

# ESTADÍSTICA

JON LARREA POSADAS

ESTUDIO COMPARATIVO DE UN TEMA DE  
ESTADÍSTICA PARA DOS CLASES DE  
DIFERENTES COMPETENCIAS

TFM 2018



Facultad de Ciencias Humanas y Sociales  
Departamento de Estadística, Probabilidad y Estadística

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL  
PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA



**Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria  
y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas**

Trabajo Fin de Máster  
Ámbito Matemáticas

**Estudio comparativo de un tema de  
estadística para dos clases de  
diferentes competencias**

Jon Larrea Posadas

Estudio comparativo de un tema de estadística para dos clases de diferentes competencias

*NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA*

# ÍNDICE

	Página
<b>Introducción general</b>	<b>5</b>
<b>Parte I: La estadística en el currículo vigente y en los libros de texto</b>	<b>7</b>
<b>1. La estadística en el currículo vigente</b>	<b>11</b>
1.1.Contenidos en Educación Primaria .....	11
1.2.Contenidos en ESO.....	12
1.3.Contenidos en Bachillerato .....	13
1.4.Visión global de los contenidos .....	13
<b>2. Los criterios de evaluación de la estadística en el currículo vigente</b>	<b>15</b>
2.1.Criterios de evaluación en Educación Primaria.....	15
2.2.Criterios de evaluación en ESO.....	16
2.3.Criterios de evaluación en Bachillerato.....	17
2.4.Visión global de los criterios de evaluación .....	17
<b>3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la estadística en el currículo vigente</b>	<b>19</b>
3.1.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO.....	20
3.2.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO.....	22
3.3.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO.....	24
3.4.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller.....	27
3.5.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachiller.....	29
<b>4. Resultados</b>	<b>31</b>
4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto .....	31
4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo .....	33
<b>Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las estadística en 4ºESO</b>	<b>37</b>
<b>5. La estadística en el libro de texto de referencia</b>	<b>41</b>
5.1. Objetos matemáticos involucrados .....	41
5.2. Análisis global de la unidad didáctica .....	43
5.3. Otros aspectos relevantes .....	45
<b>6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica</b>	<b>47</b>
6.1. Errores y su posible origen .....	47
6.2. Dificultades .....	49

	Página
<b>7. El proceso de estudio</b>	<b>51</b>
7.1. Distribución del tiempo de la clase .....	52
7.2. Actividades adicionales planificadas.....	52
7.3. La tarea: actividad autónoma del alumnos prevista .....	54
<b>8. Experimentación</b>	<b>55</b>
8.1. Muestra y diseño de la experimentación .....	55
8.2. El cuestionario .....	57
8.3. Cuestiones y comportamientos esperados.....	59
8.4. Resultados .....	60
8.5. Discusión de los resultados .....	63
<b>Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas</b>	<b>65</b>
<b>Referencias</b>	<b>67</b>
<b>Anexos</b>	<b>69</b>
A. Anexo 1: Unidad didáctica del libro de texto .....	71
B. Anexo 2: Criterios de evaluación de Matemáticas.....	85
C. Anexo 3: CANVAS .....	87
D. Anexo 4: Anotaciones sobre exposiciones del proyecto .....	89

## **Introducción general**

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar cómo se afronta el estudio de la estadística por parte de clases con alumnado muy diferente.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre la estadística, que se ha puesto en marcha en dos aulas de un IES en Navarra en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.





## **Parte I:**

# **La estadística en el currículo vigente y en los libros de texto**



En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la estadística en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a la estadística en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de matemáticas aplicadas de 4ºESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.



## Capítulo 1

### La estadística en el currículo vigente

En este capítulo presentamos un estudio en profundidad de la estadística en el currículo vigente según presenta la actual Ley Orgánica de Educación (LOE) modificada por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).

La LOMCE realizó modificaciones sobre parte de la LOE pues se detuvo su completa aplicación en 2016. En lo que al currículo respecta, las aplicaciones en el cambio curricular fueron llevadas a cabo y por consiguiente hubo cambios en el bloque de estudio: la estadística.

El currículo fue diseñado partiendo de los objetivos propios de la etapa y de las competencias que se van a desarrollar a lo largo de las mismas, mediante bloques divididos en contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Dicha organización permite adoptar la metodología más adecuada para cada grupo de alumnos y alumnas.

Este currículo a su vez promueve la libertad docente permitiendo diseñar tareas o situaciones de aprendizaje que posibiliten la adquisición de los contenidos por parte del estudiante.

Para interés de nuestro estudio veremos la progresión de los contenidos de la estadística en primaria, secundaria y bachiller así como los criterios de evaluación en estos tres ciclos.

#### 1.1 Contenidos en Educación Primaria

Los contenidos de estadística actuales vienen recogidos es el *Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Como el currículo de secundaria, el currículo de primaria se divide en asignaturas que agrupan conocimientos del mismo campo educativo. En el presente caso nos centramos en la asignatura de las matemáticas y más específicamente en el bloque de la estadística. En la siguiente imagen se recogen los contenidos de estadística en el bloque de matemáticas:

<p>Gráficos y parámetros estadísticos.</p> <p>Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos.</p> <p>Construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas.</p> <p>Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango.</p> <p>Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales.</p> <p>Análisis crítico de las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.</p> <p>Carácter aleatorio de algunas experiencias.</p> <p>Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.</p>
---

Figura 1: Contenidos de Estadística y Probabilidad en Educación Primaria

Estos contenidos se trabajan de una forma progresiva desde los primeros cursos de primaria dando una continuidad en la ESO y dando salida en Bachiller.

En el primer ciclo de primaria (1º y 2º) se trata de orientar a la recolección de datos cualitativos en entornos cercanos (familia, colegio,...) y su agrupación y representación en gráficos sencillos

En el segundo ciclo (3º y 4º) la recolección de información se centra en las encuestas, observación y medición. Los datos obtenidos pasan por una nueva fase de tablas. Simultáneamente se trabajan los análisis de gráficos con elementos del entorno. Se solicita por primera vez claridad y orden en la elaboración de tablas y gráficos.

Por último, en el último ciclo (5º y 6º) se trabaja el proceso estadístico como método de síntesis de la información partiendo de la recolección de datos con técnicas elementales, estructuración de los datos en tablas sencillas, representación de los mismos en gráficos acordes a la situación (grafico de barras, pictogramas,...) y por último se introducen medidas estadísticas como media, moda y rango. En todo el proceso se demanda claridad y orden. Además se presenta la extracción de información de gráficos como novedad en la estadística.

## 1.2 Contenidos en ESO

Los contenidos de secundaria vienen recogidos en el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Dicho documento dispone de una división por materias o asignaturas que regulan los contenidos comunes a la comunidad educativa en la ESO y Bachiller así como los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Ante todo hay que describir el esquema que sigue el itinerario matemático para comprender el currículo. Dicho esquema se muestra a continuación:

**Tabla 1; Matemáticas en la ESO y Bachiller**

1º y 2º ESO	3º y 4º ESO	1º Bachiller	2º Bachiller
Matemáticas	Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	Matemáticas I	Matemáticas II
	Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Una vez conocido el itinerario matemático que hay en la ESO y Bachiller, nos centramos en nuestro bloque de estadística:

En 1º ESO el bloque de estadística y probabilidad que recoge el currículo se centra exclusivamente en la estadística. Este curso trata de recoger lo trabajado en primaria y añadirle el concepto de “frecuencia” a las tablas. Esta evolución en el conteo permite la transición del lenguaje visual al numérico. En lo que a gráficos respecta se añade al grafico de barras el polígono de frecuencias. Las medidas pasan a dividirse entre centralización y dispersión, estando el primer grupo de medidas compuesto por la media, mediana y moda y el segundo por rango absoluto y relativo.

En 2º ESO el currículo se centra completamente en la probabilidad por lo que centrarse en desarrollar este punto no tiene cabida en este trabajo.

3º ESO vuelve a trabajar el estudio estadístico pero esta vez se realiza un primer análisis completo de la variable estadística: Cualitativa, cuantitativa continua o cuantitativa discreta. También se introducen de forma oficial los conceptos de población, muestra y representatividad. Para el análisis de datos se trabaja con la agrupación de datos en intervalos. En los gráficos aparecen los diagramas de cajas y bigotes con la intención de dar sentido a las nuevas medidas de posición: los cuartiles.

Por último, 4º ESO profundiza en la aplicación de la estadística en los medios de comunicación y la interpretación de datos estadísticos partiendo de las herramientas trabajadas en el curso anterior y fortalecidas en el presente. Por primera vez se trabaja en conjunto las medidas de posición y dispersión para dar sentido al estudio estadístico. Por primera vez se trabajan la estadística bidimensional con una introducción a los diagramas de dispersión y a la correlación.

Tanto en 3º como en 4º la estadística trabaja los mismos conceptos en las matemáticas académicas como en las aplicadas solo que cambia el enfoque que se les da. Mientras que a las académicas se les da un enfoque orientado a continuar los estudios con materias relacionadas con las matemáticas, las aplicadas están más destinadas a conocimientos funcionales que sirvan para desenvolverse exclusivamente en el día a día no invitando a continuar con el estudio de las mismas.

### **1.3 Contenidos en Bachiller**

Para el Bachillerato, las matemáticas toman dos enfoques diferentes. Mientras que Matemáticas I y Matemáticas II están más orientadas a un itinerario más científico, las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se centran más en Economía y humanidades.

Las Matemáticas I se cursan en 1º Bachiller y su estudio está centrado en la estadística descriptiva bidimensional: tablas de contingencia, distribuciones condicionadas, interdependencia, nube de puntos con correlación y regresión lineal son contenidos que conforman la estadística de esta asignatura. En este curso se extraen resultados de estudios estadísticos mediante las herramientas trabajadas como es el caso de la regresión lineal.

Matemáticas II se centra en la probabilidad y el único contenido relacionado con la estadística son los modelos de distribución de la V.A. más simples: Binomial, Normal,.. Si tomamos el itinerario de las Ciencias Sociales, la asignatura Matemáticas CCSS I tiene un mayor contenido en el currículo respecto a las del itinerario científico-tecnológico. Trabaja más en profundidad las relaciones entre dos variables centrándose en la dependencia o independencia de las mismas. Vienen, por consiguiente, los conceptos de covarianza y correlación. Esta asignatura se asemeja a lo que se desea alcanzar en 2º Bachiller con la asignatura Matemáticas II.

Las Matemáticas CCSS II profundizan en la inferencia estadística con aproximaciones de la población mediante estadísticos obtenidos desde una muestra. Para ello se emplean las distribuciones con nombre propio y aproximaciones de muestras grandes a este tipo de distribuciones. Se estudia también los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis siendo estos dos conceptos lo más complejo que se estudia en estadística de secundaria.

### **1.4 Visión global de los contenidos estadísticos en el currículo vigente**

Para tener una imagen de los diferentes contenidos y su evolución en el currículo organizamos los datos en forma de tabla: Analizaremos ítem por ítem su desarrollo.

Contenido	Primaria	ESO						Bachiller			
		1º y 2º ESO	3ºESO Apli.	3ºESO Acad.	4ºESO Apli.	4ºESO Acad.	1º MI	1º CCSS	2º MII	2ºCCSS	
Recogida y clasificación de datos	3º Ciclo	Población e Individuo V. Cualitativa y V. Cuantitativa	Métodos de selección de una muestra estadística	Métodos de selección de una muestra estadística	Métodos de selección de una muestra estadística	Identificar fases de un estudio estadístico	----	----	----	Población y Muestra. Selección y Representatividad	
Tablas	Construcción de tablas de frecuencia absolutas y relativas	Frecuencia absolutas y relativas Organización en tablas	Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Intervalos	Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Intervalos	----	Tablas de contingencia	Tablas de contingencia	----	----		
Gráficos	Realización e interpretación de gráficos sencillos:....	Diagramas de barras y sectores Polígono de frecuencias	Gráficas estadísticas Caja y bigotes	Gráficas estadísticas Caja y bigotes	Gráficas estadísticas: Analizar e interpretar	Gráficas estadísticas: Analizar e interpretar	Nube de puntos	Nube de puntos	----		
Medidas posición	Iniciación intuitiva a las medidas de posición	Introducción	Parámetros de posición Relación media-desviación	Parámetros de posición Relación media-desviación	Interpretar, analizar y utilizar	Interpretar, analizar y utilizar	Medias y desviaciones típicas marginales	Medias y desviaciones típicas marginales y condicionadas	Media y desviación de la media muestral		
Medidas dispersión	----	Introducción	Parámetros de dispersión Relación media-desviación	Parámetros de dispersión Relación media-desviación	Interpretar, analizar y utilizar	Interpretar, analizar y utilizar	Medias y desviaciones típicas marginales	Medias y desviaciones típicas marginales y condicionadas	Media y desviación de la media muestral		
Análisis de información de MMCC	Análisis crítico de información en gráficos	----	----	----	Análisis crítico con MMCC	Detección de falacias	----	----	----		
Estadística Bidimensional	----	----	----	----	Introducción diagramas dispersión	Construir e interpretar D. dispersión	Covarianza y correlación	Covarianza y correlación	----		
Inferencia	----	----	----	----	----	----	----	Binomial y Normal	Intervalos de confianza		

Tabla 2: Evolución de los contenidos



## Capítulo 2

### Los criterios de evaluación de la estadística en el currículo vigente

En el presente capítulo, tomando como referencia el anterior, estudiamos los criterios de evaluación seguidos a lo largo de Primaria, ESO y Bachiller en el bloque de estadística, enmarcado en las diferentes asignaturas de matemáticas. Un criterio de evaluación es un referente específico que sirve para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias. En nuestro caso responde a lo que se pretende conseguir en el bloque de estadística.

Para todas las asignaturas los referentes para la comprobación del grado de adquisición de las competencias y logro de los objetivos son los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.

Los criterios de evaluación vienen recogidos en el currículo vigente en los mismos dos decretos que se han expuesto en el capítulo anterior. Ambos decretos están en concordancia con la LOMCE.

#### 2.1 Criterios de evaluación en Educación Primaria

En Primaria los criterios de evaluación de la estadística se resumen en que el alumnado es capaz de recoger la información de forma ordenada empelando tablas con un registro de marcas que se pueden considerar una tabla de frecuencia muy primaria. Tras ello se busca que sean capaces de interpretar representaciones gráficas en su entorno inmediato y sacar conjeturas. El alumnado a su vez debe ser capaz de solucionar problemas de la vida cotidiana con el uso de las herramientas recogidas en los contenidos de los bloques del capítulo primero del presente trabajo.

Este último criterio de evaluación traza una relación entre el alumno y las matemáticas viendo como contra mas se profundiza en ellas más problemas de la vida cotidiana se pueden solucionar.

En la siguiente imagen se recogen los criterios de evaluación de primaria:

1. Recoger y registrar una información cuantificable, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales, comunicando la información.
2. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.
3. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado.
4. Observar y constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición.
5. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.

Figura 2: Criterios de evaluación de Estadística y Probabilidad en Educación Primaria

## 2.2 Criterios de evaluación en ESO

En la ESO debemos hacer la misma distinción que se ha realizado en el capítulo anterior: los dos primeros cursos son comunes mientras que 3º y 4º toman dos itinerarios: Aplicadas y Académicas.

En 1º ESO los criterios de evaluación se centran en la recolección de datos de forma eficaz así como su agrupación. Se evalúa la construcción de gráficos simples y el cálculo de los parámetros más primarios. Se introducen las TICs como herramientas de ayuda para el cálculo de diferentes parámetros estadísticos.

El curso de 2º ESO no trabaja la estadística pues se centran los contenidos en la probabilidad. Por ello no disponemos de criterios de evaluación para el segundo curso de la ESO.

Los criterios de evaluación de la estadística en 3º ESO tanto para Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas como las orientadas a las enseñanzas aplicadas son los mismos. Se sigue evaluando la presentación de los datos pero añadido aparecen los parámetros de posición y dispersión. También se evalúa la capacidad de relacionar la información de los medios de comunicación con la estadística.

4º ESO continua con el mismo sistema de 3ºESO dando los mismos criterios para una asignatura de matemáticas como para la otra. Los criterios de evaluación son muy parecidos a los de 3ºESO y lo único que se añade es la evaluación que se hace a la introducción de la matemática bidimensional.

En la siguiente tabla se puede ver la ausencia de diferencias entre las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y a las aplicadas tanto en 3º ESO como 4º ESO.

**Tabla 3: Criterios de evaluación para las matemáticas de 3ºESO y 4ºESO**

	Aplicadas	Académicas
3ºESO	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficos adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.</li> <li>2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas.</li> <li>3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficos adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.</li> <li>2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas.</li> <li>3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.</li> </ol>
4ºESO	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación.</li> <li>2. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo), valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación.</li> <li>4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.</li> </ol>

### 2.3 Criterios de evaluación en Bachillerato

En Bachiller los criterios de evaluación son diferentes para cada una de las 4 asignaturas pudiendo ser las de segundo curso tomadas como continuación de las de primero.

En la asignatura de Matemáticas I, 1º Bachiller, el bloque de estadística los criterios de evaluación se centran en correcta interpretación de las distribuciones bidimensionales y la obtención de parámetros estadísticos. Se evalúa el correcto cálculo de rectas de regresión y su relación con la correlación. Transversalmente se evalúa un vocabulario adecuado así como un criterio de fiabilidad que debe tener el alumnado a la hora de presentarse ante datos científicos.

Matemáticas II, 2º Bachiller, solo evalúa con los criterios la identificación de los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad Binomial y Normal calculando sus parámetros para determinar la probabilidad de diferentes sucesos asociados. Como en Matemáticas I, se evalúa el lenguaje y espíritu crítico del alumnado con los medios de comunicación así como la posible manipulación en los datos que aportan.

Para las Matemáticas CCSS I, el currículo recoge más criterios de evaluación respecto al bloque de estadística y probabilidad debido a que los contenidos son mucho más extensos y se hace una profundización mayor. Orientadas más a las ciencias sociales, los criterios de evaluación no se centran tanto en el cálculo sino en la interpretación de los datos y la relación de las variables. Como fin, toda interpretación y cálculo de esta asignatura tiene como objetivo evaluar su relación con fenómenos económicos y sociales.

Por último tenemos las Matemáticas CCSS II; de 2º Bachiller. Como las Matemáticas II, están centradas en la probabilidad pero en esta asignatura hace acto de presencia la descripción de procedimientos estadísticos como el análisis del tamaño de una muestra. También se evalúa el correcto uso de intervalos de confianza y su aplicación en problemas del contexto social- económico para desviación típica y muestras conocidas en muestras de tamaños grandes.

### 2.4 Visión global de los criterios de evaluación de estadística en el currículo vigente

Como en el capítulo anterior, la mejor forma de ver los criterios de evaluación y su evolución es presentarlos en forma de tabla. Como introducir los criterios de evaluación completos en una tabla no sería estético, en una hoja se pondrán los criterios directamente tomados del currículo con la intención de resultar más sencilla la interpretación.

Contenido	Primaria		ESO					Bachiller			
	3º Ciclo	1º y 2º ESO	3ºESO Apli.	3ºESO Acad.	4ºESO Apli.	4ºESO Acad.	1º MI	1º CCSS	2º MII	2ºCCSS	
Recoger, registrar y describir información	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Interpretar gráficas	X	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Utilizar herramientas informáticas	---	X	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Calcular parámetros de posición y dispersión	---	---	X	X	X	X	---	---	---	---	---
Analizar medios de comunicación	---	---	X	X	---	---	X	X	X	X	X
Vocabulario apropiado	---	---	---	---	X	X	X	X	X	X	X
Estadística Bidimensión	---	---	---	---	---	---	X	X	---	---	---
Inferencia estadística	---	---	---	---	---	---	---	X	X	X	X

Tabla 4: Evolución de los criterios

### **Capítulo 3**

## **Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la estadística en el currículo vigente**

En el presente capítulo se trata de estudiar la evolución de los ejercicios en los temas de estadística en los cursos desde 2º ESO hasta 2º Bachiller. Estudiamos estos 5 cursos pues nos permite conocer el entorno del curso del estudio realizado para el presente ejercicio. Conociendo los ejercicios de dos cursos menos podemos intuir el nivel del que parten nuestros sujetos de estudio mientras que conociendo los ejercicios y problemas de dos años más podemos empezar a dibujar las líneas de trabajo que se desean para esos cursos.

Los ejercicios de los cursos de 3ºESO y 4ºESO se centrarán en las Matemáticas orientadas a las enseñanzas Aplicadas. Esto se debe a que la muestra sobre la que se realizó el estudio está cursando ese itinerario. Para darle una continuidad y sentido al capítulo se trabajarán las asignaturas de Matemáticas CCSS I y Matemáticas CCSS II como cursos posteriores a las Aplicadas. Esto se debe a que el paso entre las Matemáticas Aplicadas de 4º ESO y las Matemáticas I se considera inalcanzable. El alumnado que cursa Matemáticas Aplicadas está destinado a Formación Profesional o a cursar un Bachiller en el que las Matemáticas pasen a un segundo plano. Es por ello que orientamos nuestro estudio hacia las Matemáticas CCSS I y II debido a que el salto de dificultad no es tan elevado como el que se plantearía en el itinerario Científico-Tecnológico.

El formato seguirá curso por curso los ejercicios tipo que trabajen los diferentes contenidos recogidos en la tabla del Capítulo 1: La estadística en el currículo vigente.

### 3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO [1] Grupo Edebé (2016)

Contenido: Recogida y clasificación de datos

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: El ejercicio que se muestra a continuación trata de recoger las ideas del primer punto del tema en el que se estudia la muestra y las variables que se estudiarían en un estudio estadístico realizable por el alumnado

Ejemplo:

4. Imagina que tienes que realizar un estudio estadístico sobre la siguiente población: alumnos de 2.º de ESO de una localidad. Indica:
- a) La muestra que puedes tomar para el estudio.
  - b) Tres variables cualitativas.
  - c) Dos variables cuantitativas continuas.
  - d) Dos variables cuantitativas discretas.

Contenido: Tablas

Actividad tipo: Problema

Descripción: El problema sitúa al alumnado ante una situación cotidiana como es interpretar los datos tras realizar una encuesta relacionada con el deporte.

Ejemplo:

6. Se dispone de los siguientes datos de una encuesta realizada a 25 alumnos sobre su deporte favorito: la natación es el preferido por 10 alumnos; el 24 % juega a fútbol; la frecuencia relativa de los que eligen el baloncesto es 0,16; hay alumnos que seleccionaron el voleibol.

Confecciona una tabla con la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa y el porcentaje de cada uno de los cuatro deportes.

Contenido: Gráficos

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: El ejercicio hace reflexionar al alumno sobre la construcción del gráfico más adecuado para realizar una comparación. Trabaja los gráficos de barras y el polígono de frecuencias.

Ejemplo:

Confecciona el gráfico evolutivo de cada país según los datos de la tabla y elabora un gráfico comparativo con los datos de los distintos países.

País / Año	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
España	2,20	1,64	1,36	1,18	1,22	1,35	1,46
Francia	1,95	1,81	1,78	1,70	1,82	1,93	1,98
China	62,63	2,64	2,22	1,87	1,74	1,67	1,60

Contenido: Medidas de posición

Actividad tipo: Problema

Descripción: El problema trata de calcular, con una cantidad pequeña de datos, la media. Con una pregunta del profesor estilo ¿Qué quiere decir que gastan X de media? Nos permite darle una interpretación al dato.

Ejemplo:

13. El consumo doméstico bimensual de agua, en  $m^3$ , de una familia a lo largo de un año ha sido: 29, 50, 28, 41, 29 y 37. ¿Cuál es el consumo medio mensual?

Contenido: Medidas de dispersión

Actividad tipo: Problema

Descripción: Con este problema se trata de calcular las medidas de dispersión. Si primero se le solicita al alumnado el cálculo de la media luego se puede dar una interpretación a dichas medidas.

Ejemplo:

21. Calcula la varianza y la desviación típica de los datos de la tabla, correspondientes al número de huevos diarios que ponen las veinte gallinas de un corral durante un mes:

Cantidad diaria de huevos ( $x_i$ )	11	12	13	14	15	16	17	18
Número de gallinas ( $n_i$ )	3	4	6	7	4	3	2	1

Contenido: Análisis de información de medios de comunicación

Actividad tipo: Problema y Cuestión

Descripción: Hay que generar un marco a la hora de establecer este problema para trabajarlo como información del medio de comunicación. Con este problema se introduce al sentimiento crítico del alumnado así como a su trabajo con noticias.

Ejemplo:

39. \*\*\* En una encuesta realizada a una muestra de alumnos de una escuela, el 75,6 % ha respondido afirmativamente a la pregunta si les gustaba o no el fútbol.

a) ¿Cuántos alumnos hay en la muestra si el total de respuestas afirmativas ha sido de 378 ?

En un estudio posterior y utilizando la misma muestra, se les ha preguntado si les gusta el baloncesto, si no les gusta, o si les resulta indiferente.

b) Elabora la tabla de distribución de frecuencias si en este caso ha habido el triple de respuestas afirmativas que negativas y 52 alumnos han respondido que les resulta indiferente este deporte.

### 3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO [2]J.M.Moral (2015)

Contenido: Recogida y clasificación de datos

Actividad tipo: Cuestión

Descripción: Se lanza la cuestión de cómo clasificarían diferentes variables estadísticas. A este problema se le puede dar una continuidad con variables preparadas de antemano por la figura docente.

Ejemplo:

3. Clasifica estas variables estadísticas:
- a) Peso de mis compañeros.
  - b) Último partido de baloncesto visto en la televisión.
  - c) Número de libros que tengo en la mochila.
  - d) Color de ojos.

Contenido: Tablas

Actividad tipo: Problema

Descripción: Nos situamos ante una situación cotidiana como es la entrega de notas tras una prueba escrita. Lo que se solicita es una construcción de tabla con frecuencia acumulada.

Ejemplo:

7. Las respuestas correctas dadas por los alumnos de una clase en una prueba de Matemáticas compuesta por 10 preguntas han sido: 6, 6, 7, 4, 5, 7, 3, 9, 7, 8, 5, 5, 3, 6, 4, 3, 5, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 5, 5, 6, 8, 4, 6 y 10.

Elabora una tabla de distribución de frecuencias y di cuántos alumnos han contestado correctamente: a) menos de 5 preguntas; b) 5 o más preguntas; c) 8 o más preguntas.

Contenido: Gráficos

Actividad tipo: Problema

Descripción: Un problema muy completo en el que se trabajan los intervalos (Tablas) y se realiza un histograma con un polígono de frecuencias asociado.

Ejemplo:

7. El peso de los jugadores de un equipo de fútbol en kilogramos es:

57	65,2	70,3	53,4	55,7	67,4	85,2	60,9	64,8
77,9	78,2	58,4	59,2	68,3	75	74,7	81,5	82,9

Realiza una tabla de frecuencias tomando intervalos de amplitud de 5 kg empezando en 53 kg y representa los datos mediante un histograma y su correspondiente polígono de frecuencias.



Contenido: Medidas de posición

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Ejercicio tradicional en el que partiendo de un conjunto de datos se pide las medidas de centralización y posición.

Ejemplo:

8. Calcula la media aritmética, la moda, la mediana y los cuartiles de los siguientes datos:

2 4 4 6 2 7 8 9 3 1 5

4 4 9 0 2 4 9 4 1 2 4

Contenido: Medidas de dispersión

Actividad tipo: Problema

Descripción: Situación muy ligada a la anterior pero situado en un contexto cotidiano. En esencia es lo mismo: Desde una nube de datos calcular la media y las medidas de dispersión. Para ello hay que pasar por una construcción de tablas.

Ejemplo:

9. El número de rotuladores que los alumnos llevan a clase es:

2, 4, 3, 5, 1, 3, 6, 4, 5, 3, 2, 4, 2, 3, 5, 4, 1, 5, 7, 4, 2, 1, 3, 5, 2

Realiza una tabla de frecuencias como la del ejemplo y calcula la media de rotuladores que llevan los alumnos a clase, su desviación media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Contenido: Análisis de información de medios de comunicación

Actividad tipo: Problema

Descripción: Como el curso pasado, en este tema hay que situar al alumnado en la situación de que se encuentran viendo/ leyendo un reportaje deportivo y deben calcular una serie de datos.

Ejemplo:

**18.** En la siguiente tabla quedan reflejados los triples anotados por dos jugadores en los últimos 10 partidos.

<b>Jug. A</b>	1	0	5	0	2	0	0	1	4	2
<b>Jug. B</b>	1	2	1	2	1	3	1	1	2	1

Si el equipo de baloncesto local pretende fichar al jugador más regular en triples, ¿a cuál de los dos contratará?

### 3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO [3] G.González (2016)

Contenido: Recogida y clasificación de datos

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Se trata de enumerar una serie de variables estadísticas clasificándolas según su tipología. Este ejercicio sirve de repaso para marcar las líneas de los que vienen a continuación.

Ejemplo

1. Indica tres ejemplos de variable estadística:

a) Cualitativa

b) Cuantitativa

c) Discreta

d) Continua

Contenido: Tablas

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Un ejercicio en el que los valores de la variable vienen dados en intervalos y lo que se trata es de completar la tabla de frecuencias con las columnas necesarias. A este ejercicio le hace falta darle una conclusión. El docente debería aprovechar la situación para ver si se ha entendido la teoría.

Ejemplo:

5. Se ha realizado un estudio sobre el consumo de agua en las viviendas, en dos meses, de un determinado barrio y se han obtenido los datos que se muestran en la siguiente tabla:

Consumo en m <sup>3</sup>	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)
$f_i$	28	54	65	125	28

Completa la tabla de frecuencias.

Contenido: Gráficos

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Dos ejercicios para aprender la diferencia entre la representación de variables cuantitativas continuas y cuantitativas discretas. Además ambos trabajan la representación gráfica.

Ejemplo:

6. Completa la tabla de frecuencias y representa el diagrama de barras.

$x_i$	100	120	140	160	180	200
$f_i$	25	36	42	50	33	28

7. Completa la tabla de frecuencias y representa el histograma.

$x_i$	[1, 5)	[5, 9)	[9, 13)	[13, 17)	[17, 21)	[21, 25)
$f_i$	12	14	18	16	15	10

Contenido: Medidas de posición

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: El ejercicio trata de averiguar las medidas de centralización de los valores observados en una variable estadística que vienen recogidos en una tabla. Sirve para introducir la marca de clase.

Ejemplo:

12. Se ha realizado un estudio sobre el consumo de agua doméstica y se han obtenido los siguientes datos en m<sup>3</sup>:

$f_i$	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)	[10, 12)	[12, 14)	[14, 16)
$f_i$	12	17	25	36	18	10

Determina:

a) La media aritmética.      b) La clase modal.      c) La mediana.

Contenido: Medidas de dispersión

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Tradicional ejercicio de cálculo de las medidas de dispersión. Partiendo de una tabla se busca el extraer información.

Ejemplo:

24. Calcula la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos:

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$f_i$	5	7	12	9	4	3	2

Contenido: Análisis de información de medios de comunicación

Actividad tipo: Problema

Descripción: Se busca que tras aportar una noticia, el alumno sea capaz de desarrollar el espíritu crítico, trabaje la cultura estadística y saque conclusiones de un medio de comunicación.

Ejemplo:



Fuente: INE / EL PAÍS

Contenido: Estadística bidimensional

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Se trata de una tabla de doble entrada en la que se desea responder a las preguntas que vienen a continuación de la misma. Como introducción a la estadística bidimensional es útil.

Ejemplo:

1. Dadas dos variables estadísticas, hemos obtenido los datos, que se resumen en la siguiente tabla:

X \ Y	2	4	6	8	10	12	Totales
10	7	10	12	17	13	6	...
20	9	12	15	18	12	7	...
30	16	12	11	8	4	3	...
40	21	16	10	9	5	2	...
Totales	...	...	...	...	...	...	...

- Completa en tu cuaderno la columna y la fila de totales.
- Calcula el tamaño de la población.
- ¿Qué valor tiene la frecuencia absoluta  $f_{23}$ ?

### 3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller [4] F.Alcaide et al (2015)

Contenido: Tablas

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: El ejercicio se basa en completar una tabla con datos ausentes. Con ello se estructuran los totales como suma de las filas o columnas. Tiene aplicación en el cálculo mental así como en la estadística bidimensional.

Ejemplo:

24. La tabla muestra el número de hijos ( $Y$ ) que tienen 50 mujeres en función de su edad ( $X$ ).

$X$	$Y$	0	1	2	3	Total $Y$
20 – 25		7	2	1	**	10
26 – 30		**	5	3	**	**
30 – 35		3	**	7	2	**
36 – 40		1	1	**	2	**
Total $X$		16	**	14	6	50

- Copia y completa la tabla.
- Obtén las distribuciones marginales y sus medias y varianzas.
- Escribe la distribución del número de hijos si la madre está entre 30 y 35 años. Calcula su media y su varianza.

Contenido: Gráficos

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Ejercicio relacionado con la productividad de una región vinícola en función de la lluvia: Enfrentar dos variables para estudiar su correlación. Con ello se trata de obtener una representación gráfica.

Ejemplo:

27. En una determinada región vinícola se han evaluado las pérdidas en cientos de miles de euros ( $Y$ ) en la producción en función del número de días de lluvia ( $X$ ) de la campaña.

$X$	87	80	77	75	63	71	76	74
$Y$	19,5	18,5	14,6	15,5	12,7	14	18,1	15

- A la vista de la representación gráfica, ¿se puede afirmar que existe una relación lineal?
- Calcula el coeficiente de correlación. ¿Se confirma la impresión anterior?

Contenido: Medidas de posición y Dispersión

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Ejercicio que alberga calcular la media y desviación marginal para dos variables enfrentadas. Añadido trae la recta de regresión como conocimiento complementario.

Ejemplo:

25. El número de unidades producidas al mes en miles ( $X$ ) por una empresa y el número de unidades defectuosas ( $Y$ ) en 6 meses es:

$X$	0,5	1,2	1,6	2,5	3,3	5,1
$Y$	10	20	25	35	40	50

- a) Representa gráficamente los datos.  
 b) Calcula la media y la varianza de las distribuciones marginales de  $Y$  y  $X$ .

Contenido: Análisis de información de medios de comunicación

Actividad tipo: Estudio

Descripción: Mediante la facilitación de una nota de prensa o recorte se espera que el alumnado sea capaz de interpretar la información y trabajarla.

Ejemplo:



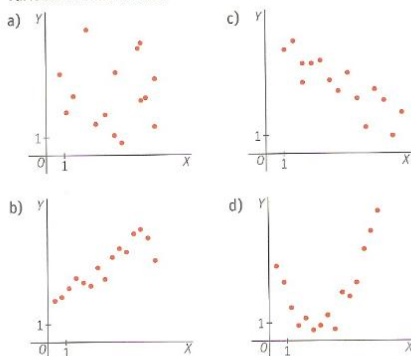
Contenido: Estadística bidimensional

Actividad tipo: Cuestión

Descripción: Partiendo de unos diagramas de dispersión se solicita clasificarlos en función de diferentes coeficientes de correlación y explicar el sentido de los mismos.

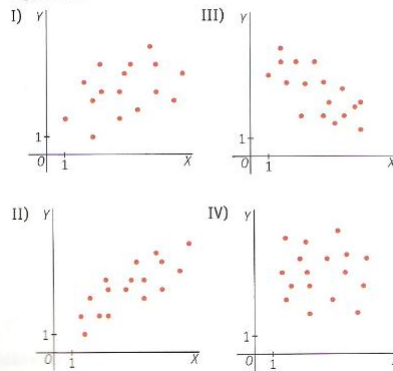
Ejemplo:

37. En los siguientes casos, se representa la nube de puntos de una variable bidimensional.



En cada caso indica si existe relación lineal entre las variables y, en caso afirmativo, ¿cuál es el signo de la covarianza y del coeficiente de correlación?

42. A la vista de las siguientes nubes de puntos de dos distribuciones conjuntas bidimensionales, asigna el coeficiente de correlación que mejor se aproxime a cada una de las distribuciones siguientes.



- a)  $r = -0,04$     b)  $r = 0,4$     c)  $r = -0,7$     d)  $r = 0,8$

### 3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachiller [5]M.J. Ruiz (2016)

Contenido: Recogida y clasificación de datos

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: El enunciado solicita la correcta selección de una muestra de 400 personas. El docente puede poner ejemplos y los alumnos evaluar la funcionalidad de esas muestras

Ejemplo:

- 1. En una gran urbanización viven 400 personas y desean extraer una muestra aleatoria de 40 personas. Explica cómo deben elegir la muestra utilizando muestreo aleatorio simple.

Contenido: Medidas de posición y dispersión

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Ejercicio en el que se induce al cálculo de la media de medias. Con este ejercicio se trabajan las medidas de posición y dispersión por combinadas

Ejemplo:

- 4. Consideremos la población formada por los elementos 1, 2, 3, 4, 5.
  - a) Construye todas las muestras, sin reemplazamiento, de tamaño 2.
  - b) Halla la media de la población y la desviación típica de la población
  - c) Halla la media y la desviación típica de la distribución muestral de medias.

Contenido: Inferencia estadística

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Ejercicio simple en el que partiendo de una población se nos da una proporción de éxito y nos piden construir un intervalo de confianza.

Ejemplo:

- 18. En un grupo de 60 estudiantes universitarios se observa que 48 tienen uno o ningún hermano. Halla el intervalo de confianza del 90 % para la proporción de dichos estudiantes en ese grupo.

Contenido: Análisis de información de medios de comunicación

Actividad tipo: Actividad compleja

Descripción: La actividad se basa en la investigación sobre la teoría de la elección social. Tiene una fase de investigación y otra de comprensión de la tarea.

Ejemplo:

### Matemáticas electorales

Cada vez que se celebran unas elecciones, locales o municipales (Ayuntamientos), autonómicas (Parlamentos de la comunidad), generales (Congreso o Senado) o comunitarias (Parlamento Europeo), tras el recuento de votos hay que repartir los puestos de representación entre las diferentes candidaturas presentadas.

La Constitución española establece que **la representación debe ser proporcional al número de votos obtenido por cada candidatura**, de modo que a mayor número de votos conseguidos deberá corresponder mayor número de escaños. Llevar esto a la práctica no es tan sencillo como puede parecer a primera vista.

El sistema de reparto de representantes puede realizarse de múltiples formas. Algunas son:

- Reparto directamente proporcional.
- Métodos del divisor: regla D'Hondt, método de Saint Lagué puro o método de Saint Lagué modificado.
- Método de la mayoría relativa.

Cada país ha optado por un sistema de reparto con una cierta intención política. Algunos sistemas electorales facilitan la gobernabilidad de la nación, ayuntamiento, etc. otorgando más poder del matemáticamente obtenido a las candidaturas más votadas. En otros casos, se potencia la obtención de representación parlamentaria de las candidaturas con menos votos para potenciar la presencia política de las minorías.

Todo lo anterior forma parte del campo matemático denominado **teoría de la elección social** que se ocupa de los sistemas de votación, con o sin peso, la influencia de los miembros, las alianzas o coaliciones, los pactos, la cooperación y los índices de poder (índices de Shapley, Banzhaf o Deegan).

Estudia, analiza y describe cada uno de los sistemas de reparto de representantes que se nombran, el coste, en votos, que le cuesta a cada partido sus escaños, y el beneficio o la pérdida de escaños para cada candidatura según el sistema elegido.

Investiga sobre la medida del poder a través de los índices citados.



## Capítulo 4

### Resultados

En el capítulo que viene a continuación se trata de estudiar la relación entre el currículo vigente y los libros de texto que se trabajan en la ESO y Bachiller. Para ello relacionaremos los capítulos 1 y 2 con el 3 haciendo un análisis apartado por apartado según lo marcado en los dos primeros capítulos.

Como el capítulo 3, se estudiará la adecuación del currículo a los libros de dos cursos menos hasta dos cursos más.

En los puntos que vienen a continuación se trata de hacer comentarios desde el punto de vista crítico pero constructivo con el fin de analizar fortalezas y debilidades del aprendizaje de la estadística, basados en el juicio del autor. En ningún momento la intención es descatalogar el libro con comentarios destructivos.

Con este análisis finalizaremos la primera parte de este Trabajo Fin de Máster.

#### 4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

##### 2ºESO

Desde segundo de la ESO el libro presenta una coherencia bastante rigurosa con el currículo. El libro analizado es [1] Edebé (2016). Siguiendo el orden que se muestra en el bloque 5 del currículo, la primera discrepancia que vemos entre libro y documento oficial es la definición de dato como posible valor que toma la variable.

En el apartado de variables cualitativas y cuantitativas, el libro realiza una profundización mayor con el desglose de las variables estadísticas cuantitativas en discretas y continuas.

Una vez realizada la introducción en aspectos más conceptuales, el libro profundiza amplia con la recogida de datos mediante encuestas, aspecto no recogido en el currículo que se centra exclusivamente en la organización.

Respecto al tema punto de frecuencias, el libro introduce las acumuladas de forma muy visual. Este contenido no está recogido en el currículo por lo que el libro profundiza más allá.

En gráficos, el libro presenta, aparte de barras, sectores y polígono de frecuencias, los de frecuencias acumuladas, pictogramas, cartogramas, comparativos y evolutivos.

En resumen, el libro trabajado este curso es más que completo en cuanto a adecuación al currículo respecta. Sobrepasa los contenidos del currículo con expansiones en los diferentes apartados.

##### 3ºESO – Académicas y Aplicadas

Para el curso de 3º ESO se ha estudiado [2] J.M. Margallo (2015). Pese a ser dos asignaturas similares pero con diferencias en algunos aspectos, en el bloque de estadística y probabilidad son completamente iguales. Por ello estudiaremos ambas simultáneamente.

La primera desvinculación del libro con el currículo se da en el primer apartado en el que se debería trabajar los métodos de selección de una muestra estadística pero el libro entra directamente en la organización de datos en tablas.

En el apartado de tablas tampoco se trata al completo lo recogido en el currículo pues no se introducen en ninguno de los dos libros los intervalos ni sus propiedades como la marca de clase,... El libro no recoge ningún ejercicio de este tipo por lo que no se puede considerar un error puntual. Este apartado tiene otro contenido que no profundiza y es el de las frecuencias acumuladas, al cual solo hace una referencia en un lateral como expansión voluntaria.

Por parte de las gráficas vuelve a trabajar los pictogramas y las series cronológicas (Diagramas evolutivos) como ampliación. Además introduce los diagramas de tallo y hojas pero no se le da especial relevancia.

Las medidas de centralización y dispersión presentan el único vacío del coeficiente de variación que serviría para relacionarlas y poder introducir la relación media-desviación.

#### 4ºESO - Académicas

El libro de 4º de matemáticas académicas [6] G.Gonzalez (2016) omite las fases de un estudio estadístico volviendo a repasar como primer contenido la población, muestra y variables estadísticas. Esto se desvincula del currículo que claramente recoge la identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.

Por primera vez el currículo no recoge el contenido de tablas pero el libro hace un repaso de la construcción de las mismas así como el cálculo de las diferentes frecuencias que se estudian.

Las medidas de posición que hemos tratado hasta ahora las divide en posición y centralización. Esto el currículo no las llega a separar y si lo hace no trabaja con las de posición.

Por último, el currículo recoge comparaciones entre distribuciones y hace una breve introducción a la estadística bidimensional, cosa que el libro no hace pues solo estudia el análisis de una sola variable y de sus parámetros.

Como en cursos anteriores, el análisis de los medios de comunicación queda en un segundo plano recogido solo en los ejercicios de ampliación del final de libro.

#### 4ºESO - Aplicadas

El libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas [3] G.Gonzalez (2015), al ser el libro de la misma editorial que las académicas comparten mismos desacordes con el currículo en las partes que son comunes a ambas asignaturas. Por ello solo se recogen en este apartado los contenidos no comunes de 4ºESO aplicadas y 4º ESO académicas. Dichos contenidos son en esencia dos: La ausencia de una explicación de las fases de un estudio estadístico y el análisis crítico de los medios de comunicación.

En cuanto al primer punto, el de las fases de un estudio estadístico, la primera parte del tema de estadística del libro recoge un esbozo de proceso con la definición de estadística: Ciencia que reúne, clasifica y estudia una serie de datos con una determinada característica en común. De esta forma se puede ver tres fases en las que se divide un estudio muy primario de estadística.

En cuanto al análisis de los medios de comunicación que recoge el currículo, el libro solo tiene un apartado al final en el que mediante una prueba PISA proponen analizar una noticia con el fin de extraer información y ver su representatividad.

### 1º Bachiller – Matemáticas I

El libro usado es: [7] C. González et al (2015). En el tema de estadística la primera desavenencia con el currículo viene con la correlación en la que no se menciona el cálculo de la correlación sino solo una interpretación visual en función de la diagrama de dispersión.

Otro punto que deja de tratar el libro conforme al currículo es el de las medias y desviaciones marginales en las que solo hace caso a las unidimensionales sin centrarse en las bidimensionales que las introduce en el coeficiente de Pearson. No les da importancia pero luego en el cálculo de la recta de regresión se vuelven a usar. Un error el no profundizar en este concepto por la utilidad que tiene a posteriori.

Otro contenido que no se recoge en el currículo pero el libro lo trata es el coeficiente de Pearson que sirve como profundización de las medidas marginales, las cuales como se ha explicado con anterioridad no han sido introducidas.

Finalmente se explica el uso de las TICs para el cálculo de estadística. Una ampliación que no viene recogida en el currículo en el bloque de estadística.

### 1º Bachiller – Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

Las disparidades en el presente libro [4] F. Alcaide et al (2016) respecto al currículo son las siguientes: En primer lugar no se explican las tablas de contingencia pasando directamente a los diagramas de dispersión dando por supuesto el conocimiento de dichas tablas.

Hasta los contenidos relacionados con la recta de regresión, lo demás se ajusta bastante a lo recogido en el currículo. En la recta de regresión el libro hace una introducción de bastantes nuevos contenidos no curriculares como son el método de los mínimos cuadrados, la varianza residual, el coeficiente de determinación, las predicciones y las regresiones.

Por último recoge una serie de precauciones que hay que tener a la hora de usar la recta de regresión como son la relación de causalidad o la importancia de la representación gráfica para la extracción de dicha recta.

### 2º Bachiller – Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

El libro de matemáticas empleado en 2º de bachiller [5] M.J. Ruiz et al (2016), no presenta ninguna desavenencia con el currículo de segundo de bachiller para las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Esto se debe a que El contenido debe estar completamente centrado en el currículo debido a que al final de curso se realiza las evaluaciones de acceso a la universidad en las que el currículo es el temario que aparece en el examen.

## **4.2. Coherencia de los libros de texto en relación al currículo**

### 2ºESO

El libro [1] Edebé (2016) trabaja sustancialmente el currículo con definiciones formales para un 2º de la ESO. Introduce el tema con los conceptos de Población e individuo. En el mismo punto explica la muestra como parte de una población sobre la que se realiza un estudio por lo que implica un orden secuencial de lo recogido en el currículo. Igualmente explica lo que es una variable estadística respecto a una población.

Aprovechando este último punto explica los tipos de variables: cuantitativas y cualitativas. Hasta el momento no se ha ejemplificado ninguna de las definiciones lo que deja esta labor en manos del profesor o profesora.

Pasando a la parte más numérica, se introducen las tablas de frecuencia a la vez que se explican las frecuencias absoluta y relativa. Aparece por primera vez un ejemplo en el que se conjugan ambos conceptos: Tablas y frecuencias.

En los gráficos, el libro recoge todos los diagramas del currículo en el mismo capítulo. Centra sus explicaciones en la construcción de diagramas pero no tanto en una introducción a la interpretación de los mismos. Antes de pasar a las medidas de centralización, el libro expone un apartado de representación de gráficas con OpenOffice.

En el apartado de medidas de centralización (o tendencia central) se trabaja el cálculo de la moda aritmética, la moda y la mediana así como su cálculo en el programa informático anteriormente citado.

Las medidas de dispersión vienen a ser trabajadas de la misma forma: Orientadas en al cálculo más que a su interpretación y con una explicación de cálculo con herramientas informáticas.

### 3ºESO – Académicas y Aplicadas

Como se ha comentado en el apartado anterior, este curso se analizará los libros de las enseñanzas académicas y aplicadas a la vez [2] J.M. Margallo (2015).

Ambos libros empiezan con un repaso de los conocimientos fundamentales: Estadística, población, muestra,... Tras ello se estudian las variables cuantitativas y cualitativas de forma técnica pero no hay ningún ejercicio o problema que ejemplifique la clasificación.

Continúan los libros con las tablas y gráficos. Las tablas muestran los valores de las variables, las frecuencias absolutas relativas y los percentiles como en el curso pasado. Los gráficos cambian el orden empezando por los sectores y se sigue con diagramas de barras e histogramas. Los diagramas de cajas y bigotes son introducidos posteriormente a las medidas de centralización y dispersión.

El tema concluye con las medidas de centralización y dispersión. Las de centralización vuelven a ser las tratadas en el tema anterior: media, mediana y moda. No se trabajan los cuartiles que vienen recogidos en el margen de una página. No se recoge el punto de los cuartiles en el punto anterior porque no vienen recogidos en el currículo pero sí que son necesarios para los diagramas de cajas y bigotes. Las medidas de dispersión incluyen el rango

### 4ºESO – Académicas

[6] G.Gonzalez (2016) Comienza el bloque de estadística recordando el vocabulario de base de la estadística: Población, muestra y variable estadística. Además recuerda de forma breve lo que es un individuo y un dato.

Las tablas y gráficas son expuestas como el curso pasado. La única salvedad es que por primera vez aparece una clasificación del tipo de gráfica en función del tipo de la variable. Esto introduce al análisis de una variable a partir de las gráficas. Se suma el polígono de frecuencias y las barras adosadas como comparativa dando la opción de comparar muestras o poblaciones.

Las medidas de centralización, posición y dispersión son estudiadas de una forma más resumida que en los cursos anteriores. Tras su estudio se introduce el análisis e medidas estadísticas viendo la utilidad de estudiar las medidas de centralización y dispersión conjuntamente.

Se puede analizar finalmente los ejercicios finales como herramientas para estudiar publicaciones de los medios de comunicación pero no se da ningún contenido teórico que facilite dicho análisis.

#### 4ºESO - Aplicadas

Como bien se ha explicado en el apartado anterior, la estadística para cuarto es transversal para ambas asignaturas: Aplicadas y académicas. La coherencia con el currículo se puede expresar de la misma forma que en 4ºESO – Académicas por lo ya mencionado. La única diferencia entre libros es que las explicaciones son más extensas y ejemplificadas en las matemáticas aplicadas por el perfil de alumno al que van destinadas.

Introduce el tema con un repaso de los conceptos básicos: Población, muestra, variables estadística,... Y una organización en tabla con frecuencias que luego se traducen en gráficos. Las frecuencias incluyen las acumuladas así como la distribución de los gráficos se expresa en función de la variable aleatoria.

Las medidas de posición y dispersión se ciñen al currículo pero trabajándolas de la misma forma que el párrafo anterior, de una forma más ejemplificada y extendida.

Con esto se finaliza la estadística en la ESO.

#### 1º Bachiller – Matemáticas I

El libro [7] C. González (2016) empieza el temario de bachiller con un repaso muy general de lo que se debe conocer en la ESO. Este repaso se centra especialmente en media y desviación típica de una variable estadística.

Tras la introducción se mete en materia con la descripción de la estadística bidimensional. Describe la variable estadística bidimensional y las tablas usadas: Tablas de contingencia o de doble entrada.

La representación gráfica de la estadística bidimensional son las nubes de puntos o diagramas de dispersión, que viene bien recogido en el libro. Introduce la correlación de forma intuitiva pero no llega a presentar cálculos para conocerla.

Continúa el libro con el coeficiente de Pearson, introduciendo de igual manera la covarianza y las desviaciones típicas de las variables unidimensionales. Estos últimos cálculos vienen recogidos como contenidos en el currículo.

Por último se explica la recta de regresión: propiedades y aplicaciones. Con dicha recta se explica simultáneamente las predicciones estadísticas que se pueden realizar y la fiabilidad de las mismas. Con ello se puede decir que el libro trabaja el currículo en plenitud.

#### 1º Bachiller – Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

La adecuación al currículo del libro [4] F. Alcaide et al (2015) es bastante fiel. Si que el libro presenta un tema adicional para el repaso de la ESO, pero el tema siguiente está plenamente dedicado a la estadística bidimensional. Esta división permite una descarga de contenidos de un solo tema en dos.

El tema de estadística bidimensional es el más ligado al currículo y empieza con una descripción de la estadística bidimensional. Inmediatamente después se introduce la nube de puntos como representación gráfica de la estadística bidimensional.

A continuación se introducen las distribuciones marginales y se mencionan las tablas de doble entrada por primera vez. Como estadístico se introduce el concepto de covarianza. Trabajando las distribuciones condicionadas se explica la independencia de dos variables.

Tras ello se introduce la recta de regresión. En este apartado hay que marcar que el libro hace especial hincapié pues introduce bastantes conceptos no recogidos en el currículo. Además añade un apartado de aplicaciones de los contenidos con lo que salva los posibles comentarios hacia los contenidos que incluyen palabras como interpretación.

### 2º Bachiller – Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales y Matemáticas II

El apartado de estadística en 2º de Bachiller es bastante similar entre las ciencias sociales y las ciencias científico-tecnológicas. Los libros, al ser de la misma editorial, son bastante semejantes en cuanto a ejercicios y teoría.

El tema de estadística empieza con la selección de una muestra y técnicas de muestreo. Una vez definidos se centra en el muestreo aleatorio así como en el número de muestras y el error en el muestreo.

Tras conocer las técnicas de muestreo pasa a definir las distribuciones centrándose en la normal y la Binomial como la tipificación de una variable. Esto sirve de introducción para trabajar las distribuciones muestrales de medias y proporciones.

Centrándose en el uso de esta técnica, introduce los intervalos pro medio de la estimación puntual. Esto viene recogido en el currículo como antesala de los intervalos de confianza.

Por último el libro se centra en la estimación por intervalos así como los errores y aplicaciones que tiene este proceder en diferentes campos de la vida: medicina, agronomía, ciencias sociales,...

## **Parte II:**

# **Análisis de un proceso de estudio de la estadística en 4º ESO**





La segunda parte del Trabajo Fin de Máster se centra en el estudio realizado por el autor sobre la estadística en el curso de 4º ESO en la asignatura de las Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

El capítulo se divide en tres capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestra el trabajo con forme al libro de referencia empleado a lo largo de la Unidad Didáctica. El siguiente capítulo trata de hacer una previsión sobre los errores y dificultades que posiblemente aparezcan en el alumnado.

Los dos siguientes capítulos son el marco del estudio en el que se describen los elementos que intervienen en el experimento y el cómo han transcurrido los hechos para poder estudiar el aprendizaje de la estadística.

Por último se recogen las conclusiones del trabajo así como una serie de preguntas abiertas y comentarios del autor.



## Capítulo 5

### La estadística en el libro de texto de referencia

En este capítulo analizaremos exclusivamente el libro que se ha trabajado a la hora de realizar el estudio. El libro mencionado es *Matemáticas Aplicadas 4º ESO (2016)* VVAA. Madrid: Editex. El libro ha sido seleccionado por el departamento de matemáticas del centro donde se realizó el estudio. Fue seleccionado según la jefa de departamento por la claridad de los contenidos y la accesibilidad de los mismos por parte del alumnado. Otro punto fuerte que se tuvo en cuenta es la amplia batería de ejercicios y problemas que presenta. La diversidad de dichos ejercicios no era muy amplia pero estaba muy bien orientada al alumnado tipo que cursa matemáticas aplicadas en 4ºESO.

El capítulo transcurre en dos partes fundamentales en la que en primera instancia se analizan los objetos matemáticos recogidos en el libro que intervienen con la estadística y luego se analiza globalmente la unidad didáctica conociendo la evolución de los contenidos a lo largo del tema y su relación con los objetos matemáticos citados en el apartado anterior.

#### 5.1. Objetos matemáticos involucrados

Tomando el texto de referencia [8] J.D. Godino et al (2016). Trataremos de analizar los diferentes objetos matemáticos que se trabajan en la parte de estadística en 4º ESO.

Los objetos matemáticos son todo elemento que se estudia en las Matemáticas. Estos elementos deben ser empleados correctamente distinguiendo unos de otros y agrupándolos cuando sea posible y necesario. Si un objeto matemático de significado preciso se emplea mal es probable que los resultados sean incorrectos. Por lo general los objetos matemáticos vienen recogidos mediante una definición. A esta definición pueden ir adjuntos procedimientos y propiedades llamados Axiomas que son aceptados sin demostrarse pues son de evidente certeza.

Por lo general podemos distribuir los objetos matemáticos en las siguientes categorías: Lenguaje, Situaciones, Conceptos, Procedimientos, Propiedades y Argumentos. Para mayor representación visual se expondrán los objetos matemáticos como en el trabajo citado anteriormente.

<b>LENGUAJE</b>	
<p><i>Verbal:</i> Estudio, estadística, variable estadística, población, muestra, representativa, tabla, frecuencia relativa, frecuencia absoluta, gráfico, diagrama, barras, histograma, sectores parámetros, medidas, media, moda, mediana, desviación típica, etc.</p> <p><i>Gráfico</i></p> <p>→ Tablas de frecuencias con columna de marca de clase y frecuencia relativa.</p> <p>→ Diagramas de barras, histogramas y sectores</p> <p>→ Polígonos de frecuencias</p> <p><i>Simbólico:</i> <math>x_i, N, f_i, h_i, p_i, F_i, H_i, P_i, [ , ], \bar{x}, \Sigma, Me, Mo, R_a, R_r, \sigma, \sigma^2, /, \cdot, ,</math></p>	
<b>SITUACIONES</b>	<b>CONCEPTOS</b>
Problemas contextualizados con la intención de aplicar algún conocimiento relacionado con la estadística a un contexto	Previos
Problemas descontextualizados para ejercitar cálculos sistemáticos	Fundamentos de estadística: Población, muestra, variable estadística, Cualitativas, cuantitativas, Frecuencia absoluta, relativa, porcentaje Diagrama de barras, de sectores, histograma y pictograma
Noticias de medios de comunicación para aplicar lo aprendido	Medidas de centralización, media moda y mediana
	Emergentes
	Muestra representativa Frecuencias acumuladas Gráficas de frecuencias acumuladas Medidas de dispersión: Recorridos, desviación típica y varianza
<b>PROCEDIMIENTOS</b>	<b>PROPIEDADES</b>
La elaboración de tablas de frecuencias, el cálculo de la moda, media, máximo, mínimo, recorrido, construcción de diagramas son procedimientos que, o bien, recuerdan los estudiantes o bien son fáciles de dominar. El cálculo de la mediana, la elaboración de tablas de frecuencias agrupadas en intervalos y la construcción del histogramas requieren una atención especial. Algo similar ocurre con el cálculo de la desviación típica y la varianza.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Las medidas de centralización son marcas de tendencia de un grupo de datos.</li> <li>- Para variables cualitativas solo tiene sentido la moda.</li> <li>- La mediana es más representativa que la media en distribuciones asimétricas.</li> <li>- Los histogramas son solo empelados en variables cuantitativas continuas.</li> <li>- Polígono de frecuencias y sectores es aplicable en cualquier tipo de variable.</li> </ul>
<b>ARGUMENTOS</b>	
<p>¿Por qué se estudia en este curso estadística? Se busca que el alumnado adquiera el interés por establecer una pauta de comportamiento en la población respecto a temas de interés. Con las herramientas estadísticas se consigue que se haga un estudio deductivo basándose en gráficos y medidas de centralización.</p>	

## 5.2. Análisis global de la unidad didáctica

Para hacer un análisis de la unidad didáctica usamos el método propuesto por el documento [8]J.D. Godino(2016). En la página 10 cita un punto llamado análisis global de una lección la cual presenta dos fases. En la primera fase hay que enfocar el objetivo y la estructura de la unidad didáctica. Tras ello se puede proceder a estudiar la segunda fase que es un análisis en profundidad. En este apartado solo nos centraremos en la primera fase ya que es interesante conocer una visión global de la unidad didáctica.

El libro estudiado recordamos que es *Matemáticas Aplicadas 4º ESO (2017)VVAA. Madrid: Editex*. El tema de estadística es el número 9 y está orientado para un alumnado de 15-16 años de edad. Como visión general de los puntos del tema podemos decir que siguen el siguiente esquema:



Figura 3 : Esquema de un punto en la Unidad Didáctica

El tema empieza con un recordatorio de los conceptos previos trabajados en cursos anteriores. El primer concepto que se recuerda es el de “Estadística” en la caratula del tema. Con esto se establecen los tres pasos a seguir a la hora de realizar un estudio estadístico: Recolección de datos, Estudio de datos en tablas o gráficos y obtención de medidas representativas. Simultáneamente explica las posibles aplicaciones de la estadística en la vida cotidiana.

En el primer punto del tema se trabajan los elementos que componen un estudio estadístico relacionado con la intensidad lumínica de las estrellas: Población: las estrellas, muestra: conjunto de estrellas estudiadas e individuo: cada estrella estudiada. Con este ejemplo se consigue diferenciar claramente entre población y necesidad de sacar una muestra pues no son conocidas todas las estrellas y las que son conocidas son una población bastante grande.

En un sub-apartado se centra en las variables estadísticas dando el significado de la misma y haciendo referencia a un nuevo ejemplo sobre variables posibles que se pueden extraer en una clase: Peso del alumnado, color de pelo,... Con esto se trabaja la tipología de las variables estadísticas generando una clasificación dicotómica.

Por último, en este punto, hay una colección de ejercicios sobre la clasificación de variables estadística y ninguno sobre los elementos que componen el estudio.

El siguiente punto son las frecuencias estadísticas y directamente entra en materia con un repaso de frecuencia absoluta, relativa y porcentajes. Por primera vez introduce el lenguaje matemático para representar el cálculo de dichas frecuencias. Con este repaso de conocimientos previos da paso a generar un nuevo conocimiento que son las frecuencias acumuladas como la suma del valor  $i$ -ésimo que recoge las frecuencias anteriores. A continuación, como ejemplo resuelto, construye una tabla de partiendo de

un conjunto de datos de una variable estadística cuantitativa discreta. Por último dos ejercicios que presentan a aplicar la misma mecánica que el ejercicio resuelto anterior.

El punto tercero introduce las representaciones gráficas de una forma secuencial: Gráficos de barras, histogramas y diagramas de sectores. Cada uno lo ejemplifica de una forma resuelta para facilitar su entendimiento. Este punto se vuelve a considerar repaso pues es un contenido previo trabajado en cursos anteriores. Los ejercicios del punto se quedan cortos y dan la sensación de que los valores tomados no son atractivos a la hora de construir tablas.

Continuando con lo recogido en el libro se trabajan las medidas de centralización. Estas medidas de centralización son las mismas que las recogidas en el currículo de 3º Eso por lo que deberían haber sido vistas: Media, mediana y moda. La diferencia con el curso anterior es que aparece por primera vez la fórmula matemática como parte de la definición. Para su explicación no aparece ningún tipo de problema del cual sacar conjuntamente las tres medidas sino que para cada una se plantea un problema. Los ejercicios tampoco las relacionan sino que hay uno para media, otro para moda y otro para mediana.

El último punto oficial del tema son las medidas de dispersión. Estas medidas sí que son explicadas mediante un ejemplo para hacerlas más accesibles para el alumnado. Las medidas que recoge el libro son los recorridos o rangos, la varianza y la desviación. Aunque son todas medidas estudiadas en el curso pasado, son la varianza y la desviación la que atraen más la atención con ejemplos de tablas resueltos y un recuadro de ejercicios bastante completo.

Para finalizar el tema quedan dos bloques: “Estadística con Excel” y “Ejercicios y actividades”. El primer bloque mencionado recoge en una hoja como trabajar la estadística con el programa Excel. En esencia no trabaja las herramientas estadísticas sino que más bien las fórmulas matemáticas de suma, resta, multiplicación y exponentes.

El otro bloque restante es una batería de ejercicios y problemas los cuales se ordena en concordia con el orden seguido por el libro. A su vez se les asigna una dificultad en función de lo relleno que se encuentre un cuadrado, generando 3 niveles: nada relleno es el más accesible, medio relleno es de dificultad intermedia y el cuadrado completo es un ejercicio con un nivel más alto de complejidad. El bloque finaliza con una prueba PISA de interpretación de gráficas estadísticas y una autoevaluación.

Como conclusión final del análisis global de la unidad didáctica en el libro se puede considerar bastante logrado el trabajo realizado por los autores ya que trabaja todos los puntos que se recogen en el currículo. La teoría presenta un lenguaje igual demasiado técnico para el tipo de marco en el que se va a situar el estudio, descrito en el capítulo 8 del presente documento. Los ejercicios sí que se quedan escuetos en las hojas de teoría pero se completan con las hojas del final del tema en las que trabajan todos los contenidos en diferentes niveles de dificultad.

En el siguiente esquema se puede ver cómo evoluciona el proceder de la unidad didáctica de forma secuencial que tiene como finalidad responder a la pregunta motriz:

*¿Cómo se hace un estudio estadístico?*

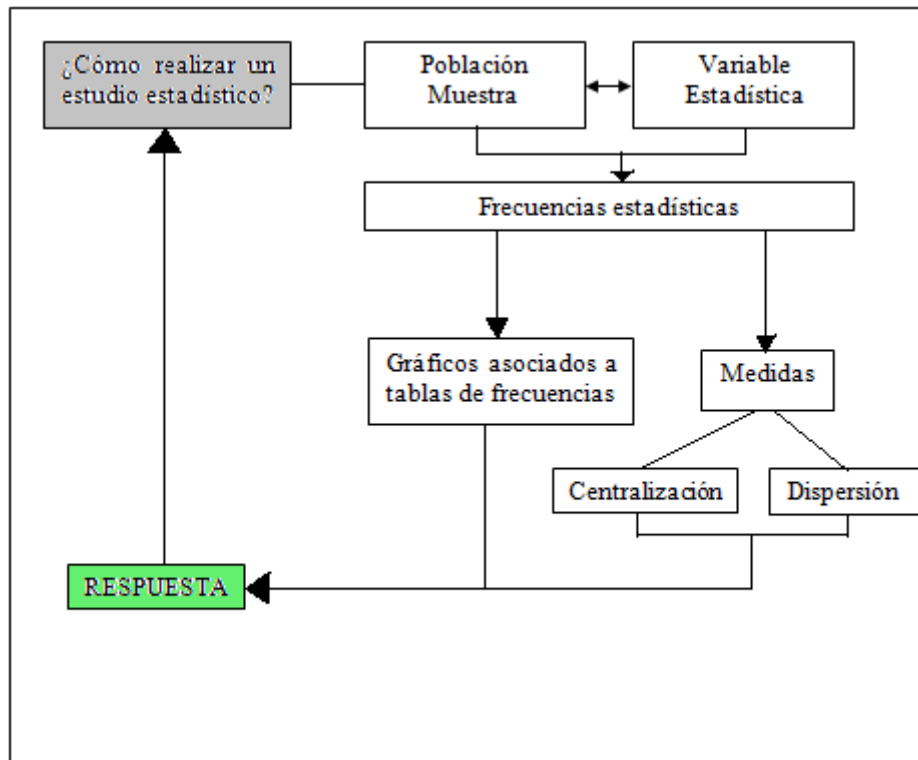


Figura 4: Mapa conceptual de un estudio estadístico

### 5.3. Otros aspectos relevantes

Para dar importancia a los documentos publicados en los medios de comunicación así como trabajar el espíritu crítico del alumnado, el libro dispone de una serie de actividades complementarias en la página web de la editorial accesibles solo con el código del libro. Estas actividades se centran en análisis de noticias de diferentes temáticas como medio ambiente, sanidad, política,... Esto puede servir como material para el profesorado pues también dispone de una sección destinada para docentes.





## Capítulo 6

### Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

El estudio de dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas, así como de cualquier otra materia, puede ser empleado por la figura docente para crear situaciones de conflicto entre el alumno. El profesor frente a este conflicto hace de figura resolutoria y ayuda al alumno a entender el error y poder superarlo.

Tratar de definir el origen de un error presente en un alumno es complejo. El error puede nacer de un error en el aprendizaje anterior que al ser aplicados en un contexto determinado es eficaz pero en otros contextos no es eficaz. También puede deberse a la inercia educativa en la que una metodología del aprendizaje le ha servido pero llega un punto en el que desencadena error. Estos son meros ejemplos del amplio abanico de orígenes del error.

Una unidad didáctica debe tener en cuenta los errores que se van a presentar en los alumnos. De esta forma el profesor o profesora debe disponer de recursos y metodologías para ayudar al alumno a enfrentarse al obstáculo y que sea capaz de superarlo.

#### 6.1. Errores y posible origen

Para el presente apartado he seleccionado una serie de documentos como artículos o trabajos en los que diferentes autores han dado diversas clasificaciones a los tipos de error.

Para Silvia del Puerto, Silvia Seminara y Claudia Minnaard en su trabajo [9] Del Puerto, S. et al (2007). Las autoras realizan una clasificación del origen del error matemático basándose en el estudio de Brousseau en el que enfocaba el error desde un punto de vista más transversal a todas las materias. Los tipos de errores que presentan son:

- **Ontogénicos o psicogénicos:** Debidos a las características de desarrollo del adolescente. Por ejemplo, para comprender la idea de frecuencia estadística hay que tener claro la teoría de proporcionalidad.
- **Didácticos:** Debidos a las elecciones didácticas hechas para establecer una situación de enseñanza. Por ejemplo empelar lenguaje matemático como el sumatorio ( $\Sigma$ ) cuando los estudiantes apenas se aclaran con las operaciones directas.
- **Epistemológicos:** Relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser identificados en su origen debido a que se estudia el grado de comprensión del concepto. Por ejemplo, el deber explicar el significado de la media para que salga el valor entre el dato más alto y el más bajo.

En el origen de los errores hay más concordancia a la hora de hacer categorías pues las preguntas relacionadas con el conocimiento y su creación vienen haciéndose desde la edad antigua hasta los días de hoy teniendo su esplendor en la revolución científica con René Descartes.

Por su parte la clasificación de los errores matemáticos por su tipología sí que ha presentado una mayor discrepancia, recogida en el trabajo [10] Engler, A. et al (2006). En el trabajo se recogen clasificaciones de diferentes autores y divulgadores matemáticos. Desde Davis en 1984 hasta la XXV Reunión de Educación Matemática (2002). Tomamos esta última como más fidedigna pues es un acuerdo entre varios

autores en una cumbre oficial en la que presentaron una organización tomando como base la clasificación empírica de los errores realizados por otros autores con anterioridad.

- A. Datos mal utilizados
- B. Interpretación incorrecta del lenguaje
- C. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones
- D. Errores al operar algebraicamente
- E. No realizar una verificación de resultados parciales o totales
- F. Errores lógicos
- G. Errores técnicos

Para centrar más el trabajo en el bloque que atañe al estudio, la estadística, se toma como referencia el estudio [11] R. Delmas, (2006) El cual analiza los errores más comunes en la educación secundaria sobre la estadística. Los errores observados fueron los siguientes:

- En el diseño de la recogida de datos. Creer que realizar una recogida de datos aleatoria reduce el error de muestreo
- En la estadística descriptiva. Creer que cuantos más datos tiene un gráfico estadístico, mayor es la desviación de los datos.
- En los gráficos estadísticos. Incurrir en errores al analizar estadísticos como por ejemplo que una distribución con una mediana mayor que una media estaba sesgada hacia la derecha.
- Malinterpretación del diagrama de cajas.
- En distribuciones normales se tiende a apoyar las respuestas a diferentes preguntas en distribuciones simétricas sin tener en cuenta que puedan estar sesgadas.
- Estadística bidimensional. No se realiza bien la extrapolación con diagramas de dispersión.
- Variabilidad del muestreo. No distinguir bien qué tipo de variable se ajusta mejor a un muestreo, y cómo inferir resultados de la muestra a la población.
- Intervalos de confianza. Creer que el nivel de confianza corresponde con el porcentaje esperado de valores del muestreo válidos en el intervalo de confianza.

Si cruzamos estos errores con lo recogido en el texto de [9] Del Puerto. S et al 2007, los errores más frecuentes en la estadística del nivel de 4º ESO serían:

- Confundir frecuencia absoluta y acumulada
- Confundir frecuencia absoluta y relativa
- Confundir desviación típica con varianza
- Comparar dos distribuciones usando la desviación sin tener en cuenta que tienen medias diferentes
- Confundir medidas de centralización y operar con ellas. Ejemplo: sumar medias.

## 6.2. Dificultades

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas nos encontramos con una gran variedad de dificultades que son potencialmente generadoras de errores, que se pueden organizar en los siguientes temas:

### *a) Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.*

La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos. Esta combinación puede derivar en conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Uno de estos conflictos nace de la ayuda de la lengua común que deriva en la interpretación de los conceptos matemáticos. Por ello el concepto matemático que se quiere transmitir debe estar en sintonía con el nivel lingüístico del alumnado.

### *b) Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.*

Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas que se dan en relación con las estructuras de pensamiento matemático que disponen los alumnos.

Con la subida de la complejidad de los conceptos, se suele orientar más el conocimiento hacia un trabajo práctico en vez de uno teórico con el fin de justificar su enseñanza. El abandonar ciertas demostraciones formales a favor de aplicaciones matemáticas implica una pérdida del pensamiento lógico. El fomentar la capacidad lógica no debe anteponerse a los métodos aplicados sino que deben acompañarlos.

### *c) Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza*

Este tipo de dificultades están relacionadas con la institución escolar, con el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza. ES decir todas están vinculadas con el docente así como con las instituciones. Son las instituciones escolares las que deben propiciar una organización que reduzca las dificultades gestionando los currículos, los recursos y los métodos de enseñanza.

El currículo puede presentar diversas dificultades al no tratar una de las siguientes 4 características: Las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de la matemática escolar.

Por último, los métodos de enseñanza deben estar ligados al currículo como a la institución escolar. Es un ejemplo los ritmos de enseñanza adaptándose al alumnado.

### *d) Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos*

El tener diferentes herramientas para evaluar el nivel de desarrollo intelectual del alumnado nos permite prever diferentes dificultades que se pueden presentar a la hora de realizar una lección. Esto atañe al desarrollo cognitivo así como al nivel de matemáticas que presenta el alumnado. Conocer los estadios generales por los que debe pasar cada individuo constituye una información valiosa a la hora de planificar la enseñanza.

Nos encontramos sin embargo con diferentes teorías de desarrollo cognitivo y pocas de ellas se centran en el ámbito matemático. Diferentes son los enfoques que les podemos dar a estas teorías para plasmarlas en el nivel matemático y viceversa: un mismo nivel matemático es complejo plasmarlo en una sola teoría.

*e) Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales*

Esta dificultad puede estar ligada a la relación alumno – matemáticas, alumno – docente, alumno – sociedad... Las podemos clasificar hacia dentro del aula y hacia fuera del aula. Hacia dentro del aula es sabido que las matemáticas en la mayoría producen rechazo pero son muchos los desencadenantes de esta sensación: miedo, tensión, ofuscación,... Así como la figura docente que es la parte humana de las matemáticas. Este rechazo puede generar bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática del alumnado.

Hacia fuera del aula, la situación personal del alumno, así como su dedicación a las matemáticas en su vida extraescolar le lleva a despertar un sentimiento de rechazo o aceptación de las matemáticas.

## Capítulo 7

### El proceso de estudio

En el presente capítulo se recoge el proceso llevado a cabo para realizar el estudio. El estudio tuvo lugar entre el 9 de abril del 2018 y el 4 de mayo del mismo año y el 10 de Mayo como día excepcional para la última fase que se ve a continuación. Este periodo se repartió en 3 segmentos claramente diferenciados.

- Clases convencionales: docencia en aula convencional en la que mediante la interacción del profesor con los alumnos se explicaban los contenidos de estadística. Al final del mismo periodo se evaluarían con una prueba escrita que serviría como cuestionario base para realizar la comparativa en la que se basa el estudio. Este segmento duró dos semanas, desde el 9 hasta el 19 de abril del 2018.
- Proyecto: Un estudio denominado “Preguntamos en la calle” basado en la metodología CANVAS. Los resultados del estudio y mis propias anotaciones a lo largo de este segmento sirven como complementos para el estudio realizado a lo largo de las clases convencionales. El proyecto transcurrió desde el día 20 de abril hasta el día 4 de Mayo, dos semanas.
- Exposición: El segmento más corto que sirvió para la recogida final de datos para el estudio. Las exposiciones acontecieron el 10 de Mayo siendo un solo día.

La asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas está programada para disponer de 4 horas semanales. En el calendario que se muestra a continuación se ve la programación de la unidad didáctica: Estadística.

Tabla 5: Calendario de la experimentación

	I	II	III	IV
1ª Semana	Variable Estadística + Tablas de frecuencia	Frecuencias absolutas + Relativas + Acumuladas	Gráficos: → Barras → Histogramas → Sectores	Repaso hasta la fecha (1ª muestra)
2ª Semana	Medidas de centralización	Medidas de dispersión	Examen	Introducción del proyecto
3ª Semana	Elección de V.E. Cualitativas	Elección de V.E. Cuantitativas	Redacción Encuesta	Repaso Examen
4ª Semana	Salida a la calle	Recolección de datos	Análisis de datos	Análisis de datos
5ª Semana (10 mayo)			Exposiciones	

### **7.1. Distribución del tiempo en clase**

Las clases eran de 55 minutos y como bien se ha explicado en la introducción del tema acontecían 4 por semana. El tiempo en aula se distribuía en cuatro apartados necesarios para el seguimiento de la unidad didáctica. Esta metodología se seguía para aprovechar al máximo el tiempo de clase pues nos situamos a las puertas del final de curso y se debe completar la programación didáctica.

Las 4 fases de cada clase son:

#### 1) Repaso

Un repaso general de lo que se ha estudiado de estadística hasta la fecha. Transcurre en los primeros 5 minutos de clase y es un repaso fugaz sin profundizar en explicaciones salvo las de la clase anterior si queda alguna duda. Esto es eficaz por el hecho de que queremos conseguir transmitir la idea de realizar un estudio estadístico, algo que se puede presentar de forma secuencial.

#### 2) Corrección de tarea

Este punto comienza con la anotación de la elaboración por cada individuo del alumnado. Las personas que no han realizado la tarea recibían una falta en el libro de notas del profesor. La corrección de tarea cerciora al profesorado de que el alumnado está realizando trabajo autónomo en casa.

#### 3) Teoría y ejercicio resuelto

Tras la corrección de tarea se procede a continuar con el temario acorde a la programación del profesor. Cada día se trabaja un tema con una vinculación al día pasado. Esta vinculación estructurara el conocimiento de forma secuencial y rígida. Para completar la sesión teórica se empela un ejemplo resuelto para facilitar el aprendizaje y hacer las matemáticas mas aplicadas por ser más visuales.

#### 4) Mandar tarea

Con este último punto se trabaja la continuidad de lo aprendido en clase así como el trabajo autónomo del adolescente. Entre semana la tarea era bastante simple constando de 2-3 ejercicios de dificultad más baja mientras que la tarea que se mandaba para el fin de semana contenía 2-3 ejercicios y uno más complejo para repasar lo estudiado en la semana.

Este guión de la clase se siguió férreamente para crear una dinámica de trabajo con la que los alumnos no se sintieran descolocados. También fue útil para la observación del estudio en el que se podían intuir actitudes que iban a desembocar en diferentes

### **7.2. Actividades adicionales planificadas: El proyecto**

El motivo del estudio se centra en este punto: Un proyecto. Como el estudio se sitúa en el marco de un alumnado que cursa la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas, lo más sensato es generar situaciones de estudio en las que se hagan prácticas las matemáticas.

El proyecto se resume en realizar un estudio estadístico sobre algún tema escogido por el alumnado. La metodología seguida es la de CANVAS, un proceso analítico de empresas adaptado al trabajo por grupos en la enseñanza. A continuación se explica más detalladamente el proyecto.

Un Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) es una metodología de aprendizaje en la que se solicita a los alumnos, en pequeños grupos, planificar crear y evaluar un proyecto que responda a las necesidades planteadas por una determinada situación. Esta metodología ayuda con el desarrollo de diversas capacidades como el pensamiento crítico así como la búsqueda y manejo de información. Con el ABP el aprendizaje de conocimientos tiene el mismo peso que la adquisición de habilidades y actitudes frente al trabajo. Al hacer suyo el aprendizaje y el trabajo, el alumno establece un contrato consigo mismo por el cual sabe que el incumplimiento del mismo desemboca en el no superar la asignatura.

Un proyecto en ABP consta de elementos básicos con los que se lleva a cabo.

- Producto final: Debe poder mostrarse y ser evaluado
- Pregunta motriz: Idea de partida con la que el alumnado debe establecer líneas de trabajo para resolverla. Puede ser elegida por el alumnado o establecida por la figura docente.
- Rigor curricular: Lo trabajado en proyecto debe ir en sintonía de lo marcado por el documento regulador de la educación.
- Competencias transversales: debe trabajar las competencias transversales de igual manera que habrían trabajado en una lección convencional.
- Evaluación coherente: Debe marcarse unos estándares de corrección

En esta metodología los roles de profesor y alumno cambian conforme a lo conocido tradicionalmente. El profesor pasa a adquirir un papel de acompañante en vez de guía, delega sus labores de encargado del aprendizaje en el alumno, complementa las carencias del alumnado en cuanto a conocimientos con material extra y homogeniza el trabajo de los diferentes grupos para alcanzar diferentes etapas del proyecto y finalizar a la vez. Por parte del alumno pasa de tener una actitud pasiva respecto al conocimiento a una más activa, asume el papel de miembro de un grupo dejando atrás el carácter individual, estructura el conocimiento de forma que resulte útil su aplicación y es responsable de su proceso de aprendizaje.

El proyecto se basó en realizar un trabajo de investigación sobre un tema acordado por la clase. Para ello la estructura en el tiempo del proyecto fue la siguiente: Primero la selección del tema. Dicho tema debería ser estudiado por 6 variables de las cuales dos serían cualitativas, dos cuantitativas continuas y dos cuantitativas discretas. A su vez una al menos de todas ellas debería ser obtenida mediante observación.

Una vez han sido escogidos los temas en cada una de las aulas y las variables que se analizarán, se realiza una salida a la calle para recopilar información. La encuesta está redactada por el alumnado de forma que las preguntas sean claras y no resulten ofensivas para los encuestados.

Tras realizar la recolección de datos, se ponen en común con la intención de tener una muestra mayor. Con un volumen de datos mayor, el alumnado tiene sesiones de trabajo libre en las que bajo su criterio deben seleccionar las frecuencias que calcularían, los gráficos que representarían y las medidas de centralización y dispersión que emplearían para presentar una exposición a la clase.

Las dos últimas sesiones sirven para la ordenación de información y disposición de la misma en cartulinas.

La duración del proyecto oficialmente era de dos semanas pero la parte teórica necesaria para arrancar con los conocimientos estadísticos se dieron anteriormente en dos semanas lectivas que finalizaron en un examen como se presenta en el calendario al principio del capítulo.

### **7.3. La tarea: Actividad autónoma de los alumnos prevista**

La tarea se centraba en ejercicios del libro de texto ya que estaban bien organizados para ser planteados en casa y realizarlos de forma autónoma. Los ejercicios se basaban en la teoría explicada en clase con el fin de asentar los conocimientos. Como hemos visto en el primer apartado del capítulo todos los días se mandaba tarea con la finalidad de no perder la dinámica de trabajo continuado.



## Capítulo 8

### Experimentación

En este último capítulo se detalla la experimentación realizada sobre la didáctica y el aprendizaje del bloque de estadística de la asignatura de matemáticas en dos grupos de 4º ESO de un instituto de educación secundaria.

Con la experimentación se deseaba estudiar no solo el aprendizaje que realiza el alumnado sino también como enfocar la enseñanza de las matemáticas a un alumnado que proviene del Programa de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento (PMAR) y adaptar el temario para obtener garantías de éxito.

Para realizar esta comparativa se cuenta con los resultados de las pruebas realizadas por el autor del presente trabajo, los cuales fueron obtenidos mediante pruebas escritas así como la realización de un proyecto siguiendo la metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos recogida en el capítulo 7.

Tras la exposición de las pruebas realizadas y del alumnado sobre el que se ha realizado el estudio, se expondrán una serie de comportamientos esperados en función de lo descrito en el capítulo 6: dificultades y errores previsibles en la unidad didáctica.

A continuación se hará una exposición de los resultados obtenidos mediante el cuestionario y mediante las observaciones realizadas en aula así como las realizadas mediante la redacción del proyecto.

Para finalizar se enfrentarán los resultados obtenidos a los resultados esperados. Con esta comparación se podrá clasificar los errores y dificultades en las clasificaciones descritas en el capítulo 6 dando validez a las mismas. La discusión de los resultados nos enfrentará también a los dos grupos para poder sacar diferencias entre diferentes tipos de aprendizaje de la misma asignatura para alumnado con ritmos de aprendizaje diferentes.

#### 8.1. Muestra y diseño de la experimentación

##### El instituto

Como se ha citado en la introducción del capítulo, la muestra de nuestro estudio está sacada de un instituto de Educación Secundaria. Dicho instituto está situado en el II Ensanche de Pamplona y lleva en funcionamiento desde 1845 adaptándose a las diferentes normativas de educación desde su fundación. Hoy en día recoge a más de 1000 alumnos entre ESO y Bachiller. Dispone de los 4 cursos de la ESO, con itinerario PMAR incluido, y Bachiller con todos los itinerarios disponibles bajo los modelos A y G de educación siguiendo lo recogido por la normativa vigente.

El centro dispone de acreditaciones de calidad como la ISO 9001:2000 en cuanto a calidad de gestión y la calificación de *Centro Excelente* según la SGCC 2013. También está dentro de una red de institutos de Navarra por la Excelencia educativa en centros públicos.

El centro cuenta con un alumnado muy heterogéneo siendo un centro de referencia en el ámbito de la inclusión social. El alumnado con origen extranjero, con dificultades para el aprendizaje o con algún tipo de diversidad funcional tiene cabida en el centro pues está en la misión y visión del centro el garantizar una educación de calidad para cada alumno adaptando, en medida de lo posible, las instalaciones como el temario. El

claustro de profesores tiene el deber de hacer accesible la educación y tomar las medidas necesarias, junto a la dirección el centro como al departamento de educación, para que todo el alumnado se sienta parte del centro y de la comunidad educativa.

La adaptación viene claramente recogida en el plan de convivencia del centro así como las directrices que marca el departamento de educación de Navarra.

La muestra

El alumnado escogido para realizar el estudio son dos grupos de 4ºESO. Siendo más precisos son un único grupo recogido bajo la nomenclatura 4ºD en el que las asignaturas de Lengua y Matemáticas las realizan en dos grupos separados para adaptar más el temario a las necesidades de cada grupo. El resto de asignaturas las realizan en común fomentando así la inclusión en el aula de todos y todas las integrantes que componen la orla de 4ºD.

La división de los grupos en las asignaturas mencionadas fue autorizada por el departamento de educación justificando que los recursos personales lo permitían y se mejorarían tanto la calidad de la educación como los resultados.

En total la clase de 4ºD se compone de 28 integrantes y la división se hizo según diferentes criterios que se detallan a continuación. El alumnado de 4º D es un curso que se podría denominar como “Cajón de sastre” ya que recoge a bastantes perfiles de alumnado con diferentes carencias formativas. El alumnado está orientado desde que empiezan 4º ESO a ciclos de Formación Profesional. Esta orientación se debe a que bien es el propio alumno o alumna el que ha escogido ese itinerario o ha sido el orientador de centro el que considera que esa persona no está lista para realizar un bachiller de cualquiera de los tipos que hay.

La principal diferencia para separar al alumnado fue la tipología del 3º ESO que habían cursado. Los alumnos que provenían de PMAR fueron destinados a un grupo mientras que el resto se le colocó en otro. Al grupo que de procedencia PMAR le llamaremos de 4ºDP y al otro 4ºD. En el Grupo 4ºDP se añade al alumno con necesidad de adaptación curricular por incorporación tardía o desconocimiento de la lengua ya que se podría considerar más accesible esta aula de cara a alcanzar la titulación en la ESO. Por ello nos quedan dos grupos caracterizados de la siguiente forma:

4ºD: Alumnos repetidores y alumnado que no desea continuar con los estudios de bachiller sino que se decanta por un camino más profesionalizante. En total este grupo se compondría por 16 integrantes.

4ºDP: Alumnado que en 3ºESO siguió la metodología PMAR y alumnado de incorporación tardía o que desconoce el idioma. En total este grupo se compondría de 12 estudiantes.

### El objetivo

El objetivo principal del estudio es ver la adaptación que hay que realizar en el bloque de estadística para dos grupos de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas para lograr el éxito. Como objetivos secundarios se presentan el estudiar la adaptación del alumnado de PMAR a un 4ºESO convencional y estudiar las diferencias entre alumnados con diferentes niveles de conocimiento previo.

### El Diseño de la experimentación

La experimentación se realizó en dos fases, siendo la primera más tradicional en la los resultados se extrajeron de la prueba escrita al final de la unidad didáctica y la segunda más actual con la metodología ABP explicada anteriormente.

La primera fase o fase teórica transcurrió durante dos semanas en las que las sesiones se trabajaban conforme a lo descrito en el capítulo 7 apartado 1: Distribución del tiempo en clase. En esta fase se buscó estudiar la enseñanza tradicional y su efectividad para alumnos de un perfil menos académico y más aplicado. Simultáneamente se trabajó la adquisición de conocimientos y síntesis de información variando la dificultad de los ejercicios dentro de cada uno de los dos grupos. Finalmente se acabó con una prueba escrita en la que se recogió las calificaciones de los alumnos con la intención de observar carencias y puntos fuertes de la formula educativa tradicional en la estadística.

La segunda fase o fase práctica fue trabajada en dos semanas y se centró más en la evaluación de contenidos retenidos por el alumnado. Esta fase tuvo su propia extracción de resultados en forma de presentación oral de los proyectos realizados.

En ambas fases se realizaron anotaciones sobre los objetivos secundarios con la finalidad de sacar conclusiones que complementen el trabajo realizado.

### **8.2. El cuestionario**

Para la experimentación se han realizado dos tipos de observaciones. La primera basada en un cuestionario compuesto con diferentes ejercicios estadísticos para observar fortalezas y carencias tanto en la metodología, el alumnado y la propia matemática. Las segundas observaciones se hicieron mediante la entrega de las exposiciones de los alumnos del proyecto y metodología CANVAS.

#### 1º Cuestionario – Parte teórica

En este primer cuestionario se estudiaban los mismos ítems pero a diferentes niveles para observar la ratificar la diferencia entre alumnado así como para intentar garantizar el éxito en ambos grupos.

ITEM 1: VARIAS VARIABLES. Clasificación de variables – Población y muestra.

*Indica el tipo de variable estadística que estamos estudiando en cada caso y justifica si es mejor estudiar la población o una muestra*

Este ejercicio está planteado de forma que el alumnado pueda ver la relación de la estadística con el contexto más cercano: el día a día. Las premisas viene dadas por lo que es el alumnado el que debe realizar la clasificación ← ser conocedor de la parte teórica que respecta a las variables estadísticas. Por otro lado trabaja el tipo de estudio que se va a realizar: Muestral o Poblacional.

ITEM 2: EL EXAMEN: Completar tablas de frecuencias

*En un examen se han presentado 200 personas para ocupar unos puestos de trabajo. Las notas son las siguientes:*

Notas	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_i$	6	25	34	42	50	27	13	3

*¿Qué tipo de variable es? ¿Qué frecuencias puedes obtener? Extráelas.*

El problema nos presenta una situación cotidiana como es la de los resultados obtenidos por una población tras realizar un examen. Lo que se desea conseguir es la

comprobación de que el alumnado es capaz de mostrar los datos en forma de tabla así como la capacidad para extraer diferentes frecuencias de un contexto cualquiera.

Cabe añadir que en el ejercicio para la clase de 4ºDP, la tabla en vez de darse en posición horizontal se le da transpuesta en forma vertical para facilitar la interpretación de datos.

ITEM 3: COMPLETAR LA TABLA. Deconstrucción de tablas para obtener datos.

*Completa la siguiente tabla*

$X_i$	$f_i$	$F_i$	$p_i$							
10		4		Color	$I_i$	$X_i$	$f_i$	$h_i$	$p_i$	$^{\circ}$
20	5		10		[0,5)			0.2		
30		16			[5,10)		4			
40	10				[10,15)			0.16		
50		41			[15,20)		6			
60			18		[20,25)			0.16		
					[25,30)		2			
					TOTAL		25			

*4ºD* *4ºDP*

Como contraposición del ejercicio anterior, este ejercicio parte de una tabla con columnas sin completar pero que analizándola bien puede extraerse los datos ausentes. Nótese la diferencia entre el 4ºDP donde con una operación matemática se completan los huecos de las columnas incompletas mientras que en 4ºD deben estudiar y combinar la ausencia de datos en tres columnas.

ITEM 4: REPRESENTACIÓN DE TABLAS

*4ºD: Representa el ejercicio anterior con los diagramas oportunos*

*4ºDP: Representa los datos anteriores en un histograma y en un diagrama de sectores*

En este ejercicio se busca la capacidad del alumnado de representar los datos de una tabla de frecuencias en diferentes gráficos. Para el alumnado de 4ºDP se dicen que gráficos buscamos mientras que el de 4ºD se busca que sean ellos los que representen

ITEM 5: EL DADO. Medidas de centralización y dispersión

*La siguiente tabla muestra los resultados de lanzar un dado 50 veces*

4ºDP				4ºD			
Número	Nº Veces	$X_i \cdot f_i$	$X_i^2 \cdot f_i$	Número	1	2	3
1	8			Nº Veces	8	12	5
2	12			Número	4	5	6
3	5			Nº Veces	9	6	10
4	9						
5	6						
6	10						
TOTAL							
Calcula la media, mediana y moda				Calcula las medidas de centralización			
Calcula la desviación típica y la varianza				Calcula las medidas de dispersión			

El ítem de medidas de centralización y dispersión se trabaja conjuntamente con la intención de dar sentido a la interpretación conjunta de las medidas de centralización y de dispersión de forma libre por el alumno. Lo que se observaría en este apartado sería el sentido de los resultados que otorgan el alumnado en función de los datos dados.

### 2º Cuestionario – Parte Teórica

El segundo cuestionario es más general ya que no tiene unas preguntas definidas pero sí que se espera un producto final que se podrá usar como resultado y trabajarlos comparativamente.

Por una parte están los conocimientos teóricos que quedarán plasmados en el documento base de la metodología CANVAS. Dicho documento sirve como antesala para saber si el alumnado ha sabido responder a la pregunta motriz: *¿Cómo se realiza un estudio estadístico?*

Los resultados del proyecto son exposiciones orales con un soporte en cartulina del trabajo realizado. Cabe destacar que la exposición se evaluaba en función de una rúbrica que disponían los profesores y que había sido expuesta a la clase en sesiones anteriores.

### **8.3. Cuestiones y comportamientos esperados**

Las diferentes situaciones esperadas son acordes a un curso de 4ºESO de matemáticas aplicadas. Además se añade el planteamiento extra que se puede dar en el alumnado procedente de PMAR:

#### *Diferencia de resultados entre 4ºD y 4ºDP*

Se espera una diferencia de los resultados significativa entre el alumnado procedente del 3ºESO, correspondiente a 4ºD, y el procedente de 3ºPMAR, ahora llamado 4ºDP. Los resultados esperados en los cuestionarios por parte del 4ºD serán más positivos que los de 4ºDP. El primer indicio para plantearnos esta idea está fundamentado en el proceder matemático que se ha empleado en los años pasados.

#### *Resultados del proyecto mejores que los del cuestionario*

Estableciendo la metodología del proyecto, una metodología ya conocida por el alumnado pues fue realizada en cursos pasados, se espera que los resultados sean más positivos que los obtenidos en el examen (cuestionario primero). Las técnicas de cooperación en el proyecto entre el alumnado deberían proyectar mejores resultados que el aprendizaje individual.

#### *Errores esperados en 4ºD y en 4ºDP*

Los errores esperados en 4ºD serán de cálculo principalmente y los errores de concepto quedarán reservados para 4ºDP. Esto lo basamos en el conocimiento previo del que disponen el alumnado procediendo de diferentes itinerarios.

#### 8.4. Resultados

Los resultados de los cuestionarios realizados por cada uno de los y las estudiantes de cada una de las aulas vienen recogidos en las siguientes tablas. Primera mente la tabla de resultados de la clase de 4ºDP :

**Tabla 6: Resultados 1º cuestionario - 4ºDP**

Alumno	ITEM 1	ITEM 2	ITEM 3	ITEM 4	ITEM 5	NOTA
1	X	X	X	X	X	0.75
2	V	V	V	X	X	5
3	V	V	X	V	X	4.7
4	V	V	X	X	X	1.7
5	V	V	X	X	X	3.9
6	V	V	V	X	V	6.7
7	X	X	X	X	X	0
8	V	X	X	X	X	1.9
9	V	V	X	V	X	4.5
10	V	X	X	V	X	2.6
11	V	X	V	X	X	2.75
12	X	X	X	X	X	0
% EXITO 4ºDP	75	50	25	25	8	---

A continuación los resultados de la clase 4ºD

Tabla 7: Resultados 1º cuestionario - 4ºD

Alumno	ITEM 1	ITEM 2	ITEM 3	ITEM 4	ITEM 5	NOTA
13	V	V	V	V	X	5.5
14	X	X	V	V	X	2.7
15	V	X	X	X	X	1.25
16	X	X	X	X	X	0
17	V	V	V	V	V	8.25
18	V	V	X	V	X	3.2
19	V	X	V	V	X	3.8
20	V	V	V	V	V	8.4
21	V	V	V	V	V	7.9
22	V	V	V	X	X	4.75
23	V	X	X	X	X	1.3
24	V	V	X	X	X	2.6
25	X	X	X	X	X	0.9
26	V	V	V	X	X	4.5
27	V	V	V	V	X	6.7
28	V	V	V	V	V	8
% ÉXITO 4ºD	81	62	62	56	25	---

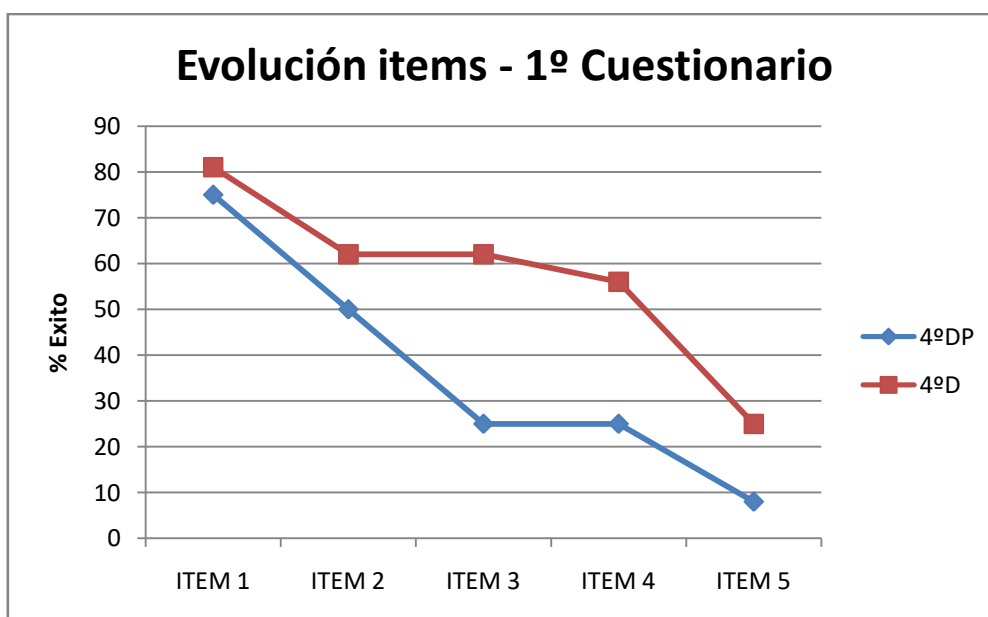
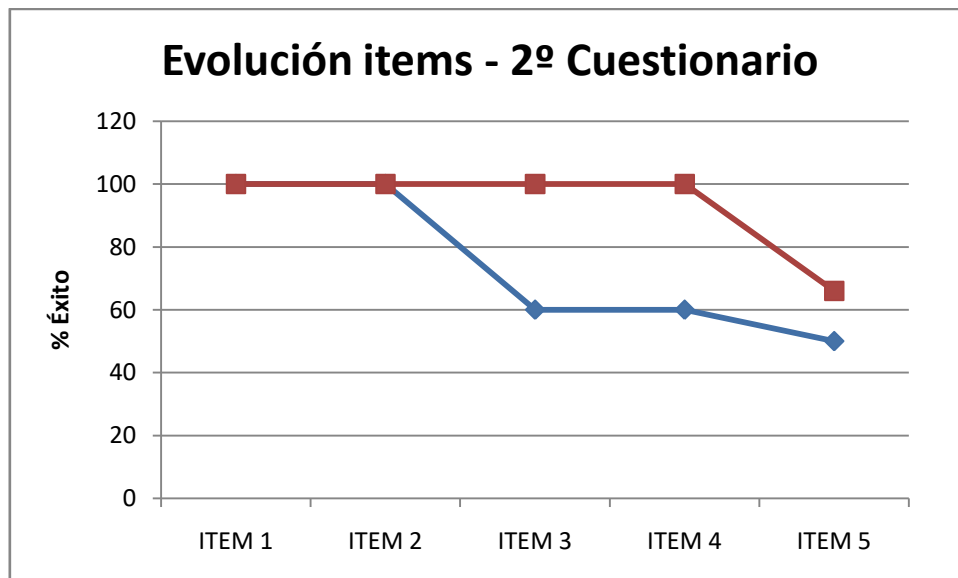


Gráfico 1: Porcentaje de éxito entre clases - 1º cuestionario

Los resultados del segundo cuestionario vienen recogidos en la siguiente tabla en forma y de una forma más gráfica en la imagen..

**Tabla 8: Resultados 2º cuestionario**

Grupo	ITEM 1	ITEM 2	ITEM 3	ITEM 4	ITEM 5	NOTA
1	V	V	V	V	X	7
2	V	V	V	V	V	9
3	V	V	V	V	V	8
%EXITO 4ºD	100	100	100	100	66	----
A	V	V	V	V	V	6
B	V	V	X	X	X	4
%EXITO 4ºDP	100	100	60	60	50	----
%EXITO TOTAL	100	100	80	80	40	----



**Gráfico 2: Porcentaje de éxito entre clases - 2º cuestionario**



## 8.5. Discusión de los resultados

A la vista de los resultados observamos que

- I. Los resultados en todos los ítems son superiores en la clase de 4ºD que en la de 4ºDP en el primer cuestionario.
  - a. El alumnado de 4ºD tiene un comportamiento matemático y de cara a los exámenes mas estructurado que el alumnado procedente de PMAR. Esto lo extraemos de la comparación de las gráficas vistas en el apartado anterior.
  - b. El alumnado de 4ºDP, pese a tener más facilidades en el examen, han obtenido peores calificaciones
- II. Los errores observados en la clase de 4ºD son de cálculo mientras que los de 4ºDP se originan en el conocimiento.
  - a. Es observado en la tasa de éxito de los 4 primeros ítems de 4ºD donde el éxito es mayor del 50% que son los más conceptuales. El ítem que menos éxito tiene es el 5º relacionado con el cálculo matemático.
  - b. El alumnado de 4ºDP falla más del 50% desde el segundo ítem lo que ratifica la idea de que lleva a pensar que el error es de concepto y no solo numérico.
  - c. Existe un momento crítico para 4ºDP se da desde el segundo ítem mientras que en 4ºD se da en el último ítem.
- III. El conocimiento de un proyecto posterior a la teoría genera un incremento en la implicación y motivación del alumnado por la estadística descriptiva. Comentarios en aula positivos hacia el proyecto así como la implicación en el proyecto implican que se acoge de forma positiva el estudio de la estadística para resolver situaciones de la vida cotidiana.
- IV. El proyecto como metodología supletoria a la educación mejora los resultados obtenidos
  - a. Los resultados del proyecto han sido superiores a las notas obtenidas en el examen por lo que el éxito académico del alumnado no radica en la metodología tradicional mediante clases magistrales.
  - b. Los ítems evaluados son iguales en ambos cuestionarios pero los resultados del segundo (Proyecto) son más positivos que los del primero.
- V. Los errores de cálculo son menores en una metodología basada en técnicas de equipo pues el trabajo cooperativo ayuda a subsanarlos.
  - a. La dependencia de los compañeros para realizar el proyecto ha implicado un compromiso mayor con los conocimientos estadísticos.
  - b. La aplicación de los conocimientos estadísticos así como la corrección por partes no instaurada pero asumida con un reparto de roles, favorece incrementar los resultados positivos.
  - c. Se ha podido observar como con una primaria corrección por partes del trabajo realizado por compañeros los resultados han salido más positivos que de forma individual.



## Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

### Breve síntesis

El estudio ha demostrado que las diferencias entre las clases son reales. Partiendo de dos clases muy heterogéneas entre ellas y dentro de ellas también teniendo una alta diversidad se ha realizado un estudio sobre la explicación de la estadística así como el aprendizaje de la misma por parte del alumnado.

Para estudiar el aprendizaje de la estadística y el nivel de conocimientos en el que se encontraba cada individuo se han seleccionado una serie de 5 elementos que se explican de forma secuencial y que están vinculados entre sí. Estos elementos son la clasificación de variables, las tablas de frecuencia, la extracción de datos de tablas de frecuencia, la construcción de gráficos y las medidas de centralización y dispersión.

En el estudio, una primera parte se ha centrado el estudio en una metodología basada en clases magistrales y evaluando los conocimientos mediante un examen el cual incluía los 5 ítems comunes a las dos clases con los que se ha podido obtener la primera remesa de datos. La segunda metodología se centraba en un proyecto en el cual se trabajaban unas matemáticas más aplicadas mediante la redacción de una encuesta. Se seguían tomando los 5 ítems para obtener los segundos datos.

Una vez los datos han sido obtenidos, se centra en realizar tres líneas de estudio:

La primera una línea evolutiva dentro de la propia clase en la que se ve cómo transcurre el conocimiento de un ítem al posterior y como el éxito conforme indagas en materia.

La segunda un estudio comparativo entre ambas clases analizando tanto los resultados de la parte teórica como de la segunda parte.

La tercera un estudio en el que se estudia el éxito obtenido mediante la metodología de clases magistrales y comparándolo con el éxito obtenido por la metodología ABP.

### Conclusiones generales del trabajo

Una vez que se ha realizado un análisis teórico de la enseñanza de la estadística que se ha desarrollado una investigación dentro de las aulas de secundaria, se concluye que:

1. La existencia del Plan de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento en 3ºESO presenta mejoras para el alumnado con mayor dificultad para trabajar las matemáticas haciéndolas más accesibles y atractivas. Dicho itinerario proyecta una matemática aplicada que para el alumno resulta más llamativa que la convencional.
2. El trabajo con Proyectos mejora los resultados académicos del alumnado pues el trabajo en grupo permite trabajar el conocimiento de forma colectiva y que entre el mismo grupo. La explicación entre iguales ayuda a asentar el conocimiento tanto en la persona que explica como en la que atiende
3. Que los alumnos conozcan que la matemática que van a estudiar va a tener una inmediata aplicación, en el caso presentado un proyecto, permite generar una actitud positiva hacia la estadística y su estudio en el aula. Un aliciente no tan convencional como el superar el examen ha generado que los resultados en los ítems no sean más positivos.

4. La estadística se puede explicar al alumno procedente de 3ºPMAR en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Para ello no es necesario hacer una adaptación curricular sino que la solución radica en un componente más metodológico. Emplear técnicas más enfocadas a las matemáticas prácticas proporciona mejores resultados
5. El contenido de estadística para el alumnado de 4ºESO en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas es adecuado pues habiendo definido 5 ítems fundamentales, se han obtenido resultados positivos. El único ítem que hay que trabajar de forma más intensiva o con otro enfoque es el de las medidas de centralización y dispersión que son la parte en la que peores resultados académicos se han obtenido.
6. El alumnado no realiza un correcto cálculo ni interpretación de las medidas de centralización y dispersión porque no muestran un entendimiento de las mismas. El no comprender el significado ni sentido de las propias medidas deriva en que un cálculo erróneo y visible pasa desapercibido por el alumnado. A su vez, la no interpretación del resultado obtenido en los diferentes ejercicios en aula ha podido traducirse en la no completa comprensión de las medidas.

### **Cuestiones abiertas**

El presente trabajo deja dos cuestiones abiertas para futuras líneas de investigación o trabajo:

*Beneficios de las nuevas tecnologías para la explicación, trabajo e interpretación de los estudios estadísticos.*

En todo el trabajo no se ha trabajado con tecnologías de la información por el hecho de que los recursos de los que disponía el centro así como el propio nivel de recursos del alumnado eran limitados. Esta limitación no ha sido trabajada en el punto en el que se describía la muestra por el hecho de que en los objetivos del trabajo no estaba el estudiar las tecnologías porque por parte del autor era conocido el nivel de recursos de los que se disponían y no lo consideró motivo de estudio.

*Trabajo con recortes de prensa y otros medios de comunicación*

Una línea de trabajo que este estudio podría haber dado pie sería la de interpretar diferentes noticias de prensa y otros medios de comunicación, tanto de la época actual como de años pasados con la intención de estudiar el espíritu crítico de los alumnos mediante la aplicación de conocimientos matemáticos. Este punto no fue estudiado por ausencia de tiempo aunque la situación, dos clases con una heterogeneidad muy alta en cuanto a procedencia e ideología, era la ideal. Se deja este cauce abierto para que en un futuro se pueda realizar una investigación sobre la estadística y la interpretación de las publicaciones periodísticas.

## Referencias

Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

[1] Matemáticas 2ºESO Bloque II: Geometría. Funciones. Estadística y Probabilidad. Grupo Edebé. 2016

[2] Matemáticas 3ºESO Aplicadas. J.M. Margallo (2015) Editex

[3] Matemáticas 4ºESO Aplicadas. G. González (2016) Editex

[4] Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I. F. Alcaide, L. Sanz, J. Hernández, M. Moreno y E. Serrano (2015) SM

[5] Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II. M.J. Ruiz, J. Llorente, C. González, A.M. Aparicio y F. Arribas (2016) Editex

[6] Matemáticas 4ºESO Académicas. G. González (2016) Editex

[7] Matemáticas I 1º Bachillerato. C. González, M.J. Ruiz, J. Llorente, A.M. Aparicio y F. Arribas (2015) Editex

[8] Análisis onosemiotico de una lección sobre la suma y la resta (2016) J.D. Godino, V. Font y M.R. Wilhelmi

[9] Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en estadística descriptiva (2007) S. Del Puerto, S. Seminara y C. Minnard

[10] Los errores en el aprendizaje de matemática (2006) Engler, A.

[11] Assessing student's conceptual understanding after a first course in statistics" (2006) Delmas, R.



## **Anexos**

- A. Anexo 1: Unidad didáctica del libro de texto
- B. Anexo 2: Criterios de evaluación en Matemáticas
- C. Anexo 3: CANVAS
- D. Anexo 4: Anotaciones sobre las exposiciones del Proyecto





## A. Unidad didáctica del libro de texto

### 1. Variables estadísticas

Supongamos que queremos hacer un estudio estadístico sobre la intensidad de la luz de las estrellas. Veamos los elementos que componen este estudio.

La población del estudio serán las estrellas.

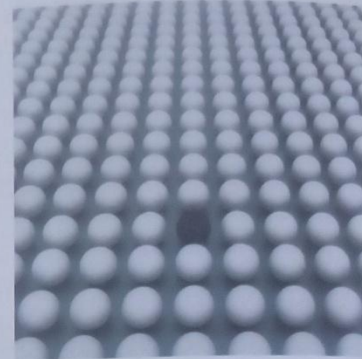
La población es el conjunto de elementos objeto de un estudio estadístico. Cada elemento de la población se denomina individuo.

La muestra será el conjunto de estrellas que vamos a estudiar, que es un subconjunto de la población.

Una muestra es un subconjunto de la población. Se dice que es representativa si con ella se puede explicar el comportamiento de la población.

La intensidad de la luz es la variable estadística.

Una variable estadística es una característica de la población que queremos estudiar.



#### 1.1. Tipos de variables estadísticas

Si queremos estudiar el color de pelo de los alumnos de la clase, observamos que esta variable estadística puede tomar los valores rubio, moreno, pelirrojo, etc. Sin embargo, los valores de la variable estadística «peso de los alumnos» se puede expresar numéricamente.

Una variable estadística es cualitativa si no se puede expresar utilizando números.

Una variable estadística es cuantitativa si se puede expresar utilizando números.

Si estudiamos el número de hermanos que tienen los alumnos de nuestra clase, los valores que puede tomar nuestra variable estadística son 1, 2, 3, etc. Nadie puede responder que tiene 1,4 hermanos.

Sin embargo, si estudiamos la altura de los alumnos de nuestra clase, podemos encontrar compañeros con alturas entre 1,70 y 1,80 m.

Una variable estadística cuantitativa es discreta si los valores que puede tomar son aislados.

Una variable estadística cuantitativa es continua si la variable puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo.



#### Recuerda

- La estadística es una rama de las matemáticas que se ocupa de la recopilación y el estudio de datos.

#### a Ejercicios y actividades

- Indica tres ejemplos de variable estadística:
  - Cualitativa
  - Cuantitativa
  - Discreta
  - Continua
- Indica de qué tipo son las siguientes variables estadísticas:
  - El número de personas que habitan una vivienda
  - La longitud de las alas de las aves
  - El color del automóvil
  - La cadena televisiva preferida

## 2. Frecuencias estadísticas

Llamamos frecuencia absoluta ( $f_i$ ) al número de veces que aparece un valor  $x_i$  de una variable estadística en el estudio.

Llamamos frecuencia relativa ( $h_i$ ) al cociente de la frecuencia absoluta correspondiente,  $f_i$ , entre el tamaño  $N$  de la población.

$$h_i = \frac{f_i}{N}$$

Llamamos porcentaje ( $p_i$ ) al producto de la frecuencia relativa correspondiente,  $h_i$ , por 100.

$$p_i = h_i \cdot 100$$

**Las sumas**

- La suma de todas las frecuencias absolutas es el tamaño de la población,  $N$ .
- La suma de todas las frecuencias relativas es 1.
- La suma de todos los porcentajes es 100.

La frecuencia acumulada correspondiente al valor  $x_i$  es la suma de las frecuencias anteriores al valor  $i$ -ésimo.

Frecuencia absoluta acumulada  $\rightarrow F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i = F_{i-1} + f_i$

Frecuencia relativa acumulada  $\rightarrow H_i = h_1 + h_2 + \dots + h_i = H_{i-1} + h_i$

Porcentaje acumulado  $\rightarrow P_i = p_1 + p_2 + \dots + p_i = P_{i-1} + p_i$

Supongamos que queremos estudiar el número de zapato de los alumnos de una clase. Después de preguntar a cada uno, obtenemos los siguientes datos:

38, 38, 35, 40, 39, 35, 40, 37, 37, 37, 36, 36, 35, 40, 40,  
40, 42, 41, 41, 41, 39, 41, 40, 42, 37, 37, 38, 38, 39, 36

Para realizar el estudio, recogemos los datos y las frecuencias en una tabla:

Variable estadística	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada	Porcentaje acumulado
$x_i$	$f_i$	$h_i$	$p_i$	$F_i$	$H_i$	$P_i$
35	3	0,1	10	3	0,1	10
36	3	0,1	10	3 + 3 = 6	0,2	20
37	5	0,1667	16,67	6 + 5 = 11	0,3667	36,67
38	4	0,1333	13,33	11 + 4 = 15	0,5	50
39	3	0,1	10	15 + 3 = 18	0,6	60
40	6	0,2	20	18 + 6 = 24	0,8	80
41	4	0,1333	13,33	24 + 4 = 28	0,9333	93,33
42	2	0,0667	6,67	28 + 2 = 30	1	100
<b>Totales</b>	<b><math>N = 30</math></b>	<b>1</b>	<b>100</b>			

**a** Ejercicios y actividades

3. Estudiamos el número de personas que habitan en las viviendas de una localidad y obtenemos los siguientes datos:

3, 2, 4, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 5, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 5, 6, 4, 3,  
3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 5, 2, 4, 3, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 6, 1

## 2.1. Tablas de frecuencias para variables estadísticas continuas

En el caso de las variables continuas, los datos se agruparán en intervalos que llamaremos intervalos de clase ( $I_i$ ). Los intervalos de clase serán semiabiertos,  $[a, b)$ , excepto el último, que será cerrado,  $[a, b]$ . Para representar cada intervalo de clase, utilizamos su marca de clase.

El punto medio de cada intervalo de clase es lo que llamaremos marca de clase,  $x_i$ .

### EJEMPLO

- Si  $[3,8; 4,4)$  es un intervalo de clase, la marca de clase que le corresponde es la suma de los extremos del intervalo dividido entre 2:

$$\frac{3,8 + 4,4}{2} = 4,1$$

Las frecuencias y porcentajes de los valores representados con intervalos de clase se calculan igual que en una variable discreta, considerando que cada dato del intervalo toma el valor de la marca de clase correspondiente.

Si la variable es discreta y tenemos muchos datos, podemos agruparlos en intervalos y estudiar la variable como si fuese continua.

### EJEMPLO

- Se ha realizado un estudio sobre los metros cuadrados de vivienda hábiles que tienen 30 personas y se han obtenido los siguientes datos (en  $m^2$ ):

66,73	68,15	72	73,54	77	78,9	72,18	80,73	82,12	84
72	70,8	69,2	69	83,12	73	70,4	66,17	73,2	88
87	82,3	77,3	67,5	81	80,3	89	73	76	88

Recoger todos estos datos en una tabla utilizando intervalos de amplitud 5.

Como todos los datos son mayores de  $65 m^2$ , empezamos en 65.

$I_i$	$x_i$	$f_i$	$h_i$	$p_i$	$F_i$	$H_i$	$P_i$
[65, 70)	67,5	6	0,2	20	6	0,2	20
[70, 75)	72,5	9	0,3	30	15	0,5	50
[75, 80)	77,5	4	0,1333	13,33	19	0,6333	63,33
[80, 85)	82,5	7	0,2333	23,33	26	0,8666	86,66
[85, 90]	87,5	4	0,1333	13,33	30	0,9999	99,99
<b>Totales</b>		<b>30</b>	<b>0,9999</b>	<b>99,99</b>			

**Distribución**

Una variable estadística junto con sus frecuencias forman lo que se suele llamar distribución.

**Recuerda**

- La amplitud de un intervalo  $[a, b]$  es la diferencia  $b - a$ .



### a Ejercicios y actividades

5. Se ha realizado un estudio sobre el consumo de agua en las viviendas, en dos meses, de un determinado barrio y se han obtenido los datos que se muestran en la siguiente tabla:

Consumo en $m^3$	(0, 5)	(5, 10)	(10, 15)	(15, 20)	(20, 25)
$f_i$	28	54	65	125	28

Completa la tabla de frecuencias.

### 3. Gráficos asociados a una tabla de frecuencias

Cuando realizamos un estudio estadístico, solemos representar los datos en un gráfico para obtener una visión de conjunto de su distribución.

#### 3.1. Diagrama de barras

Los diagramas de barras se pueden utilizar con variables estadísticas cualitativas y cuantitativas discretas. Para construir estos gráficos, en el eje de abscisas representamos los datos  $x_i$  y en el eje de ordenadas representamos las frecuencias absolutas, relativas o porcentajes, ya sean acumuladas o no.

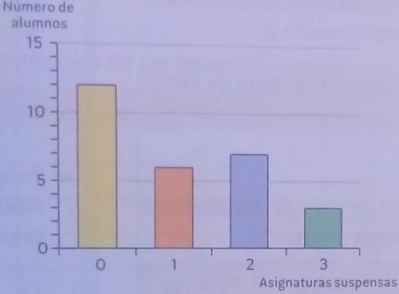
**! Recuerda**

- El eje de abscisas o eje X es el eje horizontal.
- El eje de ordenadas o eje Y es el eje vertical.

**EJEMPLO**

- En un estudio sobre el número de asignaturas suspensas de los alumnos de una clase, se han obtenido los siguientes datos, que representamos con un diagrama de barras:

$x_i$	$f_i$
0	12
1	6
2	7
3	3




#### 3.2. Histograma

Los histogramas solo se pueden utilizar con variables estadísticas continuas o discretas si sus datos han sido agrupados en intervalos. Para construir estos gráficos, en el eje de abscisas representamos los intervalos de clase y sobre cada intervalo levantamos un rectángulo:

- Cuya altura es la frecuencia absoluta o relativa si los intervalos son de la misma amplitud.
- Cuya área coincide con la frecuencia si los intervalos tienen distinta amplitud.

Nosotros utilizaremos intervalos de clase con la misma amplitud.



**a Ejercicios y actividades**

6. Completa la tabla de frecuencias y representa el diagrama de barras.

$x_i$	100	120	140	160	180	200
$f_i$	25	36	42	50	33	28

7. Completa la tabla de frecuencias y representa el histograma.

$x_i$	[1, 5)	[5, 9)	[9, 13)	[13, 17)	[17, 21)	[21, 25)
$f_i$	12	14	18	16	15	10

### 3.3. Polígono de frecuencias

Los polígonos de frecuencias se utilizan con variables discretas y continuas. Para construir estos gráficos, representamos en el eje de abscisas los datos o los intervalos de clase y en el eje de ordenadas las frecuencias o los porcentajes correspondientes:

- Si la variable es discreta, unimos los extremos superiores del diagrama de barras mediante segmentos.
- Si la variable es continua, tenemos los siguientes casos:
  - Si representamos frecuencias absolutas o relativas, unimos los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos del histograma.
  - Si representamos frecuencias acumuladas, unimos los vértices superiores de la derecha de los rectángulos del histograma.

### 3.4. Diagrama de sectores

Los diagramas de sectores se pueden utilizar con variables cualitativas y cuantitativas discretas. Consisten en representar sectores circulares de ángulo  $\alpha_i$  proporcional a la frecuencia relativa.

Si  $\alpha_i$  es el ángulo del sector circular  $i$ -ésimo de un diagrama de sectores, tenemos que  $\alpha_i = 360 \cdot h_i$ .

#### EJEMPLO

- Hemos realizado un estudio sobre el color de pelo de los alumnos de una clase y hemos obtenido los siguientes datos:

COLOR DE PELO	Moreno	Castaño	Rubio	Pelirrojo
$f_i$	9	12	3	1

Calcular el ángulo  $\alpha_i$  para cada color de pelo.

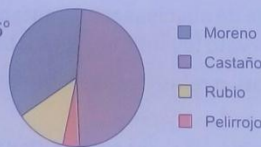
Moreno:

$$\alpha_1 = 360 \cdot h_1 = 360 \cdot \frac{f_1}{N} = 360 \cdot \frac{9}{25} = 129,6^\circ$$

Análogamente, tenemos:

$$\alpha_2 = 172,8^\circ, \alpha_3 = 43,2^\circ, \alpha_4 = 14,4^\circ$$

Con estos ángulos realizamos el gráfico.

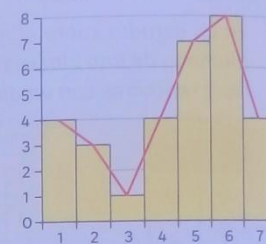


#### EJEMPLO

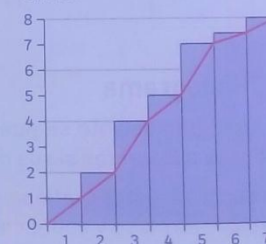
- Polígono de frecuencias de una variable discreta:



- Polígono de frecuencias de una variable continua:



- Polígono de frecuencias acumuladas de una variable continua:



### a Ejercicios y actividades

8. Representa el polígono de frecuencias y el diagrama de sectores de la siguiente tabla:

$x_i$	10	20	30	40
$f_i$	7	15	12	6

9. Representa el polígono de frecuencias asociado a esta tabla utilizando la frecuencia absoluta y la absoluta acumulada.

$I_i$	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80]
$f_i$	12	18	26	17	13	4

Estadística

## 4. Medidas de centralización

Una medida de centralización es un valor que resume los datos de un estudio estadístico. Estas medidas se utilizan en variables cuantitativas.

Las medidas de centralización indican alrededor de qué valor tienden a situarse la mayor parte de los datos.

### 4.1. Media aritmética

La media aritmética ( $\bar{x}$ ) es la suma de todos los datos  $x_i$ , o de las marcas de clase en su caso, multiplicados por su frecuencia absoluta  $f_i$  y divididos entre el tamaño de la población  $N$ .

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{N}$$

**!** La columna  $x_i \cdot f_i$

Si tenemos los datos organizados en una tabla, añadiremos una columna,  $x_i \cdot f_i$ , para facilitar el cálculo de la media aritmética.

**!** Con la calculadora

Al multiplicar  $x_i \cdot f_i$  con la calculadora, seguiremos los siguientes pasos, que nos facilitarán el cálculo de la media aritmética:

5 × 10 = Min  
 9 × 12 = M+  
 13 × 17 = M+  
 17 × 10 = M+  
 21 × 7 = M+

A continuación pulsamos la tecla **MR** y por pantalla nos aparece la suma:

696

Ahora, para calcular la media, solo tendríamos que dividir entre el tamaño de la población:

696 ÷ 56 =

**EJEMPLO**

- Calcular la media aritmética de los datos de la tabla:

$I_i$	$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$
[3, 7)	5	10	5 · 10 = 50
[7, 11)	9	12	9 · 12 = 108
[11, 15)	13	17	13 · 17 = 221
[15, 19)	17	10	17 · 10 = 170
[19, 23)	21	7	21 · 7 = 147
<b>Totales</b>		<b>56</b>	<b>696</b>

La media aritmética será  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i}{N} = \frac{696}{56} = 12,43$ .

### 4.2. Moda

La moda ( $Mo$ ) es el valor  $x_i$  que tiene la mayor frecuencia absoluta. En el caso de una variable continua obtenemos la clase modal.

**EJEMPLO**

- Sean los siguientes datos los valores que toma una variable aleatoria:

1	2	4	2	1	5	3	3	2	4	1	5	1	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

La moda en este caso sería 1.

**a** Ejercicios y actividades

10. Calcula la media aritmética y la moda de las siguientes distribuciones:

$x_i$	4	8	12	16	20	24
$f_i$	17	23	28	12	14	6

$I_i$	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)
$f_i$	35	43	52	27	13

171

### 4.3. Mediana

La mediana (Me) es un valor de una variable estadística tal que la mitad de sus valores son menores que él y la otra mitad son mayores que él.

Para calcular la mediana, tenemos que ordenar los datos de menor a mayor:

- Si el número de datos es impar, la mediana es el valor central.
- Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos valores centrales.

#### EJEMPLO

- Supongamos que hemos realizado un estudio con los siguientes datos:

1	1	1	2	2	3	1	2	3	3	2	3	3	4	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Si ordenamos los datos de menor a mayor, tenemos:

1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Tenemos 16 valores; por tanto, las posiciones centrales son la 8 y la 9. Como el número de datos es par, la mediana será la media de los datos que ocupan los dos valores centrales:

$$Me = \frac{2+3}{2} = 2,5$$

#### 4.3.1. Cálculo de la mediana con tablas de frecuencias para variables estadísticas discretas

- Si el número de datos es impar, buscamos el valor  $\frac{N+1}{2}$  en la columna de frecuencias absolutas acumuladas y seleccionamos el primero que sea mayor o igual que  $\frac{N+1}{2}$ . El dato  $x_i$  correspondiente será la mediana.
- Si el número de datos es par, buscamos el valor  $\frac{N}{2}$  en la columna de frecuencias absolutas acumuladas y seleccionamos el primero que sea mayor o igual que  $\frac{N}{2}$ ; este dato será la mediana. Observemos el cálculo en el ejemplo del margen.

#### a Ejercicios y actividades

11. Calcula la mediana de las siguientes distribuciones:

$x_i$	25	26	27	28	29
$f_i$	11	16	24	21	8

$x_i$	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
$f_i$	15	20	21	24	10

$x_i$	5	10	15	20	25
$f_i$	20	23	25	10	8

#### EJEMPLO

- Calcular la mediana de un número de datos impar:

$x_i$	$f_i$	$F_i$
10	4	4
20	12	16
30	13	29
40	4	33
TOTAL	33	

Buscamos  $\frac{N+1}{2}$  en la columna  $F_i$  y seleccionamos el primero que sea mayor o igual:

$$\frac{N+1}{2} = \frac{33+1}{2} = 17$$

$$Me = 30$$

#### EJEMPLO

- Calcular la mediana de un número de datos par:

$x_i$	$f_i$	$F_i$
10	3	3
20	16	19
30	12	31
40	7	38
TOTAL	38	

Si encontramos el valor  $\frac{N}{2}$  en la columna, tomamos el dato  $x_i$  y el siguiente,  $x_{i+1}$ . La mediana será la media aritmética de estos datos:

$$Me = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \frac{20 + 30}{2} = 25$$

### 4.3.2. Cálculo de la mediana para variables estadísticas continuas

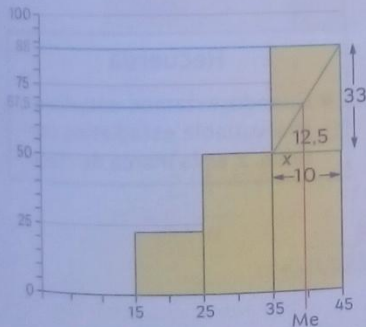
En el caso de una variable continua, la mediana es el valor que deja el 50 % de la distribución a su izquierda y, por tanto, deja también el 50 % de la distribución a la derecha. Observemos que en el caso de variables continuas la mediana sigue siendo el valor que ocupa el centro de los datos.

Supongamos que hemos realizado un estudio estadístico con una muestra de 135 datos resumido en una tabla:

$I_i$	$x_i$	$f_i$	$F_i$
[15, 25)	20	23	23
[25, 35)	30	27	50
[35, 45)	40	33	88
[45, 55)	50	22	110
[55, 65]	60	25	135

Tomamos  $\frac{N}{2} = \frac{135}{2} = 67,5$ ; buscamos en la columna de frecuencia absoluta acumulada  $F_i$  y elegimos el primer intervalo que tenga la frecuencia absoluta acumulada mayor o igual que  $\frac{N}{2}$ :

- Si  $\frac{N}{2}$  coincide con alguna frecuencia absoluta acumulada, la mediana es el extremo superior del intervalo correspondiente a  $\frac{N}{2}$ .
- Si  $\frac{N}{2}$  no coincide con alguna frecuencia absoluta acumulada, dibujamos el histograma del intervalo correspondiente utilizando las frecuencias absolutas acumuladas de este intervalo y el anterior:



El valor que corresponde a 67,5 es la mediana.

Para calcularlo, utilizamos la semejanza de triángulos:

$$\frac{12,5}{33} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{125}{33} = 3,79$$

Como la mediana es  $Me = 35 + x$ , concluimos que  $Me = 38,79$ .

**Importante**

Para una variable continua, es indiferente que el tamaño de la población sea par o impar.



### a Ejercicios y actividades

12. Se ha realizado un estudio sobre el consumo de agua doméstica y se han obtenido los siguientes datos en  $m^3$ :

$I_i$	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)	[10, 12)	[12, 14)	[14, 16)
$f_i$	12	17	25	36	18	10

Determina:

- a) La media aritmética.
- b) La clase modal.
- c) La mediana.



## 5. Medidas de dispersión

Supongamos que una empresa tiene dos trabajadores. Uno de ellos cobra 1000 € al mes y el otro, 5000 € al mes.

Observemos que, en este caso, la media aritmética es de 3000 € al mes; sin embargo, esta media no es representativa, ya que hay mucha diferencia entre este valor y lo que realmente cobran los empleados.

Las medidas de dispersión indican si los valores reales están más o menos próximos a la media aritmética, de manera que podamos decidir si una media es suficientemente representativa o no.

Si se publica un estudio estadístico y no se dan datos sobre la dispersión, la información está sesgada y puede ser manipulada.



### 5.1. Recorrido absoluto

El recorrido absoluto de una variable estadística es el valor absoluto de la diferencia entre su valor mayor y su valor menor.

$$R_a = |x_n - x_1|$$

En el ejemplo de los dos empleados, el recorrido absoluto es de 4000 €, lo que indica que hay una diferencia de 4000 € entre el trabajador que más gana y el que menos gana.

Esta medida de dispersión no nos permite comparar varios estudios, ya que depende de la magnitud de las variables.

### 5.2. Recorrido relativo

El recorrido relativo es el cociente entre el menor valor y el mayor valor que toma la variable estadística, siempre que estos sean distintos de 0.

$$R_r = \frac{x_1}{x_n}, x_1 \neq 0, x_n \neq 0$$

El recorrido relativo tiene la siguiente propiedad:

$$0 \leq R_r \leq 1$$

Cuanto más cercano a 1 sea el recorrido relativo, más agrupados se encontrarán los datos.

Esta medida es más efectiva que el recorrido absoluto, ya que nos permite comparar el grado de agrupamiento de los datos entre dos variables estadísticas, independientemente de la magnitud de dichas variables.



#### Recuerda

- Cuando estamos estudiando una variable estadística continua,  $x_i$  es la marca de clase.

### a Ejercicios y actividades

13. Determina el recorrido absoluto y el recorrido relativo de la siguiente distribución de datos:

$x_i$	5	7	9	11	13	15	17	19
$f_i$	18	25	36	41	32	17	8	3

### 5.3. Varianza y desviación típica

Consideremos una variable estadística y sea  $\bar{x}$  su media aritmética. Definimos el residuo  $i$ -ésimo como  $e_i = x_i - \bar{x}$ .

La varianza ( $\sigma^2$ ) es la media aritmética del cuadrado de los residuos.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f_i \cdot e_i^2)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

La desviación típica ( $\sigma$ ) es la raíz cuadrada de la varianza.

Para calcular la varianza utilizaremos, principalmente, la siguiente igualdad:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f_i \cdot x_i^2)}{N} - \bar{x}^2$$

Supongamos que estamos realizando un estudio estadístico y hemos recogido los datos que se muestran en la tabla de abajo.

Para calcular la media aritmética, ya hemos visto que utilizamos la columna  $f_i \cdot x_i$ . Ahora, para calcular la varianza, añadiremos la columna  $f_i \cdot x_i^2$ .

Con la calculadora utilizaremos las teclas **[Min]** y **[M+]**, al igual que hicimos con la media aritmética.

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
10	13	130	$10 \cdot 130 = 1300$
11	17	187	$11 \cdot 187 = 2057$
12	23	276	$12 \cdot 276 = 3312$
13	18	234	$13 \cdot 234 = 3042$
14	9	126	$14 \cdot 126 = 1764$
<b>Totales</b>	<b>N = 80</b>	<b>953</b>	<b>11 475</b>

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i}{N} = \frac{953}{80} = 11,9125$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f_i \cdot x_i^2)}{N} - \bar{x}^2 = \frac{11475}{80} - (11,9125)^2 = 1,5298$$

$$\sigma = \sqrt{1,5298} = 1,2369$$

En el intervalo  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$  se concentran el 75 % de los datos.

### Matemáticas en el tiempo Karl Pearson



Karl Pearson (1857-1936).

Londres fue su ciudad natal. Su dedicación estuvo marcada por ser muy diversa: historiador, abogado, matemático, biómetro, estadístico, maestro y biógrafo. Su aportación más importante es su trabajo en estadística aplicada, al que se le atribuye el nacimiento de dicha disciplina.

Su trabajo para la obtención de estimadores a través del método de los momentos, el sistema de curvas de frecuencias para la obtención de distribuciones que pudiesen aplicarse a fenómenos aleatorios, el desarrollo de la correlación lineal y los métodos para determinar la independencia entre variables pueden considerarse como los avances más importantes que aportó a la estadística.

### a Ejercicios y actividades

14. Calcula la varianza y la desviación típica de las siguientes distribuciones:

$f_i$	[0, 4)	[4, 8)	[8, 12)	[12, 16)	[16, 20)	[20, 24)	[24, 28)			
$f_i$	6	12	15	21	11	6	3			
$x_i$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f_i$	4	7	10	18	21	16	9	7	5	2

**Variable estadística. Tabla de frecuencias**

1. Indica el tipo de variable estadística y la población que estudia.

- a) Edad a la que salimos con los amigos por primera vez en mi pueblo.
- b) La cadena de radio que escuchan los españoles.
- c) El precio del pan en los municipios de tu comunidad.
- d) El gasto de electricidad en un mes en las viviendas de tu ciudad.
- e) El peso de los alumnos de tu clase.
- f) El tiempo que dedican diariamente a ver la televisión tus compañeros de instituto. *Argumentación*

2. Construye la tabla de frecuencias asociada a la siguiente tabla:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f_i$	12	16	26	11	9	6

3. Se ha realizado un estudio sobre el número de personas que cogen el autobús entre las 7 y las 8 de la mañana en una determinada parada y se han obtenido los siguientes datos. Completa en tu cuaderno la tabla de frecuencias.

$x_i$	$f_i$	$h_i$	$p_i$	$F_i$	$H_i$	$P_i$
Lunes	45	•	•	•	•	•
Martes	54	•	•	•	•	•
Miércoles	69	•	•	•	•	•
Jueves	78	•	•	•	•	•
Viernes	65	•	•	•	•	•
Sábado	18	•	•	•	•	•
Domingo	5	•	•	•	•	•
Totales						

- a) ¿Qué porcentaje corresponde al sábado?
- b) ¿Qué porcentaje de personas cogen este autobús en fin de semana?
- c) ¿Cuánto vale  $P_6$ ? ¿Qué significa?

4. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla de frecuencias:

$x_i$	$f_i$	$h_i$	$p_i$	$F_i$	$H_i$	$P_i$
10	25	0,15625	•	•	•	•
20	34	•	•	•	•	•
30	•	•	•	•	•	•
40	18	•	•	•	•	•
Totales						

5. Haz una tabla de frecuencias con los siguientes datos:

2, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 6, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 3, 5, 5, 6, 5, 6, 4, 5, 6, 3, 2, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 5, 4, 6, 5, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 4, 2, 5, 2, 1, 1, 1, 3, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 3, 6, 5

6. Haz una tabla de frecuencias con los siguientes datos:

20,3; 23,5; 34,2; 29,5; 30; 31; 31,2; 31,3; 31,5; 29,7; 29,1; 27,7; 34,7; 28,8; 30,4; 30,5; 31,2; 31,4; 34,1; 23,7; 21; 22,7; 27,3; 28,2; 27,5; 27,1; 25,2; 24,3; 24,5; 26,3; 26,9; 28; 25; 30,7; 32,4; 32; 20,9; 20,3; 34,3; 23,4; 27,8; 27,2; 23,6; 25,6; 24,3; 21,2; 21,5; 20,8; 25,3; 25,4; 30,1; 31; 25,1; 22,3; 26,3; 26; 27; 32; 33; 27,3; 22

Nota: utiliza intervalos de amplitud 4 empezando en 20.

7. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla de frecuencias:

$x_i$	$f_i$	$h_i$	$p_i$	$F_i$	$H_i$	$P_i$
7	15	•	•	•	•	•
17	•	0,2375	•	•	•	•
27	20	•	•	•	•	•
37	9	•	•	•	•	•
47	•	0,2125	•	•	•	•
Totales	80	•	•			

8. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla de frecuencias:

$x_i$	$f_i$	$h_i$	$p_i$	$F_i$	$H_i$	$P_i$
5	•	•	15	•	•	•
10	•	•	18	•	•	•
15	•	•	26	•	•	•
20	•	•	34	•	•	•
25	•	•	•	•	•	•
Totales	250	•	•			

**Gráfico asociado a una tabla de frecuencias**

9. Haz un histograma y el polígono de frecuencias utilizando la frecuencia absoluta asociado a la siguiente tabla:

$I_i$	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)
$f_i$	18	32	45	34	15

10. Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias asociado a esta tabla:

$x_i$	100	200	300	400	500	600
$f_i$	25	35	45	50	30	20

- a) Utilizando la frecuencia absoluta.
- b) Utilizando la frecuencia absoluta acumulada.

Año	2010	2011	2012	2013
Beneficio	5,8	7,3	8,2	9,4

Haz un gráfico que muestre la evolución del beneficio de la empresa.

12. Haz un histograma y el polígono de frecuencias utilizando la frecuencia absoluta acumulada asociado a la siguiente tabla:

$I_j$	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)
$f_j$	12	18	25	3

13. En la biblioteca del instituto tienen los libros clasificados de la siguiente forma:

Tipo	Científicos	Literatura	Históricos	Novela
N.º	150	135	215	300

Haz un diagrama de sectores para esta tabla.

### Medidas de centralización

14. Calcula la media aritmética y la moda de las distribuciones siguientes:

$x_j$	2	4	6	8	10	12	14
$f_j$	7	12	16	18	13	10	4

$x_j$	10	20	30	40	50	60	70	80
$f_j$	6	8	13	14	17	12	8	6

15. Calcula la media aritmética de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	[2, 5)	[5, 8)	[8, 11)	[11, 14)	[14, 17)
$f_j$	10	13	18	7	2

16. Calcula la mediana y la moda de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	5	8	11	14	17	20	23	26
$f_j$	6	12	18	21	14	11	8	4

17. Calcula la mediana y la moda de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	10	20	30	40	50	60	70
$f_j$	6	8	12	15	5	3	2

18. Calcula la mediana y la moda de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	20	25	30	35	40	45	50
$f_j$	8	9	11	15	7	6	4

$x_j$	100	200	300	400	500	600
$f_j$	12	18	21	23	19	9

20. Calcula la media aritmética y la mediana de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	[5, 7)	[7, 9)	[9, 11)	[11, 13)	[13, 15)
$f_j$	12	16	21	14	9

21. Calcula la media aritmética y la mediana de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	10	20	30	40	50	60
$h_j$	0,12	0,16	0,23	0,25	0,19	0,05

### Medidas de dispersión

22. Calcula el recorrido absoluto y relativo de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	10	20	30	40	50	60	70
$f_j$	12	16	18	21	15	17	8

23. Calcula la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	5	10	15	20	25	30	35
$f_j$	4	7	12	15	11	9	5

24. Calcula la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	1	2	3	4	5	6	7
$f_j$	5	7	12	9	4	3	2

25. Calcula la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos:

$I_j$	[0, 4)	[4, 8)	[8, 12)	[12, 16)	[16, 20)
$f_j$	7	16	21	9	4

26. Calcula la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos:

$I_j$	[1, 4)	[4, 7)	[7, 10)	[10, 13)	[13, 16)	[16, 19)
$f_j$	5	7	9	18	4	2

27. Calcula la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos:

$x_j$	10	11	12	13	14	15	16
$f_j$	5	12	18	7	4	3	1

**Problemas**

28. La siguiente tabla está incompleta. Es el estudio realizado en un instituto sobre el tipo de música preferida por sus alumnos.

$x_i$	$f_i$	$h_i$	$p_i$	$F_i$	$H_i$	$P_i$
Rock	*	*	*	*	*	*
Pop	*	*	25	*	*	*
Flamenco	57	*	*	*	*	*
Rap	32	*	*	*	*	*
Punk	12	*	*	*	*	*
Heavy	*	0,05	*	*	*	*
Totales	180	*	*	*	*	*

- a) Completa la tabla en tu cuaderno.
- b) ¿Qué porcentaje de individuos prefiere el rap?
- c) ¿Qué porcentaje de individuos prefiere el heavy o el rock?

29. Los gastos de un instituto se resumen en la siguiente tabla:

Concepto	Gasto (€)
Mantenimiento	22 354,30
Material de oficina	12 345,20
Otros gastos	6 360,50

Realiza un diagrama de sectores que represente los gastos del centro.

30. La nota final de un examen se calcula como media aritmética de las notas parciales. Rodolfo ha sacado un 7,3 y un 6,2 en sendas pruebas parciales y queda por realizar una última prueba. Al final ha obtenido una media final de 5,2. ¿Sabrías determinar la nota de la última prueba parcial?

31. El valor catastral de una vivienda se determina teniendo en cuenta una serie de factores: zona en la que está la vivienda, precio del suelo en esa zona, tamaño de la vivienda y otros factores económicos más. A partir de ese valor se determina el impuesto de bienes e inmuebles que el propietario debe pagar por esa vivienda. En la siguiente tabla se muestra el valor catastral de las viviendas de una determinada zona de la ciudad:

$I_i$	$f_i$
[0, 60 000)	62
[60 000, 90 000)	78
[90 000, 120 000)	90
[120 000, 150 000)	45
[150 000, 200 000)	15
[200 000, 300 000)	10

- a) Calcula el valor catastral medio del barrio estudiado.
- b) Calcula la mediana.
- c) Calcula la varianza.
- d) Calcula la desviación típica.
- e) A la vista de los datos obtenidos, ¿qué podemos afirmar sobre la media aritmética?

32. En una fábrica de montaje de automóviles montan coches de tres tipos: utilitarios, gama media y gama alta. Para determinar los vehículos que es conveniente montar en función de sus posibilidades de venta, se realiza un estudio tomando a 150 personas, a las que se les pregunta por el vehículo que responde mejor a sus necesidades, y se obtienen los resultados que se resumen en la siguiente tabla:

Tipo de coche	Utilitario	Media	Alta
N.º de personas	84	24	12

- a) Según estos datos, ¿qué porcentaje de vehículos de cada clase se deberían montar?
- b) Realiza un diagrama de sectores.
- c) Si se montan 2 500 vehículos, ¿cuántos de cada clase se deberían fabricar?

33. En una determinada empresa, cada trabajador tiene un sueldo distinto en función de la dificultad del trabajo y la necesaria preparación para realizar la actividad, de forma que los salarios de los trabajadores se distribuyen de la siguiente forma:

Sueldo	N.º de trabajadores
[800, 1000)	45
[1 000, 1200)	62
[1200, 1400)	86
[1400, 1600)	91
[1600, 1800)	24
[1800, 2000)	14
[2000, 2200)	8

- a) Haz un histograma y un polígono de frecuencias.
- b) Calcula la media aritmética.
- c) Calcula la mediana.
- d) Calcula la varianza y la desviación típica.

## Una noticia inquietante

A continuación se muestra la evolución del paro registrado en el país en el año 2014-15. Se presentan dos gráficos, uno en el que se muestra la evolución del paro por sectores profesionales y otro en el que se muestra la distribución por sexos.

### EVOLUCIÓN DEL PARO REGISTRADO POR SECTORES

(Datos comparativos respecto del mismo mes del año anterior)

Sector	SEPTIEMBRE 14	SEPTIEMBRE 15
AGRICULTURA	199 138	101 720
INDUSTRIA	411 233	301 140
CONSTRUCCIÓN	448 465	451 878
SERVICIOS	2 856 894	2 202 811
SIN EMPLEO ANTERIOR	369 879	361 707

### EVOLUCIÓN MENSUAL DEL PARO REGISTRADO

Distribución por sexo 2014-2015

Observa la evolución del número de parados por sectores y por sexos, y contesta a las siguientes cuestiones.

**Actividad 1:** A la vista del gráfico, el paro registrado en el sector servicios ha bajado; ¿en qué porcentaje?

A	4 %
B	5,2 %
C	94,8 %

**Actividad 2:** Según se puede extraer del gráfico, el paro registrado de septiembre de 2014 a septiembre de 2015 ha bajado en un:

A	8 %
B	12 %
C	7 %

**Actividad 3:** Observando la gráfica de evolución de desempleo por meses relativa a las mujeres, ¿qué mes se puede ver como generador de empleo estacional y solo por poco tiempo?

A	Septiembre
B	Enero
C	Diciembre

**Actividad 4:** A la vista de la gráfica, el número de parados mujeres es mayor que el de parados hombres; aproximadamente en septiembre de 2015 se diferencian en:

A	600 000
B	300 000
C	500 000

**Actividad 5:** Estima el número de mujeres paradas sin empleo anterior en septiembre de 2015:

A	100 000
B	200 000
C	300 000

**B. Anexo 2: Criterios de evaluación en Matemáticas**

<b>3º Ciclo de Primaria</b>	<b>1º y 2º ESO</b>
<p>1. Recoger y registrar una información cuantificable, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales, comunicando la información.</p> <p>2. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.</p>	<p>1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.</p> <p>2. Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada.</p>
<b>3º ESO Aplicadas</b>	<b>3º ESO Académicas</b>
<p>1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.</p> <p>2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas.</p> <p>3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad</p>	<p>1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.</p> <p>2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas.</p> <p>3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.</p>
<b>4º ESO Aplicadas</b>	<b>4º ESO Académicas</b>
<p>1. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación.</p> <p>2. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo), valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.</p>	<p>3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación.</p> <p>4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.</p>

<b>Matemáticas I</b>	<b>Matemáticas CCSS I</b>
<p>1. Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con el mundo científico y obtener los parámetros estadísticos más usuales, mediante los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo) y valorando, la dependencia entre las variables.</p> <p>2. Interpretar la posible relación entre dos variables y cuantificar la relación lineal entre ellas mediante el coeficiente de correlación, valorando la pertinencia de ajustar una recta de regresión y, en su caso, la conveniencia de realizar predicciones, evaluando la fiabilidad de las mismas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos científicos.</p> <p>3. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, la publicidad y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.</p>	<p>1. Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con la economía y otros fenómenos sociales y obtener los parámetros estadísticos más usuales mediante los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo) y valorando la dependencia entre las variables.</p> <p>2. Interpretar la posible relación entre dos variables y cuantificar la relación lineal entre ellas mediante el coeficiente de correlación, valorando la pertinencia de ajustar una recta de regresión y de realizar predicciones a partir de ella, evaluando la fiabilidad de las mismas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos económicos y sociales.</p> <p>4. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.</p> <p>5. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, la publicidad y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.</p>
<b>Matemáticas II</b>	<b>Matemáticas CCSS II</b>
<p>2. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.</p> <p>3. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, en especial los relacionados con las ciencias y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.</p>	<p>2. Describir procedimientos estadísticos que permiten estimar parámetros desconocidos de una población con una fiabilidad o un error prefijados, calculando el tamaño muestral necesario y construyendo el intervalo de confianza para la media de una población normal con desviación típica conocida y para la media y proporción poblacional cuando el tamaño muestral es suficientemente grande.</p> <p>3. Presentar de forma ordenada información estadística utilizando vocabulario y representaciones adecuadas y analizar de forma crítica y argumentada informes estadísticos presentes en los medios de comunicación, publicidad y otros ámbitos, prestando especial atención a su ficha técnica, detectando posibles errores y manipulaciones en su presentación y conclusiones.</p>




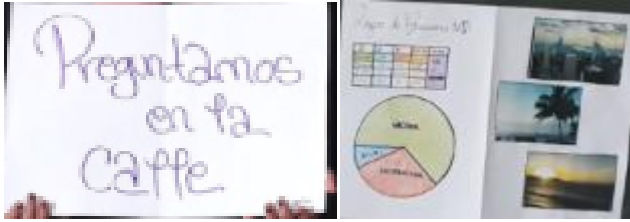



## C. Anexo 3: CANVAS

<h1>CANVAS EDUCATIVO ABP</h1>	
<p><b>COMPETENCIAS A TRABAJAR</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• OCL</li> <li>• CMCT</li> <li>• CPAA</li> <li>• CSC</li> </ul>	<p><b>PRODUCTO FINAL</b></p> <p style="text-align: center;">TÍTULO: PREGUNTO EN LA CALLE</p> <p>Presentación de tablas, gráficos y cálculos en <b>Excel</b>, A3</p> <p style="text-align: center;">TEMPORIZACIÓN 12 horas</p>
<p><b>ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Emplea vocabulario adecuado para comentar tablas y gráficos estadísticos.</li> <li>• Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas.</li> <li>• Diferencia los datos recogidos corresponden a una variable discreta o continua.</li> <li>• Interpreta y utiliza datos presentados en tablas y gráficos.</li> <li>• Representa gráficamente un conjunto de datos presentados en tablas.</li> </ul>	<p><b>PAQUETES DE TRABAJO</b></p> <p><b>PREPARACIÓN: APRENDERÁS A:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Utilizar tablas para la recogida de datos</li> <li>-Construir los gráficos asociados a las tablas</li> <li>-Calcular parámetros estadísticos</li> </ul> <p><b>DESARROLLO: CREAMOS</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1º Elaboración cuestionario para recoger información (Doc.1) 2:4</li> <li>2º Volcado de la información en tablas (Doc.2) Uno por todos</li> <li>3º Elaboración de gráficos (Doc.3) Uno por todos</li> <li>4º Cálculo de parámetros asociados a nuestro estudio (Doc.4) Uno por todos</li> </ol> <p><b>CIERRE-PRODUCTO FINAL: PRESENTAMOS</b></p> <p>Presentación dentro del grupo. Presentación al otro grupo.</p>
<p><b>EVALUACIÓN</b></p> <p><b>Proceso</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Evaluación profesor</li> </ul> <p><b>Resultado</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Autoevaluación del ABP</li> <li>• Coevaluación de la presentación</li> </ul> <p><b>Herramientas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tabla de observación</li> <li>• Rúbrica</li> </ul>	<p><b>CARGOS o ROLES</b></p> <p>Equipos base</p> <p>INTENDENTE: COORDINADOR: SECRETARIO: MATERIAL: AYUDANTE:</p> <p><b>HERRAMIENTAS TIC</b></p> <p>Hoja Excel</p> <p><b>RECURSOS</b></p> <p>Salir a la calle para realizar el cuestionario</p>



## D. Anexo 4: Anotaciones sobre las exposiciones del Proyecto

	<p>4ºD –GRUPO 1</p> <p>Integrantes: 5</p> <p>Tema: Vida deportiva</p> <p>Comentarios:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Error en calculo de parámetros</li> <li>- Error en dibujar gráficas</li> <li>- Buenas conclusiones</li> </ul>
	<p>4ºD –GRUPO 2</p> <p>Integrantes: 6</p> <p>Tema: Vida deportiva</p> <p>Comentarios:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- No conclusiones</li> <li>- Buenas gráficas y tablas de frecuencia</li> </ul>
	<p>4ºD –GRUPO 3</p> <p>Integrantes: 5</p> <p>Tema: Vida deportiva</p> <p>Comentarios:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Error mediana en V. Cualitativa</li> <li>- Error gráficas</li> <li>- Calculo de mediana en cuantitativa</li> </ul>
	<p>4ºDP –GRUPO A</p> <p>Integrantes: 6</p> <p>Tema: Vacaciones y Viajes</p> <p>Comentarios:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fallos con intervalos</li> <li>- No medidas centralización y dispersión</li> </ul>
	<p>4ºDP –GRUPO B</p> <p>Integrantes: 6</p> <p>Tema: Vacaciones y Viajes</p> <p>Comentarios:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fallos en frecuencia</li> <li>- Fallos en gráficas</li> <li>- Fallos en medidas de centralización y dispersión</li> <li>- Generalmente mal</li> </ul>



# EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:

José Antonio Moler Cuiral, Departamento de Matemáticas