MEMORIA

SOBRE

EL CÁLCULO DEL INTERÉS

POR

D. Juan Cortázar.

MADRID:
IMPRENTA Y FUNDICION DE AGUADO.
1843.

MEMORIA

SOBRE

EL CÁLCULO DEL INTERÉS

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

Catedrático de Matemáticas en la Universidad de Madrid.

Madrid:

IMPRENTA Y FUNDICION DE D. EUSEBIO AGUADO.

1843.

En esta Memoria se demuestra: 1.º Que el interes nunca puede ser simple, *y que por tanto es inútil y errónea la distincion del interés en simple y compuesto. 2.º Que la fórmula del interés compuesto es siempre la misma, sea el tiempo un número entero de años ó un número fraccionario. 3.º Que se espresa mal el contrato cuando se toma una cantidad á interés con obligacion de pagar los intereses en plazos diferentes del año. 4.º Que en el descuento de las letras, segun el método seguido en la mayor parte de las naciones estranjeras, el cálculo usual es ventajoso para el tomador, si el plazo de la letra es menor que un año, y le es perjudicial si el plazo es mayor que un año. 5.º Que en el descuento usado en España y en Francia no es verdad que el tenedor salga siempre perjudicado como lo aseguran algunos autores. El tomador sale perjudicado segun el cálculo en uso, si el plazo de la letra es menor que un año, y con ventaja si el plazo es mayor que un año. 6.º Que son incompatibles las dos hipótesis admitidas á la vez, á saber: el interés proporcional al tiempo, por lo menos siendo este* *menor que un año, y el descuento usado en España tambien proporcional al tiempo.*

Todas estas verdades, desconocidas hasta ahora, se demuestran en esta Memoria por medio del razonamiento ordinario, con objeto de facilitar su inteligencia á las personas que no conocen el álgebra, y en una nota puesta al fin se vuelven á demostrar empleando el cálculo algébrico.

MEMORIA

SOBRE

EL CÁLCULO DEL INTERÉS.

1. Se ha creido hasta ahora que el interés que produce un capital en un tiempo menor que un año (*) es simple, es decir, proporcional al tiempo; que por tanto, para hallar dicho interés se debia formar esta proporcion: *El año: tiempo menor que el año: : interés en un año : interés en el tiempo.*

Nosotros vamos á hacer ver que esta proporcion es errónea; vamos á hallar el verdadero modo de calcular el interés, y á examinar sus importantes consecuencias.

2. Para facilitar la inteligencia de lo que vamos á esponer, presentaremos dos ejemplos.

1.° *Hallar el interés de* 20000 *rs. en* 6 *meses, á* 4 p.°/₀ *al año.*

Admitamos, como hasta ahora se ha hecho, que el interés de un capital en un tiempo menor que un año sea simple ó proporcional al tiempo: resultará

(*) Admitiremos para fijar las ideas, que el interés y el descuento se estipulan á un cierto tanto p.°/₀ al año, como es uso general: pero es evidente que la estipulacion pudiera hacerse á un cierto tanto por otra cantidad diferente de 100, y por otro tiempo diferente del año, como por ejemplo á 3 por 82 á los 9 meses.

Emplearemos tambien, para hacernos entender, las palabras *interés simple* é *interés compuesto* en el mismo sentido que hasta ahora se han empleado, aunque ya veremos que estas palabras son enteramente inútiles.

que el interés buscado será la mitad del interés de 20.000 rs. en un año, es decir 400 rs.

Mas en los otros 6 meses que faltan hasta el fin del año, el mismo capital 20.000 rs. producirá el mismo interés 400 rs.; y como los 400 rs., interés del capital en los 6 primeros meses, se deben considerar como produciendo tambien 4 p.% al año, y el interés simple de esta cantidad es 8 rs. en los 6 meses que faltan hasta el fin del año, resulta que el interés que de este modo producen 20.000 rs. en un año, es 808 rs., en vez de 800 rs., que es el interés verdadero.

Este ejemplo prueba ya, que el interés que produce un capital en 6 meses, debe ser menor que la mitad del interés que produce el mismo capital en un año: y en efecto, el capital, cualquiera que sea, debe producir algun interés en los 6 primeros meses; luego en los otros 6 el capital se compondrá del primitivo y del interés producido; luego el interés en el 2.º semestre debe ser mayor que en el 1.º; y por tanto el interés en el 1.er semestre es menor que la mitad del interés en un año.

2.º Sea c un capital cualquiera puesto á interés, y consideremos al año dividido en trimestres: sea a el interés que produce el capital c en el 1.er trimestre. El capital para el 2.º trimestre será $c+a$; c producirá a, y a producirá un cierto interés, que llamo a'; luego el interés en el 2.º trimestre será $a+a'$. El capital para el 3.er trimestre será $c+2a+a'$; c producirá a, a producirá a', y a' producirá un cierto interés, que llamo a''; luego el interés en el 3.er trimestre es $a+2a'+a''$. El capital para el 4.º trimestre es $c+3a+3a'+a''$; y si a''' es el interés que en este trimestre produce a'', el interés en el 4.º trimestre será $a+3a'+3a''+a'''$.

Vemos que los intereses en los cuatro trimestres son desiguales, es decir, que no son proporcionales á los tiempos.

3. En general, produciendo el capital un cierto interés en el año, producirá interés, aunque menor, en un mes, en una semana, en un dia, en un instante: luego el valor del capital va creciendo contínuamente, y por tanto producirá en un intervalo cualquiera de tiempo mayor interés que en el intervalo igual é inmediato anterior.

De aquí se deduce con evidencia que el interés no es simple ó proporcional al tiempo, pues para que lo fuese sería preciso que en tiempos iguales los intereses fuesen iguales.

4. Tambien es fácil demostrar, como consecuencia de que el interés va creciendo mas que el tiempo, que *el interés en un tiempo menor que un año es menor que el interés simple, y que el interés en un tiempo mayor que un año es mayor que el interés simple.*

En efecto, supongamos en primer lugar que el tiempo sea menor que un año, por ejemplo 7 meses. El interés en el 7.º mes será menor, igual ó mayor que $\frac{1}{12}$ del interés anual. En los dos primeros casos, no hay duda de que el interés en los 7 meses será menor que $\frac{7}{12}$ del interés anual, puesto que el interés en cada uno de los meses anteriores al 7.º es menor que el interés en el 7.º mes. En el 3.er caso, el interés en cada uno de los 5 meses restantes hasta fin de año es mayor que el interés en el 7.º mes, es decir, mayor que $\frac{1}{12}$ del interés anual; luego en dichos 5 meses el interés será mayor que $\frac{5}{12}$ del interés anual; luego en los 7 primeros meses el interés será menor que $\frac{7}{12}$ del interés anual.

Supongamos ahora que el tiempo sea mayor que un año.

Puede suceder que este tiempo sea un número entero de años ó un número misto. En el 1.er caso es evidente que el interés es mayor que el de un año multiplicado por el número de años. En el 2.º caso, sea el tiempo por ejemplo 3 años y 5 meses: el interés en los 3 años es mayor que el interés anual multiplicado por 3, y en los 5 meses que faltan el interés será mayor que en los 5 últimos meses del 1.er año; y pues que este interés es mayor que $\frac{5}{12}$ del interés anual, con mayor razon el interés en los 5 primeros meses del 4.º año será mayor que $\frac{5}{12}$ del interés anual. Luego el interés total en los 3 años y 5 meses es mayor que el interés anual multiplicado por 3 $\frac{5}{12}$.

5. *Hallemos ahora lo que vale al fin de un tiempo cualquiera un capital puesto á interés.*

Sea c el capital, r el tanto por 1 al año, $\frac{p}{q}$ el tiempo, siendo unidad el año, y p,q dos números enteros y positivos cualesquiera; y sea C el valor del capital c al cabo de este tiempo, ó lo que es igual, la suma del capital é intereses al fin del tiempo $\frac{p}{q}$.

Sea x el interés de 1 en el tiempo $\frac{1}{q}$; el capital c producirá en este tiempo cx, luego su valor al cabo de este tiempo es $c(1+x)$; es decir, que para hallar el valor de un capital cualquiera al fin del tiempo $\frac{1}{q}$, no hay mas que multiplicarle por $1+x$.

Segun esto, el valor del capital c al cabo del tiempo $\frac{2}{q}$ será $c(1+x)^2$, al cabo del tiempo $\frac{3}{q}$, $c(1+x)^3$; y en general el valor del capital c al fin del tiempo $\frac{p}{q}$ será $c(1+x)^p$.

Luego al fin del tiempo $\frac{q}{q}=1$, el valor de dicho capital será $c(1+x)^q$

Ahora, siendo r el tanto por 1 al año, cr será el interés del capital c; luego su valor al fin del año será $c(1+r)$; y por tanto tendrémos la ecuacion

$$c(1+x)^q=c(1+r) \quad \text{de donde}$$

$$c(1+x)^p=c(1+r)^{\frac{p}{q}}.$$

Luego el valor del capital c al fin del tiempo $\frac{p}{q}$ es $c(1+r)^{\frac{p}{q}}$; y como á esta cantidad hemos llamado C, tendrémos

$$C=c(1+r)^{\frac{p}{q}},$$

ecuacion que liga á las cuatro cantidades que entran en el cálculo del interés; á saber, el capital primitivo, el tanto por 1 al año, el tiempo, y la suma del capital é intereses al fin de este tiempo.

Sea el tiempo $\frac{p}{q}=n$ número entero y positivo: se tendrá

$$C=c(1+r)^n,$$

fórmula que hallan directamente todos los autores al tratar del interés compuesto, mas á ninguno de ellos, al menos que yo sepa, ha ocurrido que, aunque el tiempo sea fraccionario, el interés debe calcularse por la misma fórmula.

Sería fácil demostrar que, aun cuando el tiempo fuese negativo, la fórmula del interés es la misma; pero no nos detendremos en esto, por no ser necesario para nuestro objeto.

Caso particular. Sea $\frac{p}{q}=1$, la fórmula del interés se convierte en $C=c(1+r)$, de donde $C-c=cr$, interés del capital c en un año; lo que es evidente.

En adelante representaremos el tiempo por t, y la fórmula del interés será

$$C=c(1+r)^t$$

6. **EJEMPLOS.**

1.º *Hallar el interés de 1 real en 3 meses á 4 p.°/o al año.*

En este caso tendremos $c=1$, $r=0{,}04$, $t=\frac{1}{4}$.

$$C=\sqrt[4]{1{,}04}, \qquad C-c=\sqrt[4]{1{,}04}-1=0{,}0098534.$$

Si en las mismas circunstancias se quisiese saber el interés de 20000 rs., no habria mas que multiplicar el interés de 1 real por 20000, y se hallaria 197 rs. 2 mrs.

2.º *Hallar el interés de 1 real en 6 meses á 4 p.°/o al año.*

Tenemos $c=1$, $r=0{,}04$, $t=\frac{1}{2}$.

$$C=\sqrt{1{,}04}, \qquad C-c=\sqrt{1{,}04}-1=0{,}0198039.$$

El interés de 20000 rs. en las mismas circunscias es 396 rs. 2 mrs.

3.° *Hallar el interés de 1 real en 9 meses á 4 p. °/₀ al año.*

Será $c=1$, $r=0{,}04$, $t=\frac{3}{4}$.

$$C-c=\sqrt[4]{(1{,}04)^3}-1=0{,}0298524.$$

El interés de 20000 rs. en el mismo caso es 597 rs. 1 maravedí.

En la práctica se pudiera facilitar el cálculo del interés, formando tablas que diesen el interés de 1 real en un tiempo cualquiera: multiplicando dicho interés por el capital se tendria el interés de éste.

7. Examinemos ahora las dos cuestiones siguientes.

1.ª *20000 rs. se toman á interés con obligacion de pagar 1 p. °/₀ al trimestre.*

Este contrato estaria mal espresado, si como es costumbre, se dijese que se toman 20000 rs. á interés de 4 p.°/₀ al año, con obligacion de pagar por trimestres la cuarta parte del interés anual.

En efecto, el 4 p.°/₀ anual es 800 rs. ni mas ni menos. Pero si se paga por trimestres y por cuartas partes del interés en el año, el interés al fin del año es $20000\,(1{,}01)^4-20000=812$ rs. 2 mrs., pues los 200 rs., que el prestamista recibe cada trimestre, se deben considerar como produciendo el mismo interés de 1 p.°/₀ al trimestre, y la fórmula $C=c\,(1+r)^t$ es cierta estando el tiempo referido á aquel al cual se estipula el tanto p.°/₀

2.ª 20000 rs. *se toman á interés con obligacion de pagar 16 p.°/₀ á los 4 años.*

Tambien serán contradictorias las palabras del contrato, si se dice que se toman 20000 rs. con obligacion de pagar á los 4 años el interés simple de 4 p.°/₀ al año.

Pues el 4 p.°/₀ anual es al fin de los 4 años $20000\,(1{,}04)^4-20000=3397$ rs. 6 mrs.; mientras que el 16 p.°/₀ de 20000 rs. es 3200 rs.

DESCUENTO.

8. Ya hemos visto que la cuestion del interés es esta: *dado el valor actual de un capital y el tanto p.°/₀ de interés al año, hallar el valor de dicho capital, pasado cierto tiempo.*

La inversa de esta cuestion es la siguiente: *dado el valor de una letra pasado cierto tiempo, y el tanto p.°/₀ de interés al año, hallar su valor actual.*

Esta última es la cuestion llamada de *descuento.*

El descuento es la diferencia entre el valor futuro ó nominal de la letra y su valor actual; diferencia que no es otra cosa que el interés que debe producir el valor actual de la letra en el tiempo que falta hasta su vencimiento.

9. De dos modos se suele convenir, cuando ocurre esta cuestion en el interés que debe producir el dinero: el 1.° consiste en convenir esplícitamente que el dinero que entrega el tomador al tenedor en pago de la letra, produzca un cierto tanto p.°/₀ al año.

El 2.° modo consiste en convenir en que de cada 100 unidades del valor nominal de la letra se rebajará un cierto tanto al año: ya veremos cuál es el tanto p.°/₀ de interés al año en que convienen implícitamente el tomador y tenedor. Por ahora vamos á tratar de la cuestion del descuento segun el primer convenio.

10. En este convenio es evidente que 100 unidades de moneda en el acto equivalen á 100 mas el tanto p.°/₀ de interés pasado un año: luego si el plazo de la letra es de un año, se hallará el valor actual de la letra por la proporcion

100 + *el tanto* : 100 : : *valor futuro* : *valor actual.*

Sea ahora el plazo de la letra diferente del año, y representamos por c, r, t y C las mismas cantidades que en el cálculo del interés: allí hemos hallado que

$$C = c(1+r)^t;$$

y pues que en el caso actual conocemos C, r y t, y la incógnita es c, tendremos

$$c = \frac{C}{(1+r)^t},$$

fórmula que da el valor actual de la letra, conocidos el tanto por 1 de interés al año, el valor nominal de la letra, y el plazo de dicha letra.

11. Los autores, al tratar de esta cuestion, consideran como simple el interés que produce el valor actual de la letra, sea el tiempo menor ó mayor que un año.

Veamos qué clase de error se comete por esta falsa suposicion.

Si el plazo de la letra es menor que un año, como el descuento que debe hacerse del valor nominal de la letra es el interés que produce el valor actual, y este interés en un tiempo menor que un año es menor que el interés simple, resulta que el descuento, segun dichos autores, es demasiado grande, ó el valor actual demasiado pequeño; y por tanto el cálculo usual es desventajoso para el tenedor ó dueño de la letra.

Si el plazo es mayor que un año, como el verdadero interés es mayor que el simple, resulta que el descuento es demasiado pequeño, ó el valor de la letra demasiado grande; y por tanto el cálculo en uso es ventajoso para el tenedor.

12. **EJEMPLOS.**

1.º *Hallar el valor actual de una letra de* 20000 *reales que vencerá dentro de* 6 *meses, siendo* 6 *el tanto p.* °/₀ *de interés al año.*

Valiéndonos de la fórmula verdadera

$$c = \frac{C}{(1+r)^t},$$

tendremos $\quad c = \dfrac{20000}{(1{,}06)^{\frac{1}{2}}} = 19425\ rs.\ 24\ mrs.$

Para hallar el valor actual de la letra por la regla de los autores, tendremos que siendo 6 el tanto p.% de interés al año, 3 será el tanto p.% en 6 meses; y por consiguiente el valor actual de la letra será el 4.º término de la proporcion

$$103 : 100 :: 20000 : 19417\ rs.\ 16\ mrs.$$

2.º *Hallar el valor actual de una letra de* 20000 *reales que vencerá dentro de* 3 *años y* 4 *meses, siendo* 6 *el tanto p.* °/₀ *de interés al año.*

La fórmula verdadera nos da

$$c = \frac{20000}{(1{,}06)^{\frac{10}{3}}} = 16469\ rs.\ 12\ mrs.$$

Segun la regla de los autores el tanto p.% en 3 años y 4 meses será 20; luego tendremos

$$120 : 100 :: 20000 : 16666\ rs.\ 22\ mrs.$$

13. En la práctica se pudiera facilitar el cálculo de la fórmula $c = \frac{C}{(1+r)^t}$ que es bastante complicado, por medio de tablas que diesen el valor actual, siendo 1 real el valor nominal, pasado un tiempo cualquiera; pues entonces una simple multiplicacion de este valor actual por el valor nominal de la letra daria su valor actual.

No habrá necesidad ni de fórmula ni de tablas, conviniendo el tomador y el tenedor en que el interés del dinero sea de un cierto tanto p.%, no al año, sino por todo el tiempo que falta hasta el cumplimiento del plazo.

Por ejemplo, *se quiere hallar el valor actual de una letra de 20000 rs. que vence dentro de 7 meses, conviniendo en que el dinero produzca 3 p.°/₀ en los 7 meses.*

No habrá mas que hacer esta proporcion

$$103 : 100 :: 20000 : x.$$

14. Vengamos ahora al 2.° modo de convenir en el interés que debe producir el valor actual de la letra.

Este 2.° modo seguido en España y en Francia, y que, segun hemos dicho, consiste en rebajar de cada 100 unidades del valor futuro de la letra una cierta cantidad por un año de anticipacion, se suele espresar diciendo que se descuenta la letra á un cierto tanto p.$\frac{o}{o}$ al año.

Algunos autores aseguran que este modo de calcular el descuento es perjudicial al tenedor, pues por él, dicen, se rebaja una cantidad mayor que la que se debe con arreglo al convenio.

Este aserto estriba en una falta de observacion: estos autores están persuadidos de que, al estipular que el descuento sea por ejemplo 6 p.$\frac{o}{o}$ al año del valor nominal de la letra, este 6 p.$\frac{o}{o}$ es el interés que debe producir el dinero que entrega el tomador al dueño de la letra. En esto está el error: cuando se estipula que el tanto de descuento sea de 6 p.$\frac{o}{o}$ al año, no convienen el tomador y tenedor en que el dinero que este recibe produzca 6 p.$\frac{o}{o}$ al año, sino 6 por 94; pues por cada 94 que entrega el tomador se halla al fin del año con 100: y es bien claro, que variando segun las circunstancias el interés del dinero, nada se opone á que se convenga por ambas partes en que este interés sea de 6 por 94 al año, ó lo que es igual de $\frac{600}{94}$ p.$\frac{o}{o}$ al año.

No dirán ahora estos autores que la cantidad que recibe el tenedor puesta á 6 p.$\frac{o}{o}$ de interés al año

debe valer al fin del año el valor de la letra. Que la pongan á interés de $\frac{600}{94}$ p.$\frac{o}{o}$, y verán como al fin del año se hallan justamente con el valor de la letra.

Verdad es, que para el tenedor es mejor 6 p.$\frac{o}{o}$ segun el 1.^er convenio que 6 p.$\frac{o}{o}$ segun el 2.°; pero tampoco hay duda que si un banquero tuviese que descontar dos letras de igual cantidad pagaderas al mismo tiempo por un mismo sugeto, y conviniesen él y el tenedor en descontar la una por el primer modo y la otra por el segundo, el tanto de descuento sería algo menor que el tanto de interés; pues si no, por una de las letras rebajaria mas que por la otra, hallándose ambas en las mismas circunstancias.

Es pues infundado cuanto se ha dicho contra este modo de descontar, y como mas simple que el otro debe sin duda preferirse.

15. Hecha de paso esta advertencia, *hallemos el valor actual de una letra cuyo plazo es diferente del año.*

Para evitar confusion llamaremos *tanto de descuento* á la cantidad que en este convenio se rebaja, siendo la anticipacion de un año, por cada 100 unidades del valor futuro de la letra.

Se ha creido hasta ahora que el descuento, y por consiguiente el tanto de descuento, debia ser proporcional al tiempo. Nosotros vamos á demostrar que tal proporcion da un descuento demasiado pequeño si el plazo es menor que un año, y demasiado grande si el plazo es mayor que un año: de modo que por el cálculo usual sale perjudicado el tomador en el primer caso y con ventaja en el segundo.

En efecto, supongamos que el plazo de la letra sea de 4 meses, y 6 el tanto de descuento. Si el plazo de esta letra fuese de un año, cada 100 unidades que contuviese valdrian ahora 94; pero pasados 8 meses, no le faltarian mas que 4 para su vencimiento, y por tanto la letra valdria entonces lo que vale actualmente la letra en cuestion. Ahora bien, 94 á 6 por 94 al año, segun convenio, valen á los 8 meses menos que 98, puesto que el interés en un tiempo menor que un año es menor que el interés simple: luego el valor actual de nuestra letra es menor que 98 por cada 100 unidades que contenga; y pues que el cálculo en uso hace valer 98 á cada 100 unidades de la letra, resulta que dicho cálculo perjudica al tomador.

Otra demostracion. Segun el cálculo en uso cada 100 unidades de la letra valen 98 actualmente. Pero 98 á $\frac{6}{94}$ por 1 al año valen pasados 4 meses

$$98\left(1+\tfrac{6}{94}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{98\left(1+\frac{6}{94}\right)}{\left(1+\frac{6}{94}\right)^{\frac{2}{3}}};$$

y como el denominador de este quebrado es el valor del capital 1 al cabo de 8 meses puesto á $\frac{6}{94}$ por 1 al año, y ya se sabe que este valor es menor que $1+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{94}=1+\frac{4}{94}$, tendremos que el valor de 98 á los 4 meses será mayor que

$$\frac{98\left(1+\frac{6}{94}\right)}{1+\frac{4}{94}}=100.$$

Luego el valor actual de cada 100 unidades de la letra debe ser menor que 98.

Supongamos ahora que el plazo de la letra sea de 2 años y 4 meses.

Segun la rutina se rebajarán 14 p. % del valor nominal de la letra; es decir, que por cada 100 solo se entregarán 86.

Estos 86 deben, impuestos á 6 por 94 al año, convertirse en 100 al fin de 2 años y 4 meses. Veamos si esto se verifica.

En los 4 primeros meses 86 producirán menos que 2 de interés, puesto que 94 producen en dichos 4 meses menos que 2; luego el valor de los 86 al fin de 4 meses es menor que 88.

En el siguiente año esta cantidad producirá menos que 6, puesto que 94 producen 6; luego al fin

de un año y 4 meses valdrá menos que 94. En el año siguiente esta cantidad producirá menos que 6, puesto que 94 producen 6; luego el valor de los 86 al fin de los 2 años y 4 meses es menor que 100.

Luego el valor actual de la letra debe ser mayor que 86 por cada 100 que contenga.

Vemos pues que el cálculo en uso favorece al tomador cuando el plazo de la letra es mayor que un año.

16. Esto supuesto, para hallar el verdadero valor actual de la letra, sea C el valor futuro de la letra, c su valor actual, r el tanto de descuento por 1 al año, t el plazo, siendo unitad el año.

El tomador y tenedor convienen en que el dinero que el 1.º entrega al 2.º produzca $100\,r$ al año por cada $100-100r$, ó lo que es igual $\frac{r}{1-r}$ por 1 al año: luego, segun la fórmula del interés, tendremos esta relacion

$$C=c\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^{t},$$

de donde

$$c=C\,(1-r)^{t}.$$

17. **EJEMPLOS.**

1.º *Hallar el valor actual de una letra de 20000 rs. que vence á los 6 meses, siendo 6 el tanto de descuento.*

El valor actual de la letra segun el cálculo usual se hallará por la proporcion

$$100 : 97 :: 20000 : 19400.$$

El valor verdadero de la letra se obtendrá por la fórmula $c=C\,(1-r)^{t}$, en la que poniendo por C, r, t sus valores, se tendrá

$$c=20000\,(1-0{,}06)^{\frac{1}{2}}=19390\ \textit{rs.}\ 24\ \textit{mrs.}$$

2.º *Hallar el valor actual de una letra de 20000* *reales que vencerá dentro de* 3 *años y* 4 *meses, siendo* 6 *el tanto de descuento.*

El valor actual, segun la rutina, se hallará por la proporcion

$$100 : 80 :: 20000 : 16000$$

el valor verdadero será

$$c = 20000\,(1 - 0{,}06)^{\frac{10}{3}} = 16272 \ rs.\ 18 \ mrs.$$

18. Tambien en este modo de descontar se pudiera facilitar el cálculo de la fórmula $c = C\,(1-r)^t$ por medio de tablas; y tambien puede evitarse esta fórmula conviniendo en que el tanto de descuento sea por todo el tiempo que falta hasta el vencimiento de la letra.

Así, si una letra cumple dentro de 8 meses y se quiere hallar su valor actual, conviniendo en que se descontarán 4 p. % en los 8 meses, no habrá mas que hacer la proporcion.

$$100 : 96 :: \text{valor de la letra} : x.$$

19. *Incompatibilidad entre el cálculo del interés considerado como proporcional al tiempo, y el cálculo del descuento* considerado tambien en *proporcion con el tiempo.*

Supongamos que se quiera hallar el descuento de una letra que cumple dentro de 8 meses, siendo 6 el tanto de descuento.

Calculando el descuento, como es uso, se descontarán 4 p.% del valor nominal de la letra, cantidad que sabemos es menor que el verdadero descuento.

Mas si admitimos que el interés sea proporcional al tiempo; como segun el convenio el dinero que entrega el tomador produce 6 por 94 al año, deberá producir 4 por 94 en los 8 meses, cantidad mayor que 4 por 96, que segun el cálculo en uso hace producir el tomador á su dinero.

Ahora bien, sabemos que el descuento debe ser

el interés que produce el dinero que entrega el tomador, y sabemos tambien que este interés es menor en los 8 meses que $\frac{2}{3}$ del interés en el año, es decir, menor que 4 por 94; luego el verdadero descuento es menor que el que resulta de la hipótesi de ser el interés proporcional al tiempo.

Tenemos pues, que si el plazo de la letra es menor que un año, el descuento en uso es menor que el verdadero, y éste menor que el que resulta admitiendo la proporcion entre el interés y el tiempo.

Supongamos ahora que la letra cumple dentro de 3 años y 4 meses.

El descuento en uso será el 20 p.% del valor nominal de la letra, cantidad que sabemos es mayor que el descuento verdadero.

Mas si el interés fuese proporcional al tiempo, como segun el convenio el dinero produce 6 por 94 al año, deberia producir 20 por 94 en los tres años y 4 meses; cantidad mucho menor que 20 por 80 que produce segun el cálculo usual. Pero el interés que debe producir el dinero en los 3 años y 4 meses es mayor que el simple, es decir mayor que 20 por 94; luego el descuento verdadero debe ser mayor que el que resulta de la hipótesi del interés proporcional al tiempo.

Vemos por lo tanto, que si el plazo es mayor que un año, el descuento usual es mayor que el verdadero, y éste mayor que el que resulta admitiendo la proporcion entre el interés y el tiempo.

20. Para comprobar que el descuento calculado, considerando al interés en proporcion con el tiempo, se diferencia del usual mas que el verdadero, resolveremos los dos ejemplos anteriores admitiendo la proporcion entre el interés y el tiempo.

En el 1.er ejemplo, se hallará el valor actual de la letra por la proporcion

$$97 : 94 :: 20000 : 19381 \ rs.\ 15 \ mrs.$$

En el 2.º se hallará el valor actual por la proporcion

$$114 : 94 :: 20000 : 16491 \text{ rs. } 7. \text{ mrs.}$$

RESUMEN.

21. Reasumiendo cuanto llevamos dicho en esta memoria, tendremos los resultados siguientes.

1.º El interés de un capital en un tiempo menor que un año no es proporcional al tiempo, como hasta ahora se habia creido; dicho interés es menor que el que resulta suponiendo cierta la proporcion entre el interés y el tiempo.

2.º El interés de un capital es, cualquiera que sea el tiempo de su imposicion, la suma de los intereses que produce el capital en todos los instantes, y de los que producen estos mismos intereses: por consiguiente es enteramente supérflua la distincion del interés en *simple* y *compuesto;* y como además es errónea, pues ya hemos visto que el interés no puede ser simple, deben desterrarse estas palabras.

3.º Cuando se toma prestada una cantidad con obligacion de pagar el interés en plazos diferentes del año, estará mal espresado el contrato si, como hasta ahora se ha hecho, se dice que se toma la cantidad á interés simple de un cierto tanto p.% al año. Por ejemplo, si se toma una cantidad á interés con obligacion de pagar 1 p.% al trimestre, serán contradictorias las palabras del contrato, si se dice que se toma la cantidad á interés simple de 4 p.% al año, y que se pagarán los intereses por trimestres y por cuartas partes.

Estará igualmente mal espresado el contrato si, tomando una cantidad á interés con obligacion de pagar 8 p.% de 2 en 2 años, se dice que se toma la cantidad á interés simple de 4 p.% al año, y que se pagarán los intereses de 2 en 2 años.

Deberá espresarse en el 1.er caso que se toma la cantidad á interés de 1 p.% al trimestre; y en el 2.º á interés de 8 p.% á los 2 años.

4.º En los paises en que se descuentan las letras por el 1.er método (*escompte en dedans* que llaman los Franceses), el valor de la letra calculado como hasta ahora es demasiado pequeño si el plazo es menor que un año, y es demasiado grande si el plazo es mayor que un año. Por consiguiente el cálculo en uso favorece en el 1.er caso al tomador, y le perjudica en el 2.º

5.º En el descuento usado en España y en Francia (*escompte en dehors*) no es cierto, como lo aseguran algunos autores, que el dueño de la letra reciba siempre menos que lo que le corresponde.

El cálculo en uso perjudica al tomador si el plazo es menor que un año, y le favorece si el plazo es mayor que un año; lo contrario de lo que se verifica en el otro descuento.

Si el descuento se calculase considerando al interés en proporcion con el tiempo (lo que parece deberia haberse hecho, ya que se admitia esta hipótesi por lo menos cuando el tiempo era menor que un año), el resultado se diferenciaria del usual mas que el verdadero.

6.º Se dirá tal vez que la diferencia entre el interés y descuento calculados como hasta aqui, y el interés y descuento verdaderos, no es muy considerable, y que por tanto es preferible continuar del mismo modo, ya que los cálculos son mas sencillos que para hallar los valores verdaderos. Pero á esto responderemos que estas diferencias, si bien son pequeñas siendo pequeño el capital, el tiempo y el tanto p.%, crecen con estos tres elementos del interés, y pueden llegar á ser muy grandes.

Por ejemplo, si se quisiera hallar el valor actual de una letra de 20000 rs. cuyo plazo es de 20 años, siendo 5 p.% el interés que produce el dinero, se hallaria por el cálculo usual que dicha letra vale ahora 10000 rs.; mientras que el cálculo verdadero da $\frac{20000}{(1,05)^{10}}=7537$ rs. 26 mrs.

Si la misma letra se descontase por el 2.º método, siendo 5 el tanto de descuento, el cálculo en uso daria *cero* por valor actual de la letra; y el cálculo verdadero da $20000\ (1-0,05)^{20}=7169$ *rs.* 24 *mrs.*

NOTA.

22. En lo que hasta ahora llevamos dicho hemos evitado en lo posible el cálculo algébrico con objeto de que nos entendiesen aun aquellas personas de cortos conocimientos en el álgebra. Mas ya se sabe que el cálculo algébrico simplifica los razonamientos, y facilita por tanto la resolucion de los problemas y demostracion de los teoremas matemáticos. Por eso vamos actualmente á demostrar por medio de dicho cálculo las verdades que sin su ausilio dejamos demostradas.

23. Lo primero que demostraremos es que *el interés en un tiempo menor que un año es menor que el interés simple, y mayor en un tiempo mayor que un año.*

Hemos hallado la relacion $C=c(1+r)^{\frac{p}{q}}$. El interés será por consiguiente

$$C-c=c\left\{(1+r)^{\frac{p}{q}}-1\right\}.$$

El interés simple es $c.\frac{p}{q}r$.

Tenemos por la fórmula del binomio de Newton

$$(1+r)^p=1+pr+\frac{p(p-1)}{1.2}r^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}r^3+\ldots\ldots+r^p,$$

$$\left(1+\frac{p}{q}r\right)^q=1+pr+\frac{q(q-1)}{1.2}\left(\frac{p}{q}r\right)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{p}{q}r\right)^q$$

Consideremos en los segundos miembros los términos generales, es decir, los términos que en ambos ocupen el lugar $n+1$; contando desde el primer término 1: dichos términos generales serán respectivamente

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}r^n\ldots\ldots\ldots(g)$$

$$\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}\left(\frac{p}{q}r\right)^n.$$

La 2.ª espresion puede escribirse de este otro modo:

$$\frac{p\left(p-\frac{p}{q}\right)\left(p-\frac{2p}{q}\right)\ldots\ldots\left(p-\frac{(n-1)p}{q}\right)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots n}r^n\ldots\ldots(g')$$

Es fácil ver ahora que si $p<q$, la espresion (g) es menor que la (g'); y que si $p>q$, se verifica lo contrario. Por consiguiente en el 1.er caso, cada término del 1.er desenvolvimiento es menor que su correspondiente del 2.º; y como el 1.er desenvolvimiento tiene p términos y el 2.º q términos, y es $p<q$, resulta que el 1.er desenvolvimiento es menor que el 2.º Tendremos pues,

$$(1+r)^p<\left(1+\frac{p}{q}r\right)^q,\text{ de donde }(1+r)^{\frac{p}{q}}<1+\frac{p}{q}r.$$

En el 2.º caso se verá con igual facilidad que

$$(1+r)^{\frac{p}{q}}>1+\frac{p}{q}r.$$

De estas dos desigualdades resultan las dos siguientes que queríamos demostrar:

$$\text{si }\frac{p}{q}<1,\quad c\left\{(1+r)^{\frac{p}{q}}-1\right\}<c.\frac{p}{q}r,$$

$$\text{si }\frac{p}{q}>1,\quad c\left\{(1+r)^{\frac{p}{q}}-1\right\}>c.\frac{p}{q}r.$$

DESCUENTO.

24. En el cálculo del descuento segun el primer convenio hemos hallado, que si el tiempo es diferente del año, el valor actual de la letra es $\frac{C}{(1+r)^t}$; y segun la regla de los autores es $\frac{C}{1+tr}$.

Acabamos de demostrar que

si $t<1$, $(1+r)^t<1+tr$, y que

si $t>1$, $(1+r)^t>1+tr$.

Luego, en el primer caso $\frac{C}{(1+r)^t}>\frac{C}{1+tr}$,

y en el segundo $\frac{C}{(1+r)^t}<\frac{C}{1+tr}$.

Es decir, que si el plazo de la letra es menor que un año, el valor actual calculado, por la regla en uso, es demasiado pequeño, y si el plazo es mayor que un año, el valor actual segun la misma regla es demasiado grande.

25. En el descuento, segun el otro convenio, se verifica lo contrario.

En efecto, hemos visto que el valor actual de la letra es $\frac{C}{\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^t}$ ó $C\left(1-r\right)^t$; y el valor actual segun la rutina es $C(1-tr)$.

Si $t<1$, tenemos $\frac{1}{\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^t}=\frac{\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^{1-t}}{1+\frac{r}{1-r}}=$ $(1-r)\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^{1-t}$; y pues que $\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^{1-t}<1+\frac{(1-t)r}{1-r}$,

será $\frac{1}{\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^t}<(1-r)\left\{1+\frac{(1-t)r}{1-r}\right\}$, ó $\frac{1}{\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^t}<$ $1-tr$: por consiguiente

$$\frac{C}{\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^t}=C(1-r)^t<C(1-tr)$$

Si $t>1$, será $tr \overset{=}{\gtrless} 1$: en los dos primeros casos es evidente que $(1-r)^t>1-tr$, pues el segundo miembro es cero ó negativo.

En el tercer caso tenemos, segun acabamos de demostrar, $(1-tr)^{\frac{1}{t}}<1-r$ de donde

$$(1-r)^t>1-tr.$$

Luego $C(1-r)^t>C(1-tr)$

26. Demostremos ahora la incompatibilidad ó contradiccion entre las dos hipótesis: el interés proporcional al tiempo, y el descuento segun el 2.º convenio, tambien proporcional al tiempo; hipótesis que á la vez eran admitidas, por lo menos si el tiempo era menor que un año.

Para esto hallaremos la espresion del descuento en ambas hipótesis.

El descuento proporcional al tiempo es Crt.

Si el interés es proporcional al tiempo, el valor actual de la letra, ó el dinero que en su pago entrega el tomador al tenedor, produce $\frac{r}{1-r}$ por 1 al año; y por tanto $\frac{crt}{1-r}$ será su interés en el tiempo t: luego tendrémos que $c+\frac{crt}{1-r}=C$, de donde

$$c=\frac{C}{1+\frac{rt}{1-r}}$$

El descuento será por consiguiente

$$C-c=C\left(1-\frac{1}{1+\frac{tr}{1-r}}\right)$$

Tenemos pues las tres espresiones siguientes para valor del descuento

1.° Descuento proporcional al tiempo ó usual, Crt.

2.° Descuento verdadero. . . . . $C\left\{1-(1-r)^t\right\}$

3.° Descuento, siendo el interés proporcional al tiempo. . . . . $C\left(1-\frac{1}{1+\frac{tr}{1-r}}\right)$

Si $t<1$, ya hemos visto que $Ctr<C\left\{1-(1-r)^t\right\}$

En el mismo caso tenemos

$$1+\frac{tr}{1-r}>\left(1+\frac{r}{1-r}\right)^t \text{ ó } 1+\frac{tr}{1-r}>\frac{1}{(1-r)^t}\text{; de donde}$$

$$\frac{1}{1+\frac{tr}{1-r}}<(1-r)^t\text{; y por consiguiente } 1-\frac{1}{1+\frac{tr}{1-r}}>$$

$$1-(1-r)^t\text{; luego } C\left(1-\frac{1}{1+\frac{tr}{1-r}}\right)>C\left\{1-(1-r)^t\right\}.$$

Es decir, que el descuento sacado en la hipótesi de ser el interés proporcional al tiempo, es mayor que el verdadero; y como este es mayor que el usual, con mayor razon será el descuento en la misma hipótesis mayor que el descuento usual.

Si $t>1$, sabemos que $Crt>C\left\{1-(1-r)^t\right\}$; y ahora se demostrará como en el caso anterior que

$$C\left(1-\frac{1}{1+\frac{tr}{1-r}}\right)<C\left\{1-(1-r)^t\right\}$$

Es decir, que el descuento sacado en la hipótesi de ser el interés proporcional al tiempo es menor que el verdadero; y como este es menor que el usual, con mayor razon aquel será mayor que este.

27. Terminaremos esta nota haciendo una observacion que, si no es muy importante, no deja de ser curiosa.

Si se toman por abscisas los tiempos y por ordenadas los valores respectivos de un capital puesto á interés, los estremos de estas ordenadas forman una logarítmica.

El solo enunciado de esta proposicion bastará para convencer de su verdad á los que conocen la ecuacion de la familia logarítmica.

Por medio de esta curva se puede presentar á la vista la diferencia entre el interés considerado como proporcional al tiempo y el verdadero interés: pues siendo dicha curva convexa con respecto al eje de abscisas, si juntamos por medio de una secante los estremos de la ordenada en el origen y de la ordenada cuya abscisa es 1, y tiramos por el estremo de la primera una paralela al eje de abscisas, el interés simple será la perpendicular á esta paralela bajada desde un punto cualquiera de la secante, y el verdadero interés será la perpendicular bajada sobre dicha paralela desde un punto de la curva. Lo que prueba que el interés simple es mayor que el verdadero si el tiempo es menor que un año, y es menor que el verdadero si el tiempo es mayor que un año.