Universidad
Pública de Navarra
Nafarroako
Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

TRABAJO DE FIN DE GRADO
GRADO EN ECONOMÍA

RELACIONES DE PREFERENCIA: UN ESTUDIO DE LA COHERENCIA CON INDIFERENCIA NO TRANSITIVA

Ana Munárriz Iriate

MÓDULO
Métodos Cuantitativos

DIRECTOR
Juan Ramón de Miguel Velasco

CODIRECTOR
María Jesús Campión Arrastia

Pamplona – Iruña
21 de mayo de 2018

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo estudiar el nivel de coherencia de un agente económico en la elección entre pares de elementos de un conjunto. Para ello, considerando las posibles propiedades de una relación binaria, se estudia la relación de preferencia racional y su relación de indiferencia asociada. La posterior transcripción al lenguaje algebraico en forma de matrices booleanas permite realizar las operaciones y comparaciones que validan los diferentes niveles de coherencia, estableciendo una clasificación entre orden intervalo, semiorden, orden débil y orden total.

Para completar el estudio, se propone una aplicación práctica en forma de doble encuesta sobre preferencias entre másteres a diez estudiantes de Economía de la Universidad Pública de Navarra para conocer el nivel de coherencia de sus respuestas. Los resultados muestran niveles de coherencia más altos en aquellas encuestas que aportan una mayor información, siendo frecuente la aparición de intransitividades en la relación de indiferencia.

Palabras clave: coherencia, relación binaria, preferencia racional, indiferencia, matriz booleana.

Abstract

The objective of this piece of work is to study the level of coherence of an economic agent in the choice between pairs of elements of a set. To this effect, considering the possible properties of a binary relation, the correspondence of the rational preference and its associated indifference relation is studied. The later transcription to algebraic language in the form of boolean matrixes allows both operations and comparisons that validate the different levels of coherence, establishing a classification between interval order, semi-order, weak order and total order.

For the completion of this study, a practical application is proposed to ten economics students of the Universidad Pública de Navarra in the form of a double survey about preferences between master´s degrees, in order to determine the level of coherence of their answers. The results show higher levels of coherence in those surveys that provide more relevant information, being the presence of non-transitive relations still frequent.

Keywords: coherence, binary relation, rational preference, indiference, boolean matrixes.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría Económica, en especial la Microeconomía, asume el axioma de racionalidad de los individuos para construir las posibles funciones de utilidad que modelan las preferencias del consumidor.

Esta teoría supone que las preferencias de los individuos son de partida racionales, considerando como tales a aquellas que son asimétricas y transitivas, mientras que la relación de indiferencia asociada se trata de una clase de equivalencia, o lo que es lo mismo, una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

En ese modelo tradicional, las preferencias se modulan de manera que, si cumplen ciertas características, se pueden ver representadas por una función de utilidad. En ese caso, si un elemento es preferido a otro, la utilidad que aporta el primer elemento es mayor a la del segundo. Del mismo modo, ambos elementos serán igual de preferidos si aportan la misma utilidad.

A mediados del siglo XX, investigadores del campo de la teoría de la decisión como W. E. Amstrong (1939,1948), R. D. Luce (1956) y años después P.C. Fishburn (1970), pusieron en cuestión las condiciones sobre las que se establecían estos modelos. Entendían que las condiciones exigidas a la relación de preferencia racional eran acordes a las reales, pero cuestionaban aquellas que habían sido asumidas para la relación de indiferencia. En concreto, no estaban de acuerdo con que la indiferencia se tratase de una relación siempre transitiva.

Amstrong (1950) defendió la aparición de intransitividades en la relación de indiferencia de los agentes debido a la baja capacidad que tiene la mente humana para discriminar entre alternativas cuando las diferencias entre opciones no son de una magnitud lo suficientemente grande. Junto con el resto de investigadores, dotaron de multitud de ejemplos empíricos la teoría que respaldaban.

El fenómeno de la intransitividad de la indiferencia entraba entonces en contradicción con el modelo tradicional usado por los economistas que estudiaban sobre teoría del consumidor.

En los últimos años, muchos de los métodos en teoría de la decisión se han desarrollado y han permitido tener en cuenta que dos elementos pueden ser indiferentes si se encuentran dentro de un mismo intervalo. Estas nuevas estructuras, que reciben el nombre de semiórdenes y órdenes intervalo, presentan relaciones de preferencia cuya relación de indiferencia asociada no es transitiva. La universalidad de este fenómeno permitirá considerar a estas estructuras como objeto del análisis económico (Pirlot, M, Vincke, PH, 1997)

Este trabajo tiene como finalidad estudiar la Teoría Matemática que hay detrás de la relación de preferencia de un agente económico, permitiendo considerar las situaciones con intransitividad a las que hacen referencia los autores, con el fin de poder determinar el nivel de coherencia de las preferencias del agente.

Las herramientas matemáticas utilizadas serán nociones de teoría de conjuntos, en especial de las relaciones binarias, unido al uso de matrices booleanas.

El siguiente trabajo se divide en dos partes, una teórica y una práctica:

En la primera parte, se presentan los fundamentos teóricos de las estructuras asociadas a las relaciones de preferencia. Para ello, se hace una introducción de los principales conceptos de teoría de conjuntos hasta explicar qué es una relación binaria y cuáles pueden ser sus propiedades. A partir de esa base, se estudia la relación de preferencia racional P y se define la relación de indiferencia asociada I. En función de las condiciones que satisfagan estas relaciones de preferencia e indiferencia, se hace una clasificación del tipo de preferencia. Para finalizar el apartado teórico, se explica la transcripción de estas relaciones binarias al lenguaje matricial utilizando el álgebra de Boole (1979) que permitirá clasificar las preferencias en la práctica. Esta primera parte va ilustrada con un gran número de ejemplos para facilitar la comprensión de los diferentes conceptos.

En la segunda parte, se presenta una aplicación práctica de la teoría explicada. En concreto, se ha realizado una doble encuesta a 10 estudiantes que se encuentran en el último curso del grado en Economía sobre pares de másteres con diferentes salidas profesionales. Tras una breve descripción del contenido de la encuesta, se explican los cálculos realizados desde la transcripción matricial hasta la obtención de resultados con la ayuda de un programa informático que determina el grado de coherencia de los agentes. Una vez realizados los cálculos, se analizan los resultados.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En Matemáticas, un conjunto es una colección de elementos. En el ámbito económico, la noción de conjunto se utiliza, entre otras aplicaciones, para agrupar las posibles alternativas entre las que un agente social tiene la capacidad de elegir. A esta colección de alternativas se le denominará "conjunto de oportunidades" de un consumidor, y el individuo tendrá la opción de comparar dos elementos cualesquiera de ese conjunto estableciendo una relación entre ellos.

En este trabajo, se le llamará X al conjunto de alternativas de un agente económico, que se supondrá finito, y sus elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ serán las opciones disponibles.

Un ejemplo ilustrativo es la elección de un grado para estudiantes de nuevo ingreso. Si se parte del supuesto de que el precio de los grados es uniforme y de que la nota de corte es de un 5 en todos ellos, el estudiante es capaz de elegir entre todas las alternativas y no encuentra ninguna otra restricción en el acceso que no sean sus gustos.

En ese caso, dentro de una misma universidad como la Universidad Pública de Navarra, el conjunto X sobre el que el agente elige es la oferta académica de grado y los elementos del conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ serán los grados a los que el estudiante tiene la posibilidad de acceder. (Grado en Economía, Grado en Ciencia de Datos, Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales, ..., Grado en Enfermería) Como la oferta académica de la universidad de cara al curso 2018/19 es de 25 grados, el conjunto X será un conjunto finito de 25 elementos.

Partiendo del supuesto de que todos los elementos de un conjunto son comparables y con la finalidad de establecer una relación entre ellos, se realiza el producto cartesiano del conjunto X. Este producto $X \times X$ dará lugar a todos los pares (x_i, x_j) resultantes de cruzar X con sí mismo, de manera que x_i pertenezca al primer conjunto X y x_j pertenezca al segundo X. Cabe destacar que el par (x_i, x_j) y el par (x_j, x_i) son pares diferentes. El producto de dos conjuntos finitos de n elementos será también finito y dará origen a $n \times n$ pares ordenados.

En el ejemplo que se plantea, el producto cartesiano del conjunto X es el resultante de cruzar la oferta académica de grado consigo misma, lo que da lugar a $25 \times 25 = 625$ pares ordenados diferentes entre los que podemos encontrar (Grado en Economía, Grado en Enfermería) o (Grado en ADE, Grado en Ciencias). Así, cada grado se podrá comparar con el resto de grados y consigo mismo.

De los $n \times n$ pares ordenados resultantes del producto cartesiano, se puede hacer una distinción entre aquellos que cumplen un determinado predicado simple, es decir, una determinada relación, y aquellos que no lo hacen. Los pares ordenados que cumplan este predicado formarán un subconjunto de $X \times X$ al que llamaremos R.

Definición 2.1. Una relación binaria en un conjunto X es un subconjunto R del producto cartesiano $X \times X$. Así, dado un par ordenado $(x_i, x_j) \in X \times X$, puede suceder que:

- El par (x_i, x_j) pertenece al subconjunto R: $(x_i, x_j) \in R$
- El par (x_i, x_j) no pertece al subconjunto R: $(x_i, x_j) \notin R$

En resumen, dada una relación que cada elemento de $X \times X$ cumple o no cumple, se llamará R al subconjunto que designe a todos los pares ordenados resultantes del producto cartesiano $X \times X$ que cumplan esa propiedad.

Ejemplo 2.2. Sea X el conjunto de estudiantes de 3º de Economía. La relación binaria R corresponde a "ser más alto que". Se dirá que (Susana, Marta) satisface la relación R si «Susana es más alta que Marta». Si esta relación es cierta, (Susana, Marta) $\in R$. Si se cumple lo anterior, «Marta es más alta que Susana» no puede cumplirse, por lo que (Marta, Susana) $\notin R$.

En el lenguaje cotidiano se indica simplemente que "Susana es más alta que Marta" en vez de (Susana, Marta) son un par de estudiantes que satisfacen la relación de "ser más alto que".

A partir de este criterio, para una relación R cualquiera definida sobre un conjunto X, se escribe también

$$x_i R x_j$$

en vez de $(x_i, x_j) \in R$ para indicar que los elementos x_i e x_j están relacionados y se escribirá

$$\neg(x_i R x_j)$$

en vez de $(x_i, x_j) \notin R$ en caso contrario.

Por tanto, queda entonces que

- $(x_i, x_j) \in R$ equivale a $x_i R x_j$
- $(x_i, x_j) \notin R$ equivale a $\neg(x_i R x_j)$.

Se define entonces el subconjunto R explicado anteriormente como los

$$\{(x_i, x_j) \in X \times X / x_i R x_j\}$$

En el caso del estudiante de nuevo ingreso, este debe elegir qué grado cursar en función de sus gustos, por lo que un predicado adecuado puede ser "ser preferido a". Un par ordenado como (Grado en Economía, Grado en Enfermería) pertenecerá al subconjunto R si el Grado en Economía es preferido al Grado en Enfermería. Si por el contrario, el Grado en Enfermería es preferido al Grado en Economía, o bien ambos le resultan igual de atractivos, la relación "ser preferido a" no se cumplirá, por lo que el par (Grado en Economía, Grado en Enfermería), no pertenecerá al subconjunto R. Para cada par ordenado, el estudiante será capaz de determinar si la relación binaria "ser preferido a" se cumple o no.

Derivado de ambos ejemplos se puede observar si, dado un par de elementos, este par cumplirá o no una determinada relación. Dadas las características de estos pares ordenados, la relación binaria existente puede cumplir alguna de las siguientes propiedades, que serán importantes a la hora de estudiar la relación de preferencia en los puntos siguientes de este trabajo.

Propiedades que puede tener una relación binaria. (Véase Indurain, 1989) Una relación binaria R definida en un conjunto X se dice que es:

- Reflexiva: $\forall x \in X : xRx$;
- Irreflexiva: $\forall x \in X : \neg(xRx)$;
- Simétrica: $\forall x_i, x_j \in X : x_iRx_j \to x_jRx_i$;
- Asimétrica: $\forall x_i, x_j \in X : x_iRx_j \to neg(x_jRx_i)$;
- Antisimétrica: $\forall x_i, x_j \in X : x_iRx_j, x_jRx_i \to x_i = x_j$;
- Transitiva: $\forall x_i, x_j, x_k \in X : x_iRx_j, x_jRx_k \to x_iRx_k$;
- Completa: $\forall x_i, x_j \in X, x_i \neq x_j : x_iRx_j \vee x_jRx_i$.

Una breve explicación de las propiedades:

1. Reflexiva: Se dice que una relación binaria es reflexiva cuando, todo elemento de X está relacionado con sí mismo.

   Ejemplo 2.3. Se supone la relación R "ser más alto que" en una clase de 3º de Economía. Se compara a una estudiante, por ejemplo a Susana, con ella misma. Si la relación R es reflexiva, Susana debería de ser más alta que Susana y (Susana, Susana) $\in R$. En caso contrario R no sería reflexiva. Como no tiene sentido que alguien sea más alto que sí mismo, Susana no será más alta que Susana y (Susana, Susana) $\notin R$, por lo que la relación "ser más alto que" no será reflexiva.

   Se supone otra la relación R' "ser igual de alto que" en el mismo conjunto. Se repite el estudio con la misma estudiante de la clase. En este caso, si la relación R' es reflexiva, Susana debería ser igual de alta que Susana y $(Susana, Susana) \in R'$. En caso contrario R' no sería reflexiva. Como una persona es siempre igual de alta que sí misma, Susana será igual de alta que Susana y (Susana, Susana) $\in R'$, por lo que la relación "ser igual de alto que" será reflexiva.

Se supone una tercera relación R'' “ser más alto o igual que” en el mismo conjunto. Si la relación es reflexiva, Susana debería ser más alta o igual de alta que sí misma y (Susana, Susana) $\in R''$. En el caso contrario la relación R'' no sería reflexiva. Como una persona es igual de alta que sí misma, Susana será más alta o igual de alta que sí misma, por lo que (Susana, Susana) $\in R''$ y la relación ”ser más alto o igual que”será reflexiva.

2. Irreflexiva: Se dice que una relación es irreflexiva cuando ningún elemento del conjunto X tiene relación consigo mismo.

   Ejemplo 2.4. Se supone la relación R del ejemplo anterior, “ser más alto que”. Se ha visto que Susana no es más alta que sí misma. Del mismo modo se observa que, de una clase, ningún estudiante será más alto que sí mismo, por lo que la relación R “ser más alto que” es una relación irreflexiva.

3. Simétrica: se dice que una relación binaria es simétrica sucede que cuando un elemento de X está relacionado con otro por una determinada relación R, este segundo elemento está relacionado con el primero por esta misma relación.

   Ejemplo 2.5. Se supone la relación R' del ejemplo anterior, “ser igual de alto que”. Se sabe que tanto Susana como Jorge miden 1’75m por lo que se puede afirmar que Susana es igual de alta que Jorge y por tanto, (Susana, Jorge) $\in R'$. Del mismo modo, Jorge es igual de alto que Susana, por lo que (Jorge, Susana) $\in R'$. Como que Susana sea igual de alta que Jorge implica que Jorge sea igual de alto que Susana, la relación “ser igual de alto que” es simétrica.

4. Asimétrica: se dice que una relación binaria es asimétrica si sucede que cuando un elemento de X está relacionado con otro por una determinada relación R, el segundo elemento no puede estar relacionado con el primero por esa misma relación.

   Ejemplo 2.6. Se supone la relación R del ejemplo anterior, “ser más alto que”. Se sabe que Susana es más alta que Marta, por tanto (Susana, Marta) $\in R$. Si Susana es más alta que Marta, no puede suceder que Marta sea más alta que Susana, por lo que (Marta, Susana) no pertenecerán a R. Como el hecho de que Susana sea más alta que Marta implica que Marta no pueda ser más alta que Susana, la relación “ser más alta que” es asimétrica.

5. Antisimétrica: Se dice que una relación binaria es antisimétrica si se cumple que si un elemento de X está relacionado con otro por una relación R y a su vez, este segundo elemento está relacionado con el primero por esta misma relación, entonces el primer elemento es igual al segundo.

Ejemplo 2.7. Se supone el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación "ser mayor o igual que". Si se estudia el par $(3, 3)$, se observa que el primer elemento del par ordenado, 3, es mayor o igual que el segundo elemento y al mismo tiempo, el segundo elemento del par ordenado, que es 3, es mayor o igual al primer elemento. Esto implica que el primer elemento del par ordenado y el del segundo son el mismo número, es decir, son iguales. Por tanto la relación "ser mayor o igual que" es antisimétrica. En caso de que el primer y el segundo elemento del par ordenado no fueran iguales no se cumpliría una de las dos premisas, por ejemplo, en el par $(5, 3)$, se observa que 5 es mayor o igual que 3, sin embargo, 3 no es mayor o igual que 5.

6. Transitiva: Se dice que una relación binaria es transitiva si cuando está relacionado un elemento de X con otro, y a su vez este segundo con un tercero, el primero está relacionado con el tercero.

   Ejemplo 2.8. Se considera de nuevo la relación R "ser más alto que" del primer ejemplo. Se selecciona a tres estudiantes de la clase de las cuales se sabe que Susana mide 1'75m, Marta mide 1'63m y Alejandra mide 1'57m. Se sabe entonces que Susana es más alta que Marta y también que Marta es más alta que Alejandra, es decir, (Susana, Marta) $\in R$, (Marta, Alejandra) $\in R$. ¿Será Susana más alta que Alejandra? Se sabe que Susana mide 1'75m y que Alejandra mide 1'57m por lo que también (Susana, Alejandra) $\in R$. Por tanto, si Susana es más alta que Marta, y Marta es más alta que Alejandra, se puede concluir que Susana será más alta que Alejandra. Esto implica que la relación R "ser más alto que" es transitiva.

7. Completa: Se dice que una relación binaria es completa si dados dos elementos de X cualesquiera, o bien el primer elemento está relacionado con el segundo, o bien el segundo elemento está relacionado con el primero, siempre que ambos sean distintos.

   Ejemplo 2.9. Se supone la relación "ser mayor que" en el conjunto definido por $1, 2, 3, 4, 5$. Dado un par cualquiera con elementos distintos, por ejemplo, $(3, 5)$, en caso de no cumplirse que 3 es mayor que 5, se cumplirá que 5 es mayor que 3. Por tanto, la relación "ser mayor que" es completa.

2.1. Relación de preferencia

La Teoría Económica asume que el individuo puede establecer un orden entre los diferentes elementos de X, lo que implica que entre dos elementos x_i y x_j, es capaz de determinar si x_i es preferido a x_j o si x_j es preferido a x_i para todo x_i distinto de x_j. Esta relación que corresponde a "ser preferido a" se denominará relación de preferencia. En adelante, esta relación se denotará con P y deberá respetar ciertas propiedades que sean coherentes con la noción intuitiva de preferir.

Como se ha señalado antes, el estudiante de nuevo ingreso tiene una lista de 25 grados a los que acceder en función de sus preferencias. Para ello debe realizar una ordenación de estos grados de manera que para cada par de grados es capaz de hacer una valoración. Parece sensato considerar que si el estudiante prefiere estudiar Economía a Enfermería, en ningún caso preferirá estudiar Enfermería a Economía. Esto nos lleva a concluir que la relación de preferencia que se expone debe cumplir la propiedad de asimetría.

Debido a la coherencia que se presupone en una relación de preferencia, el punto de partida utilizado es que la relación P cumpla la propiedad de asimetría. Se considera que un sistema de preferencias debe ser "lógicamente consistente" en el sentido de que si la alternativa x_i es preferida a la alternativa x_j, la alternativa x_j no puede ser preferida a la x_i.

Definición 2.10. Se denominará **relación de preferencia** de un conjunto X a una relación binaria P que sea asimétrica. Esto es, dados dos elementos cualesquiera $x_i, x_j \in X : x_i P x_j$

$$x_i P x_j \to \neg(x_i P x_j)$$

Del mismo modo, parece incongruente que el estudiante señale que el grado de Economía es preferido al grado de Economía cuando se trata del mismo grado.

Al admitir que x_i y x_j son elementos cualesquiera, se encuentra la posibilidad de que ambos elementos sean iguales $x_i = x_j$. En consecuencia, la propiedad de asimetría implica irreflexividad (Indurain, 1989).

Demostración. Se supone que $x_i P x_i$, entonces, por asimetría se tiene que no puede ser $x_i P x_i$, lo cual lleva al absurdo. Esto implica que para ningún $x_i \in X$ se tiene que $x_i P x_i$, es decir, P es irreflexiva. □

Se llamará entonces relación de preferencia estricta a una relación P que sea:

1. Irreflexiva: para todo $x_i \in X : \neg(x_i P x_i)$. Ningún elemento es preferido a sí mismo.

2. Asimétrica: para todo $x_i, x_j \in X : x_i P x_j \to \neg(x_i P x_j)$. Si x_i es preferido a x_j, x_j no es preferido a x_i.

2.2. Relación de indiferencia

Se puede dar el caso en el que el estudiante de nuevo ingreso se vea atraído por dos grados de la misma manera y no pueda establecer una relación de preferencia entre ellos. Esto se puede dar cuando compara entre dos grados iguales, por ejemplo el grado en Economía con el grado en Economía, o también cuando compara dos grados que le gustan lo mismo, como el grado en Economía y el grado en Ciencia de Datos.

Se observa que en la práctica, existen casos en los que el agente no prefiere un elemento de manera estricta a otro, sino que coloca a ambos al mismo nivel. Se dice entonces que estos dos elementos son indiferentes y se denota x_iIx_j. La relación I recibirá el nombre de **relación de indiferencia** y estará estrechamente asociada con la relación de preferencia del individuo.

Definición 2.11. Dada una relación de preferencia P en un conjunto X, se define otra relación binaria en X, a partir de P, denominada relación de indiferencia, de la siguiente forma.

$$\forall x_i, x_j \in X : x_iIx_j \Leftrightarrow \neg(x_iPx_j), \neg(x_jPx_i)$$

Esta relación de indiferencia asociada resulta siempre reflexiva y simétrica.

- Reflexiva: $\forall x \in X : xIx$;
- Simétrica: $\forall x_i, x_j \in X : x_iIx_j \Rightarrow x_jIx_i$.

La preferencia estricta asimétrica P asumida en este trabajo es aquella adoptada por Gerard Debreu (1970) en '*La Teoría del Valor* en la que postula que entre dos alternativas cualesquiera $x_i, x_j \in X$, tan sólo se satisface una y sólo una de las tres situaciones siguientes: x_iPx_j, x_jPx_i, x_iIx_j.

Por tanto, dadas dos opciones cualesquiera x_i y x_j:

- $x_iPx_j \Rightarrow x_i$ es preferido a x_j
- $x_jPx_i \Rightarrow x_j$ es preferido a x_i
- $x_iIx_j \Rightarrow x_i$ es indiferente a x_j

Con esta interpretación se asume que entre dos opciones, solo una es preferida a la otra o en caso contrario, son indiferentes.

2.3. Preferencia débil

La idea de preferencia que se adopta en este trabajo aparece en la literatura matemática denominada como preferencia estricta (Debreu, 1970). Sin embargo, otros autores han utilizado en sus investigaciones el punto de partida de la variante débil R, en la que x_iRx_j se interpreta como "el elemento x_i es tan bueno como el elemento x_j".

A partir de la relación débil R, reflexiva y completa, se define con ella:

1. La indiferencia I, como la parte simétrica de la relación R: $x_iIx_j \Leftrightarrow x_iRx_j, x_jRx_i$.
2. La preferencia estricta P, como la parte asimétrica de la relación R $x_iPx_j \Leftrightarrow x_iRx_j, \neg(x_jRx_i)$.

También puede adoptarse el recorrido inverso; a partir de la preferencia estricta P adoptada en este trabajo, relación de preferencia débil R se define por la condición:

$$x_iRx_j \Leftrightarrow \neg(x_jPx_i)$$

La preferencia débil así definida resulta reflexiva y completa. Por tanto, se tiene:

$$x_iIx_j \Leftrightarrow x_iRx_j, x_jRx_i$$

$$x_iPx_j \Rightarrow x_iRx_j$$

$$x_iRx_j \Leftrightarrow x_iPx_j \text{ o bien } x_iIx_j$$

A partir de aquí, se desarrollará el trabajo mencionando solo la preferencia P y la indiferencia asociada I, sin hacer más alusión a la preferencia débil R. Sin bien es cierto que no se utilizará la variante débil, es útil conocerla debido a que parte de la literatura matemática sobre el tema está sustentada bajo esta relación.

2.4. Preferencia racional

Parece razonable señalar que si un agente económico prefiere x_i a x_j, y a su vez prefiere x_j a x_k, el agente preferirá x_i a x_k. Esta propiedad, como se ha definido anteriormente, recibe el nombre de transitividad.

Definición 2.12. Se denominará *preferencia racional* en un conjunto X a una relación binaria P que sea asimétrica y transitiva.

1. Asimétrica: $\forall x_i, x_j \in X : x_iPx_j \rightarrow \neg(x_jPx_i)$ Si x_i es preferido a x_j, x_j no es preferido a x_i.

2. Transitiva: $\forall x_i, x_j, x_k \in X : x_i P x_j, x_j P x_k \rightarrow x_i P x_k$.

Ejemplo 2.13. Se vuelve al ejemplo de la altura dentro de los estudiantes de una clase. Se sabe que «Susana es más alta que Marta» y que «Marta es más alta que Laura». Dado que "ser más alto que" es una relación transitiva, se puede deducir que Susana es más alta que Laura.

Observación 2.14. Aunque la relación P sea transitiva, la indiferencia I asociada puede no serlo. En el apartado 2.5 se señalan varios ejemplos en los que la relación de indiferencia no es transitiva.

2.5. Intransitividad de la indiferencia

La intransitividad de la indiferencia puede venir dada por la dificultad que tiene la mente humana en ocasiones de distinguir entre dos alternativas cuando la diferencia entre ellas no es de una magnitud lo suficientemente grande (Amstrong, 1950)

Para comprender bien la intransitividad de la indiferencia, se exponen varios ejemplos en los que se puede encontrar un agente:

1. Se sabe que un individuo tiene aversión al dulce y por ello le gusta el café sin azúcar. Probablemente sea indiferente entre una taza de café sin azúcar y una taza de café con un grano de azúcar ya que no será capaz de percibir la diferencia entre ambos cafés. Del mismo modo, será indiferente a una taza de café con x granos de azúcar y otra con $x + 1$ granos. Sin embargo, se puede decir claramente que el agente prefiere una taza de café sin nada de azúcar a una con 1000 granos de azúcar (Fishburn, 1970).

2. Se sabe que un agente económico desea comprarse un coche y es indiferente entre un Volkswagen Polo de 10000 € y un Seat Ibiza de 11000 € . Si el Volkswagen Polo aumenta su precio hasta los 10030 €, el consumidor se muestra indiferente entre el Polo de 10030 € y el Seat Ibiza de 11000 €. Si la indiferencia fuese transitiva, el Polo de 10000 € sería indiferente al polo de 10030 €, pero de manera clara esto no sudece así, sino que el Polo de 10000 € es preferido al Polo de 10030 €.

3. Debido a un fuerte dolor de muelas, un paciente acude al médico. Para paliar el dolor, el médico le ofrece tres alternativas y asegura que le van a hacer el mismo efecto: o bien se toma una pastilla de Ibuprofeno de 600 gramos, o bien se toma una pastilla de Nolotil de 575 gramos o bien le ofrece una ampolla de Nolotil cuyo contenido líquido es de 0'4 g/ml. El paciente se muestra indiferente entre el Ibuprofeno de 600 gramos y la pastilla de Nolotil de 575 gr porque piensa

que van a tardar lo mismo en hacerle efecto. También se muestra indiferente entre ambos compuestos de Nolotil debido a que este medicamento otras veces le ha quitado el dolor de muelas. Sin embargo, entre el Nolotil de 0'4 g/ml y el ibuprofeno se queda con el primero debido a que piensa que le va a sentar mejor al estómago.

Estos tres ejemplos son ilustrativos de situaciones en las que existe una relación de indiferencia reflexiva pero no transitiva. En el primer caso, el agente no es capaz de apreciar la diferencia entre dos alternativas hasta que supere cierto umbral de percepción. En el segundo caso, el uso de un criterio combinado coche-precio, hace que el agente llegue a una intransitividad. Lo mismo sucede en el tercer caso, la diversidad de criterios utilizados para elegir entre pares de alternativas lleva a intransitividades en la indiferencia.

2.6. Algunos tipos especiales de preferencia

Tanto en el análisis microeconómico como en la teoría de la decisión se establecen como hipótesis diversos grados de racionalidad en los agentes económicos. Los individuos no toman siempre sus decisiones bajo el mismo nivel de coherencia, es decir, su racionalidad sufre variaciones.

Estas diferencias en el nivel de coherencia pueden ser de diversa naturaleza, por ejemplo, los agentes pueden verse influidos por la existencia de un número de alternativas superior al que son capaces de procesar o pueden encontrarse con dificultades a la hora de diferenciar entre opciones que se encuentran bajo un mismo umbral de percepción.

Matemáticamente, los grados de racionalidad de esta aparente escala difieren entre sí en función de las propiedades asociadas a las relaciones de preferencia e indiferencia.

Como se ha establecido anteriormente, al hablar de la relación de preferencia P se sobreentiende que se trata de una preferencia racional, es decir, una relación P que es asimétrica y transitiva.

A partir de las propiedades de la relación de indiferencia I, aparecen asociados diversos tipos de preferencias. En concreto se estudian el orden total, el orden débil, el semiorden y el orden intervalo.

2.6.1. Preferencias con indiferencia transitiva

El tipo de preferencia más frecuente en la literatura económica es el orden débil. Este supone como transitivas tanto la relación de preferencia como la de indiferencia.

Definición 2.15. Un *orden débil* en un conjunto X es una relación de preferencia P cuya relación de indiferencia I asociada es transitiva.

La indiferencia I resulta ser por tanto una relación de equivalencia, esto es, se trata de una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Propiedad: En todo orden débil se verifica lo siguiente:

$$xPyIz \rightarrow xPz$$

$$xIyPz \rightarrow xPz$$

Un ejemplo de orden débil presente en la literatura es la segregación entre varias alternativas en función del precio. En ese caso, dadas dos alternativas x e y, el agente preferirá x a y (xPy) si x es más barato que y y del mismo modo, preferirá de manera estricta y a x (yPx) en caso de que el precio de y sea inferior al de x. Además, serán indiferentes aquellas alternativas del conjunto de oportunidades que tengan el mismo precio, por lo que x será indiferente a y (xIy) cuando el precio de x sea igual al precio de y.

Estos precios pueden ser representados por puntos en una recta mediante una función de utilidad de manera que un individuo preferirá la alternativa x a la y cuando el correspondiente punto $p(x)$ esté más a la izquierda que $p(y)$ (Varian, 1993)

Siguiendo con el ejemplo de los vehículos, entre el Volkswagen Polo de 10000 € y el Seat Ibiza de 11000 €, el agente económico preferirá el automóvil de menor precio, es decir, el Volkswagen Polo será preferido frente al Seat Ibiza (Polo$P$Ibiza). Situando a ambos en la recta real, el precio del Volkswagen Polo se encontrará a la izquierda del precio del Seat Ibiza por tanto la utilidad del Volkswagen Polo será superior a la del Seat Ibiza.

$$p(\text{Polo}) < p(\text{Ibiza}) \text{ por tanto } u(\text{Polo}) > u(\text{Ibiza})$$

Un caso particular que debe destacarse dentro del orden débil es aquel en el que dos elementos distintos nunca son indiferentes. La indiferencia se mantendrá solo en el caso de que ambos elementos sean iguales. En otras palabras, la relación I es simplemente la relación de igualdad. Cuando esto se cumpla, la relación de preferencia se denominará *orden total* o cadena.

2.6.2. *Preferencias con indiferencia no transitiva*

Existen otros casos en los que puede que la indiferencia no sea transitiva: los órdenes intervalo y los semiórdenes.

Definición 2.16. Un *orden intervalo* en un conjunto X es una relación de preferencia P que, $\forall x, y, z, t \in X$, cumple la condición:

$$xPy, yIz, zPt \Rightarrow xPt$$

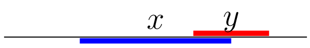
Un ejemplo característico que justifica este tipo de ordenación está dado por una comparación de intervalos de la recta real como la siguiente:

Dados dos intervalos $x = [x_0, x_1]$ e $y = [y_0, y_1]$, se tiene xPy cuando y sólo cuando el intervalo x está situado completamente a la izquierda del intervalo y. Por tanto,

$$xPy \Leftrightarrow x_1 < y_0$$

Dos intervalos resultan indiferentes cuando se cortan, es decir, cuando su intersección es no vacía.

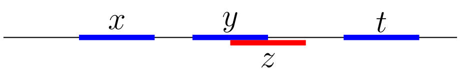
$$xIy \Leftrightarrow \neg(xPy), \neg(yPx) \Leftrightarrow y_0 \leq x_1, x_0 \leq y_1$$



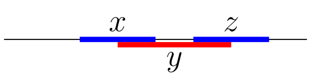
Esta relación P, además de asimétrica y transitiva, satisface la condición que define a los órdenes intervalos:

$$xPy, yIz, zPt \Rightarrow xPt$$

. En efecto: $x_1 < y_0 \leq z_0 \leq z_1 < t_0 \Rightarrow x_1 < t_0$



Por otra parte, la relación de indiferencia asociada no es transitiva. Para los intervalos x, y, z del siguiente gráfico, es xIy e yIz, pero xPz:



Para comprender de una manera más precisa el caso del orden intervalo, se regresa al ejemplo anterior de los vehículos.

Debido a que existe cierta capacidad de negociación por parte del agente a la hora de adquirir un coche, se supone que se desconoce el precio exacto de ambos vehículos pero sí se conoce la horquilla de precios en la que se situará el precio final de cada uno.

En ese caso y siguiendo el criterio de precios, se adquirirá el coche más asequible para el comprador. A partir de esta situación, pueden suceder dos casos: En el primer caso se sabe que precio del Volkswagen Polo oscila entre los 8000 € y los 10000 € y que la horquilla de precios del Seat Ibiza va de los 11000 € a los 13000 €. En tal situación, el intervalo de precios del Volkswagen Polo se encuentra a la izquierda del que corresponde al Seat Ibiza, por lo que el comprador podrá determinar con total claridad que prefiere el Polo frente al Ibiza (Polo P Ibiza)

En el segundo caso se sabe que el Volkswagen Polo oscila entre los 8000 € y los 10000 € y que Seat Ibiza se encuentra entre los 9000 € y los 13000 €. En este supuesto, ambos intervalos de precios se superponen, por tanto, el comprador se mostrará indiferente entre ambos vehículos (Polo I Ibiza)

Manteniendo como cierto el segundo supuesto se introduce entre las opciones de compra un Opel Corsa, cuyo precio oscila entre los 12000 € y 15000 €. Ahora, se observa que el Volkswagen Polo será claramente preferido al Opel Corsa (Polo P Corsa) debido a que el intervalo de precios del primero se encuentra claramente a la izquierda de los posibles precios que puede tomar el segundo vehículo. Sin embargo, el Seat Ibiza, cuya horquilla de precios oscila entre los 9000 € y los 13000 €, es indiferente a los otros dos modelos (Polo I Ibiza, Corsa I Ibiza) Esto se debe a que la indiferencia no es una relación transitiva.

Definición 2.17. Un *semiorden* en un conjunto X es un orden intervalo P que, para todo $x, y, z, t \in X$ cumple la condición:

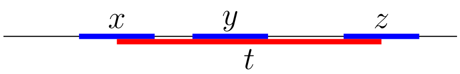
$$xPy, yPz, zIt \Rightarrow xPt$$

Se justifica este nuevo tipo de ordenación mediante la comparación de intervalos: Que xPy implica que el extremo superior de x es inferior al extremo inferior de y, es decir, que $x_1 < y_0$. De manera análoga, que yPz implica que $y_1 < z_0$. Además, que zIt lleva a que lo intervalos z y t intersequen por lo que $t_0 \leq z_1$ y $z_0 \leq t_1$. Uniendo estas premisas se obtiene que $x_1 < y_0 \leq y_1 < z_0 \leq t_0 \leq z_1$. Si se simplifica la expresión se tiene que $x_1 < z_0 \leq t_0 \leq z_1$, es decir, que xPz y a su vez que zIt. Por tanto, $x_1 \leq t_0$, lo que implica que x es estrictamente preferido a t (xPt) y que se cumple la condición de semiorden.

Esta condición es equivalente a $xIy, yPz, zPt \Rightarrow xPt$

En este caso, la indiferencia se encuentra entre x e y, por lo que $y_0 \leq x_1$ y $x_0 \leq y_1$. Como y es estrictamente preferido a z sucede que $y_1 < z_0$ y de manera análoga, como zPt, $z_1 < t_0$. Se observa entonces que y, z y t son intervalos que no intersecan entre ellos. Uniendo las premisas se obtiene que $y_0 \leq x_1 \leq y_1 < z_0 \leq z_1 < t_0$. Simplificando la expresión se llega a que $x_1 < z_0 < t_0$, es decir, que x es también preferido a z. Como z es preferido a t se obtiene que $x_1 < t_0$ y por tanto xPt. Luego, de manera equivalente al caso anterior, se cumple que x es preferido a t satisfaciéndose la condición de semiorden.

No todo orden intervalo es un semiorden. Así ocurre con el siguiente gráfico, en el que xPy, yPz, zIt, pero resulta que xIt:



Este comportamiento se evita si se impone que entre los intervalos considerados nunca ocurra que uno de ellos quede estrictamente contenido en otro [1]. Esto es, exigiendo para dos intervalos cualesquiera x e y:

$$x_0 \leq y_0 \Leftrightarrow x_1 \leq y_1$$

La relación P restringida a este subconjunto de intervalos sin contenidos estrictos, es un semiorden:

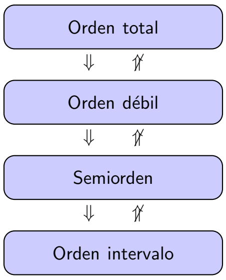
$$xPy, yPz, zIt \Rightarrow x_1 < y_0 \leq y_1 < z_0 \leq t_1$$

De aquí que $y_1 < t_1$, y por tanto $y_0 \leq t_0$. Se tiene entonces:

$$x_1 < y_0 \leq t_0 \Rightarrow x_1 < t_0 \Rightarrow xPt$$

Se ve entonces que existe una relación jerárquica entre las relaciones de preferencia definidas: todo orden total es un orden débil, todo orden débil es un semiorden y todo semiorden es un orden intervalo.

[1]En particular, esto queda garantizado cuando todos los intervalos son de la misma longitud.



2.7. Matriz asociada a una relación binaria

Una vez definidos los tipos de relaciones de preferencia sobre un conjunto finito de opciones, es posible desarrollar una caracterización matemática que permita transcribir las relaciones de preferencia P e indiferencia I del agente al lenguaje matricial (Kaufmann, 1976), dando lugar a dos nuevas matrices: la matriz de preferencia P y la matriz de indiferencia Q [2].

Esto posibilitará la realización de las operaciones necesarias para determinar las propiedades que satisface la relación de preferencia.

Definición 2.18. Dada una relación binaria A definida en un conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, se asocia a la relación una matriz cuadrada de orden $n \times n$ que se denotará igualmente A, cuyo elemento genérico a_{ij}, situado en la fila i, columna j, es:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } x_i A x_j \\ 0, \text{ si } \neg(x_i A x_j) \end{cases}$$

Estas matrices, cuyos elementos son exclusivamente 0 y 1, se llaman matrices booleanas (Boole, 1979)

Teniendo en cuenta el isomorfismo existente entre las relaciones binarias y las matrices booleanas, serán usadas como base para la clasificación de las preferencias, ya que las propiedades que las caracterizan se traducirán en operaciones y comparaciones entre matrices (García Lapresta, 1998)

2.7.1. Producto de matrices

En particular, la operación utilizada en este trabajo será la multiplicación habitual de matrices usando el álgebra de Boole (1979) para sumar y multiplicar los elementos involucrados de acuerdo con las siguientes tablas:

[2] Se denomina Q en vez de I a la matriz de indiferencia para evitar confusiones con la matriz identidad, que suele denotarse también con la letra I

+	0	1
0	0	1
1	1	1

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Las propiedades que respeta esta operación serán las del producto habitual de matrices, de manera que se cumple la propiedad asociativa[3] y la distributiva (Lipschutz, 1970) [4]. Por su parte, el producto de dos matrices es generalmente no conmutativo como se muestra a continuación:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y sea } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba entonces que $A \times B \neq B \times A$

2.7.2. Comparaciones de matrices

Se realizarán comparaciones entre matrices para precisar si se cumple o no una determinada propiedad. En lenguaje matemático esto se traduce a que dadas dos matrices A y B del mismo orden se escribe:

$$A \subseteq B$$

para indicar que todos los elementos a_{ij} de la matriz A son menores o iguales que los correspondientes valores b_{ij} de la matriz B, es decir, $\forall\ i, j \in 1, 2, \ldots n$:

$$a_{ij} \leq b_{ij}.$$

[3] Ley asociativa para el producto de matrices: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (Lipschutz, 1970)

[4] Ley distributiva para el producto de matrices: $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$, $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$ (Lipschutz, 1970)

Al tratarse de matrices booleanas cuyos elementos pueden tomar solamente el valor de 0 y 1, para que se satisfaga esta condición es necesario y suficiente que:

$$a_{ij} = 1 \Rightarrow b_{ij} = 1$$

En términos de las relaciones binarias A y B definidas sobre un conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, es necesario que siempre que dos elementos estén relacionados según A, lo estén también según B:

$$x_i A x_j \Rightarrow x_i B x_j$$

En ese caso, la relación binaria A será un subconjunto de la relación binaria B, lo que justifica la notación $A \subseteq B$ empleada para sus matrices asociadas.

2.8. Comprobación de las propiedades

Una de las propiedades que se le ha impuesto a la relación de preferencia P para denominarse relación de preferencia racional es la transitividad.

Proposición 2.19. Sean A, B y T relaciones binarias definidas en un conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\forall x_i, x_j, x_k \in X : x_i A x_j, x_j B x_k \Rightarrow x_i T x_k$
2. $A \times B \subseteq T$

Demostración. Se comprueba que (1) implica (2). Se denomina W al producto de matrices $W = A \times B$; se quiere demostrar que $W \subseteq T$, es decir, que si $w_{ij} = 1$, entonces t_{ij} también es 1. En efecto, el elemento w_{ij} está dado por:

$$w_{ij} = \sum (a_{ik} \times b_{kj}).$$

Si esta suma vale 1 es porque al menos uno de los sumandos de $a_{ik} \times b_{kj}$ vale 1, es decir, para algún k se verifica a la vez que $a_{ik} = 1$ y que $b_{kj} = 1$. En términos de relaciones binarias, esto significa que existen ciertos elementos x_i, x_k y x_j que satisfacen $x_i A x_k$ y $x_k B x_j$. Por lo tanto, de acuerdo con (1) se verificará que $x_i T x_j$, de modo que $t_i j = 1$ como se quería probar.

Se comprueba el recíproco: (2) implica (1). Se toman tres elementos del conjunto X: x_i, x_j, x_k. Se quiere ver que si $x_i A x_k$ y $x_k B x_j$, entonces $x_i T x_j$. En efecto, al ser $x_i A x_k$ y $x_k B x_j$, se tiene $a_{ik} = 1$ y $b_{kj} = 1$, por lo que el al realizar el producto $W = A \times B$, resulta $w_{ij} = 1$. Como por hipótesis $W = A \times B \subseteq T$, será también $t_{ij} = 1$, es decir, $x_i T x_j$, como se quería probar. $\square$

A partir de la propiedad anterior se puede comprobar, por ejemplo, si una relación binaria A definida en un conjunto finito es transitiva, es decir,

$$x_iAx_j,\ x_jAx_k \Rightarrow x_iAx_k.$$

Para ello se debe realizar el producto de la matriz que denota la relación binaria A por sí misma y se observa si el resultado del producto es menor o igual que A

$$A \times A = A^2 \subseteq A$$

En caso de que A^2 esté contenido en A, la relación binaria será transitiva. En caso de que A^2 no esté contenido en A, la relación binaria no será transitiva.

Ejemplo 2.20. Se considera el en el conjunto finito $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ la relación P de orden usual $>$:

$$x_iPx_j \Leftrightarrow x_i > x_j$$

Se busca conocer si la relación es o no asimétrica.

La matriz P asociada a la relación $>$ definida en el conjunto N es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el cálculo de P^2

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar, $P^2 \subseteq P$, de modo que $>$ es una relación transitiva.

Ejemplo 2.21. Se considera en el conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ la relación R dada por x_1Rx_2, x_2Rx_3, x_3Rx_1, sin que haya otros pares relacionados.

La matriz R asociada a la relación es:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el cálculo de R^2

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar, no se cumple que $\forall i, j \in N \ r_{ij}^2 \leq r_{ij}$ por lo que no es cierto que $R^2 \subseteq R$.

Con ello se concluye que la relación R en el conjunto N no es transitiva.

Es posible utilizar el lenguaje matricial para verificar el resto de propiedades anteriormente explicadas.

Así, se sabe que una preferencia P asimétrica satisface la condición de orden intervalo si

$$xPyIzPt \Rightarrow xPt$$

y la relación matricial que debe cumplirse es

$$PQP \subseteq P$$

De la misma forma, para considerar si un orden intervalo es también un semiorden, debe satisfacer además la propiedad

$$xPyPzIt \Rightarrow xPz$$

que puede estudiarse a partir de su relación matricial equivalente

$$PPQ \subseteq P$$

Para conocer si una relación de preferencia es un orden débil debe cumplirse que su relación de indiferencia I sea transitiva. Además, todo orden débil cumple la propiedad de

$xPyIz \rightarrow xPz$ que en lenguale matricial es $PQ \subseteq P$

$xIyPz \rightarrow xPz$ que en lenguaje matricial es $QP \subseteq P$

Ejemplo 2.22. Se considera de nuevo la relación $>$ en el conjunto N y se comprueba si se trata de un un orden intervalo, un semiorden o un orden débil.

En primer lugar, se define la relación de indiferencia que será: $xIy \Rightarrow x = y$

La matriz de indiferencia asociada será

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cumplir la condición de orden débil, la relación de indiferencia tiene que ser transitiva por lo que tiene que cumplir que

$$QQ \subseteq Q$$

$$Q \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $QQ \subseteq Q$, la relación de indiferencia es transitiva y por tanto se tratará de un orden débil.

Además, se observa que se cumple la propiedad de orden débil:

$$PQ \subseteq P$$

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego la relación $>$ definida en el conjunto N es una relación de orden débil y por tanto, también cumplirá las propiedades de orden intervalo y de semiorden.

Ejemplo 2.23. Se considera el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación P dada por

$$x_i P x_j \Leftrightarrow x_i > x_j + 1$$

cuya indiferencia asociada es $x_i I x_j \Leftrightarrow |x_i - x_j| \leq 1$

Se prueba si se trata de un orden débil, de un semiorden o de un orden intervalo.

La matriz P será la siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz de indiferencia asociada será

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cumplir la condición de orden débil, se debe verificar que la indiferencia sea transitiva. Para ello, $QQ \subseteq Q$

$$Q \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como existen valores para los cuales $Q \times Q$ toma el valor de 1 mientras que Q es 0, como la posición $(5, 3)$, no se satisface la condición de orden débil debido a que la relación de indiferencia no es transitiva. Tras haber probado la intransitividad de la indiferencia, se estudia si la relación se trata de un semiorden.

Para satisfacer la condición de semiorden, se debe cumplir que

$$PPQ \subseteq P$$

$$P \times PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, se cumple que $\forall\{i, j\}$ el valor del producto es menor o igual que el de la matriz P. Por tanto la relación P satisface la condición de semiorden.

Al tratarse de un semiorden, también satisfará la condición de orden intervalo.

3. APLICACIÓN

Tras el desarrollo teórico de los tipos de preferencia y de su representación matricial se presenta una aplicación práctica de lo explicado.

Para conseguir el objetivo de determinar el grado de coherencia con el que toman las decisiones los agentes económicos, se realiza una encuesta a diez estudiantes de último curso del Grado de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Pública de Navarra.

La encuesta presenta una elección entre estudios de Máster de diversa temática que dotan de unas competencias específicas para ámbitos diferentes. En ella los estudiantes muestran sus preferencias sobre los diversos másteres incluidos en el documento. Debido al momento del curso en el que se encuentran los participantes, este resulta para ellos un tema de interés sobre el cual están informados, debido a que determinará su futuro el próximo año.

En la encuesta, se presenta una lista de instrucciones que señala cómo se deben rellenar las dos tablas cuyo modelo se encuentra en el ANEXO II. Además, se le indica al estudiante que ambas tablas se deben responder siguiendo un orden y centrándose en la información de la que se dispone en cada una de ellas.

El método de elección a lo largo de toda la encuesta es el mismo: se le pide al estudiante que, para cada par de másteres, indique si prefiere uno u otro, o por el contrario, señale si ambos le resultan indiferentes.

En la primera tabla, se les aporta el nombre de los másteres en ausencia de cualquier otro tipo de información adicional. Con ello se pretende que los estudiantes muestren sus preferencias sobre opciones de las que tienen una percepción vaga sin que se vean influidos por otras variables como el precio del máster, su localización geográfica o la universidad en la que se imparte. Ante este escenario de escasa información es probable la aparición de múltiples criterios de selección que pueden dar lugar a la aparición de incoherencias en las respuestas.

En la segunda tabla se le pide al estudiante que realice las mismas comparaciones pero esta vez se le indica el precio del máster y la universidad en la que se imparte. Con ello, el estudiante tiene una información más precisa sobre el tipo de estudios ante los que se encuentra y posiblemente cambiará su criterio de selección. Se prevé que una mayor información permitirá establecer un criterio más sólido que dote de una mayor coherencia a las elecciones que se realicen.

3.1. Contenido de la encuesta

La lista de másteres incluida en la encuesta es la siguiente:

- Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria. Se imparte en la Universidad Pública de Navarra (UPNA). Precio: 1360 €
- Máster in Economics and Finance. Se imparte en el Centro de Estudios Monetarios y Financieros (CEMFI) dependiente del Banco de España. Precio: 6600 €
- Máster Universitario en Desarrollo y Crecimiento Económico. Se imparte en la Universidad Carlos III de Madrid. Precio 7800 €
- Máster oficial Interuniversitario en Banca y Finanzas Cuantitativas. Se imparte de manera conjunta en la Universidad del País Vasco- Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV-EHU) y la Universidad Complutense de Madrid (UCM). Precio: 1765 €.
- Máster Universitario en Política Económica y Economía Pública. Se imparte en la Universidad de Valencia. Precio: 2772 €
- *Master Degree in Data Science*. Se imparte en la *Barcelona Graduate School of Economics* (GSE), centro dependiente de la Universitat Pompeu Fabra (UPF) y la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). Precio: 18000 €
- Máster Universitario en Economía. Se imparte en la Universidad de Zaragoza (Unizar). Precio: 2200 €
- Máster Universitario en Dirección de Empresas. Se imparte en la Universidad Pública de Navarra (UPNA). Precio: 1700 €

Todos los másteres que aparecen en la encuesta son másteres oficiales que se imparten en universidades públicas o instituciones privadas dentro de la península. La variabilidad en los precios de los másteres se debe a las diferencias en los precios públicos existentes en las diferentes comunidades autónomas. Los centros privados, como el Centro de Estudios Monetarios y Financieros o la *Barcelona Graduate School of Economics* tienen autonomía en la fijación de precios, por lo que son superiores a los de la mayor parte de másteres impartidos en universidades públicas.

La horquilla de precios de los másteres elegidos oscila entre los 1360 € que cuesta el Máster Universitario en Formación de Profesorado en la Universidad Pública de Navarra, hasta los 18000 € del Master Degree in Data Science de la Barcelona Graduate School of Economics.

Además, entre las opciones hay másteres que se imparten de manera íntegra en inglés en cuyo caso la nomenclatura aparece en este idioma. En concreto, los impartidos en inglés son el Master in Economics and Finance y el Master Degree in Data Science. El resto de ellos, aunque pueden presentar alguna asignatura en este idioma con carácter optativo, son en castellano.

La existencia de opciones tan diversas se debe a la amplia variedad de salidas profesionales que tiene un graduado en Economía tras la finalización de sus estudios. Entre estas salidas se encuentran la docencia o la investigación en el ámbito de la economía, el asesoramiento fiscal, la consultoría económica, la dirección o gerencia de empresas, la gestión de patrimonios, el comercio exterior o la ocupación de puestos de técnico o gestor en las administraciones públicas y en organismos internacionales.

Las expectativas sobre el futuro serán importantes porque en función del tipo de salida profesional por la que quiera optar es estudiante, preferirá uno u otro máster, siendo alguno de ellos habilitante como el Máster Universitario en Educación Secundaria, requisito mínimo para impartir clase en los centros de Secundaria Obligatoria y Bachiller, o el Máster Universitario en Economía, un máster de iniciación a la investigación que tiene como fin que el estudiante complete su formación previa en Economía y se especialice en una determinada área de investigación como paso previo a las enseñanzas de Doctorado.

En ambas tablas, el número de comparaciones realizadas entre parejas de másteres distintos es el mismo: $C(8, 2) = 28$ [5] comparaciones.

3.2. Análisis matricial e informático

Una vez realizada la encuesta, es necesario transcribir los datos al lenguaje matricial para que posteriormente puedan ser insertados en un programa matemático que dé una respuesta sobre el nivel de coherencia de los participantes.

A continuación, se explica el tratamiento de los datos y las operaciones que realiza el programa para la obtención de resultados. El procedimiento es sencillo y presenta similitudes en los cálculos con lo ya explicado, si bien el programa se apoya en términos lógicos que pueden ser de difícil comprensión.

El programa informático utilizado que se presenta en el ANEXO I ha sido elaborado con Octave, un programa para realizar cálculos orientado al análisis numérico.

[5] C(8,2)son combinaciones de 8 elementos tomadas de 2 en dos. En contreto, 8 son los másteres entre los que elegir y 2 son el número de másteres entre los que elige el estudiante, lo cual da lugar a 28 parejas

En él, a partir de la matriz booleana asociada a las preferencias de los estudiantes encuestados, se detecta si la relación de preferencia cumple las propiedades de asimetría y transitividad, además de señalar si la relación de preferencia se trata de un orden intervalo, un semiorden, un orden débil o un orden total.

3.2.1. Transcripción matricial de la relación de preferencia y su indiferencia asociada

Una vez llevada a cabo la recopilación de los datos, es necesario transcribir las respuestas al lenguaje del álgebra de Boole. Con este fin, se crea la matriz P que representa las preferencias del agente al que se le realiza la encuesta.

Para construir la matriz de preferencias de cada estudiante, se pone un 1 en cada celda ij en el caso de que el máster i sea preferido al máster j (x_iPx_j) y 0 en el caso contrario, es decir, o bien cuando el máster j es preferido al máster i o bien cuando ambos másteres le resultan indiferentes. Esta operación se repite para cada uno de los 28 pares sobre los que ha sido preguntado el estudiante.

Dado que se ha considerado que la relación de preferencia es asimétrica y por tanto irreflexiva, ningún máster será preferido a sí mismo, por lo que cuando $i = j$, el valor apuntado automáticamente será 0.

Del mismo modo, gracias a la asimetría de la relación de preferencia, si x_iPx_j y por tanto hay un 1 en la casilla ij, en la casilla ji tiene que haber necesariamente un 0, debido a que no es coherente con la noción de preferir que x_iPx_j y a su vez que x_jPx_i.

Una matriz con una gran cantidad de celdas con valor de 1 simboliza que el estudiante se decanta por uno de los dos másteres en la mayor parte de los casos, declarándose indiferente en un número muy reducido. En cambio, la ausencia de unos en las filas de la matriz implica que el número de másteres a los cuales el estudiante es indiferente es alto.

En primer lugar, el programa calcula la matriz de indiferencia asociada a P, que recibirá el nombre de Q. Para ello, calcula la matriz traspuesta de P, a la que se denomina P'.

Como se ha señalado anteriormente, si un elemento x_i es preferido a x_j (x_iPx_j) en la matriz P aparecerá un 1 en la posición ij y un 0 en caso contrario. Al trasponer P, para x_iPx_j en la posición ji de P' se encontrará un 0 y en la ij un 1.

A continuación, el programa localiza aquellos elementos que toman el valor de 0 tanto en P como en P', que serán aquellos que cumplen la relación de indiferencia.

Se convierte la matriz de manera que los puntos indiferentes pasan a tomar un valor de 1 dejando con valor de 0 a todos los demás.

A partir de las matrices de preferencia P y de indiferencia Q el programa evalúa las propiedades de ambas matrices y las clasifica dando lugar a un nivel de coherencia.

3.2.2. Verificación de los tipos de preferencia

Una vez se poseen las matrices de preferencia e indiferencia, se verifican las siguientes propiedades:

En primer lugar, el programa verifica si la preferencia P es asimétrica. Para ello, utiliza un operador para trasponer la matriz y compara uno a uno los elementos de P y P'. Si los elementos de ambas matrices coinciden, la matriz será simétrica [6]. En caso contrario, P será una relación de preferencia asimétrica.

Seguidamente, prueba si P es una relación binaria transitiva. La operación realizada es multiplicar a la matriz P por sí misma y comprueba si todos los elementos de $P \times P$ son menores o iguales que los de P, es decir, comprueba si se cumple o no $P \times P \leq P$. Si la desigualdad se cumple, la relación de preferencia será transitiva.

Tras probar la asimetría y la transitividad de la relación de preferencia, se verifican los tipos de preferencia de menor a mayor exigencia. Se comienza por aquellos niveles de coherencia que pueden presentar intransitividades en la relación de indiferencia, es decir, por los órdenes intervalo, seguido de los semiórdenes, y se termina con aquellas preferencias cuya relación de indiferencia asociada es transitiva: los órdenes débiles y los órdenes totales.

La relación de preferencia se considera un *orden intervalo* si es asimétrica y además cumple que $PQP \leq P$. Con ello el programa verifica la condición de orden intervalo: $xPy, yIz, zPt \Rightarrow xPz$

Si la preferencia es un orden intervalo, prueba si es también un semiorden. Se considera que la relación de preferencia es un *semiorden* si es a su vez un orden intervalo y cumple que $PPQ \leq P$, es decir, verifica la condición de semiorden $xPy, yPz, zIt \Rightarrow xPt$.

Una vez se considera que la preferencia es un semiorden, para probar el siguiente nivel de exigencia es necesario verificar la transitividad de la indiferencia Q. Para ello el programa realiza la misma operación que ha llevado a cabo con la preferencia estricta $Q \times Q \leq Q$. En caso de que la indiferencia sea transitiva se tratará de un

[6] Si una matriz M es simétrica, M y su traspuesta M' son iguales

orden débil.

En último lugar, para ver si el orden débil es también un *orden total*, se comprueba si la matriz de indiferencia Q es la matriz identidad. Con ello se comprueba que los elementos distintos no son indiferentes.

Para finalizar, aparece en pantalla el nivel más alto de coherencia para cada estudiante encuestado.

3.3. Resultados de la encuesta

Tras la evaluación de las 20 encuestas realizadas a los 10 estudiantes de 4 curso del grado en Economía se obtienen los siguientes resultados:

	Encuesta 1	Encuesta 2
Estudiante 1	Orden total	Semiorden
Estudiante 2	Semiorden	Orden Débil
Estudiante 3	Orden intervalo	Orden débil
Estudiante 4	Orden débil	Orden total
Estudiante 5	Orden débil	Orden débil
Estudiante 6	Orden débil	Orden total
Estudiante 7	Semiorden	Orden débil
Estudiante 8	Semiorden	P no transitiva
Estudiante 9	Semiorden	Orden débil
Estudiante 10	Orden débil	Orden débil

Cuadro 1: Resultados de las encuestas

En términos globales, un 90 % (18 encuestas) de las encuestas tienen al menos la consideración de semiorden, un 75 % (13 encuestas) cumplen la relación de orden débil y un 15 % (3 encuestas) la de orden total.

Estos resultados no se distribuyen de manera uniforme entre las dos encuestas, sino que se detecta un mayor grado de coherencia en las respuestas de la segunda tabla, que es aquella que posee una mayor información sobre los másteres.

En cuanto a la primera encuesta, que es aquella en la que solo aparecen los nombres de los másteres, de los 10 estudiantes, la relación de preferencia de 1 de ellos se define como un orden total, la de 4 de ellos como un orden débil, la de otros 4 encuestados como un semiorden y tan solo un estudiante llega al nivel de orden intervalo. El disponer tan solo de los nombres de los másteres ha podido causar entre los encuestados dificultades para decidirse por un único criterio de selección lo que ha dado lugar a que en la mitad de las encuestas los niveles de coherencia no superen el semiorden, llevando a que la relación de indiferencia I asociada a P no sea transitiva.

En la segunda encuesta, que es aquella en la que se incluye tanto el precio del máster como el nombre de la universidad en la que se imparte, 2 estudiantes han obtenido un nivel de relación de preferencia que corresponde al orden total, 6 un orden débil y 1 un semiorden. Además, hay una encuesta cuyo resultado muestra que la relación de preferencia es asimétrica pero no transitiva. Dado que este nivel de coherencia es inferior al que se supone básico en una relación de preferencia racional, se supone que ha habido algún problema en su realización. De las 10 respuestas obtenidas, 8 de ellas tienen tanto la relación de preferencia P como la de indiferencia I transitiva.

Como se ha señalado anteriormente, en la primera encuesta, la mitad de los estudiantes han presentado una relación de indiferencia I transitiva, mientras que en la segunda, esta indiferencia transitiva asciende a un 80 % de los encuestados.

Por otra parte, como se observa en la tabla, de los 10 estudiantes, 6 mejoran el nivel de coherencia con el que responden las encuestas al aumentar la información disponible sobre los másteres, 2 se mantienen igual y 2 lo empeoran, siendo uno de los casos el de la encuesta fallida. De los que mejoran su nivel de coherencia, 3 pasan de un semiorden a un orden débil, 2 lo hacen de un orden intervalo a un orden total y uno lo hace de un orden intervalo a un orden débil. En el caso de los estudiantes que mantienen su nivel de coherencia, ambos se encuentran en la categoría de orden débil.

Este análisis permite concluir que entre dos encuestas con las mismas opciones, pero con diferente información disponible sobre ellas, los encuestados son capaces de ser más coherentes cuando disponen de una mayor información debido a que este hecho permite al estudiante establecer un criterio más sólido por el cual ordenar sus preferencias.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha demostrado como las Matemáticas, mediante la teoría de conjuntos, la lógica y el álgebra booleana, han servido de herramienta para modelizar el comportamiento humano, en concreto, el nivel de coherencia de un agente en la elección entre alternativas.

La principal novedad del trabajo es la posible intransitividad en la relación de indiferencia. Esta intransitividad es más frecuente de lo que ha supuesto la Teoría Económica convencional y presenta causas diversas como la combinación o el uso de criterios diferentes en la toma de decisiones o la incapacidad de la mente humana de distinguir entre alternativas que se encuentran bajo un mismo umbral de percepción.

En lo que respecta al carácter matemático, el isomorfismo existente entre relaciones binarias y matrices booleanas permite trascribir al lenguaje matricial las preferencias de un agente con solo dos caracteres, 0 y 1. Esto facilita la comprobación de las propiedades asociadas a una determinada relación de preferencia mediante simples productos de matrices y comparaciones.

Unido a ello, el lenguaje del álgebra de Boole facilita su posterior conversión a un programa informático debido al uso de operadores lógicos, permitiendo de una manera sencilla el contraste empírico de los modelos de coherencia.

En la aplicación práctica, a los estudiantes se les ha hecho una doble encuesta sobre 8 másteres. Cabe destacar que no se les ha pedido una ordenación de los 8 másteres que conformaban la lista sino que se les ha aportado 28 pares de manera que para cada par tenían que determinar si preferían un máster u otro o si se mostraban indiferentes. Con las mismas alternativas y la misma información disponible los estudiantes obtienen ordenaciones que dan lugar a niveles de coherencia completamente diferentes, por tanto, los individuos no eligen de la misma manera. Este uso de criterios múltiples da lugar a relaciones de preferencia con distinto nivel de coherencia, es decir, a ordenaciones diferentes. Esto se ve reflejado en los resultados, en los que se observan desde órdenes intervalo hasta órdenes totales.

Estos mismos resultados muestran niveles de coherencia más altos en aquellas encuestas en las que la información disponible es mayor, con predominancia de órdenes débiles. En el caso en el que solo se aportan los nombres de los másteres, la preferencia más frecuente es la que cumple la condición de semiorden. Estas diferencias pueden deberse a que conforme disminuye la información disponible, los estudiantes diversifican los criterios en los que se basan para elegir entre las dos alternativas.

5. BIBLIOGRAFÍA

Amstrong, W. E (1939) The determinateness of the utility function. *Economics Journal*, 49, 453-467 Amstrong, W. E (1948) Uncertainty and the Utility Function. *Economics Journal*, 58, 1-10

Amstrong, W. E (1950) A Note on the Theory of Consumer's Behavior. *Oxford Economic Papers*, 2. 119-122.

Boole, G (1979) *El análisis matemático de la lógica*. Madrid: Cátedra

Borobia, A, Estrada, B (2015) *Álgebra Lineal y Geometría Vectorial*. Madrid: Sanz y Torres.

Debreu, G. (1973) *Teoría del valor*. Barcelona: Bosch

Delgado, M, Muñoz, M. J (2015) *Lenguaje matemático conjuntos y números* (3ª ed.) Madrid: Sanz y Torres.

Fishburn, P. C. (1970) Intransitive Indifference in Preference Theory: A Survey. *O*perations Research, 18(2), 207-228.

García Lapresta, J. L, Rodriguez, C., Carrascal, U. (1998) Un estudio empírico de la coherencia. *Revista de Economía Aplicada*, 17(4), 53-79

Indurain, E. (1989) Sobre relaciones de preferencia. *Publicaciones del seminario matemático García de Galdeano*, 20(5)

Kaufmann, A. (1976) *Puntos y flechas. Teoría de los grafos*. Barcelona: Marcombo.

Lipschutz, S (1970) *Teoría y problemas de teoría de conjuntos y temas afines*. México: McGraw-Hill.

Luce, R. D. (1956) Semiorders and a Theory of Utility Discrimination. *Econometrica* 24(2) 178-191.

Pirlot, M, Vincke, PH. (1997) *Semiorders. Properties, Representations, Applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Varian, H. R. (1993) *Análisis Microeconómico (3ª ed)* Barcelona: Antoni Bosch

A. ANEXO I: CÓDIGO DEL PROGRAMA MATEMÁTICO UTILIZADO

```
%
%   load() se usa para obtener datos de un archivo
%   Lee el archivo matriz.txt y lo guarda en la variable P

P = load('ejemplo.txt');

%   disp () se usa para mostrar resultados
%   Lo que aparece entre comillas, se muestra tal cual
%   disp(P) muestra la variable P (la matriz de entrada)

disp('P=');
disp(P);

%   Se guarda en una variable x el tamaño (orden) de
%   la matriz P para construir después con ese dato otras
%   matrices del mismo tamaño

x = size(P);

%   ones() genera una matriz con todos los elementos iguales a 1
%   Guardamos en una matriz llamada "unos" una matriz
%   del mismo tamaño que P, con todos los elementos 1

unos=ones(x);

%   zeros() genera una matriz con todos los elementos iguales a 0 (matriz nula)
%   Guardamos en una matriz llamada "ceros" una matriz
%   del mismo tamaño que P, con todos los elementos 0

ceros=zeros(x);

%   eye() genera una matriz identidad
%   Guardamos en una matriz llamada "identidad" la matriz
%   identidad del mismo tamaño que P

identidad=eye(x);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
```

```
%   Cálculo de las matrices auxiliares
%
%   Se usan estos operadores
%   ' (prima) : calcula la traspuesta
%   & : es el operador lógico 'and', parecido al producto booleano
%       Si se opera "a & 1", el resultado es 1 cuando a es
%       distinto de 0, y es  0 cuando a es 0.
%       Se dispone de la matriz "unos" con todos los elementos igales a 1
%       Por tanto, haciendo "M & unos" con una matriz M, se
%       obtiene 1 para los elementos de M distintos de 0,
%       y se obtiene 0 para los elementos de M iguales a 0
%   not ; negacion lógica, convierte los 1 en 0 y los 0 en 1
%   * : producto de matrices
%
% sobra     R   : la preferencia débil asociada a P
% sobra     R   =  not(P');       % disp('R='); disp(R);
% ------------------------------------------------------------
%
%   Cálculo de la matriz Q : la indiferencia asociada a P
%   (mejor no llamarla I, para no confundir con la matriz identidad)
%   Un elemento de Q es 1, cuando tanto en P como en su traspuesta P'
%   hay un 0 (y, por tanto, un 1 en su negación)

Q   =  not(P) & not(P');

%   Se guarda en una matriz llamada PP el producto P*P

PP  = (P*P) & unos;

%   Se guarda en una matriz llamada QQ el producto Q*Q

QQ  = (Q*Q) & unos;

%   Se guarda en una matriz llamada PQ el producto P*Q

PQ  = (P*Q) & unos;

%   Se guarda en una matriz llamada PQP el producto P*Q*P
%   Se puede obtener mediante PQ*P

PQP = (PQ*P) & unos;
```

```
%   Se guarda en una matriz llamada PPQ el producto P*P*Q
%   Se puede obtener mediante P*PQ

PPQ = (P*PQ) & unos;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%   Análisis del tipo de relación que es P
%   Además de los operadores ', and, not, * se usan
%   == : compara dos matrices, elemento a elemento, para chequear si son iguales
%        Devuelve 1 donde los elementos son iguales y 0 donde son distintos
%   <= : lo mismo, para chequear que los elementos de la
%        primera son menores o iguales que los de la segunda,
%        Devuelve 1 donde se cumple y 0 donde no
%   all() : Aplicado dos veces a una matriz, devuelve 1
%           si todos sus elementos son distintos de 0
%           y devuelve 0 en otro caso (hay algún cero)

% asimetrica : variable que se hace verdadera si la relación P
%   es asimatrica, y falsa en caso contrario
%   P es asimétrica si cada 1 de P es un 0 en la traspuesta
%   por tanto, P & P' = (0)

asimetrica = all(all( (P & P') == ceros ));

% transitiva : variable que se hace verdadera si la relación P
%   es transitiva, y falsa en caso contrario
%   P es transitiva si P * P <= P

transitiva = all(all(PP <= P));

% ordenintervalo : P es asimetrica y además PQP <= P

ordenintervalo = asimetrica & all(all(PQP <= P));

% semiorden : P es un orden intervalo y además PPR <= P

semiorden = ordenintervalo & all(all(PPQ <= P));

% ordendebil : P es asimetrica y Q * Q <= Q
```

```
%   (es decir, la indiferencia es es transitiva)

ordendebil = asimetrica & all(all(QQ <= Q));

% ordentotal : P es un orden débil y su indiferencia es
%   la matriz identidad (los elementos distintos no son indiferentes)

ordentotal = ordendebil & all(all(Q == identidad));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   Se muestran los resultados, de menos a más exigencia

if asimetrica
  disp('La matriz P es asimétrica');
else
  disp('La matriz P NO es asimétrica');
endif


if transitiva
  disp('La matriz P es transitiva');
else
  disp('La matriz P NO es transitiva');
endif


if ordenintervalo
  disp('La matriz P es un orden intervalo');
else
  disp('La matriz P NO es orden intervalo');
endif

if semiorden
  disp('La matriz P es un semiorden');
else
  disp('La matriz P NO es semiorden');
endif

if ordendebil
  disp('La matriz P es un orden débil');
else
```

```
  disp('La matriz P NO es un orden débil');
endif


if ordentotal
  disp('La matriz P es un orden total');
else
  disp('La matriz P NO es orden total');
endif
```

B. ANEXO II: ENCUESTAS REALIZADAS Y RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Encuestas realizadas a los estudiantes

A continuación se muestran las encuestas realizadas a los estudiantes.

MÁSTER	X	X	X	MÁSTER
Máster de Profesorado				Máster in Economics and Finance
Máster de Profesorado				Máster en Desarrollo Económico
Máster de Profesorado				Máster en Banca y Finanzas Públicas
Máster de Profesorado				Máster en Economía Pública
Máster de Profesorado				Máster en Big Data
Máster de Profesorado				Máster Universitario en Economía
Máster de Profesorado				Máster en Dirección de Empresas
Máster in Economics and Finance				Máster en Desarrollo Económico
Máster in Economics and Finance				Máster en Banca y Finanzas Públicas
Máster in Economics and Finance				Máster en Economía Pública
Máster in Economics and Finance				Máster en Big Data
Máster in Economics and Finance				Máster Universitario en Economía
Máster in Economics and Finance				Máster en Dirección de Empresas
Máster en Desarrollo Económico				Máster en Banca y Finanzas Públicas
Máster en Desarrollo Económico				Máster en Economía Pública
Máster en Desarrollo Económico				Máster en Big Data
Máster en Desarrollo Económico				Máster Universitario en Economía
Máster en Desarrollo Económico				Máster en Dirección de Empresas
Máster en Banca y Finanzas Públicas				Máster en Economía Pública
Máster en Banca y Finanzas Públicas				Máster en Big Data
Máster en Banca y Finanzas Públicas				Máster Universitario en Economía
Máster en Banca y Finanzas Públicas				Máster en Dirección de Empresas
Máster en Economía Pública				Máster en Big Data
Máster en Economía Pública				Máster Universitario en Economía
Máster en Economía Pública				Máster en Dirección de Empresas
Máster en Big Data				Máster Universitario en Economía
Máster en Big Data				Máster en Dirección de Empresas
Máster Universitario en Economía				Máster en Dirección de Empresas

Cuadro 2: Encuesta I estudiantes

Centro	MÁSTER	Precio	X	X	X	Precio	MÁSTER	Centro
UPNA	Profesorado	1.360 €				6.600 €	Economics and Finance	CEMFI
UPNA	Profesorado	1.360 €				7.800 €	Desarrollo Económico	UC3M
UPNA	Profesorado	1.360 €				1.765 €	Banca y Finanzas Públicas	EHU
UPNA	Profesorado	1.360 €				2.850 €	Economía Pública	UV
UPNA	Profesorado	1.360 €				18.000 €	Big Data	GSE
UPNA	Profesorado	1.360 €				2.200 €	Economía	Unizar
UPNA	Profesorado	1.360 €				1.700 €	Dirección de Empresas	UPNA
CEMFI	Economics and Finance	6.600 €				7.800 €	Desarrollo Económico	UC3M
CEMFI	Economics and Finance	6.600 €				1.765 €	Banca y Finanzas Públicas	EHU
CEMFI	Economics and Finance	6.600 €				2.850 €	Economía Pública	UV
CEMFI	Economics and Finance	6.600 €				18.000 €	Big Data	GSE
CEMFI	Economics and Finance	6.600 €				2.200 €	Economía	Unizar
CEMFI	Economics and Finance	6.600 €				1.700 €	Dirección de Empresas	UPNA
UC3M	Desarrollo Económico	7.800 €				1.765 €	Banca y Finanzas Públicas	EHU
UC3M	Desarrollo Económico	7.800 €				2.850 €	Economía Pública	UV
UC3M	Desarrollo Económico	7.800 €				18.000 €	Big Data	GSE
UC3M	Desarrollo Económico	7.800 €				2.200 €	Economía	Unizar
UC3M	Desarrollo Económico	7.800 €				1.700 €	Dirección de Empresas	UPNA
EHU	Banca y Finanzas Públicas	1.765 €				2.850 €	Economía Pública	UV
EHU	Banca y Finanzas Públicas	1.765 €				18.000 €	Big Data	GSE
EHU	Banca y Finanzas Públicas	1.765 €				2.200 €	Economía	Unizar
EHU	Banca y Finanzas Públicas	1.765 €				1.700 €	Dirección de Empresas	UPNA
UV	Economía Pública	2.850 €				18.000 €	Big Data	GSE
UV	Economía Pública	2.850 €				2.200 €	Economía	Unizar
UV	Economía Pública	2.850 €				1.700 €	Dirección de Empresas	UPNA
GSE	Big Data	18.000 €				2.200 €	Economía	Unizar
GSE	Big Data	18.000 €				1.700 €	Dirección de Empresas	UPNA
Unizar	Economía	2.200 €				1.700 €	Dirección de Empresas	UPNA

Cuadro 3: Encuesta II estudiantes

Matrices resultado de las encuestas

En este apartado se muestran los resultados matriciales obtenidos de las encuestas.

Para el .Estudiante 3.1”, el primer número simboliza que es el estudiante 3 y el sugundo número que se trata de la encuesta 1.

$$\text{Estudiante 1.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 1.2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 2.1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 2.2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 3.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 3.2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 4.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 4.2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 5.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 5.2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 6.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 6.2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 7.1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 7.2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 8.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 8.2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 9.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 9.2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 10.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Estudiante 10.2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$