Eduardo GARCÍA OSÉS

FUNCIONES

AMPLIACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑAZAS APLICADAS DE 4º ESO

TFM 2017

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Ampliación del concepto de función en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de 4º ESO

Eduardo García Osés

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Introducción general

Este trabajo fin de Máster tiene como objetivo estudiar la ampliación del concepto de función en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas en un curso de 4º ESO con alumnos procedentes del programa PMAR.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en ESO y en Bachillerato en relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre funciones apoyado en actividades con Geogebra, que se ha puesto en marcha en un aula de 4º de la ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Funciones en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones en el currículo y en los libros de texto en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En los primeros tres capítulos se muestran en forma de tabla los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del currículo vigente que hacen referencia a funciones. En el cuarto se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto 4º de ESO orientado a las enseñanzas aplicadas, así como en dos cursos anteriores y posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el quinto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

Funciones en el currículo vigente

En este primer capítulo se analizan los contenidos que aparecen en el currículo en ESO (Boletín Oficial de Navarra, Decreto 24/2015) y Bachillerato (Boletín Oficial de Navarra, Decreto 25/2015) con relación al tema de funciones. Dado que a partir de 3º de ESO las matemáticas presentan dos opciones, se escogen aquellas asignaturas que han cursado los alumnos así como aquellas que a priori cursarán en caso de realizar el Bachillerato: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas (3º y 4º ESO) y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (1º y 2º Bachillerato).

El análisis se muestra en tablas a partir de descriptores que revelan la continuidad o ausencia de los mismos a lo largo de los cursos. La mayoría de la información del currículo de la ESO corresponde al bloque 4: Funciones, mientras que en Bachillerato de Ciencias Sociales corresponde al bloque 3: Análisis.

1.1. Contenido en ESO

De la Tabla 1.1 a la Tabla 1.5 se presentan los contenidos relacionados con funciones en 2º, 3º y 4º de ESO respectivamente. Se evoluciona progresivamente desde la función lineal, pasando por la cuadrática, hasta terminar viendo en 4º ‘otros modelos de funciones’. Los contenidos relativos a interpretación de gráficas también can cobrando importancia según se avanza en la etapa.

Descriptor	Contenido 2º de ESO
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos.
Representación gráfica de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico). Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Bloque 4: Funciones El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).

Tabla 1.1: Contenidos en 2º de ESO (1)

Descriptor	Contenido 2º de ESO
Análisis de funciones	Bloque 4: Funciones Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
Estudio de familias de funciones	Bloque 4: Funciones Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
Organización de datos y tablas de valores	
Situaciones cotidianas	
Uso de tecnologías	Bloque 4: Funciones Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

Tabla 1.2: Contenidos en 2º de ESO (2)

Descriptor	Contenido 3º de ESO
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra Transformación de expresiones algebraicas con una indeterminada. Igualdades notables.
Representación gráfica de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).
Análisis de funciones	Bloque 4: Funciones Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
Estudio de familias de funciones	Bloque 4: Funciones Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.
Organización de datos y tablas de valores	Bloque 5: Estadística y Probabilidad Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. Gráficas estadísticas.

Tabla 1.3: Contenidos en 3º de ESO (1) (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

Descriptor	Contenido 3º de ESO
Situaciones cotidianas	Bloque 4: Funciones Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
Uso de tecnologías	

Tabla 1.4: Contenidos en 3º de ESO (2) (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

Descriptor	Contenido 4º de ESO
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra Polinomios: raíces y factorización. Utilización de identidades notables.
Representación gráfica de funciones	
Análisis de funciones	Bloque 4: Funciones La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
Estudio de familias de funciones	Bloque 4: Funciones Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales.
Organización de datos y tablas de valores	Bloque 5: Estadística y Probabilidad Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.
Situaciones cotidianas	Bloque 4: Funciones Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
Uso de tecnologías	

Tabla 1.5: Contenidos en 4º de ESO (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

1.2. Contenido en Bachillerato

En este apartado se presentan los contenidos relacionados con el estudio de funciones en las asignaturas de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias sociales I y II. Las siguientes tablas presentan los contenidos de 1º y 2º de Bachillerato respectivamente. En el primer curso se estudian varios tipos de funciones así como los conceptos de límite y derivada, que se utilizan en el segundo para realizar análisis de funciones.

Descriptor	Contenido 1º de Bachillerato
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra Polinomios. Operaciones. Descomposición en factores. Ecuaciones lineales, cuadráticas y reducibles a ellas, exponenciales y logarítmicas. Aplicaciones.
Representación gráfica de funciones	
Análisis de funciones	Bloque 3: Análisis Funciones reales de variable real. Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Características de una función. Idea intuitiva de límite de una función en un punto. Cálculo de límites sencillos. El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función. Aplicación al estudio de las asíntotas. Tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto.
Estudio de familias de funciones	Bloque 3: Análisis Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones reales de variable real: polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera, y racionales e irracionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos.
Organización de datos y tablas de valores	
Situaciones cotidianas	Bloque 3: Análisis Interpolación y extrapolación lineal y cuadrática. Aplicación a problemas reales. Resolución de problemas e interpretación de fenómenos sociales y económicos mediante funciones.
Uso de tecnologías	

Tabla 1.6: Contenidos en 1º de Bachillerato (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales)

Descriptor	Contenido 2º de Bachillerato
Álgebra de funciones	
Representación gráfica de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Resolución gráfica y algebraica. Bloque 3: Análisis Estudio y representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas sencillas a partir de sus propiedades locales y globales.
Análisis de funciones	Bloque 3: Análisis Continuidad. Tipos de discontinuidad. Estudio de la continuidad en funciones elementales y definidas a trozos. Aplicaciones de las derivadas al estudio de funciones polinómicas, racionales e irracionales sencillas, exponenciales y logarítimicas.
Estudio de familias de funciones	Bloque 3: Análisis Estudio y representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas sencillas a partir de sus propiedades locales y globales.
Organización de datos y tablas de valores	
Situaciones cotidianas	Bloque 3: Análisis Problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía.
Uso de tecnologías	

Tabla 1.7: Contenidos en 2º de Bachillerato (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales)

Capítulo 2

Criterios de evaluación de funciones en el currículo vigente

En este apartado se presentan los criterios de evaluación especificados por el currículo para cada curso y bloque de contenido. Estos criterios son una guía general para evaluar los contenidos ya vistos.

2.1. Criterios de evaluación en ESO

La Tabla 2.1, Tabla 2.2 y Tabla 2.3 presentan los criterios de evaluación para los cursos de 2º de ESO, 3º y 4º de ESO orientados a las enseñanzas aplicadas, respectivamente. El conocimiento sobre teoría de funciones tiene más peso en los primeros cursos de la ESO, para posteriormente pasar a un segundo plano en favor de la interpretación y análisis de gráficas asociadas a situaciones reales.

Descriptor	Criterios de evaluación 2º de ESO
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas. 7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.
Representación gráfica de funciones	Bloque 4: Funciones 1. Comprender el concepto de función. Utilizar las diferentes formas de presentación y reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.
Análisis de funciones	
Estudio de familias de funciones	Bloque 4: Funciones 2. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales o afín, utilizándolas para resolver problemas.
Organización de datos y tablas de valores	
Situaciones cotidianas	
Uso de tecnologías	

Tabla 2.1: Criterios de evaluación en 2º de ESO

Descriptor	**Criterios de evaluación 3º de ESO**
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado extrayendo la información relevante y transformándola.
Representación gráfica de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos y valorando y contrastando los resultados obtenidos. Bloque 4: Funciones 1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.
Análisis de funciones	
Estudio de familias de funciones	Bloque 4: Funciones 3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.
Organización de datos y tablas de valores	Bloque 5: Estadística y Probabilidad 1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.
Situaciones cotidianas	Bloque 4: Funciones 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.
Uso de tecnologías	

Tabla 2.2: Criterios de evaluación en 3º de ESO (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

Descriptor	Criterios de evaluación 4º de ESO
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 2. Utilizar con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.
Representación gráfica de funciones	
Análisis de funciones	
Estudio de familias de funciones	
Organización de datos y tablas de valores	Bloque 5: Estadística y Probabilidad 2. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo), valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.
Situaciones cotidianas	Bloque 4: Funciones 1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. 2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.
Uso de tecnologías	

Tabla 2.3: Criterios de evaluación en 4º de ESO (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

2.2. Criterios de evaluación en Bachillerato

Seguidamente se recogen los criterios de evaluación en las dos asignaturas de matemáticas del Bachillerato en Ciencias Sociales. Existe un paralelismo entre la evolución de los criterios de evaluación en ESO y Bachillerato. Como ocurría antes, en el primer curso tienen más peso criterios relacionados con el conocimiento de teoría de funciones, y más adelante ceden importancia a la aplicación de funciones en situaciones relacionadas con las ciencias sociales.

Descriptor	Criterios de evaluación 1º de Bachillerato
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 3. Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico situaciones relativas a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas y herramientas tecnológicas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas en contextos particulares.
Representación gráfica de funciones	Bloque 3: Análisis 1. Interpretar y representar gráficas de funciones reales teniendo en cuenta sus características y su relación con fenómenos sociales.
Análisis de funciones	Bloque 3: Análisis 3. Calcular límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias. 4. Conocer el concepto de continuidad y estudiar la continuidad en un punto en funciones polinómicas, racionales, logarítmicas y exponenciales. 5. Conocer e interpretar geométricamente la tasa de variación media en un intervalo y en un punto como aproximación al concepto de derivada y utilizar las reglas de derivación para obtener la función derivada de funciones sencillas y de sus operaciones.
Estudio de familias de funciones	
Organización de datos y tablas de valores	
Situaciones cotidianas	Bloque 3: Análisis 2. Interpolar y extrapolar valores de funciones a partir de tablas y conocer la utilidad en casos reales.
Uso de tecnologías	

Tabla 2.4: Criterios de evaluación en 1º de Bachillerato (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales)

Descriptor	**Criterios de evaluación 2º de Bachillerato**
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.
Representación gráfica de funciones	
Análisis de funciones	Bloque 3: Análisis 1. Analizar e interpretar fenómenos habituales de las ciencias sociales de manera objetiva traduciendo la información al lenguaje de las funciones y describiéndolo mediante el estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características. 3. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables utilizando técnicas de integración inmediata.
Estudio de familias de funciones	
Organización de datos y tablas de valores	
Situaciones cotidianas	Bloque 3: Análisis 2. Utilizar el cálculo de derivadas para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función, para resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social y extraer conclusiones del fenómeno analizado.
Uso de tecnologías	

Tabla 2.5: Criterios de evaluación en 2º de Bachillerato (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales)

Capítulo 3

Estándares de aprendizaje de funciones en el currículo vigente

El currículo que emana de la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa contiene novedades respecto al correspondiente a Ley Orgánica de Educación (LOE). Una de ellas es la aparición de los estándares de aprendizaje evaluables, que son una concreción de los criterios de evaluación en subapartados más específicos.

3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO

A continuación se presentan los estándares de aprendizaje para los cursos de 2º de ESO, 3º y 4º de ESO orientados a las enseñanzas aplicadas, respectivamente. En algunos casos los estándares son concreciones de los criterios de evaluación, y en otras añaden nuevo contenido no presente en el criterio del que proceden. A diferencia de lo visto anteriormente, en los estándares se observa que sí se otorga importancia a la interpretación de gráficas desde los primeros cursos de la ESO.

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 2º de ESO
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas. 6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. 6.3. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. 7.1. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma. 7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.
Representación gráfica de funciones	Bloque 4: Funciones 1.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función. 1.3. Relaciona las diferentes expresiones de una función.
Análisis de funciones	Bloque 4: Funciones 1.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

Tabla 3.1: Estándares de aprendizaje evaluables en 2º de ESO (1)

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 2º de ESO
Estudio de familias de funciones	Bloque 4: Funciones 2.1. Reconoce y representa una función lineal o afín a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente. 2.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores. 2.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal o afín existente entre dos magnitudes y la representa.
Organización de datos y tablas de valores	
Situaciones cotidianas	Bloque 4: Funciones 1.4. Describe una situación a partir de de la tabla o gráfica que la modeliza. 1.5. Compara diferentes situaciones a partir de las tablas o gráficas que las modelizan.
Uso de tecnologías	Bloque 4: Funciones 2.4. Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento.

Tabla 3.2: Estándares de aprendizaje evaluables en 2º de ESO (2)

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 3.1. Suma, resta y multiplica polinomios, expresando el resultado en forma de polinomio ordenado y aplicándolos a ejemplos de la vida cotidiana. 3.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia y las aplica en un contexto adecuado.

Tabla 3.3: Estándares de aprendizaje 3º ESO (1) (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

Descriptor	**Estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO**
Representación gráfica de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 4.1. Resuelve ecuaciones de segundo grado completas e incompletas mediante procedimientos algebraicos y gráficos. 4.2. Resuelve sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos o gráficos. Bloque 4: Funciones 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente. 3.1. Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características.
Análisis de funciones	
Estudio de familias de funciones	Bloque 4: Funciones 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto- pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente. 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.
Organización de datos y tablas de valores	Bloque 5: Estadística y Probabilidad 1.4. Elabora tablas de frecuencias, relaciona los distintos tipos de frecuencias y obtiene información de la tabla elaborada. 1.5. Construye, con la ayuda de herramientas tecnológicas si fuese necesario, gráficos estadísticos adecuados a distintas situaciones relacionadas con variables asociadas a problemas sociales, económicos y de la vida cotidiana.

Tabla 3.4: Estándares de aprendizaje 3º ESO (2) (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO
Situaciones cotidianas	Bloque 2: Números y Álgebra 4.3. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido. Bloque 4: Funciones 1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica, interpretándolos dentro de su contexto.

Tabla 3.5: Estándares de aprendizaje 3º ESO (3) (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 4º de ESO
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 2.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico. 2.2. Realiza operaciones de suma, resta, producto y división de polinomios y utiliza identidades notables. 2.3. Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza, mediante la aplicación de la regla de Ruffini.
Representación gráfica de funciones	Bloque 4: Funciones 1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional, asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas. 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión.
Análisis de funciones	Bloque 4: Funciones 1.3. Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad). 1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.

Tabla 3.6: Estándares de aprendizaje 4º ESO (1) (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

Descriptor	Estándares de aprendizaje evaluables en 4º de ESO
Estudio de familias de funciones	Bloque 4: Funciones 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial.
Organización de datos y tablas de valores	Bloque 5: Estadística y Probabilidad 2.2. Elabora tablas de frecuencias a partir de los datos de un estudio estadístico, con variables discretas y continuas. 2.4. Representa gráficamente datos estadísticos recogidos en tablas de frecuencias, mediante diagramas de barras e histogramas.
Situaciones cotidianas	Bloque 4: Funciones 1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores. 1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, y exponenciales. 2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.
Uso de tecnologías	Bloque 4: Funciones 2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos. 2.5. Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.

Tabla 3.7: Estándares de aprendizaje 4º ESO (2) (Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas)

3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato

De la Tabla 3.8 a la Tabla 3.11 se presentan los estándares de aprendizaje de los cursos de 1º y 2º de Bachillerato en Ciencias Sociales respectivamente. A diferencia de los criterios de evaluación, en el caso de los estándares aparecen de forma más explícita elementos de teoría de funciones tales como límites, derivadas e integrales. El peso en este caso entre teoría y aplicaciones prácticas está más equilibrado.

Descriptor	Estándares de aprendizaje en 1º de Bachillerato
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 3.1. Utiliza de manera eficaz el lenguaje algebraico para representar situaciones planteadas en contextos reales.
Representación gráfica de funciones	Bloque 3: Análisis 1.2. Selecciona de manera adecuada y razonadamente ejes, unidades y escalas reconociendo e identificando los errores de interpretación derivados de una mala elección, para realizar representaciones gráficas de funciones.
Análisis de funciones	Bloque 3: Análisis 3.1. Calcula límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias de una función. 3.2. Calcula, representa e interpreta las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales. 4.1. Examina, analiza y determina la continuidad de la función en un punto para extraer conclusiones en situaciones reales. 5.1. Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geométricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real. 5.2. Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función y obtener la recta tangente a una función en un punto dado
Estudio de familias de funciones	
Organización de datos y tablas de valores	

Tabla 3.8: Estándares de aprendizaje 1º Bachillerato (1) (Matemáticas Aplicadas a las CCSS)

Descriptor	Estándares de aprendizaje en 1º de Bachillerato
Situaciones cotidianas	Bloque 3: Análisis 1.1. Analiza funciones expresadas en forma algebraica, por medio de tablas o gráficamente, y las relaciona con fenómenos cotidianos, económicos, sociales y científicos extrayendo y replicando modelos. 2.1. Obtiene valores desconocidos mediante interpolación o extrapolación a partir de tablas o datos y los interpreta en un contexto.
Uso de tecnologías	Bloque 3: Análisis 1.3. Estudia e interpreta gráficamente las características de una función comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados.

Tabla 3.9: Estándares de aprendizaje 1º Bachillerato (2) (Matemáticas Aplicadas a las CCSS)

Descriptor	Estándares de aprendizaje en 2º de Bachillerato
Álgebra de funciones	Bloque 2: Números y Álgebra 2.1. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, el sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales.
Representación gráfica de funciones	Bloque 3: Análisis 2.1. Representa funciones y obtiene la expresión algebraica a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales y extrae conclusiones en problemas derivados de situaciones reales.
Análisis de funciones	Bloque 3: Análisis 1.1. Modeliza con ayuda de funciones problemas planteados en las ciencias sociales y los describe mediante el estudio de la continuidad, tendencias, ramas infinitas, corte con los ejes, etc. 1.3. Estudia la continuidad en un punto de una función elemental o definida a trozos utilizando el concepto de límite. 3.1. Aplica la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas de funciones elementales inmediatas. 3.2. Aplica el concepto de integral definida para calcular el área de recintos planos delimitados por una o dos curvas.

Tabla 3.10: Estándares de aprendizaje 2º Bachillerato (1) (Matemáticas Aplicadas a las CCSS)

Descriptor	**Estándares de aprendizaje en 2º de Bachillerato**
Estudio de familias de funciones	Bloque 3: Análisis 1.2. Calcula las asíntotas de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas.
Organización de datos y tablas de valores	
Situaciones cotidianas	Bloque 3: Análisis 2.2. Plantea problemas de optimización sobre fenómenos relacionados con las ciencias sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.
Uso de tecnologías	

Tabla 3.11: Estándares de aprendizaje 2º Bachillerato (2) (Matemáticas Aplicadas a las CCSS)

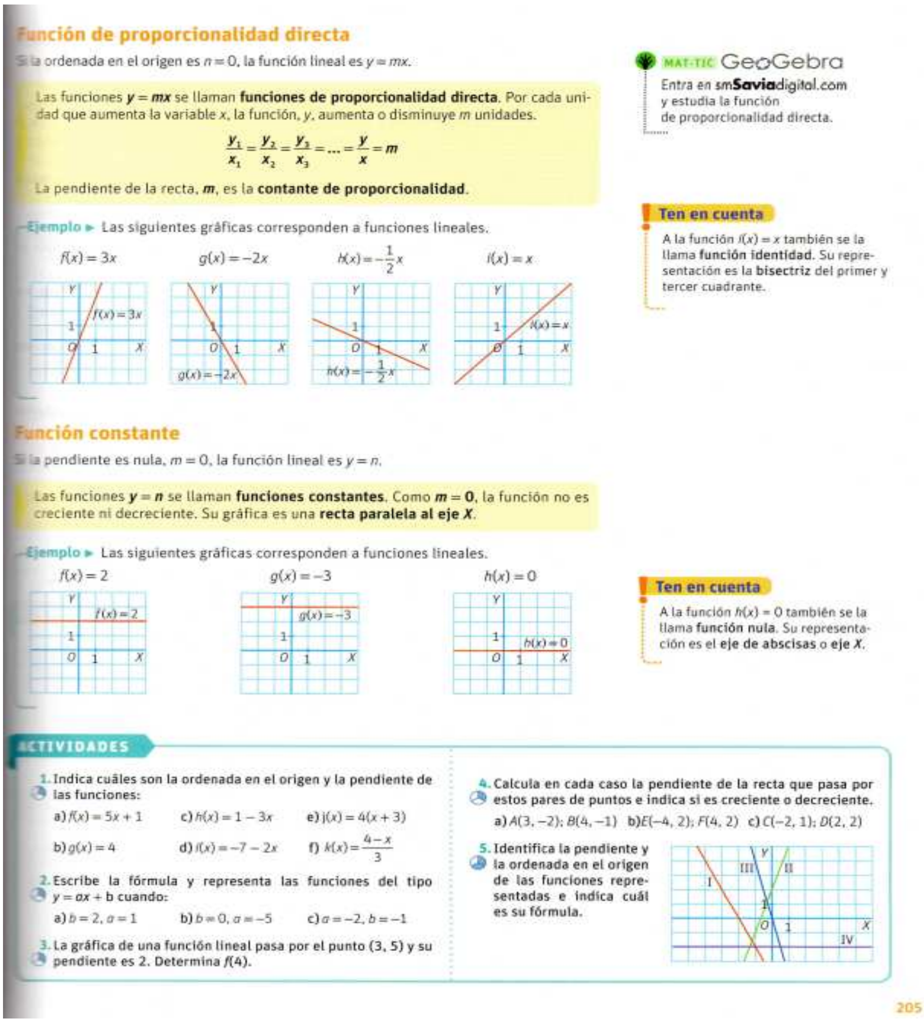
Capítulo 4

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre funciones polinómicas y racionales en los libros de texto y su relación con el currículo

En apartados anteriores se ha analizado la presencia de las funciones en el currículo educativo tanto en el curso objetivo como en los dos cursos anteriores y posteriores. Sin embargo, la enseñanza se apoya en otros materiales que utilizan tanto profesores como alumnos.

Entre esos materiales se encuentran los libros de texto, los cuales se estudian en este apartado (ver editorial en apartado Referencias). Éstos sirven de hilo conductor y apoyo tanto a profesores como a alumnos. Los contenidos de un libro de texto están habitualmente distribuidos acorde a la estructura del currículo, e incluyen tanto teoría como ejercicios.

En general, todos los libros analizados tienen una estructura similar, organizan los contenidos por temas. Dentro de cada tema se desarrolla la teoría por apartados, proponiendo al final de cada uno ejercicios para la práctica. Además, al final de cada tema hay un compendio de ejercicios para repasar la teoría así como otros de aplicación práctica.



Función de proporcionalidad directa

Si la ordenada en el origen es $n = 0$, la función lineal es $y = mx$.

Las funciones $y = mx$ se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. Por cada unidad que aumenta la variable x, la función, y, aumenta o disminuye m unidades.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = \frac{y}{x} = m$$

La pendiente de la recta, m, es la **contante de proporcionalidad**.

Ejemplo ▸ Las siguientes gráficas corresponden a funciones lineales.

$f(x) = 3x$ $\quad g(x) = -2x$ $\quad h(x) = -\frac{1}{2}x$ $\quad i(x) = x$

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y estudia la función de proporcionalidad directa.

Ten en cuenta
A la función $i(x) = x$ también se la llama **función identidad**. Su representación es la **bisectriz** del primer y tercer cuadrante.

Función constante

Si la pendiente es nula, $m = 0$, la función lineal es $y = n$.

Las funciones $y = n$ se llaman **funciones constantes**. Como $m = 0$, la función no es creciente ni decreciente. Su gráfica es una **recta paralela al eje X**.

Ejemplo ▸ Las siguientes gráficas corresponden a funciones lineales.

$f(x) = 2$ $\quad g(x) = -3$ $\quad h(x) = 0$

Ten en cuenta
A la función $h(x) = 0$ también se la llama **función nula**. Su representación es el **eje de abscisas** o **eje X**.

ACTIVIDADES

1. Indica cuáles son la ordenada en el origen y la pendiente de las funciones:
   a) $f(x) = 5x + 1$ c) $h(x) = 1 - 3x$ e) $j(x) = 4(x + 3)$
   b) $g(x) = 4$ d) $i(x) = -7 - 2x$ f) $k(x) = \frac{4 - x}{3}$
2. Escribe la fórmula y representa las funciones del tipo $y = ax + b$ cuando:
   a) $b = 2, a = 1$ b) $b = 0, a = -5$ c) $a = -2, b = -1$
3. La gráfica de una función lineal pasa por el punto (3, 5) y su pendiente es 2. Determina $f(4)$.
4. Calcula en cada caso la pendiente de la recta que pasa por estos pares de puntos e indica si es creciente o decreciente.
   a) $A(3, -2)$; $B(4, -1)$ b) $E(-4, 2)$; $F(4, 2)$ c) $C(-2, 1)$; $D(2, 2)$
5. Identifica la pendiente y la ordenada en el origen de las funciones representadas e indica cuál es su fórmula.

205

Figura 4.1: Hoja tipo del libro de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de 4º ESO de SM

4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO

El tema comienza con un repaso de los contenidos de primero de ESO, sistema de coordenadas cartesiano y representación de funciones. A continuación se introducen conceptos nuevos como las características de funciones (dominio, recorrido, crecimiento, etc.), función afín, función inversa, función cuadrática. También aparecen ejercicios de interpretación y análisis de gráficas.

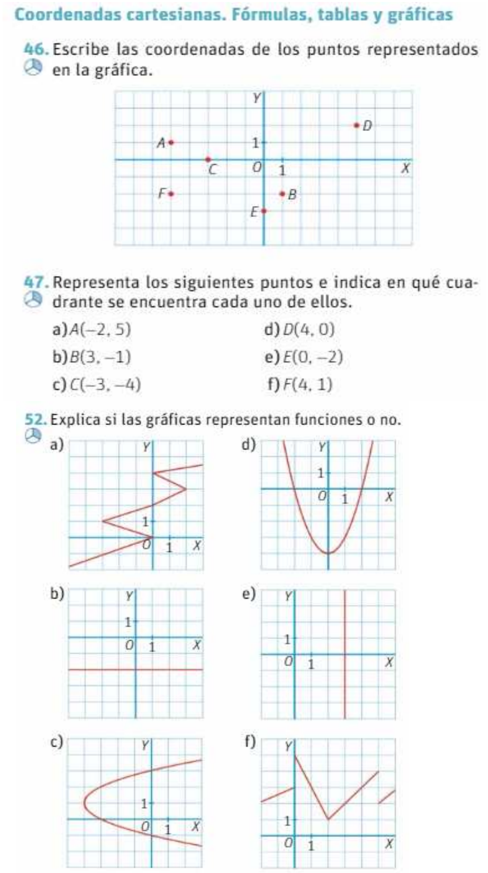
<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
Coordenadas cartesianas. Fórmulas, tablas y gráficas
46. Escribe las coordenadas de los puntos representados en la gráfica.
47. Representa los siguientes puntos e indica en qué cuadrante se encuentra cada uno de ellos.
a) $A(-2, 5)$ d) $D(4, 0)$
b) $B(3, -1)$ e) $E(0, -2)$
c) $C(-3, -4)$ f) $F(4, 1)$
52. Explica si las gráficas representan funciones o no.</td><td>Primeros dos tipos de ejercicios: representación de puntos en ejes cartesianos y sus coordenadas.
Segundo tipo: determinar si una gráfica corresponde o no a una función.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
9. En la siguiente gráfica se recogen los datos de la estatura de Sergio entre los 6 y los 14 años. Observa y contesta:
a) ¿Cuánto medía cuando tenía 6 años? ¿Y cuando tenía 10 años?
b) ¿A qué edad superó los 1,5 m de altura?
c) ¿En algún momento su estatura permanece constante?
d) Construye la tabla de valores asociada.</td><td>Trabajo sobre las diferentes formas de expresar una función: fórmula, tabla de valores y gráfica.</td></tr>
</table>

Tabla 4.1: Ejercicios y problemas en relación a funciones en 2º de ESO (1)

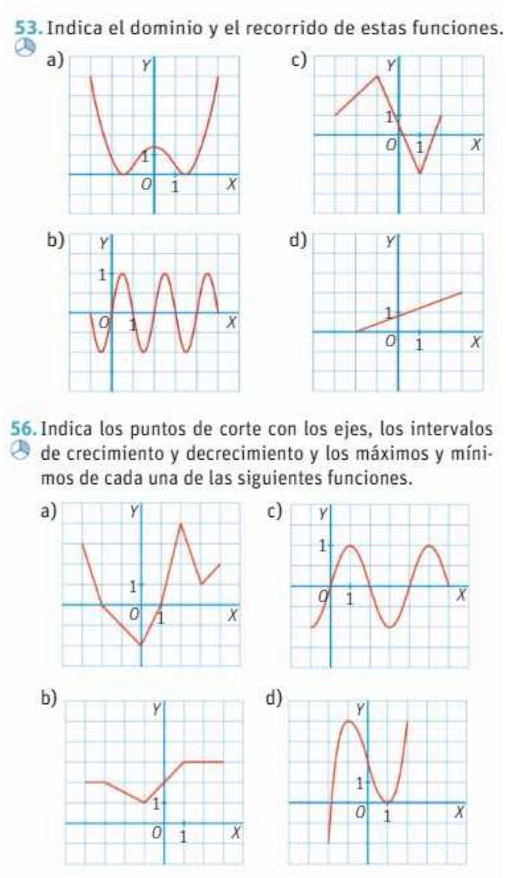
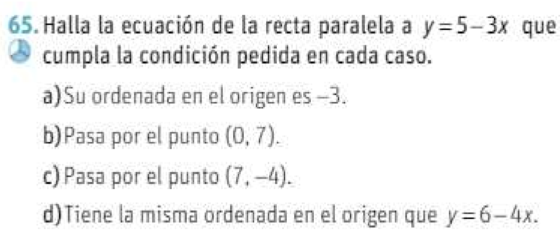
<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
53. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones.
a) b) c) d)
56. Indica los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de cada una de las siguientes funciones.
a) b) c) d)</td><td>Hallar las características de una función: dominio, recorrido, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de corte con los ejes, máximos y mínimos.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
65. Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 5 - 3x$ que cumpla la condición pedida en cada caso.
a) Su ordenada en el origen es −3.
b) Pasa por el punto (0, 7).
c) Pasa por el punto (7, −4).
d) Tiene la misma ordenada en el origen que $y = 6 - 4x$.</td><td>Trabajo sobre funciones lineales. Expresión de la recta: pendiente y ordenada en el origen.</td></tr>
</table>

Tabla 4.2: Ejercicios y problemas en relación a funciones en 2º de ESO (2)

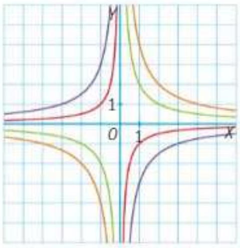
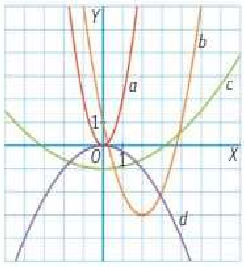
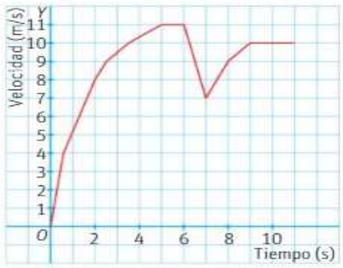
Tipo de actividad	**Descripción**
Ejercicio	
73. Relaciona cada ecuación con la gráfica del plano cartesiano correspondiente.  A. $y=\frac{2}{x}$ B. $y=\frac{-1}{x}$ C. $y=\frac{4}{x}$ D. $y=\frac{-3}{x}$ **74.** Asocia cada función con su gráfica, teniendo en cuenta su forma y los puntos de corte con los ejes.  A. $y=0{,}1x^2-1$ C. $y=x^2-4x+1$ B. $y=2x^2$ D. $y=-\frac{1}{4}x^2$	Funciones inversa y cuadrática: asociación entre fórmula y gráfica correspondiente.

Tabla 4.3: Ejercicios y problemas en relación a funciones en 2º de ESO (3)

<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
88. Después de cada entrenamiento, el entrenador de un corredor de 100 m lisos le muestra unas gráficas en las que se refleja su velocidad durante la carrera.


a) ¿Qué ocurre en los primeros segundos de carrera?
b) ¿Cuánto tarda en alcanzar su velocidad máxima? ¿Cuál es esa velocidad?
c) Explica la gráfica a partir de los 6 s. ¿Qué crees que puede haber ocurrido?
d) ¿Cuánto ha tardado en recorrer los 100 m?
</td><td>Análisis e interpretación de gráficas que representan situaciones o contextos reales. Dada una gráfica, extraer información para responder a una serie de preguntas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema</td></tr>
<tr><td>
85. Un comercial cobra un sueldo fijo mensual de 600 €, más el 10 % de las ventas que realice.
a) Escribe la función que permite calcular el salario mensual en relación con el dinero que han supuesto sus ventas.
b) ¿De qué tipo de función se trata?
c) Si el vendedor quiere ganar al menos 1000 €, ¿cuáles tienen que ser sus ventas?
d) El mes pasado ganó 1700 €. ¿Cuál fue el importe de sus ventas?
</td><td>Aplicación en un contexto real de los conceptos del tema: formas de representar una función, tipos de funciones y características particulares de cada una (ej., recta, pendiente y ordenada en el origen).</td></tr>
</table>

Tabla 4.4: Ejercicios y problemas en relación a funciones en 2º de ESO (4)

4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO

En 3º de ESO se repasan los conocimientos de cursos anteriores (función, formas de representación, función lineal, crecimiento, etc.), y se añaden otros nuevos como continuidad, ejes de simetría, periodicidad, etc. En cuanto a tipos particulares de funciones, se trabaja de nuevo la función lineal y se estudia más en profundidad la función cuadrática: vértice, ejes de simetría, cortes con los ejes. Respecto al curso anterior ganan peso los ejercicios de deducir una función a partir de un enunciado y pierden los de analizar e interpretar una gráfica dada.

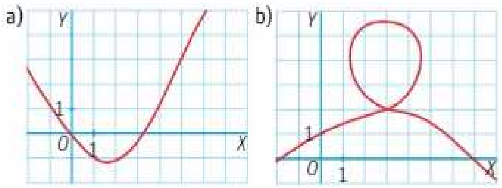
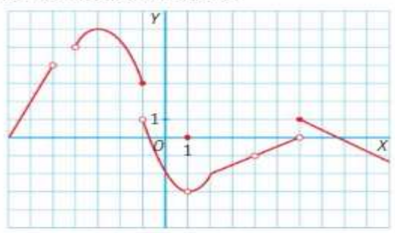
Tipo de actividad	Descripción
Ejercicio	
1. Señala cuáles de estas correspondencias son funciones y, en caso afirmativo, indica la variable dependiente e independiente. **a)** A cada número real le corresponde su mitad. **b)** A cada ecuación de segundo grado le corresponden sus soluciones. **c)** A cada profesor le corresponden sus alumnos. **d)** A cada número le corresponden sus divisores. **5.** Indica si las siguientes gráficas representan funciones y justifica tu respuesta.  	Identificación de funciones dadas una serie de correspondencias o gráficas, señalando además en cada caso cuál es la variable dependiente o independiente.
Ejercicio	
14. Observa la gráfica y contesta:  **a)** ¿Cuál es el dominio de la función? **b)** ¿Y el recorrido? **c)** ¿En qué puntos es discontinua? ¿Cuánto vale la función en esos puntos?	Hallar dominio y recorrido de funciones a partir de la gráfica, así como intervalos de continuidad.

Tabla 4.5: Ejercicios y problemas en relación a funciones en 3º de ESO (1)

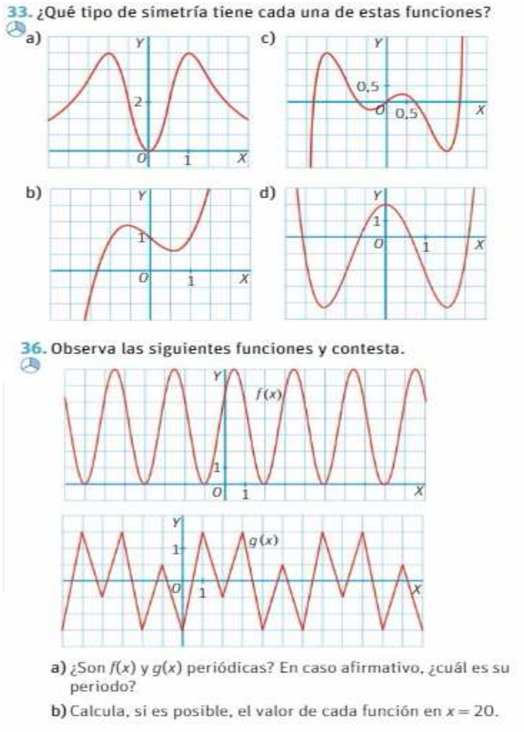
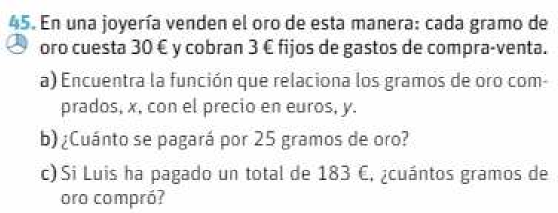
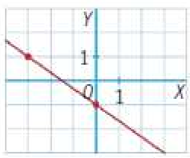
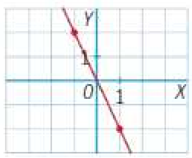
Tipo de actividad	Descripción
Ejercicio	
 **33.** ¿Qué tipo de simetría tiene cada una de estas funciones? **36.** Observa las siguientes funciones y contesta. **a)** ¿Son $f(x)$ y $g(x)$ periódicas? En caso afirmativo, ¿cuál es su periodo? **b)** Calcula, si es posible, el valor de cada función en $x = 20$.	Dadas funciones en forma de gráfica, identificar si existe simetría y el tipo concreto (par o impar). Identificar, dada una función en forma de gráfica, si es o no periódica y hallar el periodo.
Problema	
 **45.** En una joyería venden el oro de esta manera: cada gramo de oro cuesta 30 € y cobran 3 € fijos de gastos de compra-venta. **a)** Encuentra la función que relaciona los gramos de oro comprados, x, con el precio en euros, y. **b)** ¿Cuánto se pagará por 25 gramos de oro? **c)** Si Luis ha pagado un total de 183 €, ¿cuántos gramos de oro compró?	Dado un enunciado, plantear una función que lo represente y responder a preguntas trabajando con la fórmula de la misma.
Emprende	
 **39. EMPRENDE** La siguiente gráfica muestra el número de donaciones de órganos en los últimos años en España: N.º de donantes **a)** Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. **b)** Halla sus máximos y mínimos. **c)** A la vista de la gráfica, ¿cómo crees que variará el número de donantes en el futuro? **d)** ¿Qué iniciativas se pueden poner en marcha para que el número de donantes siga creciendo?	Ejercicios para trabajar competencias como el compromiso social. Utilización de los conceptos adquiridos en el tema para responder a determinadas preguntas. Interpretación y análisis de gráficas.

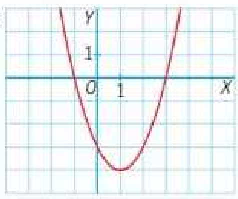
Tabla 4.6: Ejercicios y problemas en relación a funciones en 3º de ESO (2)

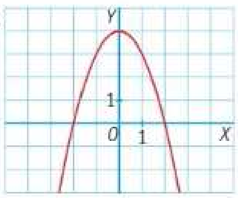
<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
6. Asocia en tu cuaderno cada tabla con su función lineal correspondiente. Indica la pendiente y la ordenada en el origen. ¿Cuales son constantes? ¿Cuales son de proporcionalidad directa?
a)
<table><tr><td>x</td><td>−4</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>
c)
<table><tr><td>x</td><td>−4</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>
b)
<table><tr><td>x</td><td>−4</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>14</td><td>10</td><td>6</td><td>2</td></tr></table>
d)
<table><tr><td>x</td><td>−4</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>−3</td><td>5</td><td>13</td><td>21</td></tr></table>
A. $f(x)=\frac{1}{4}x$ B. $f(x)=2x+5$ C. $f(x)=6$ D. $f(x)=10-x$

18. Escribe la ecuación punto-pendiente de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos e indica el valor de la ordenada en el origen.
a) 

b) 

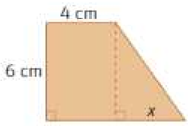
</td><td>
Asociar las diferentes formas de representación de una misma función lineal.

Dados una serie de dados (gráfica, puntos), hallar la ecuación de una recta.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
22. Observa las siguientes parábolas y contesta a las siguientes preguntas.
I) 

II) 

a) Escribe las coordenadas del vértice. ¿Es un máximo o un mínimo absoluto?
b) ¿Tiene puntos de corte con el eje de abscisas? En caso afirmativo, indica sus coordenadas.
c) ¿Tiene puntos de corte con el eje de ordenadas? En caso afirmativo, indica sus coordenadas.
d) Copia la parábola en tu cuaderno y dibuja el eje de simetría. ¿Cuál es su ecuación?
</td><td>
Hallar los elementos característicos de una función cuadrática: vértice, cortes con los ejes, eje de simetría.
</td></tr>
</table>

Tabla 4.7: Ejercicios y problemas en relación a funciones lineales y cuadráticas en 3º de ESO (1)

<table>
<tr><th>4.3.Tipo de actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
27. El entrenador de un corredor está tomándole tiempos y en los primeros 12 s obtiene la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>Tiempo (s)</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Espacio recorrido (m)</td><td>0</td><td>21</td><td>28</td><td>42</td><td>70</td><td>84</td></tr>
</table>
Escribe la función que expresa el espacio recorrido en función del tiempo y dibuja su gráfica.
a) ¿Cuántos metros ha recorrido en 5 s?
b) ¿Cuánto tarda en recorrer los primeros 50 m?
30. Dada la siguiente figura:


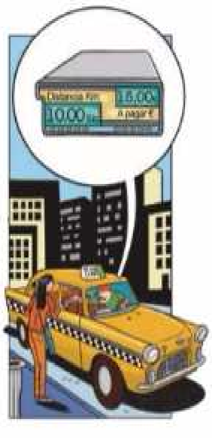
a) Expresa el área del trapecio rectángulo en función de x.
b) ¿Cuál es el valor del área para $x = 1$ cm?
c) ¿Cuál es el valor de x si el área es 33 cm^2?
d) Expresa el perímetro del trapecio en función de x.
</td><td>Representar enunciados en forma de función (lineal y cuadrática) y responder a preguntas empleando dichas fórmulas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema</td></tr>
<tr><td>
70. Las tarifas de los taxis de una ciudad están en función de una cantidad fija por bajada de bandera y una cantidad proporcional a los kilómetros recorridos.
María paga 15 € por un viaje de 10 km y 12,5 € por un viaje de 8 km.
a) ¿Cuál es la cantidad fija de bajada de bandera?
b) Escribe la función que relaciona el precio de la carrera con el número de kilómetros recorridos.
c) ¿Cuánto tendría que pagar María por un viaje de 18 km según la función del apartado anterior?

</td><td>Aplicación de los conceptos del tema en contextos reales. Dado un enunciado, hallar la fórmula que lo representa y trabajar con ella para responder a una serie de preguntas.</td></tr>
</table>

Tabla 4.8: Ejercicios y problemas en relación a funciones lineales y cuadráticas en 3º de ESO (2)

4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO

El estudio de funciones se divide en dos temas. En el primero de ellos se estudian características comunes a todas las funciones tales como dominio, recorrido, operaciones, características de funciones. En el segundo se estudian algunos tipos concretos (polinómicas y racionales), y cómo abordar para cada caso el cálculo de puntos o características de dichas funciones que permitan se representación gráfica (cortes con ejes, vértices, asíntotas).

Tipo de actividad	**Descripción**
Ejercicio	
55. Completa la tabla correspondiente a la función: $f(x)=\begin{cases}4x-x^2 & \text{si } x<3\\ 2x-1 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$ $\begin{array}{c\|cccccc} x & -3 & -1 & 3 & 4{,}5 & 6 & \bullet \\ \hline y & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 4\end{array}$	Hallar valores correspondientes al dominio y al recorrido de una función a trozos.
Ejercicio	
57. Halla el dominio de las funciones: a) $y=\frac{2x+3}{x^2+4x-3}$ b) $y=\sqrt[3]{x+1}$ c) $y=\frac{x+1}{x^3+8}$ d) $y=\sqrt{(3-x)(x+4)}$ e) $y=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$ f) $y=\sqrt{3-\|x\|}$ 59. Halla el recorrido de las funciones: a) $y=5-2x$, con $-2\leq x<3$ b) $y=6x-x^2$, con $-1<x\leq 3$ c) $y=8-\sqrt{9-x^2}$ d) $y=\frac{3}{x^2+3}$	Hallar dominio y recorrido de funciones estudiando las funciones en aquellos valores de ‘x’ que hacen cero al denominador o que hacen negativo el radicando de una raíz cuadrada.

Tabla 4.9: Ejercicios y problemas en relación a funciones en 4º de ESO (1)

<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>

61. Dadas las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\dfrac{5}{x-4}$ calcula:

a) $(f+g)(1)$
b) $(f\cdot g)(1)$
c) $(f-2g)(-5)$
d) $(f\circ g)(-1)$
e) $[(f+g)\circ f]\left(\dfrac{2}{3}\right)$
f) $(g\circ f)(2)$

76. En los ejercicios siguientes determina la función inversa de $f(x)$ de manera intuitiva e informal. Confirma después que $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$.

a) $f(x)=5x$
b) $f(x)=x-7$
c) $f(x)=6-3x$
d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$
e) $f(x)=\dfrac{x-5}{3}$
f) $f(x)=x^3+7$

</td><td>Operaciones con funciones (suma, producto, composición) y cálculo de la función inversa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>

84. Representa una función continua que cumpla las siguientes condiciones.

1. Su dominio es $(-2, 1)\cup(1, +\infty)$.
2. Es continua en su dominio.
3. Corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(-1, 0)$, $B(0, 5)$ y $C(3, 0)$.
4. Es creciente en $(-2, 1)\cup(1, 5)$ y decreciente en $(5, +\infty)$.
5. Solo tiene un máximo relativo en $(5, 5)$.

</td><td>Estudio de características de funciones en general: dominio, recorrido, continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos etc.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema</td></tr>
<tr><td>

90. El coste de producir n palas de pádel viene dado por la expresión: $P(n)=40+16\sqrt{n-1}$, con $n\leq 50$.

Si la empresa pretende ganar un 50 % en la venta de cada pala, determina:

a) El precio $U(n)$ de cada una de las palas al producir n.
b) ¿A qué precio deberá vender cada pala si producen 17?
c) ¿Cuánto dinero ganará si producen 30 palas pero solo logran vender 25?
d) La ganancia, $G(n)$, al producir y vender n palas.
e) Analiza si $P(n)$, $U(n)$ y $G(n)$ son crecientes o decrecientes.

</td><td>Aplicación del contenido del tema sobre estudio de funciones para responder a una serie de preguntas de problemas basados en situaciones reales.</td></tr>
</table>

Tabla 4.10: Ejercicios y problemas en relación a funciones en 4º de ESO (2)

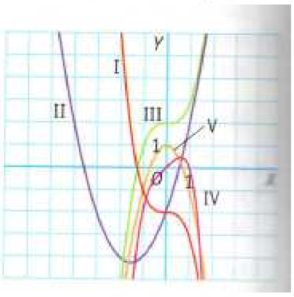
Tipo de actividad	Descripción
Ejercicio	
1. Indica cuáles son la ordenada en el origen y la pendiente de las funciones: a) $f(x)=5x+1$ c) $h(x)=1-3x$ e) $j(x)=4(x+3)$ b) $g(x)=4$ d) $i(x)=-7-2x$ f) $k(x)=\frac{4-x}{3}$ **8.** Empareja las gráficas con su posible fórmula. A. $f(x)=x^2+3x-2$ B. $g(x)=1-2x^2$ C. $h(x)=x^3+2$ D. $k(x)=-x^3-2$ E. $j(x)=x-x^4$  **11.** Representa gráficamente las siguientes funciones hallando previamente sus elementos principales. a) $y=x^2-4x-5$ d) $y=x^2-4x+3$ b) $y=x^2-4x-2$ e) $y=x^2-4x+4$ c) $y=x^2-4x$ f) $y=x^2-4x+6$ Observa qué ocurre al modificar únicamente el término independiente.	Repaso de funciones lineales y cuadráticas: cálculo de sus elementos principales (cortes con ejes, vértice).
Ejercicio	
60. Halla el dominio de las siguientes funciones racionales. a) $y=\frac{3x-1}{x+2}$ d) $y=\frac{x-3}{x^2+2}$ b) $y=\frac{x^2-1}{x(x-3)}$ e) $y=\frac{x+7}{(x+2)x(x^2-1)}$ c) $y=\frac{x+3}{x^2-4}$ f) $y=\frac{x-1}{x^2-1}$ **65.** Halla las asíntotas de estas funciones racionales. a) $y=\frac{x^2+2x}{x+1}$ c) $y=\frac{x^2-4x+1}{2x^2+x-3}$ b) $y=\frac{x^3+x^2}{x^2+1}$ d) $y=\frac{2x+3}{(x+1)^2(x-3)}$	Cálculo de características que permiten representar las funciones racionales: dominio y asíntotas. Dominio: toda la recta real salvo aquellos valores que anulan el denominador Asíntotas: construcción de tablas con valores muy grandes y muy pequeños de 'x'.

Tabla 4.11: Ejercicios y problemas sobre funciones polinómicas y racionales en 4º de ESO (1)

<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">Problema</td></tr>
<tr><td>81. La factura de la energía eléctrica de una empresa suministradora se puede resumir en tres conceptos:
• Cuota fija por potencia contratada: 38 €
• Consumo: 0,14 € cada kilovatio hora (kWh)
• IVA: 21%
a) Escribe la función $f(x)$, que determina el importe de la factura durante un período en el que se han consumido x kWh.
b) ¿Cuál es el importe de la factura si se han consumido 324 kWh?
c) Determina la función, $g(x)$ que indica el coste del kilovatio hora consumido.</td><td>Modelizar un enunciado mediante una función de los tipos estudiados a lo largo del tema, y responder a preguntas estudiando dicha función.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Emprende</td></tr>
<tr><td>86. Emprende
Desde hace 30 años se está haciendo un estudio sobre la producción de cereales en una región en peligro de desertización. La siguiente tabla muestra la producción, en miles de toneladas, de diferentes años desde el comienzo del estudio.
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td></tr>
<tr><td>$P(t)$</td><td>180</td><td>153</td><td>120</td><td>60</td><td>33</td><td>20</td><td>13</td><td>9</td></tr>
</table>
a) Representa los datos en unos ejes de coordenadas.
b) Se busca una función que refleje esta realidad. Hay dos propuestas:
• $P_1(t) = \frac{a}{t^2+b}$ • $P_2(t) = k \cdot 0{,}9^t$
Con los datos correspondientes a los años $t = 0$ y $t = 10$ determina los valores de a, b y k.
c) ¿Cuál de las dos funciones se ajusta mejor a los datos?</td><td>Aplicación del estudio de funciones a problemas con un contexto real y cuyo objetivo es trabajar competencias como el emprendimiento y el compromiso social.</td></tr>
</table>

Tabla 4.12: Ejercicios y problemas sobre funciones polinómicas y racionales en 4º de ESO (2)

4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato

En este curso hay un primer tema de repaso de conceptos generales vistos en la ESO (dominio, recorrido, representación gráfica, operaciones con funciones). En los siguientes temas se introducen los conceptos de límite y derivada, y se utilizan como herramientas para el estudio de funciones (continuidad, extremos relativos).

<table>
<tr><th>Tipo de actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
48. Dadas las funciones $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$, $h(x)=\frac{1}{x^2-4}$ y $t(x)=1-x^2$, calcula las siguientes funciones y determina sus dominios.
a) $(f-t)(x)$ d) $(ht)(x)$ g) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$
b) $(h+t)(x)$ e) $(fh)(x)$ h) $(gg)(x)$
c) $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$ f) $\left(\frac{f}{t}\right)(x)$ i) $\left(\frac{tf}{h}\right)(x)$

49. Dadas las funciones $f(x)=1-x^2$, $h(x)=\frac{1}{x^2-4}$ y $g(x)=\sqrt{4-2x}$, halla estas funciones y sus dominios.
a) $(f\circ f)(x)$ b) $(h\circ g)(x)$ c) $(g\circ f)(x)$
</td><td>Operaciones con funciones (suma, resta multiplicación, división, composición) y cálculo de dominios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
55. A partir de la gráfica de $f(x)=x^2$ dibuja, utilizando traslaciones y dilataciones, las gráficas de las siguientes funciones.
a) $a(x)=x^2-4$ d) $d(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$
b) $b(x)=x^2+2$ e) $e(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$
c) $c(x)=4x^2$ f) $f(x)=3x^2+6x-4=3(x+1)^2-7$
</td><td>Creación de funciones nuevas a partir de una dada, realizando sobre ella operaciones de dilatación y traslación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio</td></tr>
<tr><td>
68. Un agricultor ha comprado una hectárea de terreno y quiere plantar almendros. Sabe que si planta almendros en exceso no podrá regarlos convenientemente y la producción será baja. Para decidir cuántos almendros plantar, ha hecho un estudio en los campos vecinos del rendimiento obtenido y ha elaborado la siguiente tabla.
<table>
<tr><td>Número de almendros</td><td>40</td><td>60</td><td>90</td></tr>
<tr><td>Kilos de almendras</td><td>20 000</td><td>24 000</td><td>22 500</td></tr>
</table>
a) Un amigo le aconsejó que plantara 50 almendros. ¿Cuántos kilos de almendras espera obtener en ese caso?
b) ¿Con cuántos almendros conseguiría la producción máxima?
</td><td>Aplicación en contextos reales de la interpolación lineal o cuadrática para obtener información a partir de una tabla de valores.</td></tr>
</table>

Tabla 4.13: Ejercicios y problemas en relación a funciones en 1º de Bachillerato

Tipo de actividad	Descripción
Ejercicio	
49. Utiliza las propiedades de los límites para calcular: a) $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-1}$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{2x-1}$ c) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{2x+4}{x^2+1}}$ d) $\lim_{x\to -1}(x+3)^{2x+1}$ e) $\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-3x}{x^2-5}$ f) $\lim_{x\to -2}\frac{2}{x^2+4}$ g) $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}}{2x-7}$ h) $\lim_{x\to 3}(x+5)^{x-3}$ **50.** Halla los siguientes límites indeterminados: a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ b) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$ c) $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{4-x^2}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}{x}$ e) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{3x}$ f) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-10x+9}$ g) $\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$ h) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$	Cálculo del límite de una función en un punto tanto en funciones sencillas como en aquellas que presentan indeterminaciones.
Ejercicio	
59. Calcula, si los hay, los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos. a) $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 0 & \text{si } x=2\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 4 & \text{si } x=2\end{cases}$ d) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$	Utilización de los límites para comprobar la continuidad de funciones en determinados puntos.
Ejercicio	
68. Encuentra, sin operar, la asíntota oblicua de cada una de las siguientes funciones. a) $f(x)=x+4+\frac{1}{x}$ b) $f(x)=x+2+\frac{3}{\sqrt{x}}$ c) $f(x)=3x-\frac{1}{2}-\frac{5}{x+2}$ d) $f(x)=-x+1-\frac{3}{x-2}$	Cálculo de asíntotas aplicando límites cuando x tiende a infinito.

Tabla 4.14: Ejercicios y problemas en relación a cálculo de límites en 1º de Bachillerato

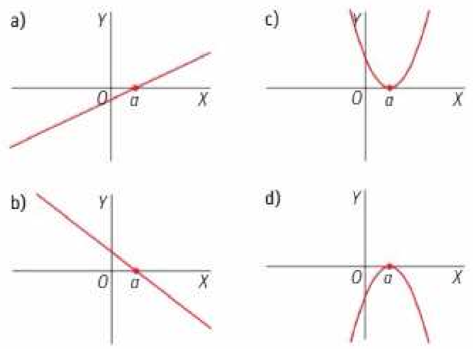
Tipo de actividad	Descripción
Ejercicio	
63. Calcula la derivada de las siguientes funciones. a) $f(x)=x^3-2x^2+4x+1$ b) $f(x)=4x^5+3x^3-2x^2-x$ c) $f(x)=-x^7+2x^5-5x^3+7$ d) $f(x)=6x^6-5x^5+4x-8$ e) $f(x)=2x^{-3}-4x^{-2}+5x^{-1}+7$ f) $f(x)=5x^3-2x+3x^{-1}+8x^{-3}$ g) $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+x-1$ h) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+2x$ i) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}+2\sqrt{x^3}-x^2$ j) $f(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}-3$ k) $f(x)=3x^2-x+4-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}$ l) $f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-3x+6x^2$ m) $f(x)=\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}+x^2-2x^{-3}$ n) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{3}-4x^4+1$	Cálculo de derivadas de funciones elementales.
Ejercicio	
71. Razona cuál de las siguientes gráficas corresponde a la derivada de una función que tiene un máximo en el punto $x=a$. 	Interpretación gráfica de la función derivada. Dada la gráfica de la derivada, hallar los extremos relativos en la función primitiva.

Tabla 4.15: Ejercicios y problemas sobre cálculo de derivadas en 1º de Bachillerato

Tipo de actividad	Descripción
Ejercicio	
46. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y esboza sus gráficas. a) $f(x)=x^3-4x^2+3$ b) $f(x)=4x^3+4x-8$ c) $f(x)=x(x^2+2)(x^2-1)$ d) $f(x)=x^4+3x^3-x^2-3x$ e) $f(x)=(x^2-1)(x^2+1)$ f) $f(x)=(x+3)^2(x-2)^2$	Estudio de funciones polinómicas aplicando resolución de ecuaciones (cortes con los ejes), límites (representación gráfica en el infinito) y cálculo de derivadas (extremos relativos)
Ejercicio	
48. Determina el dominio, la continuidad, los puntos de corte con los ejes, el signo y las asíntotas de las siguientes funciones. a) $f(x)=\frac{-6x^2}{x^2+1}$ b) $f(x)=\frac{x^5}{x^4+1}$ c) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4x}$ d) $f(x)=\frac{x}{x^3+8}$ e) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+x^2}$ f) $f(x)=\frac{2x-6}{x^2+2x+5}$	Estudio de funciones racionales aplicando resolución de ecuaciones (cortes con los ejes) y límites (estudio de continuidad, representación gráfica en el infinito).
Ejercicio	
85. Una discoteca abre a las 10 de la noche sin ningún cliente y cierra cuando se han marchado todos. Se supone que la función que representa el número de clientes (N) en función del número de horas que lleva abierto, t, es: $N(t)=80t-10t^2$ a) Determina cuál es el máximo número de clientes y a qué hora se alcanza. b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?	Aplicación del estudio de funciones para responder preguntas sobre una situación que puede ser modelizada mediante una función.

Tabla 4.16: Ejercicios y problemas sobre funciones elementales en 1º de Bachillerato

4.6. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de Bachillerato

El contenido de funciones en este curso es un repaso de lo visto en el anterior con profundizaciones en algún apartado concreto. Se añade el estudio de curvatura de funciones mediante derivadas, así como algunos teoremas relacionados con la continuidad y la derivabilidad.

Tipo de actividad	Descripción
Ejercicio	
60. Calcula el dominio de estas funciones. a) $f(x)=e^{3x-6}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ c) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-5}}$ d) $f(x)=\frac{3}{x-2}-\sqrt{x-2}$ e) $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x-2}}$ f) $f(x)=\ln(3x-7)$ **62.** Escribe las siguientes funciones como composición de funciones elementales. a) $A(x)=(5x-2)^{12}$ b) $B(x)=\cos\sqrt{e^{x-1}}$ c) $C(x)=\frac{1}{\ln x^2}$ d) $D(x)=e^{\sqrt{\operatorname{sen} x^5}}$	Cálculo de características generales de funciones tales como dominio y recorrido, y operaciones con funciones.
Ejercicio	
84. Calcula los siguientes límites. a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+x}{x-7}\right)^{\frac{x}{5}}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x-7}\right)^{3x}$ d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}\right)^{x+2}$ e) $\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{(x-1)^2}}$ f) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5}{x^2-3x}\right)^{3x^2+2}$ h) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-5}{7+x}\right)^{x^2+1}$ **95.** Dada la siguiente función real de variable real: $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ \frac{x^3}{(x-2)^2}+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ estudia su continuidad.	Cálculo de límite de una función en un punto, o cuando x tiende a infinito. Estudio de continuidad de una función en un punto aplicando límites.
Ejercicio	
100. Demuestra que la ecuación $x^5-x^2+x-5=0$ tiene alguna solución real. **101.** Demuestra que la ecuación $x^3+x-5=0$ tiene al menos una solución real menor que 2 y mayor que 1.	Resolución de problemas utilizando teoremas relacionados con la continuidad (Bolzano, de los valores intermedios, del máximo y del mínimo).

Tabla 4.17: Ejercicios y problemas sobre límites y continuidad en 2º de Bachillerato

Tipo de actividad	**Descripción**
Ejercicio	
73. Calcula la derivada de estas funciones. a) $f(x)=\frac{x}{6}-8x^2+\frac{1}{x}$ b) $f(x)=xe^{3x}$ c) $f(x)=x(5-x^2)^4$ d) $f(x)=\frac{x^3}{4}-8$ e) $f(x)=e^{x^3}$ f) $f(x)=x^2-e^x$ g) $f(x)=\frac{3}{(2x-5)^2}+\ln(1-x)$ h) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ i) $f(x)=5\sqrt{\ln x}$ j) $f(x)=\frac{x^2}{3x^2+1}$ k) $f(x)=\frac{6-x^5}{x^6}$ l) $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$ m) $f(x)=\sqrt{x^3}$ n) $f(x)=\frac{e^x}{x^3+1}$ **74.** Halla la derivada de estas funciones. a) $f(x)=e^{2x-1}$ b) $f(x)=\sqrt{e^x}$ c) $f(x)=\frac{e^{3x}}{1+x^2}$ d) $f(x)=\ln[x(1+3x^2)]$ e) $f(x)=e^{x^2}\cdot e^{-3x}\cdot e^2$ f) $f(x)=\frac{e^{2x}+e^{3x}}{e^x+1}$ g) $f(x)=2^{5x}+\frac{1}{x^2}$ h) $f(x)=e^{-x}\ln x$	Cálculo de derivadas de funciones elementales.
Ejercicio	
85. Estudia el crecimiento y los extremos relativos de: a) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ b) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$ c) $f(x)=e^{1-x^2}$ d) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ e) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ f) $f(x)=x^3(x+2)$ g) $f(x)=2x+\frac{1}{2x}$ h) $f(x)=\frac{x^2(1-x)}{x^2-1}$ i) $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{2-x}$ **99.** Estudia la curvatura y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones. a) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ b) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$ c) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ d) $f(x)=x^3(x+2)$ e) $f(x)=2x+\frac{1}{2x}$ f) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ g) $f(x)=\frac{x^2(1-x)}{x^2-1}$ h) $f(x)=e^{1-x^2}$ i) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$	Estudio de crecimiento, decrecimiento, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión mediante cálculo de derivadas.
Ejercicio	
106. Determina cuántas veces corta al eje horizontal la gráfica de: $f(x)=x^4-x^3+5x^2-2$ **107.** Sea $f(x)=(x+1)^3(x-2)^2+3$. Demuestra que la ecuación $f'(x)=0$ tiene alguna solución en $[-1, 2]$.	Resolución de problemas utilizando teoremas relacionados con la derivabilidad (Rolle, valor medio).

Tabla 4.18: Ejercicios y problemas sobre derivadas en 2º de Bachillerato

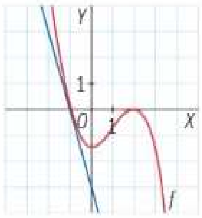
Tipo de actividad	**Descripción**
Ejercicio	
53. La función $y = f(x)$ de la figura tiene como dominio el conjunto de todos los números reales.  a) Determina los puntos donde la función vale 0. Determina los valores de x para los que la función es positiva. b) Di en qué puntos se anula la derivada y en qué puntos $f'(x) < 0$. c) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$. d) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$. e) Determina a sabiendo que $f(x) = a(x+1)(x-2)^2$.	Estudio general de una función siguiendo un esquema: - Dominio y continuidad - Simetría y periodicidad - Puntos de corte con los ejes - Asíntotas - Puntos singulares y crecimiento - Puntos de inflexión y concavidad - Representación gráfica
Ejercicio	
59. Dada la función $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$: a) Traza su gráfica estudiando previamente los puntos de corte con los ejes, su signo, el crecimiento y la existencia de extremos relativos. b) ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la función? **62.** Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$. Se pide: a) Dominio de la función, puntos de corte con los ejes y simetrías. b) Asíntotas y regiones de existencia de la gráfica. c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. d) Extremos relativos. e) Representación gráfica aproximada.	Estudio general de funciones polinómicas y racionales.
Problema	
77. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo en horas, x, que ha dedicado a su preparación en la forma siguiente: $P(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ \frac{2x}{0{,}2x + 3} & \text{si } 15 < x \end{cases}$ a) Estudia el crecimiento de esta función. Justifica que si se dedica menos de 15 horas a preparar el examen, el estudiante suspenderá. b) Justifica que nunca se pueden superar los 10 puntos.	Resolución de problemas relacionados con las ciencias sociales mediante el estudio general de funciones representativas de situaciones concretas.

Tabla 4.19: Ejercicios y problemas sobre representación de funciones en 2º de Bachillerato

Capítulo 5

Resultados

Tras estudiar en los capítulos anteriores tanto el currículo vigente como los conceptos desarrollados en libros de texto, en este capítulo se analiza la información obtenida de ambas fuentes.

5.1. Ausencia y presencia en el currículo y en los libros de texto

Se comienza analizando por separado la evolución del contenido de funciones tanto en el currículo como en los libros de texto, para a continuación estudiar la coherencia entre los objetivos de cada curso y el contenido que realmente aparece en los manuales.

5.1.1. Ausencia y presencia en el currículo

A comienzos de la ESO el contenido específico de funciones está muy relacionado con ideas intuitivas y visuales a partir de representaciones gráficas. En 2º de ESO se estudian la definición de funciones y sus diferentes formas de representación (fórmula, tabla, gráfica en ejes cartesianos). En esta etapa tiene más peso la capacidad de interpretar y analizar gráficas que la manipulación algebraica de funciones, que se estudia fundamentalmente de la mano del bloque de Números y Álgebra. La única función que se estudia de manera más formal es la afín, en la que se explican el significado de la pendiente y la ordenada en el origen. El currículo también establece que en este curso el estudio de funciones debe apoyarse en recursos tecnológicos.

En 3º de ESO se inicia una tendencia que permanece en los cursos sucesivos. En este curso se cuenta con que los estudiantes conocen de forma visual e intuitiva ciertos conceptos relativos a funciones, y comienzan a ganar peso las técnicas algebraicas en detrimento de la interpretación y el análisis gráfico. Se adquieren más técnicas para la manipulación de polinomios, que también se aplican en el estudio de funciones. Las características de funciones se siguen trabajando de forma principalmente visual (crecimiento, máximos), pero se estudian en mayor profundidad las funciones lineales, ya conocidas, y se inicia el estudio analítico de las cuadráticas. Atendiendo a los estándares de aprendizaje evaluables, se observa que en este curso todavía tienen bastante peso la capacidad de expresar un enunciado contextualizado de forma algebraica, así como la interpretación de gráficas que representan fenómenos reales. Al igual que en el curso anterior, se establece un apoyo del aprendizaje en recursos tecnológicos.

En el último curso de ESO continúa la tendencia iniciada en 3º. El contenido de funciones crece fundamentalmente por la añadidura del estudio de nuevos tipos de funciones y técnicas para el estudio analítico de sus características. Se adquieren herramientas como la división de polinomios que resultan de utilidad en el estudio formal de las características de funciones. A las ya conocidas funciones lineal y cuadrática se añaden otras como la proporcional inversa y la exponencial. Además, en el estudio de funciones se añaden conceptos como la tasa de variación media para el análisis de intervalos de crecimiento y decrecimiento. Por otra parte, el estudio de características de funciones ya no es tan visual sino que los estándares de aprendizaje establecen que el estudiante debe ser capaz, por ejemplo, de identificar, estimar o calcular cortes con los ejes.

Aunque pierde algo de peso respecto al total del contenido de funciones, la extracción de información a partir de gráficas y el análisis crítico de las mismas siguen siendo de gran importancia. Además, se establece que el estudiante de este curso debe manejar con destreza recursos tecnológicos para realizar representaciones gráficas.

Los contenidos del curso siguiente, en una etapa educativa postobligatoria, suponen un salto importante en cuanto a que se añaden conceptos más complejos, fundamentales para el estudio analítico, y cuyo estudio supone una parte importante respecto al total del contenido de funciones. Los contenidos ya estudiados en ESO tienen un peso pequeño, y se introducen nuevos conceptos como los límites, las derivadas, y la función logarítmica. De la mano de estos contenidos hay otros en los que se profundiza la representación gráfica, gracias a la posibilidad de calcular continuidad, asíntotas y extremos relativos. Estos nuevos conocimientos se aplican al estudio de fenómenos relacionados con las ciencias sociales, deben apoyarse en el uso de medios tecnológicos.

En 2º de Bachillerato el currículo establece un repaso de los contenidos de 1º, pero hace hincapié en la utilización de los mismos en problemas relacionados con las ciencias sociales y problemas de optimización. Además se añade el estudio del cálculo del área mediante integrales.

A modo de resumen, se puede concluir que el estudio de funciones a lo largo de la educación secundaria evoluciona progresivamente desde los conceptos intuitivos y visuales de 2º de ESO hasta la plena formalización analítica del estudio de las características de funciones en 2º de Bachiller. La evolución de los contenidos a lo largo del currículo se produce en espiral, es decir, cada curso hay contenidos que ya aparecen en el anterior, y se añaden otros nuevos. Esta estructuración del currículo encaja con la Teoría de Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1976), el cual se da cuando se relaciona el conocimiento objeto de estudio con ideas ya establecidas en la estructura cognitiva. Para finalizar, se observa un salto cualitativo importante en el estudio de funciones entre 4º de ESO y 1º de Bachillerato, habiendo entre ambos cursos una diferencia de peso importante entre contenidos más puramente analíticos respecto de aquellos más visuales o intuitivos.

5.1.2. Ausencia y presencia en los libros de texto

En este apartado se analizan los libros desde 2º de ESO hasta 2º de Bachillerato de la editorial SM (ver Referencias), y en concreto se tratan las especialidades de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas (3º y 4º ESO) y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (1º y 2º Bachillerato).

En los primeros cursos de ESO sólo se dedica un tema a funciones, y la mayor parte está dedicado a conceptos básicos e ideas intuitivas. En concreto, en el libro analizado, la mayor parte del tema se centra en todo lo relativo a definir qué es una función y sus formas de representación. Se explican de forma muy básica algunas características (puntos de corte, crecimiento), se estudian en profundidad las funciones lineales y se introducen las de proporcionalidad inversa y las cuadráticas. Además hay un apartado dedicado al análisis de gráficas que representan situaciones reales.

En el siguiente curso la disposición del contenido cambia. En este caso se tienen dos temas diferentes, uno de funciones a nivel general, y otro en el que se trabaja en particular sobre las funciones lineal y cuadrática.

En el primer tema se tratan los mismos conceptos generales del curso anterior, aunque con un nivel mayor de formalismo matemático. Por ejemplo, los extremos relativos se definen por primera vez en base a los valores que toman x y f(x). Otra de las novedades respecto al curso anterior es la inclusión de simetría y periodicidad de funciones, a las cuales se dedica un apartado en que se definen tanto de forma visual como con notación matemática. El segundo tema se dedica al estudio de tipos específicos sus diferentes formas de expresión. Se definen también la ecuación y la representación de funciones cuadráticas, aunque sin profundizar. Finalmente hay un apartado dedicado a aplicaciones en la vida real, y se trabajan problemas con enunciados contextualizados.

En 4º de ESO se mantiene la estructura del curso anterior, es decir, un tema para cuestiones generales sobre funciones, y otro para estudiar tipos específicos. La disposición del primer tema es significativamente diferente. Se reduce el espacio dedicado a la definición y representación gráfica, y ganan peso los apartados dedicados a dominio, recorrido y características. Estos aspectos se trabajan de forma más técnica y menos visual, se estudian las características de forma algebraica y se expresan mediante intervalos. La novedad en este curso es la introducción de tres apartados relativos a operaciones con funciones (suma, producto, composición, etc.), además del concepto de función inversa. En general se observa un salto cualitativo en cuanto a la manipulación algebraica de funciones respecto al curso anterior. En el segundo tema se repasan las funciones lineales y cuadráticas, aunque se introducen las polinómicas en general. También se estudian por primera vez los tipos racional y exponencial, se dedica un apartado a aplicaciones en situaciones reales, y se trabajan problemas con enunciados contextualizados.

En Bachillerato de Ciencias Sociales las funciones ganan mucho peso respecto al resto de contenidos del libro de texto, ya que pasan a dedicarse cuatro temas en lugar de los dos de 4º de ESO. Sigue habiendo dos temas similares los del curso anterior, pero se incluyen otros dos en los que se estudian nuevas herramientas de análisis: límites y derivadas. En el tema inicial dedicado a cuestiones generales sobre funciones se repasan contenidos conocidos (función, dominio, recorrido, operaciones, inversa), y se añaden nuevos apartados dedicados al estudio de funciones en forma de tabla, así como a la interpolación y extrapolación, todo ello ejercitado mediante problemas con enunciados contextualizados. A diferencia de lo que ocurría en el curso anterior, antes de pasar a estudiar tipos concretos se dedican dos temas a introducir límites y derivadas, herramientas fundamentales para el estudio de características de funciones (asíntotas, continuidad, extremos relativos). Finalmente el cuarto tema estudia de manera exhaustiva los siguientes tipos de funciones: polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Las novedades en este caso son la inclusión de estos dos últimos tipos y el uso de límites y derivadas para hacer caracterizaciones exhaustivas. Se dedica un último apartado al estudio de funciones en situaciones reales.

En 2º de Bachillerato la estructura del libro vuelve a cambiar. Aparecen dos temas nuevos que guardan relación con las funciones, pero que no se van a comentar por no ser objeto de este trabajo: optimización lineal e integración. Por otra parte, lo que en el curso anterior se estudiaba en cuatro temas, en éste se ve en tan sólo tres, y con algunas novedades.

En el primer tema se repasan muy brevemente dominio y recorrido, para a continuación centrarse en el cálculo de límites, indeterminaciones, y su aplicación al estudio de continuidad. Como novedad respecto al curso anterior, se estudian el Teorema de Bolzano, de los Valores Intermedios y de Máximos y mínimos. Además, se dedica un apartado al uso de límites en problemas relacionados con las ciencias sociales. En el siguiente tema se repasan las derivadas y su aplicación en el estudio de crecimiento y curvatura de funciones, así como en problemas de optimización. De nuevo aparecen como novedad dos resultados que no se estudian en 1º, el Teorema de Rolle y el Teorema de Valor Medio. Finalmente, en el último tema se explican de forma esquematizada los pasos a seguir para el estudio de los diferentes tipos de funciones (polinómica, racional, etc.), aplicando todo el aparataje analítica adquirido en los dos curso de Bachillerato. Se dedica un último apartado a la aplicación de funciones en las Ciencias Sociales.

El análisis de los libros de texto revela una evolución desde los conceptos más básicos vistos de formas muy visuales hasta la plena formalización matemática que se alcanza en 2º de Bachillerato. Cada curso se repasan los contenidos del anterior y se añaden otros nuevos, implementando por tanto una evolución en espiral. La tendencia observada indica que el estudio de funciones de forma intuitiva y la interpretación de gráficas van perdiendo peso en favor de la adquisición de herramientas analíticas y formales, aunque siempre se mantienen apartados de aplicación de funciones en casos reales.

5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Una revisión general de los libros de texto arroja la conclusión de que el manual de cada curso contiene no sólo los elementos que especifica el currículo sino que en ciertos casos adelanta o recupera contenidos de otros cursos. Por otra parte, evidentemente los libros no pueden desarrollar aquellos contenidos que tienen que ver con el uso de medios tecnológicos. Es reseñable que el libro se estructura en los mismos bloques que el currículo (número y álgebra, geometría, funciones, estadística y probabilidad), lo cual podría contribuir a crear en el alumno la impresión de que son compartimentos estancos.

El manual de 2º de ESO se ajusta bien a lo especificado en el currículo, incluso en el mismo orden de contenidos: funciones, representación, características, funciones lineales, describir situaciones a partir de gráficas. Sin embargo, se incluye un apartado en principio no requerido que estudia las funciones de proporcionalidad inversa y la cuadrática, pero que puede resultar de ayuda para el siguiente curso en que sí se profundiza en ellas.

En el siguiente curso el libro repasa contenidos de 2º de ESO que el currículo no especifica explícitamente, sin embargo este repaso puede resultar de utilidad antes de introducir conceptos nuevos. Los contenidos objetivo en 3º de ESO están muy enfocados a analizar características de funciones en un contexto o que representen situaciones reales. No se alude directamente a qué características en concreto deben estudiarse. El libro tiene un primer tema en que recupera conceptos del curso anterior y añade otros nuevos (simetría y periodicidad). Estos contenidos se estudian de manera teórica y posteriormente se utilizan contextualizados en el apartado de problemas. En definitiva, el libro ‘elabora’ de nuevo todo el conocimiento de funciones añadiendo algún elemento nuevo, y no se da el peso que el currículo sí otorga a la parte de interpretación y análisis de funciones en contexto. Por otra parte sí se observa concordancia en lo relativo al estudio de funciones específicas: funciones lineales, cuadráticas y aplicaciones.

En 4º de ESO hay una correcta correspondencia, aunque el orden de contenidos del libro es inverso al de redacción del currículo. De nuevo se dedican dos temas al apartado de funciones. En el primero de ellos se estudian de forma general las características, aunque con un nivel mayor de formalismo matemático tal y como se exige. Los conceptos se introducen de forma teórica y descontextualizada pero hay un apartado de problemas que sí permite estudiar aplicaciones en situaciones reales. En el segundo tema se explican tipos concretos de funciones y características particulares de cada una. En general se cumple con lo establecido, aunque hay una descompensación libro-currículo en el peso que se da a las aplicaciones en situaciones reales e incluso un déficit de ejercicios consistentes en interpretación y análisis de gráficas.

En Bachillerato de nuevo los libros de texto de nuevo cumplen de forma correcta respecto a los contenidos necesarios, aunque tanto en 1º como en 2º se incluye materia que no aparece reflejada en ningún punto del currículo. Por ejemplo, este último no alude a las funciones trigonométricas en ningún punto, y sin embargo el libro les dedica un apartado en 1º. En 2º ocurre lo mismo con ciertos teoremas de continuidad y derivabilidad, que no se pide estudiarlos y sin embargo sí que aparecen en el manual.

Concluyendo, los libros de texto constituyen un buen recurso y una buena guía en el sentido de que se adecúan en general a lo establecido por la legislación. En algunos cursos de ESO se añaden contenidos propios del siguiente, y en Bachillerato aparecen otros que ni siquiera se mencionan en el currículo. Por otra parte se observa una ligera descompensación en los apartados relativos a interpretación, análisis de gráficas y aplicaciones en problemas contextualizados. En definitiva, añadiendo pequeñas modificaciones pueden usarse estos manuales y tener la seguridad de que se cumplen los objetivos establecidos.

Parte II:
Análisis de un proceso

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de aprendizaje sobre funciones en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas con alumnos de 4º de ESO procedentes del programa PMAR.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En los dos primeros se estudia el contenido de funciones en el libro de texto de referencia, y se establecen los posibles errores y dificultades previsibles en el aprendizaje.

Posteriormente, en el penúltimo capítulo se explica la implementación del proceso de estudio en el grupo de 4º de ESO. Finalmente, en el último capítulo se desarrolla la experimentación de dicho proceso en el aula.

El objetivo será evaluar el proceso comparando la planificación con la implementación real, así como valorar la pertinencia de las actividades planteadas con Geogebra e identificar puntos de mejora.

Capítulo 6

Funciones en el libro de texto de referencia de cuarto de la ESO

En la primera parte del trabajo se analiza el contenido de funciones tanto en el currículo como en los libros de texto de la editorial de referencia. Además, se realiza este análisis de forma longitudinal desde dos cursos anteriores al curso en cuestión, hasta dos posteriores. Esta segunda mitad del trabajo se desarrolla en torno al tema y curso objetivo: funciones en 4º ESO. En concreto, en este apartado se analiza en profundidad el tema de funciones del libro de referencia.

6.1. Objetos matemáticos involucrados

(Godino et al., 2006) utilizan una ontología para describir los objetos matemáticos involucrados en una lección: lenguaje, conceptos, procedimientos, situaciones, propiedades y argumentos. En los siguientes apartados se muestran los objetos matemáticos involucrados en la unidad didáctica sobre la que versa este trabajo.

6.1.1. Lenguaje

El lenguaje puede dividirse en tres objetos matemáticos según su naturaleza: verbal, gráfico y simbólico. La siguiente tabla contiene los objetos de este tipo encontrados en el libro.

Tipo de lenguaje	Contenido
Verbal	Correspondencia, función, variable independiente, dependiente, función inyectiva, representación gráfica, enunciado, tabla de valores, funciones definidas a trozos. Dominio, recorrido, imagen, suma, diferencia, intersección, unión, producto, cociente, composición, conmutativa, función inversa. Puntos de corte con los ejes, signo de la función, eje Y, eje X, función positiva, negativa, intervalos. Crecimiento, decrecimiento, tasa de variación media, función creciente, decreciente. Máximo, mínimo absoluto, relativo. Simetría, eje de ordenadas, origen de coordenadas, función par, función impar, recta, eje. Función periódica, período. Función continua, discontinua, número real, parte entera.
Gráfico	Correspondencia entre conjuntos, representaciones en ejes cartesianos, función inyectiva, funciones a trozos, tablas de valores, función inversa en ejes cartesianos y como correspondencia. Puntos de corte con ejes, signo de función, tasa de variación media, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos y relativos, simetría respecto de un eje y un punto, simetría par e impar, funciones periódicas, funciones continuas y discontinuas.
Simbólico	Expresiones algebraicas, por ejemplo $f(x) = x^2+3$. Números reales, intervalos de la recta real abiertos (a,b), cerrados [a,b] y semiabiertos (a,b], [a,b). Símbolos generales: $\mathbb{R}$, $-\infty$, $+\infty$, etc.

Tabla 6.1: Tipos de lenguaje matemático y ejemplos

6.1.2. Conceptos

Dentro de los conceptos que se explican en la unidad didáctica hay algunos que ya son conocidos por los estudiantes (conocimientos previos) por su estudio en cursos anteriores, y otros que van a ser de nueva presentación (conceptos emergentes). La siguiente tabla muestra de forma resumida.

Tipo de concepto	**Contenido**
Previos	Correspondencia, función, variable dependiente e independiente, dominio y recorrido. Gráficas y coordenadas cartesianas, tablas de valores, funciones definidas a trozos. Tasa de variación, crecimiento y decrecimiento en un intervalo, máximo y mínimo absoluto y relativo en un punto. Funciones pares e impares, función periódica, función continua y discontinua (gráficamente).
Emergentes	Función inyectiva, dominio y recorrido expresados en intervalos, operaciones con funciones (suma, resta producto, cociente, composición), función inversa. Puntos de corte con los ejes, signo de una función en un intervalo. Tasa de variación media. Función simétrica respecto de un eje y un punto, función continua y discontinua (por intervalos).

Tabla 6.2: Conceptos previos y emergentes

6.1.3. Procedimientos

Los procedimientos encontrados en el libro son los siguientes:

- Determinar si una relación entre variables es o no una función, de forma gráfica.
- Dada la fórmula de una función, hallar la tabla de valores y a partir de ésta realizar la representación gráfica.
- Representación gráfica de funciones a trozos.
- Determinar si una función es o no inyectiva.
- Determinar dominio y recorrido de una función a partir de una gráfica y expresarlo en forma de intervalos.
- Determinar de forma algebraica el dominio y recorrido de una función, y expresarlo con notación de intervalos.
- Operar con funciones (suma, diferencia, producto, cociente, composición) a partir de sus expresiones algebraicas.
- Dada una función inyectiva, calcular su inversa.
- Determinar los puntos de corte de una función con los ejes de forma gráfica y algebraica.
- Determinar el signo de una función a partir de su gráfica y de su expresión algebraica, y expresarlo mediante intervalos.

- Determinar los puntos de corte de una función con los ejes de forma gráfica y algebraica.
- Determinar el signo de una función a partir de su gráfica y de su expresión algebraica, y expresarlo mediante intervalos.
- Calcular la tasa de variación (TV) y tasa de variación media (TVM) de una función en un intervalo determinado.
- Determinar de forma gráfica los máximos y mínimos (absolutos y relativos) de una función, así como si es creciente o decreciente, y expresarlo mediante intervalos.
- Determinar la simetría de una función a partir tanto de su representación gráfica como de su expresión algebraica.
- Determinar el periodo de una función. Calcular valores en diversos puntos del eje X a partir de la gráfica de una función en un único intervalo de longitud igual al periodo.
- Determinar la continuidad y discontinuidad de una función a partir de su representación gráfica, y expresarla mediante intervalos.
- Representar gráficamente una función que presenta discontinuidades, dada su expresión algebraica.

6.1.4. Situaciones

- Problemas descontextualizados en los que se pide la representación gráfica de una función partiendo de su expresión algebraica.
- Problemas descontextualizados en los que se pide determinar las características de una función, bien sea a partir de su gráfica o de su expresión algebraica.
- Problemas descontextualizados en los que se pide representar gráficamente una función a partir de una serie de pautas dadas en el enunciado.
- Problemas descontextualizados en los que se pide operar gráfica y algebraicamente con funciones.
- Problemas contextualizados en los que se pide determinar la expresión algebraica de una función a partir de un enunciado.
- Problemas contextualizados en los que se presenta una función que representa el comportamiento en alguna situación real, y se pide estudiar las características de la misma para dar respuesta a preguntas sobre dicha situación.

6.1.5. Propiedades

- Una función es una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde como máximo un único valor del conjunto final.
- Una función es inyectiva cuando a elementos distintos del conjunto inicial les corresponden elementos diferentes del conjunto final.
- El dominio de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente (D(f)).

- El recorrido o imagen de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente (R(f)).
- Operaciones con funciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ con } x \in D(f) \cap D(g)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \text{ con } x \in D(f) \cap D(g)$$
$$(f:g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ con } x \in D(f) \cap D(g) \text{ y } g(x) \neq 0$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- El dominio de g∘f está formado por todos los valores x que pertenecen al dominio de f, tales que f(x) pertenecen al dominio de g.
- La función inversa f^{-1} de una dada f, transforma cada valor de y en x, para todo y ϵ R(f).
- La composición de una función con su inversa es igual a la función identidad:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x;\ (f \circ f^{-1})(y) = y$$

- Los puntos de corte con el eje Y son de la forma (x = 0, y = f(0)). Los puntos de corte con el eje X son de la forma (x, y = 0).
- Una función f es positiva en un intervalo (a,b) si f(x)>0 para todos los valores de x ϵ (a,b).

  Una función f es negativa en un intervalo (a,b) si f(x)<0 para todos los valores de x ϵ (a,b).
- Una función f es creciente en un intervalo de su dominio, si para cualquier par de valores a y b, con a<b, la TVM f[a,b] > 0.

  Una función f es decreciente en un intervalo de su dominio, si para cualquier par de valores a y b, con a<b, la TVM f[a,b] < 0.
- Una función tiene un mínimo relativo en x = a si para todos los valores x de un entorno de a, se cumple f(x) > f(a). Si f(a) es el menor valor que toma la función en todo su dominio, x = a es un mínimo absoluto.

  Una función tiene un máximo relativo en x = a si para todos los valores x de un entorno de a, se verifica f(x) < f(a). Si f(a) es el mayor valor que toma la función en todo su dominio, x = a es un máximo absoluto.
- Una función f es simétrica respecto del eje de ordenadas, Y, cuando f(-x) = f(x) para todo x del dominio. A estas funciones se les llama funciones pares.

  Una función f es simétrica respecto del origen de coordenadas, O, cuando f(-x) = -f(x) para todo x del dominio. A estas funciones se les llama funciones impares.
- Una función f es periódica de periodo T, si para todo x del dominio se verifica que f(x) = f(x+T).
- Una función es continua en un punto si en ese punto la gráfica de la función no presenta saltos o interrupciones.

Una función es discontinua en un punto si en ese punto la gráfica de la función presenta saltos o interrupciones.

Una función es continua en un intervalo (a,b) si es continua en todos los puntos del intervalo.

6.2. Análisis global de la unidad didáctica

En este apartado en primer lugar se describe cómo está estructurada la unidad de funciones en el libro de 4º de ESO orientado a las enseñanzas aplicadas, y a continuación se hace una reflexión sobre la misma.

6.2.1. Descripción de la estructura y contenido del libro de texto

El tema comienza con una breve introducción sobre el uso de las funciones en el mundo de la medicina. Se plantean una serie de cuestiones destinadas a utilizar un abanico de destrezas cognitivas: observación, lectura, comprensión, análisis, opinión.

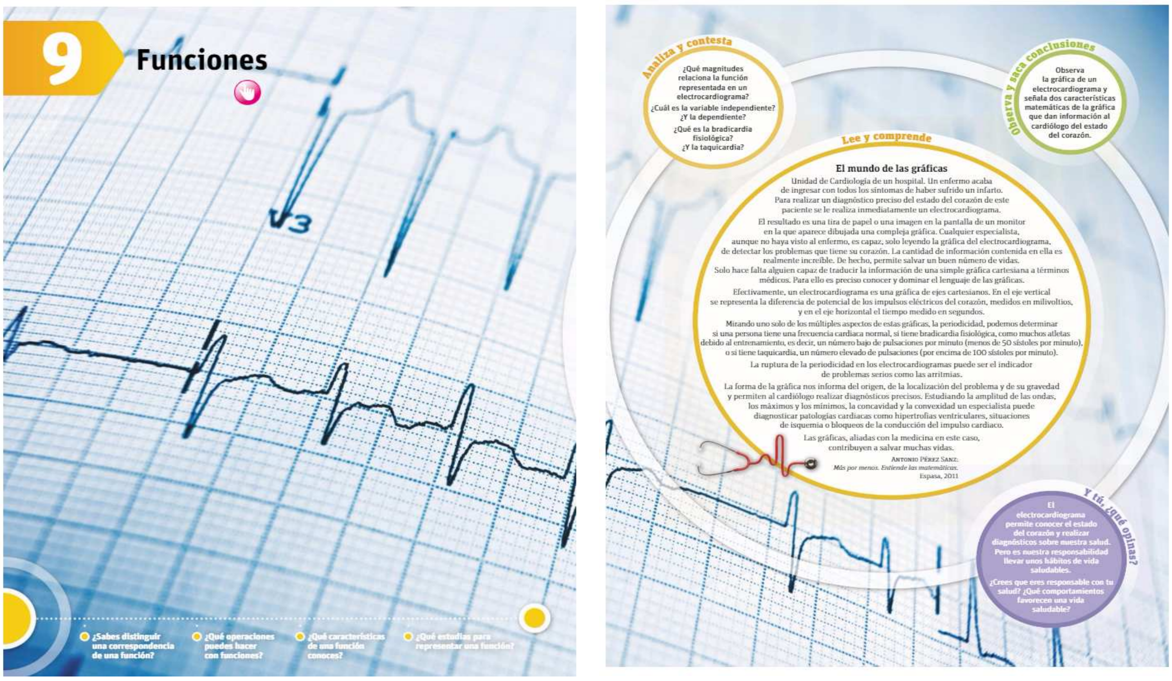


Figura 6.1: Páginas introductorias

A partir de este punto, la teoría del tema se divide en 11 apartados, en el orden que se indica en la tabla siguiente.

Apartado 1	Correspondencias y funciones
Apartado 2	Dominio y recorrido
Apartado 3	Suma y diferencia de funciones
Apartado 4	Producto y cociente de funciones
Apartado 5	Composición de funciones
Apartado 6	Función inversa
Apartado 7	Puntos de corte con los ejes. Signo de la función
Apartado 8	Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos
Apartado 9	Simetría de una función
Apartado 10	Periodicidad de una función
Apartado 11	Continuidad

Tabla 6.3: Estructura del tema

Cada uno de estos 11 apartados comienza explicando conceptos o propiedades relativos a funciones. Las explicaciones teóricas vienen acompañadas de ejemplos algebraicos y gráficos para facilitar la comprensión. Además, al final de cada apartado se proponen una serie de ejercicios descontextualizados relativos a los conceptos y propiedades vistos en el mismo, que por lo general se resuelven mediante procedimientos estándar.

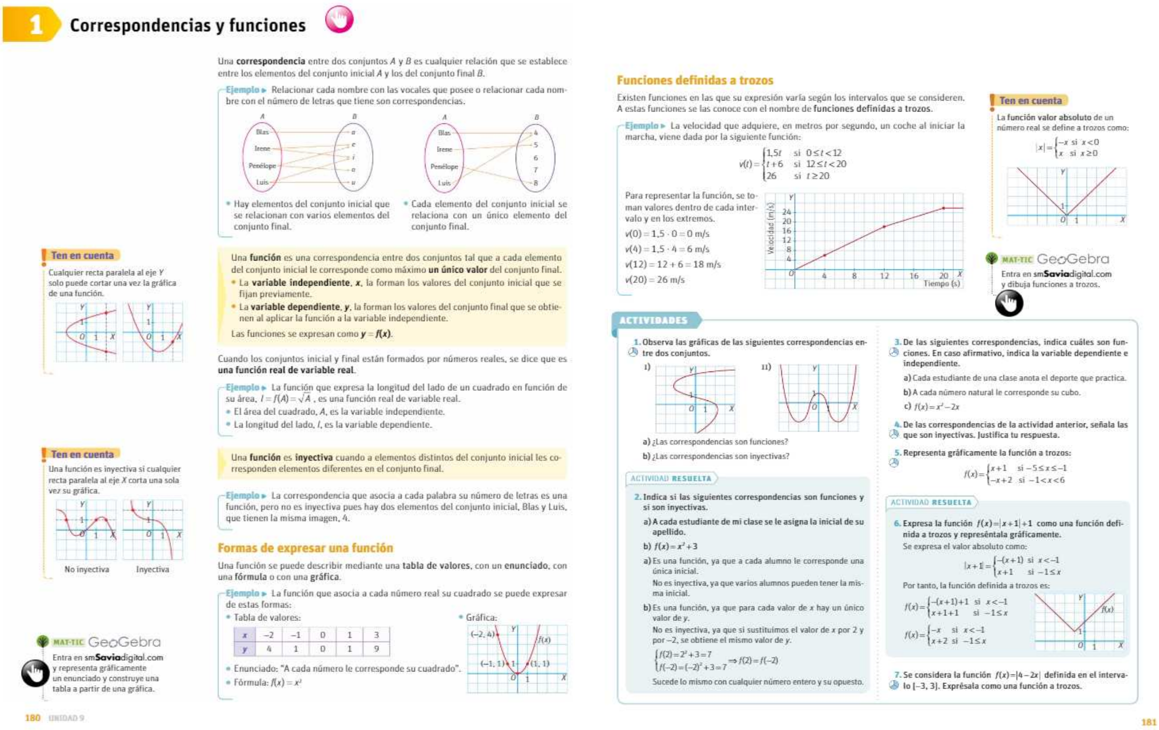


Figura 6.2: Ejemplo de apartado de teoría de funciones

A continuación, el libro ofrece un resumen de los conceptos y propiedades más estudiados en el tema, así como una breve colección de los ejercicios más representativos resueltos.

Tras esta pequeña sección aparece una colección amplia de ejercicios descontextualizados similares a los presentes en los apartados de teoría, y después se presentan una serie de problemas de aplicación práctica que se resuelven mediante los procedimientos practicados a lo largo de todo el tema.

Finalmente hay dos páginas que contienen dos grandes problemas que ilustran el uso de las matemáticas en otras disciplinas tales como la economía o la física, así como una serie de ejercicios de autoevaluación.

A continuación se muestran páginas correspondientes a la colección de ejercicios y problemas, así como a la sección final. Para consultar las páginas de resumen de teoría y la colección de ejercicios más representativos, ver Anexo.

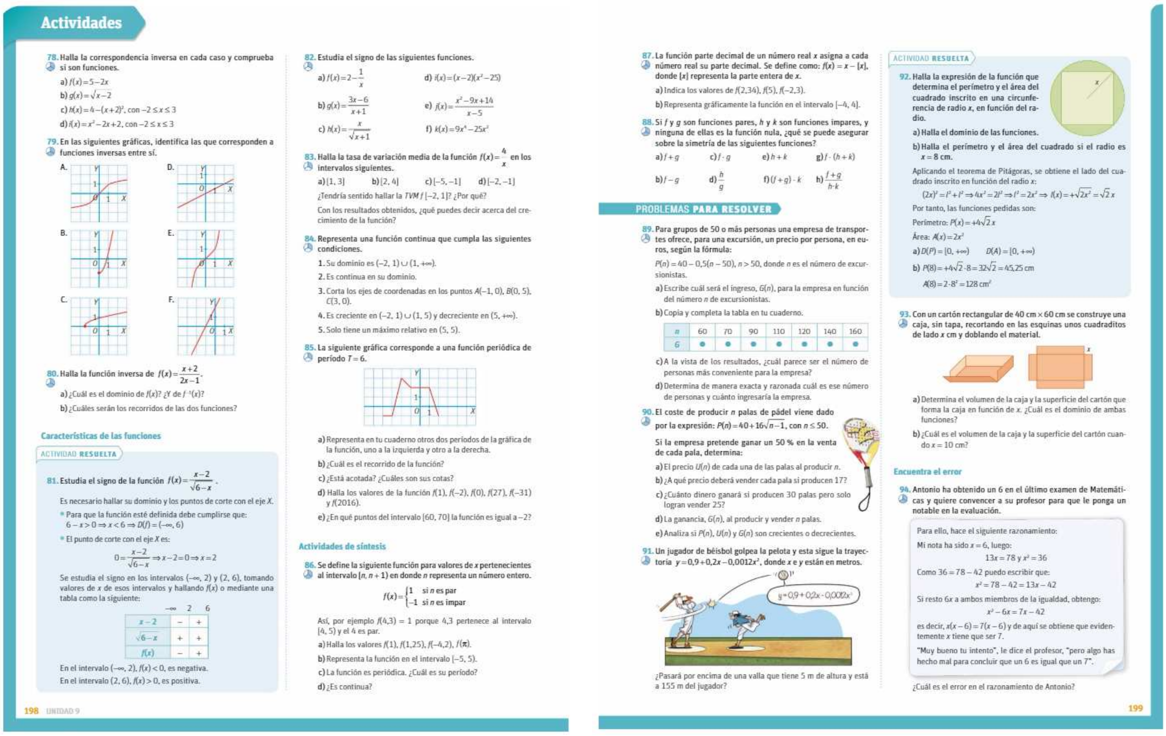


Figura 6.3: Ejercicios y problemas

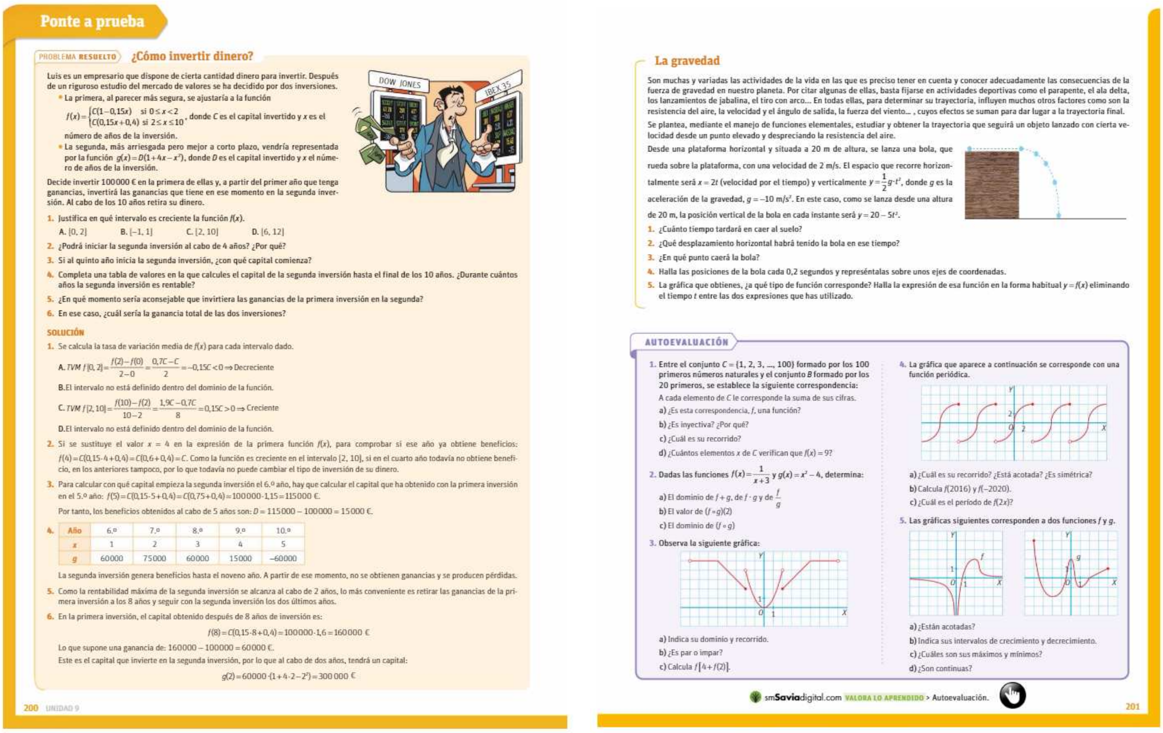


Figura 6.4: Problemas de aplicación en otras materias y autoevaluación

6.2.2. Reflexión sobre la estructura y contenido del libro de texto

El libro presenta en la introducción una aplicación real de las funciones en el mundo de la medicina con el fin de suscitar el interés del alumno, y a continuación se divide la teoría en 11 apartados. Resulta interesante destacar que los contenidos tienen una disposición que respeta el orden histórico. Por ejemplo, la continuidad aparece el final del tema, y en la historia de las matemáticas también es un concepto reciente. Las primeras manifestaciones matemáticas se corresponden con técnicas de conteo en forma de muescas en huesos. A lo largo de los siglos se fueron ampliando sucesivamente los conjuntos de números, pasando desde conjuntos discretos como los naturales hasta continuos como los reales, o incluso otros de un mayor número de dimensiones como pueden ser los cuaterniones de Hamilton o los octoniones de Cayley.

No obstante esta disposición casi con total seguridad ha sido elegida de esta manera teniendo en cuenta factores cognitivos relativos a los alumnos. Por ejemplo, antes que la continuidad se estudian otras características de funciones como máximos y mínimos, que resultan más sencillos de entender. El orden de contenidos hace que el nivel de dificultad evolucione gradualmente, lo cual resulta adecuado desde el punto de vista pedagógico. Se podría dividir el tema en tres grandes bloques:

- Bloque I: definición de función, formas de representación, dominio y recorrido.
- Bloque II: operaciones con funciones.
- Bloque III: características de funciones.

Esta estructura parece pensada de tal forma que lo que se estudie en un bloque sirva de base para estudiar el siguiente: en primer lugar se repasa aquello que ya se conoce (bloque I), a continuación se adquieren herramientas para el manejo de funciones (bloque II), y finalmente se estudian sus características (bloque III). Sin embargo, tal y como están planteados tanto la teoría como los ejercicios, en realidad el orden cronológico de los bloques II y III es indiferente, no es necesario uno para estudiar el otro. A continuación se reflexiona sobre la estructura del libro atendiendo a criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2011).

Los ejercicios que aparecen en estos 11 apartados de teoría están completamente descontextualizados, lo que puede desmotivar al alumno. Por otra parte, estos contenidos pueden resultar difíciles de comprender, por lo que la aplicación directa de la teoría sin otros 'elementos de distracción' es una buena forma de afianzar procedimientos. Aunque quizás estos últimos ejercicios deberían tener un mayor peso mientras se estudia la teoría, incluir un pequeño porcentaje de problemas contextualizados a lo largo del tema, en lugar de agruparlos todos al final, podría contribuir a mantener el interés y la motivación del estudiante (idoneidad afectiva), no obstante alcanzar el equilibrio óptimo es un tema complejo.

Al final del tema aparece una amplia batería de ejercicios para poner en práctica los conocimientos adquiridos. Hay una variedad suficiente en cuanto a la dificultad para proponer tanto a aquellos alumnos que tienen más problemas para comprender el tema como para aquellos que progresan de forma más rápida (idoneidad cognitiva).

Los problemas finales son necesarios para hacer ver a los estudiantes que las funciones no son un ente imaginario, complejo y sin aplicaciones, sino que pueden aparecer en situaciones cotidianas, y se utilizan para estudiar multitud de fenómenos del mundo que nos rodea. Los dos últimos problemas de aplicación en economía y física muestran el uso de funciones en contenidos propios de otras asignaturas (idoneidad ecológica).

Finalmente se proponen una serie de actividades de autoevaluación que recogen todo lo estudiado en el tema, que pueden ayudar a los estudiantes a comprobar si los significados personales adquiridos se ajustan a los significados de referencia, así como a preparar la evaluación.

Los contenidos del libro se ajustan correctamente a los propios del nivel de acuerdo al currículo (idoneidad epistémica). El tema de funciones es uno de los que más complicados de entender suele resultar a los estudiantes. Se estudian una serie de conceptos y expresiones que si sólo se trabajan de forma algebraica y en soporte tradicional (lápiz y papel) pueden resultar difíciles de asimilar. Sin embargo, este tema a su vez tiene la ventaja de que la mayoría de los conceptos puede explicarse de forma muy visual con ayuda por ejemplo un software dinámico (Geogebra). El libro dispone de un espacio limitado, y pese a que incluye ciertas ilustraciones en algunos ejemplos, lo cierto es que hay conceptos que pueden visualizarse de forma muy sencilla a partir de representaciones gráficas que no aparecen (baja idoneidad mediacional).

Por ejemplo, el dominio y el recorrido de las funciones pueden entenderse como las proyecciones sobre los ejes X e Y. Otro caso es el de la suma y resta de funciones, en el que el apoyo de ilustraciones o manipulaciones mediante un software dinámico podría ayudar a los estudiantes en la posterior aplicación de la técnica algebraica (Lasa, 2015, 2016). En una gráfica se observa que los puntos de corte con el eje X son aquellos en los que $f(x) = 0$, y que a ambos lados de estos puntos en general una función tiene signo diferente. En general, los conceptos de crecimiento, continuidad, simetría y periodicidad son sencillos de ilustrar y pueden ayudar al estudiante a crear un significado personal en el que apoyarse a la hora de trabajar sobre expresiones algebraicas en el soporte tradicional.

Resulta reseñable una omisión en particular del libro de texto que puede conducir a interpretaciones erróneas desde un punto de vista rigurosamente matemático, pero que se considera necesaria para la introducción de la función inversa a estos niveles. Es el caso de la expresión $(f^{-1}\circ f)(x) = (f\circ f^{-1})(x) = x$, que solamente es cierta para aquellos ‘x’ que están en la intersección del dominio y el rango de f.

Por otra parte, si la unidad didáctica se imparte siguiendo al pie de la letra el libro de texto, la mayor parte de las lecciones serán de tipo magistral o dialógico, dejando de lado otras posibles actividades tipo proyecto que pueden ayudar al alumno a trabajar otras competencias además de la puramente matemática (baja idoneidad interaccional).

Concluyendo, el libro de texto de referencia es una buena base para las clases y el estudio de la unidad didáctica, tiene una correcta idoneidad epistemológica y cognitiva, y contiene problemas que relacionan las matemáticas con otros contenidos, por lo que también tiene cierta idoneidad ecológica. Sin embargo, los estudiantes pueden beneficiarse de otros recursos que aumenten la idoneidad mediacional y afectiva (uso de software, problemas contextualizados), así como de actividades de tipo proyecto o en grupos que aumenten la idoneidad interaccional.

6.3. Otros aspectos relevantes

Hasta este punto se ha analizado la unidad didáctica del libro de texto en cuanto a su estructura, correspondencia con el currículo e idoneidad didáctica. El siguiente apartado muestra un análisis de la adquisición de competencias transversales que deben adquirir los alumnos en todas las asignaturas.

6.3.1. Adquisición de competencias en el libro de texto

A continuación se analiza, en el libro de texto, la presencia o ausencia de elementos que fomenten el desarrollo de las competencias.

- Comunicación lingüística

Esta competencia se trabaja de forma transversal en todas las asignaturas, y tanto las matemáticas en general como esta unidad didáctica en particular no son una excepción. La adquisición/transmisión de conocimientos surge de la comunicación lingüística, bien en su forma oral (profesor-alumno) o escrita, como es el caso del libro de texto. Por otra parte, no sólo se practica esta competencia sino que se profundiza en ella y se aprenden tanto términos nuevos como significados para los ya conocidos. Por ejemplo en esta unidad aparece el término inyectividad, difícil de encontrar fuera del ámbito matemático.

- Competencia matemática

Este es el núcleo central de la asignatura. La adquisición de competencias matemáticas se realiza en dos planos, uno abstracto y uno práctico. La unidad didáctica trabaja en ambos, aunque la mayor parte de los contenidos se introducen de forma abstracta y no es hasta el final cuando aparecen actividades de aplicación práctica en campos como la medicina, la economía o la física.

- Competencia digital

El libro contiene numerosas referencias a actividades propuestas en la página web de la editorial, fomentando así el uso de internet y recursos digitales. Sin embargo su uso no está explotado en su totalidad ya que actualmente es sencillo crear recursos que utilicen hojas de cálculo, representaciones y manipulaciones gráficas, y sin embargo no se hace uso de ellos.

- Aprender a aprender

Se podría definir esta competencia como la toma de conciencia por parte del estudiante de si lo que está haciendo está bien o mal. El grado máximo se alcanzaría con la madurez que permite terminar un examen conociendo la nota obtenida, o acudir al mismo con la seguridad poder aprobarlo. En este sentido, las actividades de autoevaluación propuestas al final del tema ayudan a comprobar el grado de adquisición de los significados de referencia y a tomar medidas correctivas en su caso.

- Competencias sociales y cívicas

En este caso la unidad didáctica puede utilizarse para generar situaciones que promuevan esta competencia, como pueden ser los trabajos en grupo o las sesiones de dudas, sin embargo el libro de texto en sí mismo no propone actividades de este tipo. Por otra parte, el uso de funciones en problemas contextualizados ayuda al alumno a entender mejor el mundo y la sociedad y por lo tanto le proporcionan herramientas para formarse opiniones y tomar decisiones.

- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

La resolución de problemas forma a los estudiantes para realizar una planificación cuando han de enfrentarse a determinadas situaciones: analizar, organizarse, gestionarse. Las dificultades encontradas a lo largo de la unidad redundan en un mayor autoconocimiento y, tras ser superadas, en un aumento de la autoestima y el interés.

- Conciencia y expresiones culturales

Las competencias clave en general no son compartimentos estancos, y en particular esto es muy claro en el caso de las expresiones culturales, íntimamente ligadas con la competencia lingüística. Tanto el idioma como el lenguaje de la unidad didáctica son componentes culturales en sí mismos. Por otro lado, los ejercicios contextualizados están basados en actividades relativas a determinadas culturas, fundamentalmente occidentales (béisbol, fútbol, inversiones financieras).

En definitiva, la unidad didáctica permite practicar todas las competencias, algunas de ellas de forma directa (matemática, lingüística, aprender a aprender), y otras de forma indirecta, como puede ser el caso de la competencia social y cívica, que puede ser trabajada utilizando como base ejercicios del libro pero aplicando metodologías para funcionar a nivel de clase, o de grupo.

Para terminar, hacer hincapié en que las competencias clave no son compartimentos estancos, sino que por lo general trabajar una de ellas implica a la vez poner en práctica otras. En el caso de la asignatura de matemáticas, y en esta unidad didáctica así queda reflejado, la competencia matemática es el motivo central, y colateralmente se trabajan todas las demás.

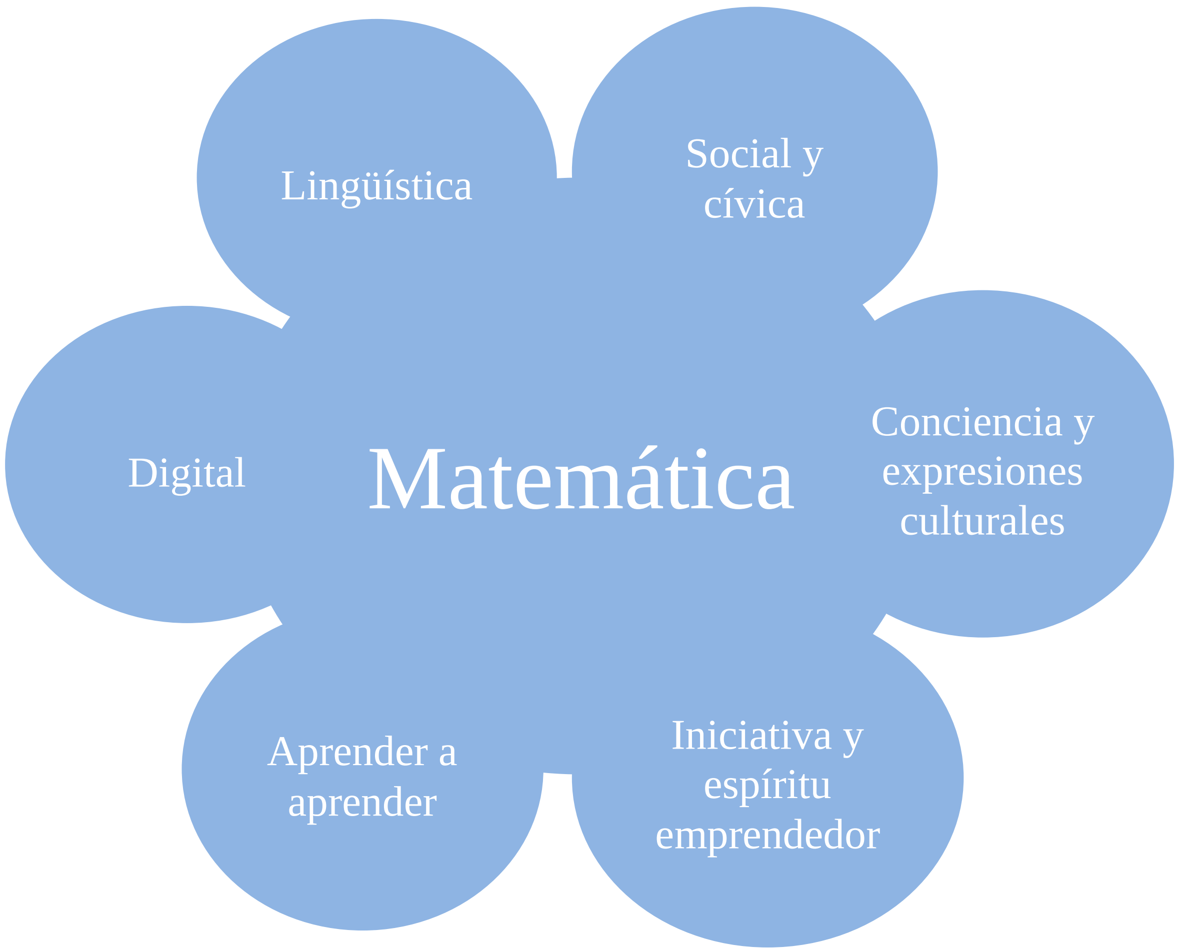


Figura 6.5: Competencias clave

6.3.2. Comparación con matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

En este apartado se comparan el tema de funciones en el libro de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas con el de académicas. Evidentemente habrá diferencias entre ambos que vengan marcadas por el currículo, pero es interesante estudiar si además la metodología o el tipo de ejercicios realmente se adaptan en función del tipo de enseñanza.

- Diferencias curriculares

La siguiente tabla muestra los estándares de aprendizaje en que se diferencian ambos itinerarios.

Enseñanzas aplicadas	Enseñanzas académicas
1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial.	1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.
1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, y exponenciales.	1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas.
2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando su decisión.	2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.
2.5. Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.	--

Tabla 6.4: Estándares de aprendizaje

A partir de esta tabla se puede concluir que las diferencias fundamentales son los tipos de funciones que se estudian (en académicas se incluyen las logarítmicas), la dificultad al establecer relaciones entre tablas y gráficas, y un estándar para las enseñanzas aplicadas que requiere específicamente el uso de elementos tecnológicos para dibujar gráficas. Por lo tanto es de esperar que el tema de funciones que se va a comparar en ambos libros, en el que éstas se estudian a nivel general, no tenga diferencias significativas en cuanto a contenidos.

- Diferencias en libros de texto

Se observan varias diferencias significativas entre ambos libros de texto. En primer lugar, el tema de funciones en enseñanzas académicas tiene un apartado adicional sobre acotación y asíntotas. Este añadido supone una disposición diferente de los contenidos. Dada su dificultad, aparece situado al final del tema, y como está relacionado con el apartado de crecimiento y extremos relativos, éste último también se desplaza a las últimas páginas.

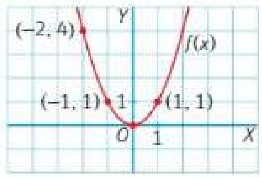
Respecto a las explicaciones teóricas, el libro de enseñanzas aplicadas las complementa con ejemplos más sencillos, como puede observarse en el siguiente ejemplo sobre formas de representar una función.

Ejemplo ▸ La función que asocia a cada número real su cuadrado se puede expresar de estas formas:

- Tabla de valores:

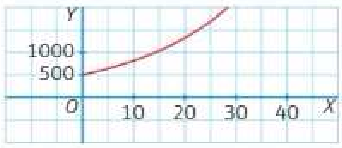
x	-2	-1	0	1	3
y	4	1	0	1	9

- Enunciado: "A cada número le corresponde su cuadrado".
- Fórmula: $f(x) = x^2$
- Gráfica:



Ejemplo ▸ El capital final que se obtiene al colocar 500 € a un interés compuesto del 5 % anual vienen dados por la fórmula: $C = 500 \cdot 1{,}05^t$.

- El tiempo en años, t, es la variable independiente.
- El capital final, C, es la variable dependiente.



t (años)	C (€)
0	0
1	525
2	551,25
3	578,81
...	...

Figura 6.6: Representación de funciones. Aplicadas arriba, académicas abajo

La gráfica del libro de aplicadas dibuja explícitamente los puntos de la tabla de valores, mientras que en el de académicas no se señalan. Además, en el libro de aplicadas se dedica mayor extensión a ciertos apartados, y se complementan con ejemplos prácticos.

Ejemplo ▸ El precio, en euros, de un paquete de acciones se ajusta a la función $f(x) = -x^2 + 50x + 2000$, donde x representa el número de días desde que salen a la venta. Por cada día que pase el precio aumenta 20 €. ¿Cuál es la función que expresa el precio total de las acciones al cabo de x días?

La función que determina la revalorización es $g(x) = 20x$. El precio total es la suma del precio más la revalorización.

$$P(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = (-x^2 + 50x + 2000) + 20x = -x^2 + 70x + 2000$$

Ejemplo ▸ Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x - 1$, calcula la función suma y la función resta.

$(f+g)(x) = \frac{1}{x} + x - 1 = \frac{1 + x^2 - x}{x}$, con $x \in D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

$(f-g)(x) = \frac{1}{x} - (x-1) = \frac{1 - x^2 + x}{x}$, con $x \in D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

Figura 6.7: Aplicación práctica frente a ejemplo teórico

También se observan diferencias en los ejercicios que se plantean en uno y otro libro. La mayor parte son idénticos, aunque en académicas aparecen algunos relativos a propiedades generales de funciones que requieren de una cierta capacidad de pensamiento abstracto, mientras que en los ejercicios de aplicadas siempre se trabaja con valores, funciones o gráficas concretas.

36. Justifica que si se suman dos funciones periódicas del mismo período T resulta otra función periódica. ¿Cuál será el período de la función suma?

44. Representa una función periódica de período $T = 4$, que tenga un máximo absoluto $M = f(1) = 3$ y un mínimo absoluto $m = f(3) = -1$.

Figura 6.8: Ejercicios de académicas (arriba) y aplicadas (abajo)

También hay algunos ejercicios que comparten el mismo enunciado en ambos libros pero difieren en las preguntas. A veces en enseñanzas aplicadas aparecen preguntas sencillas que no se encuentran en el de académicas, o al revés, en este último se plantean cuestiones más complejas que no aparecen en aplicadas.

86. Se define la siguiente función para valores de x pertenecientes al intervalo $[n, n+1)$ en donde n representa un número entero.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Así, por ejemplo $f(4{,}3) = 1$ porque 4,3 pertenece al intervalo $[4, 5)$ y el 4 es par.

a) Halla los valores $f(1)$, $f(1{,}25)$, $f(-4{,}2)$, $f(\pi)$.

b) Representa la función en el intervalo $[-5, 5)$.

c) La función es periódica. ¿Cuál es su período?

d) ¿Es continua?

88. Se define la siguiente función para valores de x pertenecientes al intervalo $[n, n+1)$ en donde n representa un número entero.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Así por ejemplo $f(4,\ 3) = 1$ porque 4, 3 pertenece al intervalo $[4, 5)$ y el 4 es par.

a) Halla los valores $f(1)$, $f(1,\ 25)$, $f(-4,\ 2)$, $f(\pi)$.

b) Representa la función en el intervalo $[-5, 5)$

c) La función es periódica. ¿Cuál es su período? ¿Por qué?

Figura 6.9: Ejercicio de enunciado compartido en académicas y aplicadas

Por último, comentar que el libro de enseñanzas académicas contiene una serie de actividades denominadas 'para pensar más' que requieren dominio de los contenidos del tema ya que no tratan de simples aplicaciones prácticas, sino que requieren un elevado nivel de razonamiento.

Resumiendo, en enseñanzas académicas hay contenido que no se ve en aplicadas, y en estas últimas las explicaciones se ven apoyadas por ejemplos más sencillos y casos prácticos. Aunque un gran porcentaje de los ejercicios son los mismos en ambos casos, en académicas también los hay con un fuerte componente de razonamiento y abstracción, mientras que en aplicadas todos particularizan para valores, funciones o gráficas concretas. Estas diferencias resultan coherentes teniendo en cuenta el futuro itinerario académico de los estudiantes en ambos casos, aunque el tema es idéntico en un porcentaje muy alto y se echa en falta una mayor especialización en cada caso.

Capítulo 7

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este apartado se detallan las dificultades y los errores que se prevé que los estudiantes cometan, así como aquellos problemas que se han constatado durante el proceso de estudio pero que eran igualmente previsibles. Antes de comenzar resulta pertinente definir dificultad y error para tener clara la diferencia. En este trabajo se entiende como dificultad aquello que no es sencillo de comprender, de aprender. Por otro lado, se entiende como error el fallo cometido al aplicar algo que uno cree saber.

7.1. Dificultades previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

El triángulo pedagógico de Jean Houssaye (1988) distingue tres componentes en toda situación pedagógica: saber, profesor y alumno. Las dificultades que puede presentar un alumno en el tema de funciones vienen derivadas fundamentalmente del nivel de abstracción necesario para comprender los conceptos que se tratan. Por lo tanto, atendiendo al modelo del triángulo pedagógico, el origen de los problemas que se relatan a continuación reside en el conocimiento, el saber.

Debido a la complejidad de los contenidos es previsible que los estudiantes los dividan en ‘compartimentos’, cada uno con su propia teoría y su metodología, en lugar de entender el tema de manera global y establecer conexiones.

Por ejemplo, respecto a las diferentes formas de representar una función (gráfica, tabla, fórmula), es esperable que los estudiantes las conozcan, pero que sin embargo no establezcan conexiones entre ellas ni las identifiquen como diferentes formas de representar lo mismo.

De igual manera, al trabajar con dominio y recorrido de funciones es previsible que entiendan estos conceptos a partir de representaciones gráficas, pero que no vean la conexión con las manipulaciones algebraicas que se hacen a las funciones para hallar los puntos que pertenecen al dominio.

El mismo fenómeno se espera cuando se trabaje con los puntos de corte con los ejes y el signo de la función. Se prevé que calculen los puntos de corte con los ejes de forma mecánica y que sin embargo tengan mayores dificultades para determinar el signo de la función, fruto de esa concepción separada de lo gráfico y lo algebraico.

En cuanto al cálculo de la función inversa, dado que este concepto se introduce de la mano de la composición de funciones, se prevé que los alumnos retengan únicamente la mecánica para hallar la función inversa de una dada. No se prevé que entiendan la idea de que la inversa devuelve, dado un punto del recorrido de la función original, un punto del dominio. Para ellos el dominio y el recorrido son básicamente proyecciones en los ejes X e Y respectivamente, por lo que no se espera que comprendan completamente este apartado.

Como ocurre a lo largo de toda esta unidad, comprender la simetría de funciones requiere de ser capaz de entender el concepto en los planos gráfico y algebraico. Se espera una buena comprensión de la parte gráfica, especialmente la referente a simetría respecto de una recta, ya que se puede aplicar una analogía con espejos: en una función simétrica respecto de una recta una de las mitades es el reflejo de la otra. Respecto a la parte algebraica, se prevén dificultades tanto en su comprensión como en la relación de la misma con su significado gráfico.

Respecto a la periodicidad, es previsible que los alumnos comprendan la idea de que este tipo de funciones ‘se repiten’ indefinidamente, pero no la de que tiene propiedades como que, conociendo el periodo, es posible hallar el valor de la función en cualquier punto x a partir del dibujo de la función en un único intervalo concreto.

En continuidad se espera un desempeño similar, buena comprensión del significado gráfico pero sin establecer puentes con su contrapartida algebraica, y por lo tanto dificultades a la hora de determinar puntos de discontinuidad a partir de la fórmula de una función.

Por último, se prevén muchas dificultades en aquellos problemas que requieran interpretar un enunciado, expresarlo en forma de función y operar esta última para obtener determinados resultados. El éxito en este caso depende de una buena comprensión de los conceptos estudiados a lo largo del tema que permita generalizar su uso a diferentes situaciones o enunciados. Sin embargo, la previsible disociación entre ‘lo gráfico y lo algebraico’ supone un obstáculo importante a la hora de resolver este tipo de problemas.

Concluyendo, es importante considerar estas dificultades y establecer métodos para superarlas, ya que de lo contrario pueden dar lugar a posteriores fracasos, es decir, el alumno puede no contar con las herramientas necesarias para enfrentarse a las situaciones y ejercicios que se plantean en este tema.

7.2. Errores y su posible origen

Los fallos descritos en este apartado pueden clasificarse en errores o fracasos. Aquellos que el estudiante es capaz de corregir por sí mismo son catalogados como errores, es decir, se posee el conocimiento y ha habido una mala aplicación del mismo. Sin embargo, aquellos que el estudiante no sea capaz de subsanar se denominan fracasos. Esta distinción entre fracaso y error es importante ya que determina la actuación del docente: ante un error hay que hacer al alumno caer en la cuenta del mismo, pero un fracaso requiere atacar de nuevo un conocimiento mal comprendido.

A lo largo de toda la unidad didáctica es muy importante el uso de intervalos para caracterizar una función (funciones a trozos, dominio, signo, crecimiento). Se prevé que cometan con frecuencia errores en el uso de paréntesis y corchetes, y que por tanto incluyan dentro de un intervalo un punto que en realidad no pertenece, y viceversa. Por lo general este tipo de fallo puede considerarse como un error.

En cálculo de dominios es muy posible que apliquen las técnicas para calcular puntos que pertenecen al mismo, pero que al no entender o no relacionar con la representación gráfica determinen que aquellos que forman parte son justamente los no que en realidad quedan fuera. Por ejemplo, en el caso de las funciones que contienen raíces es esperable que igualen el radicando a cero, hallen los puntos que lo anulan y a partir de ahí su signo, y que finalmente expresen el dominio como aquellos puntos que hacen justamente lo hacen negativo. Este tipo de fallo se clasifica como fracaso.

En los apartados sobre operaciones con funciones (suma, producto, composición, etc.) se espera que cometan muchos fallos (del tipo error) por no dominar las manipulaciones algebraicas: operaciones con incógnitas, sacar factor común, suma de fracciones. Es previsible que aprendan cómo operar funciones pero que errores de cálculo les prive de llegar a un resultado correcto.

Composición de funciones se prevé un apartado particularmente complicado, y se esperan errores de los siguientes tipos:

$$(g \circ f)(x) = f(g(x))$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2};\, g(x) = \frac{x+3}{x+1};\ f\big(g(x)\big) = \frac{\frac{x+3}{x+1}+3}{\frac{x+3}{x+1}+1}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2};\, g(x) = \frac{x+3}{x+1};\ f\big(g(x)\big) = \frac{x+1}{x-2}$$

Es decir, es posible que apliquen mal el orden de la composición, que no sustituyan x por la función que corresponda, o que incluso tomen como resultado la expresión de f(x) o de g(x).

Además pueden cometer otros fallos derivados de la creencia de que la composición es una operación conmutativa (fracaso).

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$$

En el apartado de características de funciones es esperable que confundan extremos relativos con absolutos. Es posible también que tengan dificultades para identificar centros de simetría en funciones simétricas respecto de un punto.

Por último, en representación de funciones a trozos y funciones con discontinuidades es previsible que cometan errores con el uso y la interpretación de la ‘notación gráfica’, es decir, el uso de un ‘punto vacío’ o un ‘punto lleno’ para determinar si pertenece o no a un intervalo determinado.

Capítulo 8

El proceso de estudio

En este capítulo se detalla la distribución temporal de la unidad didáctica sobre funciones en la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas aplicadas de 4º de ESO. Además, se describen otras actividades realizadas fuera del aula ordinaria, así como el trabajo autónomo de los estudiantes.

8.1. Estructura del proceso de estudio

La unidad didáctica se estructura temporalmente siguiendo la división descrita en el apartado 6.2.2.

- Bloque I: definición de función, formas de representación, dominio y recorrido.
- Bloque II: operaciones con funciones.
- Bloque III: características de funciones.

Tras plantear en qué orden impartir los bloques se considera adecuado el establecido por el libro en base tanto a criterios de idoneidad como a la complementariedad con actividades de ordenador planificadas. El bloque I corresponde a contenidos que los estudiantes conocen de años anteriores, por lo que empezar repasando conceptos que a priori dominan se considera que los predispone positivamente para el resto de la unidad.

A continuación se introduce el bloque II de operaciones con funciones (suma, resta, producto, etc.), considerado más árido tanto por las manipulaciones algebraicas que exige como por la dificultad en sí misma de conceptos como la composición de funciones o la función inversa.

Más adelante se introducen las características de funciones (signo, crecimiento, simetría, etc.) mediante actividades en Geogebra que permiten a los estudiantes crear significados personales que les sirvan de base para la posterior aplicación de la técnica algebraica. Los elementos de este bloque son fáciles de entender visualmente, y además se aprovecha este contexto de trabajo con ordenador para ilustrar conceptos del bloque II: suma y resta de funciones de forma gráfica, simetría de una función y su inversa respecto de la recta $y = x$.

Como se expone en (Wilhelmi et al., 2013), clásicamente se distinguen tres tipos de evaluación: inicial (punto de partida), formativa (seguimiento) y sumativa (examen final). Dado que el Practicum II finaliza antes de poder terminar la unidad didáctica por completo, se llega al acuerdo de realizar un cuestionario a modo de evaluación formativa, por lo que las sesiones previas a la evaluación sumativa dedicadas al repaso y la resolución de ejercicios, quedan fuera de este estudio. Es importante destacar que la evaluación formativa en forma de cuestionario no es una práctica frecuente en este grupo, no obstante dado que éste se compone tan sólo de 9 estudiantes no resulta especialmente complicado realizar un seguimiento a cada uno de ellos para conocer sus progresos.

Los siguientes puntos detallan la planificación de los contenidos, tanto estimaciones temporales como técnicas utilizadas para la explicación de los conceptos a priori más complicados para los estudiantes.

- Qué es una función, dominio y recorrido, funciones a trozos (1 sesión)

Se explica qué es una función y sus distintas formas de representación (fórmula, tablas de valores y gráfica). Se realizan ejercicios consistentes en determinar qué gráficas corresponden a funciones, así como el dominio y el recorrido de las mismas.

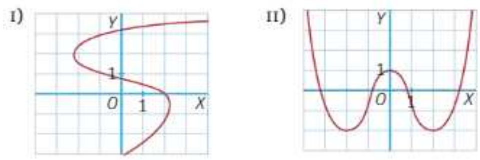


Figura 8.1: Determinar cuál es una función

Se explican las funciones a trozos y su representación partiendo del dibujo de todas las funciones que aparecen en la definición, para a continuación quedarse sólo con aquellas partes contenidas dentro de los intervalos que se especifican.

$$v(t)=\begin{cases}1{,}5t & \text{si } 0\le t<12\\ t+6 & \text{si } 12\le t<20\\ 26 & \text{si } t\ge 20\end{cases}$$

- Cálculo de dominio de funciones (2 sesiones)

Se dan una serie de pasos mecánicos para aquellos ejercicios en que se pide calcular el dominio de funciones de tipo racional o que contengan raíces.

- Funciones racionales
  - Paso 1: Hallar los valores de x que anulan el denominador
  - Paso 2: Marcar los valores hallados en el paso 1 en la recta real
  - Paso 3: El dominio son todos los puntos de la recta real salvo los marcados en el paso 2
  - Paso 4: A partir del dibujo de la recta real del paso 3, expresar el dominio mediante intervalos.
- Funciones que contienen raíces
  - Paso 1: Hallar los valores de x que hacen positivo el radicando
  - Paso 2: Marcar los valores hallados en el paso 1 en la recta real
  - Paso 3: El dominio son todos los puntos de la recta real hallados en el paso 2
  - Paso 4: Expresar el dominio mediante intervalos

- Suma y diferencia de funciones (1 sesión)

Se realizan varios ejemplos y ejercicios con los estudiantes para afianzar sobre todo las técnicas de manipulación algebraica. Para calcular el dominio simplemente se indica que hay que calcularlo una vez realizada la operación suma o resta, sobre la función resultado.

- Producto y división de funciones (1 sesión)

Se estudian estas dos operaciones simplemente como el producto y cociente de expresiones algebraicas de funciones.

$$y = f(x);\ y = g(x);\ \text{Producto: } y = f(x)\cdot g(x);\ \text{Cociente: } y = f(x)/g(x);$$

Al igual que ocurría en el caso de la suma y la diferencia, el dominio simplemente se calcula sobre la función resultado tras realizar la operación en cuestión. Se realizan fundamentalmente ejercicios con funciones racionales, el tipo más complicado para este tipo de operaciones.

- Composición de funciones (1 sesión)

Se explican la teoría y la notación correspondientes, y se realizan los primeros ejemplos utilizando únicamente números.

$$(g\circ f)(5) = g(f(5));\ x = 5 \rightarrow f(5) = 3 \rightarrow g(3) = 9$$

A continuación se realizan ejemplos de composición utilizando la expresión general de las funciones, pero hay que recurrir a explicaciones adaptadas como la que se indica a continuación.

$$f(x)=1/x\ ;\ g(x) = 3x+1;\ (g\circ f)(x) = g(f(x));\ x \rightarrow f(x) = 1/x \rightarrow g(1/x)$$

$$g(\text{algo}) = 3\cdot \text{algo} + 1 \rightarrow g(1/x) = 3\cdot(1/x) + 1$$

- Función inversa (1 sesión)

Se introduce este apartado trabajando un ejercicio en el que el resultado de una composición de funciones es x. Se explica que si ocurre esto las dos funciones se llaman inversas, y que $(f^{-1}\circ f)(x) = x$.

Se explica la metodología para hallar la función inversa de una dada como la operación de ‘despejar la y’, y a continuación ‘intercambiar los nombres de x e y’. Siguiendo este procedimiento se hallan funciones inversas, y para comprobar si el cálculo está bien realizado basta con hacer $(f\circ f^{-1})(x)$ y observar si el resultado es x.

- Puntos de corte y signo de una función (1 sesión)

Se realiza una introducción a partir de gráficas para deducir lo siguiente:

- En los puntos de corte con el eje Y la coordenada X vale cero.
- En los puntos de corte con el eje X la coordenada Y vale cero.

A partir de esta información se puede concluir por tanto, que, dada una función y = f(x):

- La coordenada X de los puntos de corte con el eje X se halla resolviendo 0 = f(x).
- La coordenada Y de los puntos de corte con el eje Y se halla resolviendo y = f(0).

Hasta aquí los puntos de corte con los ejes. Para estudiar el signo de una función se establecen los siguientes pasos:

1) Hallar los puntos de corte con el eje X.
2) Si se trata de una función racional, hallar los puntos que no pertenecen al dominio.
3) Situar los puntos de los pasos 1 y 2 sobre el eje X, el cual queda dividido en intervalos.
4) Para cada intervalo, evaluar la función en algún punto del mismo para determinar su signo.

5) Expresar el signo de la función, apoyándose en el dibujo anterior, mediante intervalos.

- Características de una función (2 sesiones)

Se explica cómo calcular el signo de una función racional, siguiendo los cinco pasos anteriores pero incluyendo en el punto 2 la necesidad de calcular los puntos que hacen cero el denominador. A partir de ahí el proceso es el mismo.

El resto de características se explican de manera gráfica ilustrando con ejemplos mediante Geogebra:

- Crecimiento y extremos relativos

  Recorriendo la función de izquierda a derecha, si la gráfica 'desciende' entonces la función es decreciente, y si 'asciende' es creciente. En un tramo decreciente el valor de f(x) disminuye y el de f(x) aumenta.

- Simetría

  Una función puede ser simétrica respecto de un eje o de un punto. En la simetría respecto de un eje este último hace de 'espejo', dividiendo la función en dos mitades, cada una de ellas reflejo de la otra. La simetría respecto de un punto se verifica gráficamente girando 180º una de las dos mitades en que queda 'partida' la función por el centro de simetría.

  Se explica que a una función se dice que tiene simetría par si su eje de simetría es el eje Y. En este caso, además, se cumple que $f(-x) = f(x)$, y se comprueba sustituyendo valores concretos. Se procede de forma similar para explicar la simetría impar.

- Periodicidad

  No se profundiza en el significado algebraico, se 'define' una función periódica como aquella que se repite indefinidamente, y en la que dos puntos del eje X separados por una distancia igual al periodo T tienen el mismo valor de f(x).

- Continuidad

  En este concepto se pretende profundizar un poco más y resolver ejercicios mediante notación de intervalos, pero debido a la cercanía del final del Practicum II y el viaje de fin de curso de los alumnos, se trata simplemente de forma intuitiva. Una función continua es aquella cuyo trazado puede dibujarse si 'levantar el lápiz del papel'.

Las restricciones temporales limitan el número de sesiones que se pueden dedicar a cada contenido. Por lo general se planifica una sesión a priori para cada apartado del tema, pero teniendo en cuenta que el ritmo y la dedicación real a cada punto vienen muy marcados por los alumnos.

8.2. Distribución real del tiempo de clase

La siguiente tabla muestra la distribución temporal de las sesiones, indicando para cada una el contenido matemático impartido, el tiempo dedicado, el responsable (profesor o alumno en prácticas) y el tipo de docencia.

Sesión	Contenido	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
16/03/2017	Definición de función y formas de representación Funciones a trozos	25 mins 30 mins	Alumno	Magistral
20/03/2017	Dominio y recorrido: teoría y ejercicios	55 mins	Alumno	Magistral
21/03/2017	Dominio y recorrido: ejercicios Operaciones con funciones: suma y resta	40 mins 15 mins	Alumno	Dialógica
22/03/2017	Composición de funciones	55 mins	Profesora	Magistral
27/03/2017	Composición de funciones Función inversa	25 mins 30 mins	Profesora	Magistral
28/03/2017	Función inversa	55 mins	Profesora	Dialógica
29/03/2017	Puntos de corte. Signo de la función Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos	35 mins 20 mins	Alumno	Adidáctica
30/03/2017	Función periódica Función inversa	35 mins 20 mins	Alumno Profesora	Adidáctica
03/04/2017	Producto y cociente de funciones	55 mins	Profesora	Magistral
04/04/2017	Puntos de corte Signo de la función	30 mins 25 mins	Alumno	Magistral y dialógica
05/04/2017	Signo de la función. Crecimiento, simetría, periodicidad, continuidad.	20 mins 35 mins	Alumno	Magistral y dialógica
06/04/2017	Evaluación formativa	55 mins	Alumno	Personal

Tabla 8.1: Distribución temporal de sesiones

Observando la distribución temporal real y comparándola con la planificación se observan pequeñas desviaciones que entran dentro de lo esperable. La más significativa es el desplazamiento de la clase de producto y cociente de funciones, impartida finalmente en una sesión 'intermedia' dentro de la parte de características de funciones. La razón de este cambio es la disponibilidad de la sala de ordenadores, que obligó a 'cortar' el bloque de operaciones de funciones y posponer algún contenido. En este caso se decidió impartir con posterioridad el apartado de producto y cociente por considerarse más asequible, y por estudiar la composición y la función inversa de manera continuada dada su relación.

Por otro lado, aunque más o menos existe una distribución de una sesión por apartado, también se observa que en realidad hay sesiones que se alargan hasta ocupar parte de la siguiente, y otras que se acortan.

Finalmente, es importante destacar que este tema no se compone de 11 apartados estancos, sino que todos ellos están relacionados y de hecho en muchos casos los ejercicios daban pie a trabajar varios conceptos a la vez.

8.3. Actividades adicionales planificadas

Además de los ejercicios propuestos en el libro de texto, se preparan una serie de aplicaciones con Geogebra para que los alumnos recuerden las características de funciones explorando. Debido al ritmo de progreso de los alumnos no se pudo realizar el apartado correspondiente a simetría de funciones. A continuación se muestra el enlace para consultar el libro Geogebra, y en el anexo pueden consultarse las fichas complementarias.

https://www.geogebra.org/m/zkjeBVH8

- Actividad 1: Puntos de corte con los ejes y signo de una función

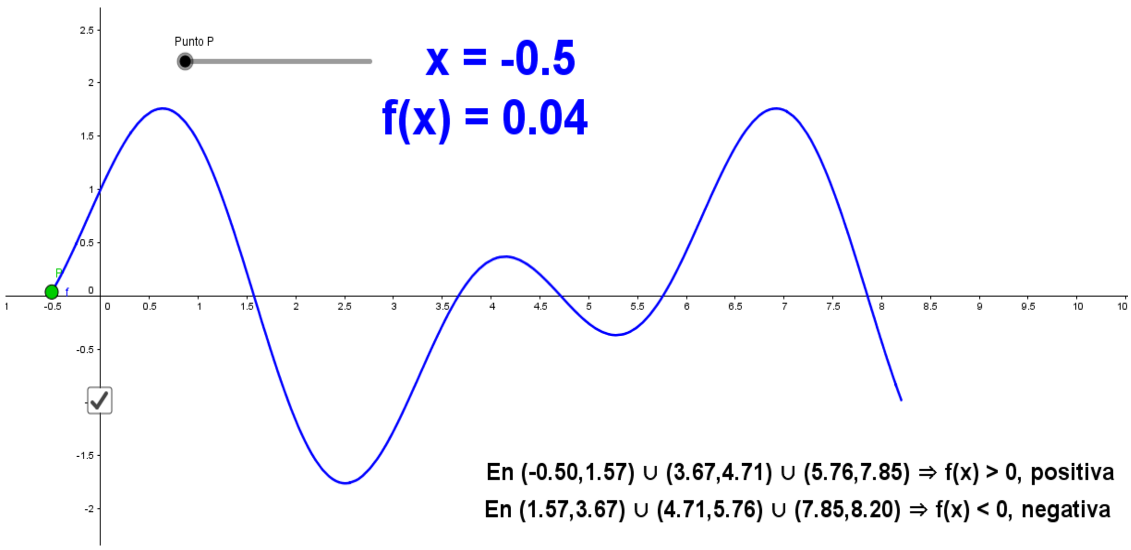


Figura 8.2: Puntos de corte. Signo de la función

Deslizando el punto P se 'iluminan' los puntos de corte con los ejes cuando se está en sus proximidades. Debe anotarse qué tienen en común todos estos puntos, tanto gráficamente como atendiendo a los valores de x y f(x). Además, debe estudiarse qué ocurre con el signo de la función a izquierda y derecha de los puntos de corte con los ejes. Finalmente debe pulsarse la casilla de control para visualizar cómo expresar el signo de una función mediante intervalos.

Se espera que los estudiantes caigan en la cuenta de que todos los puntos están en uno u otro eje, y que los puntos de corte con el eje X cumplen todos que f(x) = 0. Además, se espera que observen que un punto de corte con el eje X implica a su vez un cambio de signo en la función a izquierda y derecha del mismo (aunque no se pueda generalizar).

- Actividad 2: Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

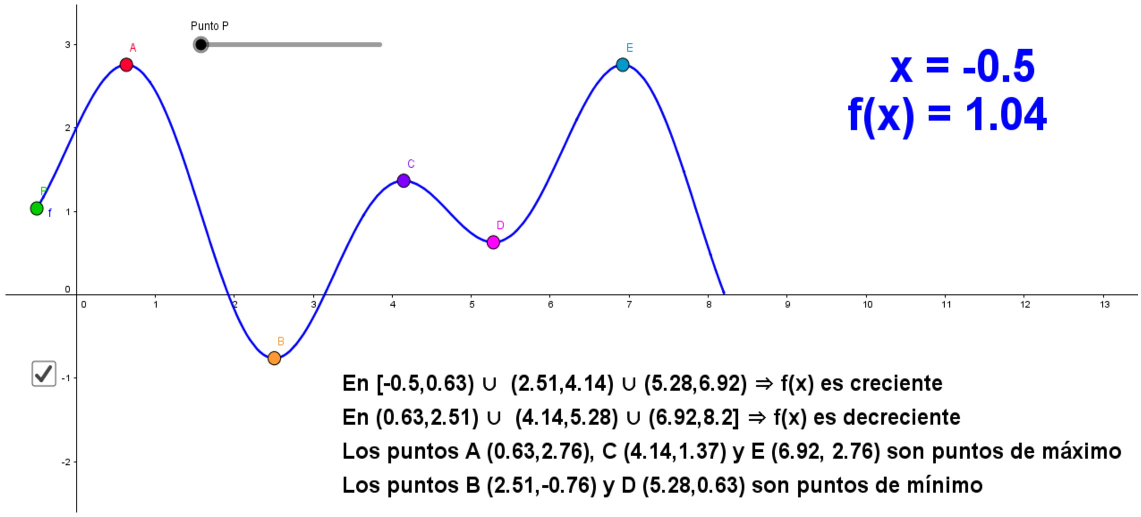


Figura 8.3: Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

En primer lugar se pide explorar los intervalos A-B y D-E, y anotar las coordenadas de varios puntos. Hecho esto, debe explicarse cómo es la función en cada uno de estos intervalos tanto con palabras propias como atendiendo a los valores de x y f(x).

A continuación se pide anotar las coordenadas de varios valores alrededor de los puntos C y D. Se pide observar el valor de f(x) en C y D y sacar alguna conclusión en relación a los puntos del entorno.

Por último debe pulsarse la casilla de control para ver cómo se expresa el crecimiento de una función mediante intervalos.

Se espera que los estudiantes observen que se cumple en un intervalo de crecimiento f(x) aumenta cuando lo hace x, y en uno de decrecimiento disminuye. Asimismo, se espera que observen que el valor de f(x) en C y D es máximo y mínimo respectivamente respecto al resto de puntos de alrededor.

- Actividad 3: Ejercicio sobre lo visto en actividades 1 y 2

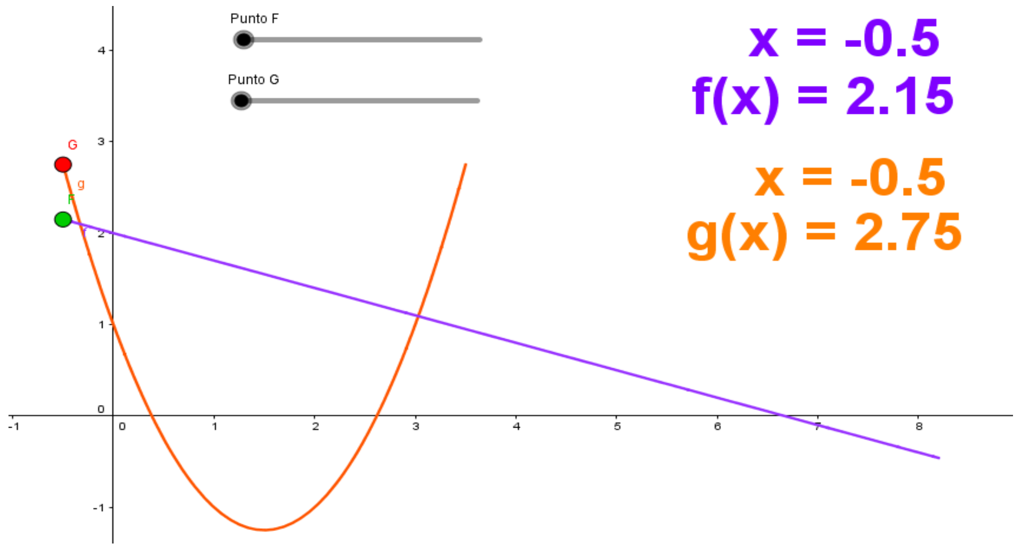


Figura 8.4: Ejercicio sobre signo y crecimiento de funciones

Se pide los alumnos asignen cada gráfica a su función correspondiente (presente en la ficha), y a continuación expresar tanto el signo como el crecimiento mediante intervalos.

No se pide ni se espera que los alumnos empleen técnicas algebraicas, sino simplemente una exploración de las funciones con el deslizador para hallar el dominio y las coordenadas de los puntos de corte.

- Actividad 4: Simetría

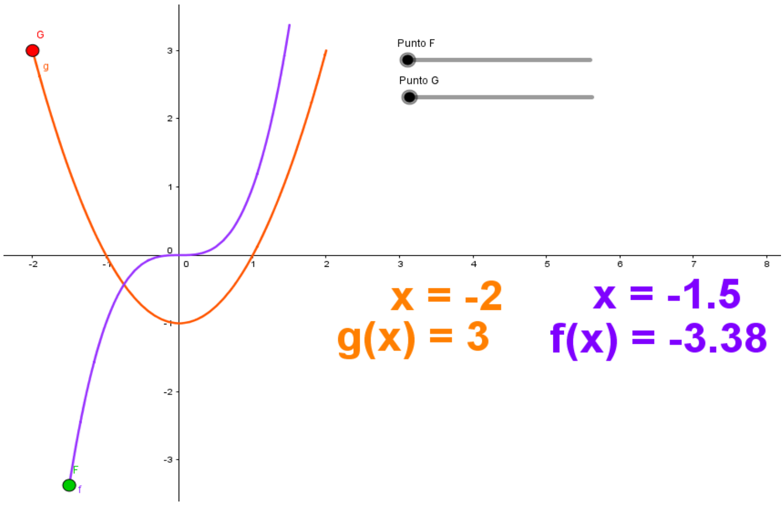


Figura 8.5: Simetría de funciones

Para la función simétrica respecto del eje de ordenadas, se pide las coordenadas de puntos que tengan el mismo valor de g(x) a ambos lados del mismo. Para la función simétrica respecto de origen de coordenadas se pide lo mismo, pero respecto de este último. Debe hallarse, para uno y otro caso, que relación cumplen x y f(x) respecto de un eje y un punto de simetría.

El objetivo es que los estudiantes expresen de forma genérica la relación de los valores de f(x) en el caso de una función par (f(x) = f(-x)) y una impar (f(-x) = -f(x)).

- Actividad 5: Ejercicio de simetría

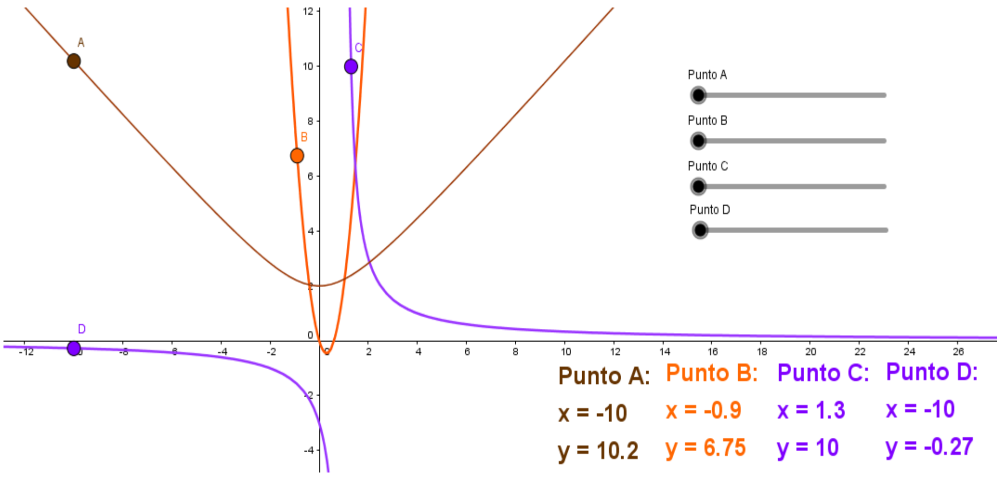


Figura 8.6: Ejercicio de simetría

Se pide relacionar cada gráfica con su expresión algebraica correspondiente (presente en la ficha), además de establecer respecto a qué recta o punto es simétrica cada función.

No se espera una resolución algebraica sino simplemente una constatación empírica de la simetría.

- Actividad 6: Periodicidad

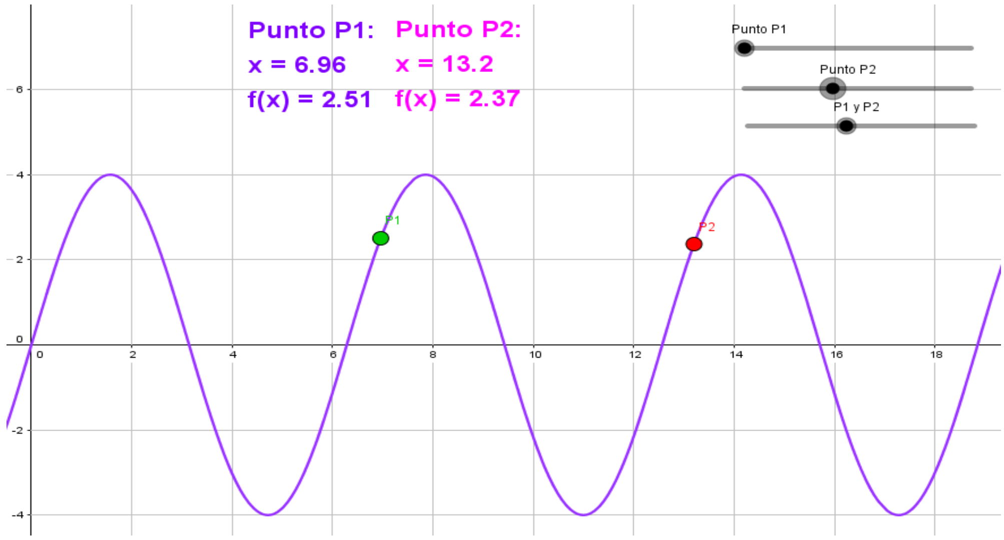


Figura 8.7: Función periódica

Se pide manipular los deslizadores para conseguir que los puntos P1 y P2 se muevan manteniendo siempre la misma altura. Conseguido este objetivo, se pide hallar la distancia en el eje X entre estos dos puntos (periodo), y anotar las coordenadas de una serie de puntos que estén separados por esa distancia.

El objetivo es que los estudiantes descubran que en este tipo de funciones, dos puntos separados por una distancia igual o múltiplo del periodo, tienen el mismo valor de f(x).

- Actividad 7: Ejercicio de periodicidad

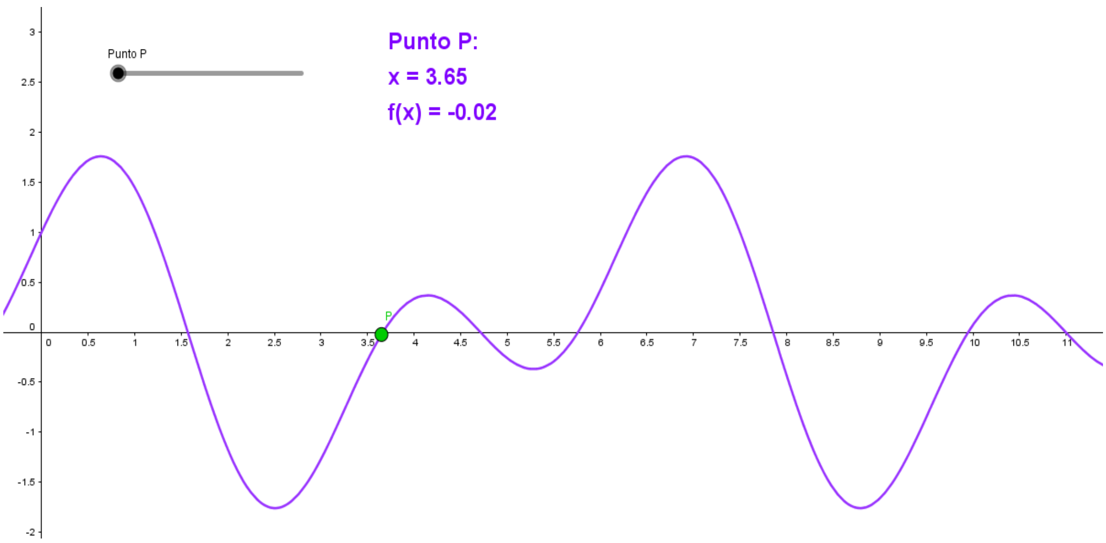


Figura 8.8: Función periódica

El deslizador sólo permite explorar la función en un intervalo del eje X igual al periodo de la función. Se pide utilizar las propiedades de las funciones periódicas para calcular valores de f(x) en puntos que quedan fuera del intervalo en el que puede moverse P (f(11), f(13)).

Se espera que los estudiantes utilicen el periodo para hallar los valores de x del interior del intervalo de exploración cuyo valor de f(x) es igual al del punto que se pide.

8.4. La tarea: actividades autónomas de los alumnos previstas

La mayor parte de los días se indican a los estudiantes una serie de ejercicios que deben resolver en casa para poner en práctica lo visto en clase. Se procura siempre que sean ejercicios similares a los ya trabajados y que su resolución requiera de un tiempo razonable, para no desmotivarles.

Los alumnos de la clase de 4º en la que se implementa este proceso de estudio proceden del programa PMAR en cursos anteriores. Este programa se ofrece a aquellos alumnos que presentan dificultades generales pero que se considera que con ayuda específica pueden progresar adecuadamente. Debido las características de este tipo de alumnado hay que ser especialmente cuidadoso para que la resolución de los ejercicios que se les propongan estén a su alcance y no les consuma demasiado tiempo, ya que de ser así tiran la toalla con facilidad. Por otra parte, debido a las dificultades que presentan para entender la mayor parte de conceptos y propiedades de esta asignatura, es necesario que realicen trabajo fuera del aula para afianzar lo aprendido.

La siguiente tabla presenta ejercicios tipo de los indicados de tarea a los alumnos al final de cada sesión. Se indica además la numeración de los ejercicios concretos, cuya consulta puede realizarse en el anexo que contiene las hojas del tema de funciones del libro de texto.

Sesión	Ejercicio	Tarea: Ejercicio tipo
16/03/2017	54,55	Representar gráficamente una función ‘dada a trozos’.
20/03/2017	56	Hallar el dominio de funciones polinómicas, racionales y que contengan raíces.
21/03/2017	17	Dadas varias funciones, hacer diversas operaciones suma y resta.
22/03/2017	22	Dadas varias funciones, hacer diversas operaciones de composición.
27/03/2017	29	Dada una función, hallar su inversa.
28/03/2017	--	Hallar la inversa de y = (x+2)/(2x-1) y comprobar.
29/03/2017	--	Lectura en el libro de lo visto en ordenadores.
30/03/2017	--	Lectura en el libro de lo visto en ordenadores.
03/04/2017	19 a) c)	Hallar el producto y cociente de dos funciones.
04/04/2017	--	Hallar los puntos de corte y signo de $f(x) = x^2 + 3x - 4$
05/04/2017	--	Estudio para examen día 06/04/2017
06/04/2017	--	Sin tarea, sesión de examen

Tabla 8.2: Tarea, trabajo autónomo

Capítulo 9

Experimentación

En este apartado se analizan los resultados obtenidos en la implementación del proceso de estudio, y se extraen unas reflexiones en base a todos los aspectos: resultados, material utilizado, características del grupo.

9.1. Muestra y diseño de la experimentación

La experimentación se ha llevado a cabo en un aula de 9 alumnos de 4º de ESO con alumnos procedentes del programa PMAR. Se trata de un tipo de estudiantes con dificultades en clases ‘ordinarias’ y que necesitan de un apoyo, recursos y facilidades específicas para progresar.

El ingreso en el PMAR de 2º o 3º de ESO requiere que los alumnos cumplan una serie de requisitos específicos, por ejemplo haber repetido un curso. Por esta razón la clase se compone de estudiantes cuyas edades se sitúan en los 17-18 años. Además, de acuerdo a las informaciones del centro, los estudiantes que pasan a este programa son aquellos en los que se tiene confianza en que puedan obtener el título. La predisposición de la clase en general es bastante positiva, se prestan voluntarios a hacer ejercicios en la pizarra con frecuencia y preguntan dudas. No se trata por lo tanto de perfiles conflictivos, pero sí tienen una falta importante de estudio autónomo, y la base matemática de cursos anteriores no está consolidada.

Como se explica en el apartado sobre el proceso de estudio, la unidad didáctica se llevó a cabo mediante clases magistrales, dialógicas, un par de sesiones adidácticas con Geogebra, y una vez terminada la teoría un cuestionario a modo de evaluación formativa con un pequeño peso en la nota final del tema.

9.2. El cuestionario

Dada la duración del Practicum II y el desarrollo de las clases, nos encontramos con que pese a que se ha podido terminar el contenido teórico de la unidad, no hay tiempo suficiente de hacer sesiones de repaso (especialmente importantes en este grupo) antes de la evaluación sumativa. Se propone por lo tanto un cuestionario a modo de evaluación formativa que abarque todo lo estudiado y que permita a la docente conocer aquellos puntos en los que más debe incidir en las sesiones previas al examen.

De acuerdo con los alumnos, se decide dar un pequeño peso a este cuestionario dentro de la nota final del tema como incentivo para prepararlo convenientemente. Normalmente el peso de la nota de un tema se reparte en un 85% para la nota del examen y un 15% de tareas y actitud. La nota obtenida en esta prueba puede ayudar a incrementar o reducir el total obtenido de ese 15%, dentro de una valoración global con el resto de actividades desarrolladas a lo largo del tema. Por tanto, dado que el cuestionario no tiene un peso definido, se decide no puntuar el examen de 0 a 10 ni otorgar a cada pregunta un peso determinado, sino evaluar individualmente cada una con bien, regular o mal. Remarcar finalmente que se llega al acuerdo de posibilitar la consulta del libro, dado que éste contiene la teoría que les puede servir como punto de apoyo pero no las formas sistemáticas de resolución de ejercicios.

La naturaleza de esta prueba es teórico-práctica. Se plantean una serie de ejercicios, algunos de ellos similares a los trabajados en clase, y otros igualmente parecidos pero que requieren haber comprendido ciertos conceptos teóricos.

A continuación se detallan las 5 preguntas de las que se compone el cuestionario.

1. Halla dominio, puntos de corte y signo de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = x^2 - 4x - 3$
   Dominio:
   Puntos de corte:
   Signo:
   b) $g(x) = \frac{2x+3}{x+\frac{1}{3}}$
   Dominio:
   Puntos de corte:
   Signo:

Figura 9.1: Dominio, puntos de corte y signo

En la primera pregunta se piden dominio, puntos de corte y signo para dos funciones, trabajados en clase de forma muy mecánica y sistemática. Se eligen dos funciones que no exijan complicadas manipulaciones algebraicas con el objetivo de que los alumnos se centren más en desarrollar los pasos explicados para este tipo de ejercicios.

2. Realiza los siguientes apartados.
   a) Calcula la función inversa de: $f(x) = \frac{4x+2}{3}$
   $f^{-1}(x) =$
   b) Comprueba que $f^{-1}(x)$ es inversa de $f(x)$

Figura 9.2: Función inversa

Se pide hallar la función inversa de una dada y realizar la comprobación, resuelto en clase de forma mecánica. De nuevo se trabaja con una función sencilla para que los alumnos centren sus esfuerzos en recordar, consultar y aplicar la metodología.

3. Dibuja la gráfica de una función con las siguientes características:
   – Dominio $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
   – Creciente en $(-\infty,-5) \cup (0,4)$
   – Decreciente en $(-5, 0) \cup (4, +\infty)$.
   Indica cuáles son los máximos y los mínimos de la función que has dibujado.

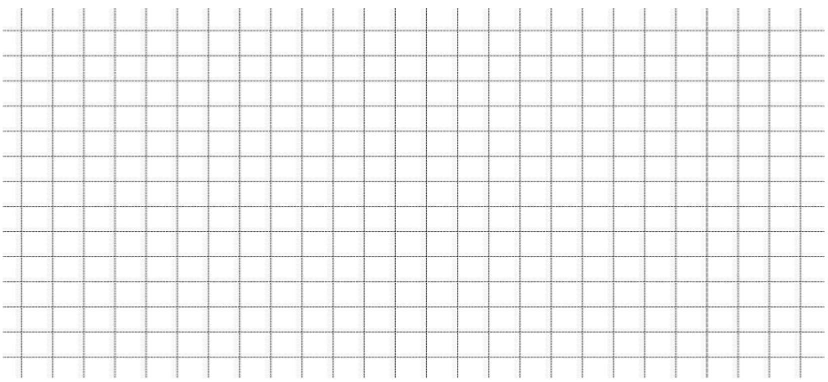
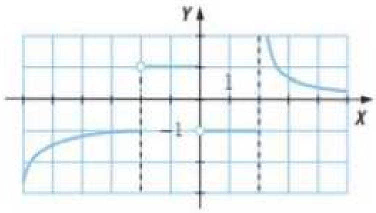


Figura 9.3: Crecimiento y extremos relativos

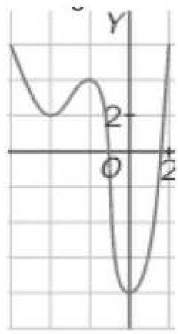
Dado que tanto crecimiento como extremos relativos se trabajaron de forma fundamentalmente gráfica, se pide representar una función con unas características determinadas en unos intervalos dados.

4. Rellena los datos que se piden para cada gráfica.



Dominio:

Indica en qué puntos es discontinua:

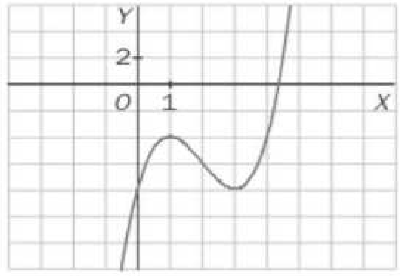


Intervalos de crecimiento:

Intervalos de decrecimiento:

Máximos:

Mínimos:



¿Es una función simétrica?:

¿Respecto de un punto o un eje?:

Especifica respecto de qué punto o eje es simétrica:

Figura 9.4: Características de funciones

En este ejercicio se pide, de forma guiada, caracterizar varias funciones mediante coordenadas o intervalos. De nuevo se pide respuestas ajustadas a la manera de trabajar en clase, sin manipulaciones algebraicas.

5. Dadas las siguientes funciones, calcula lo que se pide.

$$f(x) = 5x + 1$$

$$g(x) = \frac{x}{x+3}$$

a) $(f+g)(1) =$

b) $(f \cdot g)(-2) =$

c) $(g \circ f)(3) =$

Figura 9.5: Operaciones con funciones

Finalmente y para terminar de cubrir todo el contenido del tema se propone un ejercicio de operaciones con funciones. Se intenta alcanzar un equilibrio para que no resulte un ejercicio excesivamente sencillo ni difícil, de ahí la elección de una función recta y una racional sencilla.

9.3. Cuestiones y comportamientos esperados

Antes de evaluar los resultados es conveniente intentar predecir las posibles respuestas con el fin de contrastarlas con las efectivamente obtenidas y extraer conclusiones.

9.3.1. Cuestionario

A continuación se presenta una tabla en la que aparecen los comportamientos esperados para cada ejercicio del cuestionario.

Ejercicio	Contenido	Comportamientos esperados
1	Dominio, puntos de corte y signo	Resolver la ecuación de segundo grado y excluir del dominio los resultados (puntos de corte con eje X). Utilización de una fórmula incorrecta para la resolución de la ecuación de segundo grado. Olvidar incluir el valor de x que anula el denominador en el cálculo del signo de la función. Considerar como punto de corte aquel en que el denominador se anula.
2	Función inversa	Despeje incorrecto de x en función de y. Sustituir de forma incorrecta x por la función que corresponda al hacer la composición para la comprobación. Errores en operaciones algebraicas con fracciones.
3	Crecimiento, extremos relativos	No respetar el límite impuesto por los intervalos para cada característica. Confundir intervalos entre sí y hacer tramos crecientes/decrecientes donde no corresponde.
4	Características de funciones	Considerar como puntos fuera del dominio aquellos en que la función es discontinua. Error en la aplicación de paréntesis y corchetes para incluir/excluir un punto de un intervalo. No prestar atención a la graduación de la cuadrícula y señalar intervalos y puntos con coordenadas erróneas. Determinar que la función simétrica lo es respecto de un eje en lugar de un punto.
5	Operaciones con funciones	Errores aritméticos y en manipulaciones algebraicas. Realizar la operación composición ‘al revés’ ($f \circ g$). No sustituir correctamente una función en otra en la composición.

Tabla 9.1: Cuestionario, comportamientos esperados

9.3.2. *Actividades con Geogebra*

Se presenta de nuevo una tabla con los comportamientos previsibles en las sesiones con Geogebra (ver apartado proceso de estudio). Aunque finalmente no se realizaron las actividades 3, 4 y 5, se incluyen dentro del análisis.

Actividad	Contenido	Comportamientos esperados
1	Puntos de corte y signo de la función	Que se queden únicamente con la conclusión visual y no tengan en cuenta los valores de x y f(x). Que determinen que todos los puntos de corte tienen una coordenada que vale 0, pero que no diferencien entre puntos de corte con el eje X y con el Y.
2	Crecimiento y extremos relativos	Que no utilicen la terminología adecuada: creciente, decreciente. Que no sean capaces y necesiten apoyo para extraer la evolución de x y f(x) en una región creciente y otra decreciente. Que no caigan en la cuenta de que el valor de f(x) es el más alto (bajo) de su entorno en un punto de máximo (mínimo).
3	Ejercicio sobre actividades 1 y 2	Uso incorrecto de corchetes y paréntesis para incluir/excluir puntos de un intervalo.
4	Simetría de funciones	Que no sean capaces de escribir las expresiones generales que relacionan x y f(x) en funciones pares e impares.
5	Ejercicio de simetría	Identificar de forma errónea un punto o eje de simetría por no ser meticuloso ni investigar bien la función.
6	Funciones periódicas	Que no le den importancia al periodo y no caigan en la cuenta su utilidad para conocer el valor de la función en cualquier punto del dominio.
7	Ejercicio de funciones periódicas	No 'ver' que, dado un punto x fuera del intervalo explorable, restando el periodo un número determinado de veces desde dicho x se puede obtener un punto cuyo valor de f(x) es el mismo. Que lleguen a la conclusión anterior cuando el punto objetivo está separado un solo periodo del intervalo de referencia, pero no sean capaces de aplicarla cuando haya más de un periodo de diferencia.

Tabla 9.2: Actividades con Geogebra, comportamientos esperados

9.4. Resultados

Se evalúan los resultados obtenidos y se comparan con los comportamientos esperados a priori.

9.4.1. Cuestionario

Los resultados generales del cuestionario son bastante negativos, ningún alumno conseguiría aprobar y el porcentaje de preguntas en blanco es muy alto. La siguiente tabla resume los resultados obtenidos.

--: En blanco;		M: Mal;		R: Regular;			B: Bien	
Ejerc.	**Al. 1**	**Al. 2**	**Al. 3**	**Al. 4**	**Al. 5**	**Al. 6**	**Al. 7**[1]	**Al. 8**[2]
1a	--	R↓	R	--	R↓	B↓	R	R
1b	--	--	R↓	--	--	M	R↓	--
2a	--	R	R↓	--	--	--	--	--
2b	--	M	M	--	--	--	--	--
3	--	M	R↓	M	R↓	--	--	M
4a	M	M	M	R↓	R	M	--	--
4b	R↓	R↓	M	--	R↓	M	--	--
4c	R↑	B	R↑	R↑	B	R↓	--	--
5a	M	B	B	R↓	R↓	R↓	--	M
5b	M	B	B	R↓	--	R↓	--	--
5c	M	M	--	--	--	M	--	--

Tabla 9.3: Resultados del cuestionario

En el ejercicio 1 los resultados han sido relativamente variados y se han observado tanto algunos de los comportamientos previstos como otros derivados de la falta de estudio (ejercicios en blanco). Los alumnos que se han enfrentado a este ejercicio han tenido mejores resultados con la función cuadrática. En algún caso se ha mezclado el dominio con los puntos de corte como se esperaba.

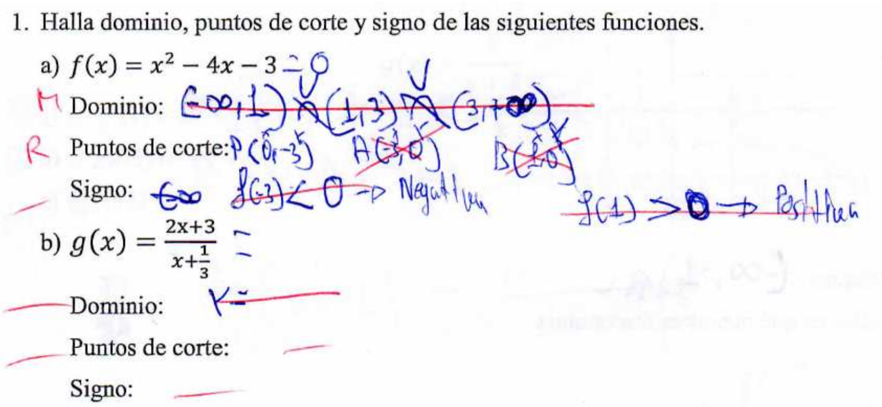


Figura 9.6: Confusión entre dominio y puntos de corte

Entre todas las respuestas solamente hay una que refleje la mecánica estudiada en los ejercicios de clase.

[1] El alumno 7 realiza el cuestionario en una sesión diferente.
[2] El alumno 8 realiza el cuestionario en una sesión diferente.

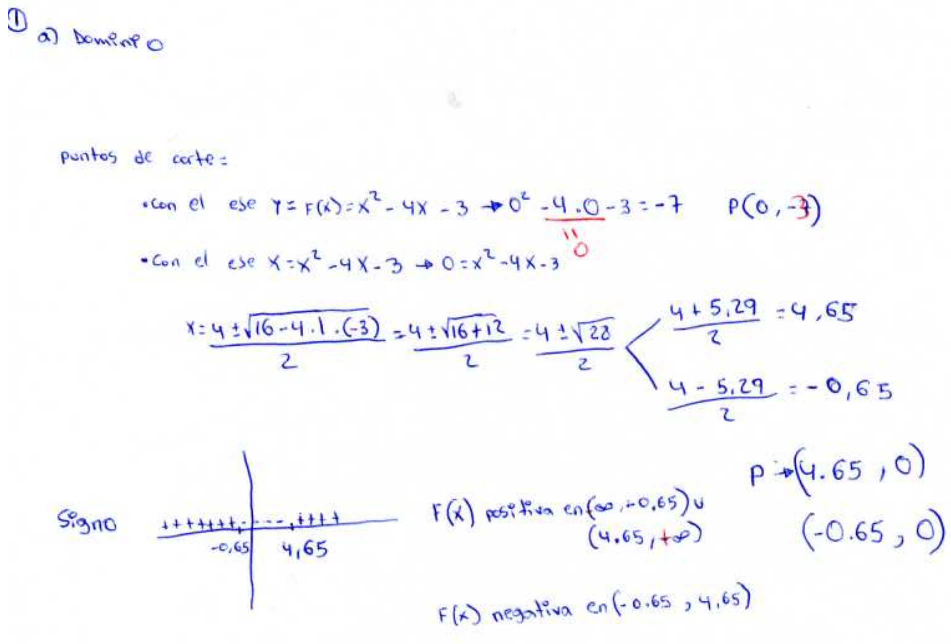


Figura 9.7: Resolución ejercicio 1 apartado a)

Nadie ha determinado el dominio de ninguna de las dos funciones, lo cual se achaca a que esa parte se estudió en los primeros días del tema y dada la falta de estudio los estudiantes no recuerdan cómo hallarlo.

El ejercicio 2 los estudiantes en su mayoría lo dejaron en blanco, y los que lo intentaron solamente se atrevieron con el apartado a). Se observa que aquellos que pusieron más énfasis en los días de clase en que se estudió este apartado son los que más éxito han tenido. Los que más se han acercado a la resolución correcta no han intercambiado los nombres de x e y tras hallar la función inversa, como se comentó en clase que debía hacerse.

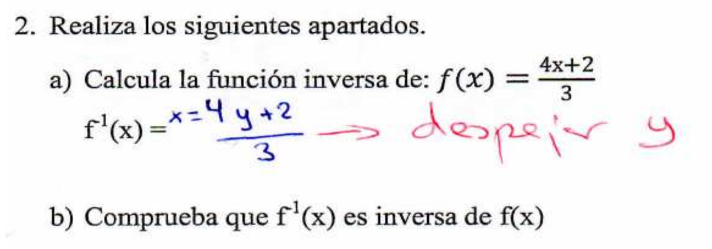


Figura 9.8: Resolución ejercicio 2

En el tercer ejercicio no hay ninguna respuesta correcta. Se observa que los estudiantes tienden a dibujar funciones conocidas que encajen con las características que pide el enunciado, y eligen aquella que creen que más se asemeja. Sin embargo no son capaces de abstraerse y generar una nueva que se ajuste a lo especificado.

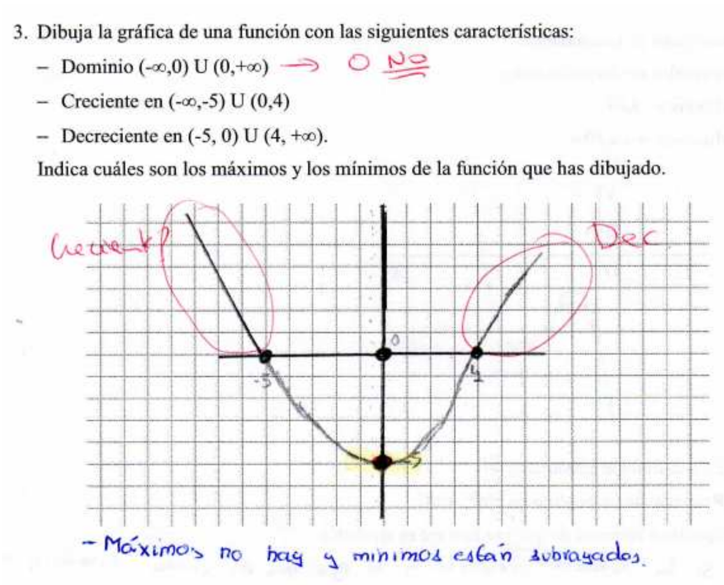


Figura 9.9: Resolución ejercicio 3

Los resultados de la parte de análisis de características también han sido negativos. El análisis de las respuestas arroja como conclusiones tanto falta de comprensión, como de estudio y de trabajo práctico. Se observa, como se esperaba, que algún estudiante confunde continuidad con dominio, y se han producido otros errores no previstos como fallos en la notación matemática (intersección en vez de unión, orden incorrecto de extremos de intervalos).

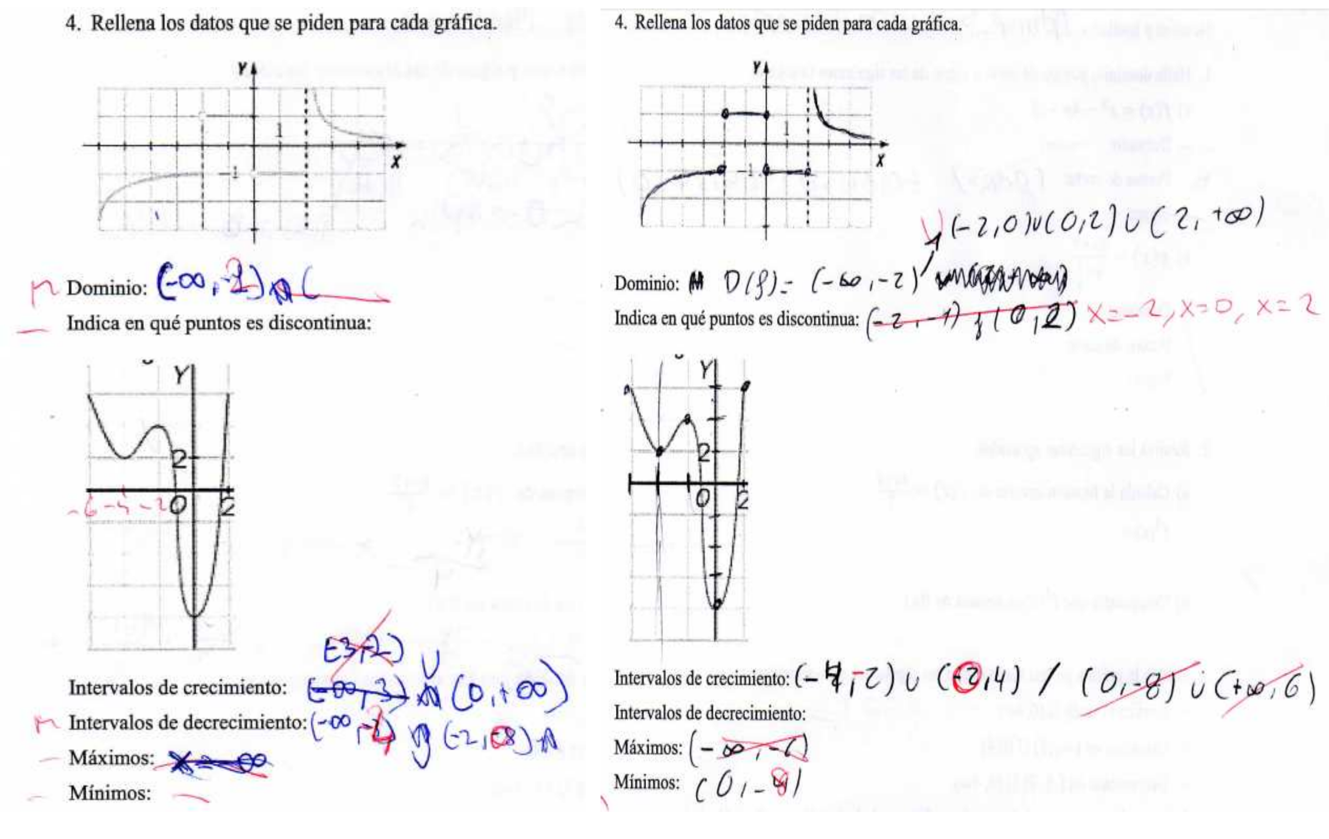


Figura 9.10: Resolución ejercicio 4

Finalmente, en la parte de operaciones con funciones tampoco ha habido buenos resultados, aunque la variedad de respuestas ha sido grande. Hay desde errores básicos de manipulación algebraica, pasando por estudiantes que plantean operaciones pero no las realizan o no sustituyen, hasta aquellos que se limitan a sustituir los valores pedidos en las funciones originales y luego hacer la operación con los resultados. Nadie ha respondido al apartado c) (composición), y de las respuestas obtenidas se deduce que no recuerdan cómo se realiza, la confunden con la multiplicación.

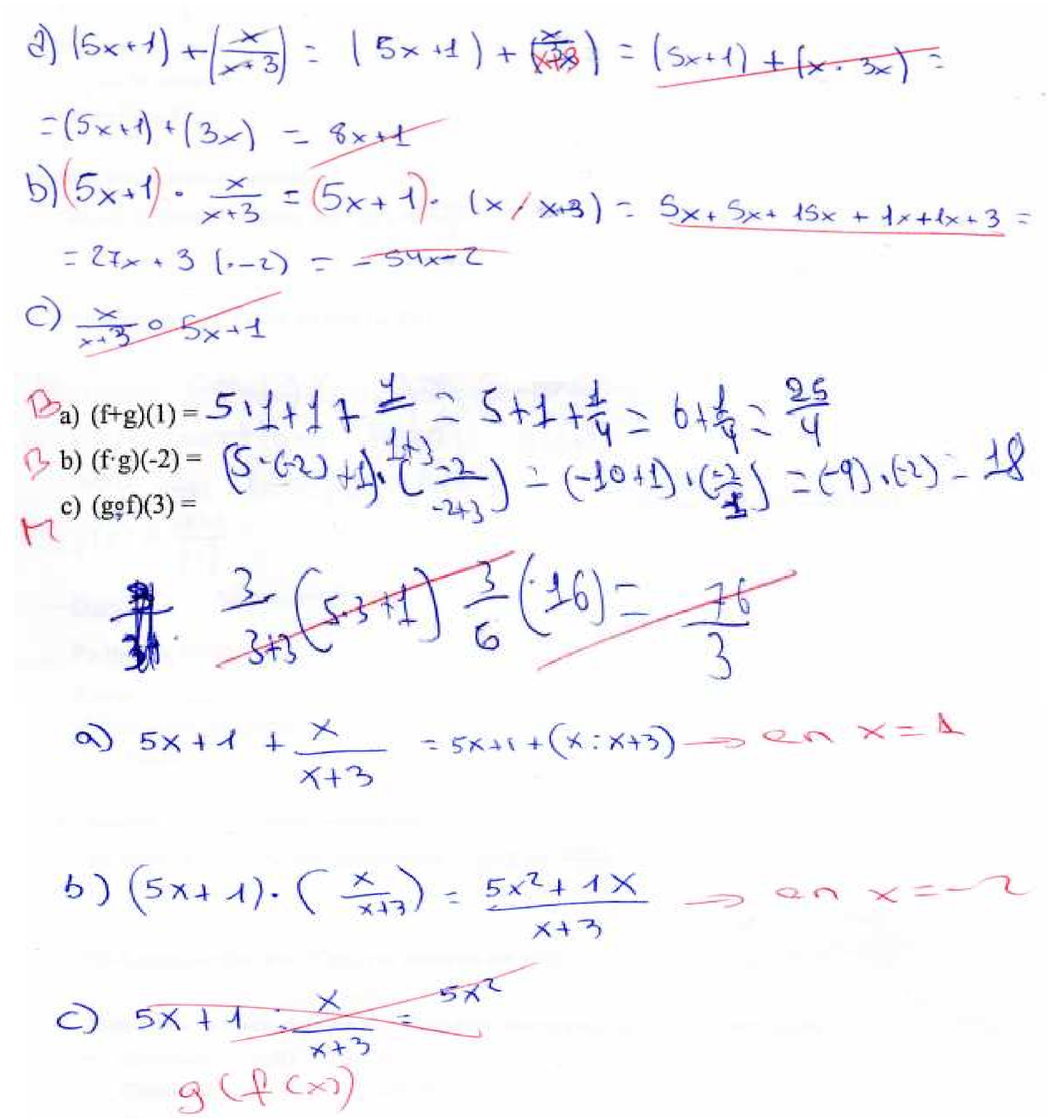


Figura 9.11: Resolución ejercicio 5

9.4.2. Actividades con Geogebra

Se analizan los resultados obtenidos en cada actividad por separado y se contrastan con los esperados.

- Actividad 1: Puntos de corte y signo de la función

En general se resuelve el ejercicio de forma satisfactoria, concluyendo que todos los puntos son puntos de corte con ejes. Hay pequeñas variaciones en las respuestas que se ajustan a los comportamientos esperados.

Describe con tus palabras qué tienen en común todos los puntos, tanto gráficamente como analizando los valores de las coordenadas (x, f(x)).

tienen en comun que todos estan en el de X meno el punto marcado que esta en Y

Describe con tus palabras qué tienen en común todos los puntos, tanto gráficamente como analizando los valores de las coordenadas (x, f(x)).

Que todos los puntos menos el primero estan en el eje de x. Y el primero esta en el f(x) y valor que todos tienen 0 en

Mueve el punto P alrededor de cualquier de los puntos ocultos de color rojo. ¿Qué ocurre con el valor de f(x) a la izquierda y a la derecha de dicho punto? sus coordenadas

Describe con tus palabras qué tienen en común todos los puntos, tanto gráficamente como analizando los valores de las coordenadas (x, f(x)).

- tienen en Común que todas las coordenadas tienen un 0.
- Puntos de Corte $y = g(x) = 0$ ~~izquierda o derec~~

$x = 0$

Figura 9.12: Puntos de corte

Efectivamente hay estudiantes que se quedan con la conclusión gráfica, la mayoría anotan que todos los puntos tienen alguna coordenada 0, y sólo una persona da la impresión de hacer algún tipo de diferencia entre los dos tipos de puntos de corte, aunque no está claro del todo.

- Actividad 2: Crecimiento y extremos relativos

De nuevo hay un abanico de respuestas que se ajustan a lo esperado, desde respuestas con términos alternativos, pasando por otras que se quedan con la mera idea visual, hasta respuesta correctas.

Describe con tus propias palabras cómo es la gráfica en el intervalo A-B, y cómo es en el intervalo D-E.

- La grafica entre el intervalo A-B empieza en un punto alto positivo y ~~[illegible]~~ desciendo hasta un punto negativo (Descendente)
- Entre ~~[illegible]~~ el intervalo D-E se empieza desde un punto bajo pero positivo y se asciende hasta un punto mas alto tambien positivo (Ascendente)

Figura 9.13: Crecimiento y decrecimiento

En el apartado de extremos relativos en general ven con claridad las propiedades de los mismos, aunque no utilizan la terminología máximo-mínimo.

Si has completado la tabla, ya tienes una serie de valores de (x, f(x)) en un intervalo de centro C. ¿Cómo es el valor de f(x) en el punto C respecto al resto de puntos del intervalo?

El punto de f(x) de c (1,37) es mayor que el resto de puntos del intervalo.

También has rellenado una serie de valores de (x, f(x)) en un intervalo de centro D. ¿Cómo es el valor de f(x) en el punto D respecto al resto de puntos del intervalo?

El punto de f(x) de D (0,63) es el mas pequeño de todo el resto de puntos del intervalo.

Figura 9.14: Extremos relativos

- Actividades 6 y 7: Funciones periódicas

La actividad 6 es meramente mecánica e introductoria para ya en la 7 comprobar la utilidad del periodo en este tipo de funciones.

En la actividad 7 identifican la función objeto de estudio como periódica haciendo uso de sus propias palabras, sin embargo no son capaces de utilizar el periodo para resolver el ejercicio. Por tanto, se hace a nivel de toda la clase una explicación guiada.

Ejercicio 7. Observa la función que tienes en pantalla, ¿es una función periódica? Justifica tu respuesta.

Sí, es periódica porque se repite a lo largo del eje X.

Figura 9.15: Funciones periódicas

9.5. Discusión de resultados

Los resultados obtenidos en la actividad con Geogebra y en el cuestionario son muy diferentes. Las actividades planteadas con ordenador las resolvieron con relativa facilidad llegando a las respuestas esperadas, seguramente debido a que 'la respuesta estaba ahí', es decir, el estudiante no necesitaba movilizar conocimientos previos sino manipular un modelo y extraer conclusiones.

Por otra parte, durante las sesiones de clase se constató que aunque las actividades de Geogebra ayudaron a consolidar ideas visuales sobre características de funciones, los estudiantes no 'acoplaron' esos conocimientos con las técnicas algebraicas correspondientes, para ellos resultaron ser dos bloques independientes. Esta dificultad puede tener su origen en un obstáculo didáctico (Brousseau, 1989), ya que en la asignatura de matemáticas habitualmente se tratan el bloque de álgebra y el de funciones de forma separada.

El análisis de los resultados del cuestionario arroja varias conclusiones. En primer lugar la inmediatez de la comunicación sobre la actividad del cuestionario unida al poco peso en la nota final del tema y a la posibilidad de usar el libro hizo que los estudiantes se relajaran y no estudiasen. Como consecuencia se constata que los ejercicios correspondientes a la primera mitad del tema (dominio, composición), más lejanas en el tiempo, se dejaron en blanco o no se resolvieron adecuadamente al no recordar la mecánica.

En general los estudiantes intentaron resolver aquellos ejercicios sobre los que se había trabajado de forma más reciente y cuya mecánica era más sencilla. Por ejemplo, casi todos respondieron a los ejercicios sobre características, o recordaron que en la función inversa había que despejar la x. Sin embargo las resoluciones de aquellos apartados que requieren una cierta comprensión, tiempo de estudio y práctica fueron erróneas en su mayoría.

Los resultados del ejercicio 3, dibujo de una gráfica a partir de sus características, resultan interesantes. Los estudiantes tienden en su mayoría a dibujar funciones ya conocidas. Además, este tipo de ejercicio no se había trabajado previamente con ellos, lo cual indica que es más probable obtener respuestas correctas en ejercicios ya realizados previamente.

Finalmente, el ejercicio de operaciones con funciones denota carencias en la manipulación de expresiones algebraicas, herramienta fundamental para el trabajo con funciones.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

En este Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio de funciones en 4º de ESO con alumnos procedentes del programa PMAR. Se han realizado dos grandes apartados, uno de ellos de análisis de normativa y libros de texto y otro centrado en el proceso de estudio.

En la parte I de este trabajo se realiza un análisis longitudinal tanto del currículo como de los libros de texto en lo relativo a funciones, tomando como curso objetivo 4º de ESO y estudiando los dos cursos anteriores y posteriores. En concreto se han elegido las especialidades de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas en 3º y 4º de ESO y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en 2º de Bachillerato. El objetivo de este análisis es tomar conciencia de los conocimientos con que parten los alumnos así como de sus objetivos futuros. Esta información es relevante para el diseño del proceso de estudio ya que fija un 'marco de partida' y unos 'objetivos', es decir, ayuda a fijar una línea de trabajo. Por otro lado también se analizado la coherencia entre currículo y libros de texto para determinar la pertinencia de estos últimos como material de apoyo o hilo conductor.

En la parte II se analiza el tema de funciones en el libro de texto de referencia y se realiza una reflexión sobre el papel que debe jugar en el desarrollo de la unidad didáctica. Además se realiza una descripción de la estructura planteada para el desarrollo de las clases y se justifica en base a las dificultades y errores previstos. También se presentan la cronología del proceso y los resultados obtenidos: actividades adicionales, cuestionario, dificultades y errores no previstos. Finalmente se discuten los resultados y en los apartados siguientes se apuntan las conclusiones extraídas así como cuestiones abiertas que pueden ser objeto de estudio en futuros trabajos.

Conclusiones generales del trabajo

En la parte I del trabajo se observa una evolución en espiral del currículo en la que el formalismo matemático aumenta a medida que se progresa en los cursos. Además, se ha encontrado una buena coherencia en la comparación de los contenidos de normativa y libros de texto. Se ha constatado que estos últimos tienden a añadir más materia de la estrictamente necesaria y que el orden en ocasiones difiere del que aparece en el currículo, con el objetivo de partir de la base de años anteriores para a continuación introducir conceptos nuevos.

En la parte II se comprueba que el libro de texto objeto de estudio constituye una buena herramienta para el desarrollo del tema de funciones. Se encuentran ligeras descompensaciones con el currículo, ya que no se da tanta importancia al estudio de situaciones prácticas y además el manual por sí mismo resulta insuficiente para cumplir con todos los objetivos planteados en la normativa (por ejemplo los tecnológicos). Sin embargo, complementado con otros materiales y una variedad razonable de metodologías, el libro de texto resulta ser un buen hilo conductor.

En lo relativo a la experimentación se observan en general muchas dificultades en lo referido a la comprensión de contenidos. Los estudiantes entienden los conceptos matemáticos explicados de forma visual o intuitiva, sin embargo no consiguen realizar la asociación con su contrapartida algebraica, lo cual implica que en general les resulta complicado recordar bien los contenidos del tema.

Las sesiones planteadas con Geogebra obtuvieron buenos resultados, sin embargo no se obtuvieron los frutos esperados por las razones ya comentadas. Para los estudiantes estas sesiones eran compartimentos estancos que no tenían que ver con las clases habituales.

Los resultados del cuestionario fueron en general negativos, probablemente debido a varias razones. La primera de ellas es que la puntuación otorgada tuvo muy poco peso en la evaluación final del tema, con lo cual los estudiantes se enfrentaron a la prueba sin presión ni motivación. Como consecuencia hubo una falta de estudio generalizada, y se comprobó que los ejercicios tipo resueltos los primeros días de clase los dejaron prácticamente en su mayoría en blanco. A la falta de estudio hay que sumar la falta de comprensión. Dado que los estudiantes no encontraban 'la lógica' de lo que hacían, el éxito en el cuestionario dependía enormemente de lo que memorizaron durante las clases. Otro de los factores clave fue la base matemática de los cursos anteriores, en general muy poco consolidada. Los estudiantes fallan en manipulaciones algebraicas básicas y esto les supone una dificultad añadida a la hora de enfrentarse con éxito a cualquier ejercicio del tema estudiado.

En definitiva, del proceso de estudio se puede concluir que esta clase tiene una serie de necesidades especiales. En primer lugar necesitan practicar álgebra de forma habitual para corregir sus fallos. Debe insistirse en la importancia del trabajo autónomo para que consoliden lo aprendido en clase. Además deben plantearse evaluaciones que no disten excesivamente en el tiempo de las clases en que se impartieron los contenidos, o en su lugar hacer una serie de sesiones de repaso previas al examen. Deben buscarse metodologías que ayuden a los estudiantes a comprender lo que están haciendo, que probablemente podrían apoyarse en situaciones prácticas que les resulten cercanas, útiles. Finalmente es crucial el factor motivación. Esta clase presenta una falta importante de estudio autónomo, por lo tanto es importante motivarles para que en clase presten atención y cada lección sea lo más eficiente posible.

Cuestiones abiertas

Del apartado de conclusiones se extraen un par de propuestas o medidas que pueden resultar interesantes en futuros procesos de estudio. En primer lugar es necesario conseguir un mayor aprovechamiento de las sesiones con Geogebra, y que los estudiantes establezcan relaciones directas con las técnicas algebraicas. Para ello se propone crear nuevos applets para exploración de funciones, deslizando puntos en los que aparezca siempre la siguiente información: gráfica de la función representada, fórmula y = f(x) correspondiente, y la misma fórmula pero sustituyendo el valor de x e y por las coordenadas del punto de exploración.

$$y = x^2 - 4x + 4$$

$$Ejemplo1\text{: } 0 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 4$$

$$Ejemplo2\text{: } 1 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4$$

Se cree que un apoyo de este tipo hubiese resultado clave para que los estudiantes comprendiesen la relación entre el significado gráfico de cada concepto y su 'traducción' algebraica.

Por otra parte queda pendiente plantear cómo aumentad la idoneidad afectiva del tema, es decir, cómo aumentar la motivación para un máximo aprovechamiento del tiempo de clase, por ejemplo con problemas prácticos o proyectos.

Referencias

Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Pérez, A., (2016). "Matemáticas aplicadas a las enseñanzas aplicadas para 3º ESO", SM.

Alcaide, F., Sanz, L., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Barbero, F., León, M., (2016). "Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I para 1º de Bachillerato", SM.

Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Pérez, A., Donaire, J., (2016). "Matemáticas aplicadas a las enseñanzas aplicadas para 4º ESO", SM.

Ausubel, D. P. (1976). Psicología educativa. *Un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas. México.

BOLETIN OFICIAL DE NAVARRA (BON) (2014). Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra. Pamplona: Autor. [Recuperable en (19/02/2017): https://www.navarra.es/home_es/Actualidad/BON/Boletines/2014/174/].

BOLETIN OFICIAL DE NAVARRA (BON) (2015). Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra. Pamplona: Autor. [Recuperable en (19/02/2017): https://www.navarra.es/home_es/Actualidad/BON/Boletines/2015/127/].

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologuiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs*, 41-63.

Godino, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil, 2011.

Godino, J.D., Font, V., and Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* **9**, 131-155.

Houssaye, J. (1988). *Le triangle pédagogique*, Berna: Peter Lang.

Lasa, A. (2015). *Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz*. Bilbo: UEU.

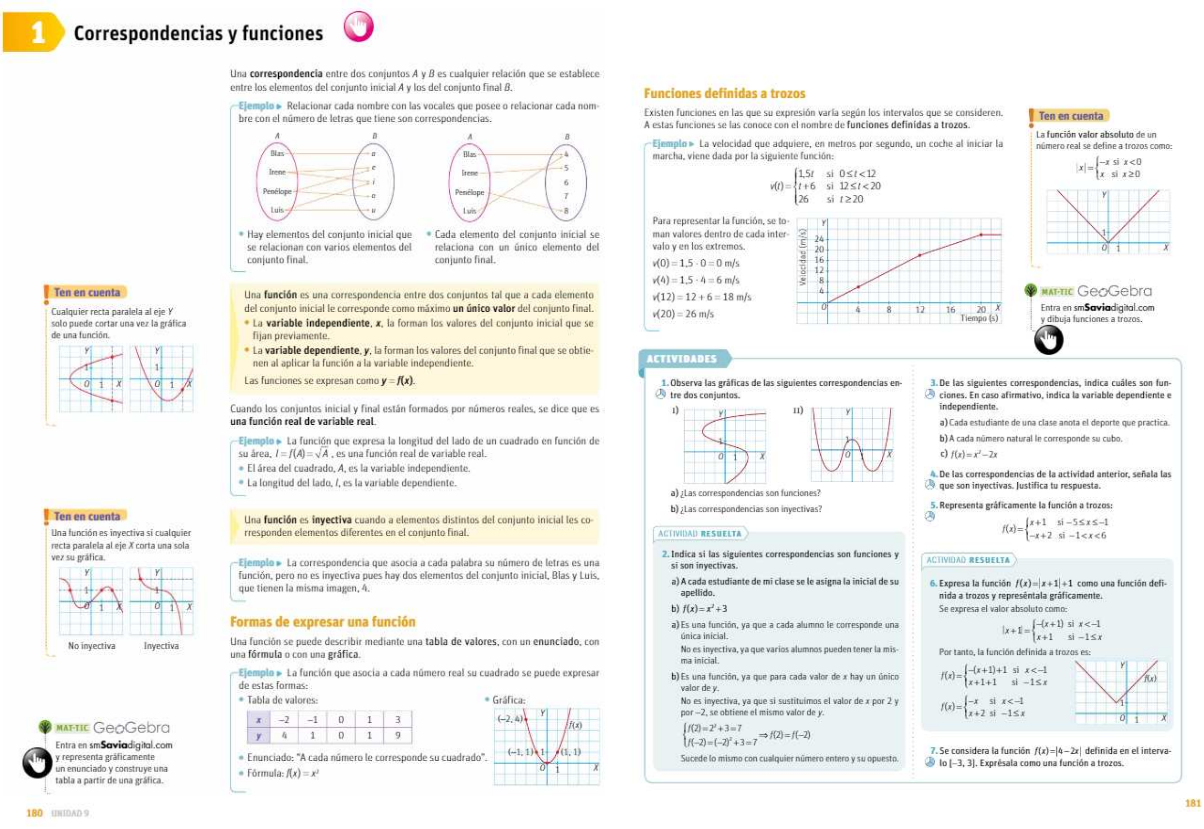
Lasa, A. (2016). *Instrumentación del medio material GeoGebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones*. PhD Thesis. Pamplona: UPNA.

Nieto, M., Pérez, A., Alcaide, F. (2016). "Matemáticas para 2º ESO", SM.

Sanz, L., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., (2016). "Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II para 2º de Bachillerato", SM.

Wilhelmi, M.R., Belletich, O., Lasa, A., Reina, L. (2013). Evaluación de respuesta a una tarea de recuento. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. (pp. 273-283) Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. [Disponible en (16/09/2013): http://www.jvdiesproyco.es/documentos/ACTAS/Actas%20jornadas.pdf].

Anexos I



1 Correspondencias y funciones

Una **correspondencia** entre dos conjuntos *A* y *B* es cualquier relación que se establece entre los elementos del conjunto inicial *A* y los del conjunto final *B*.

Ejemplo ▸ Relacionar cada nombre con las vocales que posee o relacionar cada nombre con el número de letras que tiene son correspondencias.

- Hay elementos del conjunto inicial que se relacionan con varios elementos del conjunto final.
- Cada elemento del conjunto inicial se relaciona con un único elemento del conjunto final.

Ten en cuenta

Cualquier recta paralela al eje *Y* solo puede cortar una vez la gráfica de una función.

Una **función** es una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde como máximo **un único valor** del conjunto final.

- La **variable independiente**, ***x***, la forman los valores del conjunto inicial que se fijan previamente.
- La **variable dependiente**, ***y***, la forman los valores del conjunto final que se obtienen al aplicar la función a la variable independiente.

Las funciones se expresan como $y = f(x)$.

Cuando los conjuntos inicial y final están formados por números reales, se dice que es **una función real de variable real**.

Ejemplo ▸ La función que expresa la longitud del lado de un cuadrado en función de su área, $l = f(A) = \sqrt{A}$, es una función real de variable real.

- El área del cuadrado, *A*, es la variable independiente.
- La longitud del lado, *l*, es la variable dependiente.

Ten en cuenta

Una función es inyectiva si cualquier recta paralela al eje *X* corta una sola vez su gráfica.

No inyectiva — Inyectiva

Una **función** es **inyectiva** cuando a elementos distintos del conjunto inicial les corresponden elementos diferentes en el conjunto final.

Ejemplo ▸ La correspondencia que asocia a cada palabra su número de letras es una función, pero no es inyectiva pues hay dos elementos del conjunto inicial, Blas y Luis, que tienen la misma imagen, 4.

Formas de expresar una función

Una función se puede describir mediante una **tabla de valores**, con un **enunciado**, con una **fórmula** o con una **gráfica**.

Ejemplo ▸ La función que asocia a cada número real su cuadrado se puede expresar de estas formas:

- Tabla de valores:

x	−2	−1	0	1	3
y	4	1	0	1	9

- Enunciado: "A cada número le corresponde su cuadrado".
- Fórmula: $f(x) = x^2$
- Gráfica:

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y representa gráficamente un enunciado y construye una tabla a partir de una gráfica.

180 UNIDAD 9

Funciones definidas a trozos

Existen funciones en las que su expresión varía según los intervalos que se consideren. A estas funciones se las conoce con el nombre de **funciones definidas a trozos**.

Ejemplo ▸ La velocidad que adquiere, en metros por segundo, un coche al iniciar la marcha, viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 1{,}5t & \text{si } 0 \le t < 12 \\ t+6 & \text{si } 12 \le t < 20 \\ 26 & \text{si } t \ge 20 \end{cases}$$

Para representar la función, se toman valores dentro de cada intervalo y en los extremos.

$v(0) = 1{,}5 \cdot 0 = 0$ m/s

$v(4) = 1{,}5 \cdot 4 = 6$ m/s

$v(12) = 12 + 6 = 18$ m/s

$v(20) = 26$ m/s

Ten en cuenta

La **función valor absoluto** de un número real se define a trozos como:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y dibuja funciones a trozos.

ACTIVIDADES

1. Observa las gráficas de las siguientes correspondencias entre dos conjuntos.

   I) II)

   a) ¿Las correspondencias son funciones?

   b) ¿Las correspondencias son inyectivas?

ACTIVIDAD RESUELTA

2. Indica si las siguientes correspondencias son funciones y si son inyectivas.

   a) A cada estudiante de mi clase se le asigna la inicial de su apellido.

   b) $f(x) = x^2 + 3$

   a) Es una función, ya que a cada alumno le corresponde una única inicial.

   No es inyectiva, ya que varios alumnos pueden tener la misma inicial.

   b) Es una función, ya que para cada valor de *x* hay un único valor de *y*.

   No es inyectiva, ya que si sustituimos el valor de *x* por 2 y por −2, se obtiene el mismo valor de *y*.

   $$\begin{cases} f(2) = 2^2 + 3 = 7 \\ f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow f(2) = f(-2)$$

   Sucede lo mismo con cualquier número entero y su opuesto.

3. De las siguientes correspondencias, indica cuáles son funciones. En caso afirmativo, indica la variable dependiente e independiente.

   a) Cada estudiante de una clase anota el deporte que practica.

   b) A cada número natural le corresponde su cubo.

   c) $f(x) = x^2 - 2x$

4. De las correspondencias de la actividad anterior, señala las que son inyectivas. Justifica tu respuesta.

5. Representa gráficamente la función a trozos:

   $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -5 \le x \le -1 \\ -x+2 & \text{si } -1 < x < 6 \end{cases}$$

ACTIVIDAD RESUELTA

6. Expresa la función $f(x) = |x+1| + 1$ como una función definida a trozos y represéntala gráficamente.

   Se expresa el valor absoluto como:

   $$|x+1| = \begin{cases} -(x+1) & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$$

   Por tanto, la función definida a trozos es:

   $$f(x) = \begin{cases} -(x+1)+1 & \text{si } x < -1 \\ x+1+1 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$$

   $$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x+2 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$$

7. Se considera la función $f(x) = |4 - 2x|$ definida en el intervalo [−3, 3]. Exprésala como una función a trozos.

181

2 Dominio y recorrido

- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. Se representa por $D(f)$.
- El **recorrido** o **imagen** de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente. Se representa por $R(f)$ o $Im(f)$.

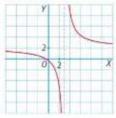
Ten en cuenta

Para calcular el dominio de algunas funciones:

- El denominador de una función no puede ser cero.
- El radicando de una raíz de índice par no puede ser negativo.

En la representación gráfica de la función, el dominio se observa sobre el eje X, mientras que el recorrido se observa sobre el eje Y.

Ejemplo ▸ La gráfica de la función $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ es:



- El dominio lo forman todos los números reales excepto el 3, ya que para $x=3$ el denominador se anula.
$D(f)=\mathbb{R}-\{3\}=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$
- El recorrido lo forman todos los números reales excepto el 2.
$R(f)=\mathbb{R}-\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

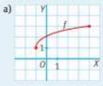
MAT-TIC GeoGebra

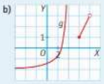
Entra en smSaviadigital.com y averigua cuál es el dominio y el recorrido de diversas funciones.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD RESUELTA

8. Indica el dominio y el recorrido de las funciones correspondientes a las siguientes gráficas.

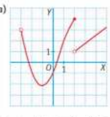
a) 

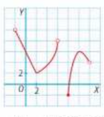
b) 

a) $D(f)=[-1,4]$
$R(f)=[1,3]$

b) $D(g)=(-\infty,4)\cup[6,8)$
$R(g)=(-2,+\infty)$

9. Indica el dominio y el recorrido de las funciones correspondientes a las siguientes gráficas.

a) 

b) 

10. Representa la función $f(x)=3x-5$ en el intervalo $[-5,8]$. ¿Cuál es su recorrido? ¿Es inyectiva?

ACTIVIDAD RESUELTA

11. Halla el dominio de la función $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$.

Esta función está definida para todos los valores de x que no anulen el denominador.

$$4-x^2=0\Rightarrow x=\pm 2$$

$$D(f)=\mathbb{R}-\{-2,2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$$

12. Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x)=\frac{3}{2x-6}$ c) $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$

b) $h(x)=\frac{3}{x^2-9}$ d) $i(x)=\frac{-2}{|x-4|}$

ACTIVIDAD RESUELTA

13. Halla el dominio de la función $g(x)=\sqrt{x+1}$.

La raíz cuadrada existe si el radicando es 0 o positivo.

$$x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1$$

$$D(g)=[-1,+\infty)$$

14. Halla el dominio y el recorrido de estas funciones.

a) $f(x)=\sqrt{2x-6}$ c) $g(x)=\sqrt{x^2+1}$

b) $h(x)=\sqrt{3-x}$ d) $i(x)=\sqrt{x}+2$

3 Suma y diferencia de funciones

Ejemplo ▸ El precio, en euros, de un paquete de acciones se ajusta a la función $f(x)=-x^2+50x+2000$, donde x representa el número de días desde que salen a la venta. Por cada día que pase el precio aumenta 20 €. ¿Cuál es la función que expresa el precio total de las acciones al cabo de x días?

La función que determina la revalorización es $g(x)=20x$. El precio total es la suma del precio más la revalorización.

$$P(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(-x^2+50x+2000)+20x=-x^2+70x+2000$$

El precio total de las acciones al cabo de 10 días se puede calcular de dos formas.

- Utilizando las funciones iniciales:
Precio: $f(10)=-(10^2)+50\cdot 10+2000=2400$
Revalorización: $g(10)=20\cdot 10=200$
Precio final: $f(10)+g(10)=2400+200=2600$
- Utilizando la función del precio total:
Precio final: $P(10)=-(10^2)+70\cdot 10+2000=-100+700+2000=2600$

- **La suma de dos funciones f y g** es otra función que a cada elemento x del dominio común a ambas funciones le hace corresponder la suma de $f(x)$ y $g(x)$.
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ \text{con}\ x\in D(f)\cap D(g)$$
- **La diferencia de dos funciones f y g** es otra función que a cada elemento x del dominio común a ambas funciones le hace corresponder la diferencia de $f(x)$ y $g(x)$.
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\ \text{con}\ x\in D(f)\cap D(g)$$

Ten en cuenta

- $\cap$: La **intersección** de dos conjuntos está formada por los elementos comunes de los conjuntos.
- $\cup$: La **unión** de dos conjuntos está formada por todos los elementos de los dos conjuntos.

Ejemplo ▸ Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=x-1$, calcula la función suma, la función resta y sus dominios.

Primero se calcula el dominio de las funciones de partida:

$$D(f)=\mathbb{R}-\{0\}\qquad D(g)=\mathbb{R}$$

- $(f+g)(x)=\frac{1}{x}+x-1=\frac{1+x^2-x}{x}$, con $x\in D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}-\{0\}$
- $(f-g)(x)=\frac{1}{x}-(x-1)=\frac{1-x^2+x}{x}$, con $x\in D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}-\{0\}$

ACTIVIDADES

15. Dadas las funciones $f(x)=x^2+3$, $g(x)=2x-5$ y $h(x)=\frac{3}{x+4}$, calcula:

a) $(f+g)(5)$ c) $(f+g)(x)$

b) $(g+h)(-2)$ d) $(h-g)(x)$

16. Completa la tabla de valores correspondientes a las funciones $f(x)$, $g(x)$, $(f+g)(x)$ y $(f-g)(x)$.

$f(x)$	$g(x)$	$(f+g)(x)$	$(f-g)(x)$
-7	●●●	●●●	19
-1	-3	●●●	●●●
●●●	-4	●●●	5
5	●●●	5	●●●

17. Si $f(x)=\frac{5}{x-1}$, $g(x)=x^2-1$ y $h(x)=\frac{2}{x+3}$, calcula la expresión algebraica y el dominio de las funciones.

a) $(f+g)$ c) $(f-h)$

b) $(g-f)$ d) $(f+g+h)$

18. Se consideran $f(x)=2+x-\sqrt{x}$ y $g(x)=2-x+\sqrt{x}$.

a) Halla la expresión que corresponde a las funciones $(f+g)(x)$ y $(f-g)(x)$.

b) Teniendo en cuenta los dominios de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ indica cuál es el dominio de las funciones $(f+g)(x)$ y $(f-g)(x)$.

c) Representa gráficamente las funciones $(f+g)(x)$ y $(f-g)(x)$ obtenidas teniendo en cuenta sus dominios.

4 Producto y cociente de funciones

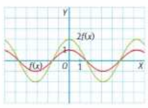
Producto de una función por un número real

El producto de una función f por un número real k es otra función en la que a cada elemento x del dominio de f le corresponde el producto de $f(x)$ por el número k.

$$(kf)(x)=k\cdot f(x)\ \text{con}\ x\in D(f)$$

Ejemplo ▸ Dada la función $f(x)=3x-6$, halla las funciones $-2f$ y $\frac{1}{3}f$.

- $(-2f)(x)=-2\cdot f(x)=-2(3x-6)=-6x+12$
- $\left(\frac{1}{3}f\right)(x)=\frac{1}{3}\cdot f(x)=\frac{1}{3}(3x-6)=x-2$



Si se conoce la gráfica de la función $f(x)$, entonces la gráfica de la función $(kf)(x)$ se obtiene fácilmente multiplicando las ordenadas de los puntos de la gráfica por k.

Producto y cociente de funciones

- **El producto de dos funciones f y g** es otra función que a cada elemento x del dominio común a ambas funciones le hace corresponder el producto de $f(x)$ y $g(x)$.
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\ \text{con}\ x\in D(f)\cap D(g)$$
- **El cociente de dos funciones f y g** es otra función que a cada elemento x del dominio común a ambas funciones le hace corresponder el cociente de $f(x)$ y $g(x)$ siempre que $g(x)\neq 0$.
$$(f:g)(x)=f(x):g(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ \text{con}\ x\in D(f)\cap D(g)\ \text{y}\ g(x)\neq 0$$

Ejemplo ▸ Halla $(f\cdot g)(x)$ y $(f:g)(x)$ si $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=x-1$ e indica sus dominios.

- $(f\cdot g)(x)=\frac{1}{x}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{x}$, con $x\in D(f)\cap D(g)\Rightarrow D(f\cdot g)=\mathbb{R}-\{0\}$
- $(f:g)(x)=\frac{1}{x}:(x-1)=\frac{1}{x(x-1)}$, con $x\in D(f)\cap D(g)$ y $g(x)\neq 0\Rightarrow D(f:g)=\mathbb{R}-\{0,1\}$

Se pueden comprobar los resultados obtenidos construyendo una tabla de valores.

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f\cdot g)(x)$	$(f:g)(x)$
-1	-1	-2	2	$\frac{1}{2}$
0	No existe.	-1	No existe.	No existe.
1	1	0	0	No existe.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y observa lo que significa operar con ellas.

ACTIVIDADES

19. Dadas las funciones $f(x)=x^2+3$, $g(x)=2x-5$ y $h(x)=\frac{3}{x+4}$, calcula:

a) $(f\cdot g)(1)$ d) $(-g)(11)$

b) $\left(\frac{1}{f}\right)(-3)$ e) $[(f+g)\cdot h](2)$

c) $(h:g)(-2)$ f) $[(f:g)](1)$

20. Representa de forma aproximada la gráfica de una función $f(x)$ a partir de la tabla de valores.

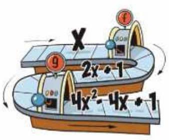
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,4	0,8	2	4	2	0,8	0,4	0,235

Si $g(x)=2$, elabora una tabla para las funciones $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ y represéntalas junto con la gráfica de $f(x)$. ¿Qué relación hay entre ellas?

5 Composición de funciones

A partir de dos funciones y las operaciones de suma, resta, producto y cociente se pueden obtener nuevas funciones. También es posible al aplicar de manera sucesiva las funciones f y g sobre un elemento x del dominio de f. Esta nueva función se llama **f compuesta con g** y se representa como $g\circ f$.

$$x\xrightarrow{f}f(x)\xrightarrow{g}g[f(x)]\qquad x\xrightarrow{g\circ f}g[f(x)]$$



Dadas dos funciones f y g, se define la función **f compuesta con g** como:

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]$$

Ejemplo ▸ Si $f(x)=2x-1$ y $g(x)=x^2$:

- La función f compuesta con g será:
$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(2x-1)=(2x-1)^2=4x^2-4x+1$
- De igual manera, la función g compuesta con f será:
$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(x^2)=2x^2-1$

Ten en cuenta

La lectura de la expresión $g\circ f$ se hace de derecha a izquierda porque la primera función que transforma al número x es la que está a la derecha.

Al escribir $g\circ f$ se lee "f compuesta con g", y al escribir $f\circ g$ se lee "g compuesta con f".

Como $(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$, **la composición de funciones no es conmutativa**.

El **dominio de $g\circ f$** está formado por todos los valores x que pertenecen al dominio de f, tales que $f(x)$ pertenece al dominio de g.

Ejemplo ▸ Si $f(x)=2x-1$ y $g(x)=\frac{2}{x-3}$, calcula el dominio de $g\circ f$.

$D(f)=\mathbb{R}$ y $D(g)=\mathbb{R}-\{3\}$. Se buscan valores x del dominio de f tales que $f(x)=3$.

En este caso, $f(x)=2x-1=3\Rightarrow x=2$, por lo que: $D(g\circ f)=\mathbb{R}-\{2\}$

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y trabaja la composición de funciones y el cálculo de la inversa.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD RESUELTA

21. Si $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=\frac{x^2+2}{x^2-3}$, calcula la función $h(x)=(g\circ f)(x)$ y su dominio.

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-3}=\frac{x-1+2}{x-1-3}=\frac{x+1}{x-4}$$

Para calcular el dominio de $h(x)$ hay que tener en cuenta el dominio de $f(x)$ y los valores de $f(x)$ que anulan el denominador de $g(x)$.

- $D(f)=[1,+\infty)$
- El denominador de $g(x)$ se anula para $x=\pm\sqrt{3}$. Solo está definida $f(x)=\sqrt{3}$, para $x=4$.

Por tanto, $D(h)=[1,4)\cup(4,+\infty)$.

22. Dadas las funciones $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, $g(x)=3x+1$ y $h(x)=\sqrt{x}$, calcula:

a) $(f\circ g)(x)$ b) $(f\circ h)(x)$ c) $(h\circ g)(x)$ d) $(g\circ f)(x)$

23. Calcula, aplicando la definición, los valores de $(g\circ f)(-2)$, $(g\circ f)(3)$, $(f\circ g)(0)$, si $f(x)=x^2-3x+5$ y $g(x)=\frac{10}{x-5}$.

24. ¿Cuál es el dominio de las funciones $g\circ f$, $f\circ g$, $f\circ f$ y $g\circ g$, si $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ y $g(x)=\frac{3x-1}{x-4}$?

ACTIVIDAD RESUELTA

25. Si $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, $g(x)=3x+1$ y $h(x)=\sqrt[3]{x}$ halla la expresión de $(h\circ g\circ f)(x)$.

$$(h\circ g\circ f)(x)=h[g[f(x)]]=h\left[3\left(\frac{x+2}{x-1}\right)+1\right]=\sqrt[3]{\frac{4x+5}{x-1}}$$

$$D(h\circ g\circ f)=\mathbb{R}-\{1\}$$

26. Dadas las funciones $f(x)=x+3$, $g(x)=\frac{2}{x}$ y $h(x)=x^2-1$, calcula $(h\circ g)\circ f$ y $h\circ(g\circ f)$. ¿Qué observas?

6 Función inversa

Si A es el conjunto formado por unos jugadores de fútbol y B es el conjunto de los números de las camisetas, se puede establecer entre A y B una correspondencia entre cada jugador y su dorsal.

La correspondencia inversa será la que relaciona cada dorsal del conjunto B con el jugador que lo lleva habitualmente del conjunto A.

Análogamente, se puede definir el concepto de función inversa de una función.

Si f es una función inyectiva definida en $\mathbb{R}$, tal que a cada valor de x le hace corresponder un valor único de y, la **función inversa f^{-1}** transforma cada valor de y en x, para todo $y \in R(f)$.

$$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$$

La composición de una función con su inversa es igual a la función identidad:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

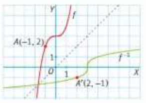
Ten en cuenta

Para que una función tenga función inversa es necesario que sea inyectiva, es decir, que a cada valor de x le corresponda un único valor de y.

Si la función no es inyectiva se puede calcular la **correspondencia inversa**.

De la definición se deducen inmediatamente las siguientes consecuencias:

- $D(f) = R(f^{-1})$ y $D(f^{-1}) = R(f)$
- Si f^{-1} es la inversa de f entonces también se cumple que f es la inversa de f^{-1}.
- Las gráficas de las funciones f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.
- Si $A(x, y)$ es un punto de la gráfica de f, el punto $A'(y, x)$ lo es de la de f^{-1}.



Para **hallar** la **función inversa** de $f(x)$:

1.º Se despeja x en la igualdad $y = f(x)$.

2.º Para expresarla de la forma habitual, se intercambian los nombres de las variables.

Ejemplo ▸ La entrada a un parque de atracciones cuesta 5 €, y montar en cada atracción, 1,5 €. Si un joven dispone de 20 €, ¿de cuántas atracciones podrá disfrutar?

La función que determina el precio de utilizar x atracciones es $f(x) = 5 + 1{,}5x$

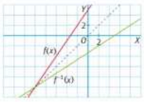
Para hallar la función que permita saber el número de atracciones en las que puede montar, se calcula la función inversa de $f(x)$.

1.º Se despeja x de la función: $f(x) = y = 5 + 1{,}5x \Rightarrow y - 5 = 1{,}5x \Rightarrow x = \dfrac{y-5}{1{,}5}$

2.º Se cambia el nombre a las variables: $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{1{,}5}$

3.º Sustituyendo $x = 20$ en la función inversa, se obtiene el número de atracciones en las que puede montar: $f^{-1}(20) = 10$.

En la gráfica se observa que la función f es inyectiva y que las gráficas de las dos funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$.



ACTIVIDADES

ACTIVIDAD **RESUELTA**

27. **Comprueba que $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = \dfrac{x+5}{3}$ son inversas.**

Se comprueba que $(g \circ f)(x) = x$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{3x-5+5}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

Por tanto, $f(x)$ y $g(x)$ son una la inversa de la otra.

28. **Calcula la función inversa de $f(x) = 2x + 3$ y confirma gráficamente que las dos funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.**

29. **Halla la función inversa de cada una de las funciones inyectivas siguientes.**

a) $f(x) = 5x - 2$ b) $g(x) = \dfrac{4+x}{3}$ c) $h(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ d) $i(x) = \dfrac{2x+3}{4-3x}$

7 Puntos de corte con los ejes. Signo de la función

Para poder esbozar la gráfica de una función a partir de su fórmula, resulta útil estudiar algunas características de la función como los puntos de corte, el signo, la simetría, la continuidad o el crecimiento.

- Los **puntos de corte con el eje Y** son de la forma $(x = 0, y = f(0))$.
- Los **puntos de corte con el eje X** son de la forma $(x, y = 0)$.

Ten en cuenta

Si $x = 0$ pertenece al dominio de la función, hay un único punto de corte con el eje Y. En caso contrario la función no corta al eje de ordenadas.

Ejemplo ▸ Halla los puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

- Con el eje Y: se sustituye $x = 0$ en la función.

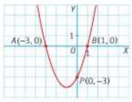
  $f(0) = 0 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$

  El punto de corte es $P(0, -3)$.

- Con el eje X: se resuelve la ecuación $f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$.

  $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

  Los puntos de corte son $A(-3, 0)$ y $B(1, 0)$.



Ten en cuenta

Al calcular los puntos de corte de una función con los ejes, se están buscando las soluciones de los sistemas:

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

Signo de la función

La gráfica de una función **positiva** está por encima del eje X y por debajo si es **negativa**. En los puntos de corte con el eje X la función puede pasar de ser positiva a negativa, o no cambiar de signo.

Ejemplo ▸ La función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ es positiva en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y negativa en el intervalo $(-3, 1)$.

- Una **función f** es **positiva** en un intervalo (a, b) si $\boldsymbol{f(x) > 0}$ para todos los valores de $x \in (a, b)$.
- Una **función f** es **negativa** en un intervalo (a, b) si $\boldsymbol{f(x) < 0}$ para todos los valores de $x \in (a, b)$.

Para estudiar el signo de una función hay que resolver las inecuaciones $f(x) < 0$ y $f(x) > 0$, es decir, hallar los intervalos que determinan los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos de corte con el eje X y comprobar el signo en un punto de cada uno.

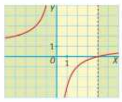
MAT-TIC GeoGebra

Entra en **smSavia**digital.com y estudia el signo de las funciones.

Ejemplo ▸ La función $f(x) = \dfrac{x-4}{x}$ con dominio $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ corta al eje X en el punto $(4, 0)$.

Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty, 0)$: $f(-1) = 5 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(0, 4)$: $f(1) = -3 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(4, +\infty)$: $f(5) = \dfrac{1}{5} > 0 \Rightarrow$ Positiva



ACTIVIDADES

30. **Halla los puntos de corte con los ejes de estas funciones.**

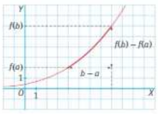
a) $f(x) = 3 - 2x$ b) $g(x) = 3x - x^2$ c) $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x}$

31. **Estudia el signo de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^4 - 1$ b) $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$ c) $i(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

8 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Excepto las funciones constantes, las demás funciones varían cuando la variable independiente toma diferentes valores. Para analizar cómo varía la función en cada intervalo, se utiliza la tasa de variación media.



Tasa de variación media

Se llama **tasa de variación** de la función f definida en el intervalo $[a, b]$ a la diferencia:

$$TV\,f[a, b] = f(b) - f(a)$$

Se llama **tasa de variación** media de f definida en el intervalo $[a, b]$ al cociente:

$$TVM\,f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ten en cuenta

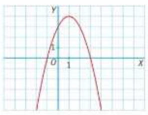
La tasa de variación media puede ser positiva, negativa o incluso nula aunque la función no sea constante en ese intervalo.

Ejemplo ▸ La tasa de variación media de la función $f(x) = 2x - x^2 + 3$ en los intervalos $[-2, 0]$, $[-1, 4]$ y $[-1, 3]$ es:

$$TVM\,f[-2, 0] = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{3 - (-5)}{0 - (-2)} = \frac{8}{2} = 4 > 0$$

$$TVM\,f[-1, 4] = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{(-5) - 0}{4 - (-1)} = \frac{-5}{5} = -1 < 0$$

$$TVM\,f[-1, 3] = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{0 - 0}{3 - (-1)} = \frac{0}{4} = 0$$



Crecimiento y decrecimiento

Estudiando la tasa de variación media en algunos intervalos de la función, se puede determinar si la función es creciente, decreciente o constante.

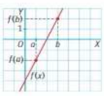
- Una **función f** es **creciente** en un intervalo de su dominio, si para cualquier par de valores a y b, con $a < b$, $\boldsymbol{TVM\,f[a, b] > 0}$.
- Una **función f** es **decreciente** en un intervalo de su dominio, si para cualquier par de valores a y b, con $a < b$, $\boldsymbol{TVM\,f[a, b] < 0}$.

Puede haber intervalos pertenecientes a la gráfica de una función en que la tasa de variación media sea cero. En estos intervalos, la función no es creciente ni decreciente.

Ejemplos

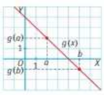
▸ La función $f(x) = 3x - 5$ es creciente en todo su dominio, porque si tomamos dos valores cualesquiera a y b, con $a < b$, siempre se cumple que $f(a) < f(b)$.

Por tanto, $TVM\,f[a, b] > 0$.



▸ La función $g(x) = 4 - 2x$ es decreciente en todo su dominio, porque si tomamos dos valores cualesquiera a y b, con $a < b$, siempre se cumple que $g(a) > g(b)$.

Por tanto, $TVM\,g[a, b] < 0$.



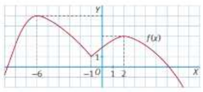
PON EN VALOR

Al analizar la evolución de las zonas de bosque en los últimos años, se puede observar que su superficie ha decrecido de forma alarmante, lo que ha llevado a desarrollar políticas de protección de bosques y zonas de interés natural. Además, es preciso que cada uno de nosotros tome conciencia del problema y actúe con **responsabilidad**.

Entra en **smSavia**digital.com y elabora un mural donde muestres las causas propias y ajenas que han llevado a esta situación y qué se puede hacer para favorecer un **desarrollo sostenible**.

Máximos y mínimos

Ejemplo ▸ Observa la gráfica de esta función:



- En $x = -1$ la función pasa de ser decreciente a creciente.

  $f(-1) = 1$ es el menor valor que toma la función en los puntos próximos, pero no en su dominio, por tanto, se trata de un **mínimo relativo**.

- En $x = 2$ la función pasa de creciente a decreciente.

  $f(2) = 3$ es el mayor valor que toma la función en los puntos próximos, pero no en su dominio, por tanto, se trata de un **máximo relativo**.

- En $x = -6$ la función pasa de creciente a decreciente.

  $f(-6) = 5$ es el mayor valor que toma la función en todo su dominio, por tanto, es un **máximo absoluto**.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en **smSavia**digital.com y representa funciones a partir de sus características.

- Una función tiene un **mínimo relativo** en $x = a$ si para todos los valores x de un entorno de a, se cumple $f(x) > f(a)$. Si $f(a)$ es el menor valor que toma la función en todo su dominio, $x = a$ es un **mínimo absoluto**.
- Una función tiene un **máximo relativo** en $x = a$ si para todos los valores x de un entorno de a, se verifica $f(x) < f(a)$. Si $f(a)$ es el mayor valor que toma la función en todo su dominio, $x = a$ es un **máximo absoluto**.

Ten en cuenta

En los tramos en los que la función es constante no se habla ni de máximos ni de mínimos.

ACTIVIDADES

32. **Calcula la tasa de variación media de las funciones en los intervalos indicados.**

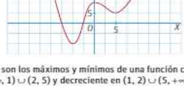
a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $[0, 2]$ c) $g(x) = -x^3 + 2$ en $[-2, 1]$

b) $h(x) = \dfrac{3}{4-x}$ en $[-2, 1]$ d) $i(x) = \sqrt{x-2}$ en $[3, 6]$

33. **¿Se puede calcular la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo pedido? Razona tu respuesta.**

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ en } [0, 2]$$

34. **Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y los mínimos de la siguiente función. Calcula la tasa de variación media para probar tus resultados.**



35. **¿Cómo son los máximos y mínimos de una función creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, 5)$ y decreciente en $(1, 2) \cup (5, +\infty)$?**

36. **Dibuja la gráfica de una función con dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, creciente en $(0, 4)$ y decreciente en $(4, +\infty)$. Indica cuáles son los máximos y los mínimos de la función que has dibujado.**

ACTIVIDAD **RESUELTA**

37. **Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 + 3$.**

El dominio de la función $f(x)$ es $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

Si se toman dos valores del dominio cualesquiera, x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$, se cumple:

$$x_1^3 < x_2^3$$
$$x_1^3 + 3 < x_2^3 + 3$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

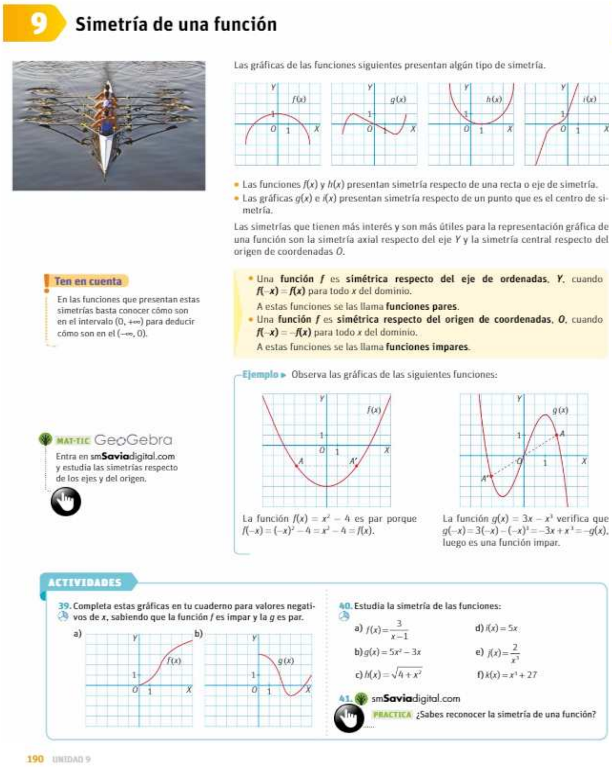
$TVM\,f[x_1, x_2] > 0$ y la función es creciente en todo su dominio.

38. **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones:**

a) $f(x) = 2x + 7$, $D(f) = [-5, 4]$

b) $g(x) = 4 - x^2$, $D(g) = [-10, 0]$

Ampliación del concepto de función en 4º ESO



9 Simetría de una función

Las gráficas de las funciones siguientes presentan algún tipo de simetría.

- Las funciones $f(x)$ y $h(x)$ presentan simetría respecto de una recta o eje de simetría.
- Las gráficas $g(x)$ e $i(x)$ presentan simetría respecto de un punto que es el centro de simetría.

Las simetrías que tienen más interés y son más útiles para la representación gráfica de una función son la simetría axial respecto del eje Y y la simetría central respecto del origen de coordenadas O.

Ten en cuenta

En las funciones que presentan estas simetrías basta conocer cómo son en el intervalo $(0, +\infty)$ para deducir cómo son en el $(-\infty, 0)$.

- Una **función** f es **simétrica respecto del eje de ordenadas, Y**, cuando $f(-x) = f(x)$ para todo x del dominio.
  A estas funciones se las llama **funciones pares**.
- Una **función** f es **simétrica respecto del origen de coordenadas, O**, cuando $f(-x) = -f(x)$ para todo x del dominio.
  A estas funciones se las llama **funciones impares**.

Ejemplo ▸ Observa las gráficas de las siguientes funciones:

La función $f(x) = x^2 - 4$ es par porque $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$.

La función $g(x) = 3x - x^3$ verifica que $g(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -3x + x^3 = -g(x)$, luego es una función impar.

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y estudia las simetrías respecto de los ejes y del origen.

ACTIVIDADES

39. Completa estas gráficas en tu cuaderno para valores negativos de x, sabiendo que la función f es impar y la g es par.

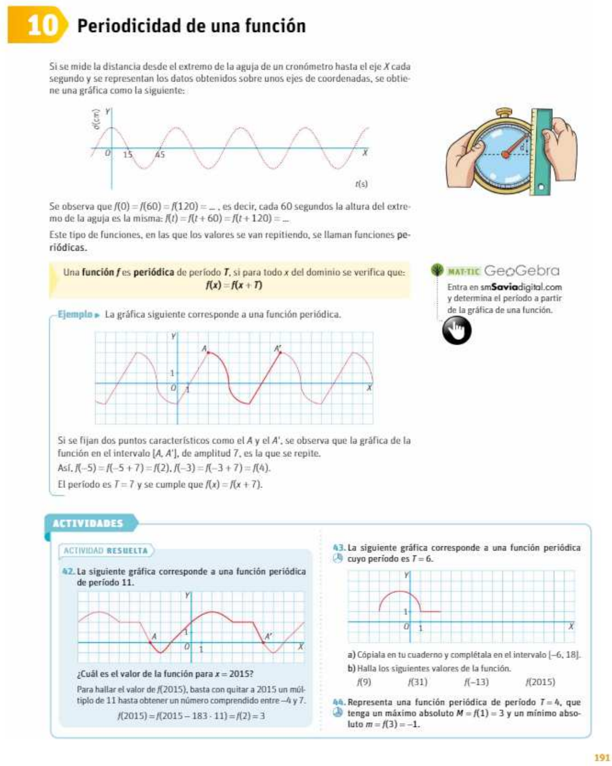
a) b)

40. Estudia la simetría de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ b) $g(x) = 5x^2 - 3x$ c) $h(x) = \sqrt{4+x^2}$ d) $i(x) = 5x$ e) $j(x) = \dfrac{2}{x^3}$ f) $k(x) = x^3 + 27$

41. smSaviadigital.com
PRACTICA ¿Sabes reconocer la simetría de una función?

190 UNIDAD 9



10 Periodicidad de una función

Si se mide la distancia desde el extremo de la aguja de un cronómetro hasta el eje X cada segundo y se representan los datos obtenidos sobre unos ejes de coordenadas, se obtiene una gráfica como la siguiente:

Se observa que $f(0) = f(60) = f(120) = \dots$, es decir, cada 60 segundos la altura del extremo de la aguja es la misma: $f(t) = f(t + 60) = f(t + 120) = \dots$

Este tipo de funciones, en las que los valores se van repitiendo, se llaman funciones **periódicas**.

Una **función** f es **periódica** de período T, si para todo x del dominio se verifica que:
$$f(x) = f(x + T)$$

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y determina el período a partir de la gráfica de una función.

Ejemplo ▸ La gráfica siguiente corresponde a una función periódica.

Si se fijan dos puntos característicos como el A y el A', se observa que la gráfica de la función en el intervalo $[A, A']$, de amplitud 7, es la que se repite.

Así, $f(-5) = f(-5 + 7) = f(2)$, $f(-3) = f(-3 + 7) = f(4)$.

El período es $T = 7$ y se cumple que $f(x) = f(x + 7)$.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD RESUELTA

42. La siguiente gráfica corresponde a una función periódica de período 11.

¿Cuál es el valor de la función para $x = 2015$?

Para hallar el valor de $f(2015)$, basta con quitar a 2015 un múltiplo de 11 hasta obtener un número comprendido entre -4 y 7.

$$f(2015) = f(2015 - 183 \cdot 11) = f(2) = 3$$

43. La siguiente gráfica corresponde a una función periódica cuyo período es $T = 6$.

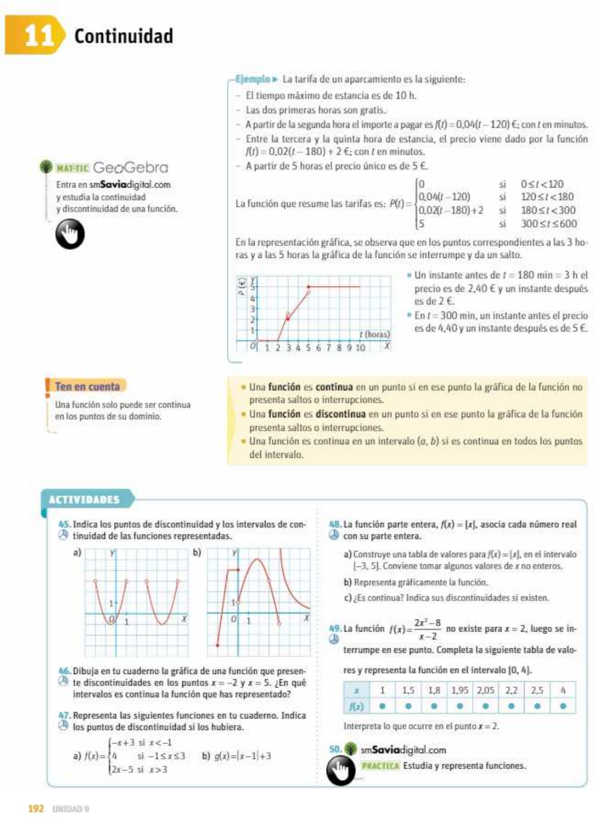
a) Cópiala en tu cuaderno y complétala en el intervalo $[-6, 18]$.

b) Halla los siguientes valores de la función.

$f(9)$ $f(31)$ $f(-13)$ $f(2015)$

44. Representa una función periódica de período $T = 4$, que tenga un máximo absoluto $M = f(1) = 3$ y un mínimo absoluto $m = f(3) = -1$.

191



11 Continuidad

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y estudia la continuidad y discontinuidad de una función.

Ejemplo ▸ La tarifa de un aparcamiento es la siguiente:

- El tiempo máximo de estancia es de 10 h.
- Las dos primeras horas son gratis.
- A partir de la segunda hora el importe a pagar es $f(t) = 0{,}04(t - 120)$ €; con t en minutos.
- Entre la tercera y la quinta hora de estancia, el precio viene dado por la función $f(t) = 0{,}02(t - 180) + 2$ €; con t en minutos.
- A partir de 5 horas el precio único es de 5 €.

La función que resume las tarifas es: $P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 120 \\ 0{,}04(t-120) & \text{si } 120 \le t < 180 \\ 0{,}02(t-180)+2 & \text{si } 180 \le t < 300 \\ 5 & \text{si } 300 \le t \le 600 \end{cases}$

En la representación gráfica, se observa que en los puntos correspondientes a las 3 horas y a las 5 horas la gráfica de la función se interrumpe y da un salto.

- Un instante antes de $t = 180$ min $= 3$ h el precio es de 2,40 € y un instante después es de 2 €.
- En $t = 300$ min, un instante antes el precio es de 4,40 y un instante después es de 5 €.

Ten en cuenta

Una función solo puede ser continua en los puntos de su dominio.

- Una **función** es **continua** en un punto si en ese punto la gráfica de la función no presenta saltos o interrupciones.
- Una **función** es **discontinua** en un punto si en ese punto la gráfica de la función presenta saltos o interrupciones.
- Una función es continua en un intervalo (a, b) si es continua en todos los puntos del intervalo.

ACTIVIDADES

45. Indica los puntos de discontinuidad y los intervalos de continuidad de las funciones representadas.

a) b)

46. Dibuja en tu cuaderno la gráfica de una función que presente discontinuidades en los puntos $x = -2$ y $x = 5$. ¿En qué intervalos es continua la función que has representado?

47. Representa las siguientes funciones en tu cuaderno. Indica los puntos de discontinuidad si los hubiera.

a) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 2x-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ b) $g(x) = |x-1| + 3$

48. La función parte entera, $f(x) = [x]$, asocia cada número real con su parte entera.

a) Construye una tabla de valores para $f(x) = [x]$, en el intervalo $[-3, 5]$. Conviene tomar algunos valores de x no enteros.

b) Representa gráficamente la función.

c) ¿Es continua? Indica sus discontinuidades si existen.

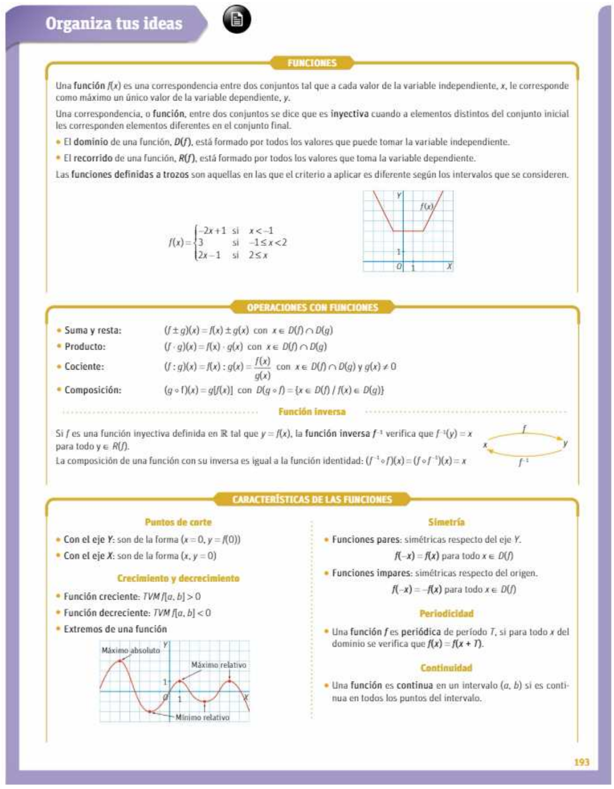
49. La función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$ no existe para $x = 2$, luego se interrumpe en ese punto. Completa la siguiente tabla de valores y representa la función en el intervalo $[0, 4]$.

x	1	1,5	1,8	1,95	2,05	2,2	2,5	4
$f(x)$	●	●	●	●	●	●	●	●

Interpreta lo que ocurre en el punto $x = 2$.

50. smSaviadigital.com
PRACTICA Estudia y representa funciones.

192 UNIDAD 9



Organiza tus ideas

FUNCIONES

Una **función** $f(x)$ es una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde como máximo un único valor de la variable dependiente, y.

Una correspondencia, o **función**, entre dos conjuntos se dice que es **inyectiva** cuando a elementos distintos del conjunto inicial les corresponden elementos diferentes en el conjunto final.

- El **dominio** de una función, $D(f)$, está formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente.
- El **recorrido** de una función, $R(f)$, está formado por todos los valores que toma la variable dependiente.

Las **funciones definidas a trozos** son aquellas en las que el criterio a aplicar es diferente según los intervalos que se consideren.

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ 2x-1 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

OPERACIONES CON FUNCIONES

- **Suma y resta:** $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ con $x \in D(f) \cap D(g)$
- **Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ con $x \in D(f) \cap D(g)$
- **Cociente:** $(f : g)(x) = f(x) : g(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con $x \in D(f) \cap D(g)$ y $g(x) \neq 0$
- **Composición:** $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ con $D(g \circ f) = \{x \in D(f) \,/\, f(x) \in D(g)\}$

Función inversa

Si f es una función inyectiva definida en $\mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$, la **función inversa** f^{-1} verifica que $f^{-1}(y) = x$ para todo $y \in R(f)$.

La composición de una función con su inversa es igual a la función identidad: $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

Puntos de corte

- **Con el eje Y:** son de la forma $(x = 0, y = f(0))$
- **Con el eje X:** son de la forma $(x, y = 0)$

Crecimiento y decrecimiento

- **Función creciente:** $TVM\, f[a, b] > 0$
- **Función decreciente:** $TVM\, f[a, b] < 0$
- **Extremos de una función**

Máximo absoluto
Máximo relativo
Mínimo relativo

Simetría

- **Funciones pares:** simétricas respecto del eje Y.
  $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$
- **Funciones impares:** simétricas respecto del origen.
  $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D(f)$

Periodicidad

- Una **función** f es **periódica** de período T, si para todo x del dominio se verifica que $f(x) = f(x + T)$.

Continuidad

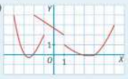
- Una **función** es **continua** en un intervalo (a, b) si es continua en todos los puntos del intervalo.

193

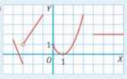
Actividades clave

1. **¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función?**

a)



b)



Indica en esos casos si son funciones inyectivas, su dominio y su recorrido.

a) No es la gráfica de una función, porque hay valores de la variable independiente x a los que les corresponden dos valores de la variable dependiente y:

Para $x=-2 \Rightarrow y=0$ e $y=4$

b) Corresponde a una función.

- No es inyectiva, porque para un valor de la variable dependiente y hay más de un valor de la variable independiente x. Se comprueba trazando una línea horizontal y viendo que corta la gráfica en más de un punto.
- El dominio es: $D(f)=[-4,-1]\cup[0,3]\cup[4,+\infty)$
- El recorrido es: $R(f)=[-1,4]$

2. **Dadas las funciones:**

$f(x)=x-3$

$h(x)=\dfrac{x}{1-x}$

Calcula y halla el dominio en cada caso:

a) Las funciones $f+h$ y $f\cdot h$

b) Las funciones $f:h$ y $h:f$

c) Las funciones $f\circ h$ y $h\circ f$. ¿Es conmutativa la composición de funciones?

Los dominios de las funciones dadas son: $D(f)=\mathbb{R}$ $\quad D(h)=\mathbb{R}-\{1\}$

a) $(f+h)(x)=f(x)+h(x)=x-3+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{(x-3)(1-x)+x}{1-x}=\dfrac{-x^2-3+5x}{1-x}$; $D(f+h)=\mathbb{R}-\{1\}$

$(f\cdot h)(x)=f(x)\cdot h(x)=(x-3)\cdot\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{(x-3)x}{1-x}=\dfrac{x^2-3x}{1-x}$; $D(f\cdot h)=\mathbb{R}-\{1\}$

b) $(f:h)(x)=f(x):h(x)=\dfrac{x-3}{\frac{x}{1-x}}=\dfrac{(x-3)(1-x)}{x}=\dfrac{-x^2+4x-3}{x}$

$D(f:h)=\mathbb{R}-\{0,1\}$, ya que $x=1$ no está en el dominio de $h(x)$ y $x=0$ anula el denominador de la función resultante.

$(h:f)(x)=h(x):f(x)=\dfrac{\frac{x}{1-x}}{x-3}=\dfrac{x}{(x-3)(1-x)}=\dfrac{x}{-x^2+4x-3}$

$D(h:f)=\mathbb{R}-\{1,3\}$, ya que $x=1$ no está en el dominio de $h(x)$ y $x=3$ anula el denominador de la función resultante.

c) $(f\circ h)(x)=f[h(x)]=\dfrac{x}{1-x}-3=\dfrac{x-3(1-x)}{1-x}=\dfrac{x-3+3x}{1-x}=\dfrac{-3+4x}{1-x}$

$D(f\circ h)=\mathbb{R}-\{1\}$, ya que $x=1$ no está en el dominio de $h(x)$, ni de la función resultante. El resto de valores de $h(x)$ están definidos dentro del dominio de $f(x)$.

$(h\circ f)(x)=h[f(x)]=\dfrac{x-3}{1-(x-3)}=\dfrac{x-3}{4-x}$

$D(h\circ f)=\mathbb{R}-\{4\}$, ya que $x=1$ no está en el dominio de $h(x)$, y se busca el valor de x que debe tomar la función $f(x)$ para no estar definida en el dominio de $h(x)$: $f(x)=1$, es decir $x=4$.

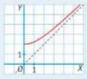
El resto de valores de $f(x)$ están definidos dentro del dominio de $h(x)$.

La composición de funciones no es una operación conmutativa, ya que:

$$(f\circ h)(x)\neq(h\circ f)(x)$$
$$\frac{-3+4x}{1-x}\neq\frac{x-3}{4-x}$$

Actividades clave

3. Se considera la función $k(x)=\sqrt{x^2+4}$ definida en $[0,+\infty)$.



a) Indica su recorrido.

b) ¿Es una función inyectiva? En caso afirmativo, calcula su función inversa.

c) A partir de la gráfica de $k(x)$, dibuja la gráfica de $k^{-1}(x)$.

a) El recorrido de la función es $R(f)=[2,+\infty)$.

b) Es inyectiva, ya que para cada valor de la variable y hay un único valor de la variable x.

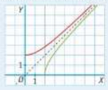
Para calcular la función inversa, se despeja la x en la fórmula de la función:

$$y=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow y^2=\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2\Rightarrow y^2=x^2+4\Rightarrow x^2=y^2-4\Rightarrow x=\sqrt{y^2-4}$$

A continuación, se intercambia el nombre de las variables:

$$y=\sqrt{x^2-4}\Rightarrow k^{-1}(x)=\sqrt{x^2-4}$$

c) Las gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto de la recta $y=x$.



4. Se considera la siguiente función definida a trozos.

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si} \quad -4<x\le-1\\ x^2 & \text{si} \quad -1<x<2\\ 8-x & \text{si} \quad 4\le x\le 8\end{cases}$$

a) ¿Cuál es su dominio?

b) Calcula $f(6)$, $f(1{,}8)$, $f(-1)$, $f(-3)$.

c) Representa gráficamente la función.

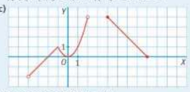
d) ¿Cuál es su recorrido?

a) $D(f)=(-4,2)\cup[4,8]$

b) $f(6)=8-6=2$ $\quad f(-1)=-1+2=1$

$f(1{,}8)=(1{,}8)^2=3{,}24$ $\quad f(-3)=-3+2=-1$

c)



d) Su recorrido es $R(f)=(-2,4]$.

5. Se considera la función $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-2}$.

a) ¿Cuál es su dominio?

b) Calcula los puntos de corte y el signo de la función.

c) Estudia si es creciente o decreciente en los intervalos que determina el dominio.

d) ¿Tiene simetría par o impar?

a) La función no está definida para aquellos valores de x que anulen al denominador. Como $x-2=0$ para $x=2$, $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

b) Para hallar el punto de corte con el eje Y, se calcula $f(0)$: $f(0)=\dfrac{4}{-2}=-2$

El punto de corte con el eje Y es $(0,-2)$.

Para hallar el punto de corte con el eje X, se resuelve la ecuación $f(x)=0$:

$\dfrac{2x+4}{x-2}=0\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2$. El punto de corte con el eje X es $(-2,0)$.

Se estudia el signo en los intervalos formados con los puntos del dominio y los puntos de corte con el eje X:

$(-\infty,-2)$: $f(-3)=\dfrac{-6+4}{-3-2}=\dfrac{-2}{-5}>0\Rightarrow$ La función es positiva en $(-\infty,-2)$.

$(-2,2)$: $f(0)=\dfrac{4}{-2}=-2<0\Rightarrow$ La función es negativa en $(-2,2)$.

$(2,+\infty)$: $f(3)=\dfrac{6+4}{3-2}=\dfrac{10}{1}>0\Rightarrow$ La función es positiva en $(2,+\infty)$.

c) Se calcula la tasa de variación media entre dos valores cualesquiera de cada intervalo.

$(-\infty,2)$: $TVM\ f[-6,0]=\dfrac{f(0)-f(-6)}{0-(-6)}=\dfrac{-2-1}{6}=\dfrac{-3}{6}<0\Rightarrow$ La función decrece en $(-\infty,-2)$.

$(2,+\infty)$: $TVM\ f[3,10]=\dfrac{f(10)-f(3)}{10-3}=\dfrac{3-10}{7}=-1<0\Rightarrow$ La función decrece en $(2,+\infty)$.

d) Se estudia la simetría: $f(-x)=\dfrac{2(-x)+4}{(-x)-2}=\dfrac{-2x+4}{-x-2}\Rightarrow\begin{cases}f(-x)\neq f(x)\\ f(-x)\neq -f(x)\end{cases}\Rightarrow$ No es simétrica.

Actividades

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Correspondencia y funciones

51. **De las siguientes correspondencias entre dos conjuntos, indica cuáles son funciones y los conjuntos inicial y final.**

a) A cada coche le corresponde su matrícula.

b) A cada alumno de una clase, el año en que nació.

c) A cada cuadrado perfecto, su raíz cuadrada.

d) A cada triángulo rectángulo, el valor de su hipotenusa.

52. **De las correspondencias del ejercicio anterior señala las que son inyectivas y justifícalo.**

53. **Expresa mediante una expresión o una fórmula las correspondencias siguientes.**

a) A cada número real positivo x, la longitud de la diagonal del cuadrado de lado x.

b) A cada número x, su distancia al número 5.

c) A cada número x, el inverso de $x+1$.

54. **Relaciona en tu cuaderno las tablas de valores con la función a la que corresponden.**

A.

x	0	1	2
y	0	1	2

B.

x	0	1	2
y	0	1	4

C.

x	0	1	3
y	0	1	9

I. $f(x)=x$

II. $g(x)=x^2$

III. $h(x)=x^3-3x^2+3x$

¿Alguna de las tablas corresponde a más de una función?

55. **Completa la tabla correspondiente a la función:**

$$f(x)=\begin{cases}4x-x^2 & \text{si } x<3\\ 2x-1 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$$

x	-3	-1	3	4,5	6	●
y	●	●	●	●	●	4

¿Puedes justificar que la función no es inyectiva?

56. **Determina el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=x+3$

b) $g(x)=4x-x^2$

c) $h(x)=3-\sqrt{x+1}$

d) $i(x)=\dfrac{3}{x+1}$

e) $j(x)=\dfrac{5}{x^2+9}$

f) $k(x)=\dfrac{2x}{x-2}$

57. **Halla el dominio de las funciones.**

a) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+4x-3}$

b) $y=\sqrt[3]{x+1}$

c) $y=\dfrac{x+1}{x^3+8}$

d) $y=\sqrt{(3-x)(x+4)}$

e) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

f) $y=\sqrt{3-|x|}$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

58. **Halla el recorrido de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=\dfrac{7}{x^2+1}$ $\qquad$ b) $g(x)=\sqrt{x+1}$

a) Como $\dfrac{7}{x^2+1}>0$ para cualquier valor de x y el mayor valor se alcanza cuando el denominador es lo más pequeño posible, es decir, para $x=0$, resulta que:

$$0<\frac{7}{x^2+1}\le 7\Rightarrow R(f)=(0,7]$$

b) Solo se considera la raíz positiva, por lo que el recorrido es:

$$R(g)=[0,+\infty)$$

59. **Halla el recorrido de las funciones.**

a) $y=5-2x$, con $-2\le x<3$

b) $y=6x-x^2$, con $-1<x\le 3$

c) $y=8-\sqrt{9-x^2}$

d) $y=\dfrac{3}{x^2+3}$

60. **Se considera la función $f(x)=|4-x^2|$ definida en el intervalo $[-3,3]$. Exprésala a trozos.**

Operaciones con funciones. Composición

61. **Dadas las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\dfrac{5}{x-4}$ calcula:**

a) $(f+g)(1)$

b) $(f\cdot g)(1)$

c) $(f-2g)(-5)$

d) $(f\circ g)(-1)$

e) $[(f+g)\circ f]\left(\dfrac{2}{3}\right)$

f) $(g\circ f)(2)$

62. **Con las funciones $f(x)=x$, $g(x)=3$ y $h(x)=\dfrac{1}{x}$ obtén la expresión de las siguientes funciones.**

a) $(f\cdot h)(x)$

b) $[(f+g)\cdot h](x)$

c) $(f\cdot f+g)(x)$

d) $(g\circ h)(x)$

e) $(h\circ h)(x)$

f) $(h\circ g)(x)$

63. **Si $(f+g)(x)=x+2$ y $(f-g)(x)=5x-12$:**

a) Determina las expresiones de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b) Representa gráficamente las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $(f+g)(x)$.

64. **Expresa la función $h(x)=2x^2-3x+1$ como producto de dos funciones polinómicas $f(x)$ y $g(x)$ de primer grado.**

¿Puedes encontrar más de una solución para estas funciones?

65. **Calcula la expresión algebraica de la función $(f\cdot g)$ en donde $f(x)=\dfrac{5}{x-1}$ y $g(x)=x^2-1$. ¿Cuál es su dominio?**

66. **Si $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,4]$ y $g(x)=x^2-5x$, halla el dominio de:**

a) $(f+g)$ $\quad$ b) $(f\cdot g)$ $\quad$ c) $\dfrac{f}{g}$ $\quad$ d) $\dfrac{g}{f}$

67. **Sean las funciones $f(x)=x+3$, $g(x)=x^2-2$ y $h(x)=\dfrac{1}{x}$. Calcula:**

a) $(g\circ h)(x)$

b) $[f\circ(g\circ h)](x)$

c) $(f\circ g)(x)$

d) $[(f\circ g)\circ h](x)$

e) $(h\circ g)(x)$

f) $[(h\circ g)\circ f](x)$

g) $(g\circ f)(x)$

h) $[h\circ(g\circ f)](x)$

A la vista de los resultados anteriores, ¿se puede afirmar que la composición de funciones tiene la propiedad asociativa?

68. **Se consideran las funciones $f(x)=\dfrac{4x-3}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x+3}{4-x}$. Calcula, si es posible:**

a) $f(0)$

b) $g[f(0)]$

c) $f(2)$

d) $g[f(2)]$

e) $f(-1)$

f) $g[f(-1)]$

g) $f(5)$

h) $g[f(5)]$

i) $f(-5)$

j) $g[f(-5)]$

k) $f(4)$

l) $g[f(4)]$

69. **Con los datos y los resultados obtenidos en los apartados del ejercicio anterior:**

a) ¿Qué puedes afirmar de las funciones f y g?

b) ¿Cuál es el dominio de la función $g\circ f$?

c) ¿Cuál es el dominio de la función $f\circ g$?

ACTIVIDAD **RESUELTA**

70. **La función $k(x)=\sqrt{x^2+4}$ se obtiene mediante la composición de dos funciones, es decir, $k(x)=(f\circ g)(x)$. Indica cuáles pueden ser esas funciones y calcula $(g\circ f)(x)$.**

Para que al componer dos funciones se obtenga $k(x)$, una posibilidad es que una función sea la raíz y la otra el radicando:

$$\begin{cases}f(x)=\sqrt{x}\\ g(x)=x^2+4\end{cases}\Rightarrow k(x)=f[g(x)]=\sqrt{x^2+4}$$

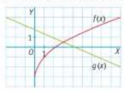
Se calcula $(g\circ f)(x)$:

$$\begin{cases}f(x)=\sqrt{x}\\ g(x)=x^2+4\end{cases}\Rightarrow g[f(x)]=\left(\sqrt{x}\right)^2+4=x+4$$

71. **Si $h(x)=\sqrt{2x+3}$ es la función compuesta $(f\circ g)(x)$ de $f(x)$ y $g(x)$, ¿cuáles pueden ser esas funciones?**

Calcula en ese caso la función $(g\circ f)(x)$.

72. **Las gráficas siguientes corresponden a dos funciones $f(x)$ y $g(x)$.**



Representa de forma aproximada en tu cuaderno las gráficas de las funciones:

a) $(-f)$ $\quad$ b) $2g$ $\quad$ c) $f+g$

Función inversa

73. **Las siguientes tablas de valores corresponden a dos funciones cuyo dominio es $[0,10]$. Una de ellas tiene función inversa, y la otra, no.**

I.

x	1	3	4	4,5	6	10
y	10	5	1	0	-3	-10

II.

x	1	3	4	4,5	6	10
y	1	5	6	6,2	7	6

a) Indica, justificando la respuesta, cuál de ellas no tiene función inversa.

b) Escribe una tabla de valores correspondiente a la función inversa de la otra función.

74. **Comprueba, mediante una tabla de valores, que las funciones $f(x)=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$ y $g(x)=\dfrac{4x+2}{3}$ son inversas la una de la otra.**

a) Represéntalas gráficamente en los mismos ejes de coordenadas.

b) ¿Qué simetría observas entre ambas gráficas?

c) ¿En qué punto se cortan las gráficas?

d) ¿Por qué crees que ese punto de corte tiene sus dos coordenadas iguales?

ACTIVIDAD **RESUELTA**

75. **Determina de manera intuitiva y razonada cuál es la función inversa de $f(x)=\dfrac{x-2}{3}$.**

Al aplicar f a un valor de x primero se resta 2 y luego se divide el resultado entre 3.

Al aplicar la función inversa se deshace lo hecho por f, es decir:

- En primer lugar, se multiplica por 3.
- En segundo lugar, se suma 2.

De esta forma se obtiene la función inversa.

$$f^{-1}(x)=3x+2$$

Este método solamente es aplicable para funciones sencillas.

76. **En los ejercicios siguientes determina la función inversa de $f(x)$ de manera intuitiva e informal. Confirma después que $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$.**

a) $f(x)=5x$

b) $f(x)=x-7$

c) $f(x)=6-3x$

d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

e) $f(x)=\dfrac{x-5}{3}$

f) $f(x)=x^3+7$

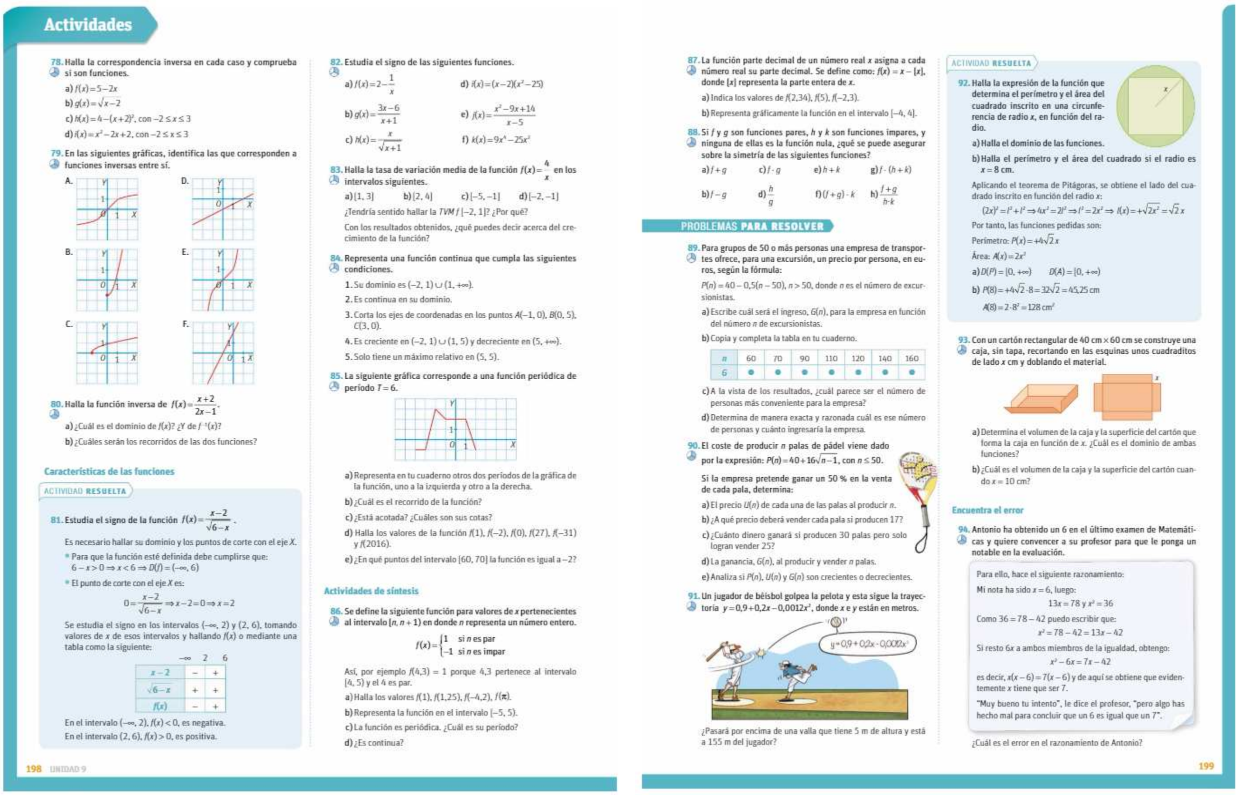
77. **Verifica en cada caso si f y g son funciones inversas la una de la otra.**

a) $f(x)=\dfrac{5x+1}{x-1}$ $\qquad g(x)=\dfrac{x-1}{x+5}$

b) $f(x)=\sqrt{x-4}$ $\qquad g(x)=x^2+4,\ x\ge 0$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\ x\ge 0$ $\qquad g(x)=\dfrac{1-x}{x},\ 0<x\le 1$

Ampliación del concepto de función en 4º ESO



Actividades

78. Halla la correspondencia inversa en cada caso y comprueba si son funciones.

a) $f(x)=5-2x$

b) $g(x)=\sqrt{x-2}$

c) $h(x)=4-(x+2)^2$, con $-2\le x\le 3$

d) $i(x)=x^2-2x+2$, con $-2\le x\le 3$

79. En las siguientes gráficas, identifica las que corresponden a funciones inversas entre sí.

A. B. C. D. E. F.

80. Halla la función inversa de $f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$.

a) ¿Cuál es el dominio de $f(x)$? ¿Y de $f^{-1}(x)$?

b) ¿Cuáles serán los recorridos de las dos funciones?

Características de las funciones

ACTIVIDAD RESUELTA

81. Estudia el signo de la función $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{6-x}}$.

Es necesario hallar su dominio y los puntos de corte con el eje X.

- Para que la función esté definida debe cumplirse que: $6-x>0\Rightarrow x<6\Rightarrow D(f)=(-\infty,6)$
- El punto de corte con el eje X es: $0=\frac{x-2}{\sqrt{6-x}}\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$

Se estudia el signo en los intervalos $(-\infty,2)$ y $(2,6)$, tomando valores de x de esos intervalos y hallando $f(x)$ o mediante una tabla como la siguiente:

	$-\infty$ 2	6
$x-2$	−	+
$\sqrt{6-x}$	+	+
$f(x)$	−	+

En el intervalo $(-\infty,2)$, $f(x)<0$, es negativa.
En el intervalo $(2,6)$, $f(x)>0$, es positiva.

82. Estudia el signo de las siguientes funciones.

a) $f(x)=2-\frac{1}{x}$

b) $g(x)=\frac{3x-6}{x+1}$

c) $h(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

d) $i(x)=(x-2)(x^2-25)$

e) $j(x)=\frac{x^2-9x+14}{x-5}$

f) $k(x)=9x^4-25x^2$

83. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=\frac{4}{x}$ en los intervalos siguientes.

a) $[1,3]$ b) $[2,4]$ c) $[-5,-1]$ d) $[-2,-1]$

¿Tendría sentido hallar la $TVM\,f\,[-2,1]$? ¿Por qué?

Con los resultados obtenidos, ¿qué puedes decir acerca del crecimiento de la función?

84. Representa una función continua que cumpla las siguientes condiciones.

1. Su dominio es $(-2,1)\cup(1,+\infty)$.
2. Es continua en su dominio.
3. Corta los ejes de coordenadas en los puntos $A(-1,0)$, $B(0,5)$, $C(3,0)$.
4. Es creciente en $(-2,1)\cup(1,5)$ y decreciente en $(5,+\infty)$.
5. Solo tiene un máximo relativo en $(5,5)$.

85. La siguiente gráfica corresponde a una función periódica de período $T=6$.

a) Representa en tu cuaderno otros dos períodos de la gráfica de la función, uno a la izquierda y otro a la derecha.

b) ¿Cuál es el recorrido de la función?

c) ¿Está acotada? ¿Cuáles son sus cotas?

d) Halla los valores de la función $f(1)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(27)$, $f(-31)$ y $f(2016)$.

e) ¿En qué puntos del intervalo $[60,70]$ la función es igual a -2?

Actividades de síntesis

86. Se define la siguiente función para valores de x pertenecientes al intervalo $[n,n+1)$ en donde n representa un número entero.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ es par}\\ -1 & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

Así, por ejemplo $f(4,3)=1$ porque 4,3 pertenece al intervalo $[4,5)$ y el 4 es par.

a) Halla los valores $f(1)$, $f(1,25)$, $f(-4,2)$, $f(\pi)$.

b) Representa la función en el intervalo $[-5,5)$.

c) La función es periódica. ¿Cuál es su período?

d) ¿Es continua?

87. La función parte decimal de un número real x asigna a cada número real su parte decimal. Se define como: $f(x)=x-[x]$, donde $[x]$ representa la parte entera de x.

a) Indica los valores de $f(2,34)$, $f(5)$, $f(-2,3)$.

b) Representa gráficamente la función en el intervalo $[-4,4]$.

88. Si f y g son funciones pares, h y k son funciones impares, y ninguna de ellas es la función nula, ¿qué se puede asegurar sobre la simetría de las siguientes funciones?

a) $f+g$ c) $f\cdot g$ e) $h+k$ g) $f\cdot(h+k)$

b) $f-g$ d) $\frac{h}{g}$ f) $(f+g)\cdot k$ h) $\frac{f+g}{h\cdot k}$

PROBLEMAS PARA RESOLVER

89. Para grupos de 50 o más personas una empresa de transportes ofrece, para una excursión, un precio por persona, en euros, según la fórmula:

$P(n)=40-0,5(n-50)$, $n>50$, donde n es el número de excursionistas.

a) Escribe cuál será el ingreso, $G(n)$, para la empresa en función del número n de excursionistas.

b) Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

n	60	70	90	110	120	140	160
G	•	•	•	•	•	•	•

c) A la vista de los resultados, ¿cuál parece ser el número de personas más conveniente para la empresa?

d) Determina de manera exacta y razonada cuál es ese número de personas y cuánto ingresaría la empresa.

90. El coste de producir n palas de pádel viene dado por la expresión: $P(n)=40+16\sqrt{n-1}$, con $n\le 50$.

Si la empresa pretende ganar un 50 % en la venta de cada pala, determina:

a) El precio $U(n)$ de cada una de las palas al producir n.

b) ¿A qué precio deberá vender cada pala si producen 17?

c) ¿Cuánto dinero ganará si producen 30 palas pero solo logran vender 25?

d) La ganancia, $G(n)$, al producir y vender n palas.

e) Analiza si $P(n)$, $U(n)$ y $G(n)$ son crecientes o decrecientes.

91. Un jugador de béisbol golpea la pelota y esta sigue la trayectoria $y=0,9+0,2x-0,0012x^2$, donde x e y están en metros.

$y=0,9+0,2x-0,0012x^2$

¿Pasará por encima de una valla que tiene 5 m de altura y está a 155 m del jugador?

ACTIVIDAD RESUELTA

92. Halla la expresión de la función que determina el perímetro y el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de radio x, en función del radio.

a) Halla el dominio de las funciones.

b) Halla el perímetro y el área del cuadrado si el radio es $x=8$ cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene el lado del cuadrado inscrito en función del radio x:

$(2x)^2=l^2+l^2\Rightarrow 4x^2=2l^2\Rightarrow l^2=2x^2\Rightarrow f(x)=+\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\,x$

Por tanto, las funciones pedidas son:

Perímetro: $P(x)=+4\sqrt{2}\,x$

Área: $A(x)=2x^2$

a) $D(P)=[0,+\infty)$ $D(A)=[0,+\infty)$

b) $P(8)=+4\sqrt{2}\cdot 8=32\sqrt{2}=45,25$ cm

$A(8)=2\cdot 8^2=128$ cm²

93. Con un cartón rectangular de 40 cm × 60 cm se construye una caja, sin tapa, recortando en las esquinas unos cuadraditos de lado x cm y doblando el material.

a) Determina el volumen de la caja y la superficie del cartón que forma la caja en función de x. ¿Cuál es el dominio de ambas funciones?

b) ¿Cuál es el volumen de la caja y la superficie del cartón cuando $x=10$ cm?

Encuentra el error

94. Antonio ha obtenido un 6 en el último examen de Matemáticas y quiere convencer a su profesor para que le ponga un notable en la evaluación.

Para ello, hace el siguiente razonamiento:

Mi nota ha sido $x=6$, luego: $13x=78$ y $x^2=36$

Como $36=78-42$ puedo escribir que: $x^2=78-42=13x-42$

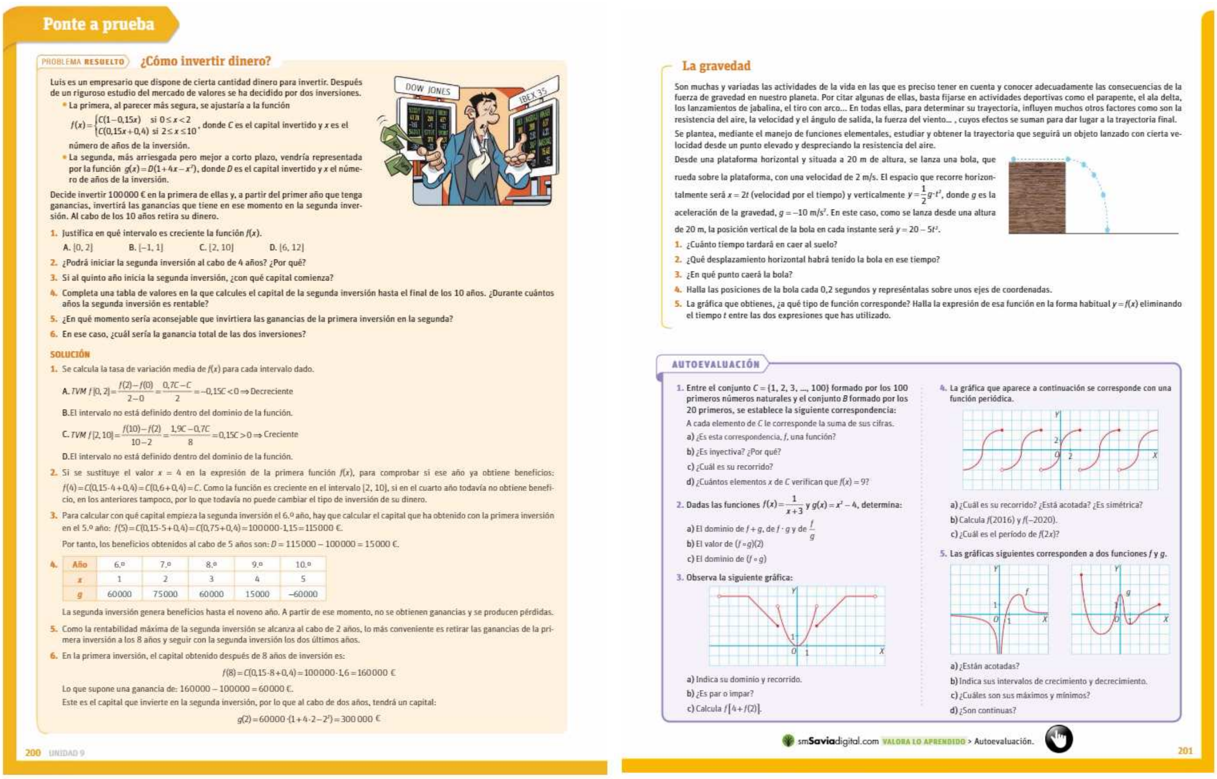
Si resto $6x$ a ambos miembros de la igualdad, obtengo: $x^2-6x=7x-42$

es decir, $x(x-6)=7(x-6)$ y de aquí se obtiene que evidentemente x tiene que ser 7.

"Muy bueno tu intento", le dice el profesor, "pero algo has hecho mal para concluir que un 6 es igual que un 7".

¿Cuál es el error en el razonamiento de Antonio?

198 UNIDAD 9 — 199



Ponte a prueba

PROBLEMA RESUELTO **¿Cómo invertir dinero?**

Luis es un empresario que dispone de cierta cantidad de dinero para invertir. Después de un riguroso estudio del mercado de valores se ha decidido por dos inversiones.

- La primera, al parecer más segura, se ajustaría a la función $f(x)=\begin{cases}C(1-0,15x) & \text{si } 0\le x<2\\ C(0,15x+0,4) & \text{si } 2\le x\le 10\end{cases}$, donde C es el capital invertido y x es el número de años de la inversión.
- La segunda, más arriesgada pero mejor a corto plazo, vendría representada por la función $g(x)=D(1+4x-x^2)$, donde D es el capital invertido y x el número de años de la inversión.

Decide invertir 100 000 € en la primera de ellas y, a partir del primer año que tenga ganancias, invertirá las ganancias que tiene en ese momento en la segunda inversión. Al cabo de los 10 años retira su dinero.

1. Justifica en qué intervalo es creciente la función $f(x)$.
   A. $[0,2]$ B. $[-1,1]$ C. $[2,10]$ D. $[6,12]$
2. ¿Podrá iniciar la segunda inversión al cabo de 4 años? ¿Por qué?
3. Si al quinto año inicia la segunda inversión, ¿con qué capital comienza?
4. Completa una tabla de valores en la que calcules el capital de la segunda inversión hasta el final de los 10 años. ¿Durante cuántos años la segunda inversión es rentable?
5. ¿En qué momento sería aconsejable que invirtiera las ganancias de la primera inversión en la segunda?
6. En ese caso, ¿cuál sería la ganancia total de las dos inversiones?

SOLUCIÓN

1. Se calcula la tasa de variación media de $f(x)$ para cada intervalo dado.

A. $TVM\,f\,[0,2]=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{0,7C-C}{2}=-0,15C<0\Rightarrow$ Decreciente

B. El intervalo no está definido dentro del dominio de la función.

C. $TVM\,f\,[2,10]=\frac{f(10)-f(2)}{10-2}=\frac{1,9C-0,7C}{8}=0,15C>0\Rightarrow$ Creciente

D. El intervalo no está definido dentro del dominio de la función.

2. Si se sustituye el valor $x=4$ en la expresión de la primera función $f(x)$, para comprobar si ese año ya obtiene beneficios: $f(4)=C(0,15\cdot4+0,4)=C(0,6+0,4)=C$. Como la función es creciente en el intervalo $[2,10]$, si en el cuarto año todavía no obtiene beneficio, en los anteriores tampoco, por lo que todavía no puede cambiar el tipo de inversión de su dinero.

3. Para calcular con qué capital empieza la segunda inversión el 6.º año, hay que calcular el capital que ha obtenido con la primera inversión en el 5.º año: $f(5)=C(0,15\cdot5+0,4)=C(0,75+0,4)=100\,000\cdot1,15=115\,000$ €.

Por tanto, los beneficios obtenidos al cabo de 5 años son: $D=115\,000-100\,000=15\,000$ €.

4.

Año	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º
x	1	2	3	4	5
g	60000	75000	60000	15000	−60000

La segunda inversión genera beneficios hasta el noveno año. A partir de ese momento, no se obtienen ganancias y se producen pérdidas.

5. Como la rentabilidad máxima de la segunda inversión se alcanza al cabo de 2 años, lo más conveniente es retirar las ganancias de la primera inversión a los 8 años y seguir con la segunda inversión los dos últimos años.

6. En la primera inversión, el capital obtenido después de 8 años de inversión es:

$f(8)=C(0,15\cdot8+0,4)=100\,000\cdot1,6=160\,000$ €

Lo que supone una ganancia de: $160\,000-100\,000=60\,000$ €.

Este es el capital que invierte en la segunda inversión, por lo que al cabo de dos años, tendrá un capital:

$g(2)=60\,000\cdot(1+4\cdot2-2^2)=300\,000$ €

La gravedad

Son muchas y variadas las actividades de la vida en las que es preciso tener en cuenta y conocer adecuadamente las consecuencias de la fuerza de gravedad en nuestro planeta. Por citar algunas de ellas, basta fijarse en actividades deportivas como el parapente, el ala delta, los lanzamientos de jabalina, el tiro con arco… En todas ellas, para determinar su trayectoria, influyen muchos otros factores como son la resistencia del aire, la velocidad y el ángulo de salida, la fuerza del viento… , cuyos efectos se suman para dar lugar a la trayectoria final.

Se plantea, mediante el manejo de funciones elementales, estudiar y obtener la trayectoria que seguirá un objeto lanzado con cierta velocidad desde un punto elevado y despreciando la resistencia del aire.

Desde una plataforma horizontal y situada a 20 m de altura, se lanza una bola, que rueda sobre la plataforma, con una velocidad de 2 m/s. El espacio que recorre horizontalmente será $x=2t$ (velocidad por el tiempo) y verticalmente $y=\frac{1}{2}g\cdot t^2$, donde g es la aceleración de la gravedad, $g=-10$ m/s². En este caso, como se lanza desde una altura de 20 m, la posición vertical de la bola en cada instante será $y=20-5t^2$.

1. ¿Cuánto tiempo tardará en caer al suelo?
2. ¿Qué desplazamiento horizontal habrá tenido la bola en ese tiempo?
3. ¿En qué punto caerá la bola?
4. Halla las posiciones de la bola cada 0,2 segundos y represéntalas sobre unos ejes de coordenadas.
5. La gráfica que obtienes, ¿a qué tipo de función corresponde? Halla la expresión de esa función en la forma habitual $y=f(x)$ eliminando el tiempo t entre las dos expresiones que has utilizado.

AUTOEVALUACIÓN

1. Entre el conjunto $C=\{1,2,3,\ldots,100\}$ formado por los 100 primeros números naturales y el conjunto B formado por los 20 primeros, se establece la siguiente correspondencia:
   A cada elemento de C le corresponde la suma de sus cifras.
   a) ¿Es esta correspondencia, f, una función?
   b) ¿Es inyectiva? ¿Por qué?
   c) ¿Cuál es su recorrido?
   d) ¿Cuántos elementos x de C verifican que $f(x)=9$?
2. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x+3}$ y $g(x)=x^2-4$, determina:
   a) El dominio de $f+g$, de $f\cdot g$ y de $\frac{f}{g}$
   b) El valor de $(f\circ g)(2)$
   c) El dominio de $(f\circ g)$
3. Observa la siguiente gráfica:
   a) Indica su dominio y recorrido.
   b) ¿Es par o impar?
   c) Calcula $f[4+f(2)]$.
4. La gráfica que aparece a continuación se corresponde con una función periódica.
   a) ¿Cuál es su recorrido? ¿Está acotada? ¿Es simétrica?
   b) Calcula $f(2016)$ y $f(-2020)$.
   c) ¿Cuál es el período de $f(2x)$?
5. Las gráficas siguientes corresponden a dos funciones f y g.
   a) ¿Están acotadas?
   b) Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   c) ¿Cuáles son sus máximos y mínimos?
   d) ¿Son continuas?

smSaviadigital.com VALORA LO APRENDIDO > Autoevaluación.

200 UNIDAD 9 — 201

Anexos II

Nombre y Apellidos:………………………………………………………………………

Ejercicio 1. Recorre la función moviendo el punto P con ayuda del deslizador, y encuentra los puntos ocultos. Rellena la tabla con las coordenadas de dichos puntos.

Coordenadas (x, f(x))
(,   )
(,   )
(,   )
(,   )
(,   )
(,   )
(,   )

Describe con tus palabras qué tienen en común todos los puntos, tanto gráficamente como analizando los valores de las coordenadas (x, f(x)).

Mueve el punto P alrededor de cualquier de los puntos ocultos de color rojo. ¿Qué ocurre con el valor de f(x) a la izquierda y a la derecha de dicho punto?

Para terminar, haz click en la casilla de control y lee el texto.

Ejercicio 2. Recorre la función moviendo el punto P con ayuda del deslizador, y rellena la siguiente tabla con varios valores de las coordenadas (x, f(x)) en los intervalos que se indican.

(x, f(x)) entre A y B	**(x, f(x)) entre D y E**
(,)	(,)
(,)	(,)
(,)	(,)
(,)	(,)
(,)	(,)

Describe con tus propias palabras cómo es la gráfica en el intervalo A-B, y cómo es en el intervalo D-E.

Rellena ahora la siguiente tabla con los valores de (x, f(x)) que se indican.

	(x, f(x)) alrededor de C	**(x, f(x)) alrededor de D**
Coordenadas a la izquierda del punto	(,)	(,)
	(,)	(,)
Coordenadas en el punto	(,)	(,)
Coordenadas a la derecha del punto	(,)	(,)
	(,)	(,)

Si has completado la tabla, ya tienes una serie de valores de (x, f(x)) en un intervalo de centro C. ¿Cómo es el valor de f(x) en el punto C respecto al resto de puntos del intervalo?

También has rellenado una serie de valores de (x, f(x)) en un intervalo de centro D. ¿Cómo es el valor de f(x) en el punto D respecto al resto de puntos del intervalo?

Para terminar, haz click en la casilla de control y lee el texto.

Ejercicio 3. Se presentan en pantalla las gráficas de dos funciones, las cuales puedes recorrer con ayuda de los deslizadores.

a) Relaciona la gráfica de cada función (f(x) y g(x)) con su fórmula o expresión general.

$-0.3x + 2$

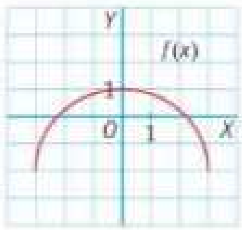
$x^2 - 3x + 1$

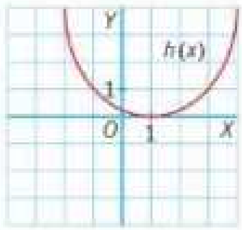
b) Anota, para cada función, las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

c) Describe, utilizando la notación de intervalos, el signo y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada función.

Simetría de funciones

- Simetría respecto de una recta

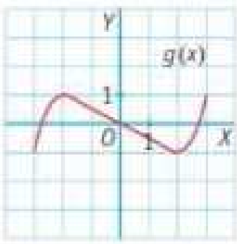


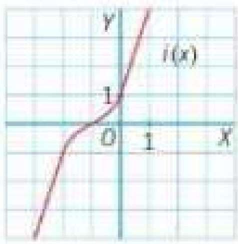


La primera parábola es simétrica respecto del eje Y, y la segunda es simétrica respecto de la recta vertical que pasa por x = 1.

Una recta o eje de simetría es aquella que hace de 'espejo' de la función, es decir, la divide en dos partes de forma que una de ellas es el reflejo de la otra.

- Simetría respecto de un punto

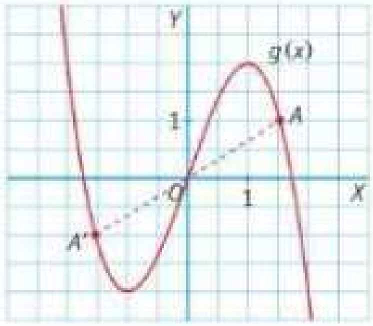




La primera función es simétrica respecto del origen (punto (0,0)), y la segunda es simétrica respecto del punto (-1,0).

Un centro de simetría divide una función en dos partes de forma que, si se gira 180º una de ellas respecto del mismo, se superpone con la otra parte.

Además, si se lanza una recta desde un punto cualquiera de la función, y dicha recta pasa por el centro de simetria, entonces ésta va a parar al punto simétrico.



Ejercicio 4. Las funciones que son simétricas respecto del eje Y o respecto del origen de coordenadas (0,0) cumplen unas propiedades muy especiales. Contesta a las siguientes preguntas moviendo los puntos F y G con ayuda de los deslizadores.

a) Busca **puntos que tengan el mismo valor de g(x)** a izquierda y derecha del eje Y, y rellena la siguiente tabla.

Izquierda eje Y		**Derecha eje Y**	
$g(x_1)$	x_1	$g(x_2)$	x_2

Descubre qué relación cumplen los valores de x y g(x) a ambos lados del eje Y.

b) Busca **puntos que cumplan que $g(x_1) = -g(x_2)$** a ambos lados del punto (0,0), y rellena la siguiente tabla.

Izquierda de (0,0)		**Derecha de (0,0)**	
$g(x_1)$	x_1	$g(x_2)$	x_2

Descubre qué relación cumplen los valores de x y g(x) a ambos lados del punto (0,0).

Ejercicio 5. Utilizando los deslizadores para explorar las funciones que aparecen en pantalla, contesta a las siguientes preguntas.

a) Asocia cada gráfica con su fórmula correspondiente

$$\frac{3}{x-1}$$

$5x^2 - 3x$

$\sqrt{4+x^2}$

b) Investiga y justifica respecto de qué punto o recta es simétrica cada función

Ejercicio 6. Una función periódica es aquella que se repite indefinidamente a lo largo del eje X. Consigue, manipulando los tres deslizadores, que los puntos P1 y P2 se muevan a la vez, manteniendo siempre la misma altura, es decir, el mismo valor del eje Y.

Si ya lo has conseguido, anota la distancia entre los dos puntos en el eje X:……………..

A esta distancia se le llama **periodo** (T). En las funciones periódicas, dos puntos del eje X separados por una distancia T o múltiplo de T, tienen el mismo valor de f(x) (mismo valor en el eje Y).

Completa la tabla con varios puntos que cumplan esta propiedad.

f(x)	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$

Ejercicio 7. Observa la función que tienes en pantalla, ¿es una función periódica? Justifica tu respuesta.

El punto P sólo puede moverse en un intervalo limitado. Utilízalo para obtener los siguientes valores de la función.

f(11) =

f(13) =

f(15) =

f(17) =

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
Esteban Induráin Eraso, Departamento de Matemáticas