



## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

Titulación :

INGENIERO TÉCNICO EN INFORMÁTICA DE GESTIÓN

Título del proyecto:

SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES CON TÉCNICAS DIFUSAS.  
COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

Beatriz Olite Rey

Humberto Bustince Sola

Pamplona, 15 de Julio de 2010

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1 Objetivos del proyecto	5
<b>2. Conceptos de lógica difusa</b>	<b>6</b>
2.1 Conjunto difuso	6
2.2 Conjunto intervalo-valorado difuso	7
2.3 Función de equivalencia restringida	8
2.4 Función de agregación	9
2.5 Similaridad	9
2.6 Entropía de un conjunto difuso	10
2.7 Entropía de un conjunto intervalo-valorado	10
2.8 Ignorancia	11
2.9 Homogeneidad	12
<b>3. Segmentación de imágenes</b>	<b>15</b>
3.1 Segmentación. Definiciones	15
3.2 Técnicas clásicas	16
3.2.1 Mínimo entre máximos	16
3.2.2 Media entre máximos	16
3.2.3 Método iterativo de la media de las medias.	18
3.2.4 Clustering	18
3.2.4.1 K-means	18
3.3 Técnicas implementadas	22
3.3.1 Umbralización	22
3.3.1.1 Utilizando funciones de equivalencia restringida.	22
3.3.1.2 Algoritmo del área.	24
3.3.1.3 Utilizando conjuntos intervalo-valorado difusos.	25
3.3.2 Clustering	25

3.3.2.1 FCM	25
<b>4. Resultados y comparación.</b>	<b>27</b>
4.1 Resultados.	27
4.1.1 Utilizando funciones de equivalencia restringida.	27
4.1.2 Algoritmo del área	28
4.1.3 Utilizando conjuntos intervalo-valorado difusos.	28
4.1.4 FCM	29
4.2 Comparación.	29
<b>5. Segmentación basada en la homogeneidad.</b>	<b>50</b>
<b>6. Conclusiones y líneas futuras.</b>	<b>60</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>61</b>
<b>ANEXO</b>	<b>62</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En este proyecto se van a estudiar diferentes técnicas difusas para la segmentación de imágenes en grises.

Segmentar una imagen consiste en dividir una imagen en partes o clases disjuntas, dependiendo de las propiedades específicas de cada región. Una de las técnicas más empleadas para la segmentación es la umbralización, que consiste en encontrar unos umbrales que delimiten cada una de las regiones. Existen muchos métodos propuestos para calcular estos umbrales, pero en los últimos años se ha observado que la teoría de conjuntos difusos proporciona unos mejores resultados.

Más adelante se explicarán con detenimiento los conceptos básicos de la lógica difusa, pero la característica fundamental de estos conjuntos es que puede contener elementos de forma parcial. Es decir que la propiedad  $x \in A$  puede ser cierta con un grado de verdad. En los conjuntos tradicionales un elemento pertenece o no pertenece al conjunto, en los conjuntos difusos un elemento puede pertenecer a él con un grado de pertenencia de 0.7, por ejemplo.

La lógica difusa ha sido y es muy utilizada en el tratamiento de imágenes debido a que nos permite representar y procesar información imprecisa inherente en cualquier imagen. Además, en muchas aplicaciones de procesamiento de imágenes es necesaria la utilización del conocimiento de uno o varios expertos para resolver problemas difíciles, como en el caso de la segmentación de imágenes. Los conjuntos difusos y las técnicas difusas aportan herramientas que permiten representar y procesar el conocimiento humano.

Por otro lado, cualquier imagen posee una ambigüedad inherente en si misma ya que no es una representación fiel del concepto que representa: la forma en la que ha sido capturada la imagen, el muestreo que se realiza de la escena, el paso del mundo 3d al 2d, el ruido o la forma de almacenar la imagen son algunos ejemplos.

Para la segmentación de imágenes se implementarán diferentes métodos que harán uso de la lógica difusa para calcular los umbrales que permitirán separar la imagen en diferentes clases. Para ello se explicará con detalle conceptos de la lógica difusa como son los conjuntos difusos, conjuntos intervalo-valorados difusos, función de equivalencia, función de agregación, similaridad, entropía, ignorancia y homogeneidad. Estos conceptos son necesarios para implementar los métodos de segmentación.

Después de haber explicado estos conceptos se mostrará qué es la segmentación de imágenes y algunas de las diferentes técnicas que hay para ello. Existen técnicas clásicas de segmentación de imágenes como son “mínimo entre máximos”, ”media entre máximos”, etc. En este proyecto se implementarán las técnicas basadas en la lógica difusa.

Una vez implementadas las diferentes técnicas se hará un estudio de resultados utilizando la medida de la homogeneidad y se determinará cuál de los métodos utilizados es el mejor.

## **1.1 Objetivos del proyecto**

En este proyecto se quieren estudiar el concepto de lógica difusa y sus extensiones, como son los conjuntos difusos y los conjuntos intervalo-valorados. Además se estudiarán también diferentes medidas de información como la entropía y la homogeneidad.

Se hará un estudio de trabajos de segmentación basados en técnicas difusas con diferentes bases teóricas (REF's, área, entropía...) y se diferenciarán los métodos estudiados.

Además se propone como medida para la comparación de imágenes segmentadas la homogeneidad. Se utilizarán diferentes construcciones de homogeneidad local para comparar las imágenes segmentadas.

Por último se propone un nuevo método de segmentación que maximiza las medidas de comparación utilizadas.

# Capítulo 2

## Conceptos lógica difusa

Para una mejor comprensión del proyecto en éste capítulo se hará una explicación de los diferentes conceptos de lógica difusa que se utilizan a lo largo de él.

### 2.1 Conjunto difuso

La teoría difusa fue desarrollada por Lofti A. Zadeh en 1965 con el fin de representar matemáticamente la imprecisión intrínseca de ciertas categorías de objetos. En la actualidad es un campo de investigación muy importante, tanto por sus aplicaciones matemáticas o teóricas como por sus aplicaciones prácticas.

Por ejemplo queremos representar el conjunto de personas adultas. Para ello definimos el umbral en 25 años, de manera que si modelamos esto con un conjunto clásico las personas mayores de 25 años pertenecen al conjunto mientras que las menores no (figura (a)). Pero hay que tener en cuenta el concepto que se tiene de adulto ya que podríamos decir que una persona que tiene 24 años es mucho más adulta que una que tiene 15. Para resolver esta imprecisión contamos con los conjuntos difusos. Ahora será necesario definir un rango, por ejemplo entre 20 y 30, de manera que las personas mayores de 30 pertenecen al conjunto con una pertenencia máxima, las menores de 20 no pertenecen a él y las que se encuentran en ese rango pertenecerán al conjunto con un cierto grado (figura (b)).

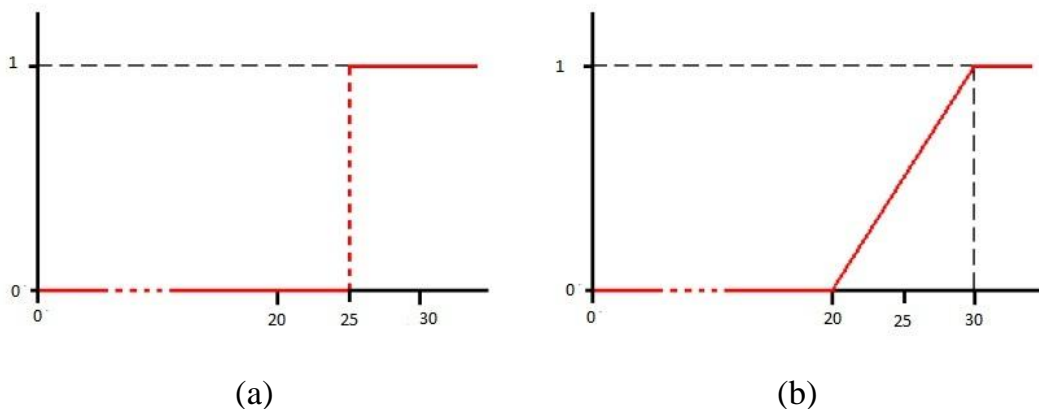


Figura 2.1: Comparación entre conjunto crisp y conjunto difuso

**Definición:** Un conjunto difuso A definido sobre un universo finito y no vacío  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  viene dado por:

$$A: \{(u_i, \mu_A(u_i)) \mid u_i \in U\}$$

donde  $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$  es tal que  $\mu_A(u_i) \in [0,1]$  denota el grado de pertenencia del elemento  $u_i$  al conjunto A.

## 2.2 Conjunto intervalo-valorado difuso

Los conjuntos difusos proporcionan grandes avances pero también tienen sus limitaciones. La eficacia de los conjuntos difusos depende de lo representativo que sea el valor de la función de pertenencia. En muchas ocasiones la elección de este valor es problemática, y es que cuando le asignamos un valor no estamos seguros de que sea el correcto al 100%. En estos casos puede ser apropiado representar el valor de pertenencia de un elemento a un conjunto mediante un intervalo de valores en lugar de un solo valor. A partir de estas ideas surgen los conjuntos difusos intervalo-valorados (IVFSs - Interval-Valued Fuzzy Sets), que asignan un subintervalo del intervalo  $[0,1]$  a cada elemento del universo. Los IVFSs permiten modelar tanto la vaguedad, carencia de nitidez de los límites de un conjunto, como la imprecisión debida a la incertidumbre o carencia de información.

Denotamos por  $L([0,1])$  al conjunto de todos los subintervalos cerrados en el intervalo cerrado  $[0,1]$ , que es,

$$L([0,1]) = \{[M_L, M_U] \mid (M_L, M_U) \in [0,1]^2 \text{ y } M_L \leq M_U\}$$

**Definición:** Un conjunto intervalo-valorado difuso A definido sobre el universo U viene definido por

$$A = \{(u_i, M_A(u_i)) \mid u_i \in U\}$$

donde la función  $M_A: U \rightarrow L([0,1])$  es tal que  $M_A(u_i) = [M_{AL}(u_i), M_{AU}(u_i)]$  denota el grado de pertenencia del elemento  $u_i$  al conjunto A.

Definimos la amplitud de un intervalo como

$$W([M_L, M_U]) = M_U - M_L.$$

Evidentemente podemos calcular la amplitud del intervalo de pertenencia de un elemento a un conjunto IVFS como

$$W([M_{AL}(u_i), M_{AU}(u_i)]) = M_{AU}(u_i) - M_{AL}(u_i)$$

La amplitud puede ser entendida como la ignorancia que tenemos sobre la pertenencia de manera que si dicha amplitud es cero, entonces tenemos un conjunto difuso. Un ejemplo de representación de un conjunto intervalo-valorado difuso es el siguiente:

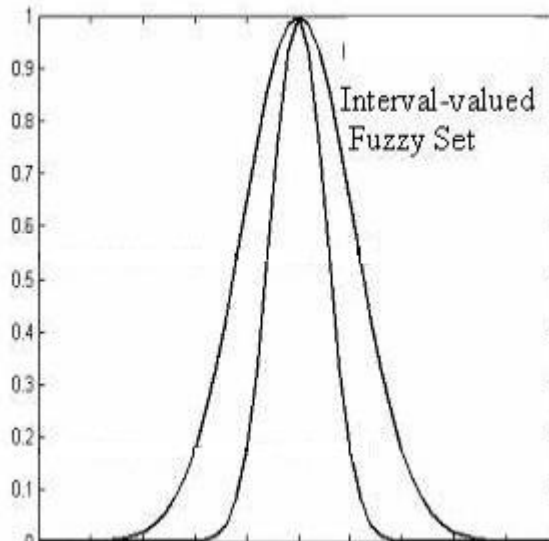


Figura 2.2: Conjunto Intervalo-valorado difuso

### 2.3 Función de equivalencia restringida

El concepto de función de equivalencia restringida (REF) surge del concepto de equivalencia y de las medidas demandadas para la comparación de imágenes. Las funciones de equivalencia restringida nos van a dar una medida de cómo de iguales o similares son dos elementos ( $x$  e  $y$ ).

Antes de definir el concepto de REF y, para que quede claro, se definirá el concepto de automorfismo y negación fuerte.

**Definición:** Llamamos **automorfismo** del intervalo unidad a toda función  $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1]$  continua y estrictamente creciente tal que  $\varphi(0)=0$  y  $\varphi(1)=1$ .

**Definición:** Una función  $c : [0,1] \rightarrow [0,1]$  es una **negación fuerte** si y solo si existe un automorfismo  $\varphi$  del intervalo unidad tal que  $c(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$ .

**Definición:** Una función REF:  $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  se dice función de equivalencia restringida si satisface las siguientes condiciones:

- (1)  $REF(x, y) = REF(y, x)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ ;
- (2)  $REF(x, y) = 1$  si y sólo si  $x = y$ ;



- (3)  $\text{REF}(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = 1, y = 0$  o  $x = 0, y = 1$ ;  
 (4)  $\text{REF}(x, y) = \text{REF}(c(x), c(y))$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ , siendo  $c$  una negación fuerte;  
 (5) Para todo  $x, y, z \in [0, 1]$ , si  $x \leq y \leq z$ , entonces  $\text{REF}(x, y) \geq \text{REF}(x, z)$  and  $\text{REF}(y, z) \geq \text{REF}(x, z)$ .

Podemos construir REF's a partir de dos automorfismos del intervalo unidad,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , de la siguiente manera:

$$\text{REF}(x, y) = \varphi_1^{-1}(|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|) \quad \text{con } c(x) = \varphi_2^{-1}(1 - \varphi_2(x))$$

## 2.4 Función de agregación

El propósito de las funciones de agregación es combinar varios argumentos para obtener una salida que los represente. Parece obvio pensar que si todas las entradas valen 0, el valor que las represente sea 0. Con el 1 es un razonamiento análogo.

**Definición:** una función de agregación de dimensión  $n$  es una función no decreciente  $M : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  tal que  $M(0, \dots, 0) = 0$  y  $M(1, \dots, 1) = 1$ .

En este proyecto se utilizarán mayoritariamente funciones de agregación idempotentes (compensativas) que cumplen la propiedad  $M(x, \dots, x) = x$  para todo  $x$ . Algunos ejemplos de función de agregación son la media aritmética, la mediana y la media geométrica.

## 2.5 Similaridad

El concepto de similaridad surge cuando queremos medir cuánto de parecidos son dos conjuntos difusos. Este concepto es muy parecido al de REF, pero en este caso, se trabaja con dos conjuntos en lugar de con dos elementos.

Vamos a definir la similaridad entre dos conjuntos a partir de la agregación de la REF's entre sus elementos.

**Definición:** Sea  $\text{REF} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  una función de equivalencia restringida y sea  $M$  una función de agregación que satisface  $M(x_1, \dots, x_n) = 0$  si y solo si  $x_1 = \dots = x_n = 0$  y  $M(x_1, \dots, x_n) = 1$  si y solo si  $x_1 = \dots = x_n = 1$ . Bajo estas condiciones la similaridad es:

$$\text{SM} : F(x) \times F(x) \rightarrow [0, 1], \text{ dado por}$$

$$\text{SM}(A, B) = \prod_{i=1}^n \text{REF}(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))$$

Satisface las siguientes características:

- (1)  $SM(A, B) = SM(B, A)$  para todo  $A, B \in F(x)$ ;
- (2)  $SM(A, A_c) = 0$  si y solo si  $A$  es no difuso;
- (3)  $SM(A, B) = 1$  si y solo si  $A = B$ ;
- (4) Si  $A \leq B \leq C$ , entonces  $SM(A, B) \geq SM(A, C)$  y  $SM(C, B) \geq SM(C, A)$ ;
- (5)  $SM(A_c, B_c) = SM(A, B)$ ;

## 2.6 Entropía de un conjunto difuso.

La entropía de un conjunto difuso representa “cuanto de difuso” es dicho conjunto. De este modo, si todos los elementos tienen pertenencia 0 o 1 al conjunto, es decir o pertenecen totalmente o no pertenecen al conjunto (es un conjunto crisp) la entropía de ese conjunto será 0. Por otro lado la entropía será máxima cuando el conjunto sea lo más difuso posible, es decir, las pertenencias valgan 0.5.

**Definición:** Una función real  $E: FS(U) \rightarrow [0, 1]$  se denomina entropía de un conjunto difuso si  $E$  satisface las siguientes propiedades:

- (1)  $E(A) = 0$  si y sólo si  $A$  es no difuso;
- (2)  $E(A) = 1$  si y solo si  $A = \{(u_i, \mu_A(u_i) = 0.5) \mid u_i \in U\}$ ;
- (3)  $E(A) \leq E(B)$  si  $A$  refina  $B$ ; esto es,  $\mu_A(u_i) \leq \mu_B(u_i)$  cuando  $\mu_B(u_i) \leq 0.5$  y  $\mu_A(u_i) \geq \mu_B(u_i)$  cuando  $\mu_B(u_i) \geq 0.5$ ;
- (4)  $E(A) = E(A_N)$ , donde  $A_N = \{(u_i, 1 - \mu_A(u_i)) \mid u_i \in U\}$ .

dónde  $FS$  es un conjunto difuso.

## 2.7 Entropía de un conjunto intervalo-valorado.

La entropía de un conjunto intervalo-valorado difuso surge de la necesidad de medir cuánto se aleja un conjunto IVFS de un conjunto difuso.

**Definición:** Una función real  $\varepsilon_F: IVFS(U) \rightarrow \mathbb{R}^+$  es llamada entropía de un conjunto intervalo-valorado difuso si  $\varepsilon_F$  satisface las siguientes propiedades:

- (1)  $\varepsilon_F(A) = 0$  si y solo si  $A \in FS(U)$ ;
- (2)  $\varepsilon_F(A) = 1$  si y solo si  $M_{AL}(u_i) = 0$  y  $M_{AU}(u_i) = 1$  para todo  $u_i \in U$ ;
- (3)  $\varepsilon_F(A) = \varepsilon_F(A_N)$  para todo  $A \in IVFS(U)$ , donde  $A_N = \{(u_i, M_{AN} = [1 - M_{AU}(u_i), 1 - M_{AL}(u_i)]) \mid u_i \in U\}$ ;
- (4) Si  $A \leq B$ ; esto es, si  $M_{AL}(u_i) \leq M_{BL}(u_i)$  y  $M_{BU}(u_i) \leq M_{AU}(u_i)$  para todo  $u_i \in U$  entonces  $\varepsilon_F(A) \geq \varepsilon_F(B)$ .

Al igual que en la entropía de un conjunto difuso cabe destacar las propiedades 1 y 2.  $\varepsilon_F(A)$  será 0, (mínima), si  $A$  es un conjunto difuso, es decir,  $M_{AL}(u_i) = M_{AU}(u_i)$  para todo  $u_i$  en  $U$ . Por otro lado si  $\varepsilon_F(A) = 1$ , (máxima), esto es

debido a que tenemos ignorancia total al asignar el intervalo de pertenencia y por lo tanto asignamos a todos los elementos el intervalo  $[0, 1]$ .

En este trabajo la entropía la vamos a calcular utilizando la siguiente expresión:

$$\varepsilon_F(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{AU}(u_i) - M_{AL}(u_i)$$

## 2.8 Ignorancia

La función de ignorancia intenta modelar el grado de desconocimiento que tienen los expertos al asignar el grado de pertenencia de un elemento al conjunto. En concreto, cuando trabajamos en segmentación de imágenes vamos a interpretar la ignorancia como el desconocimiento que tienen los expertos al determinar el grado de pertenencia de algunos pixeles de la imagen al conjunto difuso del fondo,  $Q_B$ , o al del objeto  $Q_O$ .

Para separar el objeto del fondo, sabemos que es necesario determinar con precisión la propiedad que deben tener todos los pixeles que pertenecen al objeto. Esta propiedad establece la forma de la función de pertenencia asociada al conjunto que representa el objeto. Normalmente esta propiedad no es totalmente conocida, por lo que la elección de la función de pertenencia está determinada por la ignorancia del experto.

Para nosotros  $\mu_{QB}(q)$  ( $\mu_{QO}(q)$ ) es la pertenencia de un píxel al fondo (o al objeto). En este sentido si  $\mu_{QB}(q) = 1$  ( $\mu_{QO}(q) = 1$ ), entonces el experto tiene total conocimiento de que el píxel pertenece al fondo (o al objeto). Cuando  $\mu_{QB}(q) = 0.5$  ( $\mu_{QO}(q) = 0.5$ ) entonces decimos que el experto es totalmente ignorante, tiene una duda total. Si el experto esta totalmente seguro de que el píxel pertenece al fondo (o al objeto), entonces  $\mu_{QB}(q) = 1$ ; en este caso, la función de pertenencia del píxel al objeto (o al fondo) deberá ser cercana a 0.

Evidentemente hay pixeles en la imagen en los que el experto está totalmente seguro de que su representación es correcta. Por otro lado también hay pixeles en los que el experto no sabe si la representación elegida es la óptima.

Bajo esta interpretación la función de ignorancia debe satisfacer:

- La función de ignorancia depende solo de  $\mu_{QB}(q)$  y  $\mu_{QO}(q)$ .
- No depende de si consideramos primero la función de pertenencia al fondo y luego la del objeto o viceversa.

- Representación de total conocimiento: La ignorancia será 0 si y solo si el experto está totalmente seguro de que el píxel pertenece al fondo o al objeto.
- Representación de duda absoluta: Si  $\mu_{QB}(q) = 0.5$  y  $\mu_{QO}(q) = 0.5$ , entonces diremos que la ignorancia del experto sobre a pertenencia del píxel al fondo o al objeto es uno.
- Si la pertenencia de un píxel al fondo y al objeto es mayor que 0.5, entonces mayores valores de pertenencia estarán asociados a menores valores de ignorancia.
- Si la pertenencia de un píxel al fondo o al objeto es menor que 0.5, entonces menores valores de pertenencia estarán asociados a menores valores de ignorancia.

Estas consideraciones llevan a la siguiente definición.

**Definición:** Una función  $G_u: [0, 1]^2 \rightarrow [0,1]$  se llama función de ignorancia si satisface las siguientes características:

- (1)  $G_u(x, y) = G_u(y, x)$  para todo  $x, y \in [0,1]$ ;
- (2)  $G_u(x, y) = 0$  si y solo si  $x = 1$  o  $y = 1$ ;
- (3) Si  $x = 0.5$  y  $y = 0.5$  entonces  $G_u(x, y) = 1$ ;
- (4)  $G_u$  es decreciente en  $[0.5, 1]^2$ ;
- (5)  $G_u$  es creciente en  $[0, 0.5]^2$ .

Un ejemplo de construcción de ignorancia es:

$$G_u(x, y) = \begin{cases} 2 \cdot \min(1-x, 1-y) & \text{si } \min(1-x, 1-y) \leq 0.5 \\ \frac{1}{2 \cdot \min(1-x, 1-y)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

## 2.9 Homogeneidad.

Sea un conjunto difuso  $R \in FS(X)$ . Llamaremos región P del conjunto difuso R al siguiente conjunto difuso:

$$P = \{(x,y), P(x,y) = R(x,y) \mid (x,y) \in A\}$$

Donde A es un conjunto finito no vacío de elementos de X. Al conjunto de todas las regiones de R lo vamos a denotar  $RS(X)$ .

La homogeneidad mide “como de iguales” son los píxeles pertenecientes a una región de la imagen. De esta forma si la región de la imagen considerada es

plana, esto es, que todos los píxeles tengan la misma intensidad, entonces la homogeneidad de esa región será uno. También hay que decir que la homogeneidad de la región debe ser igual a la homogeneidad local del negativo de dicha región.

Estas consideraciones nos llevan a la siguiente definición:

**Definición:** Una función  $H_L: RS(X) \rightarrow [0, 1]$  se llama homogeneidad local asociada a una negación fuerte  $N$ , si satisface las siguientes condiciones:

- (1) Si  $P(x, y) = k$  para todo  $(x, y) \in A$ , entonces  $H_L(P) = 1$ ;
- (2)  $H_L(P) = H_L(c(P))$ .

La construcción de la homogeneidad de la región se hará de la siguiente forma:

$$H_L(P) = 1 - V_{(x,y) \in A} P(x,y) + \wedge_{(x,y) \in A} P(x,y)$$

donde  $V_{(x,y) \in A} P(x,y)$  es el píxel con máximo valor de la región y  $\wedge_{(x,y) \in A} P(x,y)$  es el píxel con menor valor de la región.

Así pues en este proyecto utilizamos dos tipos de homogeneidad, las llamaremos homogeneidad1 y homogeneidad2 y sus construcciones son las siguientes:

Para la homogeneidad1, a partir del intervalo  $[\wedge, V]$  calculamos:

$$\text{Homogeneidad1} = 1 - V + \wedge.$$

Además si se cumplen las dos propiedades anteriores demostraremos que se trata de una homogeneidad local.

- (1) Si  $P(x,y) = K$  para todo  $(x, y) \in A$ , entonces  $H_L(P) = 1$ .

En efecto, si aplicamos la formula de la homogeneidad nos queda que:

$$\text{Homogeneidad1} = 1 - k + k = 1$$

- (2) Atendiendo a la forma de construir el intervalo, tenemos que para  $c(P)$  podemos calcular  $[(1 - V), (1 - \wedge)]$  por lo que

$$H_L(c(P)) = 1 - (1 - \wedge) + (1 - V) = 1 - V + \wedge = \text{Homogeneidad1}(P).$$

Para la homogeneidad2 se hace uso de la media (med) y desviación típica (std). Ahora tenemos que para  $P$  calculamos el intervalo  $[\text{med}(1 - \text{std}), \text{med}(1 - \text{std}) + \text{std}]$  con lo que  $\text{homogeneidad2} = 1 - [\text{med}(1 - \text{std}) + \text{std}] + \text{med}(1 - \text{std}) = 1 - \text{std}$ .

Se puede demostrar que  $\text{Homogeneidad2} = 1 - \text{std}$  es una homogeneidad local si  $c(P) = 1 - P$ .

(1) Si  $P(x,y) = k$  entonces  $\text{std} = 0$

Tenemos que  $H_L = 1 - \text{std} = 1 - 0 = 1$ .

(2)  $H_L(P) = H_L(c(P)) \rightarrow \bar{x} = 1 - \bar{x}$

Tenemos que la media de  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n}$

Por otro lado la media de  $\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=0}^n 1-x_i}{n} = \frac{n - \sum_{i=0}^n x_i}{n} = 1 - \bar{x}$

La desviación típica de  $x$  será:  $\text{Std} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{n}}$

La desviación típica de  $x_n$  es  $\text{std}_n =$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (1-x_i - \bar{x}_n)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (1-x_i - (1-\bar{x}_n))^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (1-x_i - 1 + \bar{x}_n)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (\bar{x}_n - x_i)^2}{n}} \rightarrow \text{std} = \text{std}_n$$

Quedando demostrado que se trata de una homogeneidad local.

# Capítulo 3

## Segmentación de Imágenes

### 3.1 Segmentación. Definiciones

La segmentación de una imagen es el proceso de separar los objetos que aparecen en ella. En este proyecto se va a tratar la segmentación en regiones, ésta se basa en la idea general de encontrar zonas con características más o menos uniformes.

Existen diferentes técnicas de segmentación, en concreto se van a trabajar la umbralización y la aplicación del clustering en segmentación de imágenes.

Segmentación mediante umbralización : el procedimiento de segmentación consta de tres pasos: obtención del umbral, binarización de la imagen y etiquetado. El problema de éste tipo de segmentación es la obtención del umbral. Para ello hacemos uso del histograma de la imagen.

- 1- Umbral: Valor que marca la separación entre los niveles de gris del fondo y los objetos.
- 2- Binarización: A partir de la imagen original  $I(i,j)$ , con  $2^n$  niveles de gris, obtenemos una imagen binaria  $I_b(i,j)$  (de 0's y 1's) mediante la siguiente operación:

$$I_b(i,j) = 1 \text{ si } I(i,j) \geq \text{umbral};$$

$$I_b(i,j) = 0 \text{ si } I(i,j) < \text{umbral}.$$

De esta manera los pixeles que se supone que pertenecen al objeto estarán a 1 y los que pertenecen al fondo a 0.

- 3- Etiquetado: Asignación a cada objeto de un nivel de gris distinto.

Segmentación mediante clustering: El clustering consiste en el proceso de organizar datos en grupos de manera que los miembros de los grupos tengan características similares entre ellos. Un cluster es entonces una colección de datos que son similares entre ellos y son distintos a los datos pertenecientes a otros clusters. También existe la posibilidad de realizar clustering difuso de manera que ahora un dato pertenece a los diferentes grupos con diferente grado. Éste es el tipo de clustering que utiliza el algoritmo FCM el cual se va a implementar

Los datos pertenecientes a cada cluster deben:

- Tener propiedades iguales o parecidas.
- Tener pequeñas distancias entre ellos.
- Estar relacionados con al menos otro dato del conjunto.
- Ser distinguibles de manera clara de los otros datos que no pertenecen al cluster.

Si lo enunciamos formalmente:

“Dado un conjunto de datos  $X$ , formado por  $n$  patrones,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , se desea clasificar dichos patrones en  $c$  clusters ( $X_1, X_2, \dots, X_c$ ). El objetivo es construir una matriz  $U(X)$  de tamaño  $c \times n$ , que puede ser representada como  $U = [u_{ij}]_{c \times n}$ ,  $i = 1, \dots, c$  y  $j = 1, \dots, n$ , donde  $u_{ij}$  es el grado de pertenencia del patrón  $x_j$  al cluster  $X_i$ .”

## 3.2 Técnicas clásicas.

En esta sección vamos a explicar rápidamente algunos métodos de segmentación clásicos que se basan en el estudio del histograma de una imagen.

### 3.2.1 Mínimo entre máximos

Si el histograma es bimodal, con dos máximos, se supone que uno de ellos corresponde al nivel de gris dominante en el objeto, y el otro al nivel de gris dominante en el fondo. El mínimo entre los dos máximos marcará el valor del umbral.

### 3.2.2 Media entre máximos

Este método se basa en suponer que el histograma se puede aproximar por una suma de funciones de decisión conocidas o estimables. Para un histograma bimodal:

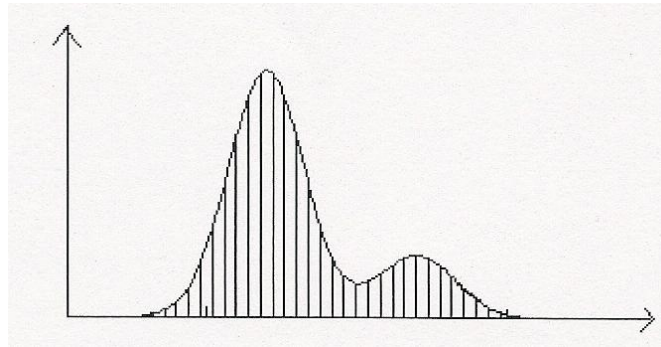
$$H(k) \approx P(k) = P_1 \times p_1(k) + P_2 \times p_2(k) = d_1(k) + d_2(k)$$

Donde  $P_1$  y  $P_2$  son las probabilidades a priori de ocurrencia de los dos “tipos” de niveles de gris (que corresponde a la proporción de píxeles que se supone a priori que ocupan los objetos y el fondo). Las funciones  $p_1(k)$  y  $p_2(k)$  son las funciones de densidad de probabilidad, y  $d_1(k) = P_1 p_1(k)$  y  $d_2(k) = P_2 p_2(k)$  son lo que se llaman funciones de decisión que caracterizan las dos clases a separar.

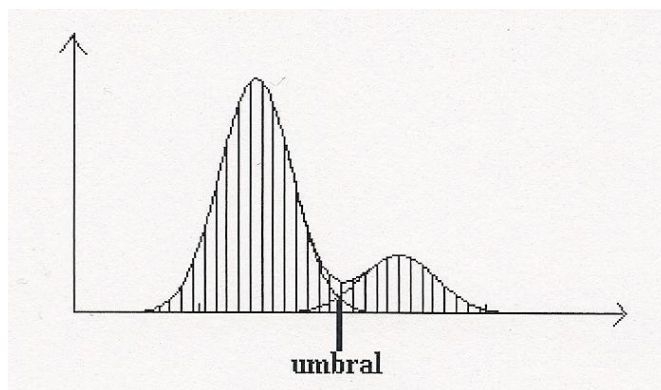
$$P(k) = \frac{P_1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{P_2}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$



Donde  $m_1$  y  $m_2$  son las medias de las gaussianas y  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las desviaciones estándar. Este modelo corresponde a una imagen con dos niveles de gris y un ruido aditivo gaussiano. El histograma sería del tipo siguiente:

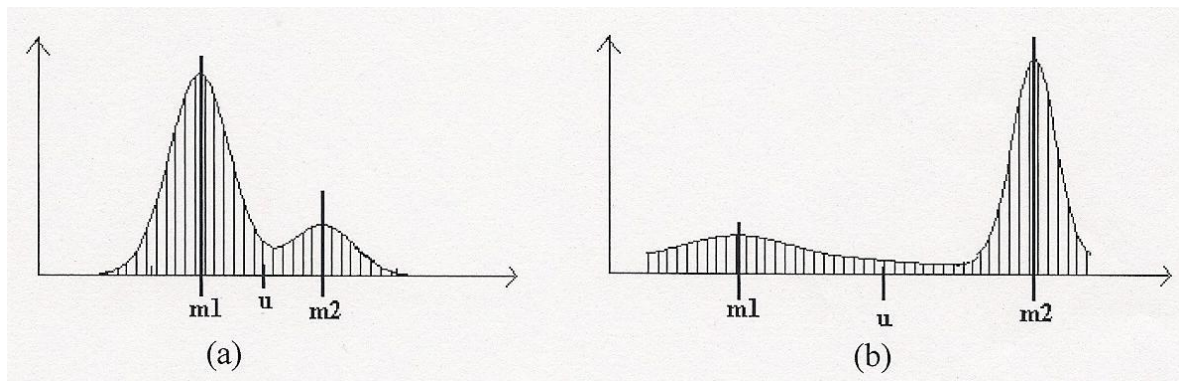


El método de la media de los máximos corresponde al caso en el que  $\sigma = 0$  (objeto y fondo uniformes) ó  $P_1 = P_2$  (recordemos que, además, estamos en el caso  $\sigma_1 = \sigma_2$ ). Entonces el histograma sería:



Y el umbral sería  $u = (m_1+m_2)/2$ . Además, el cálculo de las medias es trivial (teóricamente), ya que coinciden con los máximos. Evidentemente, este caso nunca se da en la realidad. Sin embargo, se puede utilizar el método de la media de los máximos como aproximación sencilla al umbral aunque  $\sigma$  no sea 0 (objetos no uniformes) o  $P_1$  no sea igual a  $P_2$  (distinto número de píxeles en cada nivel de gris)

En la siguiente figura vemos la estimación del umbral como la media de los máximos para dos casos:



En el histograma (a) la estimación es un poco más baja que la que daría el mínimo entre los máximos pero tampoco se diferencian mucho. En cambio en el histograma (b) la media de los máximos es mucho más baja que el valor que se obtendrá del mínimo entre los máximos.

### 3.2.3 Método iterativo de la media de las medias.

En este método de nuevo se utiliza la expresión  $u = (m1+m2)/2$ . Por tanto, estrictamente, es válido cuando  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  y  $P1=P2$ , aunque se utiliza en casos mas generales. La diferencia con el método anterior está en que no se usa el máximo como estimación de la media.

Para obtener los valores de dichas medias se van calculando estimaciones con un algoritmo iterativo sencillo. Se comienza por una estimación inicial simple del umbral, por ejemplo la media de los máximos. A partir de ella se realiza el siguiente procedimiento iterativamente desde  $iter=0$  hasta  $iter_{max}$ :

1.- Cálculo de las medias con el umbral actual:

$$m_1 (iter) = \frac{\sum_{k=0}^{u(iter)} kh(k)}{\sum_{k=0}^{u(iter)} h(k)} \quad m_2 (iter) = \frac{\sum_{k=u(iter)+1}^{Kmax} kh(k)}{\sum_{k=u(iter)+1}^{Kmax} h(k)}$$

2.-Nuevo cálculo del umbral con dichas medias:

$$U(iter+1) = (m1(iter)+m2(iter))/2$$

3.-Se vuelve a paso 1

El número total de iteraciones  $iter_{max}$  no se suele fijar, sino que el proceso se detiene cuando  $|u(iter+1)-u(iter)| < tolerancia$ .

### 3.2.4 Clustering

#### 3.2.4.1 K-means

El algoritmo K-means, desarrollado por McQueen en 1967 es el algoritmo de clustering más conocido y utilizado ya que es de muy simple aplicación y eficaz. Sigue un procedimiento simple de clasificación de un conjunto de objetos en un determinado número K de clusters, siendo K determinado a priori. Hasta ahora hemos llamado c al número de clusters, pero debido al nombre del algoritmo, en este apartado se va a designar como K.

La idea principal consiste en definir K centros, o también llamados centroides, uno para cada cluster. Hay que tener cuidado a la hora de inicializarlos, ya que diferentes inicializaciones causan diferentes resultados. El siguiente paso consiste en asociar cada uno de los puntos que se quieren clasificar con el centro más cercano. Cuando todos los puntos han sido asociados a algún centro, se ha completado la primera etapa del algoritmo, y ya se tiene una primera agrupación.

Una vez llegados a este punto, es necesario recalculer los centros de los clusters, pasando a ser los baricentros de cada cluster, según la primera agrupación que se ha realizado. Con los nuevos centros calculados, es necesario volver a asociar cada uno de los datos con su centroide más cercano, como se había hecho previamente. Con estos dos pasos se ha generado un bucle, que se debe continuar hasta que no se produzcan cambios en los centros de los clusters.

Como ya se ha comentado previamente, el algoritmo K-means pertenece a los algoritmos de clustering “basados en centros”, que tratan de minimizar una función objetivo. En este caso, ese objetivo es la función cuadrática del error:

$$J = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n \|x_i - c_j\|^2$$

Donde  $\|x_i - c_j\|^2$  representa la distancia entre el punto  $x_i$  y el centro del cluster  $c_j$  según la medida de distancia elegida.

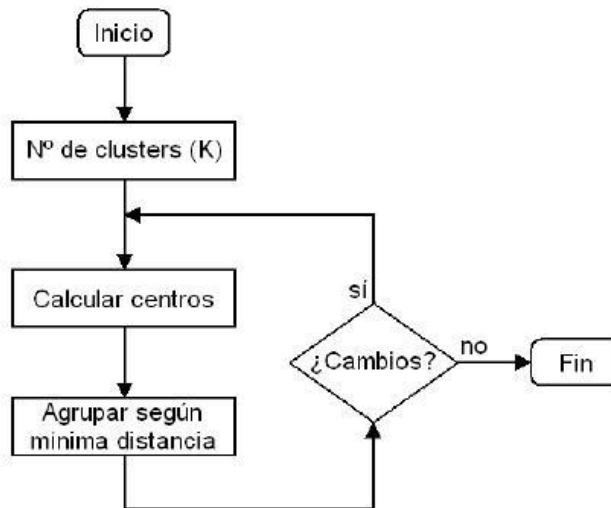


Figura 3.2.1.1: Esquema del algoritmo

Este algoritmo se realiza en cuatro etapas (en la figura 3.2 se puede ver el esquema):

1. Decidir el número de clusters que se quieren crear, y elegir aleatoriamente  $K$  datos para representar sus centros, o inicializar dichos centros mediante  $K$  puntos aleatorios.
2. Asignar cada uno de los datos al cluster cuyo centro esté más cercano según la medida de distancia elegida.
3. Una vez que todos los objetos han sido asignados, recalcular los centros de cada cluster.
4. Repetir las etapas 2 y 3 hasta que no se hagan más reasignaciones.

Aunque se puede probar que el algoritmo siempre llega a su fin, también es cierto que no siempre encuentra la solución óptima en cuanto a la función objetivo mínima global, es decir, puede detenerse en algún mínimo local de la función. Además, la solución ofrecida por este algoritmo tiene una gran dependencia de la inicialización aleatoria de los centros, es decir, dependiendo de las diferentes posibles inicializaciones, las soluciones también podrán ser diferentes. Una posible solución a este problema, es ejecutar el algoritmo K-means varias veces.

## Ejemplo

Para entender con mayor facilidad cómo funciona el algoritmo K-means, en esta sección se va a explicar un ejemplo sencillo que muestre paso a paso su ejecución. Para una fácil comprensión gráfica, se van a utilizar datos en un espacio bidimensional, con sus coordenadas x e y, y como medida de distancia, la distancia euclídea.

En este caso los datos que se van a intentar agrupar son: (1,5) (2,2) (3,3) (3,4) (4,2) (4,5) (5,1) (5,3) (6,4) (6,8) (7,8) (7,9) (8,8) (9,7) (9,8) (9,9) (10,7) (10,8) (11,6) (11,7). A partir de ellos se van a generar dos clusters. En la figura 3.3 se ve la ejecución del algoritmo paso a paso. En el apartado (a) se muestra la disposición inicial de los datos. Se quieren crear dos clusters, por lo que se eligen aleatoriamente dos puntos para la inicialización de sus centros. En este caso, esos puntos son (2,8) y (8,1). Los datos (azul) con estos centros (rojo) se pueden ver en el apartado (b). Calculando la distancia euclídea entre cada punto y cada uno de los dos centros, y eligiendo el mínimo, se realiza la primera división de los datos. En el apartado (c) se ve esta primera división, marcándose los datos que pertenecen a uno de los clusters en azul y los que pertenecen al otro en verde. Con esta división de los datos, se recalculan los centros de los clusters, y se vuelven a distribuir los datos tantas veces como sea necesario hasta que los centros no cambien más. Estos nuevos centros han pasado a ser los puntos (5'3636,6'2727) y (7'8889,5) en el apartado (d); (4'2,4'9) y (8'8,6'5) en el apartado (e); y (3'6667,3'2222) y (8'8182,7'7273) en el apartado (f). Llegados a este punto, tenemos los clusters ya creados. Como vemos en el apartado (f), la separación final queda correcta conforme a lo que se podía intuir desde un principio.

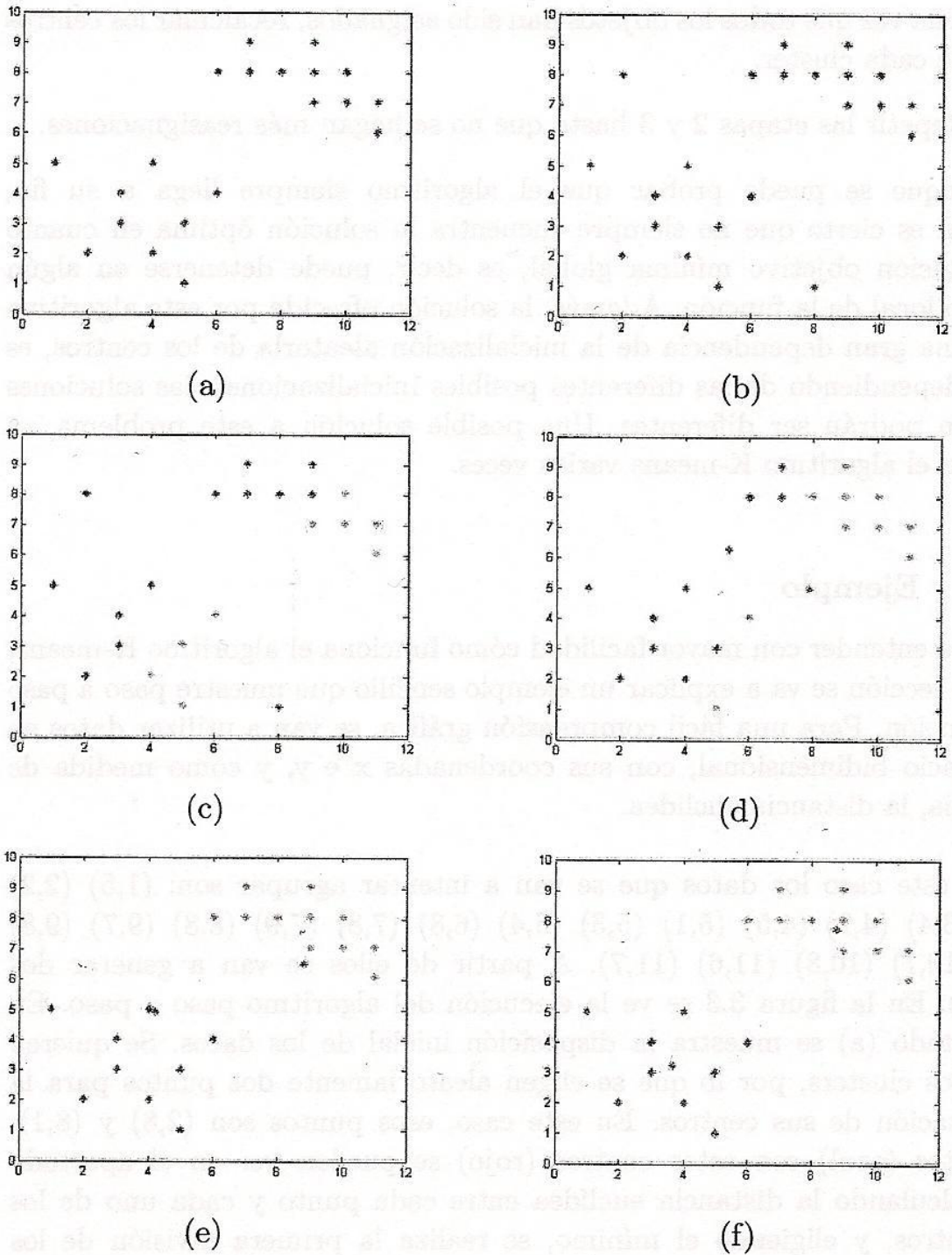


Figura 3.3: Ejemplo paso a paso

### 3.3 Técnicas difusas implementadas

#### 3.3.1 Umbralización.

##### 3.3.1.1 Utilizando funciones de equivalencia restringida

Este algoritmo está publicado en [1].

El algoritmo utilizado obtiene el umbral (o umbrales) maximizando los resultados de la similaridad. El algoritmo consta de tres pasos:

1.-Asignar L conjuntos difusos  $Q_t$  a cada imagen Q. Cada uno está asociado con un nivel de intensidad t ( $t=0,1,\dots,L-1$ ) de la escala de grises utilizada. La pertenencia de cada elemento a cada conjunto correspondiente  $Q_t$  debe expresar la relación entre la intensidad  $q$  del píxel en cuestión y su pertenencia al objeto o al fondo. Para cada píxel calculamos la pertenencia en términos de funciones de equivalencia restringida con los argumentos de la intensidad del píxel en cuestión y el promedio del nivel de gris del objeto en algunos casos y en otros, con la intensidad del píxel y el promedio de la intensidad del fondo. Además cada conjunto  $Q_t$  tiene dos clases asociadas,  $C_b(t)$  y  $C_o(t)$ . La primera  $C_b(t)$  corresponde con los píxeles con intensidad de gris menor o igual que t y ellos representan el fondo (o el objeto dependiendo del caso). El segundo  $C_o(t)$  corresponde con los píxeles de la imagen con intensidad de gris mayor que t y representan el objeto (o el fondo). Cada una de estas clases se representan mediante el promedio de su nivel de gris.

2.- Calcular la similaridad de cada uno de los conjuntos  $Q_t$  con el conjunto  $\tilde{I}$ .

3.-Tomar como mejor umbral el valor de t asociado con el conjunto  $Q_t$  de mayor similaridad con el conjunto  $\tilde{I}$ . Dónde  $\tilde{I} = \{(1, \mu_1(x) = 1) \mid x \in X\} \in F(X)$

Para construir los L conjuntos difusos  $Q_t$  asociados con la imagen Q utilizaremos el siguiente método:

**Proposición 1:** Dada Q una imagen con una escala de L niveles de gris tal que  $0 \leq t \leq L-1$ . Definimos un conjunto como

$Q_t = \{(q, \mu_{Q_t}(q)) \mid q \in \{0,1,\dots,L-1\}\}$  dado por

$$\mu_{Q_t}(q) = \begin{cases} F\left(\frac{q}{L-1}, \frac{m_b(t)}{L-1}\right) = \varphi\left(\text{REF}\left(\frac{q}{L-1}, \frac{m_b(t)}{L-1}\right)\right) & q \leq t \\ F\left(\frac{q}{L-1}, \frac{m_o(t)}{L-1}\right) = \varphi\left(\text{REF}\left(\frac{q}{L-1}, \frac{m_b(t)}{L-1}\right)\right) & q > t \end{cases}$$

con

$$m_b(t) = \frac{\sum_{q=0}^t qh(q)}{\sum_{q=0}^t h(q)} \quad m_o(t) = \frac{\sum_{q=t+1}^{L-1} qh(q)}{\sum_{q=t+1}^{L-1} h(q)}$$

**Esquema del algoritmo:**

- (1) Construir conjuntos difusos  $Q_t$ :
- FOR t:=0 TO L-1 DO
- (1-1) Dividir la imagen en dos clases  $C_b(t)$  y  $C_o(t)$ . para cada una de clases calcular su correspondiente media:  $m_b(t)$  y  $m_o(t)$ .
- (1-2) Definir la función de pertenencia que representa  $Q_t$  mediante la proposición 1.
- ENDFOR
- (2) Seleccionar una REF y una agregación M.
- (3) FOR t:=0 TO L-1 DO
- (3-1) Calcular  $SM(\tilde{I}, Q_t) = M_{q=0}^{L-1} h(q) REF_2(1, \mu_{Q_t}(q))$
- ENDFOR
- (4) Coger como mejor umbral el valor de t asociado al conjunto  $Q_t$  correspondiente con el mejor valor de SM.

### 3.3.1.2 Algoritmo del Área

Este método surge para simplificar el anterior. Además esta versión del algoritmo es más eficiente que el anterior ya que al mismo tiempo se lleva a cabo la construcción de los conjuntos difusos y de su área. Para las mejoras de este algoritmo es necesario enunciar la siguiente proposición:

#### Proposición 2:

(i) Si  $Q_t$  es un conjunto difuso construido a partir de la proposición 1, entonces

$$A(Q_t) = \sum_{q=0}^t h(q) \varphi(REF(\frac{q}{L-1}, \frac{m_b(t)}{L-1})) + \sum_{q=t+1}^{L-1} h(q) \varphi(REF(\frac{q}{L-1}, \frac{m_o(t)}{L-1}))$$

(ii) si en la construcción presentada en la proposición 1 tomamos  $\varphi(x) = x$  para todo  $x \in [0, 1]$  y  $REF(x, y) = \varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|)$  con  $c(x) = \varphi_2^{-1}(1 - \varphi_2(x))$ ,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son automorfismos del intervalo unidad, entonces

$$A(Q_t) = \sum_{q=0}^t h(q) \varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(\frac{q}{L-1}) - \varphi_2(\frac{m_b(t)}{L-1})|) + \sum_{q=t+1}^{L-1} h(q) \varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(\frac{q}{L-1}) - \varphi_2(\frac{m_o(t)}{L-1})|) =$$

El algoritmo puede describirse de la siguiente manera:

#### Esquema del algoritmo

(1) Seleccionar  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$



(2) FOR t:=0 TO L-1 DO

(2-1) Calcular el área:  $A(Q_t) = \sum_{q=0}^t h(q) \varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(\frac{q}{L-1}) - \varphi_2(\frac{m_b(t)}{L-1})|) + \sum_{q=t+1}^{L-1} h(q) \varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(\frac{q}{L-1}) - \varphi_2(\frac{m_o(t)}{L-1})|)$   
 ENDFOR

(3) Tomar como mejor valor umbral el valor de t asociado al conjunto  $Q_t$  de mejor área.

### 3.3.1.3 Utilizando conjuntos intervalo-valorados difusos.

Este algoritmo está publicado en [2].

Este método de umbralización difiere de los dos anteriores. En el algoritmo propuesto por Tizhoosh se aplican los conceptos de conjunto intervalo-valorado difuso y de entropía dejando de lado las REF, la similaridad y el área.

En este caso para cada conjunto difuso crearemos su conjunto intervalo-valorado difuso y para cada uno de estos nuevos calcularemos su entropía. Tomaremos como umbral el valor asociado al IVFS de menor entropía.

Para calcular los IVFS a partir de los FS seguiremos el siguiente método:

$Q_t = \{(q, M_{Q_t}(q)) \mid q \in \{0, 1, \dots, L-1\}\}$  dado por

$$M_{Q_t}(q) = [\mu_{\tilde{Q}_t}^\alpha(q), \mu_{\tilde{Q}_t}^{\frac{1}{\alpha}}(q)]$$

El esquema del algoritmo es el siguiente:

(1) Asignar L conjuntos difusos  $\tilde{Q}_t$  (con  $t \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ ) para cada imagen Q.

(2) Tomar  $\alpha \in (1, \infty)$ ;

(3) Asociar a cada FS su correspondiente IVFS construido mediante el método anterior.

(4) Para cada IVFS calcular su entropía  $\varepsilon_F$ :

$$\varepsilon_F(Q_t) = \frac{1}{\sum_{q=0}^{L-1} h(q)} \sum_{q=0}^{L-1} h(q) (\mu_{\tilde{Q}_t}^{\frac{1}{\alpha}}(q) - \mu_{\tilde{Q}_t}^\alpha(q))$$

(5) Tomar como mejor valor umbral t aquel asociado al IVFS con menor entropía.

## 3.3.2 Clustering.

### 3.3.2.1 FCM

FCM son las siglas del algoritmo Fuzzy C-Means, el cual fue escrito en 1973 por Bezdek. Se trata de un algoritmo de aprendizaje no supervisado que es una variante del algoritmo k-means. La diferencia entre ellos dos es que en éste último

cada dato pertenece a un único grupo (0 a 1) y el algoritmo de Fuzzy C-Means permite la existencia de pertenencia parcial de un dato a más de un grupo, es decir que el FCM trabaja con clustering difuso.

Este algoritmo se basa en la minimización de la siguiente función:

$$J_m(U, V) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^c U_{ij}^m \|X_j - X_i\|^2$$

Donde  $c$  es el número de clusters,  $U = [U_{ij}]_{c \times n}$  que es la matriz que representa el grado de pertenencia del dato  $x_j$  al cluster  $x_i$ .  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_c\}$  son los centros de los clusters,  $n$  es el número de datos que se quieren agrupar,  $\|X_j - X_i\|^2$  es la distancia euclídea entre  $x_j$  y  $x_i$  y  $m$  es el valor fuzzificador.

Los centros de los clusters se calculan con la siguiente ecuación:

$$V_i = \frac{\sum_{j=1}^n (U_{ij})^m X_j}{\sum_{j=1}^n (U_{ij})^m} \quad 1 \leq i \leq c$$

La pertenencia de un dato a un cluster se calcula con:

$$U_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^c \left( \frac{\|x_j - v_i\|}{\|x_j - v_k\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad 1 \leq i \leq c, 1 \leq j \leq n$$

El esquema del algoritmo:

- (1) Inicializar la matriz de pertenencias.
- (2) Calcular los centros de cada cluster.
- (3) Actualizar la matriz de pertenencias.
- (4) Si la mejora de la función objetivo  $J(U, V)$  es menor que un determinado umbral, finalizar; si no, volver al paso (2).

El resultado de este algoritmo puede depender de la iniciación de la matriz de pertenencias.

# Capítulo 4

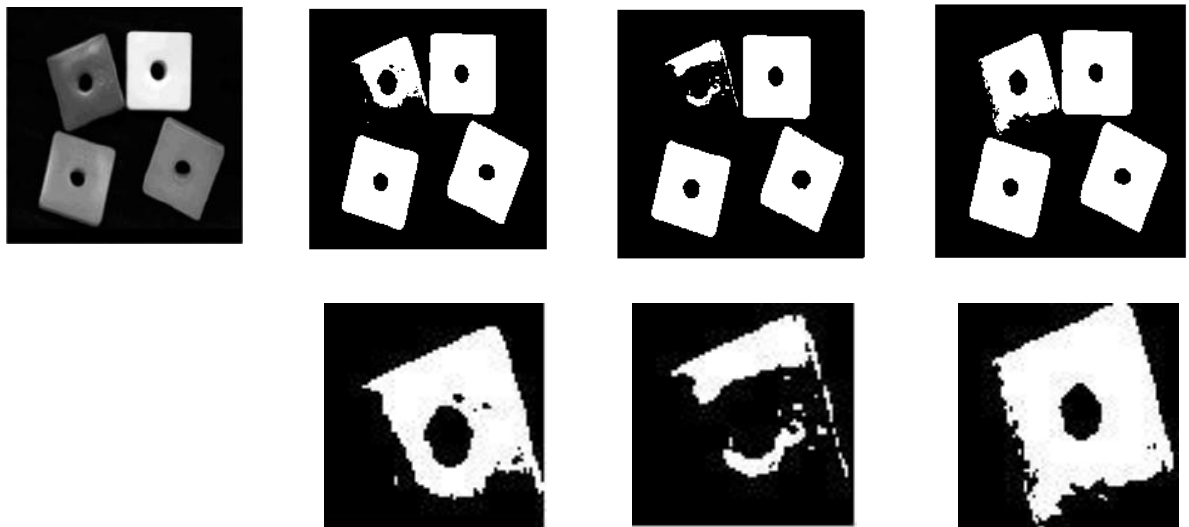
## Resultados y Comparación.

### 4.1 Resultados

En este apartado se va a mostrar alguno de los resultados obtenidos con cada uno de los métodos implementados.

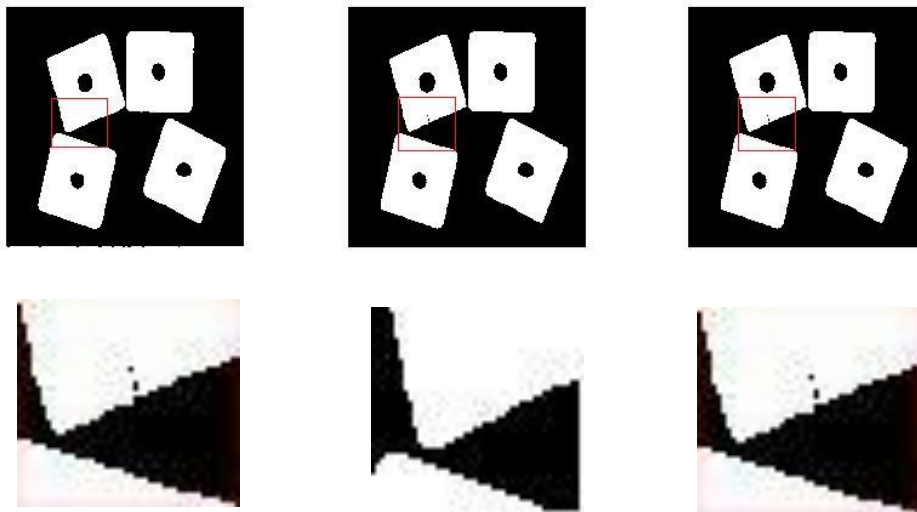
#### 4.1.1 REF

En el algoritmo de umbralización basado en el uso de REFs, podemos utilizar diferentes expresiones de manera que varía el resultado de las imágenes segmentadas. No se puede concluir que haya un valor concreto para el cual la segmentación sea óptima, esto depende de la imagen en tratamiento. Para ésta técnica se ha implementado el algoritmo haciendo uso de tres REFs diferentes:  $REF(x,y) = 1-|x-y|$ ,  $REF(x,y) = 1-|x-y|^2$  y  $REF(x,y) = (1-|x-y|)^2$ . En el siguiente ejemplo se ve claramente como los resultados varían en función de la REF que se utilice.



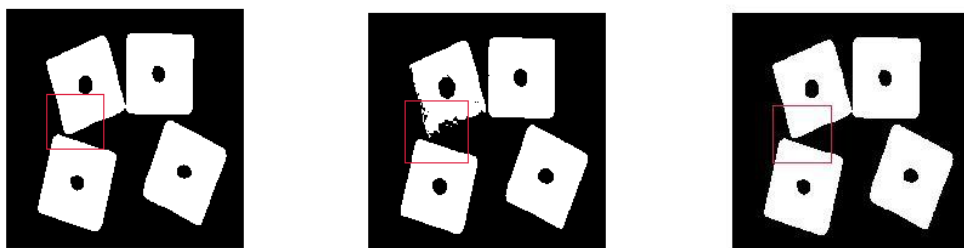
### 4.1.2 Área

Se pueden utilizar diferentes valores de automorfismos de manera que varía el resultado de las imágenes segmentadas. No se puede concluir que haya un valor concreto para el cual la segmentación sea óptima, esto depende de la imagen en tratamiento. Para ésta técnica se ha implementado el algoritmo haciendo uso de diferentes valores de automorfismos diferentes:  $\varphi(x)=x$ ,  $\varphi(x)=x^2$ ,  $\varphi(x)=x^{1/2}$ . En el siguiente ejemplo se ve claramente como los resultados varían según el valor utilizado.



### 4.1.3 Tizhoosh

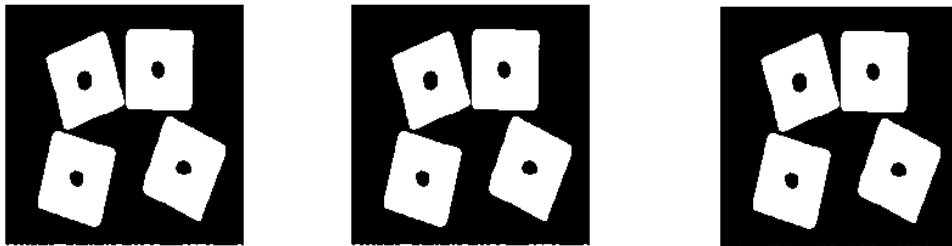
Se pueden utilizar diferentes valores de automorfismos de manera que varía el resultado de las imágenes segmentadas. No se puede concluir que haya un valor concreto para el cual la segmentación sea óptima, esto depende de la imagen en tratamiento. Para ésta técnica se ha implementado el algoritmo haciendo uso de diferentes valores de automorfismos diferentes:  $\varphi(x)=x$ ,  $\varphi(x)=x^2$ ,  $\varphi(x)=x^{1/2}$ . En el siguiente ejemplo se ve claramente como los resultados varían según el valor utilizado.





#### 4.1.4 FCM

Se pueden utilizar diferentes valores de fuzzificación para intentar que varíe el resultado de las imágenes segmentadas. Los valores utilizados para el fuzzificador son: 1.5, 3 y 4.5. Con estos valores de fuzzificación la imagen no varía.



## 4.2 Comparación

Como he explicado en los objetivos del proyecto, determinar la mejor umbralización es un proceso muy difícil. En muchos artículos de investigación se realiza una comparación con una segmentación ideal realizada por un experto humano. Sin embargo, creemos que esta técnica puede no ser la mejor. En primer lugar, puede que no sea fácil encontrar una imagen ideal para cada imagen con la que trabajamos. En este caso nos parece muy interesante estudiar y proponer una técnica automática para determinar cual es la mejor reducción. Además, si tomamos más de un experto humano, es muy probable que obtengamos diferentes soluciones ideales. En tal caso, resulta difícil decidir con cual de ellas debemos comparar. Por estas razones proponemos comparar las diferentes soluciones mediante el uso de la homogeneidad.

Como primera medida de comparación de las técnicas implementadas se utilizó la ignorancia. Como ya se ha dicho anteriormente esta medida representa el

grado de desconocimiento que se tiene sobre la pertenencia de un píxel el fondo o al objeto. Finalmente esta medida no se ha considerado porque depende de la REF escogida. Por ejemplo:

Hemos tomado las siguientes REF's:  $REF(x,y) = 1-|x-y|$ ,  $REF(x,y) = 1-|x-y|^2$ ,  $REF(x,y) = (1-|x-y|)^2$  si tomamos  $x=0.3$  y  $y=0.6$  las ignorancias para cada una de las REF's son:

Para  $REF(x,y) = 1-|x-y| = 1-0.3 = 0.7$  Ignorancia(0.7) = 0.6

Para  $REF(x,y) = 1-|x-y|^2 = 1-0.09 = 0.91$  Ignorancia(0.91) = 0.18

Para  $REF(x,y) = (1-|x-y|)^2 = (1-0.3)^2 = 0.49$  Ignorancia(0.49) = 0.98

Si por ahora tomamos  $REF(x,y) = 1-|x-y|^{10} = 0.99$  Ignorancia(0.99) = 0.02

Vemos que conforme aumentamos el exponente la ignorancia se va acercando cada vez más a cero por lo que no es una buena medida de comparación.

Después de desechar la ignorancia se ha decidido utilizar como medida de comparación de las técnicas implementadas la homogeneidad. La homogeneidad mide "como de iguales" son los píxeles pertenecientes a una región de la imagen. La homogeneidad (H en la tabla) se calcula sumando los píxeles de intensidades máxima y mínima de cada zona y restándoselo a uno. Como se puede observar en la tabla esta medida de comparación no determina de forma clara que método es mejor, además al trabajar con máximos y mínimos perdemos la información de los píxeles intermedios.

Para intentar obtener una mejor comparación se utiliza la homogeneidad ponderada (Hp en la tabla). De esta manera se intenta dar más importancia a la homogeneidad de las zonas grandes pero como ocurre con la homogeneidad al trabajar también con máximos y mínimos seguimos perdiendo la información del medio por lo que sigue sin ser una medida de comparación eficiente.

La tercera medida de comparación será una homogeneidad que hace uso de la media y la variancia de los píxeles de las zonas (En la tabla Hdm). Dejamos de dar importancia a los píxeles máximo y mínimo para considerar todos los píxeles de las zonas. Esta medida tampoco nos proporciona información la necesaria para decidir cuál de los métodos implementados es el mejor. Creemos que esta medida de homogeneidad representa mejor la homogeneidad de una zona que la expuesta en el párrafo anterior.

Como cuarta medida de homogeneidad se ha hecho una homogeneidad ponderada de Hdm (Hdmp en la tabla).

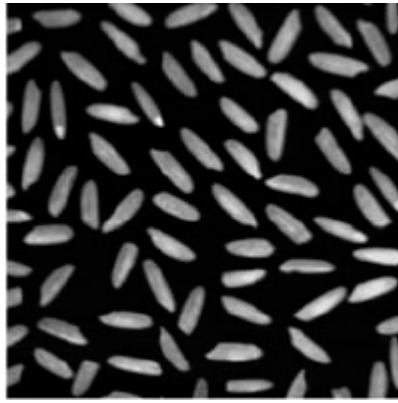
En las tablas del anexo se pueden observar los resultados obtenidos para cada imagen.

A continuación se mostrarán todas las imágenes obtenidas con los métodos implementados. El orden en el que se muestran es el siguiente:

- (a) Imagen original
- (b) Segmentación con el algoritmo del Área y  $\varphi(x)=x$ .
- (c) Segmentación con el algoritmo del Área y  $\varphi(x)=x^2$ .
- (d) Segmentación con el algoritmo del Área y  $\varphi(x)=x^{1/2}$ .
- (e) Segmentación con el algoritmo REF y  $REF(x,y) = 1-|x-y|$ .
- (f) Segmentación con el algoritmo REF y  $REF(x,y) = 1-|x-y|^2$ .
- (g) Segmentación con el algoritmo REF y  $REF(x,y) = REF(x,y) = (1-|x-y|)^2$ .
- (h) Segmentación con el algoritmo propuesto por Tizhoosh y  $\varphi(x)=x$ .
- (i) Segmentación con el algoritmo propuesto por Tizhoosh y  $\varphi(x)=x^2$ .
- (j) Segmentación con el algoritmo propuesto por Tizhoosh y  $\varphi(x)=x^{1/2}$ .
- (k) Segmentación con el algoritmo FCM.

## **Imágenes segmentadas en dos zonas**

**-Arroz:**



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)





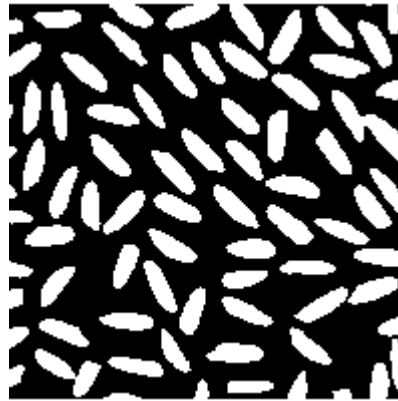
(g)



(h)



(i)

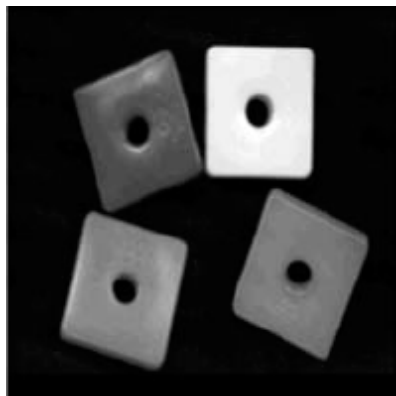


(j)

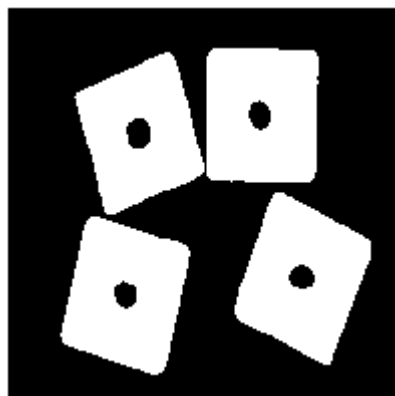


(k)

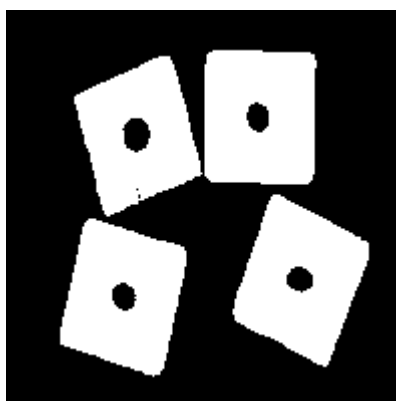
# -Cubos



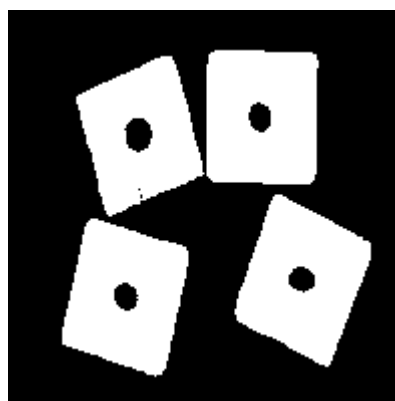
(a)



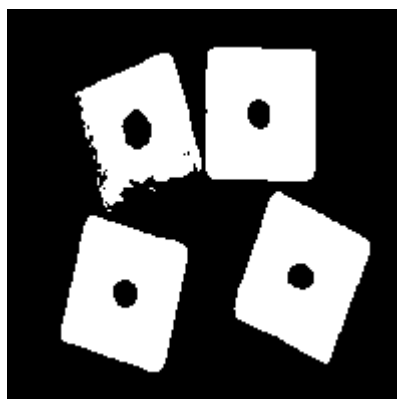
(b)



(c)



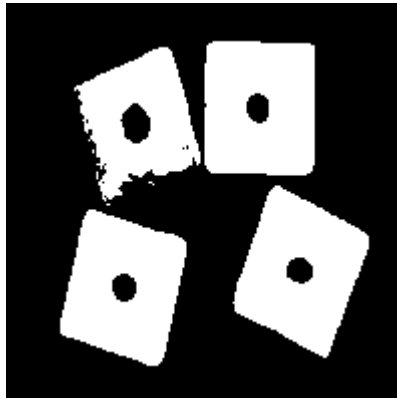
(d)



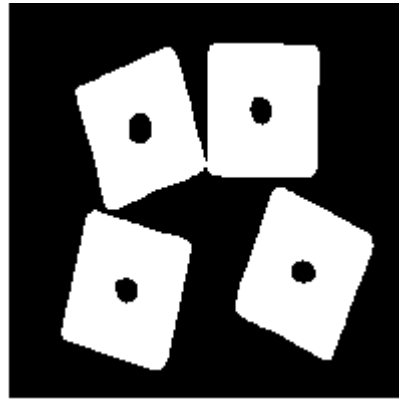
(e)



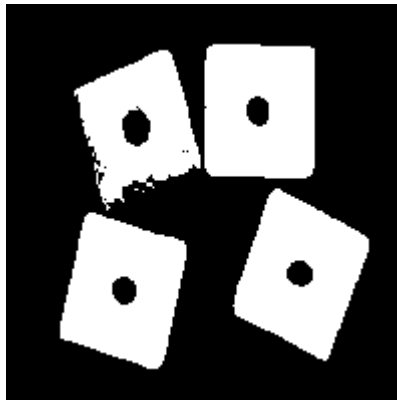
(f)



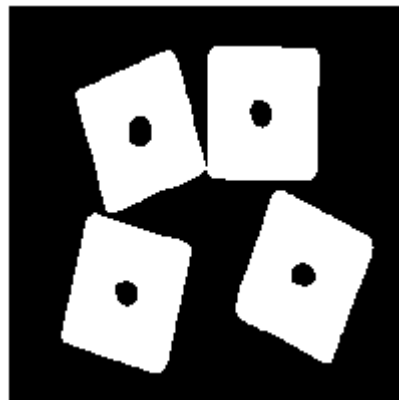
(g)



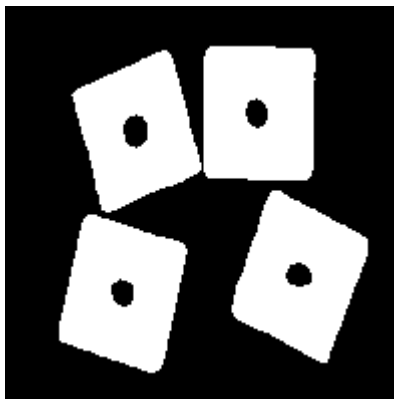
(h)



(i)



(j)

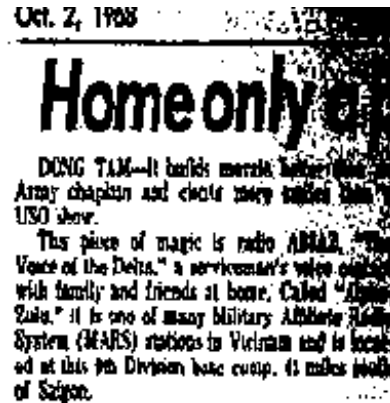


(k)

-Periódico.



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Oct. 7, 1968

## Home only a p

DONG TAM--It builds morale better than any Army chaplain and cleric more united than in USO show.

This piece of magic is radio ABBAZ, "The Voice of the Delta," a serviceman's voice contact with family and friends at home. Called "Alpha-Zulu," it is one of many Military Affiliate Radio System (MARS) stations in Vietnam and is located at this 9th Division base camp, 41 miles south of Saigon.

(g)

Oct. 7, 1968

## Home only a p

DONG TAM--It builds morale better than any Army chaplain and cleric more united than in USO show.

This piece of magic is radio ABBAZ, "The Voice of the Delta," a serviceman's voice contact with family and friends at home. Called "Alpha-Zulu," it is one of many Military Affiliate Radio System (MARS) stations in Vietnam and is located at this 9th Division base camp, 41 miles south of Saigon.

(h)

Oct. 7, 1968

## Home only a p

DONG TAM--It builds morale better than any Army chaplain and cleric more united than in USO show.

This piece of magic is radio ABBAZ, "The Voice of the Delta," a serviceman's voice contact with family and friends at home. Called "Alpha-Zulu," it is one of many Military Affiliate Radio System (MARS) stations in Vietnam and is located at this 9th Division base camp, 41 miles south of Saigon.

(i)

Oct. 7, 1968

## Home only a p

DONG TAM--It builds morale better than any Army chaplain and cleric more united than in USO show.

This piece of magic is radio ABBAZ, "The Voice of the Delta," a serviceman's voice contact with family and friends at home. Called "Alpha-Zulu," it is one of many Military Affiliate Radio System (MARS) stations in Vietnam and is located at this 9th Division base camp, 41 miles south of Saigon.

(j)

Oct. 7, 1968

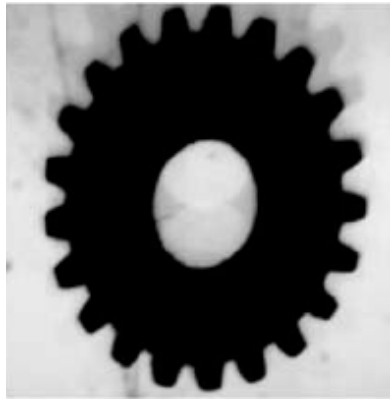
## Home only a p

DONG TAM--It builds morale better than any Army chaplain and cleric more united than in USO show.

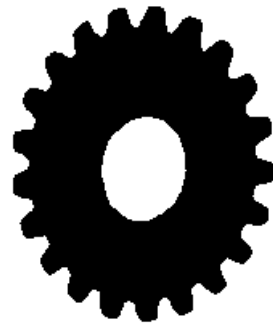
This piece of magic is radio ABBAZ, "The Voice of the Delta," a serviceman's voice contact with family and friends at home. Called "Alpha-Zulu," it is one of many Military Affiliate Radio System (MARS) stations in Vietnam and is located at this 9th Division base camp, 41 miles south of Saigon.

(k)

**-Rueda.**



(a)



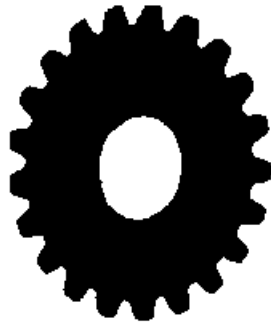
(b)



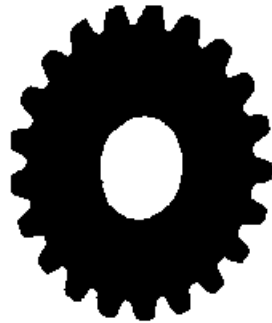
(c)



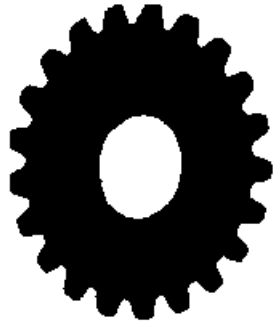
(d)



(e)



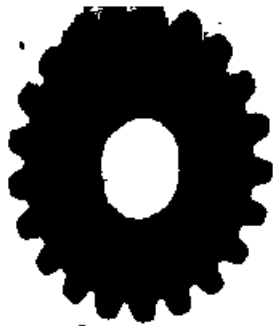
(f)



(g)



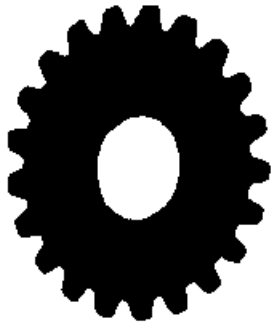
(h)



(i)



(j)



(k)

## Imágenes segmentadas en tres zonas

-Casa:



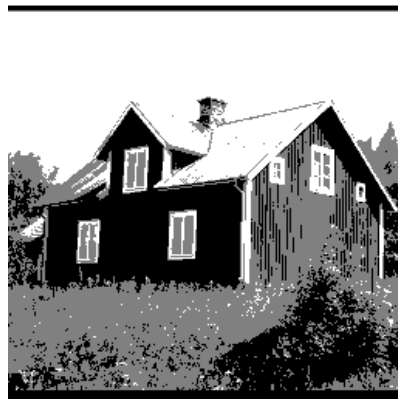
(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)





(g)



(h)



(i)



(j)



(k)

**-Flores:**



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)



(g)



(h)



(i)



(j)

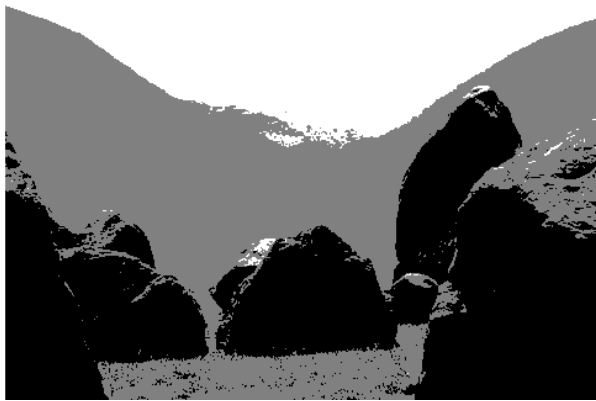


(k)

**-Paisaje:**



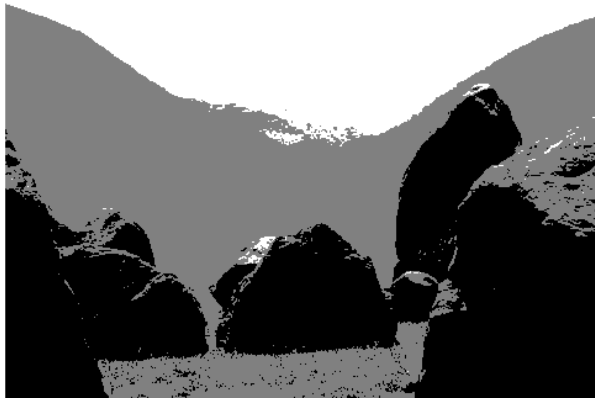
(a)



(b)



(c)



(d)



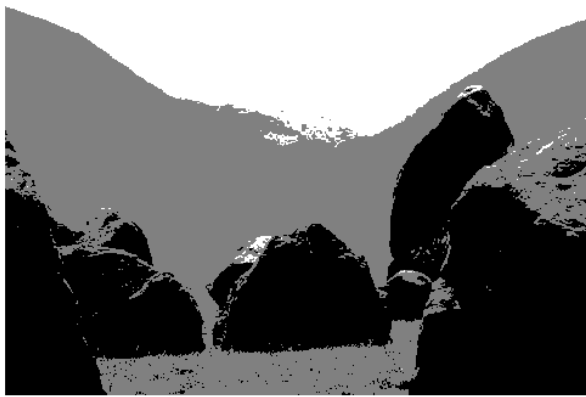
(e)



(f)



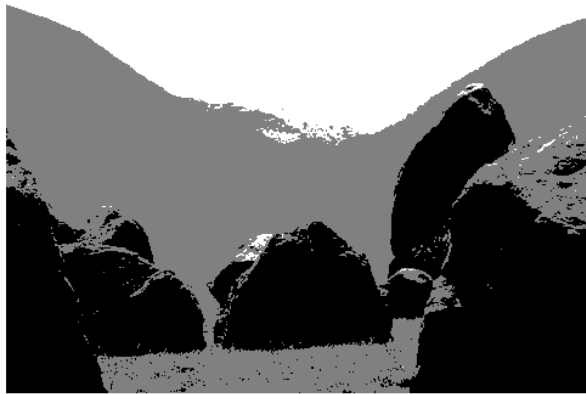
(g)



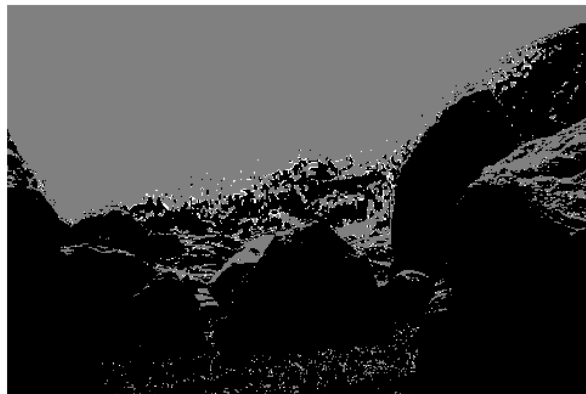
(h)



(i)

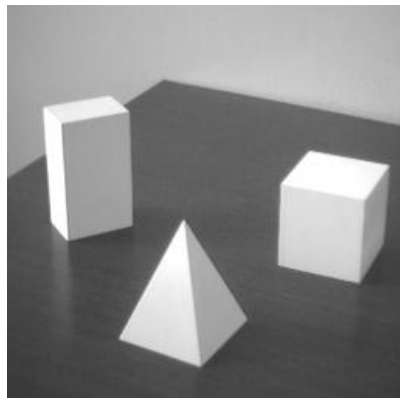


(j)

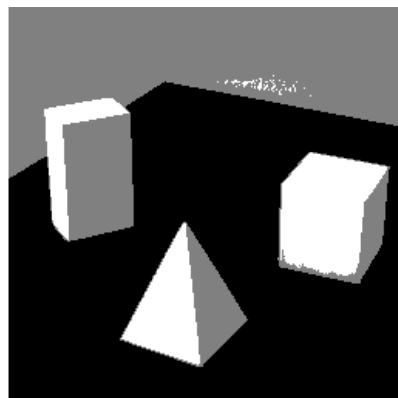


(k)

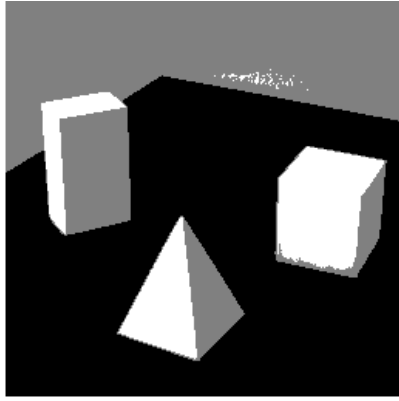
**-Poliedros:**



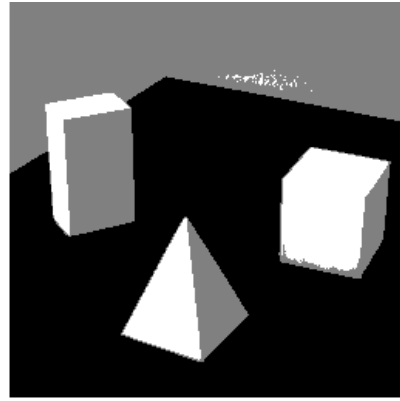
(a)



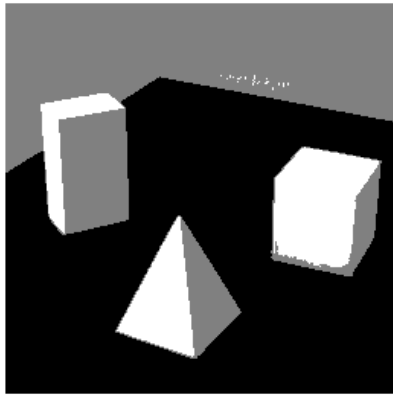
(b)



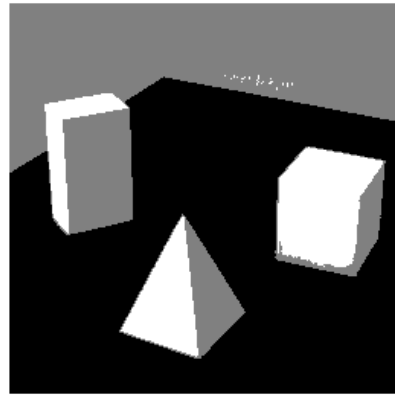
(c)



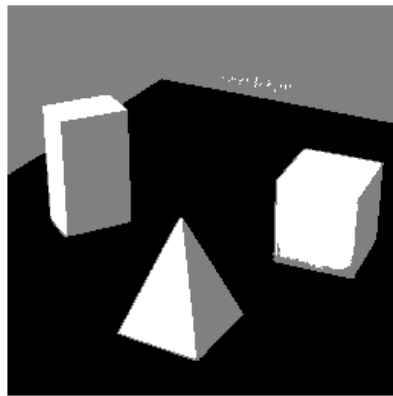
(d)



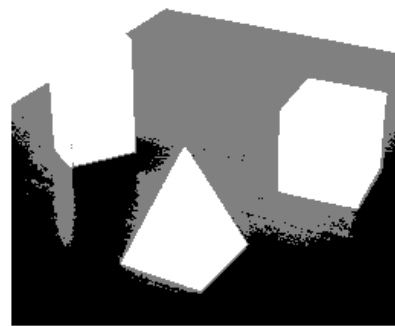
(e)



(f)

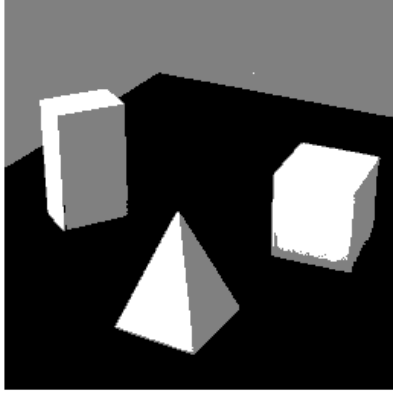


(g)

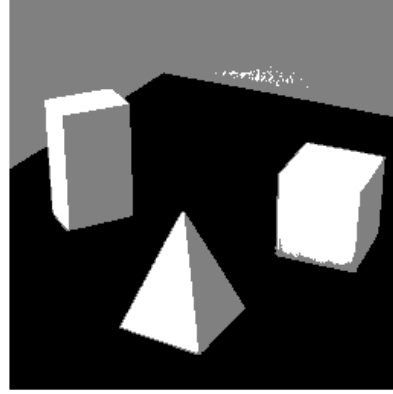


(h)

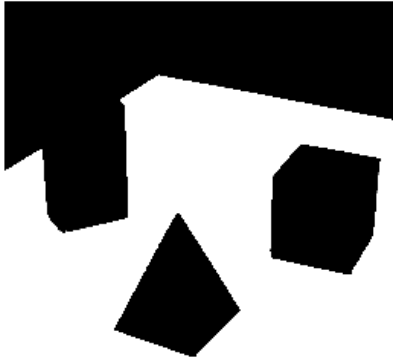




(i)



(j)



(k)

## Capítulo 5

# Segmentación basada en la homogeneidad.

Como se ha visto en el capítulo anterior, las medidas de homogeneidad permiten determinar la calidad de una imagen segmentada. Hemos visto como si optimizamos la medida de homogeneidad, podemos obtener buenas segmentaciones. Esta idea nos ha llevado a modificar la metodología de los algoritmos de segmentación y crear un nuevo algoritmo de segmentación que permita optimizar una medida de homogeneidad dada.

El esquema del algoritmo que proponemos es el siguiente:

(1) FOR t:=0 TO L-1 DO

(1.1) Separar la imagen en zonas tales que:

Zona1 = imagen (imagen  $\leq$  t)

Zona2 = imagen (imagen  $>$  t)

(1.2) Calcular la homogeneidad local de cada zona,  $H_L(\text{zona1})$ ,  $H_L(\text{zona2})$

(1.3) Calcular la homogeneidad total de la imagen como la agregación de las homogeneidades locales.

ENFOR

(2) Tomar como mejor umbral t aquel asociado con la mayor homogeneidad total de la imagen.

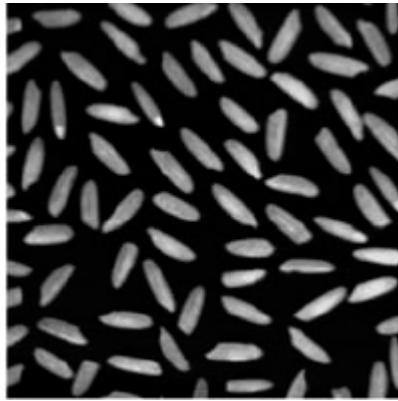
El algoritmo se ha implementado con los cuatro tipos de homogeneidades explicadas anteriormente y para que sea capaz de segmentar imágenes en dos y tres zonas. Podemos observar que los resultados obtenidos con las medidas de homogeneidad ponderadas ofrecen muy buenos resultados, tanto para 2 zonas como para 3. Además, el método propuesto es muy sencillo de entender y muy sencillo de implementar y creemos que está al nivel de otros algoritmos de segmentación de la literatura.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en el orden siguiente:

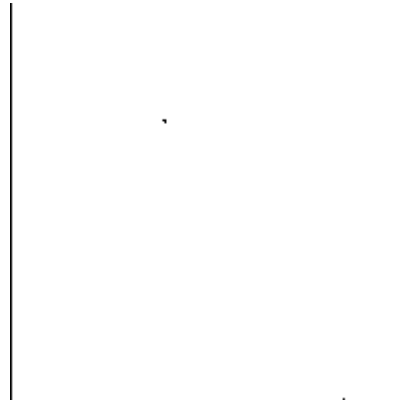
(a) Imagen original

- (b) Imagen segmentada con homogeneidad =  $1 - \max + \min$
- (c) Imagen segmentada con homogeneidad =  $1 - \max + \min$  (ponderada)
- (d) Imagen segmentada con homogeneidad =  $1 - \text{std}$ .
- (e) Imagen segmentada con homogeneidad =  $1 - \text{std}$ . (ponderada)

**Imágenes segmentadas en dos zonas.**



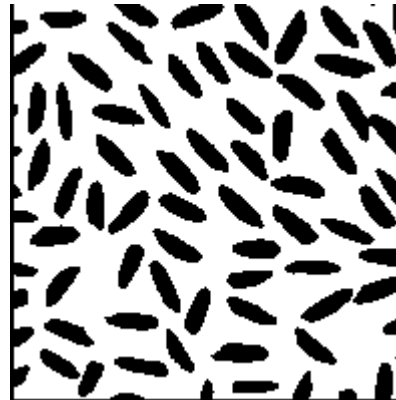
(a)



(b)



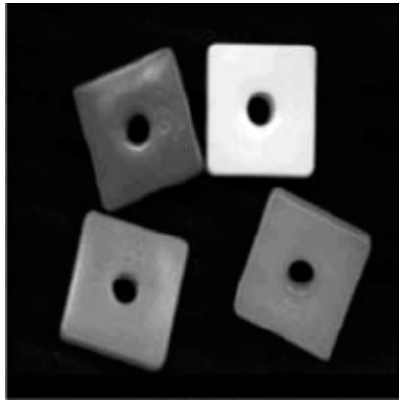
(c)



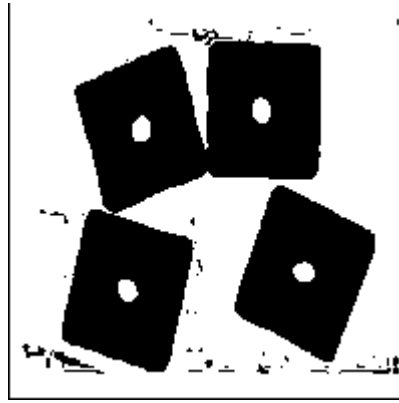
(d)



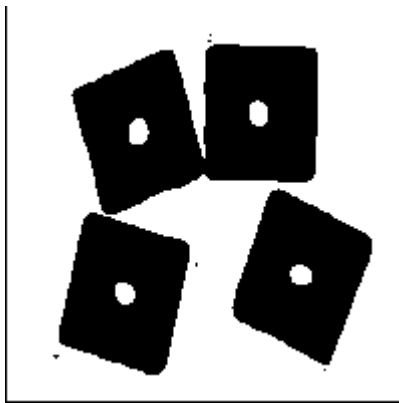
(e)



(a)

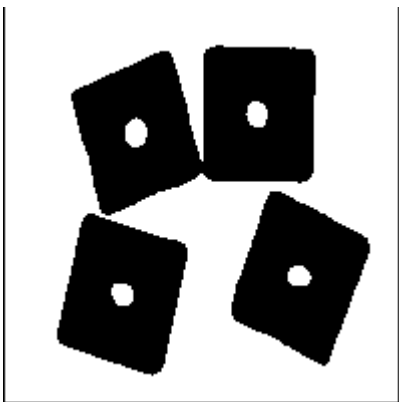


(b)



(c)

(d)



(e)



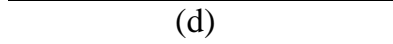
(a)



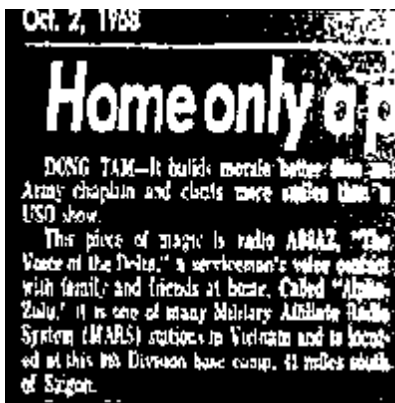
(b)



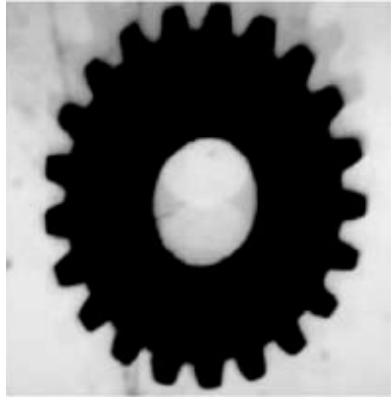
(c)



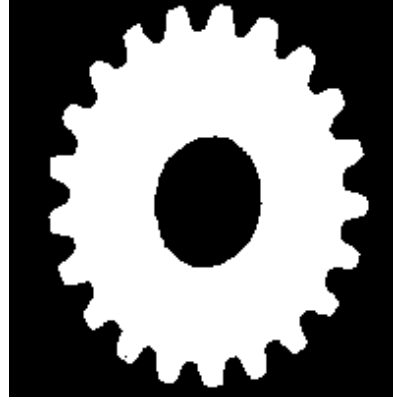
(d)



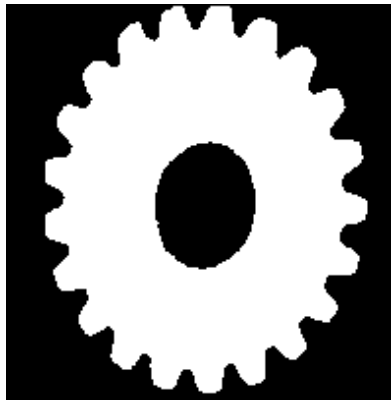
(e)



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

**Imágenes segmentadas en tres zonas.**



(a)



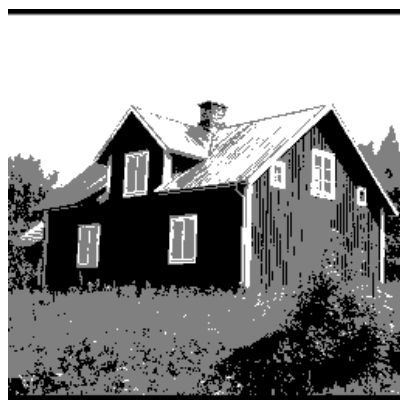
(b)



(c)



(d)



(e)



(a)

(b)



(c)



(d)



(e)





(a)



(b)



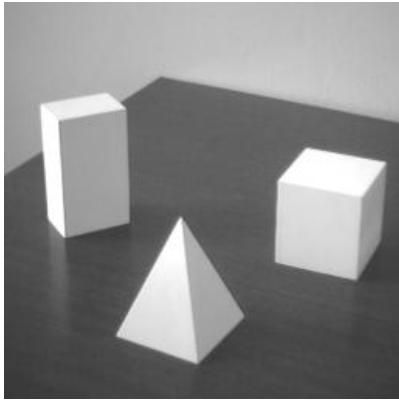
(c)  
57



(d)



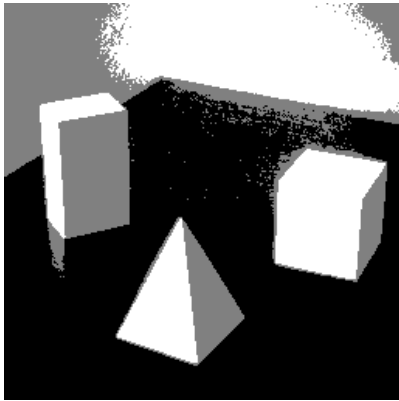
(e)



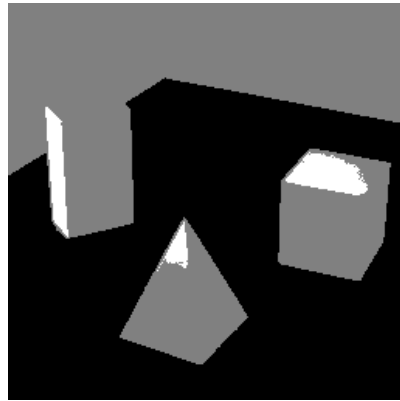
(a)



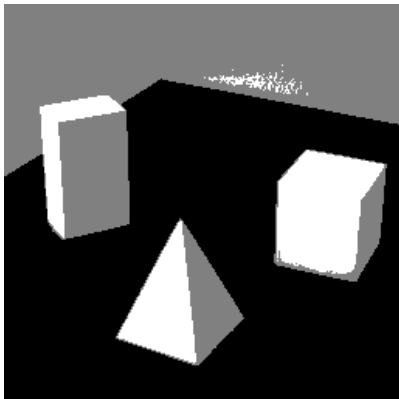
(b)



(c)



(d)



(e)

# Capítulo 6

## Conclusiones y líneas futuras.

En éste proyecto se han implementado diferentes técnicas de segmentación basadas en distintas técnicas como son las funciones de equivalencia restringida, la entropía y el clustering.

Con las imágenes obtenidas por estos métodos se ha realizado una comparación de los resultados obtenidos mediante la homogeneidad. Se han implementado diferentes homogeneidades para realizar el estudio. Primeramente la homogeneidad basa en los píxeles máximo y mínimo de cada zona. Se ha visto que esta primera medida no proporciona gran información ya que no tiene en cuenta los píxeles intermedios por lo que se ha pasado a implementar esta homogeneidad ponderada. Con esta homogeneidad se consigue dar más importancia a las zonas grandes de la imagen. Para tener en cuenta todos los píxeles de las zonas se ha implementado una homogeneidad basada en la media y en la desviación, también se ha hecho de manera ponderada para dar importancia a las zonas más grandes.

Tras haber finalizado el estudio de los resultados obtenidos se puede concluir que la homogeneidad es una buena medida de comparación para las imágenes segmentadas por lo que se ha propuesto un nuevo método de segmentación de imágenes basado en la homogeneidad. Como se ha podido observar este nuevo método produce buenos resultados.

Sin embargo, debido a la falta de tiempo no se ha tenido tiempo para realizar un estudio experimental completo del algoritmo propuesto en este trabajo. Como línea futura, queremos realizar un estudio completo de las soluciones obtenidas con el método propuesto. Para ello, se pueden utilizar otras medidas de homogeneidad local basadas en la agregación de los elementos de la zona. Además, queremos probar con muchas más imágenes para determinar la bondad de las soluciones obtenidas.

Por último, como valoración personal, quiero concluir que este trabajo me ha permitido ampliar mis conocimientos sobre la teoría de conjuntos difusos, que es un ámbito de estudio que está muy desarrollado actualmente dentro de lo que se denomina soft computing. Además he profundizado el tema de la segmentación de imágenes estudiando e implementando diferentes métodos de segmentación, adquiriendo así una idea de lo que se está desarrollando actualmente en éste ámbito.

## REFERENCIAS

- [1] “Image thersholding using equivalence functions and maximizing the measures of similarity”. H.Bustince, E.Barrenechea y M.Pagola. *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 496-516.
- [2] “Image thersholding using type-2 fuzzy sets”. H.R Tizhoosh. *Pattern Recognition* 38 (2005) 2363-2372.
- [3] “FCM – The fuzzy c-means clustering-algorithm”. J.C. Bezdek, R. Ehrlich, W. Full. *Computer and Geosciences* 10 (1984) 191-203.
- [4] “Comment on: Image thresholding using type II fuzzy sets. Importance of this method”. H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, J. Sanz. *Pattern Recognition* 43 (2010) 3188-3192.
- [5] “Restricted equivalence functions”. H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola. *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006) 2333-2346.
- [6] “Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets”. P. Burillo, H. Bustince. *Fuzzy Sets and Systems* 78 (1996) 305-316.

**Tabla de resultados para imágenes segmentadas en dos y tres zonas respectivamente.**

		Area			REF			Tizhoosh			FCM		
		$\varphi(x) = x$	$\varphi(x) = \frac{x^2}{x^2}$	$\varphi(x) = \frac{x}{x^{1/2}}$	$REF(x,y) = 1- x-y $	$REF(x,y) = 1- x-y ^2$	$REF(x,y) = (1- x-y )^2$	$\varphi(x) = \frac{x}{x}$	$\varphi(x) = \frac{x^2}{x^2}$	$\varphi(x) = x^{1/2}$	1,5	3	4,5
Arroz	Umbral	58	50	50	75	81	72	51	98	52			
	H	0,5039	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502
	Hp	0,5927	0,5931	0,5931	0,5791	0,5740	0,5842	0,5928	0,5535	0,5923	<b>0,5934</b>	0,5934	0,5934
	Hdm	<b>0,8991</b>	0,899	0,899	0,8976	0,8965	0,8981	0,899	0,8921	0,899	0,8989	0,8989	0,8989
	Hdmp	0,9174	0,9183	<b>0,9183</b>	0,9123	0,9093	0,9135	0,9182	0,8992	0,9181	<b>0,9183</b>	0,9183	0,9183
Cubos	Umbral	50	63	63	80	97	72	42	69	44			
	H	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502
	Hp	0,5817	0,5745	0,5745	0,5697	0,5545	0,5727	<b>0,5867</b>	0,5722	0,5855	0,5813	0,5813	0,5813
	Hdm	0,8771	0,8731	0,8731	0,8603	0,8505	0,868	0,8786	0,8693	<b>0,8783</b>	0,8757	0,8757	0,8757
	Hdmp	0,9034	0,8993	0,8993	0,8852	0,8727	0,8939	<b>0,9049</b>	0,8953	0,9046	0,9019	0,9019	0,9019
Periódico	Umbral	202	255	255	188	175	191	201	203	201			
	H	0,6471	0,6471	0,6471	0,6471	0,6471	0,6471	0,6471	0,6471	0,6471	0,6471	0,6471	0,6471
	Hp	0,6883	0	0	<b>0,6993</b>	0,6785	0,7007	0,6908	0,6853	0,6908	0,6824	0,6824	0,6824
	Hdm	0,9266	0	0	0,922	0,9193	0,9229	0,9263	0,927	0,9263	<b>0,9274</b>	<b>0,9274</b>	<b>0,9274</b>
	Hdmp	0,9359	0	0	0,9361	0,9311	<b>0,9366</b>	0,9362	0,9355	0,9362	0,8858	0,8858	0,8858
Rueda	Umbral	88	224	224	105	105	105	79	153	82			
	H	0,5235	0,5216	0,5216	0,5216	0,5216	0,5216	0,5216	0,5216	0,5216	0,5216	0,5216	0,5216
	Hp	0,5245	0,2476	0,2476	0,5230	0,5230	0,5230	0,5217	0,5107	0,5222	0,5230	0,5230	0,5230
	Hdm	0,9159	0,8064	0,8064	0,9127	0,9127	0,9127	<b>0,9167</b>	0,8888	0,9164	0,9135	0,9135	0,9135
	Hdmp	0,9162	0,6841	0,6841	0,9132	0,9132	0,9132	<b>0,9168</b>	0,8863	0,9165	0,9130	0,9130	0,9130

		Area			REF			Tizhoosh			FCM		
		$\varphi(x) = x$	$\varphi(x) = x^2$	$\varphi(x) = x^{1/2}$	$REF(x,y) = 1- x-y $	$REF(x,y) = 1- x-y ^2$	$REF(x,y) = (1- x-y )^2$	$\varphi(x) = x$	$\varphi(x) = x^2$	$\varphi(x) = x^{1/2}$	1,5	3	4,5
Casa	Umbral	63 123	63 123	63 123	105 192	91 173	106 193	61 121	123 209	61 122			
	H	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706
	Hp	0,6591	0,6591	0,6591	0,6312	<b>0.6632</b>	0,6290	0,6574	0,5888	0,6583	0,502	0,502	0,502
	Hdm	0,9069	0,9069	0,9069	0,9095	0,8954	0,91	0,9072	0,9177	0,9071	<b>0.9094</b>	<b>0.9094</b>	<b>0.9094</b>
	Hdmp	<b>0.9030</b>	<b>0.9030</b>	<b>0.9030</b>	0,9029	0,8990	<b>0.9030</b>	0,9029	0,9001	<b>0.9030</b>	0,8694	0,8694	0,8694
Flores	Umbral	57 135	57 135	57 135	60 132	60 131	60 132	55 134	71 140	55 134			
	H	0,7346	0,7346	0,7346	0,7346	0,7346	0,7346	0,7346	0,7346	0,7346	0,7346	0,7346	0,7346
	Hp	0,7504	0,7504	0,7504	0,7491	0,7492	0,7491	<b>0.7519</b>	0,7399	<b>0.7519</b>	0,6087	0,6087	0,6087
	Hdm	<b>0,9448</b>	<b>0,9448</b>	<b>0,9448</b>	0,9442	0,9441	0,9442	0,9447	0,9426	0,9447	0,9338	0,9338	0,9338
	Hdmp	0,9485	0,9485	0,9485	0,9482	0,9482	0,9482	<b>0.9487</b>	0,9435	<b>0.9487</b>	0,9027	0,9027	0,9027
Paisaje	Umbral	93 203	93 203	93 203	101 195	107 197	100 195	90 204	100 204	90 203			
	H	0,6967	0,6967	0,6967	0,6967	0,6967	0,6967	0,6967	0,6967	0,6967	0,6967	0,6967	0,6967
	Hp	0,6738	0,6738	0,6738	0,6836	0,6817	<b>0.6835</b>	0,6714	0,6636	0,6726	0,5539	0,5539	0,5539
	Hdm	0,9273	0,9273	0,9273	0,9229	0,9215	0,9232	0,928	<b>0.9307</b>	0,9275	0,8975	0,8975	0,8975
	Hdmp	<b>0.9220</b>	<b>0.9220</b>	<b>0.9220</b>	0,9207	0,9190	0,9209	0,9219	0,9217	0,9219	0,8523	0,8523	0,8523
Poliedros	Umbral	132 204	132 204	132 204	131 205	130 205	131 205	83 138	141 207	131 204			
	H	0,7412	0,7412	0,7412	0,7412	0,7412	0,7412	0,7412	0,7412	0,7412	0,7412	0,7412	0,7412
	Hp	0,7187	0,7187	0,7187	0,7183	0,7191	0,7183	0,7033	0,7089	<b>0.7194</b>	0,6177	0,6177	0,6177
	Hdm	0,9401	0,9401	0,9401	0,9403	0,9402	0,9403	<b>0.9448</b>	0,9402	0,9401	0,9448	0,9448	0,9448
	Hdmp	0,9424	0,9424	0,9424	<b>0.9425</b>	<b>0.9425</b>	<b>0.9425</b>	0,9338	0,9418	<b>0.9425</b>	0,9191	0,9191	0,9191

## Tabla de resultados el nuevo algoritmo basado en homogeneidades

	Arroz				Cubos				Rueda				Periodico			
	H1	H2	H3	H4	H1	H2	H3	H4	H1	H2	H3	H4	H1	H2	H3	H4
umbral	234	36	57	46	7	14	219	31	7	110	63	70	87	191	254	195

	Casa				Flores				Paisaje				Poliedros			
	H1	H2	H3	H4	H1	H2	H3	H4	H1	H2	H3	H4	H1	H2	H3	H4
umbral	8	75	0	62	8	39	53	52	85	81	85		56	101	128	
	85	155	242	129	9	123	146	133	105	163	239		85		252	

H1= 1-max+min.

H2= 1-max+min (ponderada).

H3= 1-std.

H4= 1-std (ponderada).



# SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES CON TÉCNICAS DIFUSAS. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Alumna: Beatriz Olite Rey  
Tutor: Humberto Bustince  
Sola

15 de Julio de 2010

# Motivación

- Estudiar diferentes técnicas difusas para la segmentación de imágenes en grises. En concreto se implementarán algoritmos de umbralización haciendo uso de las REF's, el área y la entropía. También se implementará un método basado en el clustering como es el FCM.
- Estudio de resultados utilizando la medida de la homogeneidad. Se concluye que es un buen método de comparación y se desarrollará un nuevo método de segmentación basado en la maximización de homogeneidad.

# Índice

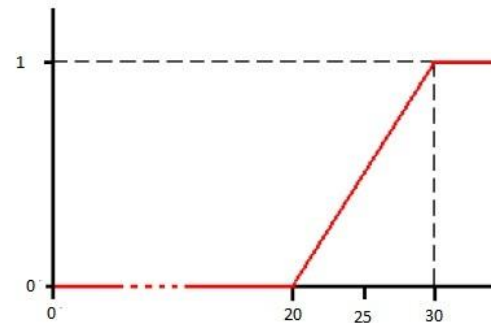
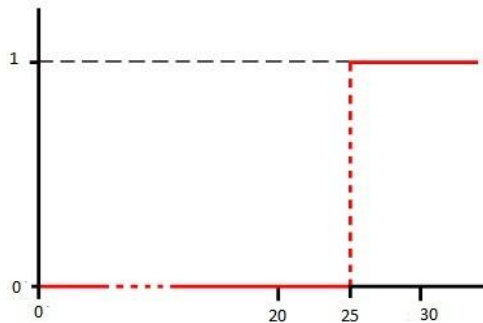
- Preliminares
- Métodos de segmentación
- Resultados
- Nuevo algoritmo
- Conclusiones

# Preliminares

- **Conjunto difuso:** Un conjunto difuso  $A$  definido sobre un universo finito y no vacío  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  viene dado por:

$$A: \{(u_i, \mu_A(u_i)) \mid u_i \in U\}$$

donde  $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$  es tal que  $\mu_A(u_i) \in [0,1]$  denota el grado de pertenencia del elemento  $u_i$  al conjunto  $A$ .

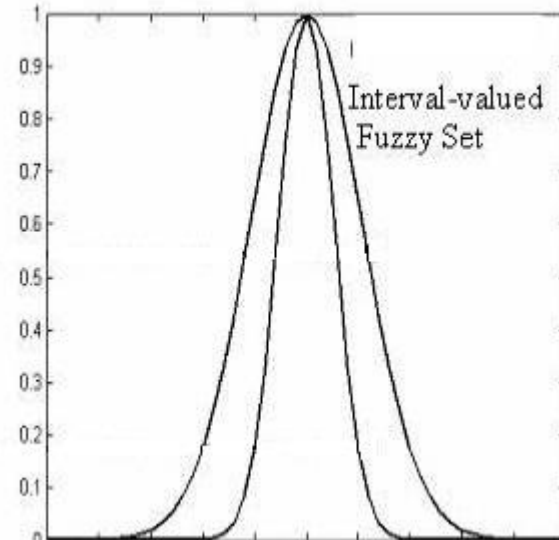


# Preliminares

- **Conjunto intervalo-valorado difuso:** Un conjunto intervalo-valorado difuso  $A$  definido sobre el universo  $U$  viene definido por:

$$A = \{(u_i, M_A(u_i)) \mid u_i \in U\}$$

donde la función  $M_A: U \rightarrow L([0,1])$  es tal que  $M_A(u_i) = [M_{AL}(u_i), M_{AU}(u_i)]$  denota el grado de pertenencia del elemento  $u_i$  al conjunto  $A$ .



# Preliminares

- **Función de agregación:** una función de agregación de dimensión  $n$  es una función no decreciente  $M : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  tal que  $M(0, \dots, 0) = 0$  y  $M(1, \dots, 1) = 1$ .

En este proyecto se utilizarán funciones de agregación idempotentes (compensativas) que cumplen la propiedad  $M(x, \dots, x) = x$  para todo  $x$ .

# Preliminares

**Función de equivalencia restringida (REF):** una función REF:  $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  se dice función de equivalencia restringida si satisface las siguientes condiciones:

- (1)  $REF(x, y) = REF(y, x)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ ;
- (2)  $REF(x, y) = 1$  si y sólo si  $x = y$ ;
- (3)  $REF(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = 1, y = 0$  o  $x = 0, y = 1$ ;
- (4)  $REF(x, y) = REF(c(x), c(y))$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ , siendo  $c$  una negación fuerte;
- (5) Para todo  $x, y, z \in [0, 1]$ , si  $x \leq y \leq z$ , entonces  $REF(x, y) \geq REF(x, z)$  and  $REF(y, z) \geq REF(x, z)$ .

$$REF(x, y) = \varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|)$$

$$\text{con } c(x) = \varphi_2^{-1}(1 - \varphi_2(x))$$



# Preliminares

- **Similaridad:** Sea  $REF: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  una función de equivalencia restringida y sea  $M$  una función de agregación que satisface  $M(x_1, \dots, x_n) = 0$  si y solo si  $x_1 = \dots = x_n = 0$  y  $M(x_1, \dots, x_n) = 1$  si y solo si  $x_1 = \dots = x_n = 1$ . Bajo estas condiciones la similaridad es:

$SM: F(x) \times F(x) \rightarrow [0, 1]$ , dado por

$$SM(A, B) = REF(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))$$

Satisface las siguientes características:

- (1)  $SM(A, B) = SM(B, A)$  para todo  $A, B \in F(x)$ ;
- (2)  $SM(A, A_c) = 0$  si y solo si  $A$  es no difuso;
- (3)  $SM(A, B) = 1$  si y solo si  $A = B$ ;
- (4) Si  $A \leq B \leq C$ , entonces  $SM(A, B) \geq SM(A, C)$  y  $SM(C, B) \geq SM(C, A)$ ;
- (5)  $SM(A_c, B_c) = SM(A, B)$ ;



# Preliminares

• **Entropía de un conjunto difuso:** Una función real  $E: FS(U) \rightarrow [0, 1]$  es llamada entropía de  $FS(U)$ , si  $E$  tiene las siguientes propiedades:

- (1)  $E(A) = 0$  sí y sólo si  $A$  es no difuso;
- (2)  $E(A) = 1$  si y solo si  $A = \{(u_i, \mu_A(u_i) = 0.5) \mid u_i \in U\}$ ;
- (3)  $E(A) \leq E(B)$  si  $A$  refina  $B$ ; esto es,  $\mu_A(u_i) \leq \mu_B(u_i)$  cuando  $\mu_B(u_i) \leq 0.5$  y  $\mu_A(u_i) \geq \mu_B(u_i)$  cuando  $\mu_B(u_i) \geq 0.5$ ;
- (4)  $E(A) = E(A_N)$ , dónde  $A_N = \{(u_i, 1 - \mu_A(u_i)) \mid u_i \in U\}$ .

dónde  $FS$  es un conjunto difuso.

# Preliminares

- **Entropía de un conjunto intervalo-valorado:** Una función real  $\varepsilon_F : IVFS(U) \rightarrow \mathbb{R}^+$  es llamada entropía de un conjunto intervalo-valorado difuso si  $\varepsilon_F$  satisface las siguientes propiedades:
  - (1)  $\varepsilon_F(A) = 0$  si y solo si  $A \in FS(U)$ ;
  - (2)  $\varepsilon_F(A) = 1$  si y solo si  $M_{AL}(u_i) = 0$  y  $M_{AU}(u_i) = 1$  para todo  $u_i \in U$ ;
  - (3)  $\varepsilon_F(A) = \varepsilon_F(A_N)$  para todo  $A \in IVFS(U)$ , donde  $A_N = \{ (u_i, M_{AN} = [1 - M_{AU}(u_i), 1 - M_{AL}(u_i)]) \mid u_i \in U \}$ ;
  - (4) Si  $A \leq B$ ; esto es, si  $M_{AL}(u_i) \leq M_{BL}(u_i)$  y  $M_{BU}(u_i) \leq M_{AU}(u_i)$  para todo  $u_i \in U$  entonces  $\varepsilon_F(A) \geq \varepsilon_F(B)$ .

Entropía: 
$$\varepsilon_F(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{AU}(u_i) - M_{AL}(u_i)$$

# Preliminares

- **Homogeneidad:** Una función  $H_L: RS(X) \rightarrow [0, 1]$  se llama homogeneidad local asociada a una negación fuerte  $N$ , si satisface las siguientes condiciones:
  1. Si  $P(x, y) = k$  para todo  $(x, y) \in A$ , entonces  $H_L(P) = 1$ ;
  2.  $H_L(P) = H_L(c(P))$ .

La construcción de la homogeneidad de la región se hará de la siguiente forma:

$$H_L(P) = 1 - V_{(x,y) \in A} P(x,y) + \wedge_{(x,y) \in A} P(x,y)$$

donde  $V_{(x,y) \in A} P(x,y)$  es el píxel con máximo valor de la región y  $\wedge_{(x,y) \in A} P(x,y)$  es el píxel con menor valor de la región.

# Preliminares

- En concreto y en este proyecto se han usado las siguientes construcciones de homogeneidad local:

1.  $HL(P) = 1 - \text{MAX} + \text{MIN}$  en el intervalo  $[\text{min}, \text{max}]$

$$2. HL(P) = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{(x,y) \in P} P(x,y) - m_p}{\text{Card}(P)}}$$

en el intervalo  $[\text{med}(1-\text{std}), \text{med}(1-\text{std})+\text{std}]$

Donde  $m_p = \frac{1}{\text{Card}(P)} \sum_{(x,y) \in P} P(x,y) - m_p$

respecto a  $c(x) = 1-x$

# Métodos de segmentación

- **Qué es**

La segmentación de una imagen es el proceso de separar los objetos que aparecen en ella.

- **Técnicas clásicas**

- Mínimo entre máximos.

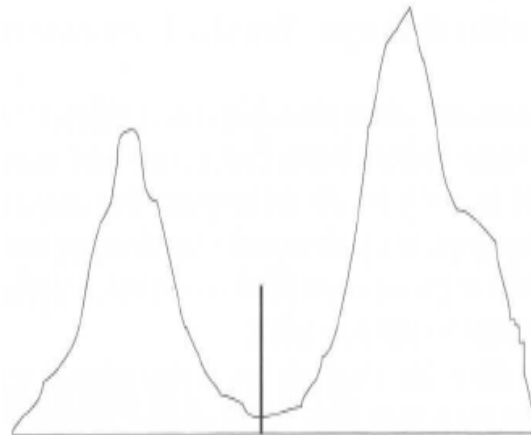
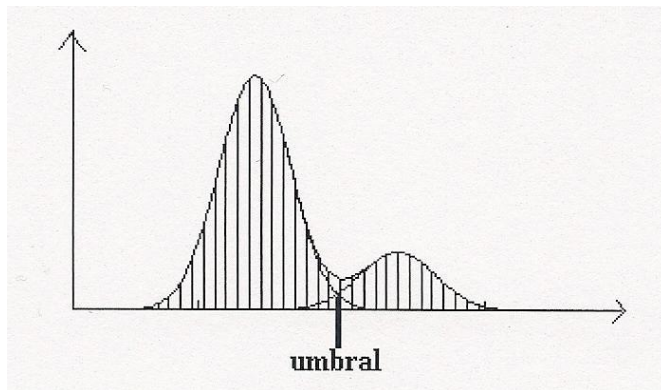


Figura 7.11 Mínimo entre máximos.

# Métodos de segmentación

## •Media entre máximos.



## •Método iterativo de la media de las medias.

1.- Cálculo de las medias con el umbral actual:

$$m_1(\text{iter}) = \frac{\sum_{k=0}^{u(\text{iter})} kh(k)}{\sum_{k=0}^{u(\text{iter})} h(k)} \quad m_2(\text{iter}) = \frac{\sum_{k=u(\text{iter})+1}^{K_{\max}} kh(k)}{\sum_{k=u(\text{iter})+1}^{K_{\max}} h(k)}$$

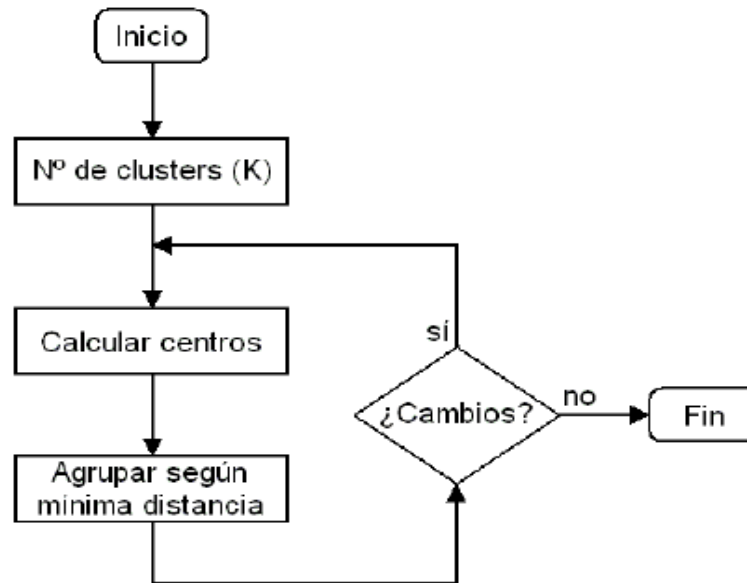
2.-Nuevo cálculo del umbral con dichas medias:

$$U(\text{iter}+1) = (m_1(\text{iter}) + m_2(\text{iter})) / 2$$

3.-Se vuelve a paso 1

# Métodos de segmentación

## •K-means





# Métodos de segmentación

- **Técnicas difusas implementadas**

- Utilizando funciones de equivalencia restringida

## Esquema del algoritmo:

(1) Construir conjuntos difusos

$Q_t$ :

FOR t:=0 TO L-1 DO

(1-1) Dividir la imagen en dos clases  $C_b(t)$  y  $C_o(t)$ . para cada una de clases calcular su correspondiente media:  $m_b(t)$  y  $m_o(t)$ .

(1-2) Definir la función de pertenencia que representa  $Q_t$  mediante la proposición 1.

ENDFOR

(2) Seleccionar una REF y una agregación M.

(3) FOR t:=0 TO L-1 DO

(3-1) Calcular  $SM(\mathbf{I}, Q_t) = h(q)REF_2(1, \mu_{Q_t}(q))$

ENDFOR

(4) Coger como mejor umbral el valor de t asociado al conjunto  $Q_t$  correspondiente con el mejor valor de SM.



# Métodos de segmentación

- Algoritmo del Área

## Esquema del algoritmo:

(1) Seleccionar  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$

(2) FOR t:=0 TO L-1 DO

(2-1) Calcular el área:  $A(Q_t) =$

$$\sum_{q=0}^t h(q) \varphi_1^{-1} \left( 1 - \left| \varphi_2 \left( \frac{q}{L-1} \right) - \varphi_2 \left( \frac{m_b(t)}{L-1} \right) \right| \right) + \sum_{q=t+1}^{L-1} h(q) \varphi_1^{-1} \left( 1 - \left| \varphi_2 \left( \frac{q}{L-1} \right) - \varphi_2 \left( \frac{m_o(t)}{L-1} \right) \right| \right)$$

ENDFOR

(3) Tomar como mejor valor umbral el valor de t asociado al conjunto  $Q_t$  de mejor área.

- Ésta versión del algoritmo es más eficiente que el anterior ya que al mismo tiempo se lleva a cabo la construcción de los conjuntos difusos y de su área.

# Métodos de segmentación

- **Utilizando conjuntos intervalo-valorados difusos.**

## Esquema del algoritmo:

- (1) Asignar  $L$  conjuntos difusos (con  $t \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ ) para cada imagen  $Q$ .
- (2) Tomar  $\alpha \in (1, \infty)$ ;
- (3) Asociar a cada FS su correspondiente IVFS construido mediante el método anterior.
- (4) Para cada IVFS calcular su entropía .

$$\varepsilon_F(Q_t) = \frac{1}{\sum_{q=0}^{L-1} h(q)} \sum_{q=0}^{L-1} h(q) (\mu_{\tilde{Q}_t}^{\frac{1}{\alpha}}(q) - \mu_{\tilde{Q}_t}^{\alpha}(q))$$

- (5) Tomar como mejor valor umbral  $t$  aquel asociado al IVFS con menor entropía.

# Métodos de segmentación

## • FCM

### Esquema del algoritmo:

1. Inicializar la matriz de pertenencias.
2. Calcular los centros de cada cluster.
3. Actualizar la matriz de pertenencias.
4. Si la mejora de la función objetivo  $J(U, V)$  es menor que un determinado umbral, finalizar; si no, volver al paso (2).

### •Centros

$$V_i = \frac{\sum_{j=1}^n (U_{ij})^m X_j}{\sum_{j=1}^n (U_{ij})^m} \quad 1 \leq i \leq c$$

### •Pertenencias

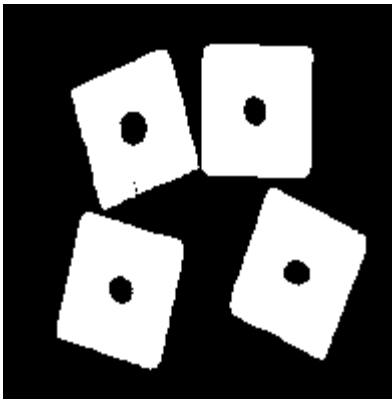
$$U_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^c \left( \frac{\|x_j - v_i\|}{\|x_j - v_k\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad 1 \leq i \leq c, 1 \leq j \leq n$$

- El resultado de este algoritmo puede depender de la iniciación de la matriz de pertenencias

# Resultados

Como método de comparación de los resultados obtenidos se han utilizado diferentes construcciones de homogeneidad.

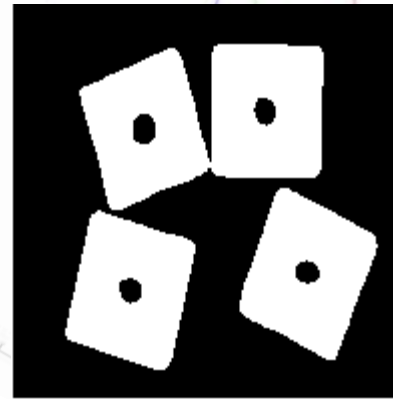
- **Primera homogeneidad:**  $H = 1 - \max + \min$ . Se tienen en cuenta los píxeles con mayor y menor valor de cada zona.



Área  $\varphi(x) = x^2$   
 $H = 0,502$



REF. REF(x, y)  
 $= 1 - |x - y|^2$   
 $H = 0,502$



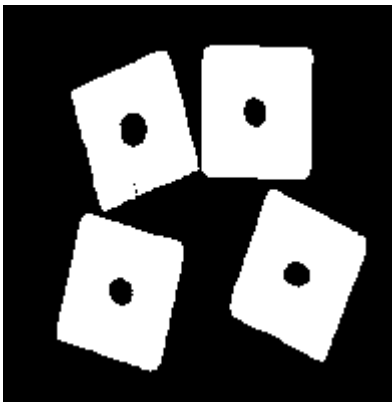
Tizhoosh  $\varphi(x) = x$   
 $H = 0,502$



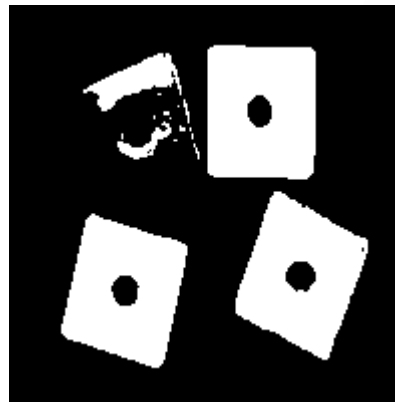
FCM  
 $H = 0,502$

# Resultados

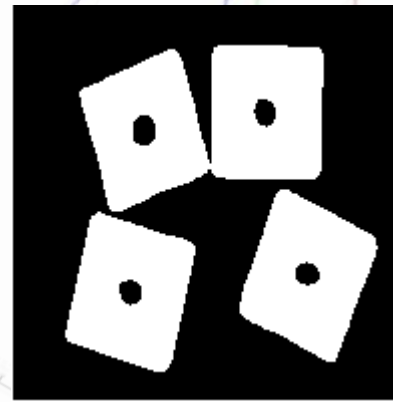
• **Segunda homogeneidad:** Homogeneidad ponderada. Damos más importancia a las zonas más grandes.



Área  $\varphi(x) = x^2$   
H = 0.5745



REF(x, y) =  $1 - |x - y|^2$  Tizhoosh  $\varphi(x) = x$   
H = 0.5545



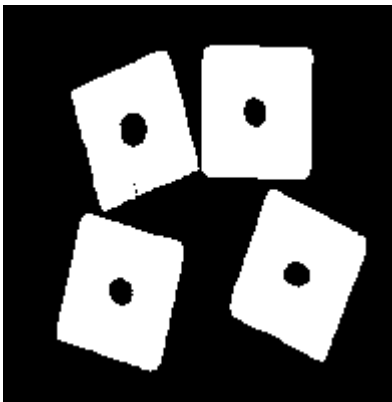
H = **0.5867**



FCM  
H = 0.5813

# Resultados

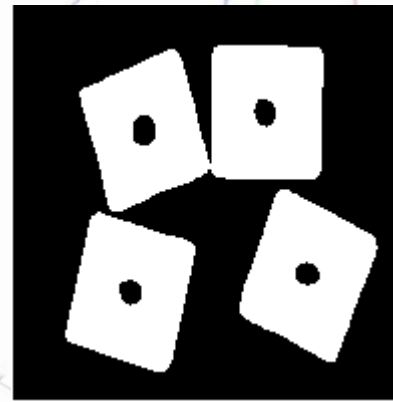
- **Tercera homogeneidad:** Homogeneidad con la media y la desviación típica. De ésta manera se tienen en cuenta todos los píxeles de la zona.



Área  $\varphi(x) = x^2$   
H = 0,8731



REF(x, y) =  $1 - |x - y|^2$  Tizhoosh  $\varphi(x) = x$   
H = 0,8505



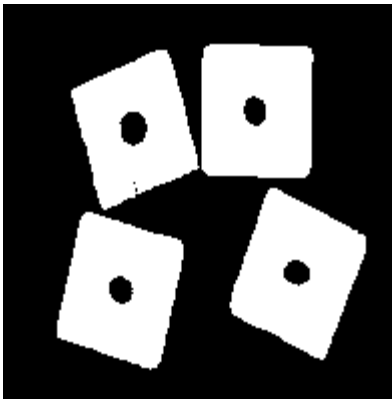
H = **0,8786**



FCM  
H = 0,8757

# Resultados

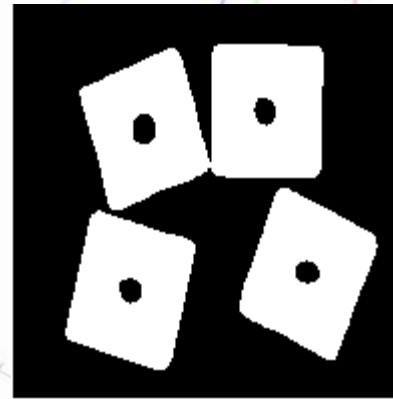
•**Cuarta homogeneidad:** Homogeneidad con la media y la desviación típica ponderada por píxeles de la zona. De ésta manera se tienen en cuenta todos los píxeles de la zona y damos importancia a las zonas más grandes.



Área  $\varphi(x) = x^2$   
H = 0.9034



REF(x, y) =  $1 - |x - y|$  Tizhoosh  $\varphi(x) = x$   
H = 0.8727

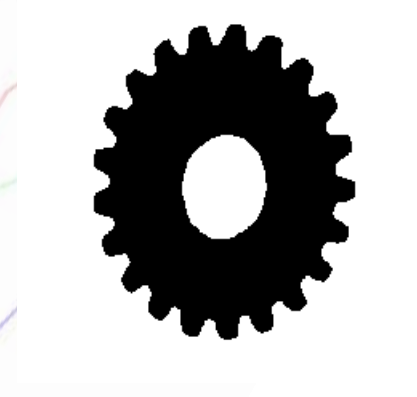
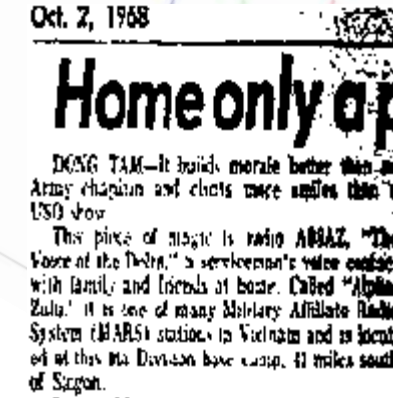
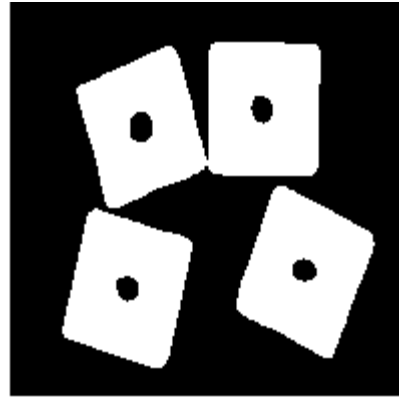
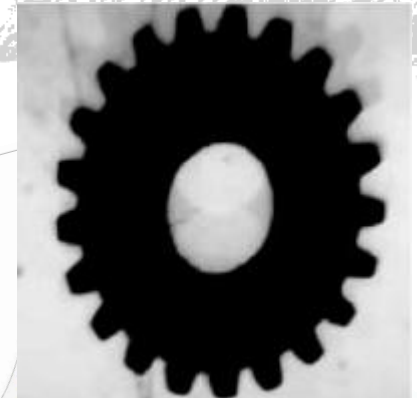
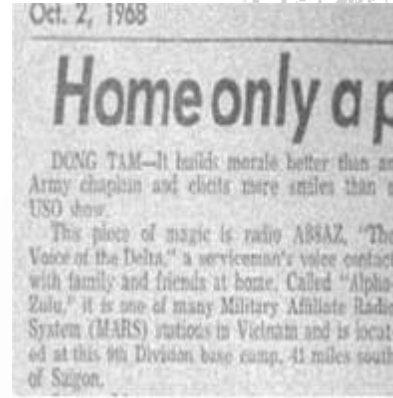
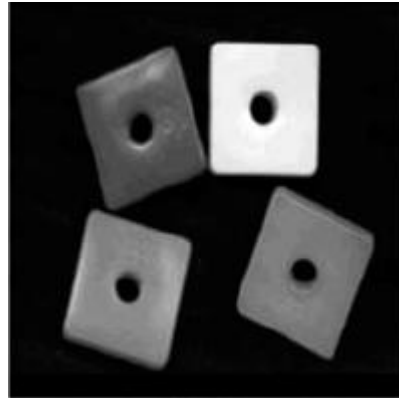
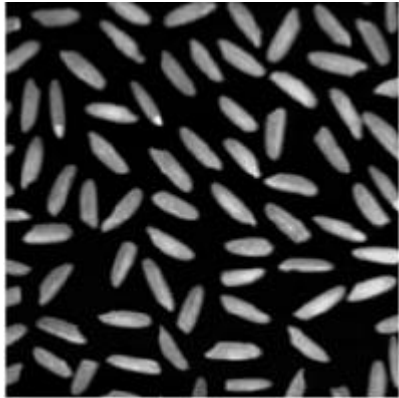


H = **0.9049**



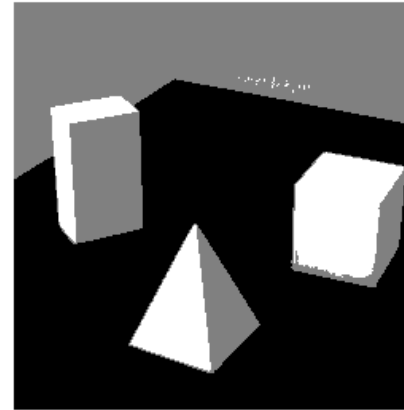
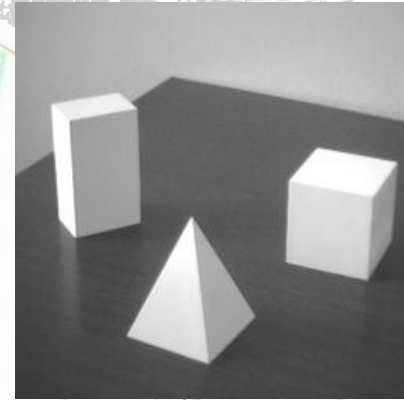
FCM  
H = 0.9019

# Resultados

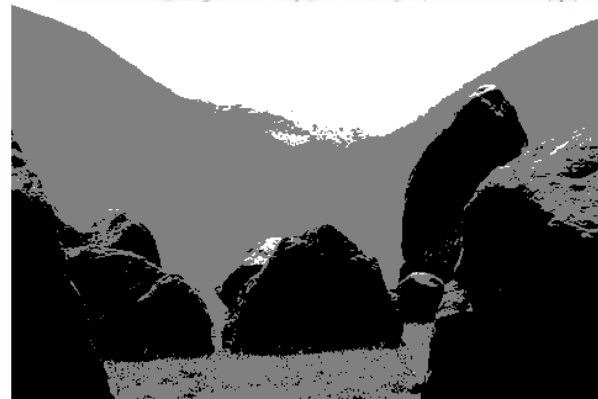




# Resultados



# Resultados



# Nuevo algoritmo

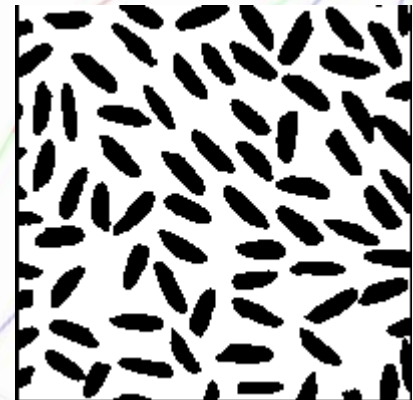
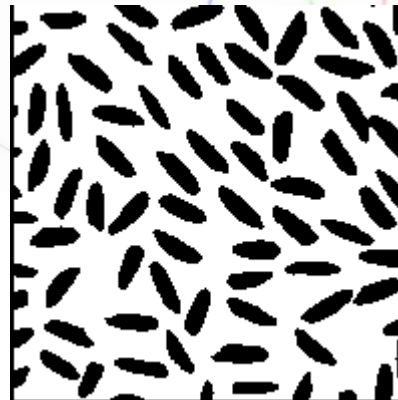
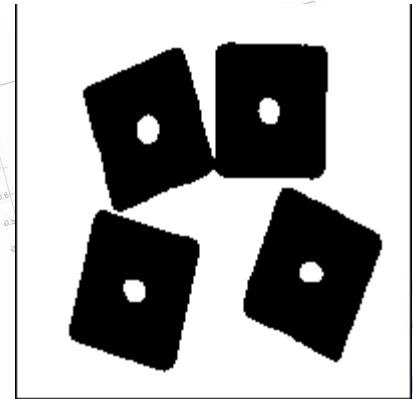
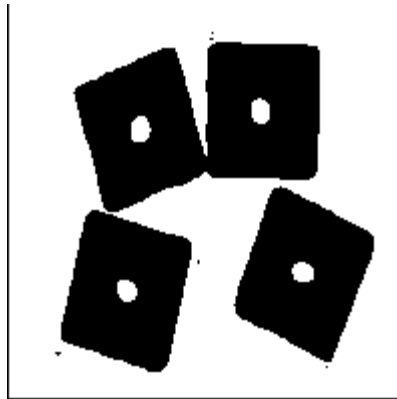
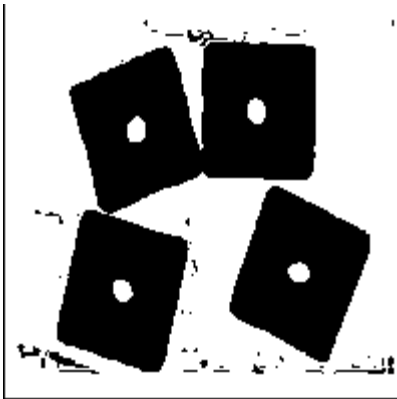
- Como se ha podido observar la homogeneidad es un buen método de comparación de resultados por lo que se propone un nuevo algoritmo de segmentación basado en la homogeneidad.
- **Esquema del algoritmo**
  - (1) FOR t:=0 TO L-1 DO
    - (1.1) Separar la imagen en zonas tales que:  
Zona1 = imagen (imagen  $\leq$  t)  
Zona2 = imagen (imagen  $>$  t)
    - (1.2) Calcular la homogeneidad local de cada zona.
    - (1.3) Calcular la homogeneidad total de la imagen como la agregacion de las homogeneidades locales.

ENFOR

(2) Tomar como mejor umbral t aquel asociado con la mayor homogeneidad total de la imagen.

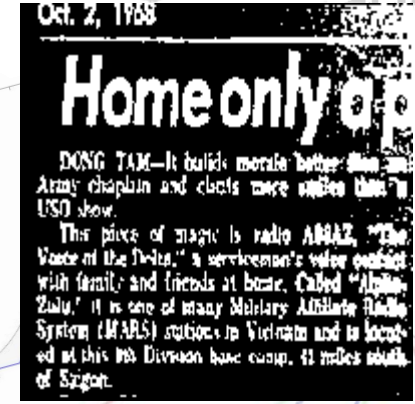
# Nuevo algoritmo

- Resultados



# Nuevo algoritmo

## • Resultados



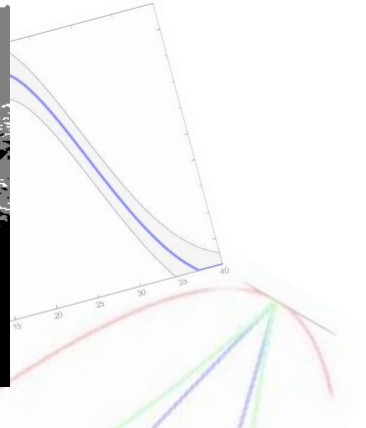
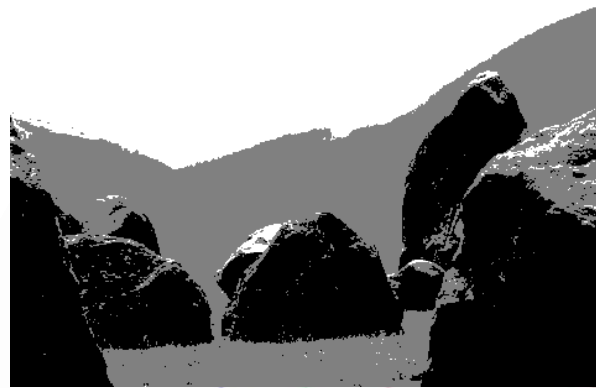
# Nuevo algoritmo

## • Resultados



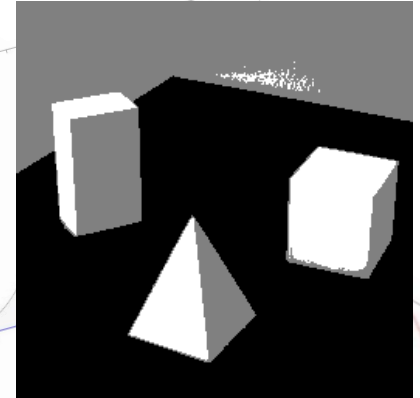
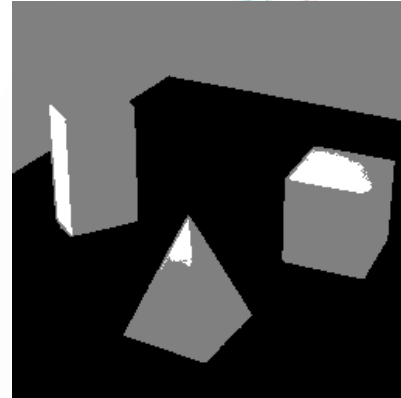
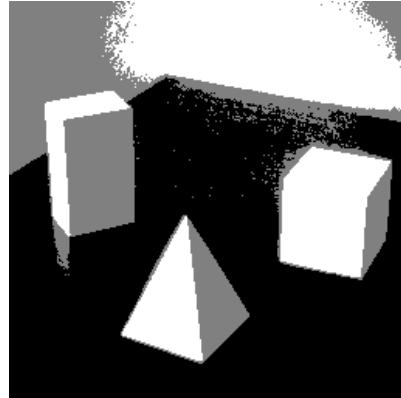
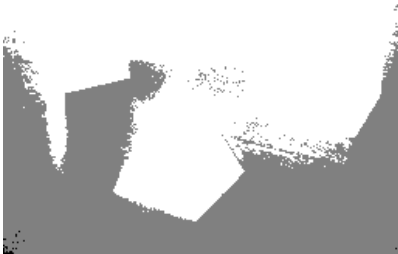
# Nuevo algoritmo

- **Resultados**



# Nuevo algoritmo

- **Resultados**





# Conclusiones

- Se han implementado diferentes algoritmos haciendo uso de conceptos de lógica difusa.
- Estudio de resultados haciendo uso de diferentes construcciones de homogeneidad.
- Se concluye que la homogeneidad es un buen método de comparación de resultados.
- Desarrollamos un nuevo método de segmentación de imágenes basado en la maximización de las homogeneidades obteniendo muy buenos resultados.
- Queda pendiente para un futuro el estudio mas amplio del nuevo algoritmo haciendo uso de diferentes homogeneidades.