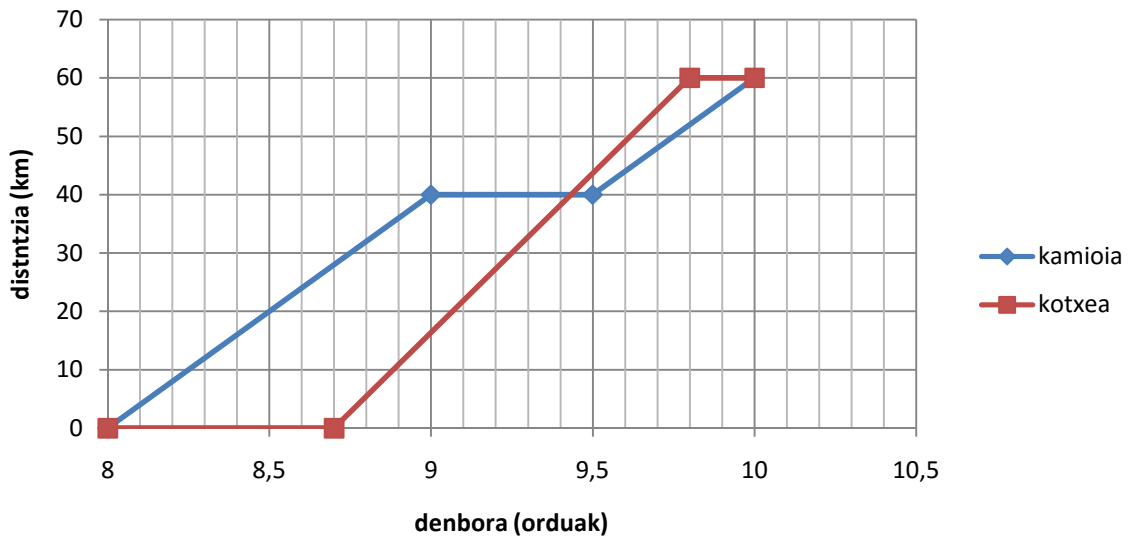


- Azokan laranja erosten ordaintzen dugun dirua
 - DBHko ikasle batek hilean duen dirua. Saria astero ematen diote.
 - mugimenduan dagoen bizikletako gurpilaren balbulatik lurrera dagoen distantzia.
 - mugimenduan dagoen bizikletaren aulkitik lurrerainoko distantzia
 - Eguneko une bakoitzean telebista ikusten dutenen kopurua
- Lo que pagamos por la cantidad de naranjas que compramos
 - El dinero del que dispone un alumno de la ESO al que le dan la paga semanalmente
 - La distancia de la válvula de la rueda de una bici en movimiento al suelo

- d. La distancia del sillín de una bici en movimiento al suelo
- e. Cantidad de personas viendo la televisión a lo largo de un día

EJERCICIO 3. Comparación de gráficos. Elaboración propia

Hurrengo grafikoan, ibilgailu bakoitzak egindako distantzien arteko erlazioa irudikatzen da. Aztertu irudian agertzen den grafikoa eta erantzun galderei:



- e. Zer ordutan abiatu da kotxea?
- f. Zenbat tardatu du kotxeak 60 km egiteko?
- g. Zer ordutan abiatu da kamioia?
- h. Zenbat denbora egon da geldirik kamioia?
- i. Zenbat denbora lehenago iritsi da kotxea?

El gráfico presenta la distancia recorrida por dos vehículos a lo largo del tiempo.

- a. ¿A qué hora ha salido el coche?
- b. ¿Cuánto ha tardado el coche en hacer 60km?
- c. ¿A qué hora ha salido el camión?
- d. ¿Cuánto tiempo ha estado parado el camión?
- e. ¿Cuánto tiempo antes que el camión ha llegado el coche?

EJERCICIO 4. Problema. Elaboración propia

Nire etxeko ur berogailuak 100l ur bero ditu. Txorrota ireki eta minutuko 5 l ateratzen dira. Irudikatu depositoan dagoen ur kopurua pasa den denboraren arabera funtzioa eta lortu bere adierazpen analitikoa

El calentador de mi casa tiene 100l de capacidad. Cuando abro el grifo salen 5 l por segundo. Representa la cantidad de agua que queda en el calentador en función del tiempo de forma gráfica, en tabla de datos y encuentra su expresión analítica.

EJERCICIO 4.2 Problema 39 pág. 174 del libro.

39 ■■■ Automobilen alokairurako agentzia batean, modelo jakin bat alokatzean, 50 € ordaindu behar dira, gehi 0,2 € egindako kilometro bakoitzeko.

Beste agentzia batean, 20 € ordaindu behar dira, eta beste 0,3 € egindako kilometro bakoitzeko.

a) Idatzi, bi kasu horietan, kilometroen araberako gastua ematen digun funtzioaren adierazpen analitikoa.

b) Marraztu ardatz berdinetan aurreko bi funtzioak. (Aukeratu eskala egokia, kilometroak 100etik 100era hartuz).

En una compañía de alquiler de vehículos para alquilar un modelo determinado hay que pagar 50€ más 0,20€ por cada km recorrido. En otra agencia, hay que pagar 20 € más 0,30€ por km recorrido. Dibuja ambas funciones y encuentra las expresiones analíticas.

EJERCICO 5. Representación de funciones obteniendo la tabla de valores.

$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

$$y = -4x + 5$$

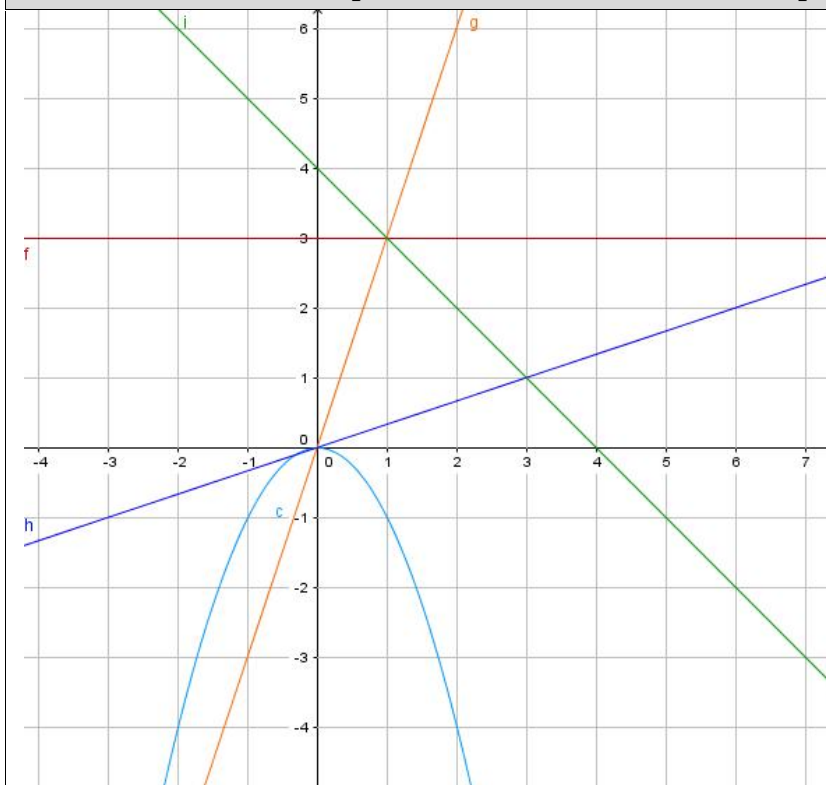
$$y = -2x^2 + 4$$

EJERCICO 6. Representación de funciones con los parámetros de la ecuación.

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{6}{5}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

EJERCICO 7. Obtén la expresión analítica de las funciones representadas gráficamente.



Anexo 4. Test de evaluación inicial y resultados

Adaptación de la enseñanza de funciones al grupo de 3º de ESO PMAR

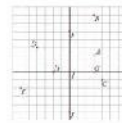


Nombre del cuestionario: 01. koordenatu kartesiarrak
 Pregunta con más respuestas correctas: #1
 Pregunta con menos respuestas correctas: #6

Fecha: 03/18/2016
 Preguntas totales: 7

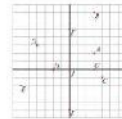
1. A puntuaren koordenatuak dira

- 0/4 A (0,0)
- 0/4 B (2,3)
- 0/4 C (3,3)
- 4/4 D (3,2)



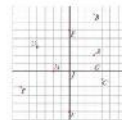
2. B puntuaren koordenatuak dira:

- 1/4 A (7,3)
- 3/4 B (3,7)
- 0/4 C (5,3)
- 0/4 D (3,6)



3. D puntuaren koordenatuak dira

- 2/4 A (4,3)
- 0/4 B (-3,4)
- 0/4 C (1,-3)
- 2/4 D (-4,3)
- 0/4 E (-1,-3)



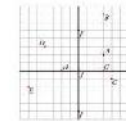
4. I puntuaren koordenatuak dira

- 4/4 A (0,-5)
- 0/4 B (0,5)
- 0/4 C (5,0)
- 0/4 D (-5,0)



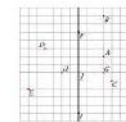
5. H puntuaren koordenatuak dira

- 0/4 A (0,-2)
- 3/4 B (-2,0)
- 0/4 C (2,0)
- 1/4 D (0,2)



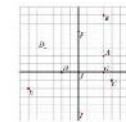
6. E puntuaren koordenatuak dira

- 0/4 A [-6,2]
- 1/4 B [-2,-6]
- 3/4 C [-6,-2]
- 0/4 D (6,-2)



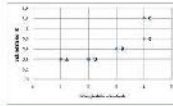
7. C puntuaren koordenatuak dira

- 2/4 A (4, 1)
- 1/4 B (-4,-1)
- 1/4 C (-4,1)
- 0/4 D (4,-1)

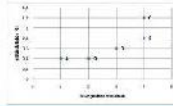


Izaskun Abendaño Zoco

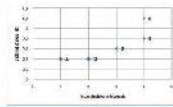
3/4 True
1/4 False



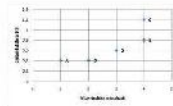
5. Egia ala gezurra da? Carrik Edurnek behar tarifa batzagoa du mugikorreanaka minutuko gehiago ordaindu behar duela.
2/4 True
2/4 False



6. Zeinek ordaintzen du gehiago minutu bakoitzeko, Aitorrek edo Beñatetik?
1/4 Aitorrek
3/4 Beñatetik



7. Zeinek egin du denarik merxena?
4/4 Aitorrek
0/4 Beñatetik
0/4 Carlak
0/4 Danik
0/4 Leirenek

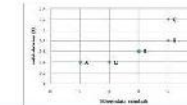


Nombre del cuestionario: 02. Koordinatu kartesiarrek esanahiarekin
Pregunta con más respuestas correctas: #2
Pregunta con menos respuestas correctas: #6

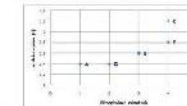
Fecha: 03/18/2016
Preguntas totales: 7

1. Grafikoz, Aitorrek (A), Beñatetik (B), Carlak (C), Danik (D) eta Edurnek (E) egindako telefono deia kopurak agertzen dira. Bakoitzak hitzegin dituen minutuak eta den horregatik ordaindu beharrezko diruak ematen dira. Egia ala gezurra da honako hau: Beñatetik (B) 3 minutu hitzegin dira, eta den horregatik 6,60€ ordaindu beharke dira.

3/4 True
1/4 False

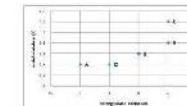


2. Egia ala gezurra da Edurnek (E) 4 minutu hitzegin dituela eta euro 1 ordaindu behar duela?
0/4 True
4/4 False



3. Grafikoz dagokien telefono bakoitzaren hau da:
min E
Aitor 1,0€
Beñatetik 3,0€
Carlak 4,1€
Danik 2,0€
Leirenek 4,0€

Egia ala gezurra?
4/4 True
0/4 False



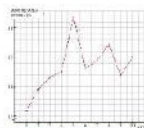
4. Egia ala gezurra da? Carlaren eta Edurneren deia den bera berdina izan dute, baina Carlak gehiago ordaindu behar du.

Adaptación de la enseñanza de funciones al grupo de 3º de ESO PMAR

0/4 J 10

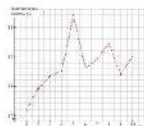
4. Zeln astetan uste duzu nekatur egin zela?

- 0/4 A 4. eta 5. astetean
 1/4 B 4. eta 9. astetean
 3/4 C 6. eta 9. astetean



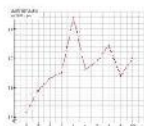
5. Zeln astetik zeln astera hobetu zuen gehiago?

- 4/4 A 4. asteik 5. astera
 0/4 B 7. asteik 8. astera
 0/4 C 9. asteik 10. astera



6. Ondorengo testuak grafikoan agertzen denaren berdina deskribatzen du, egia ala gezurra?
 "Jaurtiketak 1. astetik hasi zen hobetzer 5. asterarte, jaurtiketen luzeera hantziagotzen joan zelako. Bostgarren astetik seiagarrenera, nekatur engatik agian, txarrera jo zuen. Baina 7. eta 8. astetan berriz hobetu zuen."

- 4/4 A EGIA
 0/4 B GEZURRA



Nombre del cuestionario: 03. Funtzioak puntuak

Pregunta con más respuestas correctas: #6

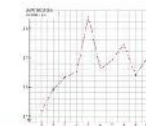
Pregunta con menos respuestas correctas: #1

Fecha: 03/18/2016

Preguntas totales: 6

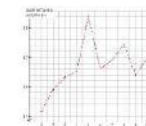
1. Hamar astez jarraian, pisu-jaurtiketarekin batzuk entrena mendentan lortu niko markarik onena zein egin duen aipatatu du. Lortutako emaitzak grafikoan agertzen dira. Zeln aldagailu agertzen dira grafikoan?

- 3/4 A Denbora (astetari) eta jaurtiketa onenaren luzeera (metrotan)
 1/4 B Jaurtiketa kopurua eta jaurtiketen batzabeste-ko luzeera (m)



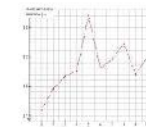
2. Zeln astean egin zuen jaurtiketak hoberena?

- 0/4 A 1
 0/4 B 2
 0/4 C 3
 0/4 D 4
 4/4 E 5
 0/4 F 6
 0/4 G 7
 0/4 H 8
 0/4 I 9
 0/4 J 10



3. Eta zein astean egin zuen jaurtiketak txarrena?

- 4/4 A 1
 0/4 B 2
 0/4 C 3
 0/4 D 4
 0/4 E 5
 0/4 F 6
 0/4 G 7
 0/4 H 8
 0/4 I 9



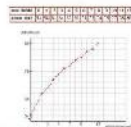


Nombre del cuestionario: 04. Funtziak Tariteak
 Preguntas con más respuestas correctas: #4
 Preguntas con menos respuestas correctas: #6

Fecha: 03/18/2016
 Preguntas totales: 9

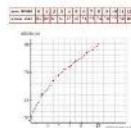
1. Ume baten altuera hila neurtu dugu, jaio zenetik. Emaizak taulan eta grafikoan ikusten dira. Zenbat hilabetez neurtu dugu umearen altuera?

- 0/4 A 5
- 0/4 B 10
- 4/4 C 12



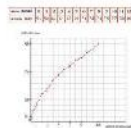
2. Zenbat neurtzen zuen 2 hilabete zituenean?

- 0/4 A 58 cm
- 4/4 B 62 cm
- 0/4 C 64 cm
- 0/4 D 67 cm



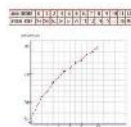
3. Zenbat hilabeteekin neurtu zuen 70 cm baino gehiago lehenengo aldiz?

- 0/4 A 5 hilabeteekin
- 3/4 B 6 hilabeteekin
- 1/4 C 7 hilabeteekin
- 0/4 D 8 hilabeteekin



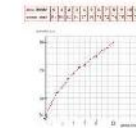
4. Zenbat neurtzen zuen umeak jaio zenean?

- 4/4 A 54 cm
- 0/4 B 80 cm
- 0/4 C ezin dugu jakin



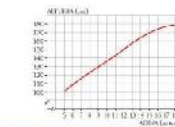
Zenbat neurtzen zuen umeak, gulxi gora behera, lau hilabete eta erdi zituenean?

5. Pentsatu: Zenburu k al du bi puntuen artean zuzen batekin lotzea eta baliokak irakurteaz? Zergatik?
- 1/4 A 64 cm
 - 3/4 B 68 cm
 - 0/4 C 70 cm
 - 0/4 D ezin dugu jakin



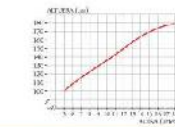
6. Grafikoak Oierrek zenbat neurtzen duen bost urtetik aurrera irucikatzen da. Zenbat hazi zen 5 urteik 9-a?

- 1/4 A 130 cm
- 1/4 B 25 cm
- 2/4 C 30 cm



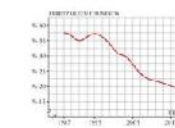
7. Zer espero duzu gertatuko dela 18 urtetik aurrera grafikoak ikusiaz?

- 4/4 A oso gutxi hazi egingo da
- 0/4 B azkar haziko da, orain arte bezala



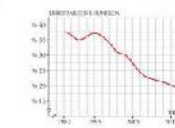
8. Euskal Herrian, grafikoan ikusten den bezela, erretzaleen ehunekoa urtero urtero jeitsi egin da 1991etik hona.

- 2/4 A EGIA
- 2/4 B GEZURRA



9. Euskal Herrian, grafikoan ikusten den bezela, erretzaleen ehunekoa urtero urtero jeitsi egin da 1995etik hona. Hau da, funtzioa 1995-2016 tartean beherakorra da.

- 3/4 A EGIA
- 1/4 B GEZURRA



RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN INICIAL

1. COORDENADAS CARTESIANAS

Student	Total Score (0 - 100)	Number of correct answers	Number of correct answers						
			1	2	3	4	5	6	7
1	43	3	(3,2)	(3,7)	(4,3)	(0,-5)	(0,2)	(-6,-2)	(-4,-1)
2	57	4	(3,2)	(3,7)	(4,3)	(0,-5)	(-2,0)	(-6,-2)	(-4,1)
3	86	6	(3,2)	(3,7)	(-4,3)	(0,-5)	(-2,0)	(-6,-2)	(4,-1)
4	86	6	(3,2)	(7,3)	(-4,3)	(0,-5)	(-2,0)	(-2,-6)	(4,-1)
Class Scoring	67,9%	4,75	100,0%	75,0%	50,0%	100,0%	75,0%	25,0%	50,0%

2. COORDENADAS CARTESIANAS CON CONTEXTO

Student Names	Total Score (0 - 100)	Number of correct answers	Number of correct answers						
			1	2	3	4	5	6	7
1	71	5	True	False	True	True	False	Beñatek	Aitorrek
2	86	6	True	False	True	True	True	Beñatek	Aitorrek
3	100	7	True	False	True	True	True	Aitorrek	Aitorrek
4	43	3	False	False	True	False	False	Beñatek	Aitorrek
Class Scoring	75%	5,25	75%	100%	100%	75%	50%	25%	100%

3. LECTURA DE GRÁFICOS POR PUNTOS

Student Names	Total Score (0 - 100)	Number of correct answers	Number of correct answers					
			1	2	3	4	5	6
4	100	6	Denbora (astetan) eta jaurtiketa onenaren luzeera (metrotan)	5	1	6. eta 9. asteetan	4. astetik 5. astera	EGIA
1	67	4	Jaurtiketa kopurua eta jaurtiketen batzbesteko luzeera (m)	5	1	4. eta 9. asteetan	4. astetik 5. astera	EGIA
2	100	6	Denbora (astetan) eta jaurtiketa onenaren luzeera (metrotan)	5	1	6. eta 9. asteetan	4. astetik 5. astera	EGIA
3	100	6	Denbora (astetan) eta jaurtiketa onenaren luzeera (metrotan)	5	1	6. eta 9. asteetan	4. astetik 5. astera	EGIA
Class Scoring	91,7%	5,50	75%	100%	100%	75%	100%	100%

4. LECTURA DE GRÁFICOS POR TRAMOS

Student Names	Total Score	Number of correct answers	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	89	8	12	62 cm	6 hilabet ekin	54 cm	68 cm	25 cm	oso gutxi hazi egingo da	GEZU RRA	EGIA
1	67	6	12	62 cm	7 hilabet ekin	54 cm	68 cm	30 cm	oso gutxi hazi egingo da	EGIA	GEZU RRA
2	89	8	12	62 cm	6 hilabet ekin	54 cm	68 cm	130 cm	oso gutxi hazi egingo da	GEZU RRA	EGIA
3	78	7	12	62 cm	6 hilabet ekin	54 cm	64 cm	30 cm	oso gutxi hazi egingo da	EGIA	EGIA
Class Scoring	80,6%	7,25	100%	100%	75%	100%	75%	50%	100%	50%	75%

5. INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS, UNIR CON DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN

Student Names	Total Score	Number of correct answers	1	2	3	4	5	6	7
2	71,4	10	6 minutu	5°C	40°C	Ezinezkoa! ez gaude sukaldean eta!	2,4.MIN UTUAN	D	B
1	71,4	10	6 minutu	5°C	40°C	Bai bai! grafikoan begiratzuz jakin dezakegu	2,8	B	B
4	64	9	4 minutu eta 30 segundu	5°C	40°C	Bai bai! grafikoan begiratzuz jakin dezakegu	2min	B	B
3	71,4	10	4 minutu eta 30 segundu	5°C	40°C	Bai bai! grafikoan begiratzuz jakin dezakegu	40 GRADU ETAN.	A	B
Class Scoring	69,6	9,8	50%	100%	100%	75%	0%	0%	100%

Student Names	Total Score	Number of correct answers	8	9	10	11	12	13	14
2	71,4	10	D	D	B	F	A	E	C
1	71,4	10	D	D	B	F	A	F	C
4	64	9	C	D	C	B	A	E	C
3	71,4	10	D	D	B	C, E	A	C	C
Class Scoring	69,6	9,8	75%	100%	75%	50%	100%	50%	100%

6. TOTAL EVALUACIÓN INICIAL

	BIEN	TOTAL	NOTA SOBRE 10	1. COORD CARTESIANAS		2. CON CONTEXTO		3. GRAFICOS	
				BIEN	TOTAL	BIEN	TOTAL	BIEN	TOTAL
1	27	43	6,28	3	7	5	7	4	6
2	34	43	7,91	4	7	6	7	6	6
3	36	43	8,37	6	7	7	7	6	6
4	33	43	7,67	6	7	3	7	6	6

	TOTAL BIEN	TOTAL PREGUNTAS	NOTA SOBRE 10	4. GRAFICOS TRAMOS		5.CONTEXTOS	
				BIEN	TOTAL	BIEN	TOTAL
1	27	43	6,28	6	9	9	14
2	34	43	7,91	8	9	10	14
3	36	43	8,37	7	9	10	14
4	33	43	7,67	8	9	10	14

7. CONCLUSIONES

La estudiante 1 y la 2 deben realizar ejercicios de repaso de coordenadas cartesianas.

En general, saben leer puntos en las gráficas, aunque han cometido fallos puntuales al identificar las escalas.

Son capaces de leer la información global de una situación representada en una gráfica, no tanto de identificar sus características más representativas y detalles en tramos.

Izaskun Abendaño Zoco

Anexo 5. Test para resolver preguntas y utilizarlas como hilo conductor

Adaptación de la enseñanza de funciones al grupo de 3º de ESO PMAR



Nombre del cuestionario: 05. Funtzioak denak batara

Fecha: 03/22/2016

Pregunta con más respuestas correctas: #9

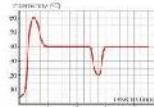
Preguntas totales: 14

Pregunta con menos respuestas correctas: #10

Huntzioen adierazpen grafikoak eguneroko bizimoduko fenomeno ziklo osoa eta eraz ikusteko erabilgarriak dira. Adibidez, pertsona batek dutzatzean erabili duen uraren tenperatura.

1. Aztertu grafikoa eta erantzun. Zenbat ordu iraun du dutzak?

- 0/4 A 4 minutu
- 2/4 B 4 minutu eta 30 segundu
- 2/4 C 5 minutu



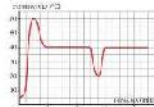
2. Zer tenperaturatan hasi da inoien ura?

- 0/4 A 1°C
- 0/4 B 10°C
- 0/4 C 30°C
- 4/4 D 50°C



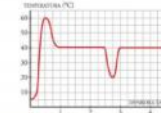
3. Zer tenperaturatan gustoko dutza hartzen ari den pertsonak?

- 0/4 A 60°C
- 0/4 B 70°C
- 4/4 C 40°C
- 0/4 D 50°C



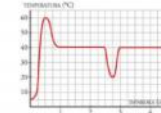
4. Norbaitek sukaldeko ur beroaren txorrola ireki du momentu batean. Dutxa hartzen zegoena garraxi egin du eta batbatean txorrola itxi dute. Noiz gertatu da hori?

- 1/4 A Ezinezkoa! ez gaude sukaldean eta!
- 3/4 B Bai bai! grafikoa begiratu jakin dezakegu
- 0/4 C mmm.....ez nago oso ziur



5. Norbaitek sukaldeko ur beroaren txorrola ireki du momentu batean. Dutxa hartzen zegoena garraxi egin du eta batbatean txorrola itxi dute. Noiz gertatu da hori?

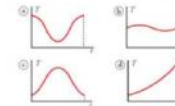
- ~~0/4~~ 2,4 MINUTUAN
- ~~0/4~~ 2,8
- ~~0/4~~ 2min
- ~~0/4~~ 40 GRADUETAN.



Aztertu 4 grafikoa. Bertan, lau hirutako eguneko tenperatura maximoa (T) adierazten da denboraren menpe (t) urte jakin batean.

6. Zein izan daiteke Iruñeko grafikoa?

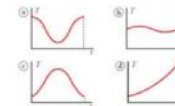
- 1/4 A A
- 2/4 B B
- 0/4 C C
- 1/4 D D



Aztertu 4 grafikoa.

7. Zein hiririk du gorabeherarik txikiena tenperaturan urte batean?

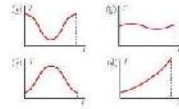
- 0/4 A A
- 4/4 B B
- 0/4 C C
- 0/4 D D



Aztertu 4 grafikoa.

8. Grafikoa batek ez du zentzurik. Zein?

- 0/4 A
- 0/4 B
- 1/4 C
- 3/4 D

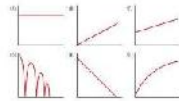


Aztertu grafikoa.

Esan egerra bakoitza zeha grafikoa adierazten den eta, kasu bakoitzean zer adierazten dute abzisa-ardatzak eta ordenatuen ardatzak.

5. 1. Puntako ari de pilota batek denbora barte batean hartutako altuera

- 0/4 A
- 0/4 B
- 0/4 C
- 4/4 D
- 0/4 E
- 0/4 F

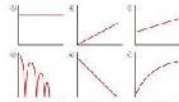


Aztertu grafikoa.

Esan egerra bakoitza zeha grafikoa adierazten den eta, kasu bakoitzean zer adierazten dute abzisa-ardatzak eta ordenatuen ardatzak.

10. 2. Hiesieran hutsik zegoen eta betetzen hasi den depositu bateko uraren altuera.

- 0/4 A
- 3/4 B
- 1/4 C
- 0/4 D
- 0/4 E
- 0/4 F

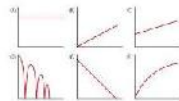


Aztertu grafikoa.

Esan egerra bakoitza zeha grafikoa adierazten den eta, kasu bakoitzean zer adierazten dute abzisa-ardatzak eta ordenatuen ardatzak.

11. 3. Puzika batek eztanda egin arte irortu duen altuera

- 0/4 A
- 1/4 B
- 1/4 C
- 0/4 D
- 1/4 E
- 2/4 F

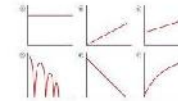


Aztertu grafikoa.

Esan egerra bakoitza zeha grafikoa adierazten den eta, kasu bakoitzean zer adierazten dute abzisa-ardatzak eta ordenatuen ardatzak.

12. 4. Internazkoen kostua, tarifa laua aduk ta

- 4/4 A
- 0/4 B
- 0/4 C
- 0/4 D
- 0/4 E
- 0/4 F

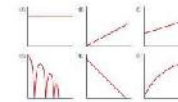


Aztertu grafikoa.

Esan egerra bakoitza zeha grafikoa adierazten den eta, kasu bakoitzean zer adierazten dute abzisa-ardatzak eta ordenatuen ardatzak.

13. 5. Huster ari den depositu bateko uraren altuera

- 0/4 A
- 0/4 B
- 1/4 C
- 0/4 D
- 2/4 E
- 1/4 F

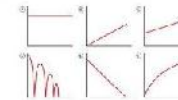


Aztertu grafikoa.

Esan egerra bakoitza zeha grafikoa adierazten den eta, kasu bakoitzean zer adierazten dute abzisa-ardatzak eta ordenatuen ardatzak.

14. 6. Internazkoen kostua, 15€ tarifa finkoa gehi ordutako 0,50€-koa omututa

- 0/4 A
- 0/4 B
- 4/4 C
- 0/4 D
- 0/4 E
- 0/4 F



Adaptación de la enseñanza de funciones al grupo de 3º de ESO PMAR

Anexo 6. Test para tarea de casa. Cuestiones de función lineal y afín

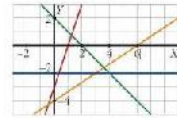


Quiz name: Etzeko lanak motzak
 Question with Most Correct Answers: #3
 Question with Fewest Correct Answers: #1

Date: 04/14/2016
 Total Questions: 15

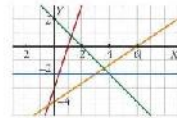
1. Funtzio GORRIAREN adierazpen analitikoa, zein da?

- 0/5 A) $y = -2$
- 1/5 B) $y = 3x - 3$
- 2/5 C) $y = 1/3 x - 3$
- 1/5 D) $y = 2/3 x - 6$
- 1/5 E) $y = 2x$



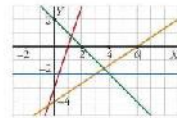
2. Funtzio BERDEAREN adierazpen analitikoa, zein da?

- 1/5 A) $y = -2$
- 0/5 B) $y = 3x - 3$
- 3/5 C) $y = 2x$
- 1/5 D) $y = 2/3 x - 6$



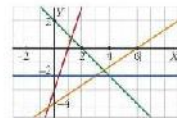
3. Funtzio UZURRIAREN adierazpen analitikoa, zein da?

- 5/5 A) $y = -2$
- 0/5 B) $y = 3x - 3$
- 0/5 C) $y = 2x$
- 0/5 D) $y = 2/3 x - 6$



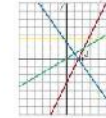
4. Funtzio HORIAREN adierazpen analitikoa, zein da?

- 0/5 A) $y = -2$
- 0/5 B) $y = 3x - 3$
- 0/5 C) $y = 2x$
- 5/5 D) $y = 2/3 x - 6$



5. Irudian dauzen funtzioetatik, zeini dantkie $y = 2x - 3$ adierazpen analitikoa?

- 1/5 A) Urdinari
- 1/5 B) Berdeari
- 3/5 C) Gorriari
- 0/5 D) Horitari



6. Grafikoan agertzen diren funtzioetatik, zeini dagokio $y = 3x + 2$ adierazpen analitikoa?

- 0/5 A) berdeari
- 2/5 B) gorriari
- 3/5 C) urdinari



7. Grafikoan agertzen diren funtzioetatik, zeini dagokio $y = 2x + 2$ adierazpen analitikoa?

- 1/5 A) gorriari
- 4/5 B) berdeari
- 0/5 C) urdinari



8. Grafikoan agertzen diren funtzioetatik, zer adierazpen analitiko dagokio funtzio gorriari?

- 2/5 A) $y = 2x$
- 0/5 B) $y = 3x$
- 1/5 C) $y = 2x - 1$
- 1/5 D) $y = -x + 2$
- 1/5 E) $y = x$



9. Grafikoan agertzen diren hiru funtzioek, zer dute berdine?

- 0/5 A) adierazpen analitikoa
- 2/5 B) maldak
- 1/5 C) n
- 1/5 D) y ardatzarekin moztzen den puntua
- 1/5 E) ezezik



10. Zein da irudian agertzen den funtzioaren adierazpen analitikoa?

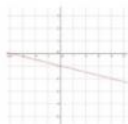
Adaptación de la enseñanza de funciones al grupo de 3º de ESO PMAR

- 0/5 A $y = 2/3 x - 4$
- 4/5 B $y = 2/3 x + 4$
- 0/5 C $y = 3/2 x - 4$
- 1/5 D $y = 3/2 x + 4$



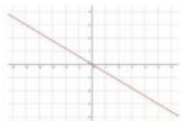
11. Zein da irudian agertzen den zuzenaren adierazpen analitikoa?

- 3/5 A $y = -4x - 1$
- 2/5 B $y = -1/4 x - 1$
- 0/5 C $y = -1/3 x - 1$
- 0/5 D $y = -3x - 1$



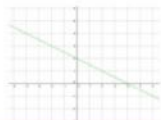
12. Zer funtzio mota da?

- 3/5 A Proporzionaltasun funtzioa
- 2/5 B Funtzio Afina
- 0/5 C Funtzio konstantea



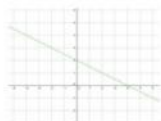
13. Zein da funtzioaren adierazpen analitiko orokorra?

- 0/5 A $y = n$
- 1/5 B $Y = mx$
- 4/5 C $y = mx + n$



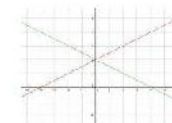
14. Irudikatua dagoen funtzioaren malda zenbaki negatibo bat da.

- 4/5 A EGIA
- 1/5 B GEZURRA



15. Markatu egia diren esaldi guztiak.

- 1/5 A Proporzionaltasun funtzioak dira.
- 5/5 B Ben adierazpen analitikoetan, n zenbaki berdina zango da.
- 2/5 C Funtzio gorriaren malda positiboa da eta berdearena negatiboa.
- 0/5 D Funtzio gorriaren malda negatiboa da eta berdearena positiboa.
- 5/5 E Bi funtzioen maldaren balio absolutuak berdinak dira. Hau da, zenbaki berdina da baina bate positiboa eta bestea negatiboa.



RESULTADO EVALUACIÓN EN CASA DE FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN

Student Names	Total Score (0 - 100)	1	2	3	4	5	6	7
4	67	$y = 2-x$	$y = 2/3 x -4$	$y = -2$	$y = 2/3 x -4$	Urdinari	urdinari	berdeari
1	47	$y = 2/3 x -4$	$y = 2-x$	$y = -2$	$y = 2/3 x -4$	Berdeari	gorriari	berdeari
2.1	40	$y = 1/3 x -3$	$y = -2$	$y = -2$	$y = 2/3 x -4$	Gorriari	gorriari	gorriari
2.2.	80	$y = 1/3 x -3$	$y = 2-x$	$y = -2$	$y = 2/3 x -4$	Gorriari	urdinari	berdeari
3	80	$y = 3x-3$	$y = 2-x$	$y = -2$	$y = 2/3 x -4$	Gorriari	urdinari	berdeari
Class scoring	62,7%	20%	60%	100%	100%	60%	60%	80%

Student Names	Total Score (0 - 100)	8	9	10	11	12
4	67	$y = 2x$	y ardatzarekin mozten den puntua	$y = 2/3 x +4$	$y = -1/4 x -1$	Proporzionaltasun funtzioa
1	47	$y = 2x -1$	n	$y = 2/3 x +4$	$y = -4x -1$	Proporzionaltasun funtzioa
2.1	40	$y = x$	ezer ez	$y = 3/2 x +4$	$y = -4x -1$	Funtzio Afina
2.2.	80	$y = x + 2$	malda	$y = 2/3 x +4$	$y = -4x -1$	Proporzionaltasun funtzioa
3	80	$y = 2x$	malda	$y = 2/3 x +4$	$y = -1/4 x -1$	Funtzio Afina
Class Scoring	62,7%	40%	40%	80%	40%	60%

Student Names	Total Score (0 - 100)	Number of correct answers	13	14	15
4	67	10	$y = mx + n$	EGIA	falta 1
1	47	7	$Y = mx$	EGIA	mal 1, falta 1
2.1	40	6	$y = mx + n$	EGIA	ok
2.2.	80	12	$y = mx + n$	EGIA	ok
3	80	12	$y = mx + n$	GEZURRA	falta 1
Class Scoring	62,7%	9,40	80%	80%	40%

Una de las alumnas (alumna 2) respondió dos veces al cuestionario, mejorando sustancialmente su resultado respecto a la primera vez. Tras hablar con ella, se vio que en la primera ocasión tardó menos de 10 minutos en responder, mientras que la segunda lo hizo en media hora.

En general, los resultados obtenidos son buenos y hacen creer, junto a las interacciones de clase, que se comprenden las implicaciones de los coeficientes de las funciones lineales y afines.

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:

M. Camino Leranoz Isturiz, Departamento de Matemáticas