Maider MANCHO IROZ

ALJEBRA

EUSKARRI MATERIAL DESBERDINEN ERABILPENEAN OINARRITUTAKO EKUAZIO-SISTEMEI BURUZKO IKASKETA PROZESU BATEN ANALISIA 4.DBHn

MBL 2017

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

MATEMATIKA Arloa

UNIBERTSITATE MASTERRA BIGARREN HEZKUNTZAKO IRAKASLETZAN

Unibertsitate Masterra Bigarren Hezkuntzako Irakasletzan

Derrigorrezko Bigarren Hezkuntza, Batxilergoa, Lanbide Heziketa eta Hizkuntzen Irakaskuntza

Master Bukaerako Lana

Matematika Arloa

Euskarri material desberdinen erabilpenean oinarritutako ekuazio-sistemei buruzko ikasketa prozesu baten analisia 4.DBHn

Maider Mancho Iroz

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

AURKIBIDEA

Orrialdea

Sarrera orokorra **5**

I Atala: Ekuazio-sistemak indarrean dagoen curriculumean eta testu-liburuetan **7**

1. Ekuazio-sistemen edukiak indarrean dagoen curriculumean **11**

1.1. Edukiak DBHn 11

1.2. Edukiak Batxilergoan 13

2. Ekuazio-sistemen ebaluazio-irizpideak indarrean dagoen curriculumean **15**

2.1. Ebaluazio irizpideak DBHn 15

2.2. Ebaluazio irizpideak Batxilergoan 16

3. Ekuazio-sistemen ikaskuntzako estandar ebaluagarriak indarrean dagoen curriculumean **19**

3.1. Ikaskuntzako estandar ebaluagarriak DBHn 19

3.2. Ikaskuntzako estandar ebaluagarriak Batxilergoan 20

4. Ariketen, problemen eta galderen ereduak testu-liburuetan eta ekuazio-sistemekin duten lotura indarrean dagoen curriculumean **23**

4.1. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 2.DBHn 23

4.2. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 3.DBHn 26

4.3. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 4.DBHn 28

4.4. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 1.Batxilergoan 30

4.5. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 2.Batxilergoan 33

5. Emaitzak **37**

5.1. Gabeziak eta presentziak curriculumean eta testu-liburuetan 37

5.2. Testu-liburuen eta curriculumaren arteko koherentzia 41

II Atala: Ekuazio-sistemen ikasketa prozesu baten analisia 4.DBHn **43**

6. Ekuazio-sistemak erreferentziazko testu-liburuan **47**

6.1. Objektu matematikoak 47

6.2. Unitate Didaktikoaren analisi orokorra 49

6.3. Garrantzia duten beste aspektu batzuk 56

6.4. Baliabide materiala: GeoGebra 57

7. Unitate Didaktikoa lantzerakoan agertu daitezkeen zailtasunak eta aurreikusi daitezkeen akatsak **59**

7.1. Zailtasunak 59

7.2. Akatsak eta horien jatorri posiblea 60

Orrialdea

8. Ikasketa prozesua **63**

8.1. Klasean egin den denboraren banaketa 63

8.2. Planifikatu diren jarduera osagarriak 68

8.3. Zereginak: aurreikusitako ikaslearen jarduera autonomoa 79

9. Esperimentazioa **81**

9.1. Lagina 81

9.2. Aurreikusitako portaerak 83

9.3. Emaitzak 87

9.4. Emaitzen eztabaida 103

Sintesia, ondorioak eta galdera irekiak **109**

Taulen eta irudien aurkibideak **113**

Erreferentziak **117**

Eranskinak **119**

A. Testu-liburuko Unitate Didaktikoa 121

B. Jarduera osagarrien galdetegiak 139

B1. Aurre ebaluazioa 139

B2. Iltzeen jarduera 141

B3. Eraikuntza dinamikoak 145

B4. Azterketa 151

Sarrera orokorra

Master Bukaerako Lan honen helburu nagusia ondoko hau da: 4.DBHko ikasleek ekuazio-sistemen ebazpen metodoei buruz egindako ikasketa aztertzea.

Lana bi ataletan antolatu da. Lehenengoan, curriculumaren eta testu-liburuen luzetarako azterketa egiten da DBHn eta Batxilergoan, zehazturiko gaiaren inguruan.

Bigarrenean, ekuazio-sistemei buruzko ikasketa prozesu bat proposatzen da eta proposamen hori 4. DBHko ikasmailari dagokion ikasgela batean ezarri da, Masterreko Practicum II irakasgaiaren baitan. Ikasketa prozesu hori praktikak burutu diren zentroan erabilitako testu-liburuaren edukiei buruzko analisi sakon bat egin ostean planifikatu da. Esperimentazio horretatik lortu diren emaitzak *ad hoc* diseinaturiko galdetegi batzuetan oinarritzen dira, kontuan hartuz, halaber, baldintzapen instituzionalak.

Lanaren amaieran, aurkeztu egiten dira sintesia, zenbait ondorio eta etorkizunera begira egin diren zenbait galdera ireki.

I Atala:

Ekuazio-sistemak indarrean dagoen curriculumean eta testu-liburuetan

Master Bukaerako Lanaren lehenengo zati honetan, aztertu egiten da ekuazio-sistemen gaiari zer nolako tratamendua egiten zaion curriculumean eta testu-liburuetan DBHn eta Batxilergoan.

Analisia bost kapitulutan banatzen da. Lehenengo hiru kapituluetan, taula-formatuan aurkezten dira indarrean dagoen curriculumeko edukiak, ebaluazio irizpideak eta ikaskuntzako estandar ebaluagarriak ikasmailen arabera.

Laugarrenean, 4. DBHko testu-liburu batean azaltzen diren jardueren adibideak aurkezten dira (ariketak, problemak, galderak eta egoerak), aurreko bi ikasturteetako eta hurrengo bi ikasturteetako jarduerekin batera.

Behin bi iturri horietako (curriculuma eta testu-liburuak) edukiak konparatu ostean, analisi horren ondorioak bosgarren kapituluan aurkezten dira. Hemen, helburua izango da esku-liburuek indarrean dagoen curriculumarekiko duten koherentzia baloratzea, eta nabarmendu egingo dira analisirako gaia den ezagutza matematikoak horietan dituen gabeziak eta presentziak.

1 Kapitulua
Ekuazio-sistemen edukiak indarrean dagoen curriculumean

Kapitulu honetan indarrean dagoen DBHko (24/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) eta Batxilergoko (25/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) curriculumeko ekuazio-sistemekin erlazionatutako edukiak taula-formatuan aurkezten dira. Curriculumeko edukiak DBHko zenbait ikasmailetan eta Batxilergoan aztertu egin dira.

Taula guztiek egitura berdina mantentzen dute. Lehenengo zutabean, azterturiko ekuazio-sistemekin lotutako edukien adierazleak ageri dira, deskribatzaile izendatu zaielarik. Hurrengo zutabeetan, deskribatzaile bakoitzarekin erlazionatutako kurtso bakoitzeko edukiak txertatu dira. Taulako lekuren batean marra bat (___) agertuz gero, maila horretan deskribatzaile horri erreferentzia egiten dion edukirik ez dagoela adierazi nahi da. Taula batzuetan aldi berean bi kurtso aztertzen dira.

Indarrean dagoen curriculumeko ekuazio-sistemen edukien azterketa egiteko, honako deskribatzaileak ikertu dira: hizkuntza aljebraikoa, lehen mailako ekuazioak, ekuazio-sistemak, funtzio lineal eta afinak, aplikazio errealak, IKT-en (Informazio eta komunikazio teknologiak) erabilera eta matrizeak.

Curriculum ofizialak Matematiketako ikasgaia multzo desberdinetan banatzen du. Ekuazio-sistemekin lotura zuzena duten bi multzoak aztertu dira, *Zenbakiak eta aljebra* eta *Funtzioak* (edo *Analisia* Batxilergoan).

Esperimentazioa DBHko modalitate aplikatutako 4. mailan egin denez, curriculumaren azterketa aurreko eta hurrengo bi kurtsoetakoa egin da, *Matematika* 2.DBHn, *Ikasketa Aplikatuetara Bideratutako Matematika* 3. eta 4.DBHn eta *Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika I eta II* Batxilergoan aztertu direlarik. Kapitulua bi azpiataletan banatu da, alde batetik, DBHko edukiak aztertu dira, eta bestetik, Batxilergokoak.

1.1. Edukiak DBHn

Lehen zikloa

Deskribatzailea	2. DBHko edukiak	3. DBHko edukiak
D1: Hizkuntza aljebraikoa	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Egoera errealak irudikatzen dituzten eguneroko hizkuntzako adierazpenak hizkuntza aljebraikora itzultzea eta alderantziz.	___
D2: Lehen mailako ekuazioak	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Eragiketak adierazpen aljebraiko errazekin. Transformazioa eta baliokidetasunak. Identitateak. Polinomioekin egindako eragiketak kasu errazetan. – Ezezagun bateko lehen mailako ekuazioak (metodo aljebraikoa eta grafikoa) . Ebazpena. Soluzioak interpretatzea. Soluziorik gabeko ekuazioak. Problemak ebaztea.	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Indeterminatu bateko adierazpen aljebraikoen transformazioa. Berdintasun nabarmenak.

D3: Ekuazio-sistemak	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Bi ezezaguneko bi ekuazio linealek osatutako sistemak. Ebazteko metodo aljebraikoa eta metodo grafikoa. Problemak ebaztea.	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Problemak ebaztea ekuazioak eta sistemak erabiliz.
D4: Funtzio linealak eta afinak	*4. Multzoa. Funtzioak* – Funtzio linealak. Zuzenaren malda kalkulatzea, interpretatzea eta identifikatzea. Zuzena irudikatzea ekuaziotik abiatuta, eta ekuazioa lortzea zuzenetik abiatuta.	*4. Multzoa. Funtzioak* – Zuzenaren ekuazioaren adierazpenak.
D5: Aplikazio errealak	*D2 eta D3 deskribatzaileetan lantzen da.	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* *D3 deskribatzailean jarritako eduki bera. *4. Multzoa. Funtzioak* – Eredu linealak erabiltzea hainbat jakintza-arlotan eta eguneroko bizitzan gertatzen diren egoerak aztertzeko. Horretarako, taula egitea, adierazpide grafikoa egitea eta adierazpen aljebraikoa lortzea.
D6: IKT-en erabilera	*4. Multzoa. Funtzioak* – Kalkulagailu grafikoak eta ordenagailu-programak erabiltzea grafikoak egin eta interpretatzeko.	____
D7: Matrizeak	____	____

1. Taula: 2. eta 3. DBHko edukiak

Bigarren zikloa

Deskribatzailea	4. DBHko edukiak
D1: Hizkuntza aljebraikoa	___
D2: Lehen mailako ekuazioak	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* Bi ezezaguneko bi ekuazio linealeko sistemak eta ekuazioak ebaztea.
D3:Ekuazio-sistemak	*D2 deskribatzailean jarri den eduki bera.
D4: Funtzio linealak eta afinak	*D5 deskribatzailean jarri den bigarren edukian lantzen dira.
D5: Aplikazio errealak	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Ekuazio eta sistemen bidez eguneroko problemak ebaztea. *4. Multzoa. Funtzioak* – Enuntziatu, taula, grafiko edo adierazpen analitiko baten bidez deskribatutako fenomeno bat interpretatzea.
D6: IKTen erabilera	____
D7: Matrizeak	____

2. Taula: 4.DBHko edukiak

1.2. Edukiak Batxilergoan

Batxilergoa – Gizarte Zientziak

Deskribatzailea	1. Batxilergoko edukiak	2. Batxilergoko edukiak
D1: Hizkuntza aljebraikoa	____	____
D2: Lehen mailako ekuazioak	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Ekuazio linealak eta beraietara murrizten ahal direnak. Aplikazioak.	____
D3: Ekuazio-sistemak	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Bi ezezagun dituzten lehen eta bigarren mailako ekuazioen sistemak. Sailkapena. Aplikazioak. Interpretazio geometrikoa. – Hiru ezezagun dituzten ekuazio linealen sistemak: Gauss-en metodoa.	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Ekuazio linealetako sistema baten irudikapen matriziala: ekuazio linealetako sistemen eztabaida eta ebazpena (hiru ezezaguneko hiru ekuazio bitarte). Gauss-en metodoa. – Programazio lineal dimentsio bikoa. Eskualde bideragarria. Konponbide hoberenen determinazioa eta interpretazioa.
D4: Funtzio linealak eta afinak	*3. Multzoa. Analisia.* – Aldagai errealeko funtzio erreala. Funtzio baten adierazpena modu aljebraikoan, taulak edo grafikoak erabilirik. Funtzio baten ezaugarriak. – Aldagai errealeko funtzio errealen adierazpen analitiko eta grafikoen identifikazioa: polinomikoak, esponentziala eta logaritmikoa, balio absolutua, parte osoa, eta arrazional eta irrazional errazak, beren ezaugarrietatik abiatuta. Zatika definitutako funtzioak.	*3. Multzoa. Analisia.* – Funtzio polinomiko, arrazional, irrazional, esponentzial eta logaritmiko errazen ikaskuntza eta irudikapen grafikoa, haien lokal eta globaletatik abiatuta.
D5: Aplikazio errealak	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* *D2 eta D3 deskribatzaileetan lantzen da. *3. Multzoa. Analisia.* – Problemen ebazpena eta gizarte fenomeno eta fenomeno ekonomikoen interpretazioa, funtzioen bidez. – Interpolazio eta estrapolazio lineala. Problema errealei aplikatzea.	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Programazio linealaren aplikazioa problema sozial, ekonomiko eta demografikoen ebazpenera. *D7 deskribatzailean problemen ebazpenerako matrizeak erabiltzen dira.
D6: IKTen erabilera	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Baliabide teknologikoen erabilera, kalkulu finantzario eta merkataritzakoak egiteko.	____
D7: Matrizeak	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Gauss-en metodoa.	*2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.* – Gauss-en metodoa. 3 ordena bitarteko determinantea. – Matrizeen eragiketen eta haien propietateen aplikazioa testuinguru errealetako problemen ebazpenean.

3. Taula: Batxilergoko edukiak

2 Kapitulua

Ekuazio-sistemen ebaluazio-irizpideak indarrean dagoen curriculumean

Kapitulu honen helburua indarrean dagoen curriculumeko DBHko (24/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) eta Batxilergoko (25/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) ekuazio-sistemekin zerikusia duten ebaluazio-irizpideak aztertzea da. Aurreko kapituluko deskribatzaile eta taulen egitura bera erabiltzen dira.

Ebaluazio-irizpideek eduki multzoei egiten diete erreferentzia, hori dela eta, ebaluazio-irizpide batek deskribatzaile bati baino gehiagori dagokio.

2.1. Ebaluazio irizpideak DBHn

Lehen zikloa

<table>
<tr><th>Deskribatzailea</th><th colspan="2">2.DBHko ebaluazio irizpideak</th><th colspan="2">3. DBHko ebaluazio irizpideak</th></tr>
<tr><td>D1: Hizkuntza aljebraikoa</td><td rowspan="4">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
7. Problemak sinbolizatzeko eta ebazteko lengoaia aljebraikoa erabiltzea lehen graduko ekuazioak eta ekuazio sistemak planteatuta, haiek ebazteko metodo aljebraikoak edo grafikoak aplikatuta eta lortutako emaitzak alderatuta.</td><td></td><td colspan="2">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
3. Hizkuntza aljebraikoa erabiltzea emandako propietate edo erlazio bat adierazteko enuntziatu baten bidez, eta informazio garrantzitsua ateratzea eta eraldatzea.</td></tr>
<tr><td>D2: Lehen mailako ekuazioak</td><td></td><td rowspan="5">2.Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
4. Eguneroko bizitzako problemak ebaztea, lehen mailako ekuazioak eta bi ezezaguneko bi ekuazio linealen sistemak planteatu eta ebatzi behar diren kasuetan, manipulazio teknika aljebraikoak, grafikoak edo baliabide teknologikoak erabiliz, eta lortutako emaitzak baloratu eta alderatzea.</td><td></td></tr>
<tr><td>D3: Ekuazio-sistemak</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D5: Aplikazio errealak</td><td rowspan="2">4.Multzoa. Funtzioak
2. Funtzio linealak edo afina ezagutu, irudikatu eta aztertzea eta problemak ebazteko erabiltzea.</td><td rowspan="2">4.Multzoa. Funtzioak
2. Funtzio lineal baten bidez modelizatzen ahal diren erlazioak identifikatzea eguneroko bizitzan eta beste irakasgai batzuetan, eta baloratzea noraino den erabilgarria eredu horren eta beraren parametroen deskribapena aztertutako fenomenoa deskribatzeko.</td></tr>
<tr><td>D4: Funtzio linealak eta afinak</td><td></td></tr>
<tr><td>D6: IKTen erabilera</td><td colspan="2">——</td><td></td></tr>
<tr><td>D7: Matrizeak</td><td colspan="4">——</td></tr>
</table>

4. Taula: 2. eta 3. DBHko ebaluazio-irizpideak

Bigarren zikloa

<table>
<tr><th>Deskribatzailea</th><th colspan="2">4. DBHko ebaluazio irizpideak</th></tr>
<tr><td>D1: Hizkuntza aljebraikoa</td><td colspan="2">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
2. Hizkuntza aljebraikoa, haren eragiketak eta propietateak trebetasunez erabiltzea</td></tr>
<tr><td>D2: Lehen mailako ekuazioak</td><td rowspan="3">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
3. Egoerak eta egitura matematikoak adierazi eta aztertzea, ikur eta metodo aljebraikoak erabiliz, problemak ebazteko.</td><td></td></tr>
<tr><td>D3:Ekuazio-sistemak</td><td></td></tr>
<tr><td>D5: Aplikazio errealak</td><td rowspan="2">4.Multzoa. Funtzioak
2. Egoera errealei lotutako erlazio funtzionalak adierazten dituzten taula eta grafikoetan emandako informazioa aztertzea, eta haien portaeraz, eboluzioaz eta amaieran izan litezkeen emaitzez informazioa lortzea.</td></tr>
<tr><td>D4: Funtzio linealak eta afinak</td><td></td></tr>
<tr><td>D6: IKTen erabilera</td><td colspan="2">____</td></tr>
<tr><td>D7: Matrizeak</td><td colspan="2">____</td></tr>
</table>

5. Taula: 4.DBHko ebaluazio-irizpideak

2.2. Ebaluazio irizpideak Batxilergoan

1. Batxilergoa – Gizarte Zientziak

<table>
<tr><th>Deskribatzailea</th><th colspan="2">1.Batxilergoko ebaluazio irizpideak</th></tr>
<tr><td>D1: Hizkuntza aljebraikoa</td><td rowspan="7">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
3. Hizkuntza aljebraikoa edo grafikora transkribatzea gizarte zientziei dagozkien egoerak eta teknika matematiko eta tresna teknologiko egokiak erabiltzea problema errealek ebazteko, testuinguru partikularretan lortutako ebazpenen interpretazioa emanez.</td><td></td></tr>
<tr><td>D2: Lehen mailako ekuazioak</td><td></td></tr>
<tr><td>D3: Ekuazio-sistemak</td><td></td></tr>
<tr><td>D5: Aplikazio errealak</td><td rowspan="2">3.Multzoa. Analisia
1. Funtzio errealen grafikoak interpretatzea eta irudikatzea, kontuan harturik haien ezaugarriak eta gizarte fenomenoekin duten lotura.
2. Tauletatik abiatuta, funtzioen balioak interpolatzea eta estrapolatzea, eta erabilgarritasuna ezagutzea kasu errealetan.</td></tr>
<tr><td>D4: Funtzio linealak eta afinak</td></tr>
<tr><td>D7: Matrizeak</td><td></td></tr>
<tr><td>D6: IKTen erabilera</td><td></td></tr>
</table>

6. Taula: 1. Batxilergoko ebaluazio-irizpideak

2. Batxilergoa – Gizarte Zientziak

<table>
<tr><th>Deskribatzailea</th><th colspan="2">2. Batxilergoko ebaluazio irizpideak</th></tr>
<tr><td>D1: Hizkuntza aljebraikoa</td><td rowspan="6">2.Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
2. Ohiko hizkuntzan adierazten diren problemak hizkuntza aljebraikora transkribatzea, eta horiek ebaztea halako teknika aljebraiko batzuk erabiliz: matrizeak, ekuazio sistemak eta programazio lineal dimentsio bikoa, modu kritikoan interpretatuz eskuratutako konponbideen esanahia.</td><td></td></tr>
<tr><td>D2: Lehen mailako ekuazioak</td><td></td></tr>
<tr><td>D3: Ekuazio-sistemak</td><td></td></tr>
<tr><td>D5: Aplikazio errealak</td><td rowspan="2">4.Multzoa. Analisia
1. Gizarte zientzietako ohiko fenomenoak modu objektiboan analizatzea eta interpretatzea, informazioa funtzioen hizkuntzara itzuliz eta bere propietate bereizgarrienen azterketa kualitatiboaren eta kuantitatiboaren bidez deskribatuz.</td></tr>
<tr><td>D4: Funtzio linealak eta afinak</td></tr>
<tr><td>D7: Matrizeak</td><td>2.Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
1. Gizarte alorreko egoeretatik heldu den informazioa antolatzea, matrizeen hizkuntza erabiliz, matrizeekin egiten diren eragiketak aplikatzea, informazio hori erabiltzeko tresna gisa.</td></tr>
<tr><td>D6: IKTen erabilera</td><td colspan="2">_____</td></tr>
</table>

7. Taula: 2. Batxilergoko ebaluazio-irizpideak

3 Kapitulua

Ekuazio-sistemen ikaskuntzako estandar ebaluagarriak indarrean dagoen curriculumean

Kapitulu honen helburua indarrean dagoen DBHko (24/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) eta Batxilergoko (25/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) curriculumeko ekuazio-sistemekin zerikusia duten ikaskuntzako estandar ebaluagarriak aztertzea da. Aurreko kapituluko deskribatzaile eta taulen egitura bera erabiltzen dira.

3.1. Ikaskuntzako estandar ebaluagarriak DBHn

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Lehen zikloa</th></tr>
<tr><th>Deskribatzailea</th><th>2. DBHko estandarrak</th><th>3. DBHko estandarrak</th></tr>
<tr><td>D1: Hizkuntza aljebraikoa</td><td>2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
6.1. Zenbateko aldakor edo ezezagunen menpeko egoera edo enuntziatuak deskribatzen ditu adierazpen aljebraikoen bidez, eta haiekin aritzen da.</td><td>——</td></tr>
<tr><td>D2: Lehen mailako ekuazioak</td><td rowspan="2">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
7.1. Ekuazio batean (edo sistema batean) egiaztatzen du zenbaki bat (edo zenbaki batzuk) horren/horien soluzioa ote diren.</td><td>2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
3.1. Polinomioen arteko eragiketak egiten ditu, emaitza polinomio ordenatu gisan adierazten du, eta polinomioak aplikatzen ditu eguneroko bizitzako kasuetan.</td></tr>
<tr><td>D3: Ekuazio-sistemak</td><td>2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
4.2. Bi ezezaguneko bi ekuazio linealen sistemak ebazten ditu prozedura aljebraikoen eta grafikoen bidez.</td></tr>
<tr><td>D4: Funtzio linealak eta afinak</td><td>4. Multzoa. Funtzioak
2.1. Funtzio lineala edo afina ezagutu eta irudikatzen du ekuaziotik edo balio taula batetik abiatuta eta dagokion zuzenaren malda lortzen du.
2.2. Zuzen baten ekuazioa lortzen du grafiko batetik edo balio taula batetik abiatuta.
2.3. Bi magnituderen artean den erlazio linealari edo afinari dagokion ekuazioa idatzi eta irudikatzen du.</td><td>4. Multzoa. Funtzioak.
2.1. Zuzenaren ekuazioa adierazteko moduak zehazten ditu emandako ekuazio batetik abiaturik (puntu-malda ekuazioa, orokorra, esplizitua eta bi punturen bidezkoa), ebakitze puntuak eta malda identifikatzen ditu eta grafikoki adierazten ditu.
2.2. Enuntziatu bati lotutako funtzio linealaren adierazpen analitikoa lortzen du eta irudikatu egiten du.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D5: Aplikazio errealak</td><td>2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
7.2. Bizitza errealeko egoera bat modu aljebraikoan formulatzen du lehen eta bigarren graduko ekuazioen bidez eta bi ezezaguneko ekuazio linealen sistemen bidez, eta haiek ebatzi eta lortutako emaitza interpretatzen du.</td><td rowspan="2">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
4.3. Bizitza errealeko egoera bat modu aljebraikoan formulatzen du lehen mailako ekuazioen bidez eta bi ezezaguneko bi ekuazio linealen sistemen bidez, eta haiek ebatzi eta lortutako emaitza kritikoki interpretatzen du.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4. Multzoa. Funtzioak
2.4. Egoera erreal errazak aztertzen ditu eta, tresna teknologikoetan oinarrituz, eredu matematiko funtzional egokiena identifikatzen du (lineala edo afina) haiek azaltzeko.</td></tr>
<tr><td>D6: IKT-en erabilera</td><td>——</td></tr>
<tr><td>D7: Matrizeak</td><td>——</td><td>——</td></tr>
</table>

8. Taula: 2. eta 3. DBHko ikaskuntzako estandar ebaluagarriak

Bigarren zikloa

<table>
<tr><th>Deskribatzailea</th><th colspan="2">4. DBHko estandar ebaluagarriak</th></tr>
<tr><td>D1: Hizkuntza aljebraikoa</td><td colspan="2">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
2.1. Eraginkortasunez erabiltzen du hizkuntza aljebraikoa.</td></tr>
<tr><td>D2: Lehen mailako ekuazioak</td><td>2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
2.2. Polinomioen batuketak, kenketak, biderketak eta zatiketak egiten ditu eta identitate nabarmenak erabiltzen ditu.</td><td rowspan="3">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
3.1. Bizitza errealeko egoera bat modu aljebraikoan formulatzen du lehen mailako ekuazioen bidez eta bi ezezaguneko bi ekuazio linealen sistemen bidez, eta haiek ebatzi eta lortutako emaitza interpretatzen du.</td></tr>
<tr><td>D3:Ekuazio-sistemak</td><td></td></tr>
<tr><td>D5: Aplikazio errealak</td><td>4. Multzoa. Funtzioak
1.6. Funtzio sinpleei (linealak, koadratikoak, alderantzizko proportzionaltasunekoak eta esponentzialak) jarraitzen dieten egiazko egoerak interpretatzen ditu.</td></tr>
<tr><td>D4: Funtzio linealak eta afinak</td><td colspan="2">4. Multzoa. Funtzioak
1.2. Bi magnituderen arteko erlazio eredua azaltzen eta grafikoki adierazten du: erlazio lineala, koadratikoa, alderantziz proportzionala eta esponentziala.
2.2. Datuak taula eta grafikoen bidez adierazten ditu, ardatzak eta unitate egokiak erabiliz.
2.3. Grafiko batean ageri diren ezaugarri nagusiak deskribatzen ditu, haiek zehazten dituzten aldagaiaren balio puntualak edo tarteak seinalatuz. Bai arkatza eta papera bai baliabide teknologikoak erabiltzen ditu.</td></tr>
<tr><td>D6: IKTen erabilera</td><td colspan="2">4. Multzoa. Funtzioak
2.5. Grafikoak marrazteko elementu teknologiko berariazkoak trebetasunez erabiltzen ditu.</td></tr>
<tr><td>D7: Matrizeak</td><td colspan="2">____</td></tr>
</table>

9. Taula: 4. DBHko ikaskuntzako estandar ebaluagarriak

3.2. Ikaskuntzako estandar ebaluagarriak Batxilergoan

1. Batxilergoa – Gizarte Zientziak

<table>
<tr><th>Deskribatzailea</th><th colspan="2">1.Batxilergoko estandar ebaluagarriak</th></tr>
<tr><td>D1: Hizkuntza aljebraikoa</td><td colspan="2">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
3.1. Hizkuntza aljebraikoa eraginkortasunez erabiltzen du testuinguru errealetan planteatzen diren egoerak irudikatzeko.</td></tr>
<tr><td>D2: Lehen mailako ekuazioak</td><td rowspan="3">2.Multzoa.Zenbakiak eta aljebra.
3.2.Gizarte zientziei dagozkien problemak ebazten ditu, ekuazioak edo ekuazio sistemak erabiliz.
3.3.Lortutako emaitzen interpretazio testuinguruan kokatua egiten du, eta argitasunez adierazten ditu.</td><td></td></tr>
<tr><td>D3: Ekuazio-sistemak</td><td></td></tr>
<tr><td>D5: Aplikazio errealak</td><td rowspan="2">3. Multzoa. Analisia.
1.1. Taulak edo grafikoak erabiliz modu aljebraikoan adierazitako funtzioak analizatzen ditu, eta fenomeno eguneroko, ekonomiko, sozial eta zientifikoekin lotzen ditu, ereduak atereaz eta errepikatuz.
2.1. Balio ezezagunak eskuratzen ditu interpolazioa edo estrapolazioa erabiliz, taula edo datuetatik abiaturik, eta testuinguru batean interpretatzen ditu.</td></tr>
<tr><td>D4: Funtzio linealak eta afinak</td><td rowspan="2">3. Multzoa. Analisia.
1.3. Funtzio baten ezaugarriak grafikoki aztertzen eta interpretatzen ditu, eta emaitzak egiaztatzen baliabide teknologikoen laguntzaz, jarduera abstraktuetan eta beren testuinguruan kokaturiko problemetan.</td></tr>
<tr><td>D6: IKTen erabilera</td><td></td></tr>
<tr><td>D7: Matrizeak</td><td colspan="2">-------____</td></tr>
</table>

10. Taula: 1. Batxilergoko ikaskuntzako estandar ebaluagarriak

2. Batxilergoa – Gizarte Zientziak

<table>
<tr><th>Deskribatzailea</th><th colspan="2">2.Batxilergoko estandar ebaluagarriak</th></tr>
<tr><td>D1: Hizkuntza aljebraikoa</td><td rowspan="5">2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
1.2. Matrizeen hizkuntza erabiltzen du taulen bidez etorritako datuak interpretatzeko eta ekuazio linealetako sistemak irudikatzeko.
2.1. Aipatu murriztapenak modu aljebraikoan formulatzen ditu bizi errealeko egoera batean eta planteaturiko ekuazio linealetako sistema (hiru ezezaguneko hiru ekuaziokoa, gehienez) posible den kasu guztietan ebazten du eta testuinguru errealetako problemak ebazteko erabiltzen du.</td><td></td></tr>
<tr><td>D2: Lehen mailako ekuazioak</td><td></td></tr>
<tr><td>D3: Ekuazio-sistemak</td><td></td></tr>
<tr><td>D7: Matrizeak</td><td></td></tr>
<tr><td>D5: Aplikazio errealak</td><td rowspan="2">3. Multzoa. Analisia
2.1. Funtzioak irudikatzen ditu eta adierazpen aljebraikoa eskuratzen, bere propietate lokal edo globalen gaineko datuetatik abiatuta, eta ondorioak ateratzen ditu egoera errealen ondoriozko problemetan.</td></tr>
<tr><td>D4: Funtzio linealak eta afinak</td><td>2. Multzoa. Zenbakiak eta aljebra.
2.2. Programazio lineal dimentsio biko teknika grafikoak aplikatzen ditu, murriztapenek loturiko funtzio linealen optimizazio problemak ebazteko, eta eskuratutako emaitzak interpretatzen ditu problemaren testuinguruan.</td></tr>
<tr><td>D6: IKTen erabilera</td><td colspan="2">_____</td></tr>
</table>

11. Taula: 2. Batxilergoko ikaskuntzako estandar ebaluagarriak

4 Kapitulua

Ariketen, problemen eta galderen ereduak testu-liburuetan eta ekuazio-sistemekin duten lotura indarrean dagoen curriculumean

Honako kapituluan DBHko azken hiru mailetako eta Batxilergoko testu-liburuetan agertzen diren ekuazio-sistemen ariketa, problema eta galdera ereduen adibide batzuk aurkezten dira. Hauek, Anayak testu-liburuen erabiltzaileentzako daukan webguneko (Grupo Anaya, 2017) liburu digitaletatik lortutakoak dira. Jarduera hauek curriculumak ezarritako edukien lehenengo kapituluko luzetarako azterketa jarraitu beharko dute.

Ekuazio-sistemekin lotura duten gaiak aukeratu dira bost kurtsotan: esperimentazioa burutu den mailan (4.DBHn), aurreko bi ikasmailetan (2. eta 3.DBHn) eta Batxilergoan.

4.1. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 2. DBHn

Aztertutako liburua, Askatasuna institutuan erabili ohi duten ANAYA/HARITZA editorialaren 2.DBHko Matematiketako liburua da (Colera Jiménez, et al., 2016a). Testu-liburu hau 15 gaitan zatituta dago, hauek hiru liburuxketan banatuta daudelarik. Lan honetarako aztertutako gaiak honakoak dira:

– 8.gaia: Ekuazio-sistemak
– 13.gaia: Funtzioak

Bi gai hauek liburuxka desberdinetan daude, 8.gaia bigarren liburuxkan eta 13.gaia hirugarren liburuxkan aurkitzen direlarik. Ekuazio-sistemen gai osoa eta funtzioen ataletik, soilik, funtzio linealen irudikapenaren ariketak aztertu dira, ekuazio-sistemak grafikoki ebazteko ezinbestekoa baita. Maila guztietan ekuazio-sistemen gaiari sarrera emateko, bi ezezagunetako ekuazio linealak azaltzen dira.

ANAYA editorialak curriculumaren egokitzapena duen liburu digital bat proposatzen du, Askatasuna institutuan 2.DBHko talde txikietan lantzen dena. Beste liburuarekin alderatuta, desberdintasun gutxi daude: ebazpen aljebraikoetatik ordezkapen-metodoa lantzen da bakarrik eta problemak pixka bat erraxagoak dira. Desberdintasunak urriak izanda, ondoren deskribatutako gai horien inguruko ariketa, problema eta galdera ereduak, hasieran aipatutako 2.DBHko liburukoak (Colera Jiménez, et al., 2016a) dira, hau da, curriculum egokitzapena ez duen testu-liburuarenak.

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Lehenengo ariketan, bi ezezaguneko lehen mailako ekuazio baten soluzioak lortzeko eskatzen da. Soluzioak aljebraikoki edo taula moduan adierazita eman ohi dira.

Adibidea:

3 Kopiatu taula zure koadernoan, eta osatu $3x + y = 12$ ekuazioaren soluzioekin.

x	0		3		5	–1		–3
y		9		0			18	

1. Irudia: DBH2ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016a or. 160)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Bigarren ariketan, operazio aljebraikoak eginez, lehen mailako ekuazioak forma orokorrean lortzea eskatzen da.

Adibidea:

4 Laburtu forma orokorrera honako ekuazio hauek:

a) $2x - 5 = y$ b) $y = \frac{x+1}{2}$

c) $x - 3 = 2(x + y)$ d) $\frac{x-y}{3} = \frac{x-1}{5}$

2. Irudia: DBH2ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016a or. 160)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Ekuazio lineal baten adierazpen grafikoa ikustean, ekuazio-sistemen gaiaren barne, ekuazio bat emanda honen irudikapen grafikoa eskatzen da. Horretarako prozesu bat azaltzen da: lehenengo "y" isolatu eta gero balio taula baten bidez zuzena irudikatu. Ariketek prozesu hori jarraitzeko eskatzen dute.

Adibidea:

5 Osatu taula ekuazio hauetako bakoitzerako, eta adierazi bakoitzari dagokion zuzena (egizu koadernoan).

a) $x - y = 0 \rightarrow y = x$ b) $x - 2y = 2 \rightarrow y = \frac{x-2}{2}$

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
y								…

3. Irudia: DBH2ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016a or. 161)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

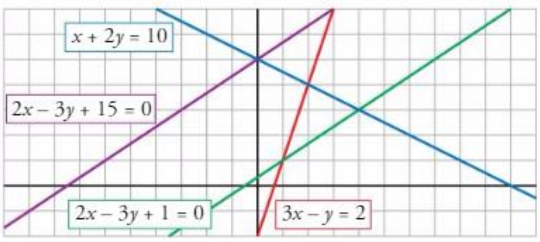
Deskribapena: Ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa, aurreko ariketan zuzenak irudikatzeko erabili den prozesu bera erabiliz azaltzen da. Bi ariketa mota ageri dira, bata ekuazio-sistema baten ebazpen grafikoa egitea eskatzen duena; eta bestea, kontrako prozesua eginez, hau da, irudikapenetatik abiatuz, soluzio jakin bat duen ekuazio-sistema ematea eskatzen duena.

Adibidea:

1. Ebatzi era grafikoan.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$

2. Erreparatu grafikoari eta erantzun.



a) Idatzi soluzioa $x = 2$, $y = 4$ izango duen sistema.

b) Idatzi soluzioa $x = 0$, $y = 5$ izango duen sistema.

c) Idatzi soluziorik gabeko sistema bat.

4. Irudia: DBH2ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016a or. 170)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa lantzeko, lehenengo metodo zehatzak lantzeko ariketak daude, hasieran eragiketarik egin gabe metodoa aplika daitekeelarik. Gero, laguntza ematen da eta emaitzak ematen dira ebazpen egokia egin dela ikusteko. Azkenik, laguntzarik gabeko ariketak ageri dira, metodo egokiena aplikatzeko esanez. Ariketa hauetan, laburtze-metodoarekin jarraitutako ariketen prozesu hori ikus daiteke.

Adibidea:

5. Ekuazioak zuzenean batuz edo kenduz, ebatzi laburtze-metodoaren bidez.

a) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 4y = 17 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$

6. Argibideei jarraituz, ebatzi laburtze-metodoaren bidez.

a) $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$ (Biderkatu 1. ekuazioa +3ekin).

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ (Biderkatu 1. ekuazioa +5ekin, eta 2.a, +3ekin).

7. Ebatzi laburtze-metodoaren bidez eta egiaztatu soluzioak.

a) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = -9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 7y = -8 \\ 5x - 3y = 21 \end{cases}$

SOLUZIOAK

a) $x = 2$, $y = -2$ b) $x = -1$, $y = 1$ c) $x = 3$, $y = -1$ d) $x = 3$, $y = -2$

5. Irudia: DBH2ko ariketak **(Colera Jiménez, et al., 2016a or. 165)**

Ereduzko jarduera: Problema

Deskribapena: Problemak ekuazio-sistemen laguntzaz ebazteko garaian, hasieran oso gidatuta daude, ezezagun bakoitzaren adierazpen aljebraikoa eta ezezagunen arteko erlazioa ematen delarik. Gero, marrazkiekin edo taulekin laguntzaren bat ematen da eta azkenik, problemak laguntzarik gabe egiteko ageri dira. Hona hemen esandakoaren adibide batzuk.

Adibidea:

2. Ikasgela jakin batean, 29 neska-mutil daude; baina neskak mutilak baino hiru gehiago dira. Zenbat mutil eta zenbat neska dira ikasgela horretan?

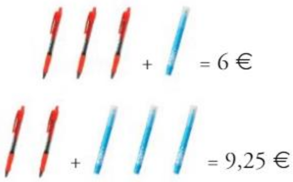
MUTILAK $\rightarrow x$ NESKAK $\rightarrow y$

$\left.\begin{array}{l} \text{NESKAK} = \text{MUTILAK} + 3 \\ \text{MUTILAK} + \text{NESKAK} = 29 \end{array}\right\}$

7. Gramoak 8 € balio duen zenbat urre eta gramoak 1,70 € balio duen zenbat zilar behar dira gramoak 4,22 € balioko duen kilo bat aleazio lortzeko?

	KANTITATEA (g)	PREZIOA (€/g)	KOSTUA (€)
URREA	x	8	$8x$
ZILARRA	y	1,7	$1,7y$
ALEAZIOA	1 000	4,22	4 220

3. Hiru boligrafo eta errotulagailu bat erosi ditut 6 euroan. Errosek 9,25 euro ordaindu ditu bi boligrafo eta hiru errotulagailu. Zenbat balio du boligrafo batek? Eta errotulagailu batek?



6. Triangelu baten azalera 117 m^2 da eta oinarria altueraren bi heren baino zentimetro bat handiagoa da. Kalkulatu oinarriaren eta altueraren luzera.

6. Irudia: DBH2ko problemak **(Colera Jiménez, et al., 2016a or. 166-168)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Zuzenen adierazpenean, ekuaziotik abiatuta zuzena irudikatzea, edo grafikoa emanda zuzenaren ekuazioa lortzea eskatu ohi dute ariketek.

Adibidea:

1. Irudikatu honako funtzio hauek:

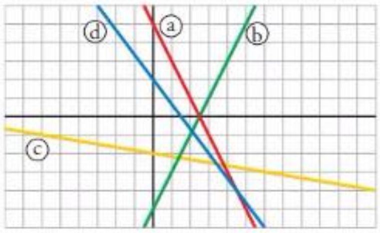
a) $y = -2x + 5$ b) $y = x - 3$

c) $y = \frac{2}{3}x - 4$ d) $y = \frac{3}{2}x + 4$

e) $y = -x - 1$ f) $y = 0{,}8x - 6$

g) $y = \frac{3}{5}x + 1$ h) $y = -0{,}625x + 1$

2. Idatzi honako funtzio hauen ekuazioak:



7. Irudia: DBH2ko ariketak (Colera Jiménez, et al., 2016a or. 267)

4.2. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 3. DBHn

Aztertutako liburua, Askatasuna institutuan erabili ohi duten ANAYA/HARITZA editorialaren 3.DBHko irakaskuntza aplikatuetara bideratutako matematikako liburua da (Colera Jiménez, et al., 2016b). Testu-liburu hau 15 gaitan zatituta dago, hauek hiru liburutan banatuz. Lan honetarako aztertutako gaiak honakoak dira:

– 8.gaia: Ekuazio-sistemak
– 10. gaia: Funtzio linealak eta koadratikoak

Bi gai hauek bigarren liburuxkan daude. Hamargarren gaitik bakarrik funtzio linealen atalak aztertu dira.

Hona hemen liburuak proposatzen dituen gai horien inguruko ariketa, problema eta galdera ereduak:

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Ekuazio-sistema baten soluzio posibleak grafikoki ikustean, sistemaren izendapena (indeterminatua eta bateraezina) lantzen da. Ariketa batzuetan ekuazioei erreparatuz sistemak duen soluzioa ematea eskatzen da, gero ekuazioak irudikatuz egiaztapena eskatzen delarik. Beste ariketa gutxi batzuetan, soluzioa emanda, osatu gabeko ekuazio-sistema osatzeko eskatzen da.

Adibidea:

1. Eratzen dituzten ekuazioei ondo erreparatuz, adierazi honako sistema hauetako zeinek duen soluzioa, zein den bateraezina eta zein den indeterminatua. Egiazta ezazu zuzenak irudikatuz:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

2. Osatu honako sistema hauek, lehenengoak $x = 5$, $y = 3$ soluzioa izan dezan, bigarrena bateraezina izan dadin, hirugarrena indeterminatua izan dadin eta laugarrena ere bai:

a) $\begin{cases} x - 4y = \dots \\ 2x \quad \dots = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x \quad \dots = \dots \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 11y = \dots \\ \dots + 33y = 9 \end{cases}$

8. Irudia: DBH3ko ariketak **(Colera Jiménez, et al., 2016b or. 101)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Metodo aljebraiko bakoitza trebatzeko ariketez gain, egokien iruditzen zaien metodoa erabiliz ekuazio-sistemak ebazteko eskatzen den ariketak ageri dira. Horretarako, aurretik, metodo bakoitza erabiltzea noiz den komenigarria azaltzen da eta gainera, ekuazio-sistema konplexuagoak planteatzen dira, hamartarrak, parentesiak eta zatikiak dituztenak.

Adibidea:

1. Aurretiaz sinplifikatuz, ebatzi honako sistema hau:

$$\begin{cases} 2(x-1)+3(y+4)=9 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3 \end{cases}$$

9. Irudia: DBH3ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016b or. 105)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Laburtze-metodoa bitan aplikatuz soluzioa ebazteko eskatzen duten ariketak agertzen dira.

Adibidea:

2. Birritan laburtze-metodoa erabiliz, ebatzi honako sistema hau:

$$\begin{cases} 45x-11y=23 \\ 7x+\ \ 6y=19 \end{cases}$$

10. Irudia: DBH3ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016b or. 105)**

Ereduzko jarduera: Problema

Deskribapena: Kurtso honetan laguntzarik gabeko problemak daude, hau da, soilik enuntziatua ematen dutenak. Aurreko kurtsoan planteatzen ziren erosketa, irudi lau eta nahasketei buruzko problemez gain, honakoan bi gorputzen abiaduren problemak ere jartzen dira.

Adibidea:

6. Herri batetik bestera, 50 km daude. Aldi berean, oinezkoa abiatu da A-tik B-rantz 5 km/h-ko abiaduran eta txirrindularia, B-tik A-rantz, 20 km/h-koan. Noiz egingo dute bat? Zer bide egingo du oinezkoak?

11. Irudia: DBH3ko problema **(Colera Jiménez, et al., 2016b or. 107)**

Ereduzko jarduera: Problema

Deskribapena: Funtzio linealen gaian, problema bidezko bi funtzioen arteko azterketa proposatzen da, hau da, 8.gaian bezala ekuazio-sistemen bidez ebazteko problemak agertzen dira berriz ere.

Adibidea:

1. Abiadura handiko trena gure hiritik 750 km-ra dagoen hiri batetik atera da goizeko 10etan, eta 20 km/h-ko abiaduran dator guregana. Beste alde batetik, merkantzia-trena ordu berean atera da gure hiritik eta 50 km/h-ko abiaduran doa AHTaren bide paraleloan zehar.

a) Bi funtzio erabiliz, adierazi t ordu barru gure hiritik zer distantziatan egongo diren bi trenak.

b) Irudikatu funtzioei dagozkien bi zuzenak koordenatuen ardatz batean.

c) Adierazi zer puntutan ebakitzen duten elkar bi zuzenek baita horien koordenatuetako bakoitzak zer esan nahi duen ere.

d) Kalkulatu ekuazioen sistema baten bidez zer ordutan gurutzatzen duten trenek elkar, baita gure hiritik zer distantziatan dauden ere.

12. Irudia: DBH3ko problema **(Colera Jiménez, et al., 2016b or. 129)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Zuzenen adierazpeneko ariketak aurreko kurtsokoen antzekoak dira, baina malda eta ordenatua jatorrian lortzeko zailtasun handiagoak jartzen dira, zatikiak agertuz adibidez. Honako ariketan bi ezezaguneko ekuazio linealen irudikapena eta maldei erreparatuz ondorioak ateratzea eskatzen da. Zuzen guztiek malda berdina dutenez, ordenatua jatorrian aldatuz, zuzenak duen posizioaren aldakuntzaz eta zuzenen arteko posizio erlatiboen inguruan hausnartzeko ariketa da.

Adibidea:

6. Lortu honako zuzen hauen maldak eta irudikatu ardatz beretan. Zer ondorio ateratzen duzu?

a) $y = 2x$ b) $y = 2x - 3$

c) $2x - y + 1 = 0$ d) $4x - 2y + 5 = 0$

13. Irudia: DBH3ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016b or. 133)**

4.3. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 4. DBHn

Aztertutako liburua, Askatasuna institutuan erabili ohi duten ANAYA/HARITZA editorialaren 4.DBHko irakaskuntza aplikatuetara bideratutako matematikako liburua da (Colera Jiménez, et al., 2016c). Testu-liburu hau 13 gaitan zatituta dago, hauek hiru liburutan banatuz. Lan honetarako aztertutako gaiak honakoak dira:

- 7. gaia: Ekuazio-sistemak
- 9. gaia: Oinarrizko funtzioak

Bi gai hauek bigarren liburuxkan daude. Hamargarren gaitik bakarrik funtzio linealen atalak aztertu dira.

Hona hemen liburuak proposatzen dituen gai horien inguruko ariketa, problema eta galdera ereduak:

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Bi ezezagunetako ekuazio linealak grafikoki ikustean, kasu berezi batzuk azaltzen dira, zuzen horizontala eta zuzen bertikala. Azkeneko hau, beste kurtsoetan eman ez den zuzen bakarra da. Ariketa ebatzi bat jartzen da honako ariketaren aurretik, eta berriro ere zuzenak irudikatzeko balio taulaz baliatzen dira.

Adibidea:

2. Adierazi grafikoki.

a) $y = 3$ b) $y = -\frac{1}{2}$ c) $x = -2$ d) $x = \frac{3}{2}$

14. Irudia: DBH4ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016c or. 105)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Ekuazio-sistema baten soluzio posibleak lantzean, ohiko ariketetaz gain, pentsatzeko ariketaren bat aurki dezakegu. Ariketa honetan, sistemako ekuazioetariko bat eta soluzioa emanda, sistemaren bigarren ekuazio bat ematea eskatzen da.

Adibidea:

6. $x + 3y = 1$ ekuazioa izanda, bilatu ekuazio horrekin sistema bat eratu eta soluzio bakarra $x = -2$, $y = 1$ izango duen ekuazio bat. Gero, bilatu sistema bateraezina eratuko duen beste ekuazio bat, eta sistema indeterminatua eratuko duen beste bat.

15. Irudia: DBH4ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016c or. 114)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Kurtso honetan sistema ez-linealak lantzen dira, erroketak, izendatzailean ezezagunak dituzten ekuazioak edota bigarren mailako ekuazioak agertzen direlarik.

Adibidea:

1. Sinplifikatu eta, gero, ebatzi.

c) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = 5 - x \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 7 = y^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{xy} \end{cases}$

16. Irudia: DBH4ko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016c or. 110)**

Ereduzko jarduera: Problema

Deskribapena: Problemetan orokorrean bakarrik enuntziatua ageri da. Aurreko urteetako problema motaz gain, ehunekoenak (inbertsioenak eta merkealdienak) aurki daitezke. Gainera, sistema ez-linealen problemak daude.

Adibidea:

12. Saioak 200 000 €-ko kapitala zuen. Zati bat banku batean ezarri du, urteko % 4an. Gainerakoa akzioetan inbertitu du, eta % 11 galdu du. Urtea pasata, 4 250 € irabazi ditu guztira.

Zenbat diru sartu du inbertsio bakoitzean?

15. Kalkulatu triangelu zuzen baten perimetroa, kateto bat bestea baino 10 cm luzeagoa dela eta azalera 150 cm^2-koa dela jakinda.

17. Irudia: DBH4ko problemak **(Colera Jiménez, et al., 2016c or. 112-113)**

Ereduzko jarduera: Problema

Deskribapena: Funtzio linealak lantzeko, eguneroko bizitzako mota honetako problemak ere agertzen dira.

Adibidea:

8. Higikari bat, hasierako unean, jatorritik 3 m-ra dago eta apurka aldentzen da, 2 m/s-ko abiaduran.

Idatzi posizioa denboraren funtzioan emango digun ekuazioa eta irudikatu.

18. Irudia: DBH4ko problema **(Colera Jiménez, et al., 2016c or. 134)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Zuzenen irudikapena lantzeko ariketa desberdin baten bat ageri da. Honakoan baldintza desberdinak emanez: zuzenen ekuazioak lortu behar dira eta zuzen bat adierazteko modu desberdinak lantzen dira, lehen mailako funtzio motak eta haien arteko posizio erlatiboa jorratzen delarik.

Adibidea:

5. Aurkitu kasu hauetako bakoitzeko ekuazioa eta irudikatu:

a) Zuzena (2, –3) puntutik igarotzen da eta (1, –2) eta (–4, 3) puntuetatik igarotzen den zuzenarekiko paraleloa da.

b) Proportzionaltasun funtzioa da eta (–4, 2) puntutik igarotzen da.

c) Funtzio konstantea da eta (18; –1,5) puntutik igarotzen da.

19. Irudia: DBH4ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016c or. 141)

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Ariketa honetan, funtzio linealen baldintza jakin batzuk bete daitezen, parametro batzuen balioa kalkulatu behar da. Zuzen bakar baten nahiz bi zuzenen arteko egoera desberdinak planteatzen dira.

Adibidea:

6. Aurkitu zer balio izan behar duten a, b, c, d eta e parametroek zuzen eta puntuek eskaturiko baldintza hauek bete ditzaten:

a) (4, 0) eta (–2, a) puntuetatik igarotzen den zuzenaren malda –1 izateko.

b) $y = bx + 2$ zuzena (–3, 4) puntutik igarotzeko.

c) $y = 3x + c$ eta $y = cx + 3$ ekuazioak dituzten zuzenek 2 ordenatu-puntuan elkar ebakitzeko. Zein abzisa dagokie?

d) (d, –2) eta (4, e) puntuak $y = \frac{1}{2}x - 3$ ekuazioarenak izateko.

20. Irudia: DBH4ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016c or. 141)

4.4. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 1. Batxilergoan

Aztertutako liburua, Askatasuna institutuan erabili ohi duten ANAYA/HARITZA editorialaren 1.Batxilergo Gizarte Zientzietara aplikatutako matematikako liburua da (Colera Jiménez, et al., 2016d). Testu-liburu hau 10 gaitan zatituta dago. Lan honetarako aztertutako gaiak honakoak dira:

- 3.gaia: Aljebra
- 4. gaia: Oinarrizko funtzioak

Hirugarren gaitik ekuazio-sistemen eta Gaussen metodoaren azpiatalak aztertu dira bakarrik, eta laugarrenetik, funtzio linealak soilik.

Hona hemen liburuak proposatzen dituen gai horien inguruko ariketa, problema eta galdera ereduak:

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Ia ez da ekuazio-sistema linealik ematen kurtso honetan. Sistemen ebazpenerako metodo aljebraikoak sistema ez-linealekin azaltzen dira; erroketak, berreketak, logaritmoak eta esponentzialak dituzten ekuazioak, nahiz izendatzaileetan ezezagunak dituzten ekuazioak agertzen direlarik.

Adibidea:

3 Ebatzi.

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

21. Irudia: 1. Batxilergoko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016d or. 88)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Hiru ezezaguneko hiru ekuazioen sistemak ebazten hasteko, mailakatuta dauden sistemak ebaztea eskatzen da ariketetan.

Adibidea:

1 Ziurtatu mailakatuak direla eta ebatzi.

a) $\begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$

22. Irudia: 1. Batxilergoko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016d or. 89)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Gaussen metodoa ekuazio linealen sistema bat sistema mailakatu bihurtzeko prozesu bezala azaltzen da, hau laburtze-metodoan oinarritzen delarik. Sistema bateragarriak (determinatuak eta indeterminatuak) eta bateraezinak azaldu ostean, Gaussen metodoa aplikatuz sistemak ebazteko ariketak proposatzen dira.

Adibidea:

6 Ebatzi Gaussen metodoa erabiliz:

a) $\begin{cases} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{cases}$

23. Irudia: 1. Batxilergoko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2016d or. 103)**

Ereduzko jarduera: Problema

Deskribapena: Aurreko kurtsoetan planteatzen diren problemez gain, hiru ekuazioetako hiru ezezagunetako ekuazio-sistemen problemak agertzen dira.

Adibidea:

69 Antzerki ikuskizun batean, 5 200 € bildu dituzte hiru preziotako 200 sarrera salduta: 30 €, 25 € eta 10 €-koak. Eserleku merkeenak 25 €-an saldu diren eserlekuen %25 izan direla jakinda, kalkulatu prezio bakoitzeko zenbat sarrera saldu diren.

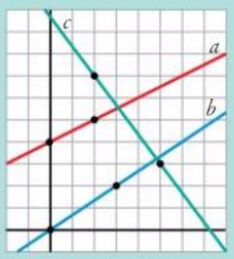
24. Irudia: 1. Batxilergoko problema **(Colera Jiménez, et al., 2016d or. 103)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Funtzio linealen formula orokorra eta puntu-malda ekuazioa azaltzen dira eta testuinguru batean kokatuta ez dauden oso ariketa gutxi lantzen dira. Hona hemen liburuan agertzen diren ariketa mota batzuk: Zuzenen grafikoetatik ekuazioa atera behar den ariketak; eta funtzio lineal baten baldintza batzuk emanez, zuzenaren ekuazioak eta irudikapen grafikoa eskatzen dutenak. Ariketak aurreko kurtsoetakoen antzekoak izan arren, batzuetan hizkuntza formalagoa nabari da.

Adibideak:

1 *Idatzi grafikoan adierazitako zuzenen ekuazioa.*



2 f funtzio lineal batek hau betetzen du: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $Dom(f) = [0, 10]$. Zein da funtzioaren adierazpen analitikoa? Irudikatu.

8 Idatzi honako zuzen hauen ekuazioak eta irudikatu grafiko batean:

a) $P(1, -5)$ eta $Q(10, 11)$ puntuetatik igarotzen da.

b) $(-7, 2)$ puntutik igarotzen da eta malda $-0{,}75$ du.

c) Ardatzak $(3{,}5; 0)$ eta $(0, -5)$ puntuetan ebakitzen ditu.

d) $3x - y + 1 = 0$ zuzenarekiko paraleloa da eta $(-2, -3)$ puntutik igarotzen da.

25. Irudia: 1. Batxilergoko ariketak **(Colera Jiménez, et al., 2016d or. 112-112, 129)**

Ereduzko jarduera: Problemen azalpena

Deskribapena: Funtzio linealekin batera, Gizarte Zientzietara aplikatutako problemak planteatzen dira. Ondorengoa, eskaintza eta eskari funtzioen nolakotasuna eta haien arteko ebaki puntuaren azalpen bat da, ekuazio-sistema linealak lantzen direlarik.

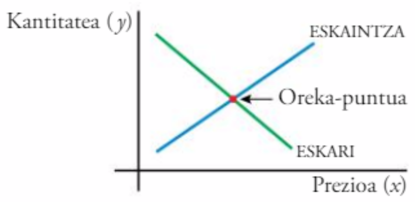
Adibidea:

Eskaintza eta eskari funtzioak

Edozein produkturen salerosketa prozesuan bi funtzio har daitezke kontuan:

- Eskaintza funtzioa, $o(x)$: zenbat eta handiagoa izan produktuaren prezioa, orduan eta handiagoa da enpresa ekoizteko prest dagoen produktu-kantitatea eta, beraz, orduan eta handiagoa da eskaintza. $y = o(x)$ gorakorra da.
- Eskari funtzioa, $d(x)$: zenbat eta handiagoa izan produktuaren prezioa, orduan eta txikiagoa da erosteko prest dauden pertsonen kopurua eta, beraz, orduan eta txikiagoa da eskaria. $y = d(x)$ beherakorra da.

Sarritan, eskaintza- eta eskari-funtzioak linealak dira: zuzen zatien bidez adierazten dira.



Ebaki-puntua oreka puntu bat da: prezio horretarako, eskaintzen dena eskatzen denaren berdina da eta ez dago merkantziarik soberan edo faltan.

OHARRA: Ekonomian, funtzio horiek deskribatzean, *kantitatea* aldagai aske moduan hartzen da, eta *prezioa*, mendeko aldagai moduan. Baina maila honetarako, errazago iruditzen zaigu hemen egin dugun moduan adieraztea.

26. Irudia: 1. Batxilergoko problema baten planteamendua **(Colera Jiménez, et al., 2016d or. 112)**

Ereduzko jarduera: Problema

Deskribapena: Kurtso honetan interpolazio linealeko problemak lantzen dira. Ondorengo adibideetako lehenengoan, testuinguru batean kokaturiko problema bat dugu, eta bigarrenean, interpolazio eta estrapolazio linealaren teknika trebatzeko ariketa bat.

Adibideak:

4 Automobil batek 100 km egiten dituen bakoitzeko kontsumitzen duen gasolina abiaduraren araberakoa da. 60 km/h-ra joanda 5,7 *l* kontsumitzen ditu, eta 90 km/h-ra joanda, 7,2 *l*.

a) Estimatu kontsumoa 80 km/h-ra egiten baditu 100 km.

b) Zenbat kontsumituko du 100 km/h-ra joanda?

c) Eta 200 km/h-ra joanda?

10 Kalkulatu, interpolazio edo estrapolazio lineala eginez, taula hauetako bakoitzean falta diren y-ren balioak:

a)

x	0,45	0,5	0,6
y	2	…	0,25

b)

x	47	112	120
y	18	37	…

27. Irudia: 1. Batxilergoko problema (Colera Jiménez, et al., 2016d or. 113, 129)

4.5. Ariketen, problemen eta galderen ereduak 2. Batxilergoan

Aztertutako liburua, Askatasuna institutuan erabili ohi duten ANAYA/HARITZA editorialaren 2.Batxilergo Gizarte Zientzietara aplikatutako matematikako liburua da (Colera Jiménez, et al., 2009). Liburua aurreko legediaren araberakoa da, eta orain arte zentroan testu-liburu hau erabili denez, honen azterketa egin da. Testu-liburu hau 14 gaitan zatituta dago. Lan honetarako aztertutako gaiak aljebra multzokoak dira:

– 1. gaia: Ekuazio-sistemak. Gaussen metodoa
– 3. gaia: Sistemak determinanteen bitartez ebatzi
– 4. gaia: Programazio lineala

Hona hemen liburuak proposatzen dituen gai horien inguruko ariketa, problema eta galdera ereduak:

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Gaiari hasiera emateko, ekuazio linealak, baliokideak, ekuazio linealen sistemak, sistema baliokideak eta ekuazio-sistema baten aldakuntzen errepasoa egiten da. Hau lantzeko, ebazpenik egin gabe, bi sistema alderatzen dira. Baliokideak diren esateko eskatzen da honako ariketa honetan.

Adibidea:

1. Ebazpena egin barik, azaldu zergatik diren baliokideak honako sistema pare hauek:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y - z = 11 \\ y = -4 \end{cases}$

28. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 29)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Ekuazio-sistema linealen interpretazio geometrikoa (ebazpen grafikoa) ikustean, maila honetan bi nahiz hiru ezezagunetako sistemak lantzen dituzte, beraz, zuzen eta planoekin lan egiten dute. Soluzioen araberako izendapenari (bateraezin, bateragarri determinatu eta indeterminatu) garrantzi handiagoa ematen zaio. Ariketa askotan ebazpen geometrikoa eskatzen da.

Adibidea:

1. Ebatzi eta interpretatu geometrikoki honako sistema hauek:

$$\text{a)}\begin{cases}2x+y=1\\3x+2y=4\\x+y=3\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases}x+y+z=6\\y-z=1\\x+2y=7\end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases}x+y+z=6\\x+y+z=0\\x-z=0\end{cases}\qquad \text{d)}\begin{cases}x+y+z=6\\y-z=1\\z=1\end{cases}$$

29. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 31)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa lantzeko lehenengo mailakatzearen bidez erakusten da, eta gero, berdina egiten da, baina Gaussen metodoa erabiliz. Aurten berria dena matrizeen erabilera da. Hona hemen bi modutan ebazteko eskatzen diren ariketa ereduak.

Adibideak:

4. Bihurtu mailakatu, eta ebatzi:

$$\text{a)}\begin{cases}x-y+3z=-4\\x+y+z=2\\x+2y-z=6\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases}x+y+z=6\\x-y-z=-4\\3x+y+z=8\end{cases}$$

11 Ebatzi, Gaussen metodoa erabiliz:

$$\text{a)}\begin{cases}2x+5y=16\\x+3y-2z=-2\\x+z=4\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases}3x+2y+z=1\\5x+3y+3z=3\\x+y+z=0\end{cases}$$

30. Irudia: 2. Batxilergoko ariketak **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 33, 42)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Parametro baten edo batzuen menpekoa den ekuazio-sistema batean, parametroaren balioa sistemaren soluzio mota batentzako ematea eztabaidatzen den ariketa eredugarria ondorengoa da.

Adibidea:

1. Eztabaidatu ekuazio-sistema hauek, k parametroaren funtzioan:

$$\text{a)}\begin{cases}4x+2y=k\\x+y-z=2\\kx+y+z=1\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases}4x+2y=k\\x+y-z=2\\kx+y+z=0\end{cases}$$

31. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 37)**

Ereduzko jarduera: Problema

Deskribapena: Gai amaieran proposatutako problema batzuk aurki daitezke. Problemen gai nagusiak adinak, nahasteak, zenbaki baten zifren arteko eragiketak, inbertsioak eta salerosketak dira. Kurtso honetako problemen desberdintasuna, hiru ezezaguneko ekuazio-sistemak agertzen direla da.

Adibidea:

26 Bi lagunek dirua inbertitu dute, 20 000 € bakoitzak. Lehenengoak A kantitate bat % 4ko interesean ezarri du; B kantitatea, % 5ean, eta gainerakoa, % 6an. Beste lagunak A kantitate berdina % 5ean ezarri du; B, % 6an, eta gainerakoa, % 4an. Zehaztu A, B eta C kantitateak, jakinda lehenengoak 1 050 €-ko interesak lortu dituela, eta bigarrenak, 950 €-koak.

32. Irudia: 2. Batxilergoko problema **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 44)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Determinanteen gaian ariketa batzuetan Rouché-ren teorema aplikatuz sistema bat bateraezina edo bateragarria den esan behar da.

Adibidea:

1. Esan honako sistema hauek bateragarriak ala bateraezinak diren:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

33. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 82)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Determinanteen gaian ere, Cramer-en erregela erabiliz sistemak ebazteko ariketak.

Adibidea:

1. Ebatzi, Cramer-en erregela erabiliz:

a) $\begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

34. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 83)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Programazio lineala lantzen hasteko, testuinguru batean kokatu gabeko ariketak egiten dira.

Adibidea:

1. Adierazi honako inekuazio-sistema honek zehazten duen esparrua:

$x \geq 0, \quad y \geq 3, \quad x + y \leq 10, \quad 2y \geq 3x$

Aurkitu zer puntutan egiten den maximo eta zer puntutan minimo $F(x, y) = 4x + 3y$ funtzioa.

35. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 108)**

Ereduzko jarduera: Problema

Deskribapena: Programazio lineala inekuazio-sistemen aplikazioetako bat da eta testu-liburuak gai oso bat eskaintzen dio.

Adibidea:

10 Pertsona batek 100 000 € inbertitu nahi ditu A eta B bi akzio motatan. A motakoek arrisku handiagoa dute, baina % 10eko etekinak ematen dituzte. B motakoak seguruagoak dira, baina % 7ko nominala baino ez dute ematen.

A akzioak erosteko, gehienez 60 000 € inbertitzea erabaki du, eta B akzioak erosteko, gutxienez, 20 000 €. Gainera A-koak erosteko inbertitu duena, gutxienez, B-koak erosteko inbertitu duena adina izatea nahi du.

Nola inbertitu behar ditu 100 000 € horiek urteko etekinak maximoak izateko?

36. Irudia: 2. Batxilergoko problema **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 114)**

Ereduzko jarduera: Ariketa

Deskribapena: Ekuazio-sistemen interpretazioa lantzean, sistema bat bateraezin edo bateragarri izateko beste ekuazio bat gehitzea eskatzen duen ariketa bakarra dago. Kontzeptu hau lantzean ere bi planoen arteko sistema lantzen da salbuespen modura.

Adibideak:

2. a) Ebatzi sistema hau:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

b) Gehitu sistema bateragarri izaten jarraitzeko modua emango duen hirugarren ekuazio bat.

c) Gehitu sistema bateraezin egingo duen hirugarren ekuazio bat.

d) Interpretatu geometrikoki kasu bakoitzean egin duzuna.

5 Arrazoitu sistema hauek soluziorik duten eta interpretatu geometrikoki:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$

37. Irudia: 2. Batxilergoko ariketak **(Colera Jiménez, et al., 2009 or. 31, 42)**

5 Kapitulua

Emaitzak

Kapitulu honetan zehar, aurreko ataletan ikusitako testu-liburuen ariketen, problemen eta galderen ereduak eta indarrean dagoen curriculumaren arteko koherentzia aztertuko da. Bi informazio iturrien arteko elkarrekikotasuna ikertzeaz gain, testu-liburuetako ariketa, problema eta galderetatik ondorioztatutako jarduera matematikoak curriculumak aipaturiko gaitasunen garapena bermatzen duen zehaztea da helburu.

Analisi hau Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako bigarren, hirugarren eta laugarren mailetarako eta Batxilergoko bi kurtsoetarako burutu da.

5.1. Gabeziak eta presentziak curriculumean eta testu-liburuetan

Aztertutako curriculuma kiribil moduan egindakoa da, hau da, kurtso bakoitzean aurreko mailetako edukiak ikusteaz gain, hauek sakondu eta eduki berriak lantzen dira.

Ekuazio-sistemen gaiari dagokionez, luzerako analisi bat egin da, kurtsoz kurtso sumatu diren presentziak eta gabeziak deskribatuz. Orokorrean maila guztietako testu-liburuetan DBHko legediak (24/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) eta Batxilergokoak (25/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) dioena betetzen da, edukiei, ebaluazio irizpideei eta ikaskuntzako estandar ebaluagarriei dagokienez, curriculuma ikaskuntza jakintza minimoen bilketa bat baita.

Curriculumaren luzerako analisi bat eginez, ekuazio sistemei dagozkien deskribatzaileen azterketa labur bat egin da. Hizkuntza aljebraikoaren D1 deskribatzailea hasierako DBHko kurtsoetan lantzen da, baina kurtsoak pasatzen diren heinean, gero eta gutxiago lantzen da, barneratuta dagoela suposatuz eta problemen ebazpenetan aplikatzeari mugatuz. Antzekoa gertatzen da lehen mailako ekuazioen D2 deskribatzailearekin, DBHn asko landu denez, Batxilergoan beste kontzeptu aljebraiko batzuk lantzen dira, matrizeak adibidez (2.Batxilergoa arte agertzen ez den D7 deskribatzailea). Ekuazio-sistemei dagokion D3 deskribatzailea kurtso guztietan lantzen da, DBHn gero eta konplexutasun handiagoko ariketak eginez, eta Batxilergoan ebazpen metodo desberdinak landuz (Gaussen metodoa, matrizeak eta determinanteak). Aplikazio errealen D5 deskribatzailea, kurtso guztietan ageri da, eta kurtsoak pasa ahala aplikazioari eta interpretazioari kalkuluari baino garrantzi handiagoa ematen dio curriculumak.

Anayako kurtso guztietako testu-liburuetan, gai bakoitzean landutako kontzeptuen laburpen eskema bat faltan botatzen da. Ikasleendako lagungarria suerta daitekeen kontzeptu matematiko garrantzitsuenak oroitarazteko baliabide bat da. Maila batzuetako liburuetan, gai amaieran, autoebaluazio bat dago. Kurtso guztietan egon beharreko beste baliabide bat da, ikasleek etxean ariketak trebatzeko beste aukera bat baita, batez ere azterketei begira.

Indarrean dagoen curriculumaren eta testu-liburuen arteko lotura hobe ulertzeko asmoz, maila bakoitzerako curriculumak, ekuazio-sistemei dagokienez, eskatzen dituen edukien eta testu-liburuek proposaturiko eduki nagusien laburpen taula bat egin da (12. Taula):

Kurtsoa	Curriculumeko edukiak	Testu-liburuetako edukiak
2. DBH	– Eguneroko hizkuntzako adierazpenak hizkuntza aljebraikora itzultzea – Eragiketak adierazpen aljebraiko errazekin. – Ezezagun bateko ekuazioen ebazpena (metodo aljebraikoa eta grafikoa). Problemak ebaztea. – Bi ezezaguneko bi ekuazio linealek osatutako sistemak ebazteko metodo aljebraikoa eta metodo grafikoa. Problemak ebaztea. – Funtzio linealak. Zuzenaren malda kalkulatzea, interpretatzea eta identifikatzea. Zuzena irudikatzea ekuaziotik abiatuta, eta aldrebes.	– Ekuazioak, esanahia eta erabilgarritasuna. – Ekuazio sinpleak ebaztea eta problemak ekuazioen bidez ebaztea. – Sistema linealak ebazteko metodoak (grafikoa eta aljebraikoak). – Problemak ebaztea ekuazio-sistemen laguntzaz. – Proportzionaltasun-funtzioak, zuzen baten malda, funtzio linealak, eta funtzio konstanteak.
3. DBH	– Indeterminatu bateko adierazpen aljebraikoen transformazioa. – Problemak ebaztea ekuazioak eta sistemak erabiliz. – Zuzenaren ekuazioaren adierazpenak. – Eredu linealak erabiltzea eguneroko bizitzan gertatzen diren egoerak aztertzeko.	– Ekuazio-sistema linealen ebazpen grafikoa eta aljebraikoa. – Enuntziatuak ekuazio-sistemetara itzultzea. – Proportzionaltasun-funtzioa, puntu-malda ekuazioa eta bi puntutik pasatzen den zuzena. – Funtzio linealen aplikazioak. Problemak. – Bi funtzioen baterako azterketa.
4. DBH	– Bi ezezaguneko bi ekuazio linealeko sistemak eta ekuazioak ebaztea. – Ekuazio eta sistemen bidez eguneroko problemak ebaztea. – Enuntziatu, taula, grafiko edo adierazpen analitiko baten bidez deskribatutako fenomeno bat interpretatzea.	– Ekuazio-sistema linealen ebazpena (aljebraikoa eta grafikoa). – Sistema ez-linealak. – Problemak sistemen bidez ebatzi. – Funtzio lineal motak. Zuzen baten puntu-malda ekuazioa. Funtzio linealak eguneroko bizimoduan.
1. Batxilergoa	– Ekuazio linealak. Aplikazioak – Bi ezezagun dituzten lehen eta bigarren mailako ekuazioen sistemak. Sailkapena. Aplikazioak. Interpretazio geometrikoa. – Hiru ezezagun dituzten ekuazio linealen sistemak: Gauss-en metodoa. – Interpolazio eta estrapolazio lineala. Problema errealei aplikatzea.	– Ekuazioen eta ekuazio-sistemen ebazpena. – Gaussen metodoa sistema linealak ebazteko. – Funtzio linealak. Interpolazio lineala.
2. Batxilergoa	– Hiru ezezagunetako ekuazio linealen sistema baten eztabaida eta ebazpena. Gauss-en metodoa. – Programazio lineal dimentsio bikoa. Aplikazioak problema sozial, ekonomiko eta demografikoen ebazpenera.	– Ekuazio linealen sistemen interpretazio geometrikoa (2 eta 3 ezezagunetakoak). – Gaussen metodoa. – Ekuazio sistemen eztabaida. – Zer da programazio lineala? Adibide batzuk. – Bi aldagairako programazio lineala. Enuntziatu orokorra

12. Taula: Curriculumak eta testu-liburuek barne harturiko edukien alderaketa.

5.1.1. Gabeziak eta presentziak Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzan

Esan bezala eta 12. Taulan ikus daitekeen moduan, orokorrean testu-liburuek curriculumak (24/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) ezartzen dituen gutxieneko ezagutzak biltzen ditu.

Ekuazio-sistemak 2.DBHn agertzen dira lehenengo aldiz liburu eta curriculumean. Testu-liburua, maila guztietan, bi ezezagunen ekuazio linealen azalpen eta interpretazio grafikoarekin hasten da. Jarraian, ekuazio-sistemen soluzio motak eta esanahi grafikoak azaltzen dira. Gero, ebazpen aljebraikoaren hiru metodoak eta azkenik hauen aplikazioak eguneroko bizitzako problemetan ikusten dira. Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzan aztertutako hiru mailetan eskema hau jarraitzen da, hortaz, urte batetik bestera kontzeptu matematikoak ez dira asko aldatzen ekuazio-sistemei dagokionez, aurreko urtean ikusi dena errepikatu, sakondu eta beste kontzeptu berriago batzuekin lotzea bilatzen delarik.

2.DBHn hizkuntza aljebraikoa, ekuazio linealak identifikatzea eta hauek puntuz puntu adieraztea lantzen da. Ekuazio-sistemen gaia berria denez, balio bikote bat sistemako soluzio den egiaztatuz hasi eta sistema errazak ebazten dira. Ekuazio sistema baten soluzioa bi zuzenek planoan duten ebaki-puntua dela identifikatzen eta sistemak problemak ebazteko aplikatzen irakasten da. Hauek curriculumak ezarritako gutxieneko ezagutzak dira eta gainera, sistemen ebazpen grafikoa lantzean, soluzio posible desberdinak ikusten dira, ekuazio bateraezinak eta baliokideak izendapenak erabiliz. Soluzioak aintzat hartuta ematen den sistemen izendapen hori, beste kurtsoetan emango den formalizazioari erreferentzia egiten dio.

Funtzio linealen gaian lehen mailako ekuazioak zuzenen bidez adierazten direla irakasten da liburuan. Curriculumak zuzen baten maldaren identifikazioa, kalkulua eta interpretazioa eskatzen du, baina gehien bat lehenengo biak trebatzen dira testu-liburuko ariketetan. Funtzio mota bakoitzaren azalpena eguneroko bizitzako problema baten bidez ematen da, baina gero maldaren interpretazioa lantzeko ariketak ez dira agertzen. Hala ere, maldaren kontzeptua lantzeko, ariketak egiteko webguneko oharrak ageri dira.

Curriculumak zuzenak ekuaziotik abiatuta eta alderantzizko prozesua egitea exijitzen du. Testu-liburuan proportzionaltasun funtzioak azaltzen dira eta hauek balio taulen laguntzaz irudikatzen dira. Gero, maldaren esanahia azaltzean, zuzenak balio taularik gabe irudikatzen hasten dira. Azkenik, funtzio linealak ordenatua jatorrian eta maldaren datuak lortuz irudikatzen dira. Ikusten den bezala, metodo desberdinak erabiltzen dira zuzenak irudikatzeko.

Jarraian, *DBHko 3.* eta *4.mailei* erreparatuko diegu, curriculumak ekuazioak eta ekuazio-sistemak ebazteari baino, hauen aplikazioari esker eguneroko bizitzako problemak ebazteari ematen dio garrantzia. Aurreko kurtsoetan eman diren kontzeptu matematikoak direnez, hauen interpretazioa eta aplikazioa lantzea nabarmentzen da. Hala ere, testu-liburuetan ekuazioen eta sistemen ebazpena lantzen da batik bat, kurtso batetik bestera ekuazioak zailtzen direlarik.

3.DBHn curriculumean agertzen ez den metodo aljebraiko bakoitza aukeratzeko egokitasuna lantzen du liburuak. Kurtso honetan sistemen soluzioen araberako izendapen egokia erabiltzen da, soluziorik gabekoei sistema bateraezin, eta infinitu soluziokoei sistema indeterminatu izendapenak emanez. Sistemekin ebazteko problemetan curriculumak, ikaskuntzako estandar ebaluagarrietan, emaitzak kritikoki interpretatzea eskatzen du. Liburuan problemak ageri dira, baina soluzioen interpretazioari ez zaio behar bezalako garrantzirik ematen. Adibidez, problemetan beti sistema bateragarri determinatuak ebatzi behar dira, sistema bateragarri indeterminatu eta bateraezinen interpretazioa bakarrik interpretazio geometrikora mugatuz.

Zuzenaren ekuazioen adierazpenari erreparatzen bazaio, 3.kurtso honetarako legediak behartuko zuzen mota guztiak ikusten dira liburuan eta hauen irudikapenerako balio taulen erabilpena galtzen da, soilik malda eta ordenatua jatorrian kontzeptuak erabiltzen direlarik. Testu-liburuak funtzio linealen aplikazio bakarra lantzen du, higidurei buruzko problemak. Funtzio linealen gaian, bi funtzio linealen baterako azterketa lantzen da problema baten bidez. Problemaren soluzioa lortzeko ekuazio-sistemen ebazpen grafikoa erabiltzen da, ekuazio-sistemen gaian emandakoa errepikatuz.

4.DBHn, aurrerago *6.kapituluan* sakonago aztertu den bezala, beste kurtsoetako egitura berdinari jarraituz, ekuazio-sistema konplexuagoetan, ebazpen metodoen aukeraketaren egokitzapenean eta problemetan sakontzen da. Gutxieneko ezagutzetaz gain, curriculumean aipatzen ez diren sistema ez-linealak azaltzen ditu testu-liburuak. Lehen mailako funtzioei dagokionez, aurreko kurtsoetako zuzen mota desberdinen antzeko ariketak lantzen dira, baita baldintza batzuk emanda parametroak kalkulatzeko pentsatzeko ariketa konplexuagoak ere. Curriculumak eskatutako funtzio linealen aplikazioak beste mailetan baino garrantzi handiagoa du, baina ez behar adina, liburuak orrialde bakar bat eskaintzen baitio.

5.1.2. Gabeziak eta presentziak Batxilergoan

Batxilergoan Gizarte Zientziei aplikatutako Matematikak I eta II ikasgaiak aztertu dira, esperimentazioa egin den klaseak 4.DBHko Matematika Aplikatuak ikasten baitu eta hau lotura gehien izan dezakeen modalitatea baita.

1.Batxilergoan ekuazio-sistemen ebazpen metodoei ez zaio garrantzi handirik ematen, zatikiak, erroak eta logaritmoak dituzten sistema ez-lineal konplexuagoak landuz. Hiru ezezagunetako ekuazio-sistema linealen ebazpena berria da eta horretarako Gaussen metodoa irakasten da, legediak (25/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa) dioen bezala. Curriculumak sistema moten (bateragarri determinatu/indeterminatu edo bateraezin) eztabaida eta interpretazio geometrikoa du helburu, baina liburuak Gaussen metodoaren ebazpenari ematen dio garrantzia gehien. Testu-liburu eta curriculumean, problemei dagokionez, beste urteen antzerako problemak gehi hiru ezezagunetako sistemak eta Gizarte Zientziei aplikatutakoak ere aurki daitezke, interpolazio eta estrapolazio lineala problema errealei aplikatzea, hain zuzen ere.

2.Batxilergoan curriculumak eta testu-liburuak kalkulu matriziala dute kontzeptu berri nagusia aljebrako multzoan, hortaz, ekuazio-sistemak ebazteko eta eztabaidatzeko Gaussen metodoa matrizeekin erabiliko da batez ere. Liburuan, ekuazio-sistema bat ebazteko beste metodo batzuk ikusten dira, determinanteak erabiliz. Curriculumak eta testu-liburuak, biek, eztabaidari berebiziko garrantzia ematen diote. Aplikazio errealei dagokienez, curriculumak eskatu bezala, gai oso bat eskaintzen zaio programazio linealari liburuan.

5.2. Testu-liburuen eta curriculumaren arteko koherentzia

Orokorrean curriculumak eskatzen dituen edukiak liburuetan islatu egiten dira, baina testu-liburuak aljebraikoa den gai hau oso mekanikoki azaltzen du, metodo aljebraikoei garrantzi handia emanez eta esanahi grafikoei eta interpretazioari garrantzia kenduz. Horren isla argia, gaia kontzeptu isolatu bat bezala aurkeztea. Ekuazio sistemek funtzio linealekin duten lotura zuzena, ez da liburuan adierazten, erlaziorik ez duten bi gai isolatu bezala aurkezten baitira. Adibidez, hasierako DBHko mailetan, ekuazio sistemen ebazpen grafikoa lantzean, zuzenak irudikatzeko balio taulen erabilera azaltzen da, eta aurrerago funtzioen gaian beste modu batean aurkezten da, malda eta ordenatua jatorrian kontzeptuak erabiliz hain zuzen ere. Hortaz, gai hauek erabat erlazionatuta aurkeztuko balira, kontzeptuak ez lirateke errepikatuko eta edukiak hobe ulertuko lirateke.

Arazo hau ez da ekuazio-sistemen gaira soilik mugatzen, liburuaren antolaketaren kontua da. Liburuak curriculumaren edukien sailkapena jarraitu du, lehenengo *Zenbakiak eta aljebra* multzoarekin hasten da, gero *Geometria* edo *Funtzioen* multzoekin jarraitzen du eta azkenik *Estatistika eta probabilitatea* multzoko gaiekin bukatzen da, gaien arteko lotura alde batera utziz. Modu honetan matematikak artikulaziorik gabe irakasten dira, prototipo isolatuak izango balira bezala. Matematiken atomizazio honek epe motzeko eraginkortasuna izan dezake, baina epe luzera kaltegarria suertatzen da, ikasleek kontzeptu desberdinen arteko erlazioak egiteko gaitasuna lantzen ez dute eta. Honek aldi berean, kontzeptu matematikoak egoera errealetan aplikatzeko zailtasuna dakar.

Aipatutakoaren harira, lehen mailako funtzio motak hiru kontu desberdin bezala azaltzen dira. Funtzio afinaren malda eta ordenatua jatorrian kontzeptuak behin azalduta, funtzio konstantea eta lineala aurrekoaren kasu berezi bezala azaldu daitezke. Honek ulermen sakonago eta praktikoagoa bideratuko luke.

Curriculumak edukiak testuinguru batean aplikatzeari edo kontzeptu matematikoaren eguneroko bizitzako aplikazioei garrantzia ematen die. Testu-liburuak, ordea, ariketa mekaniko eta ohiko problemetan indarra jartzen du, hauen interpretazioa alde batera utziz. Ez da soluzioen esanahi posibleen zentzua eta hauen azterketa bultzatzen.

Bukatzeko, laburpen gisa, testu-liburuak curriculumak ezarritako gutxieneko ezagutza guztiak betetzen dituela adierazi nahi da, are gehiago, liburuak legediak eskatzen ez dituen kontzeptu batzuetan sakontzen du. Hala ere, liburuaren antolaketak ez du kontzeptu matematikoen arteko erlazioa ahalbidetzen. Irakasleak berak, testu-liburua oinarritzat hartuta, beste antolaketa bat egin dezakeen arren, liburuak irakaskuntza atomizatu bat helbideratzen du.

II Atala:

Ekuazio-sistemen ikasketa prozesu baten analisia 4.DBHn

Master Bukaerako Lanaren bigarren zati honetan, Masterreko Practicum IIan Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako 4.mailako klase batean aplikatutako ekuazio-sistemei buruzko ikasketa prozesu bat proposatzen da. Analisia lau kapitulutan banatzen da.

Seigarren kapituluan, ikasketa prozesuan erabilitako 4.DBHko testu-liburuko ekuazio-sistemekin lotura duten unitateen analisi orokorra egin da, unitate didaktikoen egitura deskribatu eta barne sartzen diren objektu matematikoak zerrendatu direlarik.

Zazpigarrenean, ikasleek aipaturiko unitate didaktikoen ikasketa prozesuan egin ditzaketen akatsen eta zalantzen aurreikuspena adierazten da.

Aurreko kapituluen konklusioak kontuan hartuz, zortzigarren kapituluan aurkezten den ikasketa prozesua planifikatzen da. Bertan klaseko denboraren banaketa eta ikasleei proposatutako gelako jarduera autonomo nahiz osagarriak azaltzen dira.

Azkenik bederatzigarren kapituluan, esperimentazioaren diseinua eta emaitzak aurkezten dira. Esperimentazioa, ikasketa prozesuan parte hartu duten ikasleek betetako jarduera desberdinen galdetegi batzuen aplikazioan datza.

Bloke honen amaieran aurkitzen diren sintesi eta ondorioak, aurreikuspenen eta emaitzen arteko alderaketa analisi baten konklusioak dira.

6 Kapitulua
Ekuazio-sistemak erreferentziazko testu-liburuan

Kapitulu honetan esperimentazio garaian klaseak emateko erabilitako ANAYA/HARITZA editorialaren 4. DBHko irakaskuntza aplikatuetara bideratutako matematikako testu-liburuaren (Colera Jiménez, et al., 2016c) ekuazio-sistemen gaiari buruzko analisiaren emaitzak biltzen dira.

Seigarren kapitulu hau, lau azpiataletan banatuko da, lehenengoan testu-liburuak erabilitako objektu matematikoak aztertzen dira; bigarrengoan, unitate didaktikoaren analisi orokor bat egiten da; hirugarrengoan, beste aspektu batzuk aipatzen dira; eta laugarrenean, baliabide materiala (GeoGebra) azaltzen da.

6.1. Objektu matematikoak

Testu-liburu baten egokitasun epistemologikoaren balorazio bat egin ahal izateko, ikuspegi ontosemiotikoak (IOS) proposaturiko konfigurazio epistemiko enpirikoaren sei entitate aztertuko dira. Konfigurazio epistemikoa objektu instituzionalen multzo bezala zehazten da (Godino, et al., 2006 or. 131-155). Atal honetan 4.DBHko mailan barne sartzen diren ekuazio-sistemen objektu nagusiak eta hauek dakartzaten erlazioen analisia egiten da. Aztertutako elementuak erabilitako hizkuntza, kontzeptuak, planteatutako egoerak, ariketen aurrean erabilitako prozedurak, gaiaren propietate aipagarriak, eta ariketen ebazpenerako edota edukien azalpenerako erabilitako argudioak dira.

HIZKUNTZA

Idatzizkoa

- Bi ezezaguneko ekuazio lineala, soluzioa, balio-pareak, ezezaguna bakandu, askatu, isolatu, balioak eman, infinitu soluzio, ekuazio-sistema linealak, ekuazio-pareak, balioek bi ekuazioak bete, ebazpena, metodo aljebraikoak, ordezkatu, berdindu, laburtu, kalkulatu, egiaztapena, sinplifikatu, sistema ez-linealak, ekuazio-sistema planteatu, osatu, bilatu, lortu, ebatzi.
- Adierazi grafikoki, irudikatu, zuzen baten bidez adierazi, sistema baten soluzio-kopurua, bi zuzenen arteko ebaki-puntua, soluzio bakarra, sistema bateraezina (soluziorik gabea), puntu batean ere ez dute ebakitzen, paraleloak, ekuazioek kontraesana dute, sistema indeterminatua (infinitu soluzioduna), bi ekuazioek gauza bera esaten dute, zuzen bera, zuzeneko edozein puntu da sistemaren soluzio.

Grafikoa

- Zuzen eta ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa ardatz kartesiarretan.

Sinbolikoa

- Ekuazio linealak adierazteko: ax + by = c ; 2x + 3y = 1 ; y = k ; x = k
- Sistemak adierazteko kortxeteen erabilpena: $\begin{cases} x+2y = 4 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$;
- Balio ezezagunak adierazteko hiru puntu (…): $\begin{cases} 3x+y = \cdots \\ \ldots + y/2 = 0 \end{cases}$
- Soluzioak adierazteko: (5, -3); x = 5, y = -3;
- x eta y ezezagunak adierazteko

x	-2	-1	0
y	5/3	1	1/3

13. Taula: Objektu matematikoak. Hizkuntza

KONTZEPTUAK

Aurretikoak Ekuazio baten soluzioa, ezezaguna, eragiketak adierazpen aljebraikoekin, ekuazio baliokideak lortu, berdintza batean izendatzaileak kendu, ekuazio baten soluzioaren egiaztapena.
Berriak Ekuazio-sistema linealak eta ez-linealak edozein metodorekin ebaztea eta soluzioa interpretatzea, egokien den metodoa erabiltzea eta aukeraketa arrazoitzea, zuzenak irudikatzea, zuzenen posizio erlatiboak, eta problemen ebazpena eta interpretazioa.

14. Taula: Objektu matematikoak. Kontzeptuak

EGOERAK

Testuinguru batean kokaturiko ariketak Eguneroko bizitzako problemen ebazpena ekuazio-sistemen lineal eta ez-linealen bidez eta hauen soluzioak interpretatzea. Problemen gaiak mota askotarikoak dira, gai aipagarrienak hauek izanik: erosketak, zenbakien zifren arteko eragiketak, familiako pertsonen adinak, azterketen puntuazioak, geometrikoak (perimetroak eta azalerak), materialen edo osagaien nahasketak, higidurak, ehunekoak (inbertsioak eta merkealdiak) eta depositauak betetzeko beharrezko denbora. Problemen soluzioa lortzeko galdera mota hauek planteatzen dira: zein dira zenbaki horiek?; zenbat balio du?; zer neurri ditu?; e. a.
Testuingururik gabeko ariketak Hiru metodo aljebraikoen erabilpenaz ekuazio-sistemak ebatzi, zuzen baten ekuaziotik abiatuta hau grafikoki adierazi eta alderantziz, ekuazio-sistema baten irudikapen grafikoa, sistemaren soluzio moten arabera ekuazio sistema bat osatu edo eman, e. a.

15. Taula: Objektu matematikoak. Egoerak

PROZEDURAK

Ekuazio-sistemak ebazteko prozedurak: – Irudikapen grafikoa – Ordezpen-metodoa – Berdinketa-metodoa – Laburketa-metodoa

16. Taula: Objektu matematikoak. Prozedurak

PROPIETATEAK

– Ekuazio batek bi atalen arteko oreka bat adierazten du. – Bi ekuazio baliokideak dira, ekuazioen gai guztiak batu, kendu, biderkatu edo zatitzen direnean eta soluzio bera dutenean. – Adizio edo sustrakzioko gai bat ekuazioaren atal batetik bestera pasatzerakoan, zeinua aldatu behar zaio. Biderkadurazko edo zatikizunezko gaia baldin bada, ordea, zeinua mantentzen da.

17. Taula: Objektu matematikoak. Propietateak

ARGUDIOAK

– Ekuazio-sistemen irudikapenen interpretazio eta arrazonamendua sistemaren soluzioa lortzeko. – Metodo aljebraikoen egiaztapena. – Prozeduren frogapenak adibideen bidez.

18. Taula: Objektu matematikoak. Argudioak

6.2. Unitate Didaktikoaren analisi orokorra

Honako azpiatalean aipatutako 4. DBHko testu-liburuaren analisi orokorra egin da. Bi gai aztertu egin dira, *Ekuazio-sistemak* deituriko zazpigarren gai osoa eta *Oinarrizko funtzioak* izendatutako bederatzigarren gaiaren ekuazio linealen atala soilik.

Ikertutako testu-liburuaren (Colera Jiménez, et al., 2016c) antolaketa orokorra maila guztietan mantentzen da. Gai guztiek egitura berdina dute: hasteko, historikoki aipagarriak diren landuko diren kontzeptu matematikoei buruzko datu batzuk ematen dira sarrera moduan; gero, ataletan banatzen da gaia; eta azkenik, gaiaren amaieran ariketa eta problema sorta bat eta bitxikeria matematikoak daude.

Jarraian bi gaien atal bakoitzaren deskribapen zehatz bat burutu da. Atxikitutako irudiak Anayaren webgunean (Grupo Anaya, 2017) dagoen testu-liburu digitaletik lortu dira.

6.2.1. Zazpigarren unitate didaktikaren analisia: Ekuazio-sistemak.

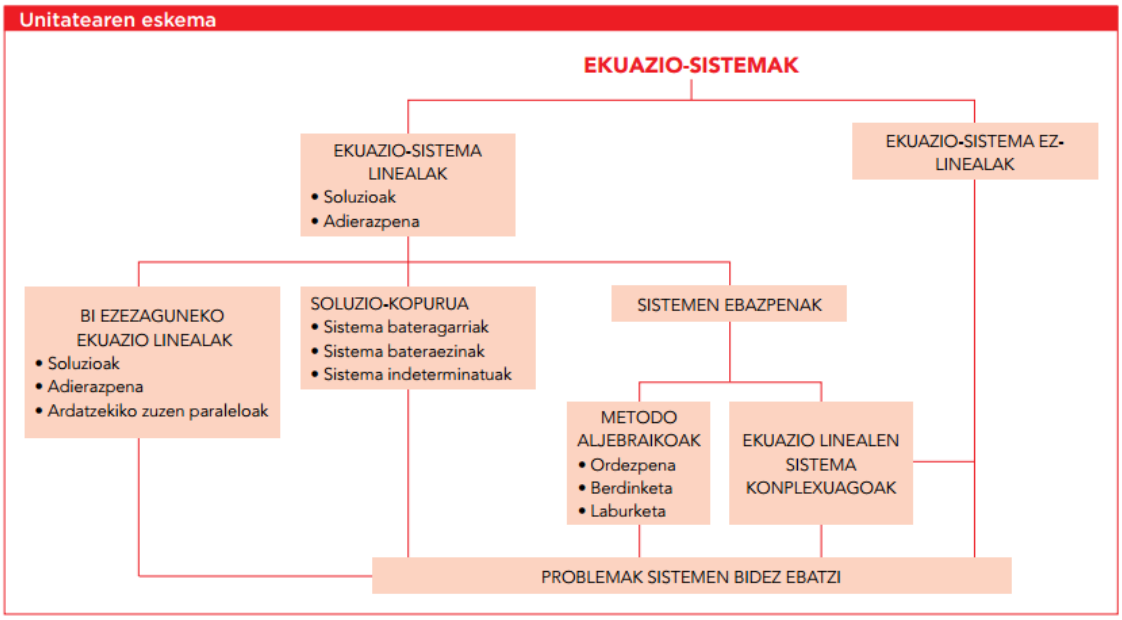
Unitate honen aurretik aljebrako bi gai, *Adierazpen aljebraikoak* eta *Ekuazioak*, aurki ditzakegu eta ondoren, funtzioen bi gai jorratzen dira, *Funtzioak.Ezaugarriak* eta *Oinarrizko funtzioak*. Eranskinetan aztertutako testu-liburuko gaiaren orriak atxiki dira (*A eranskina* ikusi). Gaiaren antolaketa 19. taulan ikustarazten da:

7.GAIA: EKUAZIO-SISTEMAK

Sarrera: Ekuazioetatik sistemetara *1. Bi ezezagunetako ekuazio linealak* - Adierazpen grafikoa - Kasu bereziak *2. Ekuazio-sistema linealak* - Sistema baten soluzio-kopurua *3. Ekuazio-sistemen ebazpena* - Ordezpen-metodoa - Berdinketa-metodoa - Laburketa-metodoa	*4. Ekuazio linealen sistema konplexuagoak* *5. Sistema ez-linealak* *6. Problemak sistemen bidez ebatzi* *Ariketak eta problemak* - Trebatu: Sistema linealak eta sistema ez-linealak - Erabili ikasitakoa - Ebatzi problemak - « + » problemak - Bitxikeria matematikoak

19. Taula: 7.gaiaren egitura

Ondoko 38. Irudian Anaya taldeak egindako unitatearen eskema atxikitzen da. Bertan gaian landutako eduki guztiak agertzen dira. Eskema Anayako irakasleen webgunean *proposamen didaktikoa* deituriko testu-liburu digitalaren azpiatal batean dagoen gai bakoitzaren *Unitateko baliabideak* deituriko 7.gaiaren dokumentu batekoa da (Grupo Anaya, 2017). *5.kapituluan* eskema mota hauen premia aipatu da, ikasleendako antzeko eskemak edo pixka bat osatuagoak testu-liburuaren amaieran jartzea baliagarria izan daitekeela, hain zuzen ere.

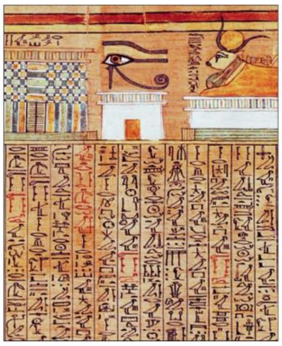


38. Irudia: 7. unitatearen edukien eskema **(Grupo Anaya, 2017)**

6.2.1.1. Sarrera: Ekuazioetatik sistemetara

Gaiari sarrera emateko, orrialde bat betetzen duen azalpen eta irudi batzuk ageri dira. Historian zehar, bi ezezagunetako bi ekuazioko sistema, ezezagun bakarreko ekuazio batetara igaroz ebaztearen erronka ez dela zaila izan adierazten da. Liburuak zibilizazio desberdinei, egiptiarrei eta txinatarrei, nahiz Diofantori egiten die erreferentzia.

Ekuazio-sistemen bidez ebatzi daitekeen egiptiarren problema baten adibide bat jartzen da.



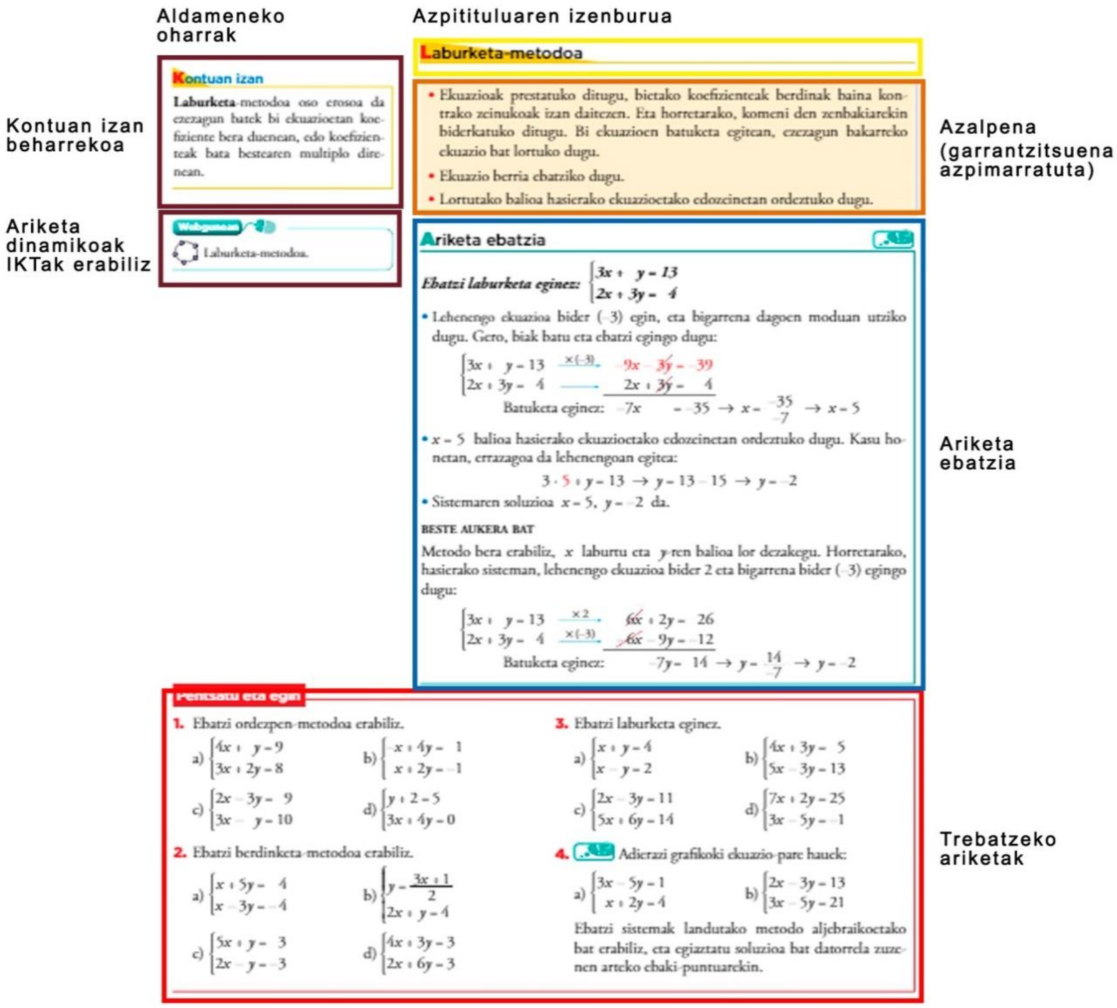
Berlinen gordeta dagoen Egiptoko papiro batean, eskribak honako problema hau planteatzen eta ebazten du: «Ehun ukondo karratuko karratu baten azalera beste bi karraturen azaleren arteko batura da, bataren aldea bestearen aldearen 1/2 + 1/4 izanik. Kalkulatu bi karratu horien aldeak». Gaur egun, enuntziatu hori oso erraz itzultzen dugu ekuazio-sistema baten bi-

39. Irudia: 7. gaiaren sarreraren ariketa
(Colera Jiménez, et al., 2016c)

6.2.1.2. Atalak

Gai bakoitza ataletan banatzen da eta hauek azpiataletan. Atal guztiek antzeko antolaketa jarraitzen dute. Izenburuaren ostean, kontzeptu matematiko bat azaltzen da, laukizuzen laranja batean definizioak edota azalpenaren garrantzitsuena azpimarratzen delarik. Gero, azalpenarekin zerikusia duen adibide ebatzi bat jartzen da eta azkenik, atal horretan landutakoa trebatzeko ariketak proposatzen dira. Azpiatalek egitura berdina jarraitzen dute. Aldamenetan kontuan hartu beharreko oharrak edo azalpenak argitzeko testu edo irudiak ageri dira, bai eta webgunean kontzeptu horiek lantzeko ariketen oroigarri batzuk ere. Beraz, liburuak IKT-en erabilera gauzatzeko ariketak proposatzen ditu, GeoGebra bezalako programen erabilera bultzatuz.

Ondoko 40. irudian egitura horren eredu bat ikus daiteke:



40. Irudia: Atalen egitura **(Colera Jiménez, et al., 2016c)**

Orokorrean testu-liburu honetan planteatzen den metodologia tradizionala da, hau da, liburuak ekuazio-sistemen ebazpen metodoak lantzeko ariketa edo problema ebatziak jarri eta jarraian oso ariketa antzekoak ebazteko proposatzen ditu. Ondorioz, ikasleak ikusitakoa errepikatuz ariketak ebazten ikastea bultzatzen ari da, ariketak modu mekaniko batean egiten irakatsiz eta interpretazioa alde batera utziz. I atalaren *5.kapituluan* aipatu den moduan, testu-liburuaren egitura hau curriculum ofizialak interpretazioari ematen dion garrantziarekin ez dator bat.

Ondoren atal bakoitza indibidualki aztertuko da:

1. *Bi ezezagunetako ekuazio linealak*

Gaiarekin hasteko, ekuazio linealen orrialde bateko azalpena ematen da. Lehenengo, bi ezezagun dituen ekuazio lineal baten ekuazio orokorra ematen da eta horren soluzioa, berdintza betetzen duten balio pare guztiak direla adierazten da.

Ondoren, adibide baten bidez, ekuazio lineal baten soluzioak lortzeko prozedura adierazten da. Ezezagunetako bati balio bat emanez eta hau ekuazioan ordezkatuz, beste ezezagunaren balioa lortzen dela azaltzen da. Soluzioa puntu moduan ere adierazten da, hurrengo azpiatalera aurreratuz. Ekuazio batek infinitu soluzio dituela erakusten da balio taula baten bidez.

Aurrerago bi azpiatal aurki ditzakegu, *Adierazpen grafikoa* eta *Kasu bereziak* izendaturikoak. Lehenengoan, ekuazio baten soluzioak puntu moduan interpreta daitezkeela azaltzen da. Beraz, aurreko adibide beraren bidez, zuzen bat lortzen dela erakusten da. Gainera, zuzen bat adierazteko soilik bi puntu beharrezkoak direla esaten du testu-liburuak. Bigarren azpiatalean, zuzen horizontala eta bertikala kasu berezi bezala azaltzen dira. Bi azpiatal hauetan azalpenen aldamenean zuzenen irudikapen grafikoak aurki daitezke.

Azkenik, ikasleak ikusitakoa trebatzeko asmoz, ekuazio batzuen soluzioak eta irudikapena lortzeko eskatzen duten bi ariketa daude.

2. Ekuazio-sistema linealak

Hasteko, sistema baten soluzioaren definizioa ematen da eta hau azaltzeko aurreko atalean ikusitako metodo berdinarekin, hau da, balio taulen bidez, sistemaren adierazpen grafikoa ematen da, ekuazio sistemaren soluzioa zuzenen ebaki puntua dela azalduz.

Atal honek azpiatal bat du, *Sistema baten soluzio-kopurua* izenburua duena. Bertan, bi zuzenak ebakitzaileak ez diren bi kasuak azaltzen dira. Zuzenen posizio erlatiboen arabera, sistemak soluzio eta izendapen bat edo beste duela adierazten da. Interpretazio grafikoa lantzeaz gain, ekuazioak begi-bistaz aztertuz eta interpretatuz konklusio berdinetara heldu daitekeela azaltzen da.

Amaieran, ekuazio sistemen ebazpen grafikoa lantzeko ariketa bat dugu. Ariketak sistemak dituen soluzioen arabera, ekuazio-sistema zer motatakoa den esatea du helburu.

Behealdean, ekuazio-sistemen ebazpen grafikoa lantzeko GeoGebra ariketak webgunean daudela aipatzen duen ohar bat ageri da.

3. Ekuazio-sistemen ebazpena

Hurrengo bi orrialdeetan ekuazio-sistemak ebazteko metodo aljebraikoak erakusten dira: ordezpen, berdinketa eta laburketa-metodoak. Metodo bakoitzak azpiatal bat osatzen du eta denek egitura berdina dute. Lehenengo, metodoaren prozedura hitzez azaltzen da eta ondoren, ariketa ebatzi baten bidez prozedura ikustarazten da. Ariketen soluzio bilatu ostean, aldamenean egiaztapena egiten da.

Kontuan izan deituriko aldameneko oharretan, metodo bakoitzaren erabilgarritasunari buruzko gomendioak ematen dira. Honetaz gain, webgunean Geogebra programaren bidez metodo bakoitza trebatzeko aukera dagoela oroitarazten du testu-liburuak.

Azpiatal guztien ondoren, ikasleak trebatzeko lau ariketa aurkitzen dira. Ariketa bakoitzean zer ebazpen metodo erabili behar den zehazten da.

4. Ekuazio linealen sistema konplexuagoak

Sarrera moduan, ekuazio-sistema konplexu bat izatean, sinplifikatu eta metodoetako bat erabiliz sistema ebatzi behar dela esaten da. Azalpen horren ostean ariketa ebatzi bat ageri da, aldamenean horren soluzioaren egiaztapena jartzen delarik. Sistemen konplexutasuna ekuazioetan parentesiak eta zatikiak agertzeari mugatzen da.

Atal honi orrialde bakarra eskaintzen zaio. Bukaeran lau sistema konplexu ebazteko ariketa proposatzen du liburuak.

5. Sistema ez-linealak

Orrialde bakar bat betetzen duen bosgarren atala, sistema mota hauek zer diren azalduz hasten da. Segituan, hiru sistema ez-lineal ebazten dira adibide moduan eta trebatzeko beste bost sistema planteatzen ditu liburuak. Oraingoan berreketak, erroketak edo izendatzaileetan ezezagunak dituzten ekuazioak aurki daitezke.

Ez ahaztu oharrean, izendatzailean erroak eta ezezagunak badaude, soluzio faltsuak ager daitezkeela gogorarazten da, egiaztapenak egin behar direla azpimarratuz. Hala ere, ebatzitako ariketetan liburuak ez du egiaztapenik egiten, hortaz, oharrak askotan irakurtzen ez direnez, ariketa ebatzian egiaztapen horiek egitea komenigarria izango litzateke.

6. Problemak sistemen bidez ebatzi

Testu-liburuak problemei hiru orrialde eskaintzen dizkie. Sarrera labur bat egin ondoren, bizpahiru problema ebatzi ageri dira eta ondoren ebatzitako antzeko egoerak planteatzen dituzten problema gehiago proposatzen dira, ikasleek trebezia har dezaten. Ekuazio-sistema linealak nahiz ez-linealak erabiliz ebazteko problemak planteatzen dira. Kapitulu honen *6.1.Objetu matematikoak* ataleko *15. Taulan* problema hauetan ebatzi beharreko arazo edo egoera mota desberdinak azaltzen dira.

6.2.1.3. Ariketak eta problemak

Liburuko atal honek, ikasleak gaian ikusitakoa trebatzeko 54 ariketa eta problema barne hartzen ditu. Hauek trapezio baten bidezko 1 eta 3 arteko zailtasun balorazio bat dute (1: erreza, 2: tartekoa, 3: zaila). Gainera, ariketa batzuen ondoan, harridura eta galdera ikurrak dituen marrazki batekin, pentsatzeko ariketak direla adierazten da. Ariketa eta problemetan lantzen ari denaren araberako azpiatal desberdinetan sailkatzen dira:

Trebatu: Sistema linealak eta sistema ez-linealak

Sistema linealen azpiatalean 11 ariketa daude. Lehenengo ariketan, soluzio-pare bat eman eta bi ekuazio-sistemen soluzioa den egiaztatzeko eskatzen da. 4. DBHn eduki hauek berriak ez direnez, ariketa mota honi ez zaio garrantzi handirik ematen. Bigarrengo ariketan, soluzio-pare bat emanda, osatugabeko ekuazio-sistema batzuk osatzeko eskatzen da. Hurrengo lau ariketetan, sistemen ebazpen grafikoa eta hauen interpretazioa eta arrazoiketa lantzen da. Hirugarren eta laugarrenean, soilik, irudikapen grafikoa eskatzen da eta beste biak pixka bat haratago doaz, ekuazioak behatuta zer soluzio mota duten edo ekuazio bat eta soluzioa emanda beste ekuazio bat ematea eskatuz. Gero, irudikapen grafikoaren medioz, arrazoiturikoa egiaztatzea proposatzen da. Datozen hiru ariketak ebazpen metodo aljebraiko zehatzak trebatzeko ariketak dira eta 10 eta 11 ariketetan sistema konplexuagoak ageri dira, ikasleei egokien deritzen metodoa erabiltzea esanez. Pentsatzekoak diren ariketek tarteko zailtasuna dute, gainontzekoak errazak direla adierazten da.

Sistema ez-linealen azpiatala lau ariketaz osatuta dago. Hauetan sistemak ebaztea eskatzen da, gehienetan metodorik zehaztu gabe eta soluzioen egiaztapenak egitea eskatzen delarik. Ariketa hauetatik hiru zailak eta bakarra tartekoa dela adierazten da.

Erabili ikasitakoa

Honakoa, ikasitakoa eguneroko bizitzako egoeretan aplikatzeko azpiatala da eta 16 problemaz osatuta dago. Soilik enuntziatua ematen da eta konplexutasunari dagokionez, problema errazak eta tarteko mailakoak dira. Azpiatal honetan agertzen diren egoerak erosketei, zenbakien zifren arteko eragiketei, azterketen puntuazioei edo geometriari buruzkoak dira.

Ebatzi problemak eta « + » problemak

Hurrengo bi ataletan problemekin jarraitzen dugu, hauen zailtasun maila igoz. Tarteko mailako edo maila zaileko 23 problema agertzen dira eta horietatik bi ebatziak daude. Bi azpiatal hauetan dauden egoerak zenbakien zifren arteko eragiketei, familiako pertsonen adinei, geometriari (perimetroak eta azalerak), materialen edo osagaien nahasketei, higidurei, edo ehunekoei (inbertsioak eta merkealdiak) buruzkoak dira. Problema batzuetan, lagungarriak suertatzen diren eskema edo taulak ageri dira.

Bitxikeria matematikoak

Azken atal honetan, gaiarekin zerikusia duten bitxikeria matematikoak agertzen dira. Gai honetan konkretuki Diofanto matematikariaren berri ematen da. Ekuazio diofantikoen bidez ebazteko bi problema proposatzen ditu liburuak. Problema irekia dela adierazten da eta soluzio guztiak aurkitzeko eskatzen da.

1. PROBLEMA

Altzari batek 4 cm-ko hankatxoak ditu, baina bat apurtu zaio. Oraingoz orekatzeko, zurezko zenbait disko ditugu: batzuek 5 mm-ko lodiera dute, eta beste batzuek, 3 mm-koa. Mota bakoitzeko zenbat disko erabiliko ditugu?

2. PROBLEMA

20 galderako test batean, erantzun zuzen bakoitzeko 5 puntu lortzen dira. Oker erantzundako bakoitzeko, berriz, 3 galtzen dira; eta erantzun gabe utzitako bakoitzeko, 2 puntu galdu. Zer gertatu behar da azterketan 0 puntu lortzeko? Eta 50 lortzeko?

41. Irudia: 7. gaiko Bitxikeri matematikoen problemak
(Colera Jiménez, et al., 2016c)

6.2.2. Bederatzigarren unitate didaktikoaren analisia: Oinarrizko funtzioak

Gai honek funtzioen ezaugarri orokorrak lantzen dituen zortzigarren gaia du aurrekari eta ondoren geometriako gai bat dator. Bederatzigarren gai honetatik, soilik zuzenen adierazpenari dagokion atalen analisia egin da, ekuazio-sistema linealen ebazpen grafikoarekin erabateko lotura baitu. Eranskinetan aztertutako testu-liburuko orriak atxiki dira (*A eranskina* ikusi). Aztertutako atal eta azpiatalak honakoak dira:

9.GAIA: OINARRIZKO FUNTZIOAK

Sarrera

1. Funtzio linealak
    - Funtzio linealak eguneroko bizimoduan
    - Funtzio lineal motak

Ariketak eta problemak
    - Trebatu: Funtzio linealak

20. Taula: 9.gaiaren egitura

6.2.2.1. Sarrera

Bederatzigarren gaiaren sarrera bi azpiataletan banatuta dago eta aztertu berri den gaiak bezala, orrialde bat betetzen du. *Kontzeptua zehaztu nahian* delakoan, funtzioaren gaur egungo definizioaz eta honen lorpenaren garaiari buruz hitz egiten da. *Zintzotasun gutxiko funtzioak, Poincaréren arabera* deituriko atalean, Poincaré matematikariaren eta honek oinarrizko funtzioei *funtzio zintzo* jarritako izendapenaren berri ematen digu liburuak. Azalpenak irudi batzuekin lagunduta datoz, *funtzio zintzoen* kontzeptua erabili den esparru batzuen argazki batzuk agertzen direlarik.

42. Irudia: Poincaré matematikaria eta 9. gaiaren sarreraren aplikazioak (Colera Jiménez, et al., 2016c)

6.2.2.2. Atalak

Atalen egitura aurreko gaian azaldu denaren berdintsua da. Esan bezala, ekuazio-sistema linealekin lotuta dagoena aztertu da, hau da, *Funtzio linealak* deituriko atalaren zuzenen irudikapenari dagozkion azpiatalak.

1. *Funtzio linealak*

   Hiru orrialdez osaturiko atal hau hiru azpiataletan banatuta dago: *Funtzio linealak eguneroko bizimoduan*, *Funtzio lineal motak* eta *Zuzen baten puntu-malda ekuazioa*.

   Lehenengo azpiatalean eguneroko bizitzako hainbat arlo, “kausen aldakuntzek efektuen aldakuntzari proportzionalki eragiten dietela erakusten duten funtzioz beteta daudela” esaten da (Colera Jiménez, et al., 2016c). Segituan, grafikoz eta marrazkiez lagundutako bi adibide jartzen dira, bata ºC eta ºF unitateetan emandako tenperaturen arteko erlazioari, eta bestea malguki baten luzamenduari buruzkoak. Bi adibideetan egoera bat planteatu eta hizkuntza aljebraikoan adierazten da zuzen baten ekuazio bezala, ondoan ardatz kartesiarretan irudikatzen delarik. Orrialde amaieran bi egoera horiei lotutako galdera batzuk proposatzen dira.

   Bigarren azpiatalean hiru zuzen moten ezaugarriak, ekuazioak eta grafikoak azaltzen dira. Aldamenean zuzen mota bakoitzaren aplikazio edo eguneroko bizitzako adibide batzuk agertzen dira. Kasu honetan ez da ariketa ebatzirik azaltzen, esplikazioa ematerakoan modu orokorrean azaldu dira mota guztiak eta jarraian ariketa eta egoera batzuk planteatzen dira. Ariketetan zuzenen ekuazioetatik abiatuta irudikapen grafikoa lortu behar da, eta egoeretan zuzenen ekuazioak eta irudikapenak eskatzen dira. Hala ere, webgunean maldaren kontzeptua lantzeko, zuzenak m eta n parametroetatik abiatuta aztertzeko, eta zuzenak ekuazioa emanda irudikatzeko ariketa gehiago daudela esaten da.

   Ekuazio-sistema bat irudikatzeko, problema batetik edo ekuazioetatik abiatuz, ikusitako bi atalekin nahikoa denez, ez da hirugarrengo atal edo kontzeptua, *zuzen baten puntu-malda ekuazioa* aztertu.

Zuzenen izendapenerako Matematika Aplikatuetan, ekonomian, erabilitako nomenklaturaz baliatzen da liburua, goi-matematiketakotik desberdinduz. 21. taulan testu-liburuak egindako izendapen bereizketa adierazten da:

Matematika Aplikatuak	**Goi-matematika**
- Proportzionaltasun funtzioa: $y = mx$ - Funtzio konstantea: $y = n$ - Adierazpen orokorra: $y = mx + n$	- Funtzio lineala: $y = mx$ - Funtzio konstantea: $y = n$ - Funtzio afina: $y = mx + n$
Orokorrean: Funtzio linealak	Orokorrean: Lehen mailako funtzioak

21. Taula: Zuzenen izendapenaren aldeak

Testu-liburuak orokorrean zuzen mota guztiei funtzio lineal deritze. Lehen mailako ekuazioak ikuspuntu geometrikotik aztertzerakoan zuzen baten irudikapena dutenez, gazteleraz “linea”, hitz horrekin erlazionatuz funtzio “lineal” izendapena eman zaie.

6.2.2.3.Ariketak eta problemak

Gaiaren amaieran, ikasleak landutakoa trebatzeko ariketak eta problemak aurki ditzakegu. Bertan *Trebatu: Funtzio linealak* deituriko sei ariketaz osaturiko azpiatala dugu. Gehiengoa zailtasun baxuko ariketak dira, eta bakar bat tartekoa. Lehenengoan, ekuaziotik abiatuta funtzioa irudikatu behar da, eta hirugarrengoan, kontrako prozesua eskatzen da. Bigarren eta laugarren ariketek bi puntu edo puntu eta maldaz abiatuta zuzenaren ekuazioa lortzea dute helburu. Bosgarrenak, zuzenaren baldintza batzuk emanda, honen ekuazioa eta irudikapena eskatzen du. Azken ariketa aurrekoaren antzekoa da, baina baldintza batzuk eta ekuazioak ematen dira, parametro batzuk agertzen direlarik. Emandako baldintzak bete daitezen, parametroen balioak lortu behar dira.

6.3. Garrantzia duten beste aspektu batzuk

Testu-liburuaz gain, Anayako webgunean (Grupo Anaya, 2017) material osagarria aurki daiteke. Anayako testu-liburuen erabiltzaileendako, irakasle nahiz ikasle, webgunea da, liburuen kodea izanda web-orria erabili ahal izateko izena eman behar baita. Horrela, ikasleek testu-liburuak modu digitalean eskuragarri dituzte eta kontzeptu matematikoetan sakontzeko edota ariketak modu dinamiko batean egiteko material osagarria dute. Liburuan zehar ariketa dinamiko hauei erreferentzia egiten dieten ohar batzuk ageri dira orrialdeen marjinetan.

6.4. Baliabide materiala: GeoGebra

Ikasketa prozesuko hainbat jardueretan GeoGebra programaren erabilera gauzatu da. Software dinamikoen erabilerak zenbait abantaila eskaintzen ditu ohiko papera edo arbeleko eredu tradizionalen aurrean. Eredu dinamikoak momentu batean arbel batean eman ezin diren infinitu adibide (estentsiboa) eman ditzake, eta hauen adierazpenek forma ugari har ditzakete (formula aljebraikoa, irudi geometriko edo funtzional bat, kalkulu orrian emandako datuak, e. a.). Honek objektu orokorren (intentsiboen) ulermena ahalbidetzen du, objektu horren aunitz adierazpen ikusten baitira (Belloso, 2016).

Eredu dinamikoetan oinarritutako jarduera matematiko bat, aktibitate matematikoaren hiru momentuetan, esplorazioan, ilustrazioan eta frogapenean, egokia dela esan daiteke (Lasa, et al., 2013).

> "Hiru momentu horietan, adibidearen (estentsiboa) eta klasearen (intentsiboa) arteko dualtasuna nabarmendu behar da (Wilhelmi, et al., 2007); izan ere, orduan onartzen dira objektu geometrikoak egoera mota partikular baten eredu gisa." (Lasa, 2015 or. 22)

Maiz GeoGebra software dinamikoa propietateak ilustratzeko baliabide gisa erabiltzen da, hortaz, esplorazio eta frogapen eraikuntzak aurkituko dira nagusiki.

Jarraian momentu matematiko bakoitza eredu dinamikoen ikuspuntutik azalduko da:

6.4.1. Esplorazioa

Ariketa, problema edota egoera desberdinen esplorazio eraikuntzak eredu dinamikoen bidez lantzea oso aproposa da. Hauen laguntzaz, ikasleak ezagutzen ez dituen kontzeptu matematikoen eraikuntzak arakatu ditzake. Eraikuntzen manipulazioari esker, ikasleak propietate jakin batzuk deduzitzea da helburu nagusia. Normalean ikasleek, laguntzarik gabe, irakasleak aldez aurretik eraikitako edo eskuratutako eredu dinamikoa maneiatzen dute (Lasa, 2015).

6.4.2. Ilustrazioa

Bigarren momentu honek, aurretik ateratako ondorioetan sakontzea eta horiek finkatzea du helburu. Kasu konkretuen bidez, propietate baten adibideak ematen dira. Eraikuntzak propietatea egiaztatu behar du. Eredu dinamikoak nahi adina adibide eman ditzake, hortaz, klaseko arbel tradizionalaren aurrean eredu dinamikoaren abantaila handiagoa da. Software dinamikoak soilik propietatea ilustratu egiten du, honen zergatia ematen ez delarik. Honek ikaslea propietatea betetzearen zergatiak jakin nahi izatera bultza dezake (Lasa, 2015).

6.4.3. Frogapena

Eraikuntza dinamikoek askotan ez dute frogapen formala ahalbidetzen, hau papereko ohiko eredura mugatzen delarik. Beraz, formalizazio horretara heltzeko, bi eredu motak bateratzea beharrezkoa da, eredu dinamikoari arrazonamendu induktiboa (partikularretik orokorrera) egokituz, eta arrazonamendu deduktiboa (orokorretik partikularrera) paper eta arkatzaren ereduari esleituz. Hala ere, ikasketa prozesu batzuetan modelo dinamikoen frogapen induktiboarekin nahikoa da lortu nahi diren helburuak lantzeko (Lasa, 2015).

7 Kapitulua

Unitate Didaktikoa lantzerakoan agertu daitezkeen zailtasunak eta aurreikusi daitezkeen akatsak

Kapitulu honetan 4.DBHko ekuazio-sistemen ikasketa prozesuan ikasleek izan ditzaketen zailtasun eta ohiko akatsak aurreikusi eta zerrendatzen dira. Hauek aurreikusteak, arazoei aurre egiteko estrategiak garatzeko eta ikasketa prozesua hobetzeko lagun dezake. Zailtasunak eta akatsak eduki desberdin hauen funtzioan banatu dira: irudikapen grafikoa, metodo aljebraikoen ebazpena, kalkulu aljebraikoa eta problemak.

7.1. Zailtasunak

Irudikapen grafikoari dagokionez:

– Taula baten datuak (puntuak) ardatz kartesiarretan irudikatzeko zalantzak. Arazoa bi ardatzen nahasketa, puntu baten koordenatuen ordena ez jakitea edota ardatz berdinean eskala ezberdina erabiltzeagatik etor daiteke. Kasu berezi bezala, esperimentazioan ikasle bikote batek ardatzetan taulako balore guztiak jarri dituzte, datuen balioak errepikatuta egon arren.

– Ekuazio-sistemen irudikapena beste ebazpen metodo bat dela ulertzea eta horren bidez sistemaren soluzioa lortu daitekeela jakitea.

– Zuzenaren ekuazioa emanda, m (malda) eta n (ordenatua jatorrian) parametroak bereizteko zailtasunak. Hauen esanahia ulertzea kosta egiten da eta ondorioz, zuzena grafikoki adieraztea zaila egiten da. Esperimentazioan, ordenatua jatorrian kontzeptuaren esanahia ulertzea gehiago kostatu zaien arren, maldaren irudikapenarekin zailtasun handiagoak ageri dira.

– Ekuazio-sistema bat bateragarri determinatu/indeterminatu edo bateraezina den identifikatzea. Beraz, zuzenen posizio erlatiboak ikusita, zuzen ebakitzaileak, paraleloak eta kointzidenteak desberdintzea.

Metodo aljebraikoen ebazpenari dagokionez:

– Ekuazio-sistema bat ebazteko metodorik egokiena zein den aukeratzea. Kalkuluak gehien sinplifikatzen edo errazten dituen metodoaren egokitasuna ez jakitearen edo pentsatu gabe edozein aukeratzearen ondorio bat da.

– Ordezkapen-metodoan, isolatu beharreko ezezagunaren aukeraketan zalantzak izatea. Isolatzea komeni den ezezaguna zein den ez jakiteak edo edozein aukeratzeak, ebatzi beharreko ekuazioa zailtzen du eta akatsak sortzeko probabilitate handiagoa sortarazten du.

– Berdinketa-metodoan beti “y” aldagaia isolatu behar delakoaren ustea izatea. Egiazkotzat hartutako proposizio maila duen uste honi, gazteleraz, *Torema en acto* izendapena ematen zaio. Pentsaera hori bi arrazoiengatik izan daiteke: ikasleak ekuazioetan “x” aldagaia ikustera ohituta daudelako edota zuzenen ekuazioak “y” askatuta ematen direlako.

– Laburketa-metodoaren erabileran, beti bi ekuazioen arteko kenketa egin behar dela uste izatea.

– Sistema baten soluzioa bi ekuazioen soluzio izan behar dela ulertzea. Metodo grafikoan soluzio hori bi zuzenena izan behar da; beraz, ebaki-puntua bi zuzenek dituzten infinitu puntuen soluzio komuna dela ulertzea.

– Ekuazio-sistema baten soluzioa egiaztatzeko zalantzak.

Kalkulu aljebraikoei dagokionez:

– Koefiziente negatiboa duen ezezaguna askatzeko zalantzak.

Problemei dagokionez:

– Problemen enuntziatua hizkuntza aljebraikora pasatzeko zailtasunak. Ezezaguna zein den zehaztea eta horren funtzioan, beste datuak jartzea zaila egiten da.

– Problemaren soluzioa ez interpretatzea, hau da, soilik sistemaren bi ezezagunen balioak ateratzea, problemak eskaturiko galdera erantzun gabe.

7.2. Akatsak eta horien jatorri posiblea

Akats batzuk testu-liburuak edo irakasleak erabilitako ezagutza matematikoaren trataera oker baten ondorioz sortu daitezke. Beste batzuk, ordea, ezagutza matematikoaren zailtasun intrintsekoak eragindakoak edo ikasleak kontzeptuaren aurretiko ezagutza eskasa izanagatik eratorriak izan daitezke.

43. Irudian akats moten sailkapen bat egin da (Wilhelmi, 2009). Norbanako batek egindako momentuko akats puntual bati akats anekdotiko deritzo. Egoera berdinean dauden ikasle askok egiten dutenean, ordea, akats errepikakor bat da. Gainera, ikasle askok akatsa behin eta berriz egiten dutenean, akats iraunkorra izendapena erabiltzen da.

Akatsa
- Ez anekdotikoa
  - Errepikakorra
    - Iraunkorra → Oztopoa
    - Ez iraunkorra
  - Ez errepikakorra
- Anekdotikoa

Porrota

43. Irudia: Akats motak **(Wilhelmi, 2009 or. 8)**

Jarraian ekuazio-sistemen edukiei dagozkien akats batzuk aurkezten dira. Ahal den neurrian, hauen jatorri posibleen aipuren bat egin da.

Irudikapen grafikoari dagokionez:

– Ekuazio-sistemak grafikoki ebaztean bi zuzenak marraztu eta soluziorik eman gabe ariketa bukatutzat ematea. *Akats errepikakorra.*

– Sistema baten soluzioa zuzenen posizio erlatiboaren funtzioan ematean, zuzen kointzidenteen eta paraleloen araberako soluzioak nahastearen ondorioz, zuzenak paraleloak direnean sistemak infinitu soluzio dituela esatea edo aldrebes. *Akats iraunkorra.*

Metodo aljebraikoen ebazpenari dagokionez:

- Laburtze-metodoa erabiltzean ekuazio bat zifra batekin biderkatzerakoan, bakarrik aukeratutako ezezaguna duen gaiari eragiketa egitea, gainontzeko gaiak berdin utziz. *Akats anekdotikoa.*
- Ordezkapen-metodoan isolatu den ezezaguna ekuazio berean ordezkatzea, 0 = 0 berdintzara helduz. *Akats anekdotikoa.*
- Edozein metodoren ebazpenean bakarrik ezezagunetako baten balioa lortzea, ariketa ebatzitzat emanez. *Akats iraunkorra.* Ekuazio-sistema batek soluzio-pare bat duela ez jakitearen seinale.

Kalkulu aljebraikoei dagokionez:

- Ordezkapen-metodoan ezezagun bat isolatu eta beste ekuazioan ordezkatzean, parentesirik ez jartzearen ondorioz ekuazioa gaizki ebaztea. *Akats anekdotikoa.*
- Ezezagunetako bat isolatzean, koefiziente negatiboarekin utzi eta positiboa izango balitz bezala beste ekuazioan gaizki ordezkatzea. Honek, gaizki berdintzea edo zuzenak gaizki irudikatzea dakar. *Akats errepikakorra.*
- Ekuazioetan zatikiak agertzean, gai guztiak izendatzaile berdinarekin jarri beharrean, bakarrik berdinketaren atal bat edo hasieratik zatiki eran dauden gaiak soilik eraldatzea. *Akats iraunkorra.*
- Ekuazioetan identitate nabarmenak agertzean, ez dira ongi aplikatzen edo blokeatze egoerak suertatzen dira. *Akats iraunkorra.* Identitate nabarmenak kalkulu aljebraikoak azkartzeko irakasten dira, baina formulak jakin ezean, askotan ikasleei biderketa betiko moduan egitea ez zaie bururatzen.
- Parentesi edo zatiki baten aurreko minus zeinua. Minusa bakarrik parentesiaren edo zatikiaren lehenengo monomioari (gaiari) aplikatzea. *Akats iraunkorra.*
- Ekuazio bat ebaztean, zero bider “x” berdin zifra bat agertzean, x-ren balioa 0 dela jartzea. Era berean, zifra bat bider “x” berdin 0 agertzean, “ez du soluziorik” jartzea. Ekuazioen soluzio mota desberdinen interpretazio grafiko eta analitikoa ez lantzeagatik edo ez ulertzeagatik eratorritako *akats iraunkorra* da.

8 Kapitulua
Ikasketa prozesua

Kapitulu honetan Bigarren Hezkuntzako Irakasletzako Masterreko Practicum II-ko esperimentazioan 4.DBHko klase batean egindako ekuazio-sistemen ikasketa prozesuaren deskribapena burutuko da.

Hiru azpiataletan banatu da kapitulua. Lehenengoan, jardueren denboraren banaketa azaldu da, jarraian testu-liburuko ariketez gain planteatu diren jarduera osagarriak deskribatuko dira eta bukatzeko, etxerako bidalitako zereginak aurkeztuko dira.

8.1. Klasean egin den denboraren banaketa

Ikasketa prozesua, 14 saioko iraupena izan duena, bost fasetan banatu da. Fase bakoitzean metodologia desberdinekin lan egin da. Hurrengo lerroetan fase bakoitzean egindako jarduera eta dinamika motak laburbilduko dira:

F0_ Aurre ebaluazioa

Unitate didaktikoaren materia lantzen hasi baino lehen, ikasleek ekuazio-sistemei buruz dituzten aurretiko ezagutzak jakitearren, bakarkako froga diagnostikoa egin da.

F1_ Problemak ekuazio-sistemen bidez ebatzi.

Bikoteka lan egiteko jarduera honetan testuinguru batean kokatutako egoera baten inguruko galderak planteatzen dira. Ikasleek elkarlanaren bidez egingo diote aurre erronkari eta irakaslearen papera jarduera azaltzea eta zalantzak argitzea izango da.

F2_ Zuzenen eta ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa

Elkarlaneko dinamika berarekin, bikoteek GeoGebra programarekin lantzeko G1 eta G2 izendaturiko bi jarduera egingo dituzte. Jarduerak konstruktibismoan oinarrituta daude, hau da, ikasleek beraiek, irakasleak prestatutako ariketen laguntzaz, ezagutza matematikoa eraikitzea da jarduera hauen helburua. Hala eta guztiz ere, modu dinamikoan landutako kontzeptuetan sakontzeko eta hauek finkatzeko, saio batzuetan ariketak modu tradizionalean (papera eta arkatza erabiliz) egingo dira. Saio hauetan ikasleek lan autonomoa eginen dute eta ariketak arbelean modu dialogikoan zuzenduko dira, parte-hartzea sustatuz.

F3_ Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa

Fase honetako saio gehienetan dinamika bera jarraituko da. Saio hasieran etxerako lanen zuzenketari tarte bat eskainiko zaio, gero kontzeptu berriak irakasleak magistralki nahiz dialogikoki azalduko ditu, eta azkenik, ikasleek ikusitakoa trebatzeko bakarkako lana eginen dute. Lan autonomo honen bitartean irakasleak zalantzak indibidualki argituko ditu.

F4_ Azterketa

Unitate didaktikoan ikasi dena egiaztatzeko eta baloratzeko beste baliabide bat da.

Saio guztiak A taldeko (*9.1.Lagina* atala ikusi) klasearen ohiko gelan eman dira, 2 egunetan izan ezik, informatika gelan GeoGebra programarekin jarduera batzuk egin baitira.

22. Taulan praktiken denboraldian zehar egindako hamalau saio horien banaketa adierazi da. Jai egunak marroiez eta esperimentazioan emandako saioak arrosaz markatu

dira, martxoaren 31an hasi eta maiatzaren 12an bukatuz. Ikusten den moduan Aste Santuak bi zatitan banatzen du esperimentazioa. Lehenengoa jarraian emandako epe bat da eta bigarrenak etenuneren bat du maiatzeko bi asteetan; maiatzak 4 eta 5 egunetan ikasleek eskolaz kanpoko jarduerak izanagatik eta azkeneko astean azterketa baino lehenagoko 2 saioak zentroko irakasleak eman izateagatik. Bi zatien artean Aste Santua izanda, ikasle askok landutakoa ahazten dutenez, zentroko irakasleak ikusitakoaren errepaso saio bat eman zuen apirilaren 24an.

MARTXOA							APIRILA							MAIATZA						
		1	2	3	4	5						1	2	1	2	3	4	5	6	7
6	7	8	9	10	11	12	3	4	5	6	7	8	9	8	9	10	11	12	13	14
13	14	15	16	17	18	19	10	11	12	13	14	15	16	15	16	17	18	19	20	21
20	21	22	23	24	25	26	17	18	19	20	21	22	23	22	23	24	25	26	27	28
27	28	29	30	31			24	25	26	27	28	29	30	29	30	31				

Legenda: Saioak Jai egunak

22. Taula: Saioen plangintza egutegian

23. Taulan saio bakoitzaren data eta hauetan jorratutako jarduerak zein faseri dagozkion adierazi dira:

Saioa	Data	Fasea	Jarduera
1	Martxoak 31	F0 eta F1	Aurre ebaluazio froga (*B1 eranskina*) + Iltzeen jarduera
2	Apirilak 3	F1. Problemak ekuazio-sistemen bidez ebatzi.	Iltzeen jarduera (*B2 eranskina*)
3	Apirilak 4	F2. Zuzenen eta ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa	Zuzenen adierazpena. G1 jarduera (*B3 eranskina*)
4	Apirilak 5		Ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa. G1 eta G2 jarduerak (*B3 eranskina*).
5	Apirilak 7		Zuzenen adierazpena
6	Apirilak 10		G2 jarduera (*B3 eranskina*)
7	Apirilak 11	F2 eta F3	Ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa + Berdinketa-metodoa
8	Apirilak 12	F3. Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa	Berdinketa-metodoa + Laburketa-metodoa
9	Apirilak 25		Laburketa-metodoa + Ordezkapen-metodoa
10	Apirilak 26		Ordezkapen-metodoa
11	Apirilak 28	F2 eta F3	Sistemen ebazpen metodoak
12	Maiatzak 2	F2 eta F3	Sistemen ebazpen metodoak + Ekuazio-sistema konplexuak
13	Maiatzak 8	F3 eta F1	Ekuazio-sistema konplexuak + Problemak
14	Maiatzak 12	F4. Azterketa	Azterketa (*B4 eranskina*)

23. Taula: Faseen banaketa saio desberdinetan

Egun bakoitzean egindako jardueren laburpena, taula formatuan aurkeztu da (24-37 taulak). Bertan, saio bakoitzaren iraupena, arduraduna eta irakaskuntza mota zehazten dira. Saioek 55 minutuko iraupena dute, baina klase hasieran 5 minutu galdu ohi direnez, 50 minutuko klaseak kontuan hartu dira.

1.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Gaiaren sarrera	10 min	Partekatua	Dialogikoa
Aurre ebaluazio froga (*B1 eranskina* ikusi)	10 min	Ikasleak	Konstruktibista
Iltzeen jarduera: 1.1 (*B2 eranskina* ikusi)	10 min	Partekatua	Konstruktibista

24. Taula: 1.saioaren denboraren banaketa

2.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Iltzeen jarduera: 1.2, 1.3, 1.4	50 min	Ikasleek	Konstruktibista

25. Taula: 2.saioaren denbora banaketa

3.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
G1. Zuzenen adierazpena: G1.1, G1.2, G1.3 *F2ko GeoGebra jarduera (B3 eranskina)*	50 min	Ikasleek	Konstruktibista

26. Taula: 3.saioaren denbora banaketa

4. Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
G1.3 azpi-ariketaren taularen azalpena	15 min	Irakaslea	Magistrala
G1. Zuzenen adierazpena: G1.3 eta G1.4	35 min	Ikasleak	Konstruktibista
G2. Ekuazio sistemen adierazpen grafikoa: G2.1 eta G2.2. *GGB 2.jarduera (B3 eranskina*)			

27. Taula: 4.saioaren denbora banaketa

5.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Etxerako lanen zuzenketa: 134.orriko 5a, 6d eta 3b. *Zuzenak adierazteko ariketak*	15 min	Partekatua	Dialogikoa
Ikasleen bakarkako lana: 134.orr 5d, 6c, 3d.	20 min	Ikasleak	Lan autonomoa
Ariketen zuzenketa	15 min	Partekatua	Dialogikoa

28. Taula: 5. saioaren denbora banaketa

6.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Etxerako lanen zuzenketa: 141.orriko 3, G2.1, G2.2. *GeoGebra proiektatuz.*	35 min	Partekatua	Dialogikoa
G2.3 jarduera. *Azpiatal bakoitza ikasle batek egin du, GeoGebra proiektatuz.*	15 min	Partekatua	Dialogikoa

29. Taula: 6. saioaren denboraren banaketa

7.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Etxerako lanen zuzenketa: 106.orriko 1b	10 min	Partekatua	Dialogikoa
Ikasleen bakarkako lana: 106.orriko 1c, d *Ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa.*	20 min	Ikasleak	Lan autonomoa
Ariketen zuzenketa	10 min	Partekatua	Dialogikoa
Berdinketa-metodoaren azalpena	10 min	Partekatua	Dialogikoa

30. Taula: 7.saioaren denboraren banaketa

8.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Berdinketa-metodoaren azalpena bukatu	10 min	Partekatua	Dialogikoa
Ikasleen bakarkako lana: 108.orriko b eta d	12 min	Ikasleak	Lan autonomoa
Ariketen zuzenketa	8 min	Partekatua	Dialogikoa
Laburketa-metodoaren azalpena.	10 min	Partekatua	Dialogikoa
Ikasleen bakarkako lana: 108.orriko 3a	5 min	Ikasleak	Lan autonomoa
Ariketaren zuzenketa	5 min	Partekatua	Dialogikoa

31. Taula: 8. saioaren denboraren banaketa

9.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Laburketa-metodoaren azalpena.	15 min	Partekatua	Dialogikoa
Ikasleen bakarkako lana: 108.orriko 3c, d	15 min	Ikasleak	Lan autonomoa
Ariketen zuzenketa	10 min	Partekatua	Dialogikoa
Ordezkapen-metodoaren azalpena.	10 min	Partekatua	Dialogikoa

32. Taula: 9. saioaren denboraren banaketa

10.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Etxerako lanen zuzenketa: 114.orr 9b eta d	15 min	Partekatua	Dialogikoa
Ordezkapen-metodoaren berrikustea.	10 min	Partekatua	Dialogikoa
Ikasleen bakarkako lana: 108.orriko 1c, b	15 min	Ikasleak	Lan autonomoa
Ariketen zuzenketa	10 min	Partekatua	Dialogikoa

33. Taula: 10. saioaren denboraren banaketa

11.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Etxerako lanen zuzenketa: 114.orr iko 7d eta 10b. *Ordezkapen-metodoa eta egokien den metodoa*	15 min	Partekatua	Dialogikoa
Ikasleen bakarkako lana: 114.orriko 11a. *Ariketa berdina 4 ebazpen metodoekin.*	35 min	Ikasleak	Lan autonomoa

34. Taula: 11.saioaren denbora banaketa

12.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Aurreko eguneko ariketaren zuzenketa *Berdinketa-metodoa eta grafikoa.*	20 min	Partekatua	Dialogikoa
Ekuazio-sistema konplexuak.	20 min	Partekatua	Dialogikoa
Ikasleen bakarkako lana: 109.orriko 1c, d	10 min	Ikasleak	Lan autonomoa

35. Taula: 12. saioren denboraren banaketa

13.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Etxerako lanen zuzenketa: 109.orr 1c eta d	15 min	Partekatua	Dialogikoa
Ikasleen bakarkako lana: 114.orriko 10d, c eta f. *Sistema konplexuak.*	20 min	Ikasleak	Lan autonomoa
Ikasleen bakarkako lana: 111.or 2.*problema*	10 min	Ikasleak	Lan autonomoa
Problemaren zuzenketa	5 min	Partekatua	Dialogikoa

36. Taula: 13. saioaren denboraren banaketa

14.Saioa			
Mota	*Denbora*	*Arduraduna*	*Irakaskuntza mota*
Azterketa (*B4 eranskina*)	50 min	Ikasleak	Lan autonomoa

37. Taula: 14.saioaren denboraren banaketa

Lehenengo saioaren iraupena motzagoa da, klase amaieran aurreko gaiko azterketa banatu eta honen ariketen azalpen eta zuzenketa egin baita. Gainera, aurre ebaluazio froga egin ondoren hurrengo saioetako metodologia azaldu da eta bikoteen eraketa eta leku aldaketak egin dira.

Bigarren saioan ez du lehenengo faseko iltzeen jarduerarekin bukatzeko astirik eman. Ikasle bikoteen erritmo desberdinak direla eta, batzuk 1.3 ariketa osatzera iritsi dira eta beste bikote gutxik 1.4 ariketaren lehenengo galdera erantzuteko denbora izan dute. Jarduera hau erdizka geratu da, hurrengo bi saioetarako informatika gela erreserbatuta izanagatik eta aurrerago bukatzeko unerik ez izateagatik.

GeoGebra jarduerak egiteko bi saio aurreikusi dira, baina espero zena baino denbora gehiago behar izan da. Ikasleen blokeo egoerek eta eredu dinamikoekin lan egiteko prozesua luzeagoa izateak, bi egun horietan pentsatutako jarduerak ez bukatzea ekarri du. Gainera, bikote bakoitza jardueraren puntu edo ariketa desberdinetan gelditu da, talde batetik bestera desoreka handia izanez. Hau konpontzeko eta informatika gela erabilgarri ez izatearen egoerari aurre egiteko, 6.saiorako G2.2 ariketarainoko azpi-ariketa guztiak etxerako lan moduan bukatzeko eskatu zaie.

Modelo dinamikoa lantzeko fitxak klase amaieran jaso dira eta ikasleen erantzunen analisi bat egin ondoren, G1.3 ariketaren taulan landu beharrekoa ulertu ez dela ondorioztatu da; beraz, 4.saioan ikasleei ariketa ebatzita ematea erabaki da. Fitxa batean taula osatua eta egoera bakoitzaren adibide grafiko bana jarri dira (*B3 eranskina* ikusi). Beraz, jakintzaren instituzionalizazioa[1] modu magistralean eman da.

[1]*Institucionalización del saber*: proceso por el cual las producciones (estrategias, conocimientos, procesos, etc.) de los alumnos adquieren un estado cultural y social. Junto a la *devolución*, en Teoría de

8.2. Planifikatu diren jarduera osagarriak

Proposatutako ikasketa prozesu honetan, euskarri material desberdina duten jarduerak prestatu dira. Batetik, testu-liburua oinarri izanda, paperean ebazteko edota eredu dinamikoa erabiltzeko jarduerak diseinatu dira. Bestetik, testu-liburuko trebatze ariketa eta problemak landu dira. Jarraian fase bakoitzerako prestatu diren jarduera osagarriak azalduko dira:

8.2.1. Aurre ebaluazioa (F0)

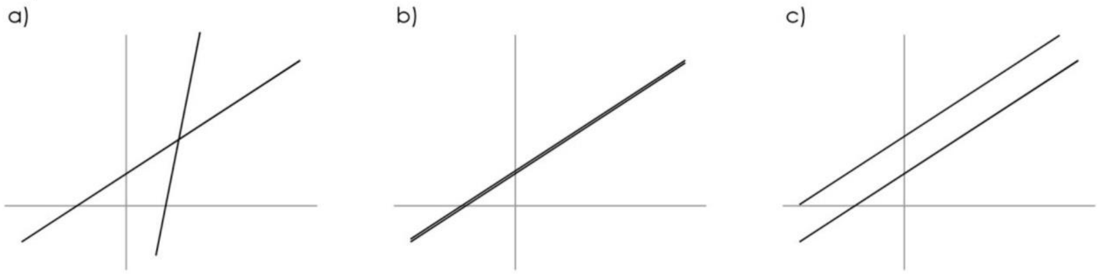
Ikasleek ekuazio-sistemei buruz dituzten aurretiko ezagutzak jakiteko helburuz, bakarkako froga diagnostiko labur bat egin da (44. Irudia). Ekuazio-sistemen ebazpena 2.DBHtik emandako edukia izanda, ikasleen jakintza maila ikasketa prozesua diseinatzean kontuan izan beharreko beste datu iturri bat da.

Ikasleei helarazitako dokumentua *B1 eranskinean* aurkitzen da. Honako irudian frogaren hiru ariketak azaltzen dira:

1_ Ekuazio-sistema honen soluzioa aukeratu: $\begin{cases} 7x + 4y = -10 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$

a) x = 1 ; y = 2
b) x = -2 ; y = 1
c) x = 1 ; y = 0

2_ Lotu ondoko ekuazio-sistema hauen irudikapen grafikoa, sistemaren soluzio kopuruarekin:



d) Ez du soluziorik e) Soluzio bakarra f) Infinitu soluzio ditu

3_Honako ekuazio-sistema aljebraikoki ebatzi: $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

44. Irudia: Aurre ebaluazioan egindako froga

Lehenengo zatian, ekuazio-sistema bat eta honen hiru soluzio-pare posible ematen dira aukeran. Ariketa honetan ikasleek ekuazio-sistema baten soluzioaren esanahia dakiten ikusi nahi da. Bigarrenean, irudikapen grafiko bakoitza dagokion soluzio kopuruarekin lotzea eskatzen da. Galdera honen helburua ekuazio-sistema baten ebazpen grafikoan egin beharreko interpretazioa maila baloratzea da. Azkeneko ariketan, ekuazio sistema baten ebazpen aljebraikoa eskatzen da, erabili beharreko metodoa zehazten ez delarik. Honakoan, metodoren baten oroimen eta trebetasun maila balioetsi nahi da.

Situaciones (Brousseau, 1998) uno de los principales papeles del profesor. *Devolución*: Acto por el cual el profesor transfiere al alumno la responsabilidad matemática de una situación de aprendizaje y acepta las consecuencias de esta transferencia (Wilhelmi, 2005 or. 165).

8.2.2. Problemak ekuazio-sistemen bidez ebatzi (F1)

Lehenengo fasean, ekuazio-sistemen edukiekin hasi baino lehen, aurretiko jarduera bat egin da. Honetan iltzeen apustuen egoera bat planteatu da eta galdera desberdinez baliatuz, problema ekuazio-sistemen bidez lantzea da helburu nagusia, grafikoki nahiz aljebraikoki. Jarduera hau ohiko moduan (paperean) eta binaka lantzekoa da, planteatzen diren egoera desberdinak ebatzi eta interpretatu behar dituztelarik. Galdetegia edo ikasleek bete beharreko fitxa *B2 eranskinean* aurki daiteke. 45. Irudian probleman planteatzen diren egoera desberdinen galderak azaltzen dira.

Iltzeen jokoan parte hartzeko bi postu (P1 eta P2) aurkitu ditugu. Honako hauek postu bakoitzaren jokatzeko baldintzak dira:

P1_ Jokatu ahal izateko 5 euro jarri behar dira. Dirua irabazten hasteko nahita nahiez 4 iltze iltzatu behar dira. Behin 4 iltze sartuta, jarritako 5 euroak itzultzen dizkizute eta sartutako iltze bakoitzeko 1,25 € ematen dizkizute. 10 iltze sartzea lortzen baldin baduzu, hortik aurrera iltze bakoitzarengatik 2 € irabaz ditzakezu.

P2_ Lehenengo, 5 euro jarri behar dira eta hasieratik iltze bakoitzeko euro 1 ematen dizute. Seigarren iltzetik aurrera, 2 € irabazteko aukera ematen digute eta hamargarrenetik aurrera 1,25 € irabazi ahal dezakezu.

1.1. Ze postutan jokatuko zenuke? Zergatik?

1.2. Datu guztiak antolatuta izateko, ondorengo taula bete ezazu:

Iltze kopurua	Jasotako euroak (€)	
	1. POSTUA	2. POSTUA
1		
2		
3		
...		

Taula betetzeko lagungarriak izango zaizkizun galderak:

a) Zenbat iltze sartu ondoren hasiko zara dirua jasotzen?

b) Zenbat diru ematen dizute iltze bat sartzen duzun aldioro?

- Taulako datuak aztertu eta gero, lehen esandako postu berean jokatuko zenuke? Arrazoitu zure erantzuna.

1.3. Datu guztien antolaketa argiago ikusteko eta konparatu ahal izateko, bi postuen datuak kartesiar ardatzetan irudika itzazu:

Irudikapen grafikoari erreparatuta, ondorengo galderei erantzun:

a) Zein postutan jokatzea komeni zaizu? Irudikapen grafikoaren deskribapen bat eginez erantzun.

1.4. Aurreko egun batean gizon batek 46,50 € irabazi omen zituela esan digute. Zenbat iltze iltzatu behar izan zituen? Postu bakoitzeko soluzioa eman.

- Postu bakoitzaren datuek osatzen duten funtzioen ekuazio aljebraikoak kalkula itzazu, iltze kopurua eta jasotako diruaren arteko erlazioa bilatuz.

1.5. Zein iltze kopuru sartuta irabaziko zenuke diru kantitate berdina bi postuetan?

- Tarte bakoitzean dauden bi zuzenen funtzioen ekuazioak elkarrekin jarri ekuazio-sistema bat osatuz. Ekuazio-sistema bakoitzaren soluzioa eman. Arrazoitu zure erantzuna.

45. Irudia: Iltzeen jarduera

Problemaren apustuen egoera ikasleen motibazioa bilatu nahian proposatu da. Hasteko, egoera ahoz planteatu zaie, eta fitxan (45. Irudia) bi apustu postuen baldintzak deskribatu dira. Lehenik eta behin, galdera bat intuitiboki erantzun behar da, zein postutan jokatzea komenigarriagoa den azalduz. Gero, datuen antolaketa bat egiten da, lehenengo taula moduan eta jarraian grafiko moduan, bi iltze postuen datuak irudikatuz. Hauen ostean, hasierako galdera berdina galdetzen da, datuen interpretazioa argiago dagoelarik. Laugarren azpi-ariketan, grafikoan edo taulan ez dagoen informazio batengatik galdetzen da eta honen kalkulua errazteko nahian, bi postuen datuak hizkera aljebraikoan ematea eskatzen da, hau da, ekuazio moduan. Azkenik, bi iltze postuen tarte desberdinen ekuazio-sistemak ebazteko galdera planteatzen da. Irudikapen grafikoa aurretik eskatu denez, hau interpretatuz erantzuna lor daiteke. Probleman aplikatutako kontzeptu matematikoak ikustarazteko asmoz, sistemen adierazpen aljebraikoa eskatzen da. Halaber, ikasleek, gai izanez gero, ekuazio-sistemen soluzioak aljebraikoki lor ditzakete.

Jarduera honen diseinua luzerako ikaskuntza prozesu bat jarraituz egin da. Eguneroko bizitzako egoera batetik abiatuta, ekuazio-sistemen aplikazio bat lantzen da. Baina jarduera ez da horretara mugatzen, kontzeptu desberdinen garapen natural bat lantzen da (Wilhelmi, 2017). 38. Taulan jardueraren garapen prozesua zehazten da.

ILTZEEN JARDUERA

Azpi-ariketa	*Garapen prozesuan landutakoa*
1.1	- Intuiziozko argudiaketa.
1.2	- Datuen antolaketa tauletan (unitatera laburtuz). - Datuen interpretazioa.
1.3	- Taulako datuen irudikapena plano kartesiarrean. - Datuen interpretazioa.
1.4	- Grafikoaren interpretazioa “unitatera laburtuz” teknika erabiliz. - “x” eta “y” aldagaien erlazioaren zehaztapena: “y-ren balioa” = “unitatera laburbilduz lortutako balioa” · “x-ren balioa” - Funtzio linealaren zehaztapena ($y = mx$), hizkera sinplifikatu eta eraginkor bat bezala, non m malda unitatera laburbilduz lortutako balioaz adierazten den. - Formula erabiliz egoera interpretatu.
1.5	- Ekuazio-sistema baten esanahiaren eta soluzioaren interpretazio grafikoa. - Ekuazio-sistema baten adierazpen aljebraikoa lortu.

38. Taula: Iltzeen jardueraren garapen prozesua

Zeregin bat ebazteko modua kontuan hartuta, jarduera matematikoa ondorengo 4 aljebrizazio mailatan sailka daiteke: 0 maila (aljebrizazio arrazoiketa gabezia); 1.maila (aljebrizazio maila hasiberria); 2.maila (erdi-mailako aljebrizazioa); eta 3.maila (finkatutako aljebrizazio maila). Maila hauek zehazteko irizpideak orokortzea, unitarizazioa, formalizazioa eta ostentsioa, eta transformazioa dira (Godino, et al., 2014).

Aljebrizazio mailak laburki azaldu ondoren, iltzeen jardueraren garapen prozesuan ematen diren mailak deskribatuko dira. Problemaren garapen prozesuaren hasiera (1.2 ariketa) modu aritmetikoan ebatzi daiteke (0 aljebrizazio maila). Taulako datuen irudikapenerako, 1.maila bat beharrezkoa da, orokortze prozesu bat ematen delarik. Zuzenen ekuazioak lortzeko egiten diren pausoetan, garapen aljebraiko bat ematen da, irudikapenari lotutako aldagaien lotura bat egiten baita. Funtzio linealaren formula zehaztean, hizkuntzaren formalizazio bat gauzatzen da, 2.aljebrizazio maila adierazten duena. Egoera interpretatzeko formula erabiltzean, funtzio linealen kontzeptua testuinguru aljebraiko sendo batean garatzen da (3. maila). Gero, funtzio moten eredu bezala finkatzen da (4. aljebrizazio maila) (Wilhelmi, 2017).

8.2.3. GeoGebra jarduerak (F2)

Bigarren fase honen helburua ekuazio-sistema linealen ebazpen grafikoa ikastea da; eta horretarako, lehen mailako ekuazioen adierazpen grafikoa lantzea beharrezkoa da. Kontzeptu hauek jorratzeko software dinamikoen erabilera hautatu da. Bi jarduera proposatzen dira, bata zuzenen adierazpena lantzeko, eta bestea ekuazio-sistemen ebazpen grafikoa jorratzeko.

Beti ere, modelo dinamikoez gain, ohiko paperaren euskarrien erabilera beharrezkoa da. Hortaz, ikasleak bi tresna hauetaz baliatuko dira edukia jorratzeko. Paperean ikasleak idatzi edo oharrak har ditzake, ordenagailuaren pantailan gertatzen ari denarekiko independentziaz (Lasa, 2015).

GeoGebra programarekin bi jarduera landuko dira (G1 eta G2), eta eraikuntzak manipulatuz ikasleak paperezko fitxa batzuk bete beharko ditu. Klase amaieran irakasleak fitxa horiek jasoko ditu. Honakoan ere kolaborazioz lan egingo da, aurreko faseko bikote berdinak mantenduz. Bi euskarri izanen direnez, ikasle batek ordenagailua maneiatzen duen bitartean, besteak galdetegia beteko du. Ariketa bakoitzean lanen banaketa hau aldatu egingo da.

Ekuazio-sistemen ebazpen grafikoak lantzeko proposaturiko GeoGebrako eraikuntzen ostean, ohiko papereko ereduan, lan autonomoan, trebatze ariketak planteatzen dira. Baliabide informatikotik hastean, objektu matematikoak esploratu eta induktiboki froga daitezke. Ondoren, modelo tradizionalera pasatzean kontzeptuak trebatuko dira eta ezagutzak hobe ulertuko dira, soluzio aljebraiko osatuak lortzea errazten delarik.

Trebatze momentu horretarako testu-liburuko (Colera Jiménez, et al., 2016c) ariketa eta problemetan oinarritu da. Kapitulu honetako *8.1* ataleko 24-37 tauletan eta *8.3* ataleko 39.taulan ariketa hauek zeintzuk diren zehazten da.

Geogebra jarduera bakoitzarentzat liburu moduko eraikuntza bat sortu da. Eraikuntzak orrialde desberdinak ditu, jardueraren fitxan zehazten den ariketa bakoitzari dagozkionak. Eraikuntzaren goialdean jardueran zer landuko den laburki azaltzen da eta ikasleek fitxetako argibideei jarraituz, softwarea manipulatu eta paperezko galdetegia erantzun beharko dute. Ikasleei helarazitako dokumentu edo bete beharreko fitxak *B3 eranskinean* aurki daitezke. Eraikuntza dinamikoak nolakoak diren ikusteko, ondorengo link-ak txertatzen dira:

- G1 jarduera: https://www.geogebra.org/m/tfD4pZTA
- G2 jarduera: https://www.geogebra.org/m/AmwZw8A9

8.2.3.1. G1 GeoGebra jarduera: Funtzio lineal motak (zuzenaren adierazpenak)

Jarduera honek gehienbat zuzen baten malda eta ordenatua jatorrian kontzeptuen esanahia lantzea du helburu, ikasleek lehen mailako funtzioak irudikatzen ikasi dezaten.

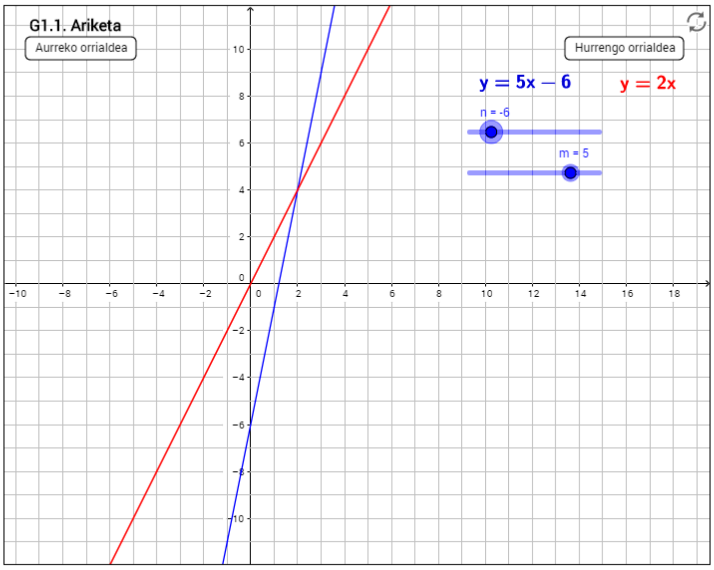
G1.1 ariketan ikasleek appleta (47. Irudia) manipulatu eta fitxan zehaztutako galderak (46. Irudia: **G1.1 ariketaren galdetegia**) erantzun behar dituzte.

G1.1. GeoGebrako ariketa ikusita ondoko galderei erantzun:

a) Ze elementu eta adierazpen ezberdin aurki ditzakezue?
b) Agertzen diren "*m*" eta "*n*" parametroak aldatzean zer gertatzen da?

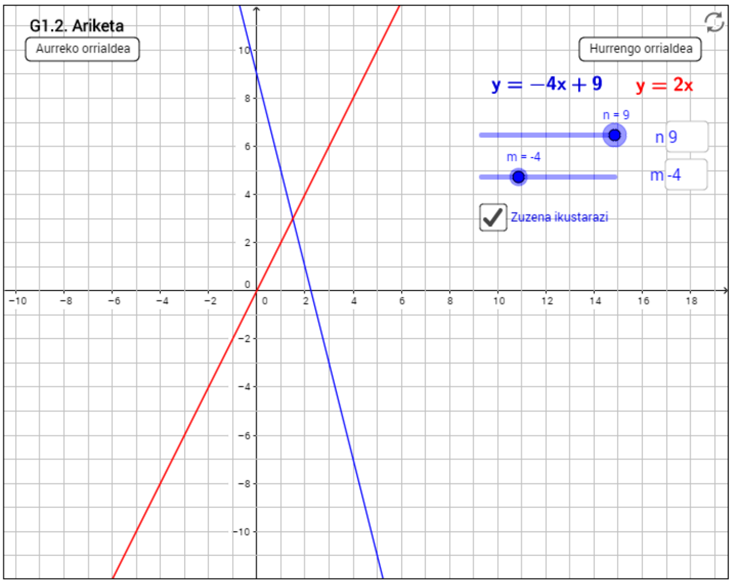
46. Irudia: G1.1 ariketaren galdetegia

47. Irudian ikusten den bezala, esplorazio applet honetan bi zuzenen ekuazioak eta hauen irudikapenak daude. Zuzen gorria finkoa da eta urdina malda (*m*) eta ordenatua jatorrian (*n*) parametroak aldatuz mugi daiteke. Ikasleak elementu eta adierazpen horiek identifikatu behar ditu, irudikapenek eta ekuazioek erabateko lotura dutela ikusiz. Ariketan malda eta ordenatua jatorrian parametroen esanahiaren gerturatze intuitibo bat egiten da.



47. Irudia: G1.1 ariketaren appleta

G1.2 ariketaren appletean bi zuzenak konparatu behar dira. Zuzen gorria finkoa denez, urdina mugitzean bestearekiko deskribapen bat egin behar da. Lagungarri eta eredu moduan taula erdi osatu bat ematen da, eta bikotearen arteko joko bat eginez bete behar da.



48. Irudia: G1.2 ariketaren appleta

49. Irudiako argibideetan jartzen duen moduan, *m* eta *n*-ri balioak emanez jokatu behar da. Partida bakoitzean appletak duen *zuzena ikustarazi* botoia sakatu gabe taula bete behar da, eta ondoren taulan jarritakoa zuzena dela egiaztatzeko, botoia sakatu (48. Irudia ikusi) eta bi funtzioen irudikapenak agertzen dira.

G1.2. Finko den zuzen gorriarekin (y = 2x) alderatuta, zuzen urdinaren "*m*" eta "*n*" parametroak aldatzean zer gertatzen den landuko dugu.

Baloreak emanda zuzenaren deskribapena iragarri behar da edo alderantziz, hau da, zuzena nolakoa den jakinda parametroei baloreak eman beharko zaizkie. Ilara hutsik dagoen kasuetan, ikasle batek balore batzuk asmatu eta ikaskideak zuzena nolakoa den iragarri beharko du.

Baloreak sartu baino lehen, "zuzena ikustarazi" ikurra sakatu gabe egon behar da, eta ea asmatu den egiaztatzeko, klikatzean zuzena agertuko da. Hurrengo partidaren baloreak sartu baino lehen, laukia berriz ere hutsik egon behar da. "m" eta "n"-ren balioak karratutxoetan sartuz edo barrak mugituz alda ditzakezue eta [-9, 9] tartearen barne egon behar dira.

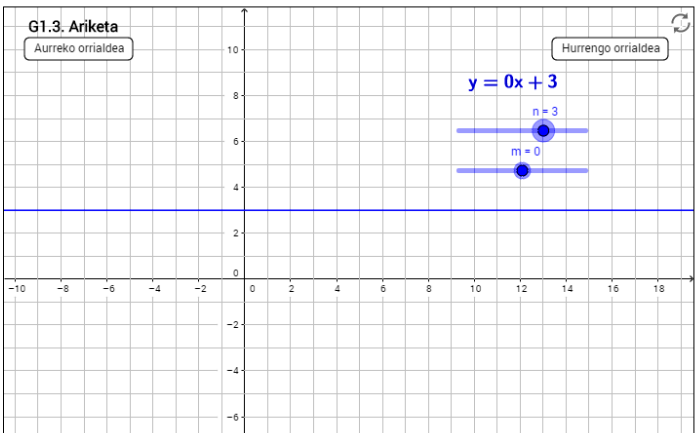
1. Ikaslea (bakoitiak): 2. Ikaslea (bikoitiak):

Partida	m	n	Zuzenaren deskribapena
1			Jatorritik pasa eta zuzen gorria baino inklinazio handiagoa dauka.
2			
3	0	-6	
4			Zuzen beherakorra da eta inklinazio txikia dauka.
...			

49. Irudia: G1.2 ariketaren galdetegia

Applet honek izaera bikoitza du, hau da, taula betetzeko garaian esplorazio jarduera bat egiten da, baina botoia sakatzean frogapen enpirikoko applet batean bihurtzen da. Frogapen mota hau appletaren erabiltzailea konbentzitzeko nahikoa da.

G1.3 ariketan aurrekoetan ikusi dena finkatu eta sakondu nahi da. Horretarako, appletean (50. Irudia) dagoen zuzena izanda, malda eta ordenatua jatorrian parametroen baldintza batzuen aurrean zuzena deskribatzeko eta honen ekuazioa emateko eskatzen da. 51. Irudiako taula betetzeko, eraikuntza dinamikoan esploratutako kasu partikular batzuk aztertu eta orokortze-prozesu bat egin behar da.



50. Irudia: G1.3 ariketaren appleta

G1.3. Oraingoan bakarrik zuzen urdinari erreparatuko diogu. Parametro bakoitzaren balio hauek izatean, zuzenean zer eragin duen ikusiko dugu. Egoera hauetan zuzena nolakoa den deskribatu, eta ikusitako zuzenaren adierazpen aljebraikoa (y = mx + n) nola geratzen den adierazi ezazue:

Egoera	Zuzenaren deskribapena	Adierazpen aljebraikoa
m < 0		
m = 0		
m > 0		
n < 0		
n = 0		
n > 0		

Behin taula osatuta, erantzun ondoko galderei:

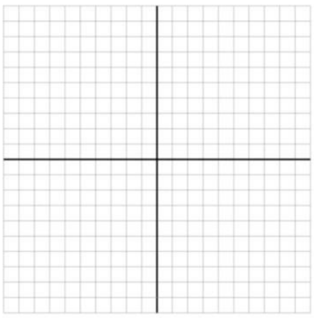
a) Zer adierazten du "n" parametroak?
b) Eta "m" parametroak? Nola lor dezakegu?

51. Irudia: G1.3 ariketaren galdetegia

Taula bete eta aztertu ondoren, *n* eta *m*-ren esanahia finkatzeko galdera batzuk planteatzen dira (51. Irudia ikusi).

G1.4 ariketa ebazteko ez da eredu dinamikorik erabili behar. Aurreko ariketako taulan lortutako zuzenen ezaugarri desberdinak aztertuz, lehen mailako funtzioen sailkatzea egiten da. Malda eta ordenatua jatorrian kontzeptuen esanahia ulertuta, funtzio moten adibide bana ematea eta hauek eskuz irudikatzea eskatzen da (52. Irudia ikusi). Guzti honekin, ikusitakoaren instituzionalizazio prozesu bat ematen da.

G1.4. Aurreko ariketan zuzen batentzako hiru formula desberdin lortu ditugu, horiek hiru zuzen moten adierazpen aljebraikoak dira. Aurretik lortutako erantzunak aztertuz, zuzen mota bakoitzaren ezaugarriak adierazi eta adibide bana eman (aljebraikoki nahiz grafikoki):



- Funtzio konstantea: y = n
- Proportzionaltasun-funtzioa: y = mx
- Funtzio lineala: y = mx + n

52. Irudia: G1.4 ariketaren galdetegia

8.2.3.2. G2 GeoGebra jarduera: Ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa

Jarduera honen helburu nagusia ekuazio-sistemen ebazpen grafikoa ikastea da, horretarako bi zuzenen posizio erlatiboen ikasketa beharrezkoa delarik. Lehenik eta behin, eraikuntza dinamikoren izenburupean, bi dimentsioetan zuzenek izan ditzaketen hiru posizio erlatiboak gogorarazten dira.

G2.1 ariketaren appletean, 54. Irudian ikusten den bezala, bi erdikariak eta zuzen aldakor bat ditugu. Aurreko jardueran bezala, grafiken ekuazioak adierazten dira eta zuzen urdinaren *n* eta *m* parametroak (-9, 9) tartean mugi daitezke. Galdetegiak (53. Irudia) zuzen urdina eta erdikariak paralelo, ebakitzaile edo kointzidente izateko *m* eta *n*-ren balioak emateko eskatzen du.

G2.1. GeoGebrako irudian mugitu ahal den zuzen bat eta 1. eta 2.erdikariak (e1 eta e2) aurki ditzakezue. Zuzen urdinaren posizioa aldatuta, ondorengo galderei erantzun:

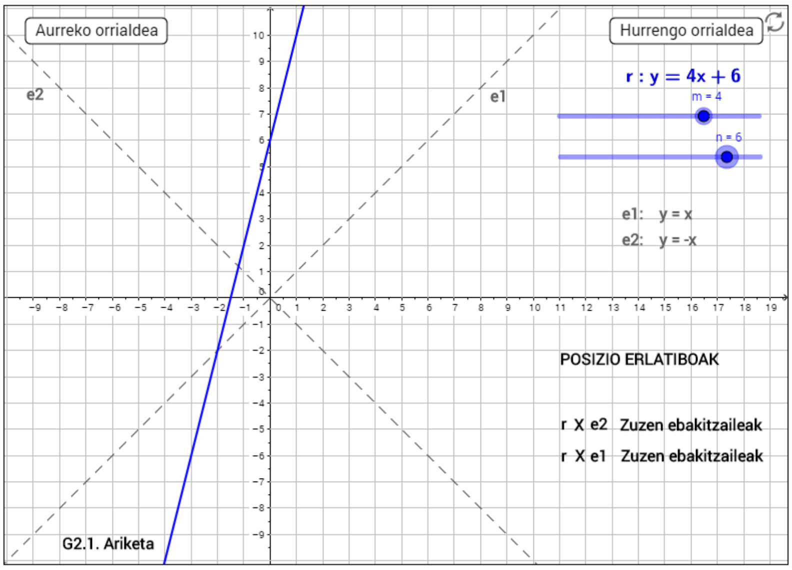
a) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariarekiko **paraleloa** izan dadin? Eta 2.erdikariarekiko paraleloa izateko?

b) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariko zuzenaren **berdina** izateko? Eta 2.erdikariko zuzenaren berdina izateko?

c) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikaria **ebakitzeko**? Eta 2.erdikaria ebakitzeko?

53. Irudia: G2.1 ariketaren galdetegia

Ilustraziozko ariketa da honakoa, appletak zuzenaren eta erdikarien arteko posizio erlatiboa zein den zehazten baitu.



54. Irudia: G2.1 ariketaren appleta

G2.2 ariketaren appletean bi zuzen aldakor daude, bata gorria eta bestea urdina. Aurreko kasuan bezala, zuzenen arteko posizio erlatiboa behekaldean zehazten da (56. Irudia ikusi). Enuntziatuak (55. Irudia) bi zuzenen arteko posizioa erlatiboak betetzeko, hauen arteko maldak eta ordenatuak jatorrian nolakoak izan behar diren jartzea eskatzen du.

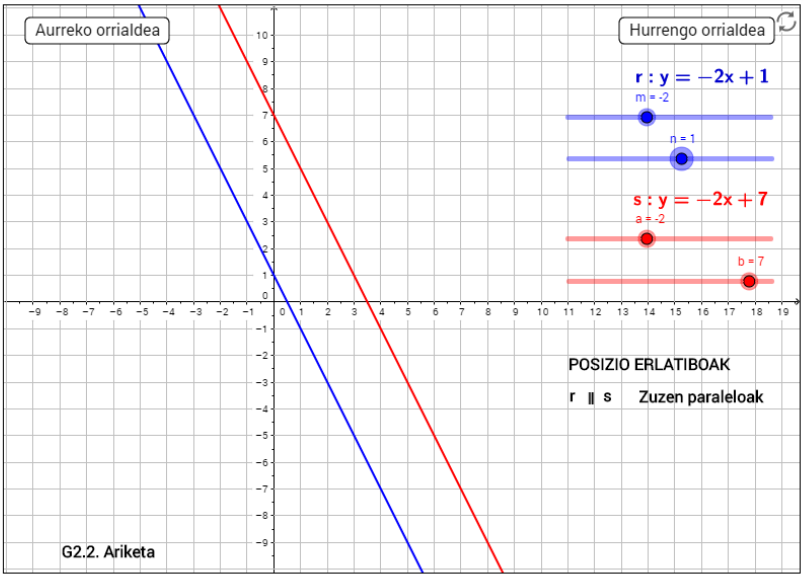
Suposatzen da ikasleak softwarea erabiliz esplorazio prozesu bat egingo duela eta taula betetzeko indukzio enpiriko bat egingo duela. Horretarako orokortze-prozesu bat eman behar da. Horrenbestez, applet honekin esplorazio momentu batetik frogapen momentu matematiko batetara pasatzen da ikaslea. Bi zuzenen posizio erlatiboa grafikoki naiz analitikoki lantzea da ariketa honen helburua. Bete beharreko taula behin ulertuta, funtzioen ekuazioak ikustearekin zuzenen posizio erlatiboak jakitea posiblea da.

G2.2. Irudi honetan mugitu ahal diren bi zuzen ditugu. Zuzenen arteko posizio erlatiboak bete ahal izateko (ebakitzaileak, paraleloak edo kointzidenteak), zuzenen maldak eta “n”-ren balioak beraien artean nolakoak izan behar diren adierazi (berdinak edo desberdinak).

**Oharra: Zuzen urdinaren adierazpen orokorra honela adierazi da: $y = mx + n$*
Zuzen gorriaren adierazpen orokorra honela adierazi da: $y = ax + b$

Posizio erlatiboa	Maldak (m eta a)	Ordenatuak jatorrian (n eta b)
Paraleloak		
Kointzidenteak		
Ebakitzaileak		

55. Irudia: G2.2 ariketaren galdetegia



56. Irudia: G2.2 ariketaren appleta

G2.3 deituriko azkeneko ariketan, aurrekorako erabili den applet berarekin lan egingo da. Galdetegiak, berriz ere, taula bat dakar, honetan funtzio pareak agertzen direlarik. Appletaren laguntzaz edo aurretik ikusitakoaz baliatuz, hauen arteko posizio erlatiboak eta ekuazio-sistemen soluzioa eskatzen da, 57. Irudia ikusi daitekeen bezala. Ariketa honetan partikularizazio prozesu bat ematen da, aurreko tauleko informazio orokorra, kasu partikularretara aplikatu behar da eta.

G2.3. Ekuazio-sistema lineal bat grafikoki adieraz dezakegu, bi zuzen irudikatuta. Ekuazio-sistema baten soluzioa, bi ekuazioen soluzio komuna da, beraz, grafikoki aztertuta, sistemaren soluzioa zuzenen puntu komunak izango dira. Hau jakinda eta GeoGebraren laguntzaz, hurrengo sistemek duten zuzenen posizio erlatiboa eta soluzioa eman (soluzio bakarra badu adieraz ezazue).

Ekuazio-sistema	Posizio erlatiboa	Sistemaren soluzioa
$\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$		
$\begin{cases} y = -7x - 1 \\ y = -7x + 8 \end{cases}$		
…		

57. Irudia: G2.3 ariketaren galdetegia

Ekuazio-sistemak ez dira ohiko moduan eman, baizik eta funtzio-pare bezala. Jarduera honetan interpretazio geometrikoari garrantzia eman nahi zaio, beraz, sistemaren irudikatze prozesua erraztearren, adierazpen hori erabiltzea erabaki da. Behin kontzeptu hauek ulertuta, papereko modu tardizionalean sistemak ohiko moduan emanda grafikoki ebatziko dira.

8.2.4. Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa (F3)

Fase honetan ez da jarduera osagarririk egin. Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa modu dialogikoan azaldu da eta landutakoa trebatzeko, bakarkako lanean, liburuko ariketak egin dira. Kapitulu honetako *8.1* eta *8.3* ataletan klasean nahiz etxean egindako testu-liburuko ariketak zehazten dira.

8.2.5. Azterketa (F4)

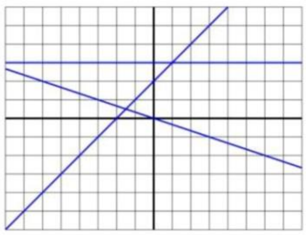
Azterketa, lehen esan bezala, unitatean landutakoaren bakarkako lana baloratzeko baliabide bat bezala planteatu da. Ikasleei helarazitako dokumentua *B4 eranskinean* dago. Galdetegia bost ariketez eta problema batez osatua dago (58. Irudia).

1. Lotu ekuazio bakoitza dagokion zuzenarekin. Esan zein den malda (m) eta ordenatua jatorrian (n) kasuetako bakoitzean. (1,5 puntu)

a) $y = x + 2$

b) $y - 3 = 0$

c) $-y - \frac{1}{3}x = 0$



2. Ebatzi grafiko bidez honako ekuazio-sistema (1,5 puntu): $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

*(*Irudikapenean, zuzen bakoitzaren ekuazioa adierazi).*

- Zein da ekuazio-sistemaren soluzioa? Arrazoitu zure erantzuna.

3. Ebatzi grafiko bidez ondoko ekuazio-sistema. Ondoren berdinketa-metodoa erabiliz, grafikoki lortutako soluzioa ongi dagoela egiaztа ezazu. *(*Irudikapenean, zuzen bakoitzaren ekuazioa adierazi).* (2,5 puntu)

$$\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

4. Ondoko ekuazio-sistema, ordezkapen-metodoa erabiliz ebatzi. (1 puntu)

$$\begin{cases} 2x - 3y = -9 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$$

5. Ebatzi honako ekuazio-sistema egokien deritzozun metodoa erabiliz, eta egiaztatu lortzen duzun soluzioa: (1,5 puntu)

$$\begin{cases} \frac{5x}{4} - \frac{1}{4} = -y \\ \frac{10x + 6}{5} = 3(y - 1) \end{cases}$$

6. Loreak eta Anek, bien artean, 124 € dituzte. Loreak Aneri 3 € ematen badizkio, Loreak Anek hiru halako izango du. Zenbat diru du bakoitzak? (2 puntu)

58. Irudia: Azterketa

Hiru ariketetan zuzenen eta sistemen adierazpen grafikoa lantzen da. Ebazpen grafikoak azterketan nolabaiteko pisua izatea erabaki da, hamarreko kalifikazio maximoaren 4.3 puntu esleitzen zaizkiolarik. Zuzenen eta sistemen adierazpenari buruzko jarduera dinamiko eta tradizionalak jorratu egin direnez, hauek ikasketa prozesuan izan duten eragina aztertu nahi da.

Lehenengo ariketan lehen mailako ekuazio batzuen malda eta ordenatua jatorrian parametroak identifikatzeko eskatzen da. Halaber zuzenen ekuazio eta irudikapenen arteko lotura egin behar da, funtzio motak desberdinduz. Beste bi ariketetan ekuazio-sistemen ebazpen grafikoa eskatzen da, batean bi zuzen paralelo eta bestean bi zuzen ebakitzaile lortzen direlarik. Sistemaren ebazpen grafikoari lotuta dagoen zuzenen posizio erlatiboen funtzioan soluzioa interpretatu eta arrazoitzea da helburu nagusia.

Bigarrenik ekuazio-sistemen ebazpen grafikoaren inguruko jakintzak aztertu nahi dira. Azterketan hirutan, testuingururik gabeko ariketetan, ebazpen mota hau lantzen da, 3.7 puntuko pisua duelarik. Bestalde, metodo desberdinen jakintza frogatzeko helburuz, ekuazio-sistema sinpleetan ordezkapen eta berdinketa-metodoak egitea eskatzen da. Azkenik, sistema konplexu bat planteatzen da eta hau ebazteko metodo egokiena aukeratzeko adierazten da, laburpen-metodoa kalkulu errazak bermatzen dituena izanik. Azken metodo hau exijitu ez den bakarra da, esperimentazioan ikusi den bezala, ikasleek ordezkapen metodoarekin batera gehien erabiltzen dutena baita.

Ekuazio-sistemen aplikazio erreala soilik azkeneko probleman lantzen da eta 2 puntu dagozkio. Esperimentazioan gutxien landu den arloa da. Hasierako iltzeen jardueran jorratu nahi zen, baina lehen aipatu bezala, arrazoi desberdinengatik, ezin izan da behar bezala eta guztiz bukatu. Bestetik, problemen lanketarako epe gutxi izan zen eta zentroko irakasleak saio bat baino pixka bat gehiago eskaini izan ahal zion.

8.3. Zereginak: aurreikusitako ikaslearen jarduera autonomoa

Jarraian ikus daitekeen 39. Taulan ikasleek etxerako izandako zereginak eta hauek egiteko aurreikusitako denbora adierazten dira. Gehiengoak Anaya argitaletxeko 4.DBHko Matematika Aplikatuen testu-liburukoak dira (Colera Jiménez, et al., 2016c). Ariketak kontsultatu nahi izanez gero, jorratutako gaien orrialdeak *A eranskinean* atxiki egin dira. Bosgarren zereginaren jarduerak Geogebra programaren medioz lantzeko prestatutako fitxa batzuetan aurki daitezke (*B3 eranskina* ikusi).

ZEREGINAK		
Mota	***Aurreikusitako denbora***	***Ikasketa prozesuarekin duen lotura***
4. Saioaren zeregina Zuzenen adierazpenaren ariketak: 134.orriko 5a, 6d, 3b eta 141.orriko 3.	30 min	Aplikazioa (modu dinamikoan ikusi dena modu tradizionalean lantzeko)
5. Saioaren zeregina GeoGebrako G2 jardueraren G2.1 eta G2.2 azpiatalak bakarka bukatu.	25 min	Garapena (esplorazioarekin jarraitzen da)
6. Saioaren zeregina Ekuazio-sistemen ebazpen grafikoa: 106.orriko 1b ariketa.	10-15 min	Garapena (modu dinamikoan ikusi dena modu tradizionalean sakontzeko)
9. Saioaren zeregina Laburketa metodoa: 114.orriko 9b eta d	15-20 min	Errefortzua (klasean landutakoa trebatzeko)
10. Saioaren zeregina Ordezkapen-metodoa: 114.orriko 7d + Metodo egokienarekin ebatzi: 114.or 10b	15-20 min	Errefortzua (klasean landutakoa trebatzeko) + (metodoen egokitasuna lantzeko)
12. Saioaren zeregina Ekuazio-sistema konplexuak: 109.orriko 1c eta d ariketak	20 min	Errefortzua (klasean landutakoa trebatzeko)
13. Saioaren zeregina Problemak: 115.orriko 22 eta 33	20 min	Errefortzua (klasean landutakoa trebatzeko)

39. Taula: Zereginak

9 Kapitulua
Esperimentazioa

Hurrengo orrialdeetan 4.DBHko klase batekin egindako ekuazio-sistemen ikasketa prozesuaren esperimentazioa aztertuko da. Lehenik eta behin, ikasleen laginari buruzko informazioa emanen da; jarraian, jarduera desberdinendako aurreikusitako portaerak aurkeztuko dira; eta azkenik, esperimentazioaren emaitzak eta hauen eztabaida azalduko da.

9.1. Lagina

Esperimentazioa Iruñerriako institutu bateko 4.DBHko 18 ikaslez osatutako aniztasun klase batean egin da (6 neska eta 12 mutil). Ikasle taldea bi klase desberdinen ikasleen elkarketaz sortzen da. Batetik, hezkuntza indarpena duen aniztasuneko 7 ikaslek osatutako talde txikia dugu (A taldea) ; eta bestetik, klase “arrunt” batetik ateratako 11 ikasle (B taldea). Denek modalitate aplikatua egiten dute, ikasgai orokorrez gain Teknologia, Matematika Aplikatuak, Zientzia Aplikatuak eta hautazko ikasgai bat (plastika edo IKT) dutelarik. Ikasle guztiak Lanbide Heziketa egitekotan dira eta bakar batek Batxilergo teknologikoa egingo du.

40. Taula eta 41. Taula zehazten den bezala, 10 ikasle errepikatzaile, horietatik hiruk bitan errepikatu dutenak, eta hiperaktibitate nahastea diagnostikatua duten 3 ikasle daude. Ikasle bat bereziki nabarmentzen da (I9) eta beste batek (I3) laguntza berezia behar du eta gutxieneko ezagutzen azterketa egiten zaio. Bizpahiru ikaslek, lan ohitura faltagatik, arratsaldetan klase partikularrak jasotzen dituzte.

Orokorrean klaseak motibazio falta handia du, sei ikasle kenduta, gehiengoak oso erraz galtzen du arreta. Beraz, inplikazio eta parte-hartze txikia dago. Ondorengo 40. Taula eta 41. Taulatan ikasle bakoitzari buruzko informazioa emango da.

A taldea		
Ikaslea	*Ikaslearen informazioa*	*Informazio gehigarria*
Ikasle 1 (I1)	- Bitan errepikatzailea (LHko 5.mailan eta 3.DBHn) - Hiperaktibitate nahastea (TDAH), medikatua.	Langilea.
Ikasle 2 (I2)	- Errepikatzailea 1.DBHn - Hiperaktibitate nahastea (TDAH)	Motibazio gutxi. Batzuetan jarrera disruptiboa dauka.
Ikasle 3 (I3)	- Errepikatzailea LHko 4.mailan	Interesa dauka. Ulermen eta analisi gaitasun baxua.
Ikasle 4 (I4)	- Errepikatzailea 2.DBHn	Motel lan egiten du baina interesa du eta portaera ona.
Ikasle 5 (I5)	- Errepikatzailea 2.DBHn	Asko kostatzen zaio eta arreta errez galtzen du.
Ikasle 6 (I6)	- Errepikatzailea 3.DBHn	Motibazio gutxi eta gaitasun arazorik ez.
Ikasle 7 (I7)		Lan egiteko ohitura falta. Arreta errez galtzen du.

40. Taula: A taldeko ikasleen deskribapena

B taldea		
Ikaslea	*Ikaslearen informazioa*	*Informazio gehigarria*
Ikasle 8 (I8)	- Errepikatzailea 4.DBHn	Motibazio gutxi eta arreta errez galdu. Gainontzeko ikasleen arreta galarazten du.
Ikasle 9 (I9)	- Bitan errepikatzailea (4.DBHn eta zehaztugabe)	Oso langilea
Ikasle 10 (I10)	- Hiperaktibitate nahastea (TDAH), medikatua.	Interesa dauka.
Ikasle 11 (I11)	- Bitan errepikatzailea (4.DBHn eta zehaztugabe)	Interes falta. Lan egiteko ohitura falta.
Ikasle 12 (I12)	- Errepikatzailea 4.DBHn	Lan egiteko ohitura falta.
Ikasle 13 (I13)		Ulermen arazoak. Oso langilea. X klase txikian egoteko hautagaia.
Ikasle 14 (I14)		Arreta errez galdu. Lan egiteko ohitura falta. A talde txikian egoteko hautagaia .
Ikasle 15 (I15)		Langilea
Ikasle 16 (I16)		Langilea
Ikasle 17 (I17)		Arreta errez galtzen du.
Ikasle 18 (I18)		Arreta errez galtzen du.

41. Taula: B taldeko ikasleen deskribapena

8. kapituluan aipatu denez, F1 eta F2 faseetan ikasleek bikoteka lan egingo dute. Bikoteen osaketa egiteko, irizpidetan oinarritutako bikote aukeraketa egin da. 40. Taula eta 41. Taulatan zehaztutako informazioa eta esperimentazio aurretik praktiketan behatutako ikasleen jarrerak kontuan hartu egin dira. Ikasle bakoitzak duen interesa, arreta maila, lan ohitura, matematika ezagutza maila eta haien arteko harremanak izan dira irizpide nagusiak. Matematiketan zailtasun gehien dituzten pertsonak maila handiagoa dutenekin elkartzen saiatu da, ikasleak haien artean lagun daitezen. Aldi berean, ikasle “mugituenak” edo arreta falta dutenak, ikasle lasaiago eta langileekin jartzen saiatu da. Jarraian, bikoteen osaketa aurkezten da:

Bikotea	**A bikotea**	**B bikotea**	**C bikotea**	**D bikotea**	**E bikotea**
Ikasleak	I1 eta I8	I2 eta I16	I3 eta I9	I4 eta I10	I5 eta I17

Bikotea	**F bikotea**	**G bikotea**	**H bikotea**	**J bikotea**
Ikasleak	I6 eta I18	I7 eta I14	I11 eta I13	I12 eta I15

42. Taula: Bikoteen osaera

9.2. Aurreikusitako portaerak

Segituan, fase bakoitzean proposatutako jarduera osagarri bakoitzarentzat aurreikusitako portaerak azalduko dira.

9.2.1. Aurre ebaluazioa

Ekuazio-sistemen gaia berria ez den arren, ikasle askok urte batetik bestera ezagutza matematikoak ahazten dituzte. Arrazoi horrengatik klasearen gehiengoak ariketak ongi ebazten ez jakitea espero da. Hala ere, aspektu aljebraikoei dagokienez, ikasleek oroitzapen gehiago izatea espero da, normalean trebatze ariketa mekanikoak gehien landu ohi dena baita.

Frogako lehenengo ariketa ikasleren baten batek egiaztapen aljebraikoa eginez ebaztea espero da, baina gehiengoak kalkuluak buruz egingo dituela uste da, prozesu azkarragoa baita. Bigarrengo ariketan, hainbat ikaslek zuzen ebakitzaileek soluzio bakarra dutela jakingo dute, eta beste bien artean zalantzak espero dira. Seguruenik baten batek ariketa zoriz eginen du. Hirugarrengoa oso pertsona gutxik ebatziko dutela espero da, seguruenik ordezkapen metodoa erabiliz, irakasten den lehenengo metodoa izan ohi denez, irakasle askok maiz erabiltzen dutena baita.

9.2.2. Iltzeen jarduera

Orokorrean ikasle askori problemak egitea kosta egiten zaie, aplikatu beharreko kontzeptu matematikoak erlazionatzen ez dituztelako edota aljebrako edukietan, enuntziatu bat hizkera aljebraikora pasatzeko arazoak izan ohi direlako. Lehen azaldu den moduan, probleman gauza desberdinak lantzen dira, datuak taula eta grafikoetan antolatzetik, funtzioen ekuazioak eta sistemak landu eta lortu arte.

Prozesu guztia, problemak planteatzen duen egoera ongi interpretatzeko egiten da, beraz, hasteko, intuitiboki galdera bat erantzun behar da. Ariketa honetan ez dira erantzun zuzen gehiegirik espero, maiz ikasleek probleman asko sakondu gabe erantzuten baitute.

Datuak enuntziatutik ateratzeko arazo batzuk espero dira, batik bat datu aldaketak dauden puntuetan edota hasieran dirua irabazi arte, lau iltze sartu behar direneko postuan. Datuak irudikatu beharreko fasean ez da zalantza handirik espero. Dena den, gerta liteke bikoteren batek ardatzak nahastea edota neurriak proportzionalak ez egitea.

Grafikoa interpretatzean, taula aztertzean baino konklusio arrazoitu eta zuzenagoak egon daitezke, grafikoak bisualagoak direnez hauetaz informazioa lortzea errazagoa suertatzen baita.

Zuzenen formulak ateratzeko *1.4 ariketa* zailtasun gehien izango dituena dela aurreikusten da. Seguruenik irakaslearen esku-hartzea beharrezkoa izanen da eta ikasleen blokeo egoeren aurrean, ariketa klase guztiaren artean modu dialogikoan ebatzi edota eredu errazago bat magistralki eman beharko da, gero ikasleek erreprodukzioz ariketa ebatzi dezaten.

Azken egoera erantzuteko informazioa grafikotik nahiz tauletik arazorik gabe aterako dela aurreikusten da. Hala ere, ikasleek ez dute jakingo ekuazio-sistema baten soluzioa lortzen ari direla. Horregatik planteatutako azken galderan, tarte bakoitzeko sistemak adieraztea eskatzen da, gehienbat problema ekuazio-sistemekin lantzen ari dela eta sistema aljebraikoki ebaztean grafikotik lortu duten emaitza bera ateratzen dela ikus dezaten.

9.2.3. GeoGebra jarduerak

9.1. Lagina deituriko atalean azaldu den moduan, esperimentazioko ikasle taldeak modalitate aplikatuko ikasketak egiten ditu eta aniztasun handikoa da. Talde hauetan, teknologia berriak erabiltzea aproposa da, matematikak erakargarriagoak egiten baitira. *8.2* atalean GeoGebra softwarearekin diseinatu diren bi jarduerak azaldu dira eta honakoan hauen aurrean espero diren portaerak deskribatuko dira.

Jarduera dinamiko hauekin, ikasleak bere kabuz beste urteetatik dituzten ezagutzak oroitaraztea eta lantzea nahi da. Horregatik ikasleek modu aktiboan eta irakasleak modu pasiboan parte hartuko dute. Irakaslearen papera, jarduerak eta hauen dinamika azaltzea nahiz agertzen diren zalantzak argitzea izango da. Baliteke, klasearen gehiengoak kontzepturen bat ez ulertzea, beraz, momenturen batean irakasleak azalpen magistral edo dialogiko bat eman beharko du.

Taldeari dagokionez, matematikekiko interes gutxi duten ikasle batzuk daude, beraz, hauen jarrera dela eta, arazoren bat egon daitekeela espero da. Normalean oso erraz galtzen dute arreta eta askotan klasean sortzen den giroa ez da lan egiteko batere ona. Klasean bakarkako lana bidaltzerakoan nahiko ondo funtzionatu ohi dute, baina talde lanak bidaltzean edota beste gela batetara joatean nahiko aztoratzen dira. Jarduera hauek informatika gelan egin behar direnez eta beraien lan espaziotik ateratzeak beste distrakzio bat suposatzen duenez, taldeko lan giroa mantentzea zaila izanen dela aurreikusten da.

Normalean testu-liburuko ariketak egiten dituzte, bere matematikako euskarri material bakarra liburua delarik. Jarduera hauetan ordenagailua eta fitxak erabili behar dira, hortaz, euskarri materiala ere aldatzen ari da.

Bestetik, ikasleak matematiketan eredu bat erreproduzitzera ohituta daude, hau da, azalpen baten ostean beraiek trebatze ariketak egiten dituzte. Jarduera honetan beren ezagutzetatik abiatu behar dira, ondorioz blokeo egoerak egon daitezke. Gainera, eredu dinamikoen arriskuetako bat ikasleren batek jarduera jolas soil bat bezala hartzea da. Kasu hori gertatzekotan, landu nahi diren edukien ulermena ez litzateke bermatuko.

Jarraian jarduera bakoitzean espero diren portaera nagusiak azalduko dira.

<u>9.2.3.1. G1 jardueran aurreikusitako portaerak</u>

Lehen mailako funtzioak aztertzen diren jarduera honetan, malda eta ordenatua jatorrian kontzeptuen esanahia lantzen da batez ere. Kontzeptu hauek ulertzeko zailtasun asko izan ohi dira, ondorioz, hauen irudikapenean ere eragina izan dezake.

G1.2 ariketa esplorazio momentu bezala planteatu da, botoia sakatzean frogapen enpiriko bat ematen delarik. Ikasle batzuk ariketa botoia sakatuta egiteko arriskua dago, hortaz ariketa appletak irudikatutakoaren deskribapen bat egitera mugatuko litzateke, *m* eta *n*-ren esanahiak landuko ez zirelarik.

G1.3 ariketan eraikuntza dinamikoaren manipulazio baten ondorioz, malda eta ordenatua jatorrian kontzeptuen funtzioan arau moduko konklusio batzuk lortu behar dira. Ariketaren ebazpen horretan orokortze-prozesu bat ematen da. Kasu konkretu batzuetatik abiatuta arau bat lortzen da, gerora elementu partikular bat identifikatzeko baliagarria izango dena. Modu honetan, *m* eta *n* parametroen esanahia ulertu eta lehen mailako funtzio motak irudikatzea ahalbidetuko da. G1.2 appleta modu zuzenean (botoia sakatuta) erabili ez bada, ariketa honetan arazoak egon daitezke, blokeo egoerak sortuz edota taula gaizki betez, *m* et *n* parametroen esanahia ez ulertzearen ondorioz.

Azkeneko instituzionalizazio ariketan, funtzioak irudikatzeko zailtasunak ager daitezke. Orain arte, programak irudikatuta erakusten zituen zuzenak. Nahiz eta kontzeptuak ulertu direla iruditu, norberak bere kabuz paper eta arkatzarekin lan horri aurre egitean zalantzak ager daitezke. Arrazoi horrengatik bi ereduen (tradizionala eta dinamikoa) lanketa beharrezkoa da.

9.2.3.2. G2 jardueran aurreikusitako portaerak

Ekuazio-sistemen ebazpen grafikoa ikastea helburu duen jarduera honetan, hasteko bi zuzenen posizio erlatiboak landuko dira, berriz ere, *m* eta *n* parametroen funtzioan.

Ordenagailua maneiatzean eraikuntzak G2.1 ariketak eskatutakoa ilustratuko digu, zuzenen posizio erlatiboak zeintzuk diren adieraziz, beraz, ikasleak bakarrik ekuazioetan dauden *m* eta *n*-ren balioei erreparatu beharko die. Ariketa hau ilustraziokoa denez, ez da zailtasun handirik espero.

G2.2 ariketan ere esplorazio fase baten ondorioz konklusio batzuk aterako dira, bi zuzenen arteko maldak eta ordenatuak jatorrian nolakoak (berdinak edo ezberdinak) izan behar diren esanez. Lortutako arau horien frogapena bermatzeko orokortze-prozesu bat eman behar da. G2.3 ariketan, ordea, kontrako prozesua egingo da. Behin aurreko ariketako araua izanda, partikularizazio bat eginen da, ekuazio-sistema zehatz batzuen soluzioak lortzen direlarik. Aurreko ariketa ulertu bada, partikularizazio hori emateko gai izan beharko lirateke.

Jarduera hau bukatzean, ikasleak kontzeptuak ikasiak izanen dituela suposatzen da eta papereko modu tradizionalean trebatze ariketak egitea falta izango litzateke.

9.2.4. Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa

Jarduera guztietatik ikasleek hoberen eramanen duten fasea dela espero da, beraiek ohituta dauden euskarri material, espazio, eta metodologia (imitaziozkoa) erabiliko baita. Prozedura oso mekanikoak direnez, eta aurreko gaian ekuazioen ebazpena landu berri dutenez, gehienera jota akats aritmetikoak edota aljebraikoak izango dira kontuan hartzeko aspektuak. Hori dela eta, metodoen aukeraketa eta hauek aplikatzeko aldagaien hautaketa egokiari eman beharko zaio garrantzia.

9.2.5. Azterketa

Jarraian azterketaren (58. Irudia ikusi) ariketa bakoitzaren aurrean ager daitezkeen portaerak aurreikusiko dira.

Zuzenen adierazpenaren lehenengo ariketan, lehenengo mailako ekuazio sinple batetik zuzen baten ekuazio orokorra (funtzio afinarena: $y = mx + n$) lortzen jakin behar da. Ekuazioa modu honetan izanda, malda (m) eta ordenatua jatorrian (n) parametroen balioak erraz identifikatu daitezke. Ondoren, zuzen baten ekuazioa eta irudikapena lotu behar dira. Ariketan hiru zuzen ematen dira, bat lehen mailako funtzio mota bakoitzeko, hau da, funtzio konstante, lineal eta afin bana.

Funtzio afinean, ekuazio orokorraren moduan eman denez, *m* eta *n* ongi identifikatzea espero da. Emaitza posible bat, maldaren balioa x-rekin ematea da. Funtzio konstantean ez da arazo handirik espero, gehienera jota ordenatua jatorriaren zeinua aldrebes ematea edota *m* eta *n* parametroak nahastea. Azkenekoa, zuzen lineala, zalantza edo nahaste gehien sortuko dituena izanen da. “y” aldagaia koefiziente negatiboarekin eman denez, maldaren zeinuarekin arazoak izan daitezke. Ekuazio eta irudikapenen loturarekin ez da arazo handirik espero, zuzen bakoitza mota batekoa izanda argi desberdintzen baitira.

Bigarren eta hirugarren ekuazio-sistemen ebazpen grafikoko ariketei dagokionez, akats ugari espero dira, kontzeptu hau landu denean, zalantza ugari azaleratu baitira. Malda eta ordenatua jatorrian parametroen esanahia eta irudikapena ulertzeko arazo ugari izan dira aurreko F2 faseko jardueretan. Lehen aipatu bezala, ekuazio orokorra lortzeko, “y” askatzeko garaian arazoak izan daitezke honek koefiziente negatiboa badu. Zuzenak irudikatzerako orduan, behin *m* eta *n* identifikatuta, (0,n) puntua ongi irudikatzea espero da, baina maldarekin arazo gehiago izan daitezke. Zuzenak balio taulak eginez grafikoak egingo dituen ikasleren bat egon daiteke, aurreko DBHko kurtsoetan finkaturiko metodoa baita.

Behin zuzenak irudikatuta, baten batek ariketa bukatutzat eman dezake, metodo grafikoa ebazpen metodo bat bezala ikusten ez dutelako. Kalkulu aljebraikoak soluzio bat lortzearekin lotzen denez, eta metodo honetan kalkulu aljebraikorik ez dagoenez, ez da soluzio baten beharra ikusten.

Zuzenen posizio erlatiboaren funtzioan sistemaren soluzioa interpretatzeko garaian, posizio erlatiboak ongi desberdinduko direla espero da, baina ez hauei lotutako interpretazioa. Hau da, zuzen ebakitzaileek soluzio bakarreko sistema irudikatzen dutela jakitearekin ez dago arazo handirik, baina zuzen kointzidente eta paraleloen arteko interpretazioarekin akats iraunkorrak agertu ohi dira. Maiz, zuzen paraleloek infinitu soluzio dituztela esaten dute. Lotura hori infinituan ematen dela uste izatearekin erlaziona daiteke. Bestetik, ekuazio-sistema baten soluzio aljebraikoaren esanahia, soluzio geometrikoarekin ez lotzeagatik gerta liteke.

Metodo aljebraikoei dagokienez, aurreko ekuazioen unitate didaktikoan agertzen ziren akats iraunkor berdinak ager daitezke; hala nola, identitate nabarien aplikazio okerra, minus ikurrak parentesi edo zatikien aurrean gaizki eragitea, zatikiak dituen ekuazio batean gai guztiekin zatiki baliokideak ez egitea, e. a. Gai honi erreparatzen badiogu, ordezkapen-metodoan ager daitezkeen ohiko oker batzuk, ordezkapena parentesirik gabe egitean akatsak eragitea edota askatutako ekuazio berean ordezkatzea dira, adibidez. Hala ere, metodo hau gehien menderatzen dutena izan ohi da, lehenengoa irakatsi ohi delako eta oso aljebraikoa delako, beraz, 4.ariketan ez da arazo handirik egongo.

Berdinketa-metodoari dagokionez, hiru metodoetatik ikasleek gutxien menderatzen dutena da. Honen kausa, askotan aldagaiak isolatzean zatikiak agertu daitezkeela da, ezezagun bakarreko ekuazioaren ebazpena zailduz. Gainera, ebazpen grafikoarekin lotura gehien duen metodoa da, baina baliteke harreman hori ez adierazteagatik, zalantza gehien sortzen dituen metodoetako bat izatea. Metodo honen ebazpenean, 3.ariketan, lehen aipaturiko kalkulu aljebraikoko akatsak espero dira.

Laburketa-metodoa ez da ariketetan eskatzen, baina sistema konplexuko 5.ariketan edota probleman (6.ariketa) erabiltzea espero da. Metodo honen ebazpenean ager daitezkeen bi akats ondorengo hauek dira: ekuazioa konstante batengatik biderkatzean ekuazioaren gairen bat ez biderkatzea edota bi ekuazioak laburtzerakoan, gai batzuen arteko laburketa ez egitea.

Sistemen ebazpenen hiru metodoetariko bakoitzean eman daitezkeen akatsak aztertu ondoren, orokorrean, hiru metodoetan gerta daitezkeenak deskribatuko dira: bakarrik aldagai baten balioa lortzea eta ariketa bukatutzat ematea; laburtzeko, ordezkatzeko edo berdinketa egiteko ezezaguna gaizki aukeratzea ekuazioak konplikatuz; metodo bakoitzaren erabilgarritasunaren egokitasuna ez jakiteagatik, edozein metodo aukeratzea eta ebazpena zailtzea, e. a.

Ekuazio-sistema sinplifikatzeko ez da arazo handirik espero, kalkulu aljebraiko tipikoak direnak kenduta. Gerta litekeena da, ekuazio-sistema sinplea ez dela ikustean, ikasleak blokeatzea edo ikaratzea.

Problemaren ebazpenean, 6.ariketan, arazo dezente espero dira, ikasleek normalean zalantza gehien duten atala baita. Hizkera idatzian dagoen enuntziatu bat hizkera aljebraikora pasatzea da zailtasunik handiena. Aljebrako edukiak, normalean, trebetasun ariketa mekanikoen bidez lantzen dira. Ariketa hauek testuingururik gabe eta matematikako nahiz beste ikasgaietako kontzeptuekin loturarik izan gabe eman izan dira betidanik. Arlo honen atomizazioak, ezagutzaren integrazioa eta aplikazioa oztopatzen du. Objektu matematikoak ez dira bere osotasunean ulertzen, esanahi hutsa duten edukiak bezala ikasten direlarik.

Probleman lortu beharreko ekuazioetatik bat oso sinplea da eta hori lortzeko ez da arazorik izanen. Bestean, parentesi bat erabili beharreko erlazio bat adierazi behar da eta ziurrenik zaila egingo zaie. Pertsona batek besteari zuen diru kantitatearen 3 € emanda, besteak izango lukeenaren hirukoitza izango zuela dio problemak. Enuntziatu mota hauen ekuazioak lortzeko oso lagungarria izaten da taula bat egitea, non hasierako eta amaierako pertsona bakoitzaren egoera aljebraikoa adierazten den. Ikasleren batek nesketako batek 3€ gehiago izatea baina besteari kenketa ez aplikatzearen probabilitatea dago. Gainera, hirukoitzaren kontuak zalantzak suerta ditzake, hirukoitza non jarri behar den argi ez edukiz.

Behin sistema lortuta, laburpen metodoa egokiena izango litzateke, baina ordezkapen eta berdinketa-metodoak eginez gero, ekuazioak ez dira hainbesterako zailtzen. Gehiengoak ordezkapen edo laburpen-metodoa erabiliko duela uste da.

Problemaren soluzioa lortu ostean hau egiaztatzea eta interpretatzea garrantzitsua da, baina normalean ikasleek ahaztu ohi duten amaierako zatia da. Beraientzat bi aldagaien balioa ateratzean ariketa bukatu da, lehen esandako aljebraren gehiegizko garrantzia dela eta.

9.3. Emaitzak

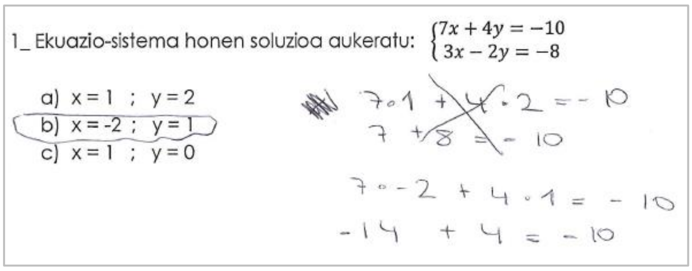
Atal honetan jarduera osagarrien emaitzak banan-banan deskribatuko dira.

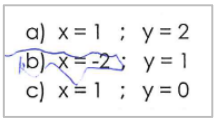
9.3.1. Aurre ebaluazioaren emaitzak

Frogaren aurrean ikasle askok blokeo egoera bat izan dute, eduki horietaz oroitzen ez zirela esanez. Beste batzuk, ordea, kexatu egin dira, ekuazio-sistemen gaia urte guztietan ematen dutela arrazoituz. Lehenengo bi ariketetan aukerako soluzioak zirenez, ikasle batzuk besteei erantzunak esan dizkiete edota batzuk froga binaka egin dute.

Lehenengo ariketan 6 pertsonek soilik erantzun egokia aukeratu dute, buruz egin edo soluzioa esan dietelako. Bost pertsonek soluzioa 2 ekuazioetan egiaztatu dute eta hiruk soilik ekuazioetako batean (60. Irudia ikusi). Emandako aukeretan denak soluzio-pareak izan arren, ikasle bakar batek erantzun bezala “x” aldagaiaren balioa inguratu du (59. Irudia), sistemaren soluzioa parea dela ez jakiteren seinale. Bi ikaslek ez dute ezer erantzun.

Bigarren ariketa zazpi pertsonek ongi egin dute, beste lauk hutsik utzi dute eta seik zuzen paraleloen eta kointzidenteen soluzioak nahastu dituzte, espero zen bezala.





59. Irudia: I2 ikasleak egindako ariketa

60. Irudia: I13 ikasleak egindako ariketa.

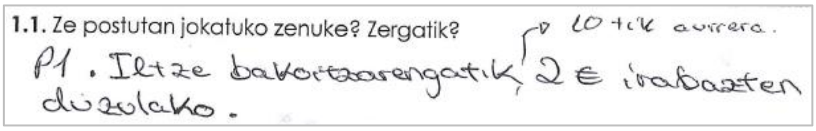
Azkeneko ariketa osorik bi pertsonek egin dute, ordezkapen-metodoarekin; lau pertsonek laburketa-metodoa erabiliz aldagai bakar baten balioa lortu dute, ariketa bukatutzat emanez; bi ikaslek intuitiboki ebatzi dute; sei pertsonek hutsik utzi dute ariketa; eta gainontzekoak metodo desberdinekin hasi baina prozeduren oroimen faltagatik ez dute jarraitu edo nahastu egin dira.

Frogaren emaitzetan ikus daitekeenez, laburketa eta ordezkapen metodoak dira ikasleek gehien gogoratzen dituzten ebazpen aljebraikoko metodoak. Interpretazio geometrikoari dagokionez, landu beharreko zalantzak ageri dira. Ondorio hauek gainontzeko jarduerak lantzerakoan kontuan hartu dira.

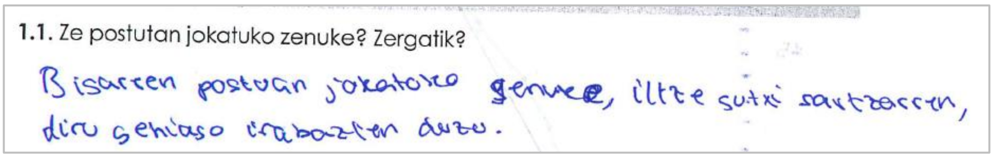
9.3.2. Iltzeen jardueraren emaitzak

Iltzeen jardueran garrantzitsuena, lehen mailako funtzioen ekuazioa enuntziatu batetik lortzeko egin beharreko prozesua eta egoera desberdinen interpretazioa da. *8.1 atalean* aipatu den bezala, jarduera erdizka geratu da, beraz, prozesuaren garapena ezin da bere osotasunean aztertu. Hala ere, ikasleek egindako zatien emaitzak laburki azalduko dira.

Hasiera batean, bikoteka lan egin behar denez, kexa dezente egon dira, banaka lan egin nahi dutela adieraziz. Lehenagotik ziren bikoteak aldatu dira eta honek ere ikasleak aztoratu ditu. Egoera honek iltzeen jardueraren hasieran jarrera negatibo eta disruptiboak izatea eragin du. Problemaren apustuen egoera, ikasleak motibatzeko intentzioarekin planteatu da, baina ez du arrakasta handirik izan. Jardueraren aurrean hainbat ikaslek, ea ariketa zertarako egiten den galdetu dute, egiten ari zirena matematikak ez direla esanez. Honengatik enuntziatua ulertzeko ahalegin gutxi egin dira eta 1.1 galdera (45. Irudia ikusi) egoeran sakondu gabe erantzun da. Gehiengoak lehenengo postuan diru gehiago irabazten dela erantzun du (61. Irudia) eta bi bikotek 2.postua aukeratu dute, lehenengoan hasieran dirurik ematen ez dutela argudiatuz (62. Irudia).



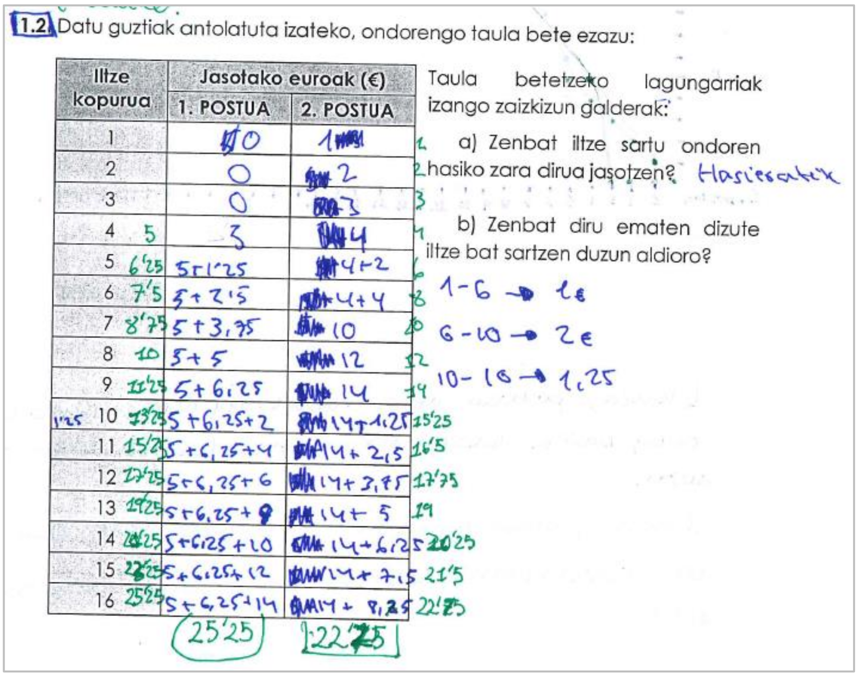
61. Irudia: J bikoteak erantzundako galdera



62. Irudia: D bikoteak erantzundako galdera

Taula egiterako orduan, espero zen bezala, itzultzen den diru kantitatearen aldaketen mugek eta lehenengo postuko hasierak zalantza ugari ekarri ditu (63. Irudia ikusi).

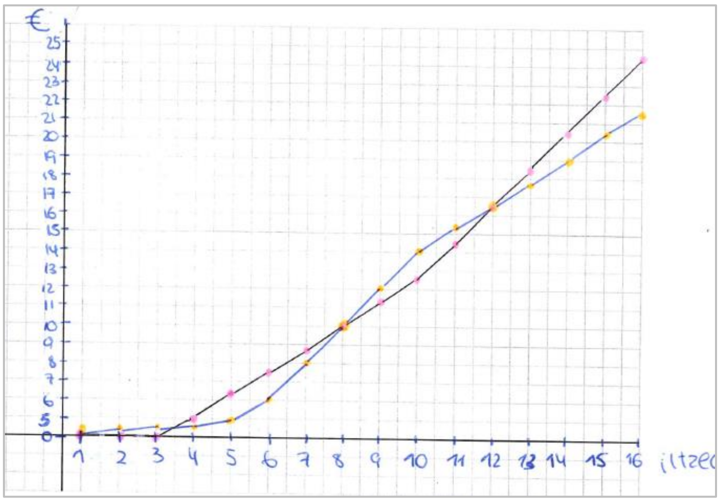
Problemak planteatzen duen egoera guztiz ez ulertzearen seinale argia da. Lehen esan bezala, enuntziatua arretaz irakurri gabe edota interpretazio okerrak egiteagatik izan daiteke.



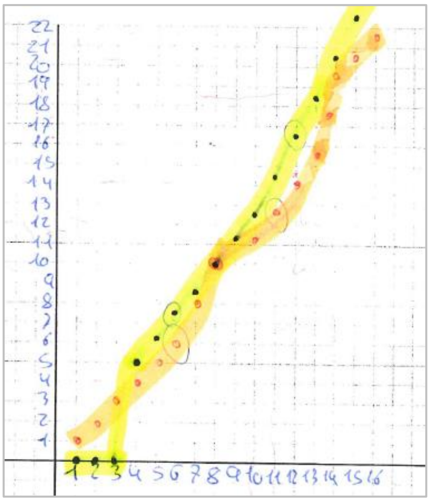
63. Irudia: D bikoteak egindako ariketa

Taulan antolatutako datuak aztertu ondoren, gehiengoak lehenengo postuan jokatuko luketela erantzun du, honetan diru gehiago irabazten dela esanez. Taularen datu guztiei erreparatu beharrean, bakarrik azkeneko balioak konparatu dituzte.

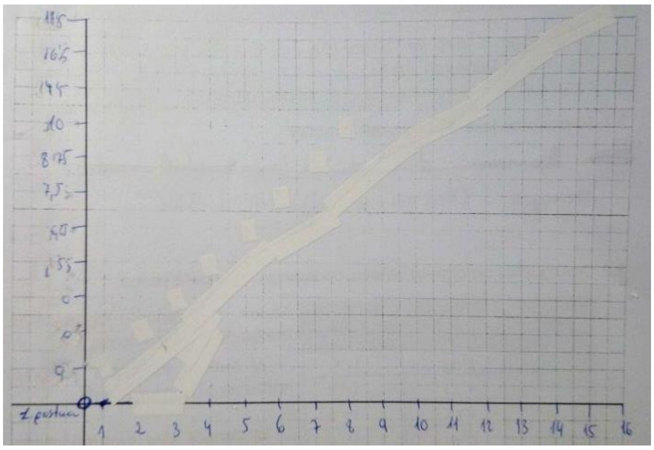
Datuak grafikoan irudikatzeko, ardatz bakoitzean ze aldagai jarri behar den esan zaie, horrela klase guztiak antzeko grafikoa aztertuko du. Orokorrean gehiengoak datuak txukun irudikatu ditu, postu bakoitza koloreekin desberdinduz (65. irudia). Puntuak traketsago irudikatu dituztenek, ez dituzte puntu esanguratsuak (ebaki-puntuak) ongi adierazi (64. irudia). Kasu anekdotiko bezala, bikote batek ardatz bakoitzean taulako datu guztiak adierazi ditu (66. Irudia).



65. Irudia: B bikoteak egindako grafikoa

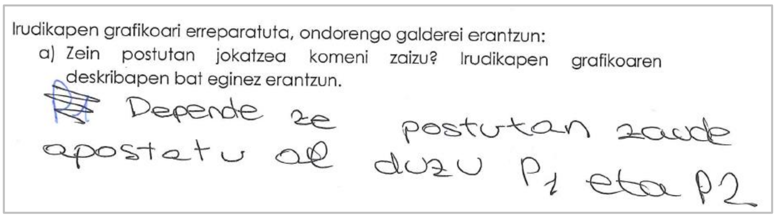


64. Irudia: H bikoteak egindako grafikoa

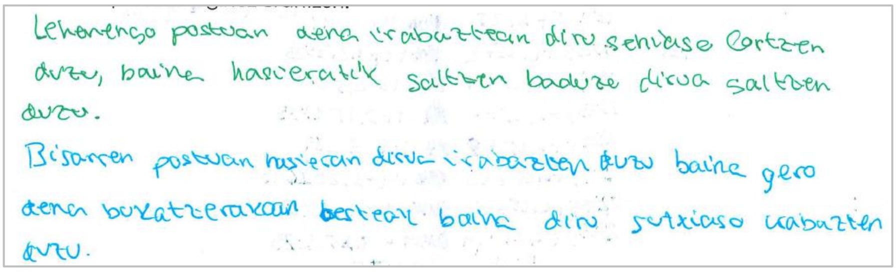


66. Irudia: G bikoteak egindako grafikoa

Grafikoa interpretatu eta deskribatzerako orduan, ikasle gehienek aurreko ariketaren antzeko erantzuna eman edo hutsik utzi dute. Gutxi batzuk, ordea, grafikoa deskribatu (68. Irudia) edo sartutako iltzeen funtzioan, postu batean edo bestean jokatzea komeni dela erantzun dute (67. Irudia).

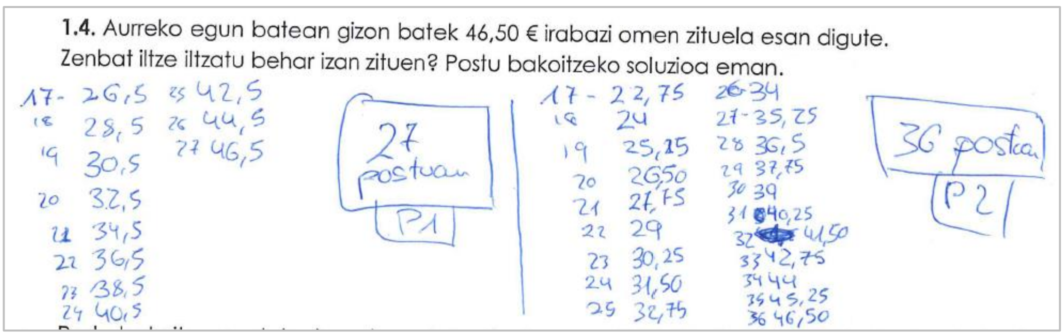

Irudikapen grafikoari erreparatuta, ondorengo galderei erantzun:
a) Zein postutan jokatzea komeni zaizu? Irudikapen grafikoaren deskribapen bat eginez erantzun.
Depende ze postutan zaude apostatu al duzu P1 eta P2

67. Irudia: H bikoteak erantzundako galdera


Lehenengo postuan dena irabaztean diru gehiago lortzen dute, baina hasieratik saltzen baduzu dirua saltzen duzu.
Bigarren postuan hasieran dirua irabazten duzu baina gero dena bukatzerakoan berdean baina diru gutxiago irabazten duzu.

68. Irudia: D bikoteak erantzundako galdera

1.4 ariketara (45. Irudia ikusi) bikoteen erdia iritsi da. Bi bikotek kontuak buruz eginda erantzuna eman dute; beste batek, taulako egitura bera jarraituz erantzuna eman du (69. irudia); eta bi bikote kontuetan nahastu dira, erantzun oker bat emanez.


1.4. Aurreko egun batean gizon batek 46,50 € irabazi omen zituela esan digute. Zenbat iltze iltzatu behar izan zituen? Postu bakoitzeko soluzioa eman.

17 - 26,5; 18 28,5; 19 30,5; 20 32,5; 21 34,5; 22 36,5; 23 38,5; 24 40,5; 25 42,5; 26 44,5; 27 46,5

27 postuan P1

17 - 22,75; 18 24; 19 25,25; 20 26,50; 21 27,75; 22 29; 23 30,25; 24 31,50; 25 32,75; 26 34; 27 - 35,25; 28 36,5; 29 37,75; 30 39; 31 40,25; 32 41,50; 33 42,75; 34 44; 35 45,25; 36 46,50

36 postua P2

69. Irudia: E bikoteak egindako ariketa

9.3.3. GeoGebra jardueren emaitzak

Orokorrean ikasleen portaera espero zena baino hobea izan da. Kolaboraziozko dinamikekin aurreko fasean hasi denez, kexa eta oposizio jarrerak lasaituak ziren dagoeneko. Bikote gehienek ongi funtzionatu dute, batak besteari lagunduz. Normalean lan ohitura falta duten ikasle batzuek, eredu dinamikoaren erakargarritasunagatik edota azken hiruhilekoan daudelako, espero baino lan gehiago egin dute. Hala ere, bikote batean ez da inplikazio handirik ikusi eta B eta H bikoteetan jarrera pasiboa hartu du kideetako batek, lanaren ardura beste ikasleak hartu duelarik.

Software dinamikoaren aurrean izandako ikasleen jarrerak mota askotarikoak izan dira. Hasieran ikasleren batek “klase normalak” aldarrikatu ditu eta beste batzuk, zer egin behar zen ez jakiteagatik, blokeatu dira. Euskarri materiala aldatzeak *kontratu didaktikoaren*[2] haustura bat eragin du. Ikasle hauek imitaziozko kontratu didaktikoaren arabera lan egitera ohitua daude. Ikasleek, bere jardueran, testu-liburuak edota irakasleak azalduriko eredu baten erreprodukzio formal bat egiten dute. Beraz, imitaziozko kontratu didaktikoa jarraitzeak, ezagutzak beste subjektu batetik jasotzea dakar. Eredu dinamikoa erabiltzean, ezagutzak ikasleak berak dakienetik eta ordenagailuan lantzen dituen ariketetatik eraiki behar ditu. Bi ereduen arteko aldea handia da eta hasiera batean hauen kontrako jarrerak edo blokeo egoerak izatea normala da. Halaber, prozedura hauen ohitura ezak, momentu batzuetan ikasleak frustrazio egoerak bizitzea eta lan egiteko gogoa galtzea eragiten du.

Ariketa gehienetan, fitxetan argibideak eman arren, irakasleak azalpen bat eman behar izan du. Askotan enuntziatua irakurri barik ikasleak galdezka aritu dira. Ikasle batzuk softwarea erabiltzen ez jakiteagatik blokeatu dira, beraz, irakasleak gako batzuk ematea beharrezkoa izan da. Behin prozesua ikusita, ulertu dutela ematen du. Modu berean, ariketa ebazterakoan irakaslearen laguntza eske ibili dira, egindakoa ongi zegoela egiaztatzeko asmoz. Honek irakaslearekiko menpekotasun handia adierazten du, dinamika berria izanagatik bai eta pentsatzeko ariketak egiteko ohitura faltagatik.

Ekuazio-sistemen gaian askotan aljebran jarri da arreta, ariketa mekanikoen ebazpenean hain zuzen ere. Honek ikasleak aljebrarekiko lehentasun hori izatea dakar, beste motatako jarduera edo interpretazioak alde batera utziz. Halaber, aljebrari eman zaion garrantziak, beti, edozein ariketetan, emaitza aljebraiko bat behar dela pentsatzera bultzatu ditu ikasleak. Horrenbestez, beste ariketa mota hauen aurrean, “ikasleek ez dakite balioztatzen egin berri duten produkzio matematikoaren zuzentasuna, eta irakaslearen esku uzten dute ongi edo gaizki egin duten esatea, ardura matematikoa saihestuz” (Lasa, 2015 or. 20).

Arrazoi guzti hauengatik, irakaslearen esku-hartzea pentsatutakoa baino beharrezkoagoa izan da, momenturen batean azalpen magistral bat eman behar izan delarik.

Jarraian fase honetako bi jardueren emaitza nagusiak azalduko dira:

9.3.3.1. G1 jardueran emaitzak

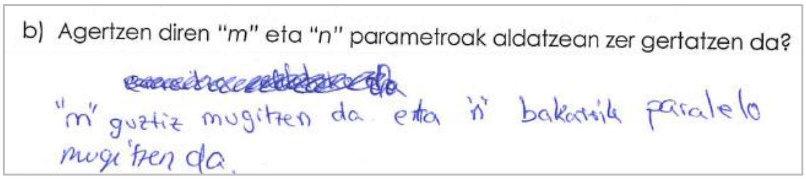
Jarduera honetan malda eta ordenatua jatorrian kontzeptuen ulermena lantzen da. Hasierako fase esploratzaile eta intuitibo batean, *m* eta *n* parametroak aldatzean zuzenak mugitzen direla adierazi dute gehienek, eta batzuk ekuazioen balioak ere aldatzen direla idatzi dute. Aipatutakoa adierazteko modu desberdinak erabili dituzte. Ikasle batzuk

[2]*Contrato didáctico*: Conjunto de reglas, generalmente implícitas, que determinan la responsabilidad matemática de profesor y estudiantes con relación a un determinado saber (Wilhelmi, 2005 or. 165).

zuzena biratu dela (70.Irudia) edo paraleloki mugitu dela (71. Irudia) adierazi dute. Erantzun hauek, ikuskera geometrikoak analitikoak baino indar handiagoa duela erakusten du.


b) Agertzen diren "*m*" eta "*n*" parametroak aldatzean zer gertatzen da?
N-M mugituz, marrak lekuz aldatzen dira. Biratzen dute eta ere ekuazioa aldatzen da.

70. Irudia: E bikoteak erantzundako galdera


b) Agertzen diren "*m*" eta "*n*" parametroak aldatzean zer gertatzen da?
"m" guztiz mugitzen da eta 'n' bakarrik paralelo mugitzen da.

71. Irudia: G bikoteak erantzundako galdera

G1.2 ariketa esplorazio ariketa bezala planteatu da. Ikasleek, frogatuz eta akatsak eginez, *m* eta *n*-ren esanahia ulertzen hastea nahi da. Zuzena nolakoa den pentsatutakoan, *Zuzena ikustarazi* botoiari sakatuz frogapen enpiriko bat ematen da. Baina ikasleen emaitzek klase erdiak taula botoia sakatuta bete duela islatzen dute, hau da, esplorazio faserik gabe zuzenean ilustrazio ariketa bat egin da. Honek, bi parametroen esanahia behar den bezala ez lantzea dakar, eta ondorioz, hurrengo ariketa ongi ebaztea oztopatuko du.

Jarduera honi eskainitako lehenengo saioan, G1.3 ariketan geratu dira ikasle gehienak. Maldaren esanahia ulertu dela ematen du, hazkundeari dagozkion ezaugarriekin erantzun baitute, baina ordenatua jatorrian kontzeptua ez da ulertu, ikasle aunitz hutsik edo maldaren antzeko deskribapenak eman dituztelako (72. Irudia).

Egoera	Zuzenaren deskribapena	Adierazpen aljebraikoa
m < 0	Malda beherakorra	y= -1x +0
m = 0	Ez beherakorra ez gorakorra.	y= 0x + n
m > 0	Malda gorakoa	y= n + 0x
n < 0	Paralelo beherakorra	y= 1x +0
n = 0	Ez beherakorra ez gorakoa	y=mx
n > 0	Paralelo gorakoa	mx + n = y

72. Irudia: A bikoteak egindako ariketa.

Ikasleek ordenatua jatorrian kontzeptua ongi uler dezaten, hurrengo klasean ariketa magistralki azaltzea erabaki da. Horretarako, ikasleendako taula ebatzia eta kasu bakoitzaren eredu grafikoa duen fitxa bat prestatu da (*B3 erankina*). Honekin batera denbora muga bat izan da, informatika gela soilik bi egunetan eskuragarria izan delako.

Egoera	Zuzenaren deskribapena	Adierazpen aljebraikoa
m < 0	Beherakorra eta 0 puntutik pasa	y = -7x+0
m = 0	Orizontalki pasatzen da.	y = 0x+0
m > 0	Gorakorra eta 0 puntutik pasa	y = 3x+0
n < 0	-5 puntutik pasa orizontalki	y = 0x-5
n = 0	0 puntutik pasa orizontalki	y = 0x+0
n > 0	8 puntutik pasa orizontalki	y = 0x+8

73. Irudia: J bikoteak egindako ariketa

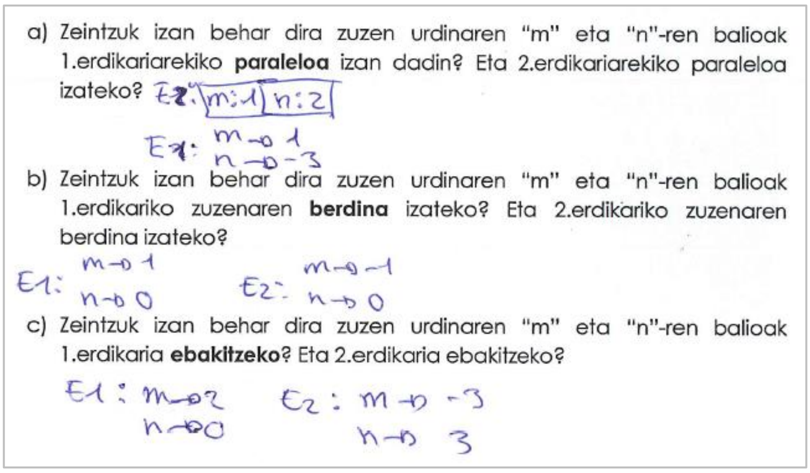
Ariketa esplorazio applet bat bezala planteatu da, baina emaitzak aurreikusitakoak izan ez direnez eta denbora baldintzapen baten eraginez, ilustrazio izaera duen ariketa batean bihurtu da. Gainera ariketan kasu partikularretatik abiatuz orokortze-prozesu bat eginez, arau batzuk lortzeko planteatu da, baina hori ez da guztiz lortu eta ikasle batzuek taula kasu konkretuekin bete dute (73. Irudia ikusi).

Jardueraren bigarren egunean, G1.3 ariketako taula magistralki azaldu ostean, ariketa berean galdetutakoa erantzuteko adierazi zaie. Azalpena ematerakoan ikasleen gehiengoak ez du arretarik jarri, beraz, ez dute galdera erantzuten jakin. Blokeo egoeraren aurrean, berriro ere, *m* eta *n* kontzeptuak magistralki arbelean azaldu behar izan dira, instituzionalizazio egoera bat eratuz. Saiakera honetan ikasle gehienek ulertu dutela ematen du, eta azkeneko irudikapen ariketa egin dute.

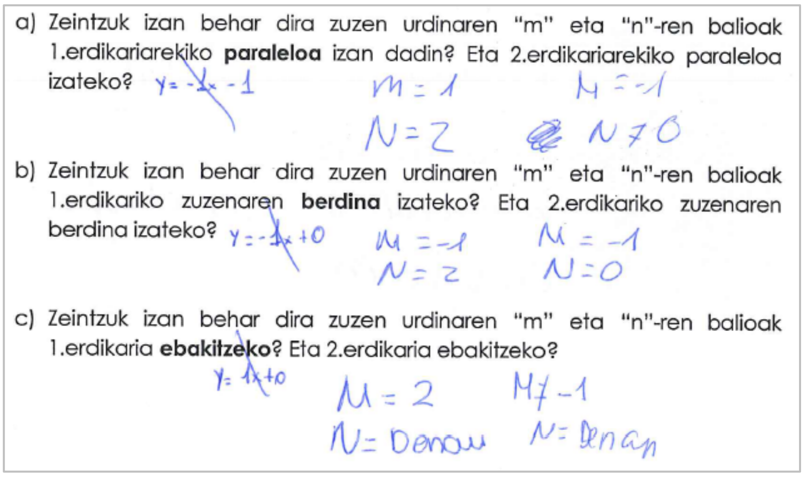
9.3.3.2. G2 jardueran emaitzak

Ekuazio-sistemen ebazpen grafikoa lantzen den jarduera honetan, bi zuzenen malda eta ordenatua jatorrian parametroak aztertuz, zuzenen posizio erlatiboak landuko dira.

Lehen azaldu bezala, denbora baldintzapen batengatik jarduera hau klasean amaitzeko astirik ez da eduki. Informatika gelako bigarren saioan bikote gehienak G2.1 ariketan geratu dira eta bikote bakar batek G2.2 bukatu du. Aurrerago etxerako lan bezala bi ariketa hauek banaka bukatzea bidali da, horrela ikasleen lan erritmo desberdinek sortutako egoera orekatuko da.

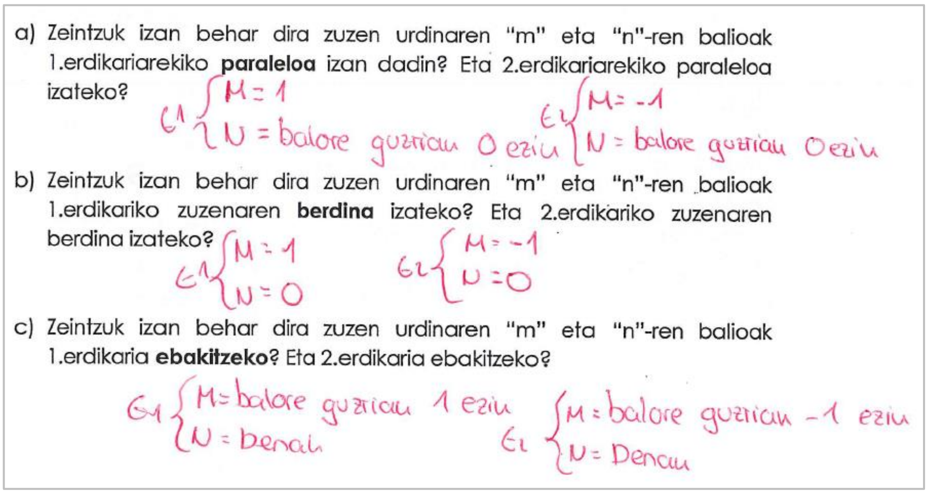

a) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariarekiko **paraleloa** izan dadin? Eta 2.erdikariarekiko paraleloa izateko? E2: m:-1 n:2
E1: m→1 n→-3
b) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariko zuzenaren **berdina** izateko? Eta 2.erdikariko zuzenaren berdina izateko?
E1: m→1 n→0 E2: m→-1 n→0
c) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikaria **ebakitzeko**? Eta 2.erdikaria ebakitzeko?
E1: m→2 n→0 E2: m→-3 n→3

74. Irudia: I10 ikasleak egindako ariketa


a) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariarekiko **paraleloa** izan dadin? Eta 2.erdikariarekiko paraleloa izateko? y = -1x - 1 m = 1 N = 2 M = -1 N ≠ 0
b) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariko zuzenaren **berdina** izateko? Eta 2.erdikariko zuzenaren berdina izateko? y = -1x + 0 M = -1 N = 2 M = -1 N = 0
c) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikaria **ebakitzeko**? Eta 2.erdikaria ebakitzeko? y = 1x + 0 M = 2 N = Denan M ≠ -1 N = Denan

75. Irudia: I17 ikasleak egindako ariketa

G2.1 ariketan bi erdikariak finko ematen dira eta zuzen aldakor baten *m* eta *n*-ren balio konkretuak eman behar dira posizio erlatibo zehatz batzuk betetzeko. Ikasle batzuek bakarrik erdikari batekiko soluzioak eman dituzte. Malda eta ordenatua jatorrian parametroek balio konkretu bat izan ezik, beste guztiak hartu ahal dituen kasuetan, balio zehatz bat eman dute soilik (74. Irudia). Ariketa hau etxean bukatzeko bidali da eta klasean GeoGebra eraikuntza proiektatuz arbelean zuzendu da. Ondorioz, ikasle gehienek egindakoa zuzendu dute, hala ere, erantzunak modu desberdinetan adierazi dira: zuzenen ekuazioak emanez (75. Irudia), erantzunak idatzita emanez edota hizkuntza matematikoa (76. Irudia) erabiliz.


a) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariarekiko **paraleloa** izan dadin? Eta 2.erdikariarekiko paraleloa izateko?

G1 {M = 1; N = balore guztiak 0 ezik} G2 {M = -1; N = balore guztiak 0 ezik}

b) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariko zuzenaren **berdina** izateko? Eta 2.erdikariko zuzenaren berdina izateko?

G1 {M = 1; N = 0} G2 {M = -1; N = 0}

c) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikaria **ebakitzeko**? Eta 2.erdikaria ebakitzeko?

G1 {M = balore guztiak 1 ezik; N = denak} G2 {M = balore guztiak -1 ezik; N = Denak}

76. Irudia: I9 ikasleak egindako ariketa

G2.2 ariketa ere etxerako bidali da, baina oso ikasle gutxik egin dute. Honakoan esplorazio fase baten ondoren, orokortze prozesu bat egin behar da, bi zuzenen arteko posizio erlatiboak betetzeko, maldak eta ordenatua jatorrian nolakoak (berdinak/desberdinak) diren esanez. Edonola ere, bikoteren batek kasu konkretuekin erantzun du (77. Irudia). Bestalde, aurreko ariketaren modu berean zuzendu denez, ikasleek egindakoa zuzendu dute.

Posizio erlatiboa	Maldak (m eta a)	Ordenatuak jatorrian (n eta b)
Paraleloak	M = -2, a = -2 Berdina	N = -1, b = 6 Ezberdina
Kointzidenteak	M = -2, a = -2 Berdina	N = 6, b = 6 Berdina
Ebakitzaileak	M = 3, a = 2 Ezberdina	N = 6, b = 6 ~~Berdina~~

77. Irudia: I18 ikasleak egindako ariketa

Lehenengo bi ariketa hauek ilustrazio momentu bezala planteatu dira, eraikuntzaren behealdean kasu bakoitzeko zuzenen arteko posizio erlatiboak ageri baitira. Baina ikasle asko ez dira hortaz konturatu; izan ere, zuzen paralelo eta kointzidenteak nahasten dituztela ikusi da beraien erantzunetan, eraikuntzak idatzita adierazten duen arren. Beraz, aurreikusitakoaren kontra, ikasleentzako applet hau esploraziokoa izan da.

G2.3 ariketa, klasean denen artean modu dialogikoan egin da, eraikuntza dinamikoa proiektatuz. Ekuazio-sistema bakoitza ikasle batek ebatzi du. Sistemen soluzioa interpretatzeko, lehenik azalpen dialogiko bat eman behar izan da. Instituzionalizazio une horri esker, ikasleek partikularizazio-prozesu bat egin ahal izan dute. Ariketa denen artean ahoz egin denez, ikasle gehienek ongi bete dute taula, baina soluzioak adierazteko moduak desberdinak izan dira: aljebraikoki (78. Irudia), puntu bezala (79. Irudia) edo balio solteak emanda (80. Irudia).

Ekuazio-sistema	Posizio erlatiboa	Sistemaren soluzioa
$\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$	Ebakitzaileak	x = -2 y = -6
$\begin{cases} y = -7x - 1 \\ y = -7x + 8 \end{cases}$	Paraleloak	Soluzio gabe
$\begin{cases} y = 8x + 3 \\ y = -8x + 3 \end{cases}$	Ebakitzaileak	x = 0 y = 3
$\begin{cases} y = 6x - 9 \\ y = 6x - 9 \end{cases}$	Koefizienteak	Soluzio infinitu.
$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -5x + 7 \end{cases}$	Ebakitzaileak	x = 1 y = 2

78. Irudia: I16 ikasleak egindako ariketa

Ekuazio-sistema	Posizio erlatiboa	Sistemaren soluzioa
$\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$	x ebakitzaile	~~x~~: -2 ~~y~~: -6 (-2,-6)
$\begin{cases} y = -7x - 1 \\ y = -7x + 8 \end{cases}$	Paralelo	ez du soluziorik
$\begin{cases} y = 8x + 3 \\ y = -8x + 3 \end{cases}$		
$\begin{cases} y = 6x - 9 \\ y = 6x - 9 \end{cases}$	~~infinito~~ Berdinak	infinito
$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -5x + 7 \end{cases}$	Ebakitzailea	~~(2,1)~~ (1,2)

79. Irudia: I1 ikasleak egindako ariketa

Ekuazio-sistema	Posizio erlatiboa	Sistemaren soluzioa
$\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$	Ebakitzaile	n = -2 m = -6
$\begin{cases} y = -7x - 1 \\ y = -7x + 8 \end{cases}$	Paralelo	Ez dago soluziorik
$\begin{cases} y = 8x + 3 \\ y = -8x + 3 \end{cases}$	Ebakitzaileak	0 3
$\begin{cases} y = 6x - 9 \\ y = 6x - 9 \end{cases}$	Infinito	infinito
$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -5x + 7 \end{cases}$	Ebakitzaile	$\frac{1}{2}$

80. Irudia: I13 ikasleak egindako arketa

9.3.4. Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa

Laugarren fase honek, espero bezala, emaitza onak izan ditu. Jarraitu den metodologia ikasle hauekin normalean erabiltzen dena izan denez eta gainera, ebazpen aljebraikoko ariketa mekanikoak egin direnez, ikasleek ongi erantzun dute. Arazo gehien eragin dituen metodoa berdinketarena izan da, beste biak gehiagotan aplikatu dituztelako eta honen ebazpenean kalkulu aljebraiko konplexuagoak eratzen direlako. Metodoa aukeratzeko orduan, edozein edota gogokoena aukeratzen dute, hauen egokitzapenari erreparatzen ez diotelarik.

9.3.5. Azterketaren emaitzak

Azterketaren emaitzak, gainontzeko jardueren emaitzekin alderatuta, modu desberdinean aztertu dira. Irizpide batzuk kontuan hartuta, ariketa bakoitza kalifikatu egin da eta horren inguruko analisi estatistiko bat egin da. 43. Taulan ikasle bakoitzak frogaren ariketa bakoitzean eskuratutako puntuazioa eta azterketako nota finalak ageri dira. Azterketaren puntuazioa hamarrekoa da. Taulan grisez koloreztatutako errenkadak, ikasle bat (I11) azterketa egitera azaldu ez zela adierazten du. Analisia egiterako orduan, ikasle hori ez da kontuan hartu, hortaz ikasle kopurua 17 da. Bestalde, lagineko atalean aipatu den bezala, I3 ikasleari gutxieneko ezagutzen azterketa egin zaio, beraz, sistema konplexuen bosgarren ariketa kendu zaio. Bere kalifikazioa gehienera jota 8.5ekoa izanda, 10 puntuen funtzioan jarri da beste ikasleekin alderatu ahal izateko.

	1. ariketa (1,5 puntu)	**2. ariketa** (1,5 puntu)	**3. ariketa** (2,5 puntu)	**4. ariketa** (1 puntu)	**5. ariketa** (1,5 puntu)	**6.ariketa** (2 puntu)	**Azterketa nota**
I1	1,35	0,5	2,25	1	0,45	2	7,55
I2	0,4	0	0	0,1	0	0	0,5
I3	1,35	0,5	2,1	1		0,3	6,18
I4	0,9	1,5	2,2	1	0	0	5,6
I5	0,3	0	1,1	1	1,3	0	3,7
I6	1,5	0,2	0	0,75	0,3	0	2,75
I7	1,35	1	2,1	0,5	1,18	0	6,13
I8	1,3	0,4	0,7	0,9	0,7	0,3	4,3
I9	1,5	1,5	0,8	1	0,3	2	7,1
I10	1,5	0,5	1,9	1	1,3	1,1	7,3
I11	1,2	0	0,5	1	1,27	0,7	4,67
I12							
I13	1,5	1,1	2,4	1	1,3	1,1	8,4
I14	1,35	0,55	0,4	1	0	0	3,3
I15	1,35	1,5	0,5	1	1,3	2	7,65
I16	1,2	1,3	2,5	1	0,45	1,6	8,05
I17	0,6	0,2	1,3	0,88	0,72	0,3	4
I18	0,9	1	2,5	0,7	0,3	0,5	5,9

43. Taula: Azterketako emaitzak

9.3.5.1. Azterketaren emaitzen analisi globala

Hamazazpi ikasletik hamarrek gainditu dute eta zazpik ez, beraz klasearen erdia baino gehiok ekuazio-sistemen ezagutza minimoa lortu dutela esan daiteke (44. Taula). Kalifikazioen sailkatze espezifikoagoa egiteko asmoz, ikasleen kalifikazioak maila orokor batzuetan banatu dira (45. Taula).

	Ez-gainditu [0-5)	**Gainditu** [5-10]	**Osotara**
Ikasle kopurua	7	10	17
Klasearen %	41,18%	58,82%	100,00%

44. Taula: Ikasle gaindituen kopurua

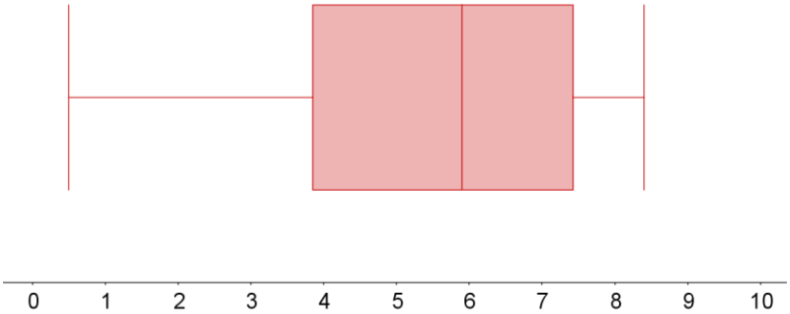
	Ez-gainditu [0-5)	**Nahiko** [5-6)	**Ongi** [6-7)	**Oso ongi** [7-9)	**Bikain** [9-10]	**Osotara**
Ikasle kopurua	7	2	2	6	0	17
Klasearen %	41,18%	11,76%	11,76%	35,29%	0,00%	100,00%

45. Taula: Ikasleen kalifikazioak

Honako datu estatistikoek eta kaxa-bibote diagramak (81. Irudia) klaseko ikasleen kalifikazioen distribuzioari buruzko informazio zehatza ematen digute. Mediana ikasleen erdiaren muga da, hau da, %50ak 5.9 baino nota baxuagoa atera du eta beste erdiak balio horretatik gora. Diagrama mota hau oso esanguratsua da, ikasleen %25 bat 3.85 eta 5.9 balioen bitarteko kalifikazioa lortu dutela adierazten digulako eta beste %25 bat 5.9 eta 7.43 bitartean. Azken balio horretatik gora atera dutenen notak puntu bateko tarte txikian mugitu dira, notarik altuena 8.4 izanik. 3.85tik beherako notak sakabanatuagoa daude.

DATU ESTATISTIKOAK:

Puntuazio maximoa: 10
Ikasle kopurua = 17
Batez bestekoa: 5.4753
1. kuartila (Q1): 3.85
Mediana: 5.9
3. kuartila (Q3): 7.425



81. Irudia: Azterketaren noten kaxa-bibote diagrama

9.3.5.2. <u>Azterketako jardueren analisi espezifikoa</u>

Analisi globalaren emaitzak aztertu ondoren, ariketen analisi espezifikoa eginen da, baina aurretik ariketa bakoitza gainditu (puntuazioaren erditik gora) duten ikasle kopurua argitzen duen 46. taula egin da.

	1. ariketa	2. ariketa	3. ariketa	4. ariketa	5. ariketa	6. ariketa
Ikasle kopurua	14	7	9	16	6	6
Klasearen %	82,35%	41,18%	52,94%	94,12%	37,50%	35,29%

46. Taula: Azterketako ariketa bakoitzeko ikasle gainditu kopurua

Ariketa bakoitzaren kalifikazioa lortzeko baloratu diren irizpideak eta hauen puntuazioa zehaztuko dira. Emaitzak tauletan aurkezten dira. Irizpide (Z) bakoitza ongi izanez gero 1 zifra jartzen da, baina irizpideak ariketa berean bitan edo hirutan agertzen badira 2 edo 3 zenbakiak jarriko dira. Irizpidearen ondoan irizpide horren puntuazio totala ageri da.

Kalifikazio sistema hau argitzearren, adibide bat jarriko da. Malda identifikatu irizpidean esaterako hiru zuzen izanez gero, hiruetan maldaren balio zuzena ematen bada, 3 agertuko da dagokion kasilan eta 0.45eko puntuazio maximoa lortuko da. Zuzen bakar batena ongi jarrita 0.15 puntu, eta bi zuzenetan 0.30 puntu lortuko dira. Gainera, datuen banaketa adierazten duen kaxa-bibote diagrama bat txertatu da ariketa bakoitzeko.

<u>1. Ariketaren irizpideak:</u>

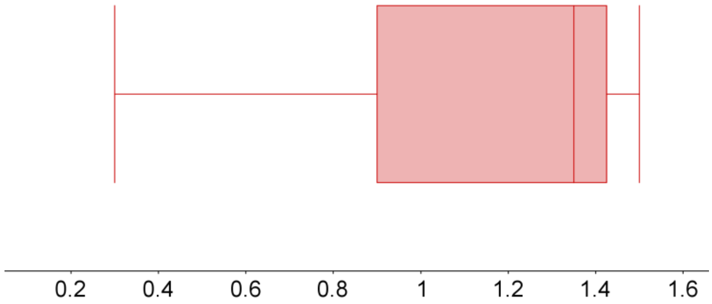
Z1: Malda identifikatu.
Z2: Ordenatua jatorrian identifikatu.
Z3: Zuzenen ekuazioa eta irudikapena lotu.

1. Ariketa	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11	I12	I13	I14	I15	I16	I17	I18
Z1 (0,45 p.)	2	0	2	3	1	3	2	3	3	3	3		3	2	2	2	0	1
Z2 (0,45 p.)	3	0	3	3	1	3	3	3	3	3	1		3	3	3	2	0	1
Z3 (0,6 p.)	3	2	3	0	0	3	3	2	3	3	3		3	3	3	3	3	3
Puntuazioa	1,35	0,4	1,35	0,9	0,3	1,5	1,35	1,3	1,5	1,5	1,2	0	1,5	1,35	1,35	1,2	0,6	0,9

47. Taula: Azterketako 1. ariketaren kalifikazioak

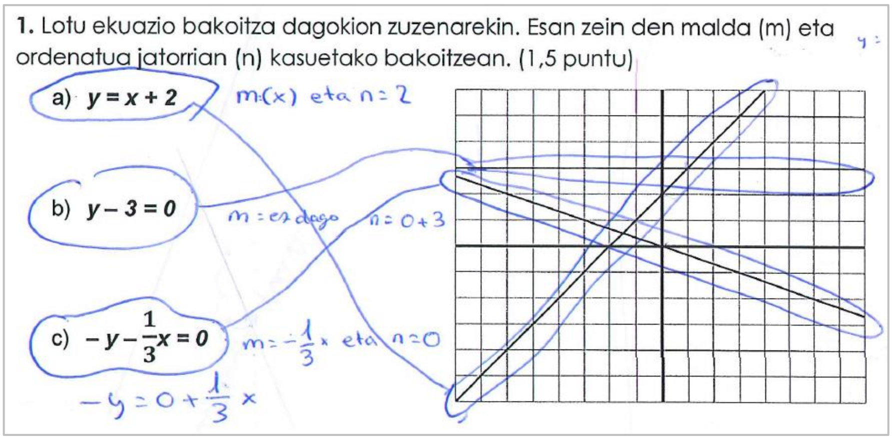
DATU ESTATISTIKOAK:

Puntuazio maximoa: 1.5
Ikasle kopurua = 17
Batez bestekoa: 1.15
1. kuartila (Q1): 0.9
Mediana: 1.35
3. kuartila (Q3): 1.425



82. Irudia: Azterketako 1.ariketaren kaxa-bibote diagrama

Orokorrean 1.5 puntu balio duen 1.ariketaren emaitzak onak dira, ikasleen %50ak 1.35 baino gehiagoko nota lortu baitu. Beraz, ikasleen erdia puntuazio maximotik gertu ibili da. Bi ikaslek ez dute Z1 eta Z2 irizpideen atalei erantzun, eta beste bik ez dituzte ekuazioak zuzenen irudikapenekin lotu (Z3). Bi hauek hori egitearen arrazoiak, denbora falta edota egiteaz ahaztea izan daitezke, izan ere gainontzekoa ongi erantzun dute. Beste bi ikasleek (I2 eta I5), ordea, baloratutako kontzeptuak ez dakizkitela esan daiteke. Ikasle batzuek, koefizientea negatiboa duen aldagaia gaizki isolatzeagatik, akatsak egin dituzte. Malda adierazteko modu desberdinak agertu dira (83. Irudia), batzuk okerrak izanik.



83. Irudia: I7 ikasleak egindako ariketa

2. Ariketaren irizpideak:

Z1: Zuzenen ekuazio orokorra lortu (Funtzio afinen ekuazioa: $y = mx + n$).
Z2: Zuzena irudikatu malda (m) eta ordenatua jatorrian (n) parametroak erabiliz.
Z3: Ekuazio-sistemaren soluzioa eman.
Z4: Ekuazio-sistemaren soluzioa arrazoitu.

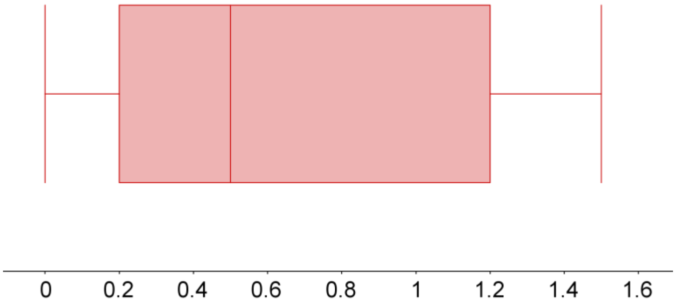
2. Ariketa	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11	I12	I13	I14	I15	I16	I17	I18
Z1 (0,4 p.)	1	0	1	2	0	1	2	2	2	1	0		2	2	2	2	1	2
Z2 (0,6 p.)	1	0	1	2	0	0	2	0	2	1	0		2	0,5	2	2	0	2
Z3 (0,3 p.)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0		0	0	1	1	0	0
Z4 (0,2 p.)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0		0,5	0	1	0	0	0
Puntuazioa	0,5	0	0,5	1,5	0	0,2	1	0,4	1,5	0,5	0	0	1,1	0,55	1,5	1,3	0,2	1

48. Taula: Azterketako 2.ariketaren kalifikazioak

Ariketa honen emaitzak kaxkarragoak izan dira. Bakarrik 2 ikaslek (I9 eta I15) guztiz ongi ebatzi dute ariketa eta klasearen %50 baino gehiok 0.5 edo puntuazio baxuagoa eskuratu du.

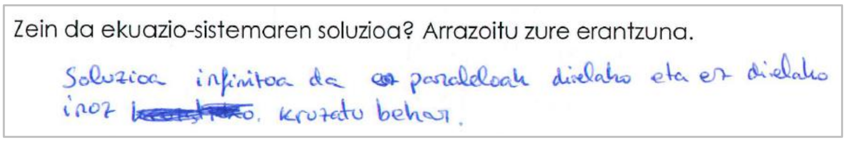
DATU ESTATISTIKOAK:

Puntuazio maximoa:1.5
Ikasle kopurua = 17
Batez bestekoa: 0.6912
1. kuartila (Q1): 0.2
Mediana: 0.5
3. kuartila (Q3): 1.2

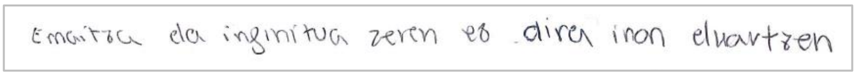


84. Irudia: Azterketako 2.ariketaren kaxa-bibote diagrama

Ikasleen gehiengoa gai da zuzenen ekuazio orokorra ateratzeko, baina “y” aldagaiak koefiziente negatiboa duenean akats asko egiten dituzte. Zuzenak irudikatzean, arazo gehiago ageri dira. Ekuazio-sistema guztiz ongi 7 pertsonek ebatzi dute, baina horietatik bakarrik lauk (I4, I9, I15 eta I16) soluzioa eman dute eta hiruk (I4, I9 eta I15) soilik arrazoitu dute erantzuna (87. Irudia). Hortaz, batzuk sistema irudikatzen dakite, baina hau interpretatu eta soluzio bat ematerako orduan zalantzak ageri direla ikusten da (85. Irudia eta 86. Irudia). Beste aukera bat, besterik gabe, sistema irudikatu eta hau ebatzitzat ematea da.



85. Irudia: I7 ikasleak egindako arrazoiketa



86. Irudia: I18 ikasleak egindako arrazoiketa

87. Irudia: I4 ikasleak egindako arrazoiketa

3. Ariketaren irizpideak:

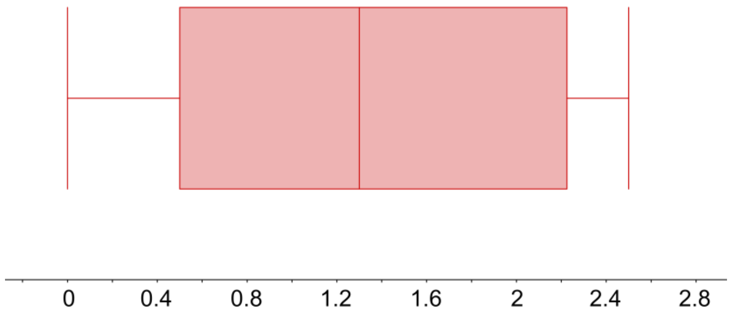
Z1: Zuzenen ekuazio orokorra lortu (Funtzio afinen ekuazioa: $y = mx + n$).
Z2: Zuzena irudikatu malda (m) eta ordenatua jatorrian (n) parametroak erabiliz.
Z3: Ekuazio-sistemaren soluzioa eman.
Z4: Berdinketa- metodoa aplikatzeko aldagai egokiena hautatu.
Z5: Berdintze ekuazioa lortu aldagaiak ongi isolatuta.
Z6: Kalkulu aljebraikoak egin, sistemaren soluzio egokia lortuz.

3. Ariketa	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11	I12	I13	I14	I15	I16	I17	I18
Z1 (0,4 p.)	2	0	2	2	0	0	2	2	1	2	1		2	2	1	2	1	2
Z2 (0,6 p.)	2	0	2	2	0	0	2	0	1	1	0		2	0	0	2	0	2
Z3 (0,3 p.)	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	1	0	1
Z4 (0,1 p.)	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1		0	0	1	1	0	1
Z5 (0,4 p.)	2	0	2	2	2	0	2	1	1	2	1		2	0	1	2	2	2
Z6 (0,7 p.)	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0		1	0	0	1	1	1
Puntuazioa	2,25	0	2,1	2,2	1,1	0	2,1	0,7	0,8	1,9	0,5	0	2,4	0,4	0,5	2,5	1,3	2,5

49. Taula: Azterketako 3.ariketaren kalifikazioak

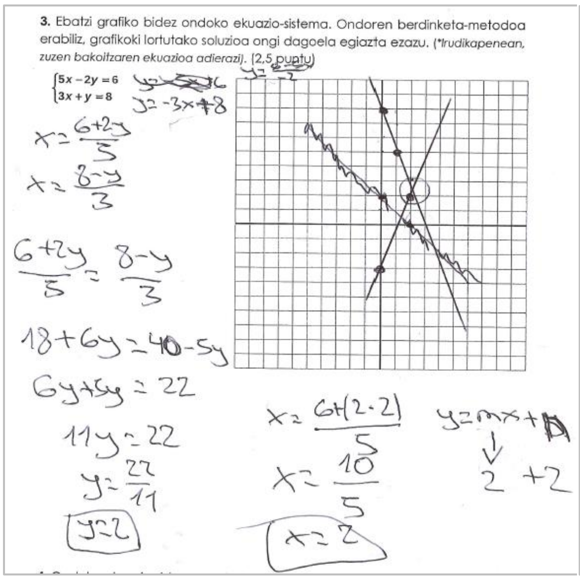
DATU ESTATISTIKOAK:

Puntuazio maximoa: 2.5
Ikasle kopurua = 17
Batez bestekoa: 1.3676
1. kuartila (Q1): 0.5
Mediana: 1.3
3. kuartila (Q3): 2.225

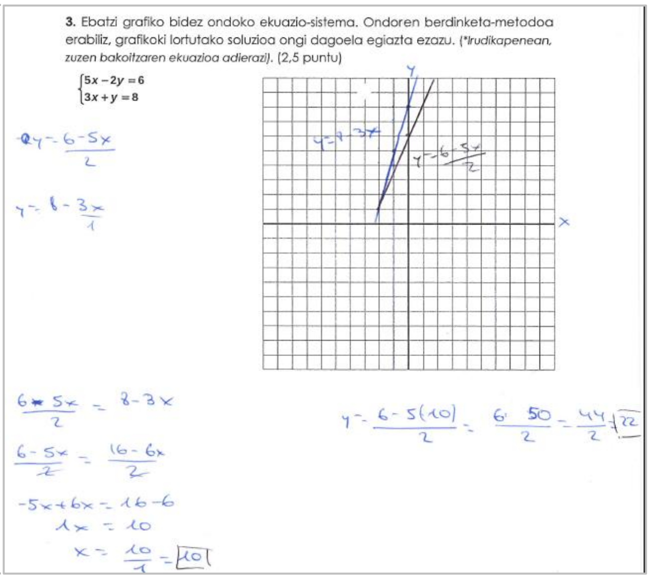


88. Irudia: Azterketako 3.ariketaren kaxa-bibote diagrama

Honakoan, klasearen %50ak ariketa gainditu duela esan daiteke. Ekuazio-sistemaren irudikapena, aurreko jardueraren antzera 7 pertsonek egin du, baina bakarrik 3 pertsonek soluzioa adierazi dute. Bi ikaslek (I13 eta I16) puntu moduan adierazi dute soluzioa eta I18 ikasleak aljebraikoki. I1 ikasleak sistemaren soluzioa adierazi nahian, ebaki-puntua inguratu du (90. Irudia). Berdinketa-metodoa egiterako orduan, ikasle gehiagok ongi erantzun du, eta gaizki ebatzitako gehienek, koefiziente negatiboa duen lehenengo ekuazioko “y” aldagaia gaizki askatu dute (89. irudia). Nahiz eta metodo grafikoarako isolatua egon eta kalkuluak errazten dituen arren, klase erdiak “x” aldagaia askatu du (90. Irudia).



90. Irudia: I1 ikasleak egindako ariketa



89. Irudia: I15 ikasleak egindako ariketa

4. Ariketaren irizpideak:

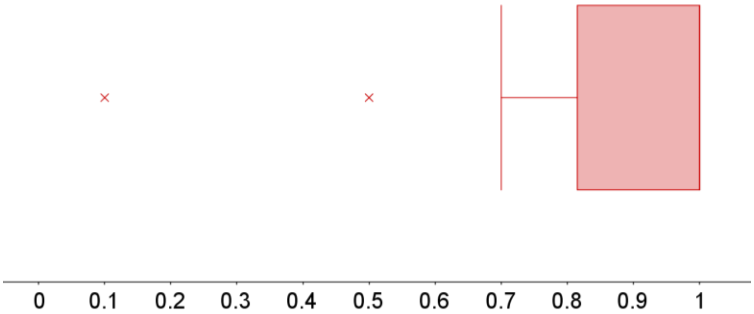
Z1: Berdinketa- metodoa aplikatzeko aldagai egokiena hautatu.
Z2: Aldagaia ongi isolatu.
Z3: Ordezkapena beste ekuazioan ongi egin.
Z4: Kalkulu aljebraikoak egin, sistemaren soluzio-pare egokia lortuz.

4. Ariketa	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11	I12	I13	I14	I15	I16	I17	I18
Z1 (0,1 p.)	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1		1	1	1	1	0	0
Z2 (0,2 p.)	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
Z3 (0,2 p.)	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
Z4 (0,5 p.)	1	0	1	1	1	0,5	0	1	1	1	1		1	1	1	1	1	0,6
Puntuazioa	1	0,1	1	1	1	0,75	0,5	0,9	1	1	1	0	1	1	1	1	0,88	0,7

50. Taula: Azterketako 4.ariketaren kalifikazioak

DATU ESTATISTIKOAK:

Puntuazio maximoa: 1
Ikasle kopurua = 17
Batez bestekoa: 0.8724
1. kuartila (Q1): 0.815
Mediana: 1
3. kuartila (Q3): 1



91. Irudia: Azterketako 4.ariketaren kaxa-bibote diagrama

Laugarren ariketa emaitza zuzen gehiago izan dituena da. Ondorioz ikasleek ordezkapen-metodoa aplikatzen ongi ikasi dutela esan daiteke. Bakar batek ez du ezer egin. Ariketa gaizki ebatzi duten besteek, ekuazioak ebazterako orduan, kalkulu aljebraikoko akatsak egin dituzte. Klasearen erdiak ongi egin du ariketa eta %25 bat amaieran kalkulu akatsak egiteagatik ez du ariketa guztiz ongi egin. Beraz, metodoa aplikatzeko prozedura menperatzen da.

5. Ariketaren irizpideak:

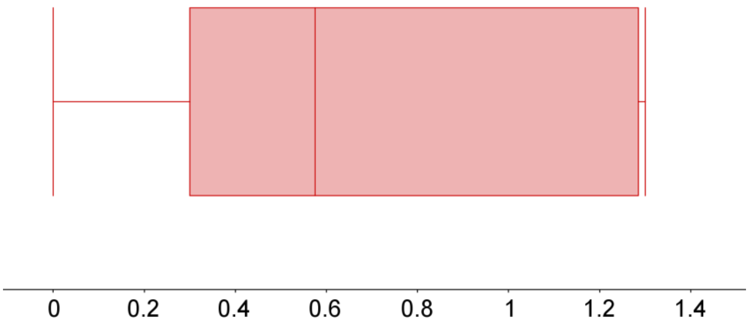
Z1: Ekuazio-sistema sinplifikatu.
Z2: Ebazpen-metodo egokiena hautatu.
Z3: Aldagai bakarreko ekuazioa lortu.
Z4: Kalkulu aljebraikoak egin, sistemaren soluzio-pare egokia lortuz.
Z5: Soluzioa egiaztatu.

5. Ariketa	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11	I12	I13	I14	I15	I16	I17	I18
Z1 (0,6 p.)	1	0		0	2	1	2	2	1	2	2		2	0	2	1	1,9	1
Z2 (0,1 p.)	0	0		0	1	0	1	1	0	1	1		1	0	1	0	0	0
Z3 (0,3 p.)	0,5	0		0	1	0	1	0	0	1	1		1	0	1	0,5	0,5	0
Z4 (0,3 p.)	0	0		0	1	0	0,6	0	0	1	0,9		1	0	1	0	0	0
Z5 (0,2 p.)	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0
Puntuazioa	0,45	0		0	1,3	0,3	1,18	0,7	0,3	1,3	1,27	0	1,3	0	1,3	0,45	0,72	0,3

51. Taula: Azterketako 5.ariketaren kalifikazioak

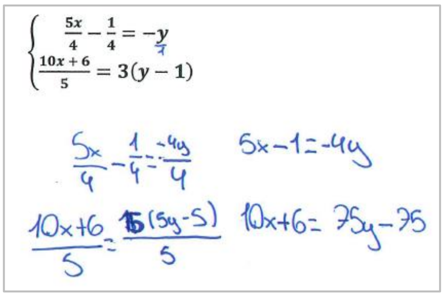
DATU ESTATISTIKOAK:

Puntuazio maximoa: 1.5
Ikasle kopurua = 16
Batez bestekoa: 0.6794
1. kuartila (Q1): 0.3
Mediana: 0.575
3. kuartila (Q3): 1.285



92. Irudia: Azterketako 5.ariketaren kaxa-bibote diagrama

Inork ez du ariketaren puntuazio maximoa lortu, enuntziatuak eskatutako soluzioaren egiaztapena (Z5) ikasle bakar batek ere ez baitu egin; nahiz eta batzuek beste ariketetan egin duten. Hiru pertsonek ariketa zuri utzi dute, beste bostek ez dituzte ekuazioak ongi sinplifikatu (Z1), eta klasearen beste erditik 4 pertsonek zuzen ebatzi dute sistema eta beste laurdenak kalkulu aljebraikoko akatsak egin ditu (93. Irudia). Orokorrean klaseko jarduera honen emaitzak ez dira onak izan, %50ak ez baitu 1.5etik ezta 0.6 puntu lortu.



93. Irudia: I6 ikasleak egindako ariketa

<u>6. Problemaren irizpideak:</u>

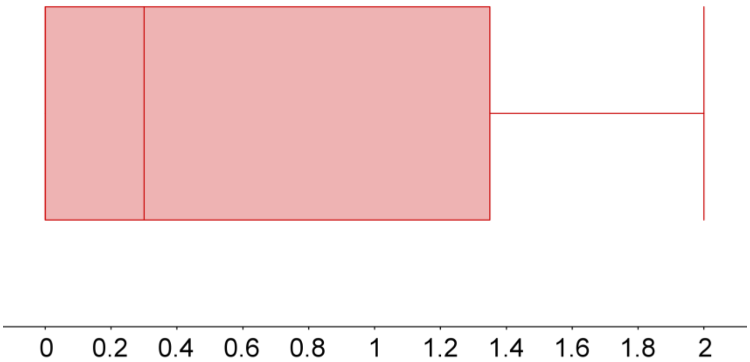
Z1: Ekuazio-sistema sinplifikatu.
Z2: Ebazpen-metodo egokiena hautatu.
Z3: Aldagai bakarreko ekuazioa lortu.
Z4: Kalkulu aljebraikoak egin

6. Ariketa	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11	I12	I13	I14	I15	I16	I17	I18
Z1 (0,2 p.)	2	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2		2	0	2	0	0	2
Z2 (0,2 p.)	2	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2		2	0	2	2	0	0
Z3 (0,6 p.)	2	0	1	0	0	0	0	1	2	2	1		2	0	2	2	1	1
Z4 (0,2 p.)	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0,5	0		0,5	0	1	1	0	0
Z5 (0,6 p.)	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		0	0	1	1	0	0
Z6 (0,2 p.)	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		0	0	1	0	0	0
Puntuazioa	2	0	0,3	0	0	0	0	0,3	2	1,1	0,7	0	1,1	0	2	1,6	0,3	0,5

52. Taula: Azterketako 6.ariketako kalifikazioak

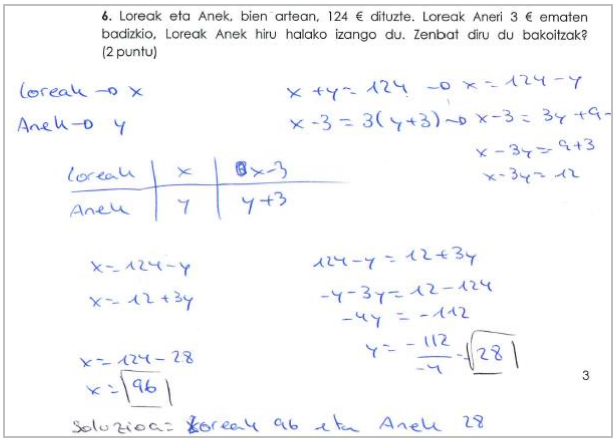
DATU ESTATISTIKOAK:

Puntuazio maximoa: 2
Ikasle kopurua = 17
Batez bestekoa: 0.7
1. kuartila (Q1): 0
Mediana: 0.3
3. kuartila (Q3): 1.35

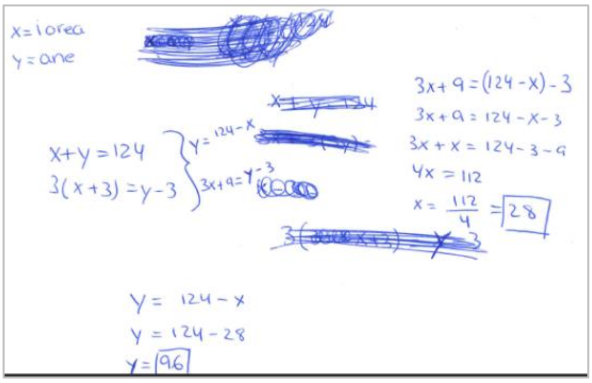


94. Irudia: Azterketako 6.ariketaren kaxa-bibote diagrama

Azterketaren emaitza okerrenak problemakoak izan dira. Kaxa-bibote diagrama (94. Irudia) egoeraren isla argia da, ikasleen %50ak 0.3 edo puntuazio baxuagoa lortu duela adierazten baitigu. Gainera ez da ezkerreko biboterik, 0 puntuazio dezenteren adierazle. Enuntziatua hizkuntza aljebraikora pasatzeko arazo handiak ageri dira, soilik 6 pertsonek sistemaren adierazpen aljebraikoa lortu dutelarik. Horietatik lau pertsonek soilik soluzioa lortu dute. Bi pertsona problema intuitiboki ebazten saiatu dira eta pertsona batek ariketa guztia ongi ebatzi du baina problemako bi pertsonak nahastu ditu (95. Irudia). Problema ebatzi duen gehiengoak ordezkapen-metodoa aukeratu du eta sistemaren bi ekuazioak lortzeko, hiru pertsonek taularen erabileraz baliatu dira (96. Irudia).



96. Irudia: I15 ikasleak egindako problema



95. Irudia: I16 ikasleak egindako problema

9.4. Emaitzen eztabaida

Atal honetan, ikasketa prozesuan egin diren jarduera guztien emaitzen eta aurreikusitako portaeren lotura modu orokor eta bateratuan aztertuko da. Analisia jarduera osagarrien emaitzen eztabaidan oinarrituko da, azterketaren emaitzak hauen isla direlarik.

Hasteko, kontuan hartu behar da, ekuazio-sistemen gaia gehienbat aljebrako multzokoa izanda, orain arteko irakaskuntzak ebazpen metodo aljebraikoei eman diela garrantzia. Hori dela eta, ariketa mekanikoak landu ohi dira nagusiki, aplikazio errealak eta interpretazio geometriko edo funtzionala tarte txiki bat betetzen dutelarik. Horrek, ikasleek interpretatzeko eta egoera baten aurrean sistemak aplikatzeko zailtasuna edukitzea dakar. Ikasleek ariketa mekaniko eta aljebraikoak egiteko lehentasuna adierazten dute eta beste ariketa moten aurreko kontrako jarrerak plazaratzen dira, iltzeen jardueran gertatu zen bezala. Azterketako emaitzetan argi ikus daiteke, problema (52. Taula) eta ebazpen grafikoko ariketek (48. Taula eta 49. Taula) hutsegite gehien dituztenak direla.

Honen harira, ikasleen motibazioak erabateko eragina izan du jarduera gehienetan. Lehenengo eta bigarren faseetan (*F1_ Problemak ekuazio-sistemen bidez ebatzi* eta *F2_ Zuzenen eta ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa*), hirugarrengoan (*F3_ Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa)* baino motibazio falta handiagoa sumatu da. Honek aurreko paragrafoan esandakoarekin eta erabilitako euskarri eta dinamikekin lotura zuzena dauka. 53. Taulan fase bakoitzean egindako jarduerak, eta erabilitako euskarriak eta metodologia zehaztu dira. Ohiko jardueretatik aldentzen diren proposaturiko jarduerak motibagarriagoak izango zirelakoaren aurreikuspena ez da bete, orokorrean ikasleek banakako lana aldarrikatu baitute. Ikasleek lehenengo faseari garrantzirik eman ez diotela nabarmendu da.

Bigarren fasea lantzeko bi euskarri material desberdin erabili dira. Eredu tradizionala eta dinamikoa erabiltzeak, ezagutza matematikoak sakontzeko eta hobe ulertzeko mesedegarria dela suposatzen da. Hala eta guztiz ere, azterketaren emaitzetan islatzen den moduan, ikasleen erdiari buruhauste handiak sortarazi dizkio. Honen arrazoi nagusiak ikasle hauen motibazio falta eta eredu dinamikoak suposatzen duen kontratu didaktikoaren haustura dira. Ikasleen ohiko lan metodoa eta berriaren arteko aldea zenbat eta handiagoa izan, orduan eta arazo eta inplikazio maila baxuagoak izanen dira.

Metodologia eraikitzaileak ohituta dauden mekanikoak baino esfortzu eta inplikazio handiagoa eskatzen du. Ikasketekiko motibazio eza dutenek hasieran, metodo hau traba bat izango balitz bezala har dezakete. Honen guztiaren ondorioz, irakaslearen esku-hartzeak espero zirenak baino maizago eman dira.

F0. Aurre ebaluazioa		
Jarduerak	*Euskarri materiala*	*Metodologia*
Froga diagnostikoa	Papera	Lan autonomoa
F1. Problemak ekuazio-sistemen bidez ebatzi		
Jarduerak	*Euskarria*	*Metodologia*
Iltzeen jarduera	Fitxak	Binakako lana
F2. Zuzenen eta ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa		
Jarduerak	*Euskarria*	*Metodologia*
Geogebra jarduerak + liburuko ariketak	Eredu dinamikoa eta fitxak + Testu-liburua	Binakako lana + Lan autonomoa
F3. Ekuazio-sistemen ebazpen aljebraikoa		
Jarduerak	*Euskarria*	*Metodologia*
Liburuko ariketak	Papera eta testu-liburua	Lan autonomoa

53. Taula: Jarduera bakoitzaren euskarri materiala eta metodologia

Software dimanikoen eraikuntzen azterketa egiten bada, aurreikusitakoa eta esperimentazioan gertatutakoaren artean aldeak daudela esan daiteke. Applet bakoitzean momentu matematiko bat edo bi emanen direla aurreikusi da, baina gero ikasleek applet-ari eman dioten erabilerak edota egindako ikasketa prozesuak beste izaera bat esleitu die. 54. Taulan ariketa bakoitzean emandako momentu matematikoak zehazten dira, irakasleak planteatutakoa eta ikasleen erabilera desberdinduz.

Applet batek ez du zertan izaera bakar bat eduki behar, produkzio matematiko baten prozesuan momentu ezberdinak eman daitezke. G1.2 ariketan, adibidez, ikaslearen esplorazio momentu baten ostean, botoi bat sakatu eta landutakoaren frogapen enpiriko bat eman beharko litzateke. Baina ikasle batzuek, argibideei jarraitu gabe, beste erabilera bat eman diote eraikuntza dinamikoari. Denbora guztian botoia sakatuta utzi dutenez, zuzenean ilustrazio momentu bat gertatu da.

G1.3 ariketan ere applet-aren izaeraren aldaketa bat izan da, baina arrazoi guztiz ezberdinengatik. Appleta esplorazio momentu baten ondoren arau orokor batzuk ateratzeko planteatu da, baina aurreikusitako emaitzak lortu ez direnez, ariketa ebatzita duen dokumentu bat helarazi zaie, azalpen magistral batez lagundurik. Erabaki didaktiko horrek, ilustrazio egoera bat izatea ekarri du.

G2.1 eta G2.2 ariketetan beste fenomeno bat gertatu da. Ariketa ilustrazio momentu bat emateko pentsatu da, eraikuntzak berak bi zuzenen posizio erlatiboa ematen baitu, hortaz ikasleak bakarrik ekuazioetan agerturiko parametroen balioak kopiatu behar ditu. Ikasle asko, ordea, ez dira zehetasun horretaz konturatu, beraz ariketa guztiz aldatu da, esplorazio momentu bat eman delarik. *Gardentasunaren ilusioa* deituriko fenomeno didaktikoak gertatutako egoera azaltzen du. “Fenomeno horrek matematikaren bi errealitateren arteko distantzia erakusten du” (Lasa, 2015). Ikasleak irakasleak prestatutako ariketa beste modu batetara ikusten du. Kasu honetan konkretuki, irakasleak zuzenen arteko posizio erlatiboen adierazpena gardena dela uste duen bitartean, ikasleek ez dute ezta ikusi ere egin. Mezua sinboloz nahiz izenez adierazten da, baina ikasleek bakarrik maneiatzen duen elementuetan jartzen dute arreta, hau da, zuzenaren irudikapen eta ekuazioan.

Applet-en momentu matematikoak subjektu desberdinen irudiz		
Appleta	*Irakaslea*	*Ikasleak*
G1.1	Esplorazioa	Esplorazioa
G1.2	Esplorazioa → Frogapena	Ilustrazioa
G1.3	Esplorazioa → Frogapena	Ilustrazioa
G2.1	Ilustrazioa	Esplorazioa
G2.2	Ilustrazioa → Frogapena	Esplorazioa → (Frogapena)
G2.3	Ilustrazioa	Instituzionalizazioa

54. Taula: Applet-en momentu matematikoak subjektu desberdinen irudiz

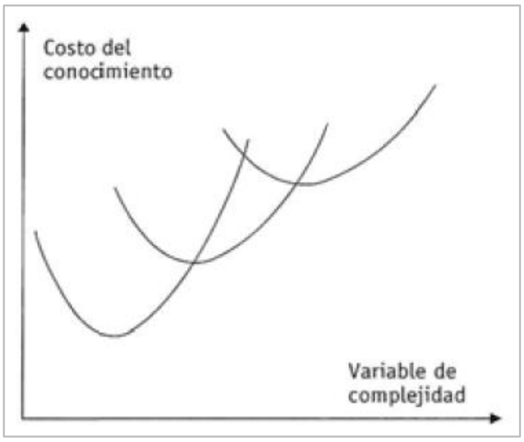
Bestalde, GeoGebrako eraikuntzetako bitan (G1.3 eta G2.2) orokortze-prozesu bat egin behar da, hau da, kasu partikularren esploraziotik frogapen enpiriko bat eginez, arau orokor batzuetara iritsi behar da. Gerora, objektu orokorren klasea sortzen duen arau multzoa, elementu partikular bat klase baten ordezkari gisa identifikatzea ahalbidetuko du (Godino, et al., 2011). Emaitzetan azaldu den bezala, ikasle batzuek ez dute orokortze-prozesu hau lortu, kasu partikularren azterketan geratu direlarik. Prozesu hauek berez konplexuak dira eta ikasleei ezagutza hauek garatzeko aukera eman behar zaie. Tamalez, aurreikusitako emaitzak orokorrean bete ez direnez, ariketa magistralki azaltzeko erabaki didaktikoa hartu behar izan da.

Bestetik, bigarren fasean malda (m) eta ordenatua jatorrian (n) kontzeptuak ulertzea zaila dela ikusi da. Jardueren bidez, hauen esanahiak lantzean, maldaren kontzeptua errazago ulertu dela ondorioztatu da. Maldak zuzen baten inklinazioa adierazten duela azkar ulertu dute, honen zeinuak hazkundea erakusten digula ikusiz. Ordenatua jatorrian kontzeptua ez da berehalakoa izan. Askok zuzena paraleloki mugitzeko balio duela adierazi dute.

Zailtasun hauen atzetik oztopo epistemologiko bat dago, matematiken zailtasunek beraiek sortutakoa. Zuzenen mugimenduak modu globalean ikusten dituzte ikasleek: paraleloki mugitu, zuzena biratu eta horrelako adierazpenak erabiltzen dituztelarik. Baina zuzena objektu matematikoa bere osotasunean ezagutzeko, zuzenen mugimenduen arrazoiak ulertu behar dira, mugimendu horiek zehazki nola gauzatzen diren ulertu behar da. Maldari buruz hitz egiteko, hazkundea erabili behar da; eta ordenatua jatorrian kontzeptuak, funtzioak OY ardatza jatorritik gora edo behera ebakitzen duen esan beharko liguke. Ondorioz, ikuskera puntual hau gehiago landu beharreko gaitasuna da, eta eredu dinamikoek zeregin hori helbideratzen dute.

Zuzenak bi parametro hauek erabilita irudikatzean, ordea, kontrakoa gertatu da. Behin n ulertuta, ez da irudikatzeko arazorik egon, baina maldarekin zalantza gehiago sortu dira. Horrenbestez, ikasleei kontzeptu hauek ulertzea kosta egiten zaiela ondoriozta daiteke, batez ere interpretazio geometrikoa gutxi landutako arloa baita.

Klaseko bi ikasle, lehen mailako funtzioen irudikapena n eta m parametroak erabilita egitearen kontra agertu dira. Balio taulak eginez zuzenak irudikatzen dakitenez, beste metodoren bat ikasteko beharra ez dagoela arrazoitu dute. *Atando cabos, contando circunferencias* artikuluak (Lasa, et al., 2015) dioen bezala, Brousseauk gatazka egoera hauek oso ongi azaltzen ditu. "(Ebazpen) metodo bakoitza elementuen tamaina handitzean zailtzen da, hurrengo metodoak ageriko eraginkortasunik aurkezten ez duen bitartean" (Brousseau, 2007). Ikasleek ez dute beste metodo baten beharrik, orain arte erabilitakoarekin ariketak ebatzi ditzaketelako, beraz, beste metodo bat ikasteak esfortzu handiagoa suposatzen duenez, ezagutza berriari uko egiten diote (97. Irudia).



97. Irudia: Informazio saltorik gabeko irakaskuntzaren progresio erregularra **(Lasa, et al., 2015)**

Ebazpen aljebraikoei dagokionez, metodo bakoitzaren prozedura ikastean ez da arazorik egon, trebatze ariketa mekanikoak landu baitira. Metodoetariko baten aukeraketa egin behar izan denean, irizpiderik jarraitzen ez dutela ikusi da, askotan ebatzi beharreko ekuazioak nahigabe zailtzen dituztelarik. Lehen esan bezala, urte askotan zehar aljebrari eman zaion gehiegizko garrantziak, hautaketa horien arrazonamendua alde batera uztea ekarri du. Fase honetan, ekuazioen aurreko gaitik ikasleek zekartzaten akats iraunkorrak azaleratu dira, batez ere berdinketa-metodoan eta sistema konplexuen ebazpenean, kalkulu aljebraiko zailenak bi arlo hauetan agertzen baitira.

Aipatutakoa, azterketan oso esanguratsuak izan diren bi akats errepikakorretan islatu egin da. Batetik, sistema konplexu baten ebazpeneko 5.ariketak hutsegite nahiko izan ditu (51. Taula), kalkuluetan akatsak izan direlako edo hasieratik ekuazioen konplexutasunak ikasleak ikaratu dituelako. Bestetik, koefiziente negatiboa duen aldagai bat isolatzeak hainbat arazo eragin ditu, sistemen ebazpen aljebraikoan nahiz grafikoan.

Koefiziente negatiboa duen aldagai bat gaizki isolatzea, akats iraunkor bat dela ikusi da. Akats horren atzean oztopo epistemologiko (matematiken zailtasunak eragindakoa) bat ageri da. Aritmetikan zuzendutako berdinketa bat ematen da, hau da, 3 + 5 eragiketak 8 ematen du. Beti ezkerretik eskuinerako norabidean egiten den irakurketa bat egiten da. Aljebran, aldiz, bi norabideetan eman ohi da berdinketa, baliokidetasun bat dagoelarik. Adibide bat jarrita, argiago geratuko da:

$$y = -\frac{1}{3}x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3}x = y$$

Ikasleei, aritmetikara ohitua, ekuazio aljebraikoa bi moduetan ikustea kosta egiten zaie, hortaz, akats iraunkor horren arrazoietako bat honakoa izan daiteke.

Bukatzeko, esan beharra dago eredu tradizionalean nahiz dinamikoan eman diren saioetan ikasle berdinak izan direla arreta jarri ez dutenak, beraz, ez da eredu dinamikoaren kontua izan. Hiruzpalau ikasle hauek, ikasketekiko motibazio faltagatik, eredu bietan jarrera nahiko pasiboa izan dute. Batzuetan lan giroa ez egokia izatearen eragileak izan dira, beste zenbait ikasleren arreta galaraziz. Gainontzeko ikasleak ongi erantzun dute bi euskarrien erabileran. Eraikuntza dinamikoen funtzionamendua behin ulertuta, ikasle gehienak oso ongi aritu dira. Are gehiago, printzipioz maila baxuagoa duten ikasle batzuek, ohiko ereduan baino inplikazio gehiago erakutsi dute, emaitza onak lorturik. Hau azterketan islatu da. Klaseko ikasle langileenak bikote desberdinetan sakabanatu dira, beraien kideei lagundu diezaieten; hortaz, bikote gehienek bikain erantzun dute elkarlaneko metodologiaren aurrean. Esatekoa da, eredu dinamikoen esperimentazioa oso laburra izan dela, hiru saiotara mugatuz, horietatik bat proiektatua izan delarik. Epe luzeagoko esperimentazio batekin, emaitza esanguratsuagoak aterako lirateke.

Sintesia, ondorioak eta erantzun gabeko galderak

Sintesi laburra

Honako Master Bukaerako Lanak Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako 4.mailan esperimentatutako ekuazio-sistemei buruzko ikasketa prozesu baten eta honetarako erabili diren euskarrien azterketa du helburu.

Hasteko, lehen mailako ekuazio-sistemen ebazpenarekin lotutako edukiak landu dira, aljebra eta funtzioen multzokoak hain zuzen ere. Curriculumean eta testu-liburuetan eduki horiek nola lantzen eta ebaluatzen diren aztertu ostean, hauen arteko koherentziaren analisia egin da.

Bigarrenik, Matematika Aplikatuen 4.mailako klase batendako ekuazio-sistemak lantzeko jarduera batzuk prestatu dira. Hauek euskarri material desberdinekin egin dira; batetik, eredu dinamikoa eta bestetik, ohiko paper eta arkatzarena. Jardueren aurkezpena eta saioen denborazko antolaketa deskribatu ondoren, hauen diseinua eta emaitzak aztertu dira, ikasleek hauen aurrean izan ditzaketen portaera eta zailtasunak aurreikusiz.

Azkenik, ikasketa prozesuaren esperimentazioa eginda, bertan eman diren ikasleen portaera eta emaitzak espero bezala gertatu diren eztabaidatu da. Ondorio moduan, emaitzen eta euskarri desberdinen erabileraren konklusio batzuk atera dira, etorkizunera begira egindako galdera ireki batzuk planteatuz.

Lanaren ondorio orokorrak

Ikasketa prozesuaren esperimentazioaren emaitzen analisia egin ondoren, hiru konklusio nagusi atera dira.

Lehenengoa, euskarri dinamikoen aplikazioarekin du zerikusia. Ikusi den moduan, euskarri materialaren aukeraketak ikasle, irakasle eta matematiken arteko *kontratu didaktikoan* eragin zuzena du. Ohiko paper eta arkatzeko ereduan ikasleak *erreprodukzio formaleko* kontratu bat egiten du, hau da, irakasleak kontzeptu matematikoak azaldu eta eredu bat jarri ostean, ikasleak imitazioz ariketa mekanikoak egiten ditu. Modu honetan, ikaslea eta matematiken arteko harremana irakaslearen bidez ematen da. Eredu dinamikoetan, berriz, ikasleak aurretik dituen ezagutzak oinarritzat hartuz, ezagutza berriak eraiki behar ditu. Honakoan, ikasle eta matematiken arteko harremana zuzena da eta irakaslearen papera, jarduerak prestatu eta zalantzak argituz, ikaslea gidatzearena da. Ikasleak berak eraikitzen du jakintza.

Bi ereduak oso desberdinak izan arren, bateragarriak dira: eredu dinamikoak, beharrezkoa den esplorazio-frogapen induktibo prozesu bat ematea errazten du; eta ohiko paper eta arkatzeko eredua, ikasleak ikasitakoa trebatu eta sakonago ulertzeko baliagarria da. Bi metodo hauen aplikazioa egitean, ikasleek bakarrik ohiko ereduan lan egin badute, hasieran eredu dinamikoarekiko kontrako jarrerak ematen dira, *kontratu didaktikoaren* haustura dela eta. Baina horrek ez du esan nahi dinamika horiek praktikan jarri behar ez direnik. Ez dago metodo onik edo txarrik, baizik eta ongi edo gaizki funtzionatzen dutenak.

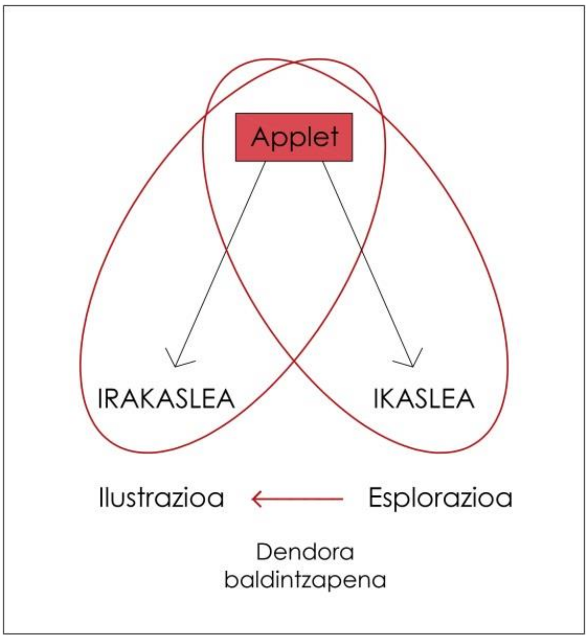
Kontratu haustura horren eragina edo inpaktua gero eta txikiagoa izatea nahi da. Hau gainditzeko, ezinbestekoa da ikasleek euskarriaren erabilgarritasuna ikustea. Beraz, aplikazio errealen lanketa eta interpretazioa, adibide eta aukera aunitzekin lantzeko metodo bezala nabarmendu behar da. Haustura hori pausoka eman beharko litzateke, eta arlo gehiagotan software dinamikoak erabiltzea lagungarria izango litzateke. Horretarako denbora behar da, esplorazio faseek beste lan erritmo bat behar dutelako. Horrenbestez, denbora eta edukien kudeaketa berri bat egitea nahita nahiezkoa da.

Bestetik, hasierako DBHko kurtsoetan nahiz Lehen Hezkuntzan egiten diren jardueretan bi ereduen konbinaketa aplikatzen hasiko balira, ez zen kontratu didaktikoaren hausturarik emanen edo neurri txikiagoan emango zen. Honek, interpretazioa eta arrazonamendu kritikoa lehenagotik lantzea bermatuko luke.

Bigarren ideia, eraikuntza dinamikoen erabilerari buruzkoa da. Aztertu den bezala, Applet bat ez da berez esploraziokoa, ilustraziokoa edo frogapenekoa. Hasteko, applet batekin momentu matematiko bat baino gehiago landu daitekeela esan beharra dago, ez da bakarrik batetara mugatzen.

Applet batek ez du izaera zehatz bat, baizik eta erabiltzaileak berak ematen dio izaera bat edo beste. Emaitzetan ikusi den bezala, kasu batzuetan appleta argibideetan adierazten den modu desberdinean erabili dute ikasleek. Bestetan, denbora baldintzapen batengatik, irakasleak pentsatutakoaren bestelako erabilera bat ematea erabaki du, ikasleek kontzeptu matematikoak uler ditzaten.

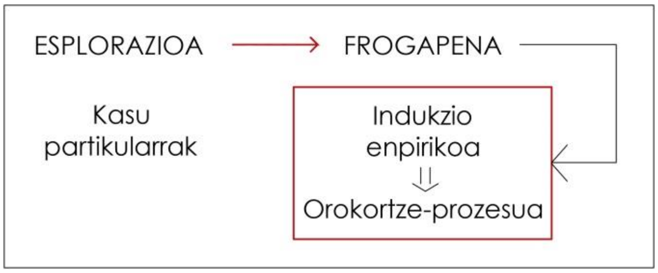
Ideia honekin jarraituz, applet batek sistema didaktikoaren araberako funtzio bat du. Sistema didaktikoa irakasleak, ikasleak eta matematikek osatzen dute. Irakasleak applet bat funtzio zehatz batekin eraiki dezake, baina ikaslearen ikuspegitik edo berak egindako erabilerarengatik, beste funtzio bat eduki dezake. Matematikaren aldetik ere, appletak ezagutza edo prozedura jakin batzuk lantzeko baliagarria da. Bi ikuspuntuak, irakaslearena eta matematikena, ahalik eta berdintsuenak izatea premiazkoa da. Horretarako irakasleak aurretiko analisi bat egitea ezinbestekoa da, applet-aren zailtasun matematikoak eta ikasleen ezagutza eta portaerak aurreikusiz. Bi subjektuek hizkuntza berdina erabiltzen badute, aipatutako *gardentasunaren ilusioaren fenomenoa* ekidin daiteke. 98. Irudian egoera hauek irudikatzen dituen eskema bat txertatu da, G2.1 ariketaren momentu matematikoak adierazi direlarik.



98. Irudia: Applet-en erabilera sistema didaktikoari dagokionez

Hirugarren konklusioa, momentu matematiko batetik bestera pasatzeko prozedurari buruzko gogoeta bat da. Esperimentazioan landutako eraikuntza dinamikoetako batzuetan esplorazio fase batetik demostrazio fase batetara pasatzea beharrezkoa da. Kasu partikular batzuen azterketatik arau orokor batzuk lortzea eskatzen da, hau da, arrazonamendu induktibo bat eginez frogapen batetara heltzea eskatzen da. Gerora, arau horiek kasu partikularrak identifikatzeko baliagarriak izango dira, partikularizazio-prozesuak gauzatuz.

Emaitzen azterketan ikasle batzuek kasu partikularrak emanez erantzun dutela ikusi da, beraz, esplorazio momentuan geratu dira. Frogapen horretara iristeko orokortze-prozesu bat ematea beharrezkoa da, askotan ikasleei konplexua egiten zaiena. Horregatik prozesu hauek gehiagotan landu beharko lirateke, eta eredu dinamikoak dira esplorazio momentuen bidez prozesu hauek ematea ahalbidetzen duten tresnetariko batzuk. 99. Irudian azken idei honetan adierazitakoa eskematikoki azaltzen da.



99. Irudia: Orokortze-prozesuaren garapena

Azaldutako egoeran *Gardentasunaren ilusioaren printzipioa* eman da. Modelo dinamikoek adibide asko emateko abantaila dute eta horren aurrean, irakasleak, ikasleak adibide horietatik propietate orokor bat lortzeko gai izango direla uste du. Baina esperimentazioan ikusi den bezala, ez du zertan. Kasu honetan *gardentasunaren ilusioa fenomenoa* irakasleak orokortze-prozesu bat ematea espero izanagatik ematen da.

Aldiz, ohiko arkatz eta papera edo arbeleko ereduan ere, fenomeno hau gerta daiteke, baina kontrako noranzkoan. Normalean, arbelean adibide bakar bat egiteko denbora izaten da. Irakasleak adibide orokor horretatik, ikasleek partikularizatzeko gaitasuna izanen dutela pentsa dezake; hau da, adibide orokor hori, gainontzeko jarduera matematiko desberdinetan aplikatzeko erabiliko dutela espero dezake. Bigarren kasu honetan, ordea, *gardentasunaren ilusioa fenomenoa* irakasleak partikularizazio-prozesu bat ematea espero izateagatik gertatzen da.

Galdera irekiak

Master Bukaerako Lan honen ondorioak behin azalduta, erantzun gabe gelditu diren eta etorkizunera begira erantzun beharreko zenbait galdera sortu dira.

Esplorazio appletek ikaslea pentsarazten eta arrazoitzen laguntzen dute. Bigarren Hezkuntzan orokorrean, eta matematikako ikasgaian konkretuki, aljebraren gehiegizko garrantziaren ondorioz, gaitasun hauen lanketa nahiko galdu da. Beraz, oso interesgarria izango litzateke galdera hauek aztertzea: Eredu dinamikoen erabilerak zer nolako eragina du pentsamendu kritikoaren lanketan? Applet-ekin lan egiteak pentsamendu kritikoa garatzen laguntzen du?

Ikasketa prozesuan erabilitako euskarri motek jardueran lantzen diren kontzeptu matematikoek baino eragin handiagoa dutela ondorioztatu da. Lehen Hezkuntzatik bi euskarri motak erabilita irakatsitako ikasleen emaitzak aztertuko lituzkeen lan baten emaitzak oso interesgarriak izango lirateke. Beraz, horri erantzuna emateko: Zer eragin du eredu dinamikoen lanketak Lehen Hezkuntzatik hasita matematiken arloan, epe luzera begira?

Lan honetan lehenik, eredu dinamikoekin eta gero, ohiko arkatz eta papereko ereduarekin lan egin da, eta horren emaitzak aztertu dira. Zer eragin izango luke prozesua aldrebes egin izan balitz, hau da, lehenengo teoria ohiko ereduan eman eta horren aplikazioak eredu dinamikoetan landu izan balira?

Gaur egungo Bigarren Hezkuntzako Ikastetxe publikoetan askotan ez da behar adina informatika gelarik, hauek erabiltzeko aukerak asko murriztuz. Aztertutako ikasketa prozesuan berebiziko garrantzia izan duen denbora baldintzapen honek, orokortze-prozesuetan eragin handia izan du, esplorazio unea, eredu dinamikoek behar dutena baino eskasagoa izan baita. Lehenengo kurtsoetatik eredu hau martxan jartzen hasteko: Nola kudeatuko litzateke informatika gelen erabilgarritasuna testuinguru honen aurrean? Eta, nola kudeatu ahalko da denbora bi euskarriekin curriculumak ezarritako eduki guztiak landu ahal izateko?

Taulen eta irudien aurkibideak

Taulen aurkibidea

1. Taula: 2. eta 3. DBHko edukiak	12
2. Taula: 4.DBHko edukiak	12
3. Taula: Batxilergoko edukiak	13
4. Taula: 2. eta 3. DBHko ebaluazio-irizpideak	15
5. Taula: 4.DBHko ebaluazio-irizpideak	16
6. Taula: 1. Batxilergoko ebaluazio-irizpideak	16
7. Taula: 2. Batxilergoko ebaluazio-irizpideak	17
8. Taula: 2. eta 3. DBHko ikaskuntzako estandar ebaluagarriak	19
9. Taula: 4. DBHko ikaskuntzako estandar ebaluagarriak	20
10. Taula: 1. Batxilergoko ikaskuntzako estandar ebaluagarriak	20
11. Taula: 2. Batxilergoko ikaskuntzako estandar ebaluagarriak	21
12. Taula: Curriculumak eta testu-liburuek barne harturiko edukien alderaketa.	38
13. Taula: Objektu matematikoak. Hizkuntza	47
14. Taula: Objektu matematikoak. Kontzeptuak	48
15. Taula: Objektu matematikoak. Egoerak	48
16. Taula: Objektu matematikoak. Prozedurak	48
17. Taula: Objektu matematikoak. Propietateak	48
18. Taula: Objektu matematikoak. Argudioak	49
19. Taula: 7.gaiaren egitura	49
20. Taula: 9.gaiaren egitura	54
21. Taula: Zuzenen izendapenaren aldeak	56
22. Taula: Saioen plangintza egutegian	64
23. Taula: Faseen banaketa saio desberdinetan	64
24. Taula: 1.saioaren denboraren banaketa	65
25. Taula: 2.saioaren denbora banaketa	65
26. Taula: 3.saioaren denbora banaketa	65
27. Taula: 4.saioaren denbora banaketa	65
28. Taula: 5. saioaren denbora banaketa	65
29. Taula: 6. saioaren denboraren banaketa	65
30. Taula: 7.saioaren denboraren banaketa	66
31. Taula: 8. saioaren denboraren banaketa	66
32. Taula: 9. saioaren denboraren banaketa	66
33. Taula: 10. saioaren denboraren banaketa	66
34. Taula: 11.saioaren denbora banaketa	66
35. Taula: 12. saioren denboraren banaketa	67
36. Taula: 13. saioaren denboraren banaketa	67
37. Taula: 14.saioaren denboraren banaketa	67
38. Taula: Iltzeen jardueraren garapen prozesua	70
39. Taula: Zereginak	79
40. Taula: A taldeko ikasleen deskribapena	81
41. Taula: B taldeko ikasleen deskribapena	82
42. Taula: Bikoteen osaera	82
43. Taula: Azterketako emaitzak	96
44. Taula: Ikasle gaindituen kopurua	96

45. Taula: Ikasleen kalifikazioak 96
46. Taula: Azterketako ariketa bakoitzeko ikasle gainditu kopurua 97
47. Taula: Azterketako 1.ariketaren kalifikazioak 97
48. Taula: Azterketako 2.ariketaren kalifikazioak 98
49. Taula: Azterketako 3.ariketaren kalifikazioak 99
50. Taula: Azterketako 4.ariketaren kalifikazioak 100
51. Taula: Azterketako 5.ariketaren kalifikazioak 101
52. Taula: Azterketako 6.ariketako kalifikazioak 102
53. Taula: Jarduera bakoitzaren euskarri materiala eta metodologia 104
54. Taula: Applet-en momentu matematikoak subjektu desberdinen irudiz 105

Irudien aurkibidea

1. Irudia: DBH2ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016a or. 160) 23
2. Irudia: DBH2ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016a or. 160) 24
3. Irudia: DBH2ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016a or. 161) 24
4. Irudia: DBH2ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016a or. 170) 24
5. Irudia: DBH2ko ariketak (Colera Jiménez, et al., 2016a or. 165) 25
6. Irudia: DBH2ko problemak (Colera Jiménez, et al., 2016a or. 166-168) 25
7. Irudia: DBH2ko ariketak (Colera Jiménez, et al., 2016a or. 267) 26
8. Irudia: DBH3ko ariketak (Colera Jiménez, et al., 2016b or. 101) 26
9. Irudia: DBH3ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016b or. 105) 27
10. Irudia: DBH3ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016b or. 105) 27
11. Irudia: DBH3ko problema (Colera Jiménez, et al., 2016b or. 107) 27
12. Irudia: DBH3ko problema (Colera Jiménez, et al., 2016b or. 129) 27
13. Irudia: DBH3ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016b or. 133) 28
14. Irudia: DBH4ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016c or. 105) 28
15. Irudia: DBH4ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016c or. 114) 29
16. Irudia: DBH4ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016c or. 110) 29
17. Irudia: DBH4ko problemak (Colera Jiménez, et al., 2016c or. 112-113) 29
18. Irudia: DBH4ko problema (Colera Jiménez, et al., 2016c or. 134) 29
19. Irudia: DBH4ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016c or. 141) 30
20. Irudia: DBH4ko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016c or. 141) 30
21. Irudia: 1. Batxilergoko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016d or. 88) 31
22. Irudia: 1. Batxilergoko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016d or. 89) 31
23. Irudia: 1. Batxilergoko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2016d or. 103) 31
24. Irudia: 1. Batxilergoko problema (Colera Jiménez, et al., 2016d or. 103) 31
25. Irudia: 1. Batxilergoko ariketak (Colera Jiménez, et al., 2016d or. 112-112, 129) 32
26. Irudia: 1. Batxilergoko problema baten planteamendua (Colera Jiménez, et al., 2016d or. 112) 32
27. Irudia: 1. Batxilergoko problema (Colera Jiménez, et al., 2016d or. 113, 129) 33
28. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 29) 33
29. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 31) 34
30. Irudia: 2. Batxilergoko ariketak (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 33, 42) 34
31. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 37) 34
32. Irudia: 2. Batxilergoko problema (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 44) 35
33. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 82) 35
34. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 83) 35

35. Irudia: 2. Batxilergoko ariketa (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 108) 35
36. Irudia: 2. Batxilergoko problema (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 114) 36
37. Irudia: 2. Batxilergoko ariketak (Colera Jiménez, et al., 2009 or. 31, 42) 36
38. Irudia: 7. unitatearen edukien eskema (Grupo Anaya, 2017) 50
39. Irudia: 7. gaiaren sarreraren ariketa 50
40. Irudia: Atalen egitura (Colera Jiménez, et al., 2016c) 51
41. Irudia: 7. gaiko Bitxikeri matematikoen problemak 54
42. Irudia: Poincaré matematikaria eta 9. gaiaren sarreraren aplikazioak 55
43. Irudia: Akats motak (Wilhelmi, 2009 or. 8) 60
44. Irudia: Aurre ebaluazioan egindako froga 68
45. Irudia: Iltzeen jarduera 69
46. Irudia: G1.1 ariketaren galdetegia 72
47. Irudia: G1.1 ariketaren appleta 72
48. Irudia: G1.2 ariketaren appleta 72
49. Irudia: G1.2 ariketaren galdetegia 73
50. Irudia: G1.3 ariketaren appleta 73
51. Irudia: G1.3 ariketaren galdetegia 74
52. Irudia: G1.4 ariketaren galdetegia 74
53. Irudia: G2.1 ariketaren galdetegia 75
54. Irudia: G2.1 ariketaren appleta 75
55. Irudia: G2.2 ariketaren galdetegia 76
56. Irudia: G2.2 ariketaren appleta 76
57. Irudia: G2.3 ariketaren galdetegia 76
58. Irudia: Azterketa 77
59. Irudia: I2 ikasleak egindako ariketa 88
60. Irudia: I13 ikasleak egindako ariketa. 88
61. Irudia: J bikoteak erantzundako galdera 88
62. Irudia: D bikoteak erantzundako galdera 88
63. Irudia: D bikoteak egindako ariketa 89
64. Irudia: H bikoteak egindako grafikoa 89
65. Irudia: B bikoteak egindako grafikoa 89
66. Irudia: G bikoteak egindako grafikoa 90
67. Irudia: H bikoteak erantzundako galdera 90
68. Irudia: D bikoteak erantzundako galdera 90
69. Irudia: E bikoteak egindako ariketa 90
70. Irudia: E bikoteak erantzundako galdera 92
71. Irudia: G bikoteak erantzundako galdera 92
72. Irudia: A bikoteak egindako ariketa. 92
73. Irudia: J bikoteak egindako ariketa 92
74. Irudia: I10 ikasleak egindako ariketa 93
75. Irudia: I17 ikasleak egindako ariketa 93
76. Irudia: I9 ikasleak egindako ariketa 94
77. Irudia: I18 ikasleak egindako ariketa 94
78. Irudia: I16 ikasleak egindako ariketa 95
79. Irudia: I1 ikasleak egindako ariketa 95
80. Irudia: I13 ikasleak egindako arketa 95
81. Irudia: Azterketaren noten kaxa-bibote diagrama 97
82. Irudia: Azterketako 1.ariketaren kaxa-bibote diagrama 98

83. Irudia: I7 ikasleak egindako ariketa 98
84. Irudia: Azterketako 2.ariketaren kaxa-bibote diagrama 99
85. Irudia: I7 ikasleak egindako arrazoiketa 99
86. Irudia: I18 ikasleak egindako arrazoiketa 99
87. Irudia: I4 ikasleak egindako arrazoiketa 99
88. Irudia: Azterketako 3.ariketaren kaxa-bibote diagrama 100
90. Irudia: I1 ikasleak egindako ariketa 100
89. Irudia: I15 ikasleak egindako ariketa 100
91. Irudia: Azterketako 4.ariketaren kaxa-bibote diagrama 101
92. Irudia: Azterketako 5.ariketaren kaxa-bibote diagrama 101
93. Irudia: I6 ikasleak egindako ariketa 102
94. Irudia: Azterketako 6.ariketaren kaxa-bibote diagrama 102
96. Irudia: I15 ikasleak egindako problema 103
95. Irudia: I16 ikasleak egindako problema 103
97. Irudia: Informazio saltorik gabeko irakaskuntzaren progresio erregularra (Lasa, et al., 2015) 106
98. Irudia: Applet-en erabilera sistema didaktikoari dagokionez 110
99. Irudia: Orokortze-prozesuaren garapena 111

Erreferentziak

24/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa, Nafarroako Foru Komunitatearen Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako irakaskuntzen curriculuma ezartzen duena. **Nafarroako Gobernua. 2015eko uztailaren 2koa.** 2015eko uztailaren 2koa, 127. Nafarroako Aldizkari Ofiziala.

25/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa, Nafarroako Foru Komunitatean Batxilergoko irakaskuntzen curriculuma ezartzen duena. **Nafarroako Gobernua. 2015eko uztailaren 2koa.** 2015eko uztailaren 2koa.eko, 127. Nafarroako Aldizkari Ofiziala.

Belloso, N. 2016. Triangelu zuzenen ebazpena eredu-dinamikoen bidez DBH4ko aniztasunean. *Master Bukaerako Lana.* Iruña NUP, 2016.

Brousseau, G. 2007. *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires : Libros del Zorzal, 2007.

—. 1998. Théorie des Situations Didactiques. Recherche en Didactique des Mathématiques. Grenoble, FRA : La Pensée Sauvage, 1998.

Colera Jiménez, J. eta Oliveira González, Mª J. 2009. *Matematika Gizarte Zientziei Aplikatua II. Batxilergoa 2.* le : ANAYA HARITZA, 2009.

Colera Jiménez, J., Oliveira González, Mª J., Gaztelu Albero, I. eta Colera Cañas, R. 2016b. *DBH 3. Matematika Irakaskuntza Aplikatuetara Bideratuta.* le : ANAYA HARITZA, 2016b.

—. 2016c. *DBH 4. Matematika irakaskuntza aplikatuetara bideratuta.* le : ANAYA HARITZA, 2016c.

Colera Jiménez, J., Oliveira González, Mª J., Colera Cañas, R. eta Santaella Fernández, E. 2016d. *Matematika Gizarte Zientzietara aplikatuta I. Batxilergoa.* le : ANAYA HARITZA, 2016d.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I. eta Colera Cañas, R. 2016a. *DBH 2. Matematika.* le : ANAYA HARITZA, 2016a.

Godino, J. D., Font, V. eta Wilhelmi, M. R. 2006. Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. 2006, Relime Número, Especial, or. 131-155.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. eta Wilhelmi, M. R. 2014. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. 2014, Enseñanza de las Ciencias. bol. 32 (1), or. 199-219.

Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M. R. eta Lurduy, O. 2011. Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. 2011, Educational Studies in Mathematics, 77 (2), or. 247-265.

Grupo Anaya. 2017. Anaya educación. [Online] 2017. [Aipatua: 2017.eko maiatzak 28.] http://www.anayaeducacion.es/usuario/libros.php.

Lasa, A. eta Wilhelmi, M. R. 2015. Atando cabos, contando circunferencias. Granada: J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M. M. Gea y M. M. López, 2015, Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2, or. 145-152.

—. 2013. Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. 2013, Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo, (2)1, or. 52-64.

Lasa, A. 2015. *Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz.* Bilbo : UEU, 2015.

Wilhelmi, M. R. 2009. Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico. Lima, PUCP : C. Gaita, 2009, Enseñanza de las Matemáticas: IV Coloquio internacional, or. 1-22.

—. 2005. Papel de la didáctica de las matemáticas en la formación de profesores de secundaria. 2005, La Gaceta de la RSME, 8.1. bol.

—. 2017. Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. le : J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín, Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, 2017.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. eta Font, V. 2007. Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las matemáticas: reflexiones sobre la teoría de las situaciones didácticas y el enfoque ontológico y semiótico. el : M. J. Alderete eta M. L. Porcar, 2007, Temas de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Cuyo, Mendoza, Argentina, or. 1-20.

Eranskinak

A. Testu-liburuko Unitate Didaktikoa
B. Jarduera osagarrien galdetegiak
- B1. Aurre ebaluazioa
- B2. Iltzeen jarduera
- B3. Eraikuntza dinamikoak
- B4. Azterketa

A. Testu-liburuko Unitate Didaktikoa

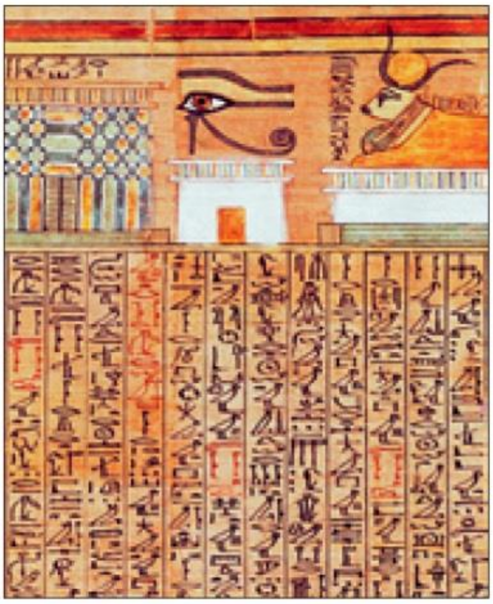
Eranskin honetan esperimentazioan oinarritzat erabilitako testu-liburuaren (Colera Jiménez, et al., 2016c) ekuazio-sistemekin lotura duten bi gaietako orrialdeak aurki daitezke. Zazpigarren gai osoa eta bederatzigarrenaren lehen mailako funtzioei dagozkien orrialdeak atxiki dira. Testu-liburu digitaletik ateratako orrialdeen irudiak Anayako irakasleendako webgunetik lortu dira (Grupo Anaya, 2017).

7 Ekuazio-sistemak

Ekuazioetatik sistemetara

Ekuazio-sistemen planteamendua eta ebazpena ekuazioenekin batera garatu ziren; izan ere, bi ezezaguneko bi ekuazioko sistema batetik ezezagun bakarreko ekuazio batera igaro-tzeak ez du aparteko zailtasunik.

Diofantok, beti bezain original eta burutsu, ekuazio-sistema baten bidez eman zitezkeen problemak ezezagun bakarreko ekuazio bakar baten bidez ebazten zituen, ezezagun hori oso modu trebean aukeratuz, helburu horri begira.



Berlinen gordeta dagoen Egiptoko papiro batean, eskribak honako problema hau planteatzen eta ebazten du: «Ehun ukondo karratuko karratu baten azalera beste bi karraturen azaleren arteko batura da, bataren aldea bestearen aldearen 1/2 + 1/4 izanik. Kalkulatu bi karratu horien aldeak». Gaur egun, enuntziatu hori oso erraz itzultzen dugu ekuazio-sistema baten bidez.

Historian zehar, ekuazio-sistema linealak ez dira erronka zaila izan. K.a. II. menderako, txinatarrek metodo dotore eta indartsua erabiltzen zuten ezezagun-kopuru bera zuten zenbait ekuazioren sistema linealak ebazteko, gaur egun erabiltzen dugun metodoaren antzekoa.

Antzinako matematika txinatarraren ezaugarrietako bat haren izaera praktikoa izan zen. Ondorioz, metodo bikainak lortu zituzten bai aritmetikan bai aljebran.

104

1 Bi ezezaguneko ekuazio linealak

Bi ezezaguneko **ekuazioa lineala** da honela idatz badaiteke:

$ax + by = c$, bertan a, b eta c zenbaki errealak izanik.

Bi ezezaguneko ekuazio lineal baten **soluzioa** berdintza betetzen duten balio-pare guztiak dira.

Adibidea

$2x + 3y = 1$ bi ezezaguneko ekuazio lineal bat da.

$x = 5$, $y = -3$ balio-parea soluzio bat da, berdintza betetzen baitu:

$$x = 5,\ y = -3 \rightarrow 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) = 1$$

Aurreko soluzioa honela adieraz daiteke: (5, –3).

Baina ekuazio horrek beste soluzio asko ditu, eta horiek denak erraz lor daitezke ezezagun bat bakandu eta besteari balioak emanez. Adibidez:

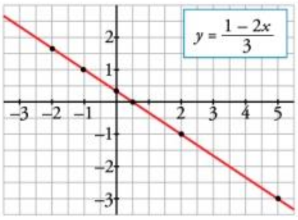
$y = \dfrac{1-2x}{3} \rightarrow$

x	–2	–1	0	1/2	2	…
y	5/3	1	1/3	0	–1	…

Infinitu soluzio ditu.

Bi ezezaguneko ekuazio lineal batek infinitu soluzio ditu.

Adierazpen grafikoa



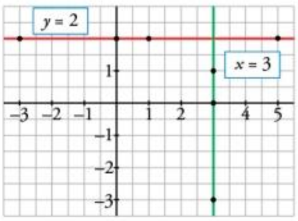
Bi ezezaguneko ekuazio lineal baten soluzioak planoko puntu moduan interpretatzen eta adierazten baditugu, zuzen bat lortuko dugu.

Ikus dezagun horrela dela aurreko adibideko ekuazioaren soluzioak adieraziz: (–2, 5/3), (–1, 1), (0, 1/3), (1/2, 0), (2, –1), …

Hemendik aurrera, beraz, gogoan izan zuzen bat adierazteko nahikoa dela horren bi puntu zein diren jakitea; eta, beharbada, beste bat egiaztatzeko.

x	–1	2	5
y	1	–1	–3

Kasu bereziak



$y = k$ itxurako ekuazioak zuzen horizontalen bidez adierazten dira; eta $x = k$ itxurakoak, zuzen bertikalen bidez.

Adibideak

$y = 2 \rightarrow 0x + y = 2$

x	–3	0	1	5	…
y	2	2	2	2	2

$x = 3 \rightarrow x + 0y = 3$

x	3	3	3	3	…
y	–3	0	1	5	…

Pentsatu eta egin

1. Lortu ekuazio bakoitzeko bi soluzio eta irudikatu kasu bakoitzari dagokion zuzena.

a) $2x + y = 3$ b) $x + y = 4$

2. Adierazi grafikoki.

a) $y = 3$ b) $y = -\dfrac{1}{2}$ c) $x = -2$ d) $x = \dfrac{3}{2}$

105

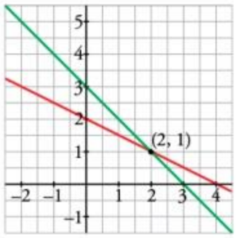
2 Ekuazio-sistema linealak

Zenbait ekuaziok **sistema** bat eratzen dute ekuazio guztienak diren soluzioak aurkitu nahi ditugunean.

Bi ezezaguneko bi ekuazio lineal dituzten sistemak landuko ditugu. Aurreko orrialdean ikusi dugunez, ekuazio horietako bakoitza zuzen baten bidez adieraz dezakegu.

Adibidea

$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ x + \ \ y = 3 \end{array}\right\}$ Ikusten duzunez, bi ekuazioena izango den soluzioa $x = 2$, $y = 1$ da, eta adierazpen grafikoan, bi zuzenek elkar ebakitzen duten puntuarekin bat dator (2, 1).



Soluzioa: $x = 2$, $y = 1$

$y = \frac{4 - x}{2} \rightarrow$

x	–2	2	4
y	3	1	0

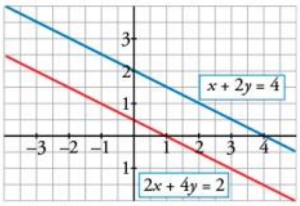
$y = 3 - x \rightarrow$

x	–2	2	4
y	5	1	–1

Grafikoki, bi ezezaguneko bi ekuazio linealen sistema baten **soluzioa** ekuazio hori eratzen duten zuzenen arteko ebaki-puntua da.

Sistema baten soluzio-kopurua

Orokorrean, bi ezezaguneko bi ekuazio lineal dituen sistema batek soluzio bat du (bi zuzenen arteko ebaki-puntua). Baina batzuetan, ez da hala gertatzen. Ikus dezagun zer beste kasu dauden.

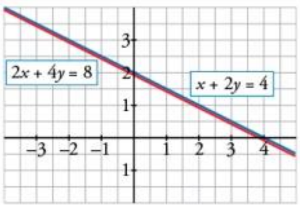


- **Sistema bateraezinak (soluziorik gabeak)**

  Saia gaitezen sistema hau ebazten:

  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ Bi zuzenak irudikatu eta puntu batean ere ez dutela elkar ebakitzen ikusten dugu; paraleloak dira.

  Sistemak ez du soluziorik, bateraezina da (ekuazioek kontraesana dute: $x + 2y = 4$ bada, orduan $2x + 4y$ ekuazioaren emaitza 8 izan behar da, eta ez 2).



- **Sistema indeterminatuak (infinitu soluziodunak)**

  Har dezagun beste sistema hau:

  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ Ikusten duzunez, bi ekuazioek gauza bera esaten dute (bigarrena lehenengoaren bikoitza da).

  Zuzen bera da. Beraz, sistemak infinitu soluzio ditu, indeterminatua da (zuzeneko edozein puntu da sistemaren soluzio).

Pentsatu eta egin

1. Irudikatu kasu bakoitzean ageri diren zuzenak eta esan sistemak soluzio bat duen, indeterminatua den (infinitu soluzioduna) edo bateraezina den (soluziorik gabea). Soluzioa duen kasuetan, esan zein den:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

Webgunean Sistema linealen ebazpen grafikoa.

3 Ekuazio-sistemen ebazpena

Ekuazio-sistemak ebazteko metodo aljebraikoetan, helburua hasierako ekuazioetatik abiatu eta ezezagun bateko ekuazio bakar bat lortzea izaten da. Eta ezezagun horren balioa jakinda, bestearen balioa lortuko dugu, berriro sistemako ekuazioetara itzuliz.

Ordezpen-metodoa

- Ekuazioetako batean ezezagunetako bat askatu eta bestean ordeztu behar da. Horrela, ezezagun bakarreko ekuazio bat lortuko dugu.
- Ekuazio berria ebatzi eta ezezagunetako baten balioa lortuko dugu.
- Beste ezezaguna kalkulatuko dugu, lortu dugunaren balioa askatzeko erabili dugun adierazpenean ordeztuz.

Kontuan izan

Ordezpen-metodoa oso lagungarria da ezezagun baten koefizientea 1 edo –1 denean ekuazioetako batean.

Webgunean

Ordezpen-metodoa.

Ariketa ebatzia

Ebatzi sistema hau ordezpenaren bidez: $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

- Lehenengo ekuazioan y askatu (errazena da), bigarrenean ordeztu eta ebatzi egingo dugu:

$$y = 13 - 3x \rightarrow 2x + 3(13 - 3x) = 4 \rightarrow x = 5$$

- $x = 5$ balioa y askatuta ageri den ekuazioan ordeztuko dugu.

$$y = 13 - 3x \rightarrow y = 13 - 3 \cdot 5 \rightarrow y = -2$$

- Sistemaren soluzioa $x = 5$, $y = -2$ da.

Egiaztapena

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$x = 5$, $y = -2$ balioek bi ekuazioak betetzen dituzte:

$$3 \cdot 5 + (-2) = 13$$
$$2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 4$$

Berdinketa-metodoa

- Bi ekuazioetan ezezagun bera askatu eta lortutako adierazpenak berdinduko ditugu. Horrela, ezezagun bakarreko ekuazio bat lortuko dugu.
- Ekuazio berria ebatzi eta aurreko metodoan bezala jarraituko dugu, balio hori askatutako ekuazioetako edozeinetan ordeztuz.

Kontuan izan

Berdinketa-metodoa bi ekuazioetan ezezagun bera askatuta dagoenean erabiltzen da. Hori eginda, ordezpen-metodoa erabiltzea bezalakoa izango da.

Ariketa ebatzia

Ebatzi sistema hau berdinketa eginez: $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

- Bi ekuazioetan y askatu, emaitzak berdindu eta ebatzi egingo dugu:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 13 \rightarrow y = 13 - 3x \\ 2x + 3y = 4 \rightarrow y = \dfrac{4 - 2x}{3} \end{array}\right\} 13 - 3x = \dfrac{4 - 2x}{3} \rightarrow x = 5$$

- y askatuta ageri den ekuazioetako edozeinetan ordeztuko dugu:

$$y = 13 - 3x \rightarrow y = 13 - 3 \cdot 5 \rightarrow y = -2$$

- Sistemaren soluzioa $x = 5$, $y = -2$ da.

107

Kontuan izan

Laburketa-metodoa oso erosoa da ezezagun batek bi ekuazioetan koefiziente bera duenean, edo koefizienteak bata bestearen multiplo direnean.

Webgunean

Laburketa-metodoa.

Laburketa-metodoa

- Ekuazioak prestatuko ditugu, bietako koefizienteak berdinak baina kontrako zeinukoak izan daitezen. Eta horretarako, komeni den zenbakiarekin biderkatuko ditugu. Bi ekuazioen batuketa egitean, ezezagun bakarreko ekuazio bat lortuko dugu.
- Ekuazio berria ebatziko dugu.
- Lortutako balioa hasierako ekuazioetako edozeinetan ordeztuko dugu.

Ariketa ebatzia

Ebatzi laburketa eginez: $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

- Lehenengo ekuazioa bider (–3) egin, eta bigarrena dagoen moduan utziko dugu. Gero, biak batu eta ebatzi egingo dugu:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \xrightarrow{\times(-3)} -9x - \cancel{3y} = -39 \\ 2x + 3y = 4 \longrightarrow \quad 2x + \cancel{3y} = 4 \end{cases}$$

$$\text{Batuketa eginez: } -7x = -35 \rightarrow x = \frac{-35}{-7} \rightarrow x = 5$$

- $x = 5$ balioa hasierako ekuazioetako edozeinetan ordeztuko dugu. Kasu honetan, errazagoa da lehenengoan egitea:

$$3 \cdot 5 + y = 13 \rightarrow y = 13 - 15 \rightarrow y = -2$$

- Sistemaren soluzioa $x = 5$, $y = -2$ da.

BESTE AUKERA BAT

Metodo bera erabiliz, x laburtu eta y-ren balioa lor dezakegu. Horretarako, hasierako sisteman, lehenengo ekuazioa bider 2 eta bigarrena bider (–3) egingo dugu:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \xrightarrow{\times 2} \cancel{6x} + 2y = 26 \\ 2x + 3y = 4 \xrightarrow{\times(-3)} \cancel{-6x} - 9y = -12 \end{cases}$$

$$\text{Batuketa eginez: } -7y = 14 \rightarrow y = \frac{14}{-7} \rightarrow y = -2$$

Pentsatu eta egin

1. Ebatzi ordezpen-metodoa erabiliz.

a) $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 4y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y + 2 = 5 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

2. Ebatzi berdinketa-metodoa erabiliz.

a) $\begin{cases} x + 5y = 4 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \dfrac{3x+1}{2} \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

3. Ebatzi laburketa eginez.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x + 2y = 25 \\ 3x - 5y = -1 \end{cases}$

4. Adierazi grafikoki ekuazio-pare hauek:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 5y = 21 \end{cases}$

Ebatzi sistemak landutako metodo aljebraikoetako bat erabiliz, eta egiaztatu soluzioa bat datorrela zuzenen arteko ebaki-puntuarekin.

4 Ekuazio linealen sistema konplexuagoak

Itxura zaileko ekuazio-sistema bat ageri zaigunean, lehenengo urratsa sinplifikatzea izango da $ax + by = c$ itxurakoak lortu arte. Hori eginda, aurreko orrialdeetan ikusi ditugun hiru metodoetakoren bat erabiliz ebatziko dugu.

Ariketa ebatzia

Ebatzi sistema hau: $\begin{cases} \dfrac{2(x-y+4)}{3} - \dfrac{2x+y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ -2(x-y+1) + \dfrac{x+y}{3} = -3 \end{cases}$

- Lehenengo, bi ekuazioak sinplifikatuko ditugu:

$$\begin{cases} \dfrac{2(x-y+4)}{3} - \dfrac{2x+y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ -2(x-y+1) + \dfrac{x+y}{3} = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-2y+8}{3} - \dfrac{2x+y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ -2x+2y-2+\dfrac{x+y}{3} = -3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2(2x-2y+8) - 3(2x+y) = 5 \\ -6x+6y-6+x+y = -9 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x-4y+16-6x-3y = 5 \\ -5x+7y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x-7y = -11 \\ -5x+7y = -3 \end{cases}$$

- Landu ditugun hiru metodoetako bat erabiliko dugu. Kasu honetan, laburketa-metodoa oso egokia da:

$$\begin{cases} -2x - \cancel{7y} = -11 \\ -5x + \cancel{7y} = -3 \end{cases}$$

Batuketa eginez: $-7x \quad = -14 \rightarrow x = 2$

- y-ren balioa lortuko dugu:

$$-2x - 7y = -11 \rightarrow -4 - 7y = -11 \rightarrow -7y = -7 \rightarrow y = 1$$

- Sistemaren soluzioa hau da: $x = 2,\ y = 1$.

Egiaztapena

$$\begin{cases} \dfrac{2(x-y+4)}{3} - \dfrac{2x+y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ -2(x-y+1) + \dfrac{x+y}{3} = -3 \end{cases}$$

$x = 2,\ y = 1$ balioek bi ekuazioak betetzen dituzte:

$$\frac{2(2-1+4)}{3} - \frac{2\cdot 2+1}{2} = \frac{10}{3} - \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

$$-2(2-1+1) + \frac{2+1}{3} = -4 + \frac{3}{3} = -3$$

Pentsatu eta egin

1. Sinplifikatu eta, gero, ebatzi.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 3 \\ \dfrac{x+y}{8} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 5(y-1) = \dfrac{x-1}{2} \\ \dfrac{4(x+1)}{5} = 6y + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(x-y+3) - 3x = 0 \\ \dfrac{2(x+1)}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y}{2} = 2(x+y) + 3 \\ \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

109

5 Sistema ez-linealak

Ez ahaztu

Izendatzailean erroak edo ezezagunak badaude, soluzio faltsuak ager daitezke; denak egiaztatu behar dira.

Sistema ez-linealak ekuazio bat edo biak linealak ez dituzten sistemak dira; hau da, bigarren mailako monomioak (x^2, y^2, $x \cdot y$) edo goragoko mailetakoak dituztenak, edo errodunak, edo izendatzailean ezezagun bat dutenak…

Sistema horiek ebazteko, bi ezezaguneko sistema batetik ezezagun bakarreko ekuazio batera igarotzeko modua emango diguten metodo ezagun batzuk erabiliko ditugu.

Ariketa ebatzia

Ebatzi honako sistema hauek:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 3 \end{cases}$

a) Ordezpen-metodoa erabiliko dugu:

$$\begin{cases} y - x = 1 \;\rightarrow\; y = 1 + x \\ x^2 + y^2 = 5 \;\rightarrow\; x^2 + (1+x)^2 = 5 \;\rightarrow\; x^2 + 1 + 2x + x^2 = 5 \;\rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2 = -2 \rightarrow y_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Bi soluzio daude: (1, 2); (–2, –1).

b) Laburketa-metodoa erabiliko dugu:

$$\begin{cases} x^2 + \cancel{y^2} = 5 \\ x^2 - \cancel{y^2} = 3 \end{cases}$$

$$2x^2 \quad = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

- $x = 2$ bada $\rightarrow 4 + y^2 = 5 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$
- $x = -2$ bada $\rightarrow 4 + y^2 = 5 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$

Lau soluzio daude: (2, 1); (2, –1); (–2, 1); (–2, –1).

c) Izendatzaileak kendu eta ordezpenaren bidez ebatziko dugu:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 1 \\ y - x &= 3xy \end{aligned}\right\} \rightarrow y = \frac{1-2x}{2}$$

y-ren balioa bigarren ekuazioan ordeztuko dugu: $\dfrac{1-2x}{2} - x = 3x \cdot \dfrac{1-2x}{2} \rightarrow$

$$\rightarrow 1 - 2x - 2x = 3x - 6x^2 \rightarrow 6x^2 - 7x + 1 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{6} \rightarrow y_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Bi soluzio daude: $\left(1, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ (egiaztatu bi ekuazioetan).

Webgunean

Sistema ez-linealen ebazpena indartzeko ariketak.

Pentsatu eta egin

1. Sinplifikatu eta, gero, ebatzi.

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = 5 - x \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 7 = y^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{xy} \end{cases}$

6 Problemak sistemen bidez ebatzi

Problemak ekuazioen edo ekuazio-sistemen bidez ebazteko, ematen dizkiguten datuak hizkuntza aljebraikoan jarriko ditugu.

Ezezagun bakarreko ekuazioen bidez ebatz daitezkeen problema asko daude. Dena dela, errazagoa izaten da bi ezezaguneko ekuazio-sistemen bidez planteatzea eta ebaztea. Ikus ditzagun eredu batzuk.

Problema ebatziak

1. ***Aitaitak badiotso amamari: «Konturatu al zara, Mari? Bion urteak batuta, mende eta erdi egiten dugu». Eta amamak erantzun dio: «Egia da hori. Baina hala ere ni zu baino lau urte gazteago beti». Zenbat urte ditu bakoi-tzak?***

- Bi ezezagun hartuko ditugu:

  Aitaitaren adina $\rightarrow x$

  Amamaren adina $\rightarrow y$

- Enuntziatuak ematen digun informazioa hizkuntza aljebraikora itzuli, eta ekuazio-sistema bat planteatu eta ebatziko dugu:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Adinen arteko batura 150 urte da} & \rightarrow x + y = 150 \\ \text{Adinen arteko kendura 4 urte da} & \rightarrow x - y = \quad 4\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Soluzioa hau da:} \\ x = 77,\ y = 73\end{array}$$

Soluzioa: Aitaitak 77 urte ditu, eta amamak, 73 urte.

2. ***Eiderrek 14 € ordaindu du lau ogitarteko eta bost freskagarri, eta Leirek 8,40 € ordaindu du hiru ogitarteko eta bi freskagarri. Zenbat balio du ogitarteko batek? Eta freskagarri batek?***

- Bi ezezagun hartuko ditugu:

  Ogitartekoaren prezioa $\rightarrow x$

  Freskagarriaren prezioa $\rightarrow y$

- Ekuazioen sistema bat planteatu eta ebatziko dugu:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Eiderren gastua} & \rightarrow 4x + 5y = 14 \\ \text{Leireren gastua} & \rightarrow 3x + 2y = 8,40\end{array}\right\} \text{ Soluzioa } x = 2,\ y = 1,20 \text{ da.}$$

Soluzioa: Ogitarteko batek 2 € balio du, eta freskagarri batek, 1,20 €.

Pentsatu eta egin

Webgunean Ebatzi «Latak» problema.

1. Bi zenbakiren arteko batura 323 da, eta kendura, 47. Zein dira zenbaki horiek?

2. Hiru kilo madarik eta bi kilo laranjak 6,70 € balio dute. Kilo bat madarik eta bost kilo laranjak, berriz, 7 €. Zenbat balio du kilo bat madarik? Eta kilo bat laranjak?

3. 50 galderako test batean, erantzun zuzen bakoitza bi puntu dira, eta erantzun oker bakoitza, puntu erdi gutxiago. Zenbat erantzun on eta txar eman ditut guztira 65 puntu atera baditut?

4. Zinema batean, hiru sarrera eta bi poltsa palomita 23 € ordaindu ditugu. Andrea ere etorri izan balitz, sarrera bat gehiago eta poltsa bat palomita gehiago izango ziren, eta 31,50 € ordainduko genituen. Zenbat balio du sarrera batek eta zenbat poltsa bat palomitak?

5. Olio lantegi baten jabeak 10 000 litro olio 12 000 botilatan sartu ditu. Botila batzuk litrokoak eta beste batzuk hiru litro laurdenekoak dira. Bakoitzeko zenbat erabili ditu?

6. Bi zenbakiren artean 35 unitateko aldea dago. Emaitza bera lortzen dugu handienari txikienaren bostena kenduta eta txikienari handienaren bostena batuta. Zer zenbaki dira?

7. Laukizuzen baten oinarriak altuerak baino 13 cm gehiago ditu, eta perimetroa 142 m-koa da. Zer neurri ditu laukizuzenak?

8. Triangelu isoszele batean, perimetroa 21 cm-koa da eta alde desberdina alde berdinak baino 3 cm laburragoa da. Zer neurri du alde bakoitzak?

111

***3.** Bi kafe mota batera eho ditugu: kalitate apalekoak 3 €/kg balio du, eta kalitate hobekoak, 5,20 €/kg. Lortu dugun nahastearen kiloak 3,77 euro balio badu, kafe mota bakoitzaren zer ehuneko du nahasteak?*

- 100 kilo nahastetan dagoena:

  maila apaleko kafearen x kilo, $3x$ €-an kiloa.

  goi-mailako kafearen y kilo, $5{,}20y$ €-an kiloa.

- Bi ekuazio planteatuko ditugu: bata, pisuena; eta bestea, prezioena:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pisuak} \ \rightarrow \ x + \quad y = 100 \\ \text{Prezioak} \ \rightarrow \ 3x + 5{,}20y = 3{,}77 \cdot 100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + \quad y = 100 \\ 3x + 5{,}2y = 377 \end{array}\right\}$$

Sistemaren soluzioa $x = 65$, $y = 35$ da.

Soluzioa: Nahastearen % 65 maila apaleko kafea da, eta % 35, goi-mailako kafea.

***4.** A eta B herriak bata bestetik 23 km-ra daude. Txirrindulari bat 12 km/h-ko abiadura konstantean abiatu da A-tik B-rantz. Bost minutu geroago, B-tik A-rantz beste txirrindulari bat irten da, 10 km/h-ko abiadura konstantean. Zer distantzia egingo du bakoitzak elkar gurutzatu arte?*

- Topo egin arte, lehenengo txirrindulariak x km egiten ditu, eta $x/12$ orduan egiten du tartea.

  Bigarren txirrindulariak y km egiten ditu, eta $y/10$ orduan egiten du tartea.

- Bi ekuazio planteatuko ditugu: bata, distantziena; eta bestea, denborena (kontuan izan lehenengoaren denbora bigarrenarena baino 5 minutu gehiago dela, eta 5 minutu 5/60 ordu direla):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Distantziak} \ \rightarrow \ x + y = 23 \\ \text{Denborak} \ \rightarrow \ \dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{10} + \dfrac{5}{60} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + \quad y = 23 \\ 5x - 6y = \quad 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sistemaren soluzioa} \\ x = 13, \ y = 10 \ \text{da.} \end{array}$$

Soluzioa: Elkar gurutzatu arte, lehenengo txirrindulariak 13 km egin ditu, eta bigarrenak, 10 km.

***5.** Inbertitzaile batek 50 000 € sartu ditu A eta B konpainien akzioetan, handik bi hilabetera saltzeko. Lehenengoekin % 6 irabazi du, eta besteekin, % 2 galdu. Zenbat inbertitu zuen konpainia bakoitzean, guztira 1 320 € irabazi baditu?*

- A konpainiako akzioak $\rightarrow$ x euro inbertitu eta $0{,}06 \cdot x$ irabazi du.
- B konpainiako akzioak $\rightarrow$ y euro inbertitu eta $0{,}02 \cdot y$ galdu du.
- Bi ekuazio planteatuko ditugu: bata, inbertitutako kantitateena; eta bestea, lortutako irabaziena:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Inbertitutako kantitateak} \ \rightarrow \ x + y = 50\,000 \\ \text{Lortutako irabaziak} \ \rightarrow \ 0{,}06x - 0{,}02y = 1\,320 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sistemaren soluzioa} \\ x = 29\,000, \ y = 21\,000 \ \text{da.} \end{array}$$

Soluzioa: 29 000 € ezarri zituen A konpainian, eta 21 000 € B konpainian.

Webgunean Ebatzi «Nahasteak» problema.

Pentsatu eta egin

9. Upategi baten jabeak 4,80 €/*l* balio duen upel bat ardo eta 3,50 €/*l* balio duen beste upel bat ardo nahastu, eta 1 300 *l* nahaste lortu ditu, litroa 4 €-an saltzeko. Mota bakoitzeko zenbat *l* nahastu ditu?

10. A eta B hiriak bata bestetik 113 km-ra daude. Auto bat A-tik B-rantz irten da 100 km/h-an. Ordu erdi geroago, B-tik A-rantz kamioi bat irten da, 80 km/h-an. Zer distantzia egiten du bakoitzak elkar gurutzatu arte?

11. Jaimek 20 000 € ditu. Zati bat % 7an ezarri du bankuan, eta gainerakoa, % 3an. Urtebetean 760 € irabazi baditu, zenbateko diru-kantitateak ezarri ditu ehuneko batean eta bestean?

12. Saioak 200 000 €-ko kapitala zuen. Zati bat banku batean ezarri du, urteko % 4an. Gainerakoa akzioetan inbertitu du, eta % 11 galdu du. Urtea pasata, 4 250 € irabazi ditu guztira.

Zenbat diru sartu du inbertsio bakoitzean?

13. Inbertitzaile batek arrisku ertaineko bi funtsetan banatu du kapitala. Denbora igaro eta atera dituenean, lehenengoarekin % 3,25 irabazi du, baina bigarrenarekin, % 0,75 galdu.

Kapitalaren zer ehuneko ezarri du funts bakoitzean, guztira % 2,85 irabazi badu?

Webgunean Ebatzi «Mugikariak» problema.

112

Hona hemen sistema ez-linealen bidez ebatzitako problema batzuk. Ikusiko duzunez, kasu hauetan ere landu dituzun metodoak erabili dira.

Problema ebatziak

6. ***Bi zenbakiren arteko batura 30 da, eta biderkadura, 161. Zer zenbaki dira?***

Zenbaki horiei x eta y esaten badiegu:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ x \cdot y = 161 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 30 - y \rightarrow \\ \rightarrow (30 - y) \cdot y = 161 \rightarrow 30y - y^2 = 161 \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow y^2 - 30y + 161 = 0 \rightarrow y = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 161}}{2} = \frac{30 \pm 16}{2} \left\langle \begin{array}{l} y_1 = 23 \\ y_2 = 7 \end{array}\right.$$

$y_1 = 23$ denean, $x_1 = 30 - 23 = 7$. Eta $y_2 = 7$ denean, $x_2 = 30 - 7 = 23$.

Soluzioa: Zenbaki horiek 23 eta 7 dira.

7. ***Uraska bat potentzia desberdineko bi ponparen bidez hornitzen da urez. Bakarka arituta, lehenengo ponpak bigarrenak baino 3 ordu gutxiagoan betetzen du. Baina biak piztuz gero, 2 orduan betetzen dute. Zer denbora behar dute ponpek bakarka arituz gero?***

1. ponpak x orduan betetzen du uraska. → Ordubetean, uraskaren $1/x$ betetzen du.

2. ponpak y orduan betetzen du uraska. → Ordubetean, uraskaren $1/y$ betetzen du.

Biek batera 2 orduan betetzen dute uraska. → Ordubetean, uraskaren 1/2 betetzen dute.

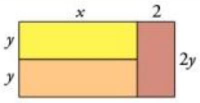
$$\left.\begin{array}{l} x = y - 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y - 3 \\ 2y + 2x = xy \end{array}\right\} \rightarrow 2y + 2(y - 3) = (y - 3)y \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 - 7y + 6 = 0 \rightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} y_1 = 6 \\ y_2 = 1 \end{array}\right.$$

$y_1 = 6$ bada, $x_1 = 3$. Eta $y_2 = 1$ bada, $x_2 = -2$. Soluzio negatiboa alboratu egingo dugu. *Soluzioa:* Lehenengo ponpak, bakarka, 3 orduan betetzen du; eta bigarrenak, 6 orduan.

8. ***Laukizuzen batek 22 cm-ko perimetroa du. Oinarria bi metro handitu eta altuera bikoiztuz gero, azalera 44 cm² handituko da. Kalkulatu laukizuzenaren neurriak.***

Oinarriari x eta altuerari y esaten badiegu:



Perimetroa → $2x + 2y = 22 \rightarrow x + y = 11$

Azaleraren handitzea → $xy + 2 \cdot 2y = 44$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 11 \\ xy + 4y = 44 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 11 - y \rightarrow \\ \rightarrow (11 - y) \cdot y + 4y = 44 \rightarrow y^2 - 15y + 44 = 0 \end{array} \left\langle \begin{array}{l} y_1 = 11 \\ y_2 = 4 \end{array}\right.$$

$y_1 = 11$ bada, $x_1 = 0$. Eta $y_2 = 4$ bada, $x_2 = 7$.

(11, 0) soluzioa alboratu egingo dugu, ez baitu zentzurik kasu honetan.

Soluzioa: Laukizuzenaren oinarriak 7 cm ditu, eta altuerak, 4 cm.

Webgunean Indartu enuntziatuak ekuazio-sistemetara itzultzea.

Webgunean Ebatzi «Txoriak» problema.

Pentsatu eta egin

14. Laukizuzen itxurako lursail bateko hesiak 148 m-ko luzera du, eta sailaren azalera 1 200 m²-koa da. Zer neurri ditu?

15. Kalkulatu triangelu zuzen baten perimetroa, kateto bat bestea baino 10 cm luzeagoa dela eta azalera 150 cm²-koa dela jakinda.

16. Depositu batek bi txorrota ditu betetzeko. Lehenengoa bakarrik zabalduta, bigarrena bakarrik zabalduta baino bi aldiz denbora gehiago behar da depositua betetzeko. Baina biak batera zabalduz gero, 10 minutuan betetzen da. Zenbat denbora behar du txorrota bakoitzak, bakarka, depositua betetzeko?

113

Ariketak eta problemak

Trebatu

Sistema linealak

1. Aztertu (3, –1) bikotea honako sistema hauetakoren baten soluzio den:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$

2. Osatu koadernoan, honako sistema hauek soluzio moduan $x = -1$, $y = 2$ izan dezaten:

a) $\begin{cases} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = \dots \\ \dots + y/2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dots - 2x = 4 \\ 3y + \dots = 1 \end{cases}$

3. Bilatu bi soluzio ekuazio hauetako bakoitzerako eta irudikatu kasu bakoitzeko zuzenak:

a) $3x + y = 5$ b) $2x - y = 4$

4. Ebatzi grafikoki honako sistema hauek:

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$

5. Sistema hauetako bik soluzio bakarra dute; bat bateraezina da (ez du soluziorik), eta beste bat, indeterminatua (infinitu soluzio ditu). Saiatu bakoitza zer motatakoa den esaten, ekuazioak behatuta besterik gabe. Gero, ebatzi grafikoki, zure usteak egiaztatzeko:

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$

6. $x + 3y = 1$ ekuazioa izanda, bilatu ekuazio horrekin sistema bat eratu eta soluzio bakarra $x = -2$, $y = 1$ izango duen ekuazio bat. Gero, bilatu sistema bateraezina eratuko duen beste ekuazio bat, eta sistema indeterminatua eratuko duen beste bat.

7. Ebatzi sistema hauek ordezpen-metodoa erabiliz:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

8. Ebatzi sistema hauek berdinketa-metodoa erabiliz:

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x-3}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

9. Ebatzi sistema hauek laburketa-metodoa erabiliz:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{cases}$

10. Ebatzi egoki iriztan diozun metodoa erabiliz:

a) $\begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x+2) = y + 7 \\ x + 2(y+1) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 3 = 2y + 21 \\ 3y = \dfrac{15-x}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{-x+7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y-10}{5} \end{cases}$

11. Ebatzi ekuazio-sistema hauek egoki deritzozun metodoa erabiliz eta egiaztatu soluzioak:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1{,}25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

114

Sistema ez-linealak

12. Aurkitu sistema hauen soluzioak:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

13. Ebatzi sistema hauek laburketa-metodoaren bidez eta egiaztatu lau soluzio dituztela:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

14. Ebatzi sistema hauek (ez ahaztu soluzioak egiaztatzea):

a) $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

15. Ebatzi sistema hauek:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

Erabili ikasitakoa

16. Bi zenbakiren arteko batura 15 da. Horietako baten erdia eta bestearen herena batuta, emaitza 6 da. Zer zenbaki dira?

17. Bi zenbakiren arteko batura 14 da. Handienari unitate bat batuz gero, txikiena halako bi lortzen dugu. Aurkitu bi zenbakiak.

18. Aurkitu bi zenbaki honako hau jakinda: lehenengoari hiru unitate batuta bigarrena lortzen da; eta bigarrenari bi unitate batuta, lehenengoa halako bi lortzen da.

19. Zenbaki bat beste bat halako hiru da. Baina txikienari 7 unitate batuz gero eta handienari bostena kendu, berdinduta geratzen dira. Zer zenbaki dira?

20. Lau barra ogik eta sei litro esnek 6,80 € balio dute; eta hiru barra ogik eta lau litro esnek 4,70 € balio dute. Zenbat balio du barra bat ogik? Zenbat balio du litro bat esnek?

21. Olio-enpresa batean, 3000 *l* olio 2 *l*-ko eta 5 *l*-ko 1200 botilatan sartu dituzte. Mota bakoitzeko zenbat botila erabili dituzte?

22. Test batek 48 galdera ditu. Zuzen erantzundako bakoitzeko 0,75 puntu biltzen dira, eta erantzun oker bakoitzeko, 0,25 kentzen dira. Nik 18 puntu atera ditut. Zenbat erantzun zuzen eta oker eman ditut, galdera guztiei erantzun badiet?

23. Bonbilla egile batek 0,80 €-ko etekina lortzen du tailerretik saltzeko irteten den pieza bakoitzeko, baina 1 € galtzen du baztertu behar duen pieza akastun bakoitzeko. Egun batean 2255 bonbilla egin ditu, eta 1750 €-ko etekina lortu. Zenbat bonbilla on eta zenbat akastun egin ditu egun horretan?

24. Arrandegi batean, bezero batek kilo eta erdiko merlenka bat eta hiru kilo laurden antxoa erosi ditu. Haren atzetik, andre batek 600 gramoko merlenka erdia eta kilo bat antxoa eskatu ditu. Lehenengoak 21 € ordaindu du erositakoa, eta andreak, 12,60 €. Zenbatean dago merlenka kiloa? Eta antxoa kiloa?

25. Aparkaleku batean, ibilgailua sartzeagatik tarifa finko bat dago, eta uzten den orduko, ehuneko bat. Gaur, ordu erdiz uztea 2,60 € ordaindu dut. Atzo, bi ordu eta hamar minutu uztea, 3,40 €. Zein da tarifa finkoa eta zein ordukako kostua?

26. Anderrek bi kontu ditu bankuan. Lehenengotik bigarrenera 600 € pasatuz gero, bigarrenean bi bider diru gehiago izango luke. Baina alderantziz 300 € pasatuko balitu, lehenengoan izango luke bi aldiz diru gehiago. Zenbat diru du kontu bakoitzean?

27. Autoak alokatzen dituen enpresa batek eguneko eta egindako kilometroko kobratzen du. Bezero batek 160 € ordaindu zuen 3 egun eta 400 km eginda. Beste batek, 175 €, 5 egun eta 300 km eginda. Aurkitu zenbat kobratzen duen eguneko eta km-ko.

28. Bi zenbakiren arteko kendura 6 da, eta karratuen arteko kendura, 144. Aurkitu zenbaki horiek.

29. Kalkulatu batuta 24 eta biderkatuta 135 ematen duten bi zenbaki.

30. Aurkitu bi zenbaki, jakinda horien batura 20 dela, eta karratuen arteko batura, 232.

31. Laukizuzen baten perimetroa 20 cm da, eta azalera, 21 cm^2. Zein dira laukizuzenaren neurriak?

115

Ariketak eta problemak

Ebatzi problemak

32. Aita batek semeak baino hiru bider urte gehiago ditu orain; baina orain 6 urte, bost bider gehiago zituen. Zenbat urte ditu bakoitzak?

	ADINA, ORAIN	ADINA, DUELA 6 URTE
AITA	x	$y-6$
SEMEA	y	$x-6$

33. Aita batek semeak baino zazpi bider urte gehiago ditu orain; baina 10 urte barru, hiru bider gehiago baino ez ditu izango. Kalkulatu zenbat urte dituen gaur bakoitzak.

34. Badakigu Nereak Markelek baino 27 urte gehiago dituela orain, baina 12 urte barru bi aldiz urte gehiago izango duela. Zenbat urte ditu bakoitzak?

35. Datorren urtean, Rakelek Ibon semeak baino hiru bider urte gehiago izango ditu; baina 12 urte barru, bi aldiz urte gehiago baino ez du izango. Zenbat urte ditu bakoitzak?

36. Ariketa ebatzia

Joan den astean, Sarak alkandora bat eta jertse bat erosi zituen, 76 €-an. Aste honetan, Rosak 65,80 € ordaindu ditu bi arropak, alkandora % 15 merkeago eta jertsea % 12 merkeago jarri baitituzte. Zenbat balio zuten merkatu aurretik?

	MERKATU AURRETIK	MERKATUTA
ALKANDORA	x	$0{,}85x$
JERTSEA	y	$0{,}88y$

$$\begin{cases} x + y = 76 \\ 0{,}85x + 0{,}88y = 65{,}8 \end{cases}$$

Ebatzi sistema eta adierazi soluzioa problemaren testuingurua aintzat hartuta.

37. Inbertitzaile batek 100 000 € ditu. Zati bat urteko % 4 ematen dion banku batean ezarri du, eta gainerakoa, urte amaieran % 5 emango dion akzio batzuetan. Guztira, 4 700 € irabazi ditu. Zer kantitate sartu du eragiketa bakoitzean?

38. Pertsona batek musika-ekipo bat eta ordenagailu bat erosi eta 2500 € ordaindu du guztira. Handik denbora batera, 2157,50 €-an saldu ditu. Musika-ekipoarekin balioaren % 10 galdu du, eta ordenagailuarekin, % 15. Zenbat ordaindu du gauza bakoitza?

39. Kalkulagailu bat eta koaderno bat 10,80 € ordainduko genituen orain hiru egun. Baina kalkulagailuaren prezioa % 8 igo da ordutik, eta koadernoarena, % 10 jaitsi. Aldaketa horiekin, bi gauzak 11,34 € ordaindu ditugu. Zenbat balio zuen gauza bakoitzak orain hiru egun?

40. Kafetegi batean bi kafe mota erabiltzen dituzte: batek 6 €/kg balio du, eta besteak, 8,50 €/kg. Kafetegiko arduradunak 7 €/kg balio duen nahastearen 20 kg prestatu nahi ditu biekin. Mota bakoitzeko zenbat nahastu behar du?

	KANTITATEA	PREZIOA	KOSTUA
A KAFEA	x	6	$6x$
B KAFEA	y	8,50	$8{,}50y$
NAHASTEA	20	7	140

41. 5 kg pintura berde eta 3 kg pintura zuri erosi eta 63 € ordaindu ditugu. Kalkulatu pintura zuriaren eta pintura berdearen prezioa, jakinda bakoitzeko kilogramo bat hartuz gero nahasteak 15 € balio duela.

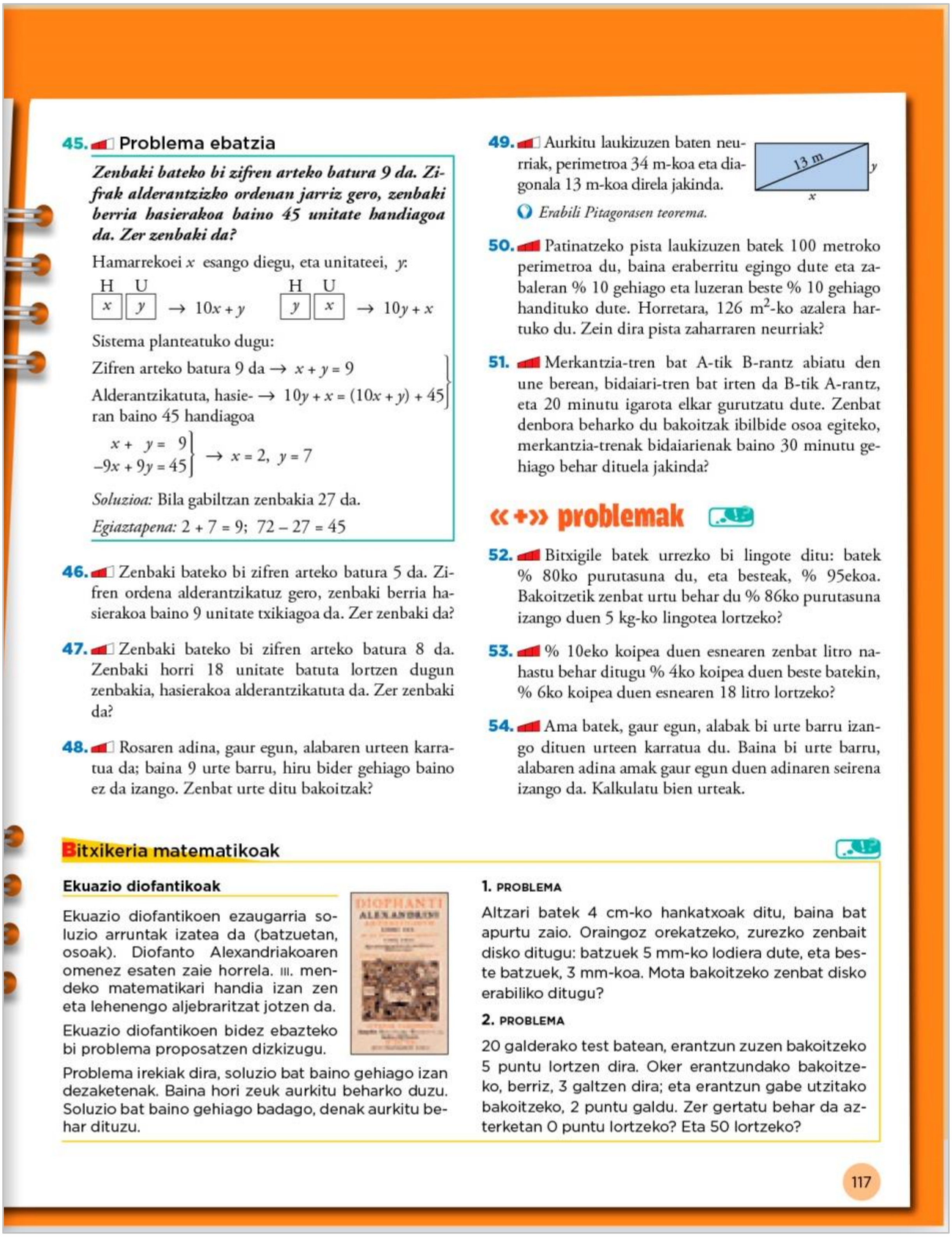
42. A eta B hiriak bata bestetik 400 km-ra daude. Auto bat A-tik B-rantz irten da 90 km/h-ko abiaduran. Aldi berean, B-tik A-rantz beste auto bat irten da, 110 km/h-an. Zenbat denbora igarota gurutzatuko dute elkar? A-tik zenbatera egingo dute?

	ESPAZIOA	ABIADURA	DENBORA
A	x	90 km/h	t
B	$400-x$	110 km/h	t

43. A eta B herriak errepide berean daude, bata bestetik 8 km-ra. A txirrindulari bat B-tik irten da, 15 km/h-ko abiaduran. Hogei minutu geroago, B-tik beste txirrindulari bat irten da, 20 km/h-an, lehenengoa harrapatu nahian. Zer distantzia egin du bakoitzak batak bestea harrapatzen duen arte?

44. Garraiolari bat 300 km-ra dagoen hiri batera joan da. Itzuleran joanekoan baino 10 km/h abiada handiagoa eraman du eta ordubete gutxiagoan egin du bidea. Kalkulatu joanekoan eta itzuleran erabili dituen abiadurak eta denborak.

116



45. **Problema ebatzia**

Zenbaki bateko bi zifren arteko batura 9 da. Zifrak alderantzizko ordenan jarriz gero, zenbaki berria hasierakoa baino 45 unitate handiagoa da. Zer zenbaki da?

Hamarrekoei x esango diegu, eta unitateei, y:

H U $\boxed{x}\boxed{y} \rightarrow 10x + y$ H U $\boxed{y}\boxed{x} \rightarrow 10y + x$

Sistema planteatuko dugu:

Zifren arteko batura 9 da $\rightarrow x + y = 9$

Alderantzikatuta, hasieran baino 45 handiagoa $\rightarrow 10y + x = (10x + y) + 45$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ -9x + 9y &= 45 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 2,\ y = 7$$

Soluzioa: Bila gabiltzan zenbakia 27 da.

Egiaztapena: $2 + 7 = 9$; $72 - 27 = 45$

46. Zenbaki bateko bi zifren arteko batura 5 da. Zifren ordena alderantzikatuz gero, zenbaki berria hasierakoa baino 9 unitate txikiagoa da. Zer zenbaki da?

47. Zenbaki bateko bi zifren arteko batura 8 da. Zenbaki horri 18 unitate batuta lortzen dugun zenbakia, hasierakoa alderantzikatuta da. Zer zenbaki da?

48. Rosaren adina, gaur egun, alabaren urteen karratua da; baina 9 urte barru, hiru bider gehiago baino ez da izango. Zenbat urte ditu bakoitzak?

49. Aurkitu laukizuzen baten neurriak, perimetroa 34 m-koa eta diagonala 13 m-koa direla jakinda.

13 m y x

Erabili Pitagorasen teorema.

50. Patinatzeko pista laukizuzen batek 100 metroko perimetroa du, baina eraberritu egingo dute eta zabaleran % 10 gehiago eta luzeran beste % 10 gehiago handituko dute. Horretara, 126 m^2-ko azalera hartuko du. Zein dira pista zaharraren neurriak?

51. Merkantzia-tren bat A-tik B-rantz abiatu den une berean, bidaiari-tren bat irten da B-tik A-rantz, eta 20 minutu igarota elkar gurutzatu dute. Zenbat denbora beharko du bakoitzak ibilbide osoa egiteko, merkantzia-trenak bidaiarienak baino 30 minutu gehiago behar dituela jakinda?

«+» problemak

52. Bitxigile batek urrezko bi lingote ditu: batek % 80ko purutasuna du, eta besteak, % 95ekoa. Bakoitzetik zenbat urtu behar du % 86ko purutasuna izango duen 5 kg-ko lingotea lortzeko?

53. % 10eko koipea duen esnearen zenbat litro nahastu behar ditugu % 4ko koipea duen beste batekin, % 6ko koipea duen esnearen 18 litro lortzeko?

54. Ama batek, gaur egun, alabak bi urte barru izango dituen urteen karratua du. Baina bi urte barru, alabaren adina amak gaur egun duen adinaren seirena izango da. Kalkulatu bien urteak.

Bitxikeria matematikoak

Ekuazio diofantikoak

Ekuazio diofantikoen ezaugarria soluzio arruntak izatea da (batzuetan, osoak). Diofanto Alexandriakoaren omenez esaten zaie horrela. III. mendeko matematikari handia izan zen eta lehenengo aljebraritzat jotzen da.

DIOPHANTI ALEXANDRINI

Ekuazio diofantikoen bidez ebazteko bi problema proposatzen dizkizugu.

Problema irekiak dira, soluzio bat baino gehiago izan dezaketenak. Baina hori zeuk aurkitu beharko duzu. Soluzio bat baino gehiago badago, denak aurkitu behar dituzu.

1. PROBLEMA

Altzari batek 4 cm-ko hankatxoak ditu, baina bat apurtu zaio. Oraingoz orekatzeko, zurezko zenbait disko ditugu: batzuek 5 mm-ko lodiera dute, eta beste batzuek, 3 mm-koa. Mota bakoitzeko zenbat disko erabiliko ditugu?

2. PROBLEMA

20 galderako test batean, erantzun zuzen bakoitzeko 5 puntu lortzen dira. Oker erantzundako bakoitzeko, berriz, 3 galtzen dira; eta erantzun gabe utzitako bakoitzeko, 2 puntu galdu. Zer gertatu behar da azterketan 0 puntu lortzeko? Eta 50 lortzeko?

117

9 Oinarrizko funtzioak

Kontzeptua zehaztu nahian

Eulerren ostean ere matematikariek jarraitu zuten eztabaidan funtzio bat definitzeko ezinbestekoak ziren edo ez ziren baldintzei buruz. 1923an, gaur egun erabiltzen dugun definizioaren oso antzekoa den beste honetara heldu ziren:

> y-ri x-ren funtzio dela esaten diogu x-ren balio bakoitzari y-ren balio bat badagokio. Elkarrekikotasun hori adierazteko $y = f(x)$ funtzioa erabiltzen da.

Zintzotasun gutxiko funtzioak, Poincaréren arabera

Baina zehaztasuna bilatu nahi izate horretan, tartean zenbait funtzio xelebre ere sortu ziren. Ondorioz, **Poincaré**k honako hau esan zuen 1899. urtean:

> «Mende erdian, helburu garbiko *funtzio zintzoen* ahalik eta antzik gutxien izan nahian eraiki diren funtzio bitxi eta arraroen multzoa baino ez dugu ikusi. Lehen, funtzioren bat asmatzen zenean, helburu praktiko bati begira egiten zen. Gaur egun, gure arbasoen arrazoitzea okerra izan zela erakusteko baino ez dira asmatzen».

Unitate honetan, Poincaré handiak aipatzen dituen *funtzio zintzo* horiek landuko ditugu; kontzeptuak eraikitzeko eta desmuntatzeko baino gehiagorako balio duten funtzioak aztertuko ditugu.

Henri Poincaré (1854-1912) historiako matematikari handienetako bat da. Matematika arloko eremu guztietan egin zituen ekarpenak.

«Funtzio zintzoak» kontzeptua giza ezagutzaren hainbat esparrutan zabaldu izan da: medikuntzan, ekonomian, teknologian…

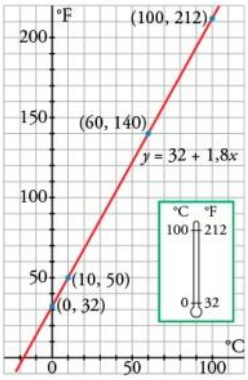
132

1 Funtzio linealak

Funtzio linealak eguneroko bizimoduan

Natura, zientzia, teknika, ekonomia … *kausen aldakuntzek efektuen aldakuntzei proportzionalki eragiten* dietela erakusten duten funtzioz beteta daude. Funtzio horiek **linealak** dira eta zuzenen bidez adierazten dira. Ikus ditzagun adibide batzuk:

■ °C-TAN ETA °F-TAN (FAHRENHEIT) EMANDAKO TENPERATUREN ARTEKO ERLAZIOA



Europako herritar batek saiakuntza hau egin du AEBn: tenperaturak neurtu ditu, bi termometro erabiliz. Bata gradu zentigraduetan (°C) dago, eta bestea, Fahrenheit graduetan(°F). Emaitza hauek lortu ditu:

0 °C → 32 °F, 10 °C → 50 °F, 60 °C → 140 °F, 100 °C → 212 °F

Honela esango diegu:

x = tenperatura °C-tan

y = tenperatura °F-tan

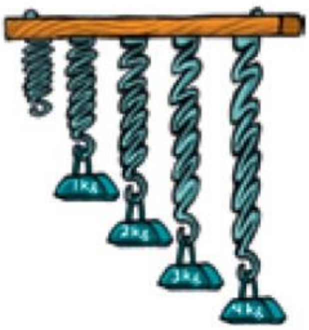
Aurreko emaitzek $y = 32 + 1,8x$ erlazioa betetzen dute. (Egiaztatu).

Adibidez:

— Parekoak dira 30 °C eta $32 + 1,8 \cdot 30 = 86$ °F.

— Parekoak dira 100 °F eta $100 = 32 + 1,8x$. $\rightarrow x = \dfrac{100-32}{1,8} = 37,\widehat{7}$ °C

■ MALGUKI BATEN LUZAMENDUA

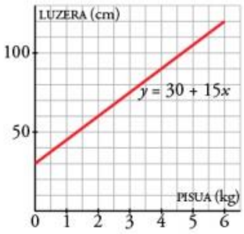


Malguki batetik pisuak eskegitzen baditugu, hainbat luzamendu lortuko ditugu. Hau da, *malgukiaren luzamendua* eskegitzen dugun *pisua*ren funtzioa da. Azpimarratzekoa da funtzio hori lineala dela.

Pentsa malgukiak, luzatu gabe, 30 cm dituela; eta eskegitzen dugun kilogramo bakoitzeko 15 cm luzatzen dela. Erlazioa hau da:

$y = 30 + 15x$ (y: luzera, cm-tan; x: pisua, kg-tan)

Funtzio horren definizio-eremua [0, 6] da, 6 kg-tik gorako pisuekin malgukia hondatu egiten dela onartuz.



Pentsatu eta egin

1. Kopiatu berdintza hauek koadernoan eta osatu:

a) –50 °C = … °F

b) 95 °F = … °C

2. Termometro kliniko batek 35 °C-tik 41 °C-rainoko tenperaturak neurtzen ditu. Zer tarte da hori °F-tan?

3. Pertsona osasuntsu baten tenperatura normala 36,5 °C-koa da. Zenbat da °F-tan?

4. a) Zer luzera hartuko du aurreko adibideko malgukiak 4,6 kg-ko pisua eskegiz gero?

b) Zer pisu jarri behar dugu malgukian 1 m-ko luzera har dezan?

133

Funtzio lineal motak

Adibidea

Higidura uniformearekin (abiadura konstantea) egindako espazioa, denboraren funtzioan, hau da:

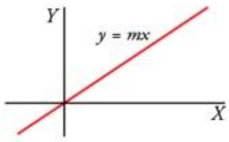
$$e = v \cdot t$$

e eta t erlazionatzen dituen zuzenaren malda v da.

■ **PROPORTZIONALTASUN-FUNTZIOA: $y = mx$**

Proportzionaltasun-funtzioak jatorritik igarotzen diren zuzenen bidez adierazten dira. Bi aldagaien balioen arteko proportzio bat deskribatzen dute.

Zuzenaren malda proportzionaltasun-arrazoia da, m.



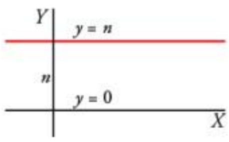
Adibideak

- Jatetxe batzuetan, jatekoaren prezioa konstantea da, ez da hartzen dugun kantitatearen araberakoa.
- Satelite artifizialetatik Lurrera egoten den distantzia konstantea da, ez da denboraren arabera aldatzen.

■ **FUNTZIO KONSTANTEA: $y = n$**

X ardatzarekiko paraleloa den zuzen baten bidez adierazten da. Horren malda 0 da.

$y = 0$ zuzenak X ardatzarekin bat dator.

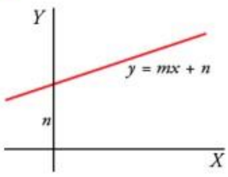


Zuzen mota hauetan, puntu guztiek ordenatu bera dute. Adibidez, (2, 5), (6, 5), (11, 5) puntuak $y = 5$ zuzenekoak dira denak.

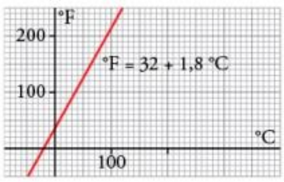
Webgunean

- Irudikatu zuzenak adierazpen analitikotik abiatuta.
- Berrikusi maldaren kontzeptua.
- Aztertu zuzenak m eta n parametroetatik abiatuta.

■ **ADIERAZPEN OROKORRA: $y = mx + n$**



Y ardatza $(0, n)$ puntuan ebakitzen duen m maldako zuzen baten bidez adierazten da. n zenbakiari **ordenatua jatorrian** esaten zaio.



Adibidez, alboan irudikatuta dagoen °F = 32 + 1,8 °C zuzenak gradu zentigraduetan (°C) adierazita dauden tenperaturak Fahrenheit graduetan (°F) adierazteko modua ematen du.

Pentsatu eta egin

5. Irudikatu:

a) $y = 2x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = -\frac{1}{4}x$ d) $y = -\frac{7}{3}x$

6. Irudikatu:

a) $y = 3$ b) $y = -2$ c) $y = 0$ d) $y = -5$

7. Irudikatu:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{4}x + 5$ d) $y = -3x - 1$

8. Higikari bat, hasierako unean, jatorritik 3 m-ra dago eta apurka aldentzen da, 2 m/s-ko abiaduran.

Idatzi posizioa denboraren funtzioan emango digun ekuazioa eta irudikatu.

9. Higikari bat 8 m/s-ko abiaduran doa eta, bat-batean, galgatu egiten du -1 m/s^2-ko azelerazioarekin.

Idatzi abiadura denboraren funtzioan emango digun ekuazioa eta irudikatu.

134

Ariketak eta problemak

Trebatu

Funtzio linealak

1. Irudikatu funtzio lineal hauek:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = \frac{4}{7}x$

c) $y = \frac{-3x + 10}{5}$ d) $y = 2{,}5$

2. Malda eta puntu bat emanda, idatzi zuzenaren ekuazioa kasu hauetan:

a) $P(0, 0),\ m = 1$ b) $P(2, -1),\ m = -2$

c) $A(-2, 1),\ m = \frac{1}{2}$ d) $A(1, 3),\ m = -\frac{5}{3}$

3. Kalkulatu funtzio lineal hauen ekuazioa:

4. Aurkitu A eta B puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa honako kasu hauetan:

a) $A(3, 0),\ B(5, 0)$ b) $A(-2, -4),\ B(2, -3)$

c) $A(0, -3),\ B(3, 0)$ d) $A(0, -5),\ B(-3, 1)$

5. Aurkitu kasu hauetako bakoitzeko ekuazioa eta irudikatu:

a) Zuzena $(2, -3)$ puntutik igarotzen da eta $(1, -2)$ eta $(-4, 3)$ puntuetatik igarotzen den zuzenarekiko paraleloa da.

b) Proportzionaltasun funtzioa da eta $(-4, 2)$ puntutik igarotzen da.

c) Funtzio konstantea da eta $(18; -1{,}5)$ puntutik igarotzen da.

6. Aurkitu zer balio izan behar duten a, b, c, d eta e parametroek zuzen eta puntuek eskaturiko baldintza hauek bete ditzaten:

a) $(4, 0)$ eta $(-2, a)$ puntuetatik igarotzen den zuzenaren malda -1 izateko.

b) $y = bx + 2$ zuzena $(-3, 4)$ puntutik igarotzeko.

c) $y = 3x + c$ eta $y = cx + 3$ ekuazioak dituzten zuzenek 2 ordenatu-puntuan elkar ebakitzeko. Zein abzisa dagokie?

d) $(d, -2)$ eta $(4, e)$ puntuak $y = \frac{1}{2}x - 3$ ekuazioarenak izateko.

Funtzio koadratikoak

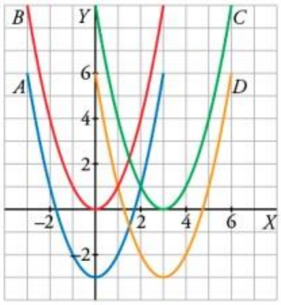
7. Lotu grafiko bakoitza adierazpen batekin:

a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$



8. Irudikatu funtzio hauek, kasu bakoitzean honelako balio-taula bat eginez:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 1$ b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = -3x^2$ d) $y = 0{,}4x^2$

9. Irudikatu parabola hauek, erpina, erpinetik hurbil dagoen punturen bat eta ardatzekin dituen ebakipuntuak aurkituz:

a) $y = (x + 2)^2$ b) $y = x^2 - 4x$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ d) $y = x^2 - 9$

10. Esan zer puntutan (abzisa eta ordenatua) dagoen parabola hauen erpina, eta, kasu bakoitzean, adierazi maximo edo minimo bat den. Ondoren, irudikatu.

a) $y = 8 - x^2$ b) $y = 4 + (3 - x)^2$

c) $y = -x^2 - 2x + 4$ d) $y = 3x - \frac{1}{2}x^2 + 1$

e) $y = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$ f) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$

11. Irudikatu funtzio koadratiko hauek:

a) $y = (x - 5)^2$ b) $y = x \cdot (x - 5)$

c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3)$ d) $y = 4 - (x - 2)^2$

12. Erabili eskala egokia eta irudikatu.

a) $y = \frac{x^2}{100}$ b) $y = -75x^2 + 675$

c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ d) $y = -10x^2 - 100x$

141

B. Jarduera osagarrien galdetegiak

Honako eranskinean jarduera osagarri desberdinetarako prestatutako fitxa edo galdetegiak eransten dira.

B1. Aurre ebaluazioa

Aurretiko faserako (F0) prestaturiko froga diagnostikoa:

Izena: ***Klasea:*** ***Data:*** 2017/03/31

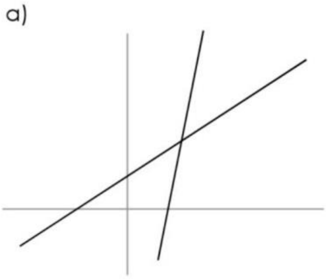
AURRE EBALUAZIOA: Ekuazio-sistemak

1_ Ekuazio-sistema honen soluzioa aukeratu: $\begin{cases} 7x + 4y = -10 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$

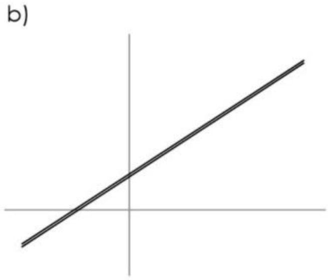
a) x = 1 ; y = 2
b) x = -2 ; y = 1
c) x = 1 ; y = 0

2_ Lotu ondoko ekuazio-sistema hauen irudikapen grafikoa, sistemaren soluzio kopuruarekin:

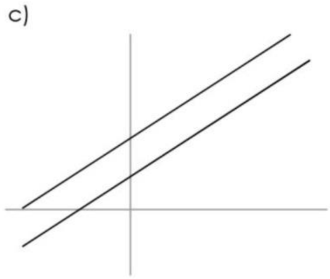
a)



b)



c)



d) Ez du soluziorik e) Soluzio bakarra f) Infinitu soluzio ditu

3_Honako ekuazio-sistema aljebraikoki ebatzi: $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

B2. Iltzeen jarduera

Taldekideen izen-abizenak:

Klasea: ***Data:***

1. FASEA: Ezetz iltzea sartu?

Iltzeen jokoan parte hartzeko bi postu (P1 eta P2) aurkitu ditugu. Honako hauek postu bakoitzaren jokatzeko baldintzak dira:

P1_ Jokatu ahal izateko 5 euro jarri behar dira. Dirua irabazten hasteko nahita nahiez 4 iltze iltzatu behar dira. Behin 4 iltze sartuta, jarritako 5 euroak itzultzen dizkizute eta sartutako iltze bakoitzeko 1,25 € ematen dizkizute. 10 iltze sartzea lortzen baldin baduzu, hortik aurrera iltze bakoitzarengatik 2 € irabaz ditzakezu.

P2_ Lehenengo, 5 euro jarri behar dira eta hasieratik iltze bakoitzeko euro 1 ematen dizute. Seigarren iltzetik aurrera, 2 € irabazteko aukera ematen digute eta hamargarrenetik aurrera 1,25 € irabazi ahal dezakezu.

1.1. Ze postutan jokatuko zenuke? Zergatik?

1.2. Datu guztiak antolatuta izateko, ondorengo taula bete ezazu:

Iltze kopurua	Jasotako euroak (€)	
	1. POSTUA	2. POSTUA
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		

Taula betetzeko lagungarriak izango zaizkizun galderak:

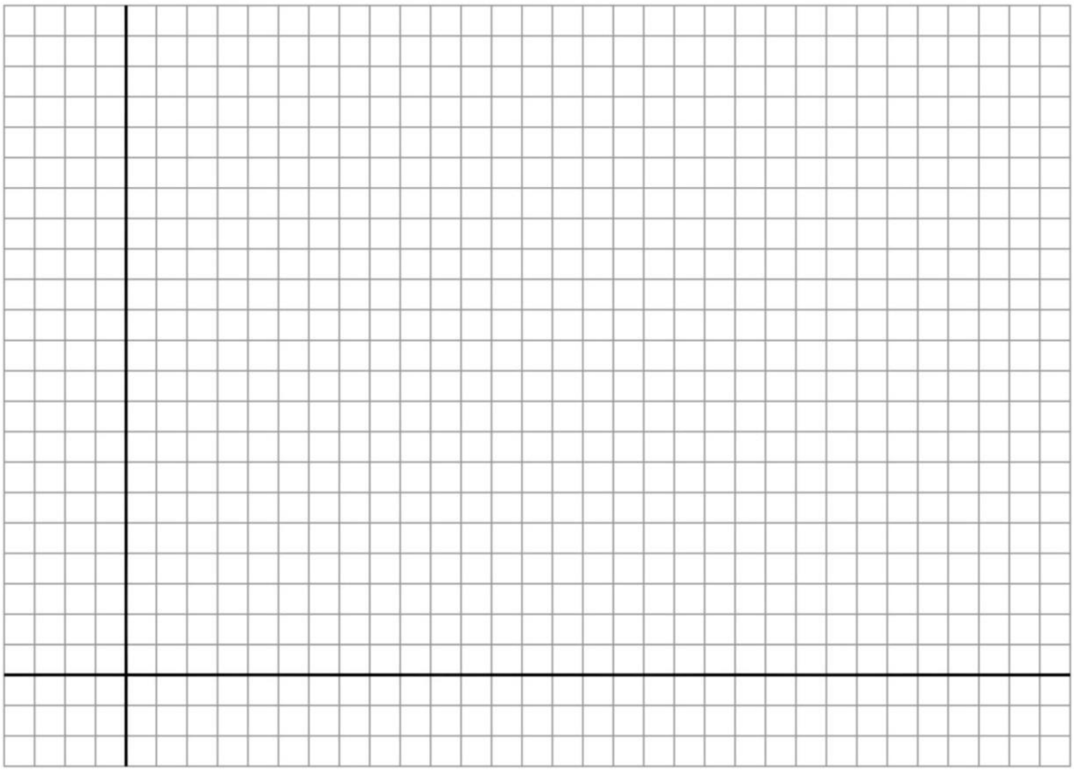
a) Zenbat iltze sartu ondoren hasiko zara dirua jasotzen?

b) Zenbat diru ematen dizute iltze bat sartzen duzun aldioro?

1

Taulako datuak aztertu eta gero, lehen esandako postu berean jokatuko zenuke? Arrazoitu zure erantzuna.

1.3. Datu guztien antolaketa argiago ikusteko eta konparatu ahal izateko, bi postuen datuak kartesiar ardatzetan irudika itzazu:



Irudikapen grafikoari erreparatuta, ondorengo galderei erantzun:

a) Zein postutan jokatzea komeni zaizu? Irudikapen grafikoaren deskribapen bat eginez erantzun.

1.4. Aurreko egun batean gizon batek 46,50 € irabazi omen zituela esan digute. Zenbat iltze iltzatu behar izan zituen? Postu bakoitzeko soluzioa eman.

Postu bakoitzaren datuek osatzen duten funtzioen ekuazio aljebraikoak kalkula itzazu, iltze kopurua eta jasotako diruaren arteko erlazioa bilatuz.

1.5. Zein iltze kopuru sartuta irabaziko zenuke diru kantitate berdina bi postuetan?

Tarte bakoitzean dauden bi zuzenen funtzioen ekuazioak elkarrekin jarri ekuazio-sistema bat osatuz. Ekuazio-sistema bakoitzaren soluzioa eman. Arrazoitu zure erantzuna.

4

B3. Eraikuntza dinamikoak

G1 jardueraren fitxak:

Taldekideen izen-abizenak:

Klasea: ***Data:***

2. FASEA: Zuzenaren adierazpenak (G1)

G1.1. GeoGebrako ariketa ikusita ondoko galderei erantzun:

a) Ze elementu eta adierazpen ezberdin aurki ditzakezue?

b) Agertzen diren "*m*" eta "*n*" parametroak aldatzean zer gertatzen da?

G1.2. Finko den zuzen gorriarekin (y = 2x) alderatuta, zuzen urdinaren "*m*" eta "*n*" parametroak aldatzean zer gertatzen den landuko dugu.

Baloreak emanda zuzenaren deskribapena iragarri behar da edo alderantziz, hau da, zuzena nolakoa den jakinda parametroei baloreak eman beharko zaizkie. Ilara hutsik dagoen kasuetan, ikasle batek balore batzuk asmatu eta ikaskideak zuzena nolakoa den iragarri beharko du.

Baloreak sartu baino lehen, "zuzena ikustarazi" ikurra sakatu gabe egon behar da, eta ea asmatu den egiaztatzeko, klikatzean zuzena agertuko da. Hurrengo partidaren baloreak sartu baino lehen, laukia berriz ere hutsik egon behar da. "m" eta "n"-ren balioak karratutxoetan sartuz edo barrak mugituz alda ditzakezue eta [-9, 9] tartearen barne egon behar dira.

1. Ikaslea (bakoitiak): 2. Ikaslea (bikoitiak):

Partida	m	n	Zuzenaren deskribapena
1			Jatorritik pasa eta zuzen gorria baino inklinazio handiagoa dauka.
2			
3	0	-6	
4			Zuzen beherakorra da eta inklinazio txikia dauka.
5			
6	2	0	
7			(0, -4) puntutik pasa eta zuzen gorriaren inklinazio berdina dauka.
8			
9			
10			Zuzen horizontala da eta OY ardatza (0, 0) puntuan ebakitzen du.

G1.3. Oraingoan bakarrik zuzen urdinari erreparatuko diogu. Parametro bakoitzaren balio hauek izatean, zuzenean zer eragin duen ikusiko dugu. Egoera hauetan zuzena nolakoa den deskribatu, eta ikusitako zuzenaren adierazpen aljebraikoa (y = mx + n) nola geratzen den adierazi ezazue:

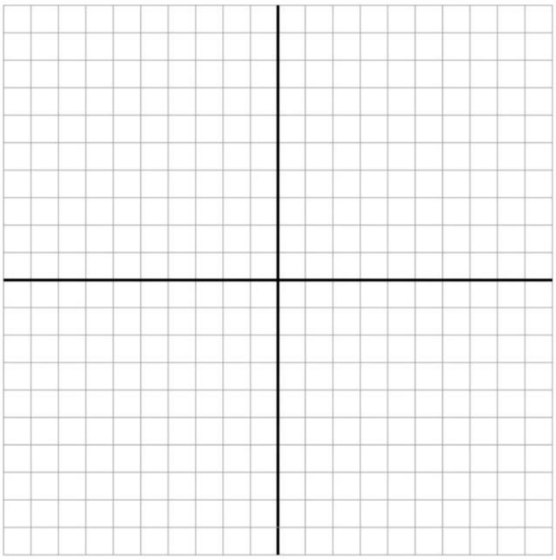
Egoera	Zuzenaren deskribapena	Adierazpen aljebraikoa
m < 0		
m = 0		
m > 0		
n < 0		
n = 0		
n > 0		

Behin taula osatuta, erantzun ondoko galderei:

a) Zer adierazten du "n" parametroak?

b) Eta "m" parametroak? Nola lor dezakegu?

G1.4. Aurreko ariketan zuzen batentzako hiru formula desberdin lortu ditugu, horiek hiru zuzen moten adierazpen aljebraikoak dira. Aurretik lortutako erantzunak aztertuz, zuzen mota bakoitzaren ezaugarriak adierazi eta adibide bana eman (aljebraikoki nahiz grafikoki):



- Funtzio konstantea: y = n
- Proportzionaltasun-funtzioa: y = mx
- Funtzio lineala: y = mx + n

8.2. Planifikatu diren jarduera osagarriak atalean aipatutako G1 jardueraren G1.3 azpi-ariketaren ebazpen fitxa dugu honakoa:

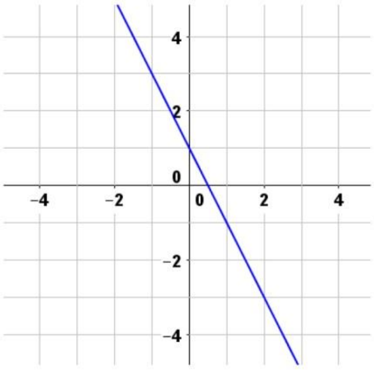
2. FASEA: Zuzenaren adierazpenak (G1)

Ariketa ebatzia

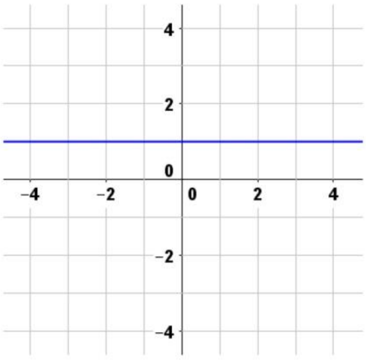
G1.3. Egoera hauetan zuzena nolakoa den deskribatu, eta ikusitako zuzenaren adierazpen aljebraikoa (y = mx + n) nola geratzen den adierazi ezazue:

Egoera	Zuzenaren deskribapena	Adierazpen aljebraikoa
m < 0	Zuzen beherakorra (zenbat eta m txikiagoa, inklinazio handiagoa)	**y = mx + n** y = - 2x + 1 (a)
m = 0	Zuzen horizontala	**y = n** y = 1 (b)
m > 0	Zuzen gorakorra (zenbat eta m handiagoa, inklinazio handiagoa)	**y = mx + n** y = 2x + 1 (c)
n < 0	Zuzenak OY ardatza jatorriaren (0,0) azpitik ebakitzen du.	**y = mx + n** y = 2x – 2 (d)
n = 0	Zuzenak OY ardatza (0,0) jatorrian ebakitzen du.	**y = mx** y = 2x (e)
n > 0	Zuzenak OY ardatza jatorriaren (0,0) goialdetik ebakitzen du.	**y = mx + n** y = 2x + 2 (f)

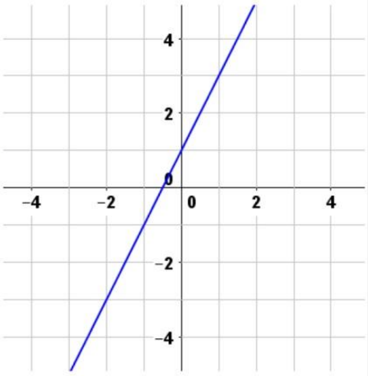
(a) y = - 2x + 1



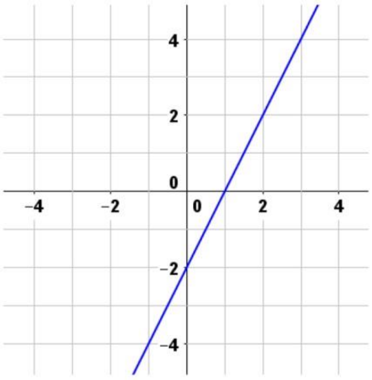
(b) y = 1



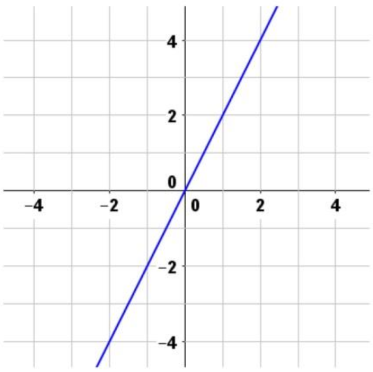
(c) y = 2x + 1



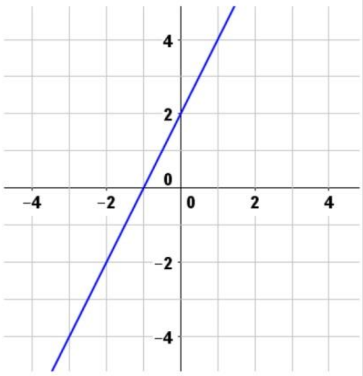
(d) y = 2x – 2



(e) y = 2x



(f) y = 2x + 2



1

G2 jardueraren fitxak:

Taldekideen izen-abizenak:
Klasea: ***Data:***

2. FASEA: Ekuazio-sistemen adierazpen grafikoa (G2)

G2.1. GeoGebrako irudian mugitu ahal den zuzen bat eta 1. eta 2.erdikariak (e1 eta e2) aurki ditzakezue. Zuzen urdinaren posizioa aldatuta, ondorengo galderei erantzun:

a) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariarekiko **paraleloa** izan dadin? Eta 2.erdikariarekiko paraleloa izateko?

b) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikariko zuzenaren **berdina** izateko? Eta 2.erdikariko zuzenaren berdina izateko?

c) Zeintzuk izan behar dira zuzen urdinaren "m" eta "n"-ren balioak 1.erdikaria **ebakitzeko**? Eta 2.erdikaria ebakitzeko?

G2.2. Irudi honetan mugitu ahal diren bi zuzen ditugu. Zuzenen arteko posizio erlatiboak bete ahal izateko (ebakitzaileak, paraleloak edo kointzidenteak), zuzenen maldak eta "n"-ren balioak beraien artean nolakoak izan behar diren adierazi (berdinak edo desberdinak).

**Oharra: Zuzen urdinaren adierazpen orokorra honela adierazi da: $y = mx + n$*
Zuzen gorriaren adierazpen orokorra honela adierazi da: $y = ax + b$

Posizio erlatiboa	**Maldak (m eta a)**	**Ordenatuak jatorrian (n eta b)**
Paraleloak		
Kointzidenteak		
Ebakitzaileak		

1

G2.3. Ekuazio-sistema lineal bat grafikoki adieraz dezakegu, bi zuzen irudikatuta. Ekuazio-sistema baten soluzioa, bi ekuazioen soluzio komuna da, beraz, grafikoki aztertuta, sistemaren soluzioa zuzenen puntu komunak izango dira. Hau jakinda eta GeoGebraren laguntzaz, hurrengo sistemek duten zuzenen posizio erlatiboa eta soluzioa eman (soluzio bakarra badu adieraz ezazue).

Ekuazio-sistema	Posizio erlatiboa	Sistemaren soluzioa
$\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$		
$\begin{cases} y = -7x - 1 \\ y = -7x + 8 \end{cases}$		
$\begin{cases} y = 8x + 3 \\ y = -8x + 3 \end{cases}$		
$\begin{cases} y = 6x - 9 \\ y = 6x - 9 \end{cases}$		
$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -5x + 7 \end{cases}$		

2

B4. Azterketa

Izen-abizenak:

Klasea: ***Data:***

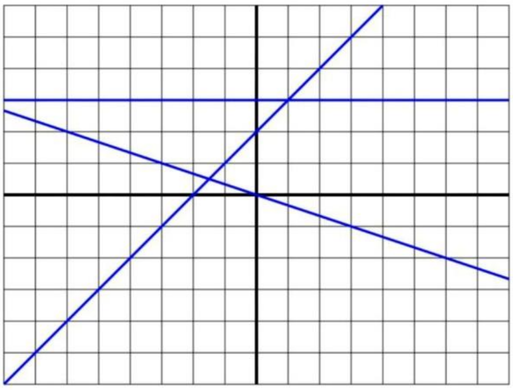
Azterketa: Zuzenaren adierazpena eta ekuazio-sistemak

1. Lotu ekuazio bakoitza dagokion zuzenarekin. Esan zein den malda (m) eta ordenatua jatorrian (n) kasuetako bakoitzean. (1,5 puntu)

a) $\boldsymbol{y = x + 2}$

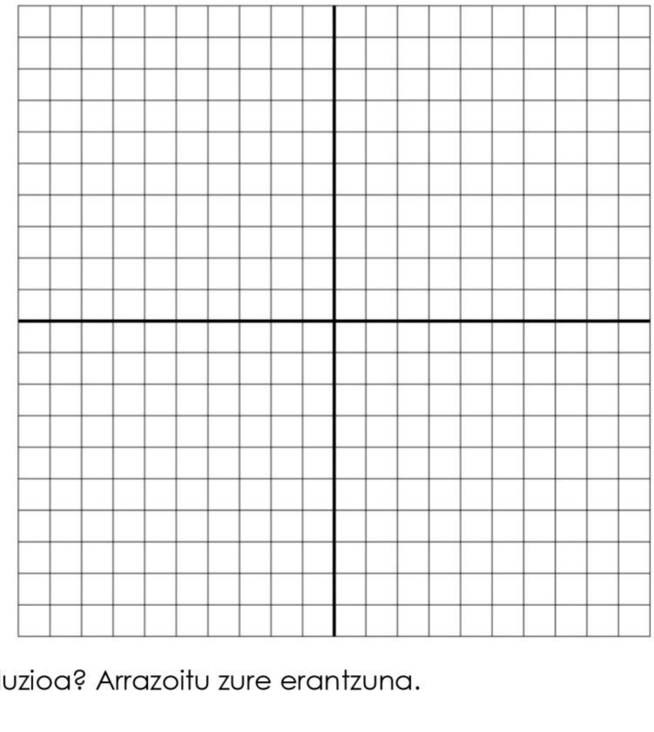
b) $\boldsymbol{y - 3 = 0}$

c) $\boldsymbol{-y - \frac{1}{3}x = 0}$



2. Ebatzi grafiko bidez honako ekuazio-sistema (1,5 puntu): $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

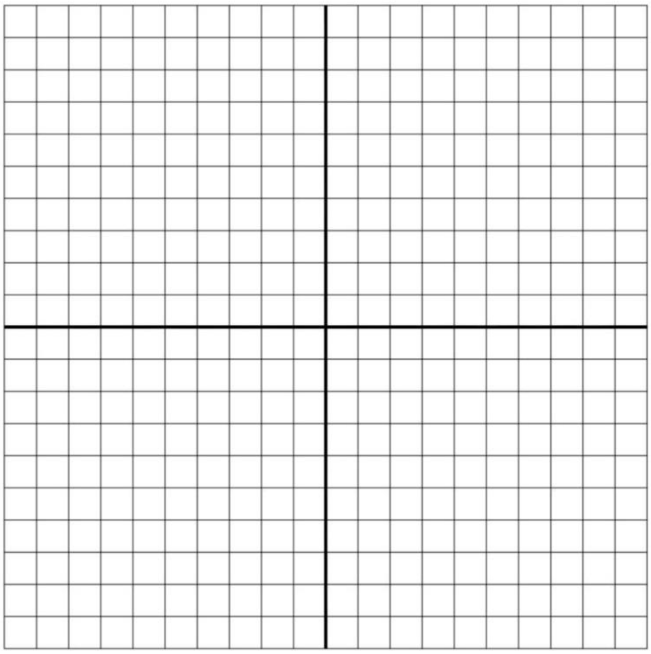
*(*Irudikapenean, zuzen bakoitzaren ekuazioa adierazi).*



Zein da ekuazio-sistemaren soluzioa? Arrazoitu zure erantzuna.

3. Ebatzi grafiko bidez ondoko ekuazio-sistema. Ondoren berdinketa-metodoa erabiliz, grafikoki lortutako soluzioa ongi dagoela egiazta ezazu. *(*Irudikapenean, zuzen bakoitzaren ekuazioa adierazi)*. (2,5 puntu)

$$\begin{cases} \mathbf{5}x - \mathbf{2}y = \mathbf{6} \\ \mathbf{3}x + y = \mathbf{8} \end{cases}$$



4. Ondoko ekuazio-sistema, ordezkapen-metodoa erabiliz ebatzi. (1 puntu)

$$\begin{cases} \mathbf{2}x - \mathbf{3}y = -\mathbf{9} \\ \mathbf{5}x + y = \mathbf{3} \end{cases}$$

2

5. Ebatzi honako ekuazio-sistema egokien deritzozun metodoa erabiliz, eta egiaztatu lortzen duzun soluzioa: (1,5 puntu)

$$\begin{cases} \frac{5x}{4} - \frac{1}{4} = -y \\ \frac{10x+6}{5} = 3(y-1) \end{cases}$$

6. Loreak eta Anek, bien artean, 124 € dituzte. Loreak Aneri 3 € ematen badizkio, Loreak Anek hiru halako izango du. Zenbat diru du bakoitzak? (2 puntu)

DERRIGORREZKO BIGARREN HEZKUNTZA

Zuzendaria:
Miguel R. Wilhelmi, Matematika Saila

Zuzendarikidea:
Jaione Abaurrea, Matematika Saila