Belatz MARTINENA MORENO

FUNTZIOAK

FUNTZIOEN LIMITEEN ETA JARRAITUTASUNAREN IKASKETA PROZESU BAT, IRAKASKUNTZA EZ-PRESENTZIALAREN BIDEZ, ZIENTZIETAKO BATX. 1. MAILAN

MBL 2020

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

MATEMATIKA Arloa

UNIBERTSITATE MASTERRA BIGARREN HEZKUNTZAKO IRAKASLEENTZAT

Unibertsitate Masterra Bigarren Hezkuntzako Irakasletzan

Derrigorrezko Bigarren Hezkuntza, Batxilergoa, Lanbide Heziketa eta Hizkuntzen Irakaskuntza

Master Bukaerako Lana

Matematika Arloa

Funtzioen limiteen eta jarraitutasunaren ikasketa prozesu bat, irakaskuntza ez-presentzialaren bidez, zientzietako Batx. 1. mailan

Belatz Martinena Moreno

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

AURKIBIDEA

Sarrera orokorra

Master Bukaerako Lan honen helburu nagusia ondoko hau da: zientzietako batxilergoko 1. mailan, funtzioen limiteen eta jarraitutasunaren ikasketa prozesu bat deskribatzea eta analizatzea, 2020ko COVID-19-aren pandemiagatik sortutako irakaskuntza-ikaskuntza ez-presentziaren testuinguruan.

Lana bi ataletan antolatu da. Lehenengoan, curriculumaren eta testu-liburuen luzetarako azterketa egiten da DBH-n eta Batxilergoan, zehazturiko gaiaren inguruan.

Bigarrenean, funtzioen limiteak eta jarraitutasunari buruzko ikasketa prozesu bat proposatzen da, eta proposamen hori zientzietako batxilergoko 1. ikasmailari dagokion ikasgela batean ezarri da, Masterreko Practicum II irakasgaiaren baitan. Esperimentazio horretatik lortu diren emaitzak *ad hoc* diseinaturiko galdetegi batean oinarritzen dira, kontuan hartuz, halaber, baldintzapen instituzionalak.

Lanaren amaieran, aurkeztu egiten dira sintesia, zenbait ondorio eta erantzun gabe gelditu diren zenbait galdera.

I Atala:

Funtzioak indarrean dagoen curriculumean eta testu-liburuetan

Master Bukaerako Lanaren lehenengo zati honetan, aztertu egiten da funtzioen bloke osoari zer nolako tratamendua egiten zaion curriculumean eta testu-liburuetan Lehen Hezkuntzako hirugarren zikloan, DBHn eta Batxilergoan.

Analisia lau kapitulutan banatzen da. Lehenengo eta bigarren kapituluetan, taula-formatuan aurkezten dira indarrean dagoen curriculumeko edukiak eta ebaluazio irizpideak, ikasmailen arabera.

Hirugarrenean, zientzietako batxilergoko 1. mailako testu-liburuan azaltzen diren jardueren adibideak aurkezten dira (ariketak, problemak, galderak eta egoerak), aurreko bi ikasturteetako eta hurrengo bi ikasturteetako jarduerekin batera.

Behin bi iturri horietako (curriculuma eta testu-liburuak) edukiak konparatu ostean, analisi horren ondorioak laugarren kapituluan aurkezten dira. Hemen, helburua izango da esku-liburuek indarrean dagoen curriculumarekiko duten koherentzia baloratzea, eta nabarmendu egingo dira analisirako gaia den ezagutza matematikoak horietan dituen ausentziak eta presentziak.

1 Kapitulua
Funtzioen edukiak indarrean dagoen curriculumean

Lan honetan, zientzietako lehenengo batxilergoko matematiketan (ofizialki, *Matematika I* izenez ezagutzen den ikasgaia) lantzen den gai batean zentratuko gara: **funtzioen limiteak eta jarraitutasuna**. Horretarako, orokortasunetik partikularrerako bidea planteatuko dugu, hasierako kapitulu hauetan (hau da, lan honen I. Atal osan), Nafarroako Foru Komunitateko batxilergoko curriculumeko (25/2015 Foru Dekretua, 2015, apirilaren 22koa) funtzioei dagokion **multzo osoa** aztertuz: 4. MULTZOA.- ANALISIAK. Gerora, lanaren II. Atalean, **funtzioak** osotasunean tratatu beharrean, **funtzioen limiteak eta jarraitutasunean** zentratuko gara.

Gure helburua kapitulu honetarako, lehenengo batxilergoan nahiz inguruan dauden kurtsoetan (Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako 1, 2, 3 eta 4. mailak eta zientzietako bigarren batxilergoa) funtzioen edukiak curriculumean identifikatzea izanen da. Esan beharra dago, egungo curriculumak matematika ikasgairako bi bide planteatzen dituela Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako (DBH) 3. eta 4. mailetan: *Matematika Akademikoak* eta *Matematika Aplikatuak*. Lan honetako aztergai nagusia, batxilergo zientifikoko matematikak direnez (*Matematika I*), bakarrik *Matematika Akademiko*-en bidea hartuko da kontuan, hau baita zientzietako batxilergora bideratuta dagoen bidea, eta testuinguru egokiena planteatzen duena. Batxilergorako beste hainbat aukera ezberdin dauden arren (giza zientzietako batxilergoa, batxilergo teknologikoa, arte plastikoen/eszenikoen batxilergoa…), hauek ez dira lan honetan kontsideratuko.

Kapitulua bi ataletan banatuko da: curriculumaren azterketa DBH-n eta batxilergoan. Biek egitura berbera izanen dute, bietan egiten den lana berbera baita, hau da, funtzioen eduki guztiak, eta horiekin zeharka erlazionatutakoak ere, identifikatzea. Hau apur bat anbiguoa izan daiteke, izan ere matematikan eduki guztiek dute haien artean erlazioren bat eta noizbait, erlazio hauek ez dira hain zuzenak edo intuitiboak. Horretarako, funtzio kontzeptua zer den bereizteko, sei deskribatzaile definitu dira, eta horien bilaketa eginen da curriculumean. Deskribatzaile batzuk funtzioekin erabat identifikatuko ditugu, beste batzuk aldiz, funtzioak ulertzeko tresnak izan daitezke, baina ez dute zertan funtzioen edukia bera izan behar.

Jarraian, definitutako sei deskribatzaileen azalpena egiten da:

D1: Espazioaren ezagutza. Plano euklidearra zein hiru dimentsioko espazioan kokatzen jakitea, horien elementu eta propietateak bereganatu eta menperatzea. Bestela esanda, funtzioen ingurunea izanen den espazio abstraktuarekin ohitzea. Deskribatzaile hau nahiko bakuna izan daitekeen arren, sakonki landu behar da funtzioen irudikapena zuzenean landu baino lehen.

D2: Funtzioen ezaugarriak. Funtzio mota ezberdinak deskribatzen eta bereizten dituzten ezaugarriak aztertzea, eta horiekin trebatzea. Deskribatzaile honek garrantzi handiagoa hartuko du batxilergoan, honetan multzokatu baititugu limite, deribatu eta jatorrizko funtzioen kontzeptuak.

D3: Modelizazioa. Aplikazioekin lotutako deskribatzailea. Egoera erreal bat funtzioen bidez modelizatzea eta alderantziz, errealitatean ager daitezkeen funtzioak identifikatzea. Zeregin praktiko baterako, funtzioak erabiltzea ere.

D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa. Aldagai askea eta menpekoaren nozioa izatea eta nola adierazpen algebraiko baten bidez (funtzioaren bidez) erlazionatzen diren. Aljebraren bidez mendekotasun funtzionala ulertzea.

D5: Funtzioen irudikapena. Alderdi grafikoaren deskribatzailea, hauek irudikatzen jakitea, nahiz hauek interpretatzea. D1 deskribatzailearekin erlazionatuta dagoen arren, D5 honetan funtzioaren beraren irudikapena hartzen dugu kontuan. D1 deskribatzailean aldiz, planoa/espazioa eta bere barne arauak kontsideratzen dira gehienbat.

D6: Datu taulak. Datu numerikoak tauletan antolatzea, gerora menpekotasun funtzional bat topatzeko. Datu taulak, funtzioen informazioa gordetzeko eta erabiltzeko nozioa izatea.

1.1. Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako funtzioen edukiak

Atal honetan DBH-ko curriculumeko (24/2015 Foru Dekretua, 2015, apirilaren 22koa) lau mailak aztertuko ditugu. Funtzioen multzoa, batxilergoan ez bezala, 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK bezala ageri da curriculumean. Hala ere, beste multzoetan ere aurkituko ditugu arestian aipatutako deskribatzaileak, batez ere 2. eta 3. multzoetan (2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA eta 3. MULTZOA.-GEOMETRIA). Esan beharra dago ere, 1. MULTZOA.-PROZESUAK, METODOAK ETA JARRERAK MATEMATIKETAN, komuna dela DBH osoan, matematikarako estrategia orokorrak biltzen baititu; hori dela eta, deskribatzaileak ez dira 1. multzoan bilatuko.

Arau orokor bezala, esan dezakegu, DBH-ko mailetan funtzioak aztertzerakoan, funtzio kontzeptuari garrantzia ematen zaiola gehienbat, eta ez da hainbeste lantzen funtzioen inguruko kalkulua, irudikapena edota ezaugarriak. Etapa honetan argi geratu behar da funtzio bat bi aldagaien arteko erlazio bat dela, beraz D4 deskribatzaileak garrantzi handia izanen du. D2 deskribatzailea ere garrantzitsua izanen da DBH-ko 1. eta 2. mailan, baina oso modu deskriptiboan eta kalkuluetan sartu gabe (deskribatzaile hau batxilergoan askoz gehiago lantzen da). Lehenengo bi kurtso hauetan, funtzioen ikuspegi zabala baina bakuna egiten da, eduki asko landuz baina bakoitzean oso gutxi sakonduz.

	DBH-ko 1. mailako funtzioen **edukiak**	DBH-ko 2. mailako funtzioen **edukiak**
D1: Espazioaren ezagutza	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK » Koordenatu kartesiarrak: ardatz koordenatuen sisteman puntuak irudikatzea eta identifikatzea eta konparatzea.	

D2: Funtzioen ezaugarriak	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK » Funtzioaren kontzeptua: (…) Hazkundea eta beherapena. Jarraitutasuna eta etena. Ardatzekiko ebakiguneak. Maximo eta minimo erlatiboak. (…)	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK » Funtzioaren kontzeptua: (…) Hazkundea eta beherapena. Jarraitutasuna eta etena. Ardatzekiko ebakiguneak. Maximo eta minimo erlatiboak. (…)
D3: Modelizazioa		
D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK » Funtzioaren kontzeptua: aldagai dependentea eta independentea. Irudikatzeko moduak (ohiko hizkuntza, formula) (…).	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » (…) Magnitude zuzenki proportzionalak eta alderantziz proportzionalak. (…) » Propietateak orokortu eta erlazioak sinbolizatzeko hizkuntza aljebraikoa. Pautak eta erregulartasunak behatu ondoren formula eta termino orokorrak lortzea. (…) 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Funtzioaren kontzeptua: aldagai dependentea eta independentea. Irudikatzeko moduak (ohiko hizkuntza, formula) (…).
D5: Funtzioaren irudikapena	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK » Funtzioaren kontzeptua: aldagai dependentea eta independentea. Irudikatzeko moduak (ohiko hizkuntza, formula) (…).	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » Bi ezezaguneko bi ekuazio linealek osatutako sistemak. Ebazteko (…) metodo grafikoa. (…) 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Funtzioaren kontzeptua: aldagai dependentea eta independentea. Irudikatzeko moduak (ohiko hizkuntza, formula) (…).
D6: Datu taulak	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK » Funtzioaren kontzeptua: Irudikatzeko moduak (taula). (…)	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK » Funtzioaren kontzeptua: Irudikatzeko moduak (taula). (…)

1.1. Taula: DBH-ko 1 eta 2. mailako funtzioen edukiak.

DBH-ko 3. mailak aurreko biekin duen ezberdintasuna da, argi geratu behar dela zein den funtzio batek duen erabilgarritasuna kasu praktikoetan, hori dela eta D3 deskribatzaileak garrantzi handia izanen du. Baita ere D1 eta D4, izan ere aurreko kurtsoetan baino gehiago sakontzen da funtzioei dagokionez. Aldiz, D2 deskribatzailea oso zeharka ageri da, batez ere geometriako multzoari lotuta.

	DBH-ko 3. mailako funtzioen **edukiak**
D1: Espazioaren ezagutza	3. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Planoaren geometria. Leku geometrikoa. » Espazioaren geometria. Simetria planoak poliedroetan.

D2: Funtzioen ezaugarriak	3. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Planoko translazioak, simetriak eta biraketak.
D3: Modelizazioa	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Eguneroko gertaerak eta beste irakasgai batzuetako fenomenoak adierazten dituzten grafikoen analisia eta deskripzio kualitatiboa. » Egoera baten analisia egitea, dagokion grafikoaren ezaugarri lokalak eta orokorrak aztertuz. » Eredu linealak erabiltzea hainbat jakintza arlotan eta eguneroko bizitzan gertatzen diren egoerak aztertzeko. (…) » Zuzenaren ekuazioaren adierazpenak. Funtzio koadratikoak. (…) Eguneroko bizitzako egoerak adierazteko erabiltzea.
D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » Zenbaki segidak. Segida errepikariak. Progresio aritmetiko eta geometrikoak. 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Eredu linealak erabiltzea hainbat jakintza arlotan (…). Horretarako, (…) adierazpen aljebraikoa lortzea. » Zuzenaren ekuazioaren adierazpenak. Funtzio koadratikoak. (…)
D5: Funtzioaren irudikapena	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » Ezezagun bateko bigarren mailako ekuazioak ebaztea (metodo aljebraikoa eta grafikoa). 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Eredu linealak erabiltzea hainbat jakintza arlotan (…). Horretarako, (…) adierazpide grafikoa egitea (…). » Zuzenaren ekuazioaren adierazpenak. Funtzio koadratikoak. Adierazpide grafikoa. (…) 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA: » Grafiko estatistikoak.
D6: Datu taulak	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Mendekotasun funtzionaleko egoerak, taulen eta enuntziatuen bidez emanak, aztertu eta alderatzea. » Eredu linealak erabiltzea hainbat jakintza arlotan (…). Horretarako, taula egitea, (…).

1.2. Taula: DBH-ko 3. mailako funtzioen edukiak.

DBH-ko 4. mailan, funtzioen multzoak jada forma hartzen du. Alde batetik geometriako multzoan, geometria analitikoa lantzen da, puntuak, bektoreak, koordenatuak eta osagai hauek guztiak normalizatuz. Zenbaki errealak ere oso landuta daude kurtso honetarako, beraz funtzioen irudikapenerako oinarriak jarrita daude. Hala ere, funtzioak fenomeno bati lotuta aurkezten dira, beraz testuinguru praktiko batean jarraitzen dugu, erabateko abstrakzio matematikoa zientzietako batxilergorako utziz.

Kurtso honetan D5 deskribatzaileak garrantzi handiagoa hartzen du eta D3 eta D4-rekin batera funtzioen multzoan guztiz ageri dira. D1 deskribatzailea, batez ere geometriako multzoaren bidez ageri da. Aipatzekoa da, deribatu kontzeptuaren aurrekaria agertzen da dagoeneko (batez besteko aldakuntza tasa), funtzio baten aldakuntza kuantifikatzeko modu bakuna dena. Azken hau funtzioen ezaugarriak deskribatzeko tresna izanik D2 deskribatzailearekin identifikatuko dugu, zeina gutxi agertu arren, aurreko kurtsoan baino garrantzi gehiago duen.

	DBH-ko 4. mailako funtzioen **edukiak**
D1: Espazioaren ezagutza	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » Zenbakiak irudikatzea zuzen errealean. » Lehen eta bigarren mailako inekuazioak. Interpretazio grafikoa. 3. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Planoko geometria analitikoaren atarian: Koordenatuak. Bektoreak. (…) » Geometria dinamikoko aplikazio informatikoak, kontzeptu eta propietate geometrikoak hobeki ulertzeko.
D2: Funtzioen ezaugarriak	3. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Planoko geometria analitikoaren atarian: (…) Bektoreak. (…). Paralelotasuna eta perpendikulartasuna. 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » (…) Batez besteko aldakuntza tasa: funtzio baten aldakuntzaren neurria tarte baten barnean.
D3: Modelizazioa	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Enuntziatu, taula, grafiko edo adierazpen analitiko baten bidez deskribatutako fenomeno bat interpretatzea. Emaitzen analisia. (…) » Bestelako funtzio-ereduak bereiztea: egiazko testuinguru eta egoerei aplikatzea.
D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa	3. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Planoko geometria analitikoaren atarian: (…) Zuzenaren ekuazioak. (…) 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Enuntziatu, taula, grafiko edo adierazpen analitiko baten bidez deskribatutako fenomeno bat interpretatzea. Emaitzen analisia. (…)
D5: Funtzioaren irudikapena	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Enuntziatu, taula, grafiko edo adierazpen analitiko baten bidez deskribatutako fenomeno bat interpretatzea. Emaitzen analisia. Batez besteko aldakuntza tasa: funtzio baten aldakuntzaren neurria tarte baten barnean. » Bestelako funtzio-ereduak bereiztea: egiazko testuinguru eta egoerei aplikatzea. 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA: » Grafiko estatistikoak: Grafiko motak. Hedabideetan ematen diren (…) grafiko estatistikoak kritikoki aztertzea. (…)
D6: Datu taulak	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » Enuntziatu, taula, grafiko edo adierazpen analitiko baten bidez deskribatutako fenomeno bat interpretatzea. Emaitzen analisia. (…) 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA: » (…) Hedabideetan ematen diren taulak (…) kritikoki aztertzea. (…)

1.3. Taula: DBH-ko 4. mailako funtzioen edukiak.

1.2. Zientzietako batxilergoko funtzioen edukiak

Atal honetan, gure aztergai den zientzietako lehenengo batxilergoan sartzen gara, baina batxilergoa etapa integratu bat denez, zientzietako bigarren batxilergoa ere aztertuko dugu. Etapa honetan eduki matematikoek DBH-n baino askoz abstrakzio maila handiagoa dute, eta errealitatearekin duten lotura, askoz eskasago da orokorrean (horrek ez du esan nahi testuliburuek ez dutenik lotura hau bilatzen, baina ez dago curriculumetik hain bideratuta).

Funtzioen edukiak 3. MULTZOA.-ANALISIAK moduan zehaztuta daude curriculumean (25/2015 Foru Dekretua, 2015, apirilaren 22koa) eta batxilergo osoan erabat koordinatuta agertzen dira, hau da, lehenengo batxilergoan lantzen diren edukiak zuzenean heltzen diote bigarren batxilergokoei. Hau bera, geometriako multzoan ere gertatzen da, izan ere lehenengo batxilergoan, geometria analitikoa planoan (2D-ko espazioan) ematen da eta multzo honetan lantzen diren estrategia eta pentsamoldeek ere balio dute bigarren batxilergorako, baina kasu honetan planoan izan ezik, espazioan (3D-n) lantzen dira, zailtasun maila areagotuz. Funtzioen multzoan antzekoa gertatzen da funtzioen irudikapena egiterakoan: lehenengo batxilergoan irudikapena egiteko pausu guztiak (edo gehienak) ematen diren arren, lantzen diren adibideetan oso funtzio mota sinpleak ageri dira (funtzio arrazionalak gehienbat); bigarren batxilergoan ariketa mota berbera izan arren, irudikatu beharreko funtzioen aniztasuna eta horien konplexutasuna handitzen da, eta horretan datza zailtasuna. Adibide hauekin nabarmendu nahi dena da, batxilergo osoa (lehenengo eta bigarren kurtsoak) etapa koordinatu bat dela.

Lehenengo batxilergoa lan honen aztergai izanik, deskribatzaile garrantzitsuenak sakonago aztertuko dira, hau da, D1, D2, D4 eta D5:

» Hasteko D1 deskribatzaileak 2. multzoarekin duen erlazioa oso bakuna da, izan ere funtzioen ingurunea den plano euklidearra bi zuzen errealen konposaketa da. Geometriarekin duen erlazioa apur bat handiagoa da izan ere, funtzioak oinarri ortonormaleko plano batean irudikatzen ditugu, beraz funtzioak osotasunean ulertzeko, planoko elementu hauekin (distantziak, bektoreak…) ohituta egon behar gara. Bide batez ere, funtzio batek leku geometriko bat adierazten du planoan.

» D2 deskribatzailea da kurtso honetan garrantzitsuena, izan ere, funtzioen ezaugarriak aztertzeaz eta horiek identifikatu eta bereizteaz datza 3. multzo osoa. Honetan agertzen da limite kontzeptua, bai puntu baterakoa, bai infiniturakoa; eta baita ere limitearen bidez aztertzen direnak ere, hala nola, jarraitutasuna eta etenak, eta deribatua ere (deribatua bera, gerora modu ezberdinez tratatzen den arren, limite bat da). Limite kontzeptua eta hauen ebazpena funtzioen irudikapenaren oinarri bat da; honen harira, deribatu funtzioaren kalkulu eta esanahia, kurtso honetan barneratu beharreko kontzeptuak dira ere. Bestalde, 2. multzoari dagokionez, planoan tarteak adieraztea eta zenbakien (edo zenbaki bikoteak diren puntuen) inguruneekin ohitzea, tresna erabilgarriak izanen dira funtzioen ezaugarriak deskribatzerako orduan.

Zenbakizko segidei dagokionez, hauek zenbaki arruntetik errealetara doazen aplikazioak dira, beraz funtzioekin duten antzekotasuna oso nabaria da. Limite kontzeptua ere aztertzen da segidetan eta gainera, indeterminazioak ebazteko metodoak, funtzioetarako balio dute ere.

» D4 deskribatzaileak garrantzia mantentzen du DBH-tik, baina modu ezberdinez. DBH-ko 3. eta 4. mailetan, funtzio bat analitikoki adierazteko garrantzia nabarmentzen zen, aldagai askea eta menpekoa adierazpen aljebraiko baten bidez erlazionatuz; batxilergoan aldiz, aldagai askea eta menpekoa erlazionatzeko modu ohikoenak ikasten dira (funtzio elementalak izenez ezagutzen direnak), eta horiek zelako ezaugarri bereizgarriak dituzten nabarmenduz. Hauetan bakunena funtzio linealen adierazpena da, geometriako multzoan zuzenaren ekuazio esplizituarekin identifikatzen dena. Bide batez ere, ekuazio baten bidez adierazten diren leku geometrikoak (zirkunferentziak, elipseak…), funtzioen bidez adierazi daitezke ere y koordenatua isolatzen badugu[1].

Deskribatzaile honek 5. multzoarekin erlazioa du ere, izan ere, askotan estatistikan, bi aldagairen arteko erlazio analitikoa bilatzen da (Pearson-en korrelazioa bera, bi aldagairen arteko erlazio “linealtasuna” neurtzeko tresna da), nahiz eta bi aldagai estatistikoen erlazioa zehatza ez den. Ausazko aldagaiaren kontzeptua bera, ezezaguna zaigun funtzio baten bidez adierazten da, zeinean menpeko aldagaiak populazioaren indibiduo bakoitzaren ezaugarri bat den.

» D5 deskribatzailea ere guztiz garrantzitsua dugu kurtso honetan, izan ere D4-ren bidez agertu diren funtzio elemental guztien irudikapenak ezagutu behar dira zuzenean. DBH-n edozein funtzioren profila ezagutzeko, datu taula egiten zen, baina estrategia hori batxilergoan ez da eraginkorra. Funtzio elementalak banan-banan ikasten direnean, euren irudikapen grafikoa ere ezagutu behar da. Gainera, funtzioen irudikapen grafikoa batxilergo osoan analisi multzoko ariketarik garrantzitsuenetakoa da, eta nahiz eta ariketa mota hau D2 deskribatzailearen bidez ere justifikatu dugun, ikuspegi grafikoa behar-beharrezkoa da emaitza analitikoak interpretatzeko.

Estatistikako multzoari dagokionez, puntu-hodeia eta honen erregresio lineala, funtzioen irudikapenarekin hertsiki lotuta dago; konplexua eta ezezaguna den funtzio bat, ezaguna eta sinplea den beste batetik ordezkatzen dugu, eta bi hauen arteko baliokidetasuna errorearen bidez neurtzen dugu.

	Zientzietako batxilergoko 1. mailako funtzioen **edukiak**
D1: Espazioaren ezagutza	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » Zenbaki errealak: haren ikaskuntzaren beharra errealitatea ulertzeko. Balio absolutua. Desberdintzak. Distantziak zenbakizko zuzenean. (…)

[1] Hau egiterakoan, zirkunferentzia eta elipseak bezalako leku geometrikoetan, bi funtzio beharko ditugu, izan ere y aldagaia karratuan agertzen da (y^2) eta berau askatzean, erro aurrean plus eta minus zeinuak jarri behar dira, bi funtzio ezberdin aldi berean adierazten.

	4. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Planoko bektore libreak. (…) » Oinarri ortogonal eta ortonormalak. Geometria metriko laua. (…) Distantziak eta angeluak. (…) » Planoko leku geometrikoak.
D2: Funtzioen ezaugarriak	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » Zenbaki errealak: (…) Tarteak eta inguruneak. (…) » Zenbakizko segidak: gai orokorra, monotonia eta akotazioa. *e* zenbakia. 3. MULTZOA.-ANALISIAK: » Eragiketak eta funtzioen osaera. Alderantzizko funtzioa. (…) » Funtzio baten puntu bateko eta infinituko limitearen kontzeptua. Limiteen kalkulua. Albo limiteak. Indeterminazioak. » Funtzio baten jarraitutasuna. Etenen azterketa. » Funtzio baten puntu bateko deribatua. Funtzioaren puntu bateko deribatuaren interpretazio geometrikoa. Zuzen ukitzaile eta normala. » Funtzio deribatua. Deribatuen kalkulua. Katearen erregela. 4. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Zuzenen posizio erlatiboak. (…)
D3: Modelizazioa	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » (…) Eskaintza eta eskari funtzioak.
D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » Zenbakizko segidak: gai orokorra, (…). *e* zenbakia. 3. MULTZOA.-ANALISIAK: » Aldagai errealeko funtzio errealak. Funtzio oinarrizkoak: polinomikoak, arrazional errazak, balio absolutua, erroa, trigonometrikoak eta haien alderantzizkoak, esponentzialak, logaritmikoak eta funtzio zatika definituak. 4. MULTZOA.-GEOMETRIA: » (…) Zuzenaren ekuazioak. (…) » Konikoak. Zirkunferentzia, elipsea, hiperbola eta parabola. Ekuazioa eta elementuak. 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA » Bi aldagai estatistikoren mendekotasunaren azterketa. (…) » Bi aldagai estatistikoren mendekotasun lineala. (…)
D5: Funtzioaren irudikapena	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » Aldagai errealeko funtzio errealak. Funtzio oinarrizkoak: polinomikoak, arrazional errazak, balio absolutua, erroa, trigonometrikoak eta haien alderantzizkoak, esponentzialak, logaritmikoak eta funtzio zatika definituak. » Funtzioen irudikapen grafikoa. 4. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Planoko leku geometrikoak. 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA » Bi aldagai estatistikoren (…) azterketa. Irudikapen grafikoa: puntu-hodeia. » Erregresio lineala. (…)
D6: Datu taulak	

1.4. Taula: Batxilergoko 1. mailako funtzioen edukiak.

Bigarren batxilergoan analisiko multzoak aurkezten dituen kontzeptu berriei dagokionez, bi nabarmentzen dira: jatorrizko funtzioa eta analisiaren teoremak. Hauekin osatzen dira analisiaren funtsezko edukiak, batxilergoko etapa itxiz. Hauekin batera, lehenengo batxilergoko edukien errepasoa egiten da ere, hauek erabat bereganatu direla ziurtatzeko. Deskribatzaileei dagokionez, D2, D3 eta D5 dira garrantzitsuenak:

» Geometria aldetik D1 deskribatzaileak lotura galtzen du 4. multzoarekin, geometria analitikoa espazioan ematen baita eta ez planoan. Hala ere, unibertsitatean Matematika, Fisika edo Ingeniaritza moduko graduak eginen dutenen ikasleentzat erabilgarria izan daiteke, hauetan bi aldagaietako funtzioak lantzen baitira, eta horiek 3D-n irudikatzen dira.

» Lehenengo batxilergoan bezala, D2 deskribatzaileak garrantzi izugarria hartzen du, honetan biltzen baitira arestian aipatutako bi kontzeptu berriak: jatorrizko funtzioa, deribatu funtzioaren aurkakoa bezala aurkezten dena; eta analisiaren teoremak, funtzioen ezaugarriak osotasunean barneratu direnean erabilgarriak izaten diren bidezidorrak direnak. Kurtso honetan dagoeneko, aztertzen diren funtzioen ezaugarriak funtzioen oso espezifikoak dira, beraz ez dugu D2 deskribatzailea beste multzoetan aurkituko.

» Modelizazioko deskribatzaileak (D3) aurreko kurtsoan baino presentzia handiagoa dauka hemen, izan ere deribatu eta jatorrizko funtzioekin lotutako bi aplikazio praktiko ditugu: optimizazioa eta azaleren kalkulua. Praktikotasun honek testuinguru hobean jartzen ditu bi kontzeptu hauek, aurreko kurtsoan eduki abstraktu bezala soilik agertzen baitziren curriculumean.

» D4 deskribatzaileak 3. multzoan duen garrantzia ez da oso handia, izan ere kurtso honetarako argi egoten da zer den funtzio bat eta nola adierazten den. Hala ere, jatorrizko funtzioa eta integrazioa kontzeptu berriak izanik, hauek analitikoki nola adierazten den jakin behar da. Bestalde, 5. multzoan, probabilitate banaketa bat adierazteko, funtzioak erabiltzen dira[2], eta horien adierazpen analitikoa funtzio elementalekin konparatuz, nahiko konplexuak dira.

» Bigarren batxilergoan funtzioen irudikapeneko ariketak erabat menperatuta egon behar dira baina horretaz aparte, D5 deskribatzailearen presentzia ez da lehenengo batxilergoan bezain handia. Kurtso honetarako, deribatu eta jatorrizko funtzioen interpretazio grafikoa dira D5-ekin erlazioa duten edukirik garrantzitsuenak. Baita ere, 5. multzoari dagokionez, banaketa mota ezberdinen grafikoak menperatzearekin lotuta dago D5, probabilitate banaketa bakoitzaren profila ezagutzea ezinbestekoa baita multzo hau behar bezala ulertzeko.

[2] Banaketa binomiala ez da zehazki funtzio baten bidez adierazten, aldagaiak diskretuak baitira; banaketa normala aldiz, funtzio baten bidez adierazten da.

	Zientzietako batxilergoko 2. mailako funtzioen **edukiak**
D1: Espazioaren ezagutza	4. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Hiru dimentsioko espazioko bektoreak. Biderkadura eskalarra, bektoriala eta mistoa. (…)
D2: Funtzioen ezaugarriak	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » Funtzio baten puntu bateko eta infinituko limitea. Funtzio baten jarraitutasuna. Eten motak. Bolzanoren teorema. » Funtzio deribatua. Rolle-ren teorema eta batez besteko balioaren teorema. L'Hôpital-en erregela. Limiteen kalkulurako aplikazioa. » Funtzio baten jatorrizkoa. Integral mugagabea. Jatorrizkoak kalkulatzeko teknika elementalak. Integral mugatua. Batez besteko balioaren teorema eta kalkulu integralaren funtsezko teorema.
D3: Modelizazioa	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » Deribatuaren aplikazioak: optimizazio problemak. » (…) Integral mugatua. (…) Eskualde lauen azaleraren kalkulurako aplikazioa.
D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » Funtzio baten jatorrizkoa. (...) 4. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Zuzenaren ekuazioa eta espazio planoaren ekuazioa. 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA » Banaketa binomiala. Ereduaren karakterizazio eta identifikazioa. Probabilitateen kalkulua. » Banaketa normala. Banaketa normalaren tipifikazioa. Probabilitateen esleipena banaketa normal batean.
D5: Funtzioaren irudikapena	3. MULTZOA.-ANALISIAK » Funtzio baten puntu bateko eta infinituko limitea. Funtzio baten jarraitutasuna. Eten motak. (…). » Funtzio deribatua. (…) 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA » Banaketa binomiala. Ereduaren karakterizazio eta identifikazioa. Probabilitateen kalkulua. » Banaketa normala. Banaketa normalaren tipifikazioa. Probabilitateen esleipena banaketa normal batean.
D6: Datu taulak	

1.5. Taula: Batxilergoko 2. mailako funtzioen edukiak.

2 Kapitulua

Funtzioen ebaluazio-irizpideak indarrean dagoen curriculumean

Kapitulu honetan, aurrekoaren prozedura eta egitura bera jarraituko dugu baina kasu honetan, Nafarroako Foru Komunitateko curriculumeko **edukiak** aztertu beharrean, **ebaluazio-irizpidetan** zentratuko gara. Eragiteko modua berbera izanen denez, gehiegi ez errepikatzearren, arinago arituko gara oraingoan.

2.1. Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako funtzioen ebaluazio-irizpideak

Edukietan esan bezala, DBH-ko lehenengo kurtsoetan funtzioak osotasunean ematen dira baina gehiegi sakondu gabe. Horretarako koordenatu kartesiarren sistema eta funtzioak adierazteko modu guztiak ezagutu beharko dituzte, baita hauei buruzko oinarrizko hiztegia ere. Aipatzekoa da DBH-ko 1. mailan funtzioak dagoeneko eman dituzten arren, 2. mailan funtzio kontzeptuaren aurrekari bat agertzen dela 2. multzoan, proportzionaltasuna lantzerakoan[3].

	DBH-ko 1. mailako funtzioen **ebaluazio-irizpideak**	DBH-ko 2. mailako funtzioen **ebaluazio-irizpideak**
D1: Espazioaren ezagutza	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Koordenatu kartesiarren sistema ezagutu, erabili eta interpretatzea.	
D2: Funtzioen ezaugarriak		2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » 6. Zenbakizko prozesu aldagarriak aztertzea, (…) duten jokaerari buruzko iragarpenak egitea, (…).
D3: Modelizazioa		2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » 5. Zenbait estrategia erabiltzea (taulak, proportzionaltasun konstantea lortu eta baliatzea, unitatera murriztea, etab.), elementu ezezagunak eskuratzeko problema batean, bizitza errealeko egoeretako beste elementu batzuetatik abiatuta. (…) 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 2. Funtzio linealak edo afina ezagutu, (…) problemak ebazteko erabiltzea.
D4: Funtzioaren	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK:	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA

[3] Bi magnitudeen arteko erlazioa da proportzionaltasun zuzena (eta alderantzizkoa), eta hori da funtsean funtzioek egiten dutena: bi aldagai erlazionatu transformazio baten bidez.

kontzeptu analitikoa	» 2. Funtzio bat aurkezteko modu ezberdinak: ohiko hizkuntza, (…) ekuazioa; forma batzuetatik besteetara pasatzea eta haien arteko hoberena aukeratzea testuinguruaren arabera. » 3. Funtzioaren kontzeptua ulertzea. (…)	ALJEBRA: » 5. Zenbait estrategia erabiltzea (proportzionaltasun konstantea lortu eta baliatzea, unitatera murriztea, etab.), elementu ezezagunak eskuratzeko problema batean, (…). Egoera horietan portzentaje aldaketak eta zuzenki edo alderantziz proportzionalak diren magnitudeak erabili behar dira. » 6. Zenbakizko prozesu aldagarriak aztertzea, arautzen dituzten patroi eta lege orokorrak identifikatzea, haiek adierazteko, komunikatzeko lengoaia aljebraikoa erabiltzea eta, aldagaiak aldatzean, duten jokaerari buruzko iragarpenak egitea, eta adierazpen aljebraikoekin jardutea. 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Funtzioaren kontzeptua ulertzea. Aurkezpen moduak erabiltzea (…) » 2. Funtzio linealak edo afina ezagutu, (…).
D5: Funtzioaren irudikapena	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 2. Funtzio bat aurkezteko modu ezberdinak: (…), grafikoa (…); forma batzuetatik besteetara pasatzea eta haien arteko hoberena aukeratzea testuinguruaren arabera. » 3. (…) Funtzioaren kontzeptua ulertzea. Grafiko funtzionalak ezagutu, interpretatu eta aztertzea.	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Funtzioaren kontzeptua ulertzea. (…) grafiko funtzionalak ezagutu, interpretatu eta aztertzea. » 2. Funtzio linealak edo afina ezagutu, irudikatu eta aztertzea (…).
D6: Datu taulak	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 2. Funtzio bat aurkezteko modu ezberdinak: (…), zenbakizko taula, (…); forma batzuetatik besteetara pasatzea eta haien arteko hoberena aukeratzea testuinguruaren arabera.	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » 5. Zenbait estrategia erabiltzea (taulak, etab.), elementu ezezagunak eskuratzeko (…). Egoera horietan portzentaje aldaketak eta zuzenki edo alderantziz proportzionalak diren magnitudeak erabili behar dira. 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Funtzioaren kontzeptua ulertzea. Aurkezpen moduak erabiltzea (…).

2.1. Taula: DBH-ko 1 eta 2. mailako funtzioen ebaluazio-irizpideak.

DBH-ko 3. mailako edukietan zenbakizko segidak agertzen ziren D4 deskribatzailearekin batera. Ebaluazio-irizpideetan ere agertu arren, zenbakizko segidei buruz eskatzen direnak ez dute funtzioekin hainbeste zerikusirik; hala ere erlazio minimo bat gordetzen da, batez ere segida baten n-garren termino orokorrean.

Kurtso honetan funtzioen adierazpide grafikoari garrantzia ematen zaio (funtzio kontzeptua bere irudikapen grafikoari lotuta agertuko da, eta hau identifikatzeko eta deskribatzeko tresnak izan behar dituzte). Baita ere, funtzioen multzoko 2. itemean fijatzen bagara, modelizazioak duen garrantzia ikusiko dugu, batez ere funtzio linealetan, hauek errazenak baitira. Funtzio koadratikoei dagokionez, adierazpen analitikoa ulertzea eta manipulatzea eskatzen zaie batez ere, modelizazio ataletik gehiago bereiziz.

	DBH-ko 3. mailako funtzioen **ebaluazio-irizpideak**
D1: Espazioaren ezagutza	
D2: Funtzioen ezaugarriak	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » 2. Zenbaki segidak (…) patroi errekurtsiboak dituzten kasu errazetan erregulartasunak betetzea. 3. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Planoko mugimenduaren bidez irudi batetik beste batera eramaten duten eraldaketak ezagutzea, mugimendu horiek aplikatzea (…).
D3: Modelizazioa	3. MULTZOA.-GEOMETRIA: » Planoko mugimenduaren bidez irudi batetik beste batera eramaten duten eraldaketak ezagutzea, (…) eguneroko diseinuak, artelanak eta naturan dauden konfigurazioak aztertzea. 4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 2. Funtzio lineal baten bidez modelizatu ahal diren eguneroko bizitzako eta beste arlo batzuetako erlazioak identifikatzea, eta modelo horren deskribapena nahiz haren parametroak aztertutako fenomenoa deskribatzeko erabilgarriak diren baloratzea.
D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » 2. Zenbaki segidak deskribatzen dituzten adierazpen sinbolikoak lortzea eta manipulatzea (…). 3. MULTZOA.-GEOMETRIA: » 3. Funtzio koadratikoen bidez deskribatu behar diren erlazio funtzionaleko egoerak ezagutzea, eta haien parametro eta ezaugarriak kalkulatzea.
D5: Funtzioaren irudikapena	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Funtzioak eta haien adierazpide grafikoa aztertzeko kontuan hartu beharreko elementuak ezagutzea.
D6: Datu taulak	

2.2. Taula: DBH-ko 3. mailako funtzioen ebaluazio-irizpideak.

Dagoeneko DBH-ko 4. mailan, zailagoa da funtzioei buruzko ebaluazio-irizpideak funtzioen curriculumeko multzotik at aurkitzea, izan ere, kurtso honetan gaiak oso egituratuta eta bereizita daude. Hala ere, geometriako multzoarekin harremana mantentzen jarraitzen du D1 deskribatzaileari dagokionez. Estatistikako multzoarekin edukietan D5 eta D6 deskribatzaileak agertzen baziren, ebaluazio-irizpideetan eskatzen direnetan ez dute erlazio hori mantentzen (gauza antzekoa gertatzen zen DBH-ko 3. mailan zenbakizko segidekin).

Abstrakzio maila handitzen da DBH-ko 4. mailan, izan ere, funtzioak egoera jakin bati lotuta ageri badira ere, horri ez zaio hainbeste garrantzi ematen; alderdi praktikoa interpretazioan geratzen da gehienbat, eta ez hainbeste modelizazioan. Aldiz, funtzioak adierazteko tresnei eta hauek deskribatzeko erabiltzen den hiztegiari bai ematen zaiola garrantzia. Esan beharra dago, funtzio bat adierazteko moduen artean, zenbakizko adierazpena (datu taulak) garrantzia galduko duela kurtso honetatik aurrera, izan ere batxilergoan funtzioen profila ezagutzeko beste estrategia finagoak erabiltzen dira. Datu taulak estatistikako multzoan agertuko dira gehienbat.

	DBH-ko 4. mailako funtzioen **ebaluazio-irizpideak**
D1: Espazioaren ezagutza	3. MULTZOA.-GEOMETRIA: » 3. Geometria analitiko lauko kontzeptu eta prozedura oinarrizkoak ezagutzea eta forma zein konfigurazio geometriko sinpleak irudikatu, deskribatu eta aztertzeko erabiltzea.
D2: Funtzioen ezaugarriak	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Erlazio kuantitatiboak identifikatzea (…), horiek adieraz ditzakeen funtzio mota zehaztea, eta batez besteko aldakuntza tasa hurbildu eta interpretatzea (…).
D3: Modelizazioa	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Erlazio kuantitatiboak identifikatzea egoera jakin batean, horiek adieraz ditzakeen funtzio mota zehaztea (…). » 2. Egiazko egoerei lotutako erlazio funtzionalak adierazten dituzten taula eta grafikoetatik abiatuta emandako informazioa aztertzea, eta haien portaerari, bilakaerari eta amaierako emaitzei buruzko informazioa lortzea.
D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Erlazio kuantitatiboak identifikatzea egoera jakin batean, horiek adieraz ditzakeen funtzio mota zehaztea (…) adierazpen aljebraikoko koefizienteen azterketaren bidez.
D5: Funtzioaren irudikapena	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Erlazio kuantitatiboak identifikatzea egoera jakin batean, horiek adieraz ditzakeen funtzio mota zehaztea (…) grafiko baten bidez (…). » 2. Egiazko egoerei lotutako erlazio funtzionalak adierazten dituzten taula eta grafikoetatik abiatuta emandako informazioa aztertzea, (…).
D6: Datu taulak	4. MULTZOA.-FUNTZIOAK: » 1. Erlazio kuantitatiboak identifikatzea egoera jakin batean, horiek adieraz ditzakeen funtzio mota zehaztea (…) zenbakizko datuen bidez (…). » 2. Egiazko egoerei lotutako erlazio funtzionalak adierazten dituzten taula eta grafikoetatik abiatuta emandako informazioa aztertzea (…).

2.3. Taula: DBH-ko 4. mailako funtzioen ebaluazio-irizpideak.

2.2. Zientzietako batxilergoko funtzioen ebaluazio-irizpideak

Aurreko kapituluan edukiekin egin genuen bezala, ebaluazio-irizpideekin gauza bera eginen dugu: zientzietako batxilergoko lehenengo maila lan honen aztergai izanik, batxilergoko etapan deskribatzaileak hobeto aztertuko ditugu.

» D1 deskribatzailea (espazioaren ezagutza) geometriari lotura agertzen da erabat. Hala era, multzo honi buruz eskatutakoek ez dute erlazio handirik funtzioen multzoarekin, eta funtzioen ingurunearekin ohitzera laguntzen badute ere, ariketak ebazteko estrategiek ez dute zerikusirik.

» Edukietan garrantzitsuena den D2 deskribatzailea, ebaluazio-irizpidetan ere bada, 3. multzoko lau itemak agertzen baitira honetan. Limite eta deribatuak hemen sartzen dira, bi hauek bigarren batxilergorako kontzeptu gakoak izanik.

Bestalde, *e* zenbakiaren ezagupenak (2. multzoa), limiteen indeterminazio mota bat ebazteko erabili ahalko ditugu; eta funtzio baten linealtasuna da erregresio lineal batean bilatzen duguna, beraz 5. multzoko ebaluazio-irizpideak ere deskribatzaile honi lotuta daude.

» D3 deskribatzaileak duen bilakaera nahiko bitxia da, izan ere, ebaluazio-irizpideetan duen presentzia oso nabarmena da, eta edukietan ez zen hala gertatzen. Honek esan nahi du, funtzioak unitate abstraktu bat bezala aurkezten direla, hau da, ez dutela egoera erreal bati lotuta egon behar; aldiz, ebaluazio-irizpideetan bilatzen dena da, funtzioak egoera erreal bati aplikatuta, ariketa edo problema bat ebaztea. Behin elementu matematiko abstraktuak ziurtatu direla, errealitaterako hurbilpena egiten da.

» Funtzioen irudikapenaren (D4) garrantzia, 3. multzoko 4. itemean dago batez ere; funtzioen irudikapena zein garrantzitsua zen azaldu genuen edukietan, eta item honetan biltzen dira D2 deskribatzaileak bereganatzen dituen 2. eta 3. itemeko ebaluazio-irizpideak ere.

» Azkenik, taulak eta funtzioen balio numerikoei buruzko ebaluazio-irizpideak apur bat eskasak geratzen dira. D5 deskribatzailea DBH-ko oinarri moduko bat da, batxilergoan dagoeneko, hainbeste kontuan izango ez dena. Antzeko gauza gertatzen zaie D4 deskribatzailearen ebaluazio-irizpideei.

	Zientzietako batxilergoko 1. mailako funtzioen **ebaluazio-irizpideak**
D1: Espazioaren ezagutza	4. MULTZOA.-GEOMETRIA: » 3. (…) Oinarri ortogonal eta ortonormalaren kontzeptuak ulertzea. Plano euklidearra eta plano metrikoa bereiztea eta bietan zehaztasunez moldatzea, bietan erabilirik haien tresna eta propietateak. » 5. Planoko leku geometrikoaren kontzeptua maneiatzea. (…)
D2: Funtzioen ezaugarriak	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » 3. *e* zenbakiaren eta logaritmoen aplikazio batzuk baloratzea, haien propietateak testuinguru errealetatik ateratakoproblemen ebazpenean erabiliz. 3. MULTZOA.-ANALISIAK: » 1. Funtzio elementalak, (…) identifikatzea, (…) eta haien propietateak kualitatiboki eta kuantitatiboki analizatzea (…). » 2. Funtzio baten limitearen eta jarraitutasunaren kontzeptuak erabiltzea eta horiek aplikatzea limiteen kalkulurako eta funtzio batek puntu batean edo tarte batean duen jarraitutasunaren azterketarako. » 3. Funtzio baten puntu bateko deribatuaren kontzeptua, haren interpretazio

	geometrikoa (…) » 4. Funtzioak aztertzea eta modu grafikoan irudikatzea, eta informazioa eskuratzea beren propietateetatik abiatuta eta informazioa ateratzea haien portaera lokal edo globalaren gainean. 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA: » 2. Bi aldagairen artean izan litekeen erlazioa interpretatzea eta haien arteko erlazio lineala kuantifikatzea korrelazio koefizientearen bidez (…).
D3: Modelizazioa	2. MULTZOA.-ZENBAKIAK ETA ALJEBRA: » 3. “e” zenbakiaren eta logaritmoen aplikazio batzuk baloratzea, haien propietateak testuinguru errealetatik ateratako problemen ebazpenean erabiliz. 3. MULTZOA.-ANALISIAK: » 1. Funtzio elementalak (…) identifikatzea, egoera erreal bat deskribatzen dutenean, eta haien propietateak kualitatiboki eta kuantitatiboki analizatzea, (…) nondik eratortzen diren, fenomeno horixe interpretatzen lagunduko duen informazio praktikoa ateratzeko. » 3. (…) deribatuen kalkulua aplikatzea fenomeno natural, sozial edo teknologikoen azterketarako eta problema geometrikoen ebazpenerako. 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA: » 2. Bi aldagairen artean izan litekeen erlazioa interpretatzea (…), erregresio-zuzen bat doitzea eta, bestela, iragarpenak egitea egokia ote den baloratuz, eta haien fidagarritasuna ebaluatuz fenomeno zientifikoekin loturiko problemen ebazpenaren testuinguru batean.
D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » 1. Funtzio elementalak, enuntziatu, taula edo adierazpen aljebraikoen bidez emanak, identifikatzea, (…). 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA: » 2. Bi aldagairen artean izan litekeen erlazioa interpretatzea (…).
D5: Funtzioaren irudikapena	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » 1. Funtzio elementalak, (…) identifikatzea, (…) eta haien propietateak kualitatiboki eta kuantitatiboki analizatzea, horiek modu grafikoan irudikatzeko eta, nondik eratortzen diren, fenomeno horixe interpretatzen lagunduko duen informazio praktikoa ateratzeko. » 4. Funtzioak aztertzea eta modu grafikoan irudikatzea, eta informazioa eskuratzea beren propietateetatik abiatuta eta informazioa ateratzea haien portaera lokal edo globalaren gainean.
D6: Datu taulak	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » 1. Funtzio elementalak, enuntziatu, taula edo adierazpen aljebraikoen bidez emanak, identifikatzea (…). 5. MULTZOA.-ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA: » 2. Bi aldagairen artean izan litekeen erlazioa interpretatzea eta (…) erregresio-zuzen bat doitzea (…).

2.4. Taula: Batxilergoko 1. mailako funtzioen ebaluazio-irizpideak.

Batxilergoko 1. mailako ebaluazio-irizpideetako multzoetan deskribatzaileen aniztasuna ez da errepikatzen 2. mailan. Dagoeneko ikusi genuen nola analisiaren multzotik kanpoko edukietan zaila zela funtzioen deskribatzaileak topatzea; hala izanik, ebaluazio-irizpideetan joera hau areagotzen da, eta deskribatzaileak bakarrik 3. multzoan aurkitzen ditugu.

D2 jarraitzen du izaten deskribatzailerik garrantzitsuena D5-ekin batera, izan ere deribatu eta integralaren esanahi grafikoak ikustea funtsezkoa da bi kontzeptu hauek osotasunean ulertzeko. Modelizazioa eta errealitatearekiko lotura asko galtzen da kurtso honetan, eta optimizazio problemetara murrizten da soilik; hau Unibertsitatean Sartzeko Ebaluazioaren (USE) eraginagatik izan daiteke, azterketa honen egitura oso finkoa eta teorikoa baita.

	Zientzietako batxilergoko 2. mailako funtzioen **ebaluazio-irizpideak**
D1: Espazioaren ezagutza	
D2: Funtzioen ezaugarriak	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » 1. Funtzio baten puntu bateko edo tarte bateko jarraitutasuna aztertzea, eta horren ondoriozko emaitzak aplikatzea. » 2. Funtzio baten puntu bateko deribatuaren kontzeptua, (…) limiteak kalkulatzeko problemak (…). » 3. Funtzio errazen integralak kalkulatzea, jatorrizkoak kalkulatzeko oinarrizko teknikak aplikatuz.
D3: Modelizazioa	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » 2. Funtzio baten puntu bateko deribatuaren kontzeptua, (…) deribatuen kalkulua aplikatzea fenomeno natural, sozial edo teknologikoak aztertzeko, (…) optimizazio problemak ebazteko.
D4: Funtzioaren kontzeptu analitikoa	
D5: Funtzioaren irudikapena	3. MULTZOA.-ANALISIAK: » 2. Funtzio baten puntu bateko deribatuaren kontzeptua, haren interpretazio geometrikoa (…) » 4. Integral definituen kalkulua erabiltzea, zuzen eta kurba errazek mugaturiko eskualde lauetako azalerak neurtzeko, horiek erraz irudikatzen ahal direlarik, eta orokorrean, problemak ebazteko.
D6: Datu taulak	

2.5. Taula: Batxilergoko 2. mailako funtzioen ebaluazio-irizpideak.

3 Kapitulua

Ariketen, problemen eta galderen ereduak testu-liburuetan eta funtzioekin duten lotura indarrean dagoen curriculumean

Kapitulu honetan, testuliburuak aztertuko ditugu, eta horietan, funtzioen gaitegia nola lantzen den ikusiko dugu. Horretarako, aurreko kapituluetan egin den bezala, lan honen aztergai den kurtsoaz (zientzietako batxilergoko 1. maila) aparte, inguruko kurtsoen azterketa eginen da, kurtso bakoitzeko liburu bat aukeratuz, eta liburu horietan funtzioei buruzko jarduerak identifikatuz eta deskribatuz. Esan beharra dago, 1. eta 2. kapituluetan ez bezala, hemendik aurrera ez dugula DBH-ko 1. maila kontsideratuko eta zuzenean 2. mailatik hasiko garela testuliburuak aztertzen. Horren arrazoia, DBH-ko lehenengo zikloan (1. eta 2. mailetan) ahalik eta deskribatzaile gehien biltzea zen, eta bai edukiak eta bai ebaluazio-irizpideak oso antzekoak izanik, kurtsoen azterketa 1. DBH-ra luzatzea erabaki zen. Aldiz, lan honen aztergai den batxilergoko 1. mailako testuliburuen testuingurua deskribatzeko, aurreko hiru kurtsoak kontsideratzea nahikoa dela erabaki da.

Liburuko jarduera hauetan, lanaren hasieran planteaturiko sei deskribatzaileak bilatuko dira, eta maila bakoitzeko sorta txiki bat aurkeztuko da, zeinean deskribatzaileen presentziaren aniztasuna zeharka bilatuko den. Horrek ez du inplikatzen maila guztietan deskribatzaile guztiak agertuko direnik, baizik eta ahalik eta gehienak agertzea bilatuko dela. Kasu batzuetan, jarduera adierazgarriak aukeratzearren, deskribatzaile batzuk agertu gabe geratuko dira.

Jarduera hauek lau motatakoak izan daitezke: ariketak, problemak, galderak edo egoerak. Klasikoenak ariketak eta problemak dira, beraz hauek dira testuliburuetan gehienetan agertzen direnak. Dena den, lan honetarako galderak eta egoerak bereziki bilatu dira, jarduera aniztasun handiagoa izateko. Maila bakoitzeko aukeratutako jarduera kopurua finkoa ez den arren (orokorrean bost inguru) batxilergoko l. mailan, gehiago aukeratu dira (9 osotara), lan honen aztergai den kurtsoa baita.

Erabili diren testuliburu guztiek, bat izan ezik (DBH-ko 3. mailakoa, dagokion atalean azalduko dena), egitura klasiko bat jarraitzen dute, hau da, edukiak gaika bereizita agertzen dira, eta gai bakoitzaren barne-egitura berbera da: hasieran, kontzeptu matematiko baten definizio eta azalpen teorikoa; ondoren, adibide edo ebatzitako ariketa baten bat; eta azkenik, trebatzeko jarduera batzuk. Horretaz gain, gai bakoitzaren bukaeran, jarduera sorta luze bat aurkituko dugu beti.

1.1. Ariketen, problemen eta galderen ereduak DBH 2. mailan.

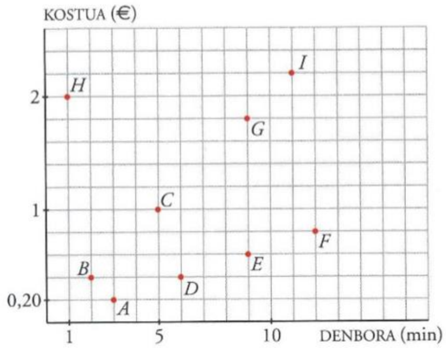
Kurtso hau aztertzeko erabili den testuliburua Anaia/Haritza argitaletxekoa da (Colera eta Gaztelu, 2008). Hamabi gai ditu osotara, *11. GAIA: Funtzioak* izanik, funtzioak esplizituki aztertzen dituen gai bakarra. Eduki hau liburuaren amaieran planteatzen du, *12. GAIA: Estatistika*-rekin batera.

Jarduera mota:	**Ariketa** ☐	**Problema** ☐	**Galdera** ☒	**Egoera** ☐

Deskribapena: bi magnitudeen arteko erlazioa planoaren bidez. Diagramaren interpretazioa eta informazioaren erauzketa. (D1, D3, D4)

Enuntziatua:

4 Honako diagrama honetako puntu bakoitzak telefono-dei bat adierazten du:



a) Zein izan da deirik luzeena?

b) Zein izan da deirik laburrena?

c) Deietako bat Australiara egin dute. Zein izan da, zure ustez?

d) Herri barruko zenbat dei daude. Zein dira?

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐

Deskribapena: funtzio lineal baten adierazpen analitikotik grafikora pasatzea eta alderantziz. (D4, D5)

Enuntziatua:

2 Adierazi funtzio hauek:

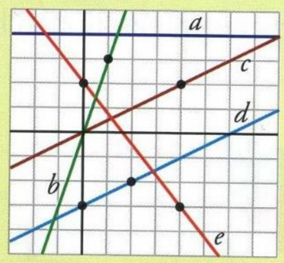
a) $y = -\frac{5}{3}x$

b) $y = \frac{3}{4}x + 1$

c) $y = 2x - 5$

d) $y = 4$

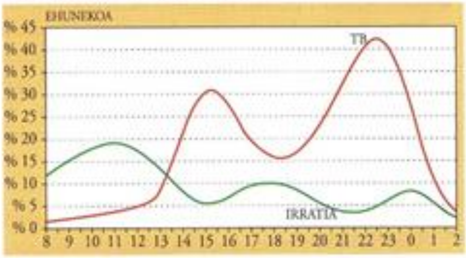
3 Idatzi honako funtzio hauen ekuazioak:



Jarduera mota:	**Ariketa** ☐	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☒
Deskribapena: egoera erreal bati aplikatutako funtzio baten identifikazioa eta ezaugarrien deskribapena. (D2, D3, D5)				

Enuntziatua:

9 Beheko grafikoak egunean zehar telebista ikusten edo irratia entzuten dauden pertsonen ehunekoa zenbatekoa den adierazten digu.



a) Deskribatu telebistari dagokion kurba: non den gorakorra, non den beherakorra, maximoak, minimoak… Erlazionatu egunero egiten ditugun gauzekin: altxatu, lo egin, bazkaldu, afaldu…

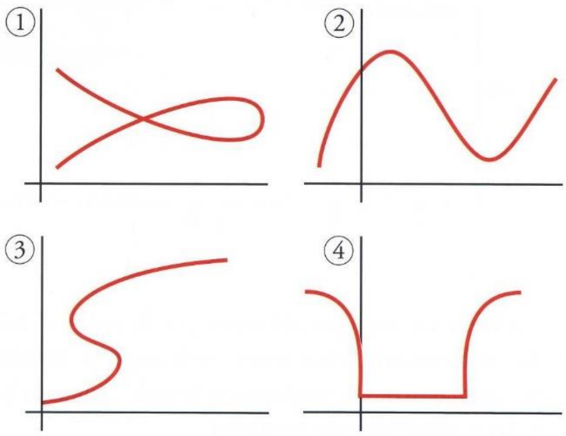
b) Egin gauza bera irratiari dagokion kurbarekin.

c) Konparatu bi kurbak, eta erlazionatu.

Jarduera mota:	**Ariketa** ☐	**Problema** ☐	**Galdera** ☒	**Egoera** ☐
Deskribapena: funtzio kontzeptua eta funtzioa izateko baldintza/ezaugarrien identifikazioa. (D2, D5)				

Enuntziatua:

5 Honako grafiko hauetako zein dagokio funtzio bati eta zein ez? Azaldu zergatik.



Jarduera mota:	**Ariketa** ☐	**Problema** ☒	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: testuinguru erreal bateko taula batean gordetzen dituen balioak adierazpen grafikora pasatzea. (D2, D5)				
Enuntziatua:				

14 Hamar astez jarraian, pisu-jaurtitzaile batek entrenamenduetan lorturiko markarik onena zein egin duen apuntatu du.

Lortutako emaitzak eskuineko taulan daude bilduta.

ASTEA	JAURT. (m)
1	15,18
2	15,91
3	16,33
4	16,52
5	18,40
6	16,62
7	16,90
8	17,44
9	16,40
10	17,00

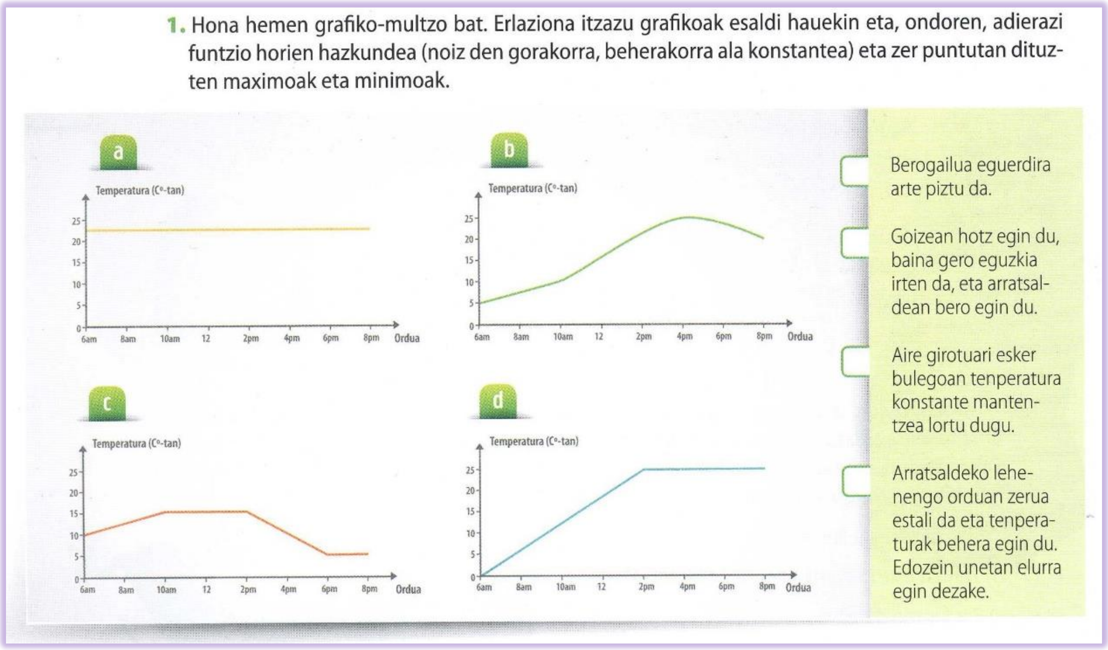
Adierazi funtzioa koadernoan.

1.2. Ariketen, problemen eta galderen ereduak DBH 3. mailan.

Kurtso hau aztertzeko erabili den testuliburua Ikaselkar argitaletxeko EKI Proiektua da (Gomez, Abril, Garcia eta Urzelai, 2016). Testuliburu honek jarraitzen duen egitura nahiko ez-ohikoa da, izan ere, eduki osoa gaika sailkatu beharrean, hiru unitate ezberdinetan banatzen du, eta unitate bakoitzeko liburuxka eta lan-koaderno bat dago (aukeratutako jarduerak liburukoak dira). Funtzioei buruzko edukiak hirugarren liburuxkan daude (*3. UNITATEA: Ezaugarri eta propietate aldakorretan murgilean*), bigarren mailako ekuazioekin eta zirkunferentziari buruzko edukiekin batera. EKI Proiektuak matematika irakasteko bide ezberdina planteatzen du, zeinean azalpen teorikoak jardueren artean ageri diren, teoria eta praktika nahastuz. Orokorrean jardueraz jarduera aritzen da liburua, eta horiek ebazteko eduki berriak behar direnean, azalpen testuak ageri dira jarduera tartean. Beste askotan, aurkikuntza bidezko ikaskuntza planteatzen du eduki matematiko berri bat eman baino lehen, azalpen testuak hobeto bereganatzeko.

Jarduera mota:	**Ariketa** ☐	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☒
Deskribapena: egoera errealei dagokien funtzio modelizatuak eta horiei dagozkien adierazpen grafikoen arteko erlazioa. Grafiko horien deskribapena. (D2, D3, D5)				

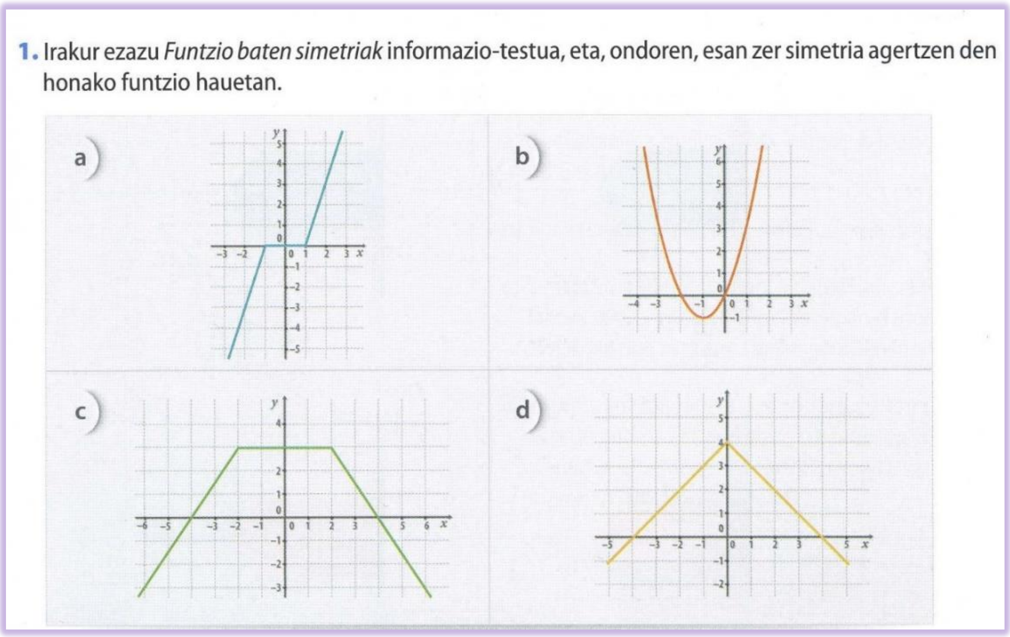
Enuntziatua:



1. Hona hemen grafiko-multzo bat. Erlaziona itzazu grafikoak esaldi hauekin eta, ondoren, adierazi funtzio horien hazkundea (noiz den gorakorra, beherakorra ala konstantea) eta zer puntutan dituzten maximoak eta minimoak.

Jarduera mota:	Ariketa ☒	Problema ☐	Galdera ☐	Egoera ☐
Deskribapena: funtzio batzuen adierazpen grafikoen simetriak identifikatzea. (D2, D5)				

Enuntziatua:



1. Irakur ezazu *Funtzio baten simetriak* informazio-testua, eta, ondoren, esan zer simetria agertzen den honako funtzio hauetan.

Jarduera mota:	Ariketa ☐	Problema ☒	Galdera ☐	Egoera ☐

Deskribapena: enuntziatu batetik abiatuta adierazpen aljebraiko egokia topatu ondoren, hau eraldatu funtzio baten adierazpen analitikoa topatu arte. Funtzio horren maximoaren balio numerikoa lortu. (D2, D3, D4)

Enuntziatua:

3. Abeltzain batek laukizuzen itxurako eremu bat prestatu nahi du abereak babesteko eta hura ixteko 100 metro hesi erabili. Eremuak ahalik eta azalera handiena hartzea nahi du, abere gehiago sartzeko. Zer neurritako eremua egitea gomendatuko zeniokete abeltzainari?

Jarduera mota:	Ariketa ☐	Problema ☐	Galdera ☐	Egoera ☒

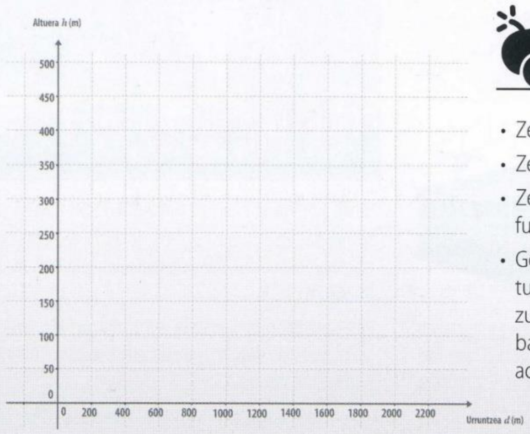
Deskribapena: funtzio baten balio taulatik grafikoa eraikitzea (bai eskuz eta bai GeoGebra programaren bidez) eta hortik aurrera, sortzen den funtzio koadratikoaren ezaugarriei buruzko galderak erantzutea. (D2, D3, D5, D6)

Enuntziatua:

1. Balio-taula honetan, adierazita dago zer altueratara iristen den kanoi batetik jaurtitako bola bat jaurtiketa-puntutik urrundu ahala.

Urruntzea d (m)	0	200	400	600	800	1.000	1.200	1.400	1.600	1.800	2.000
Altuera h (m)	0	180	320	420	480	500	480	420	320	180	0

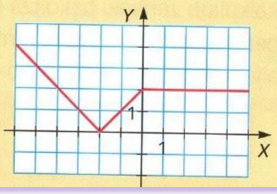
- Sortu erlazioari dagokion adierazpen grafikoaren zirriborroa, taulako puntu jakin batzuk soilik erabiliz.



- Zer altuera maximo lortzen du bolak?
- Zer distantziataraino urruntzen da bola?
- Zer adierazpen aljebraiko dagokio funtzioari?
- GeoGebra aplikazioaren laguntzaz, sortu adierazpen grafikoa, zure erantzunak zuzenak diren balioesteko. Horretarako, balia ezazu aurreko galderan lortutako adierazpen aljebraikoa.

1.3. Ariketen, problemen eta galderen ereduak DBH 4. mailan.

Kurtso hau aztertzeko erabili den testuliburua Zubia-Santillana argitaletxeko EGITEN JAKIN proiektua da (Gámez, et al., 2016). Hamalau gai ditu osotara, eta funtzioen edukiak hiru gaitan banatuta daude: *9. GAIA: Funtzioak*, *10. GAIA: Funtzio polinomikoak eta arrazionalak* eta *11. GAIA: Funtzio esponentzialak, logaritmikoak, eta trigonometrikoak*. Maila honetan dagoeneko trataera espezifikoagoa ematen zaie funtzioei, 9. gaian kontzeptu orokorra landuz, eta 10 eta 11. gaietan funtzio mota ezberdinetan gehiago sakonduz.

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: zatika definitutako funtzioa baten adierazpen grafikotik, analitikora pasatzea; zatika definitutako funtzioaren kontzeptuarekin ohitzea. (D1, D4, D5)				
Enuntziatua:	40 Kalkulatu zatika definitutako funtzioaren adierazpen aljebraikoa. 			

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: geometriako elementu batean oinarrituz, hari buruzko funtzio bat analitikoki adieraztea, balio taula baten bidez. (D1, D4, D6)				
Enuntziatua:	51 Adierazi aljebraikoki eta taula baten bidez $\vec{v} = (x, 3)$ bektorea hartuta haren modulua kalkulatzen duen funtzioa.			

Jarduera mota:	Ariketa ☐	Problema ☐	Galdera ☐	Egoera ☒

Deskribapena: egoera erreal bateko elementu bati esanahi matematikoa eman eta horrek adierazten duena modu matematikoan berridaztea eta garatzea. (D3, D4)

Enuntziatua:

97 Mendate baten igoeraren luzeraren eta lortutako altueraren arteko erlazioa maldari buruzko informazioa ematen duen zirkulazio-seinaleak adierazten du.

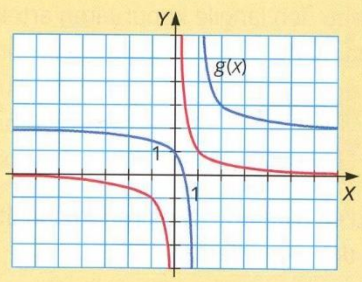
Mendate baten malda % 8koa bada, adierazi egindako luzeraren eta lortutako altueraren arteko erlazioa aljebraikoki, eta adierazi funtzioa.

Jarduera mota:	Ariketa ☒	Problema ☐	Galdera ☐	Egoera ☐

Deskribapena: funtzio baten adierazpen analitiko eta grafiko batetik abiatuta, funtzio horren trasladatua den beste funtzio baten adierazpen analitikoa lortzea. (D2, D4, D5)

Enuntziatua:

27 EGIN GOGOETA. Kalkulatu $g(x)$-ren adierazpen aljebraikoa, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funtzioa abiapuntu hartuta.



<table>
<tr><td>Jarduera mota:</td><td>Ariketa ☐</td><td>Problema ☐</td><td>Galdera ☒</td><td>Egoera ☐</td></tr>
<tr><td colspan="5">Deskribapena: balio taula batetik abiatuta alderantzizko proportzionaltasun funtzio bat identifikatzea. (D6)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Enuntziatua:
22 Eraikuntza-lan batean, lan egindako egunak eta lanean aritu den langile kopuruaren arteko erlazioari erreparatu diote.

Denbora: 1 | 2 | 3 | 4
Langileak: 12 | 6 | 4 | 3

Arrazoitu ea alderantzizko proportzionaltasuneko funtzioa den eta adierazi.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Jarduera mota:</td><td>Ariketa ☐</td><td>Problema ☐</td><td>Galdera ☒</td><td>Egoera ☐</td></tr>
<tr><td colspan="5">Deskribapena: gorakortasunari buruzko galdera bat, infinitu kontzeptua jokoan sartzen denean. (D6)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Enuntziatua:
28 EGIN GOGOETA. Funtzio bat beti gorakorra bada, zenbat maximo ditu? Eta zenbat minimo?</td></tr>
</table>

1.4. Ariketen, problemen eta galderen ereduak zientzietako batxilergoko 1. mailan.

Kurtso hau aztertzeko erabili den testuliburua Zubia-Santillana argitaletxeko EGITEN JAKIN proiektua da (De la Prida, et al., 2015). Hamalau gai ditu osotara, eta funtzioen edukiak bost gaitan banatuta daude: *8. GAIA: Funtzioak*, *9. GAIA: Funtzio baten limitea*, *10. GAIA: Funtzio baten deribatua*, *11. GAIA: Deribatuaren aplikazioak. Funtzioen adierazpena* eta *12. GAIA: Integralak*. Gogoraraziko dugu, lan honen II. Atalean (orain arte ez bezala) bakarrik *9. GAIA: Funtzio baten limitea* hartuko dela kontuan, hori baita **funtzioen limitea eta jarraitutasuna** aztertzen duen Unitate Didaktikoa, eta hori baita ere, lan honen benetako aztergaia.

Puntu honetan adierazgarria izan daiteke DBH-ko 2. mailako testuliburuarekin konparaketa egitea, izan ere, kurtso horretan 12 gaietatik **bakarra** dago funtzioei bideratuta, eta batxilergoko 1. mailan aldiz 14 gaietatik **bost**, liburuaren eduki osoaren herena baino gehiago barne hartuz. Egia da ere, 11 eta 12. gaiak, ez direla batxilergoko 1. mailako berezko edukiak (Nafarroako Foru Komunitateko curriculuma hertsiki jarraituz), baizik eta 2. mailakoak, eta hori dela eta, liburu honetan bilatu diren jarduerak 9, 10 eta 11. gaikoak dira soilik. Osotara bederatzi jarduera izanik, gai bakoitzeko hiru ariketa aukeratu dira.

Maila honetan dagoeneko trataera espezifikoagoa ematen zaie funtzioei, 9. gaian kontzeptu orokorra landuz, eta 10 eta 11. gaietan funtzio mota ezberdinetan gehiago sakonduz.

<table>
<tr><td>Jarduera mota:</td><td>Ariketa ☒</td><td>Problema ☐</td><td>Galdera ☐</td><td>Egoera ☐</td></tr>
<tr><td colspan="5">Deskribapena: funtzio baten definizio eremua eta ibiltartea-ri buruzko ariketak; definizio eremuaren kalkulua eta ibiltartean dauden ustezko zenbakien konprobaketa. (D1, D2)</td></tr>
<tr><td>Enuntziatua:</td><td colspan="4">
49. Aztertu ea ordenatuaren balioak funtzio bakoitzaren ibiltarteetakoak diren.
a) $y = 3, y = 2, y = -5, f(x) = \sqrt{3x-3}$ funtziorako.
b) $y = 0, y = 30, y = -3, f(x) = x^2 - 5x + 6$ funtziorako.

50. Kalkulatu funtzio bakoitzaren eremua.
a) $f(x) = \dfrac{4 - 3x + x^2}{2}$ c) $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+1}$
b) $f(x) = \dfrac{12x - x^2}{x-5}$ d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4x+4}$
</td></tr>
</table>

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: oinarrizko funtzio bat irudikatzea, eta hortik aurrera, horren transformazioek duten adierazpen analitikoak identifikatzea, horiek berak irudikatzeko. (D2, D4, D5)				
Enuntziatua:				

91. Marraztu $g(x) = cos\ x$ funtzioaren grafikoa. Hori abiapuntu hartuta, adierazi grafikoki funtzio hauek:

a) $f(x) = cos\ (-x)$

b) $f(x) = -cos\ x$

c) $f(x) = cos\ (x + \pi)$

d) $f(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

e) $f(x) = cos\ x + 2$

f) $f(x) = 1 - cos\ x$

92. Marraztu $g(x) = sin\ x$ funtzioaren grafikoa. Hori abiapuntu hartuta, adierazi grafikoki funtzio hauek:

a) $f(x) = sin\ (-x)$

b) $f(x) = -sin\ x$

c) $f(x) = sin\ (x + \pi)$

d) $f(x) = sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

e) $f(x) = sin\ x + 2$

f) $f(x) = 1 - sin\ x$

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: balio absolutua zatika definitutako funtzioa izateak dituen inplikazioak ongi menperatzea, adierazpen analitiko batetik bestera pasatzeko. (D4)				
Enuntziatua:				

106. Adierazi zatika definitutako funtzio gisa.

a) $f(x) = |x| + |x + 2|$

b) $f(x) = |x + 1| - |1 - x|$

c) $f(x) = |x - 1| - |1 - x|$

d) $f(x) = |2x + 1| - |2 - x|$

Jarduera mota:	Ariketa ☒	Problema ☐	Galdera ☐	Egoera ☐

Deskribapena: *e* zenbakiarekin erlazioa duten infiniturako limite batzuen ebazpena, zeinean (1^{∞}) motatako indeterminazioak ebazteko teknikak lantzen diren. (D2)

Enuntziatua:

51. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n+3}\right)^{n-1}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+1}\right)^{n^2+1}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n}$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(2 - \dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$

Jarduera mota:	Ariketa ☐	Problema ☐	Galdera ☒	Egoera ☐

Deskribapena: funtzio baten jauzi infinituak duten esanahi geometriko eta adierazpen analitikoak ulertzea, irudikapen grafiko bat eman gabe; bai funtzio baten eta bere asintoten balio taularen baten bidez, infinitua inplikatzen duten galderak erantzutea. (D2, D6)

Enuntziatua:

84. Erreparatu funtzioaren balio-taulei.

$$f(x) = \frac{4x^2+6x}{2x-3}$$

x	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	27,06	206,09	2.006,009	20.006,0009

Hona hemen $y = 2x + 6$ zuzenaren balio-taula:

x	10	100	1.000	10.000
y	26	206	2.006	20.006

Egia al da zuzena $f(x)$ funtzioaren asintota bat dela? Zer kokapen du funtzioak zuzenarekiko, x-k $+\infty$-ra jotzen duenean? Ikertu bien kokapen erlatiboa, x-k $-\infty$-ra jotzen duenean.

Jarduera mota:	Ariketa ☒	Problema ☐	Galdera ☐	Egoera ☐

Deskribapena: funtzio baten puntu baterako limitea aplikatzea zatika definitutako funtzio batzuen mugan, horren bidez, funtzioa jarraitua den edo ez aztertzeko. (D2)

Enuntziatua:

101. Aztertu funtzio bakoitzaren jarraitutasuna $x = -2$ puntuan. Etenunea badute, adierazi zer etenune mota den.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{Baldin } x \leq -2 \\ \dfrac{3x+7}{x+3} & \text{Baldin } x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & \text{Baldin } x \neq -2 \\ 2 & \text{Baldin } x = -2 \end{cases}$

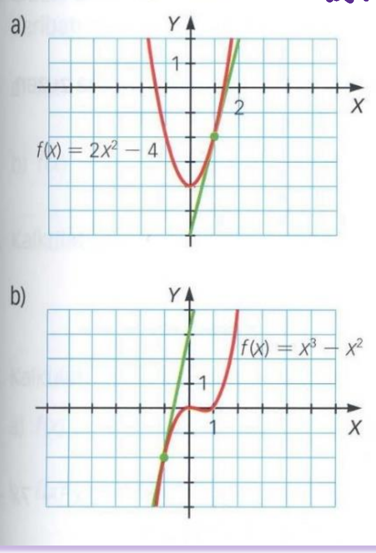
c) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{Baldin } x < -2 \\ 3 & \text{Baldin } x = -2 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{Baldin } x > -2 \end{cases}$

Jarduera mota:	Ariketa ☒	Problema ☐	Galdera ☐	Egoera ☐

Deskribapena: funtzio baten deribatua, funtzio horren zuzen ukitzailearen malda dela ongi ulertzea, eta dagokion diagrama aztertuz, funtzioa deribatu eta maldaren balioa lortu. (D2, D5)

Enuntziatua:

53. Kalkulatu grafiko bakoitzean agertzen den zuzen ukitzailearen ~~grafikoa.~~ malda.



Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐

Deskribapena: konposatutako funtzio konplexuetan deribazioaren katearen erregela aplikatzea, deribatzen ongi jakiteko. (D2)

Enuntziatua:

100. Aplikatu katearen erregela, funtzio hauetako bakoitzaren deribatua kalkulatzeko:

a) $f(x) = \left(\frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right)^5$

b) $f(x) = \sqrt{sin^3x - cos^2(3x - 1) + tan\frac{-3}{x^2 + 2}}$

c) $f(x) = tan^4\left(\frac{\sqrt{4x^2 + 10x - 1}}{x - 16}\right)$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x - cos^2x} + tan^2x\right)$

e) $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2 + 10x - 1}}{\sqrt{x^4 - 4}}\right)^{x^2+4}$

Jarduera mota:	**Ariketa** ☐	**Problema** ☒	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐

Deskribapena: funtzio baten deribatuaren esanahi geometrikoa oinarri duen ariketa bat, zeinean leku geometriko batzuen ekuazioekin eragin behar den soluzioa lortzeko. (D2, D5)

Enuntziatua:

116. $y = 9x - 14$ ekuazioa duen zuzena $y = x^3 - 3x + k$ funtzioaren zuzen ukitzailea da. Kalkulatu zer puntutan den ukitzailea eta kalkulatu k-ren balioa.
Soluzio bakarra al dago? Funtzioaren bi puntutan, zuzen ukitzailea horizontala da. Kalkulatu zuzenak eta idatzi haien ekuazioa.

1.5. Ariketen, problemen eta galderen ereduak zientzietako batxilergoko 2. mailan.

Kurtso hau aztertzeko erabili den testuliburua Zubia-Santillana argitaletxeko EGITEN JAKIN proiektua da (Gámez, Marín, Martín, Pérez eta Sánchez, 2017). Hamalau gai ditu osotara, eta funtzioen edukiak sei gaitan banatuta daude: *7. GAIA: Limiteak eta jarraitutasuna*, *8. GAIA: Deribatuak*, *9. GAIA: Deribatuen aplikazioak*, *10. GAIA: Funtzioen adierazpena*, *11. GAIA: Integral mugagabeak* eta *12. GAIA: Integral mugatuak*.

Batxilergoko 1. mailan baino gai bat gehiago daukagu, **sei** osotara. Hala ere, aurreko kurtsoan gertatzen zen bezala, gai guztiak ez dira batxilergoko 2. mailako berezkoak. Kasu honetan kontrakoa gertatzen da, izan ere, 7 eta 8. gaiak batxilergoko 1. mailako errepaso moduko gaiak dira, beste lauak izanik curriculumarekin hertsiki bat egiten dutenak.

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: funtzio konplexu bat deribatzea katearen erregela erabiliz, eta deribatu ondoren lortutako emaitza sinplifikatu, propietate trigonometrikoak erabiliz. (D2, D4)				
Enuntziatua: **120.** Kalkulatu funtzio honen deribatua eta sinplifikatu ahalik gehien. $f(x) = arctan\left(\sqrt{\frac{1-sin\,x}{1+sin\,x}}\right)$				

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: funtzio baten ahurtasuna/ganbiltasuna aztertzea bigarren deribatuaren bidez. Grafikoki egitea eskatzen ez den arren, ahurtasuna/ganbiltasuna, grafikoki ulertzen den kontzeptua da. (D2, D5)				
Enuntziatua: **9.** Aztertu funtzio bakoitzaren tarte ahurrak eta tarte ganbilak, eta zehaztu inflexio-puntuak. a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ b) $g(x) = \frac{x-1}{x^2+7x}$				

Jarduera mota:	**Ariketa** ☐	**Problema** ☒	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: bi funtzio ezberdinen optimizazioa egitea, eta enuntziatuak ematen dien testuinguruarekin lotzea. (D2, D3)				
Enuntziatua:	**13.** Ordenagailu-enpresa baten diru-sarrerak eta produkzio-kostuak $I(x) = 60x - x^2$ y $C(x) = x^2 - 12x + 120$ funtzioak adierazten ditu, non x ekoitzitako ale kopurua den. Zenbatekoa da enpresaren irabazi maximoa? Zenbat ale ekoitzi behar ditu irabazi hori lortzeko?			

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: batez besteko balioaren teoremaren estrategian trebatzeko ariketa. (D2)				
Enuntziatua:	**22.** Aztertu ea $f(x) = x^2$ eta $g(x) = x^3$ funtzioek batez besteko balioaren teorema orokortua betetzen duten $[-1, 1]$ tartean.			

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐
Deskribapena: funtzio esponentzial eta logaritmikoak konbinatzen dituzten funtzioen irudikapen grafikoa egitea. (D2, D5)				
Enuntziatua:	**104.** Aztertu funtzio bakoitzaren ezaugarriak eta marraztu grafikoa. a) $y = x \ln x$ b) $y = \log_2 (x^2 + 1)$ c) $y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ d) $y = \frac{x}{\ln x}$			

Jarduera mota:	**Ariketa** ☒	**Problema** ☐	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐

Deskribapena: aldagai-aldaketaren estrategia erabiltzea, integral mugagabeak ebazteko; adierazpenak analitikoki moldatu behar dira integrazio erregelak ongi aplikatzeko (D2, D4)

Enuntziatua:

90. Kalkulatu honako integral hauek, aldagai-aldaketa eginez:

a) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$

b) $\int x \ln(1+x^2) \, dx$

c) $\int \frac{\ln 2x}{x} \, dx$

d) $\int 2x \sin x^2 \, dx$

e) $\int x\sqrt{x+1} \, dx$

f) $\int \frac{2x}{x^2-1} \, dx$

g) $\int \cos^2 x \sin x \, dx$

h) $\int \sin x \, e^{\cos x} \, dx$

i) $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$

j) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx$

k) $\int (x^2+1) e^{x^3+3x} \, dx$

l) $\int \cos^5 x \sin^3 x \, dx$

Jarduera mota:	**Ariketa** ☐	**Problema** ☒	**Galdera** ☐	**Egoera** ☐

Deskribapena: koordenatu jatorrian zentratutako, eta 1-eko erradioa duen zirkunferentziaren lehen koadrantearen azalera integrazio bidez lortzea. Zirkunferentziaren ekuazioa eragin behar da, lehen koadrantean funtzio modura ager dadin, eta hor integral mugatua aplikatu. Bide batez, egiaztatu zirkunferentziaren azaleraren formula. (D2, D4, D5)

Enuntziatua:

95. Kalkulu integrala erabiliz, kalkulatu $x^2 + y^2 = 1$ zirkunferentziak eta koordenatu positiboak dituzten ardatzerdiek osatzen duten sektore zirkularraren azalera. Egiaztatu emaitza hori bat datorrela zirkuluaren azalera kalkulatzeko formula aplikatzean lortzen denarekin.

4 Kapitulua
Emaitzak

Orain arte aztertu izan dira, bai Nafarroako Foru Komunitateko curriculuma eta bai Nafarroako institututetan erabili izan diren testuliburuak. Horietan, funtzioen ikaskuntza modu egokian burutzeko hainbat kontzeptu bilatu dira, D1-etik D6-ra definitutako deskribatzaileetan bildu izan direnak. Kapitulu honetan, funtzioen gaien presentziaren ordena eta zentzua kritikatuko dugu curriculuma eta testuliburuak konparatuz.

4.1. Ausentziak eta presentziak curriculumean eta testu-liburuetan

Hasteko, esan genezake funtzioen presentzia ziurtatuta dagoela bai curriculumean, bai testuliburuetan ere. Funtzioen edukiak emateko bidea, bietan egokia bada ere, DBH-n eta batxilergoan oso ezberdinak dira. Hauek dira curriculumak markatzen dituen bideak, eta testuliburuek ere jarraitzen dutena.

» DBH-ko 1. eta 2. mailetan, funtzio kontzeptu orokorra lantzen da oso gainetik eta sakondu gabe; 2. mailan, funtzio **linealak** ikusten dira; 3. mailan, funtzio **koadratikoak** sartzen dira jokoan, bigarren mailako ekuazioei lotuta; 3. eta 4. mailan funtzioek ikuspegi praktikoago bat hartzen dute, errealitateko egoerak modelizatuz; eta azkenik 4. mailan, linealak eta koadratikoak ez ezik, bestelakoa diren funtzioak ematen dira, ikuspegi orokorrago bat ikusiz, zeinean funtzio kontzeptuaren alderdi guztiak lantzen diren.

» Batxilergoko l. mailan aldiz, funtzio kontzeptuarekin zalantzarik ez dago, eta zuzenean hasten gara funtzio elemental guztietan zehar ezaugarriak nabarmentzen; ondoren, **limitea** agertzen da, batxilergo osorako oinarrizko tresna izanen dena; eta horren jarraian, **deribatua**. 2. mailan, limite eta deribatuen edukietan oinarrituta, funtzioen **adierazpen grafikoa** ematen da, eta horren ondoren **jatorrizko funtzioaren** kontzeptua, integral mugagabe eta mugatuak aurkezteko.

Orokorrean, edukien artean ausentzia larririk ez dago, eta hala gertatzen da ere ebaluazio-irizpide gehienekin. Hala ere, hori ez da guztiz betetzen jarraitutasun eta eten kontzeptuekin. DBH-ko 1 eta 2. mailan jarraitutasuna eta eten kontzeptuak agertzen dira curriculumean; aldiz 3. eta 4. mailan, ez da eduki hauen inolako itemik agertzen, eta gainera, lantzen diren funtzio motak (linealak eta koadratikoak) jarraituak izanik, ikasleek eten kontzeptuaren ohikotasuna galtzen dute. Hau arazoa izan daiteke batxilergo 1. mailan, izan ere, jarraitutasuna beti betetzen den propietatea bezala ikus baitezakete. Batxilergo osoan, jarraitutasun eta etenen azterketa oso garrantzitsuak diren edukiak dira.

Modelizazio aldetik, DBH-ko maila guztietan ez dago ausentzia nabarmenik; aldiz batxilergoko 1. mailan bai, izan ere, kurtso honetako ebaluazio-irizpideek argi azaltzen dute funtzioen eduki abstraktuak egoera errealetan aplikatu behar direla, eta hori ez da testuliburuan islatzen. Proposaturiko jarduera gehienak testuingururik gabeko ariketak dira, eta problemak ere agertzen diren arren, ematen zaien testuingurua oso ahula da; matematika errealitatetik aldenduta agertzen da orokorrean, eta hala ez bada, gai bukaeran ageri diren jarduera zailak dira salbuespena, normalean klaseko batezbesteko maila akademikotik at geratzen direnak.

Azkenik, ausentziarik nabarmena, kalkulagailu grafiko eta ordenagailu-programen erabilera eskasean datza. Ohiko jardueretan teknologia berriak inplementatzen dituen lan honetako liburu bakarra, DBH-ko 3. mailako EKI Proiektua da (Gomez, et al., 2016). Besteetan, horrelako jarduerak ageri dira ere, baina beti, ohikoa ez den aparteko material gisa. Curriculumean eduki hauek esplizituki agertzen den kurtso bakarra, DBH-ko 2. maila da[4], baina gaur egun eskuragai dauden kalkulagailu-grafikoak eta ordenagailu programak hain tresna erabilgarriak izanik, beste kurtsoetan ere agertu beharko lirateke, bai curriculumean, bai testuliburuetan ere.

4.2. Testu-liburuen eta curriculumaren arteko koherentzia

Curriculumaren antolaketari erreparatzen badiogu, funtzioek hartzen duten lekua konstantea da, bai DBH-n eta bai zientzietako batxilergoan. Gauden kurtsoan gaudela, curriculumeko bost multzoetako bat beti dago funtzioei eskainita, beraz esan genezake, funtzioak modu jarraituan emateko oinarriak jarrita daudela, urte batetik bestera edukien galera sakonak ekidinez.

Testuliburuetan aldiz, funtzioen presentzia ere ziurtatuta dagoen arren, eduki kopurua oso murritza da hasieran, eta mailetan aurreratu ahala, eduki kopurua handitzen da. Aurreko kapituluan komentatu dugu dagoeneko, nola DBH-ko 2. mailako testuliburuko (Colera eta Gaztelu, 2008) 12 gaietatik **bakarra** zegoen funtzioei eskainita, eta aldiz batxilergoko 2. Mailakoan (Gámez, et al., 2017) 14 gaietatik **sei**. Honek zentzua izan dezake nolabait, izan ere, DBH-ko lehenengo mailetan etorkizunerako tresnak izanen diren **aritmetika** eta **aljebra** ziurtatzen dihardute testuliburuek, gerora funtzioen adierazpen analitikoak tratatzeko ezinbestekoak izanen direnak.

Hala ere, ez da curriculumarekin oso koherentea DBH-ko 2 eta 3. mailetan, testuliburuek hain kapitulu/orrialde gutxi eskaintzea funtzioen edukiei. Bilakaera gorakor horrek zentza izan dezakeen arren, kapitulu/orrialde gehiago behar dira, DBH-ko kurtso hauetan funtzioak ongi barneratzeko. Eskainitako kapitulu/orrialde horietan curriculumeko eduki guztiak bermatzen diren arren, oso konprimatuta ageri dira; gainera, testuliburuen ordena klasikoari erreparatzen badiogu, funtzioen gaiak beti kurtso bukaerarako daude planteatuta, eta kurtsoan zehar edonolako atzerapenik baldin badago, eduki hauek izanen dira emenen ez direnak (zentzu honetan, estatistika eta probabilitateari urtetan gertatu izan zaion fenomenoa pairatzen dute funtzioek ere, baino askoz neurri baxuagoan: denbora faltagatik ematen ez direla). Hau behin baino

[4] Esan beharra dago, lan honetarako erabili den testuliburua (Colera eta Gaztelu, 2008)., curriculumaren foru dekretua (24/2015 Foru Dekretua) baino zaharragoa dela, beraz zentzua izan dezake kurtso honetan ordenagailu-programarik gabeko jarduerak ez izatea.

gehiagotan gertatuz gero, DBH-ko 4. maila bihurtu daiteke funtzioen edukiak lantzen diren lehenengo urtea, eta hori ez da koherentea, izan ere, kurtso honen helburua, funtzio kontzeptuaren ikuspegia erabat osatuta izatea da, batxilergo 1. mailan, funtzioen ezaugarrietan oinarritutako ikuspegi askoz abstraktuagoa izanen den oinarria finkatuz.

Batxilergoan aldiz, koherentzia dezente dago curriculumaren eta aztertutako testuliburuen artean. Hala ere, 3. kapituluan ikusi dugu dagoeneko, nola bi mailen testuliburuen gaitegia gainezartzen den (1. mailan *deribatuen aplikazioa*, *funtzioen adierazpena* eta *integralak* ematea, curriculumeko edukietan aurreratzea da; eta 2. mailan, *limiteak eta jarraitutasuna* eta *deribatuak* ematea, aurreko urteko errepasoa egitea da). Hala ere, curriculumaren edukien gainezarpen hau zentzua dauka, testuliburuak askotan ez baitaude pentsatuta horien barneko gaitegi osoa emateko. Zentzu honetan, batxilergoko 1. mailako ikasturte batean denboraz ongi badabiltza, hurrengo urteko edukiak aurreratzen ahal dituzte; era berean, 2. mailan egonda, aurreko urtean emandako funtzioen edukiak oso murritzak izan baziren, testuliburuak errepaso sakona egiteko aukera ahalbidetzen du baita ere.

Beraz, orokorrean esan genezake, koherentzia falta handiena, DBH-ko etapan ematen dela, eta lan honen aztergai den batxilergoko 1. mailan eta hurrengoan, nahiko erlazionatuta daudela testuliburuak curriculumarekin.

II Atala:

Funtzioen limiteak eta jarraitutasunaren ikasketa prozesu baten analisia Zientzietako Batxilergoko 1. mailan

Master Bukaerako Lanaren bigarren zati honetan, funtzioen bloke orokorra albo batera uzten da, eta zuzenean, funtzioen limiteak eta jarraitutasunaren gaian zentratutako gara. Atal honen jomuga, Practicum II ikasgaian zehar izandako esperientzia analizatzea eta deskribatzea da, eta horretarako testuliburuko Unitate Didaktikoaren azterketatik hasi eta benetako ikasle-talde batean izandako esperientzia analizatzen bukatuko dugu.

Atala lau kapitulutan banatuta dago, bosgarrenetik zortzigarrenera. Bosgarren kapituluan testuliburuko Unitate Didaktikoaren analisia egiten da, eta seigarrenean testuliburutik edo beste jatorrietatik etor daitezkeen zailtasunak eta erroreak aurreikusten dira.

Zazpigarrenean, irakaskuntza-ikaskuntza prozesuan erabilitako metodologia aurkezten da, planteatutako jardueren kronologiarekin batera, eta azkenik, zortzigarren kapituluan, Practicum II-an izandako esperimentazio osoa aurkezten da, laginetik emaitzetara.

5 Kapitulua
Funtzioen limiteak eta jarraitutasuna erreferentziazko testu-liburuan

Atal berri honetako lehenengo kapitulu honetatik aurrera (lanaren 5. kapitulutik alegia) ez gara zientzietako batxilergoko 1. mailako **funtzioen** kontzeptu orokorraz arituko (curriculumeko 4. MULTZOA.-ANALISIAK), baizik eta, **funtzioen limiteak eta jarraitutasun** kontzeptuaz solik. Horrela, behin aurreko atalean kontzeptu orokorra landu dugula, testuinguru egokian gaudela, lan honen benetako aztergaian zentratuko gara.

Kapitulu honetan, Iruñeko Iturrama BHI institutuan, zientzietako batxilergoko 1. mailan erabiltzen den testuliburuan erabiliko dugu, hau da, Zubia-Santillana argitaletxeko EGITEN JAKIN proiektuan (De la Prida, et al., 2015) (3. kapituluan erabilitako liburu bera da). Lan honen aztergaia, funtzioen limiteak eta jarraitutasuna izanik, aztertuko den gaia, 9. izanen da, hau da, *9. GAIA: Funtzio baten limitea*. Helburua, funtzioen limiteak eta jarraitutasuna lantzen den unitate didaktikoaren analisia egitea da, ikuspegi ontosemiotikoan (IOS) oinarrituta (Godino, Font eta Wilhelmi, 2006).

5.1. Objektu matematikoak

Testuliburu batek proposatutako irakaskuntza-ikaskuntza prozesu baten egokitasun epistemikoa IOS-ren bidez aztertzen badugu, edukien erreferentziazko esanahia eraikiko duten elementuen deskribapen eta identifikazioa egin behar dugu. Elementu hauek, IOS-ren arabera, jarraian azaltzen diren sei objektu matematikoetan multzokatuta daude:

1. **Lengoaia:** idatzizko terminoak, termino grafikoak eta sinbologia.
2. **Egoerak:** testuingururik gabekoak eta testuingurua dutenak.
3. **Prozedurak:** testuliburuak erabiltzen dituen estrategiak irakaskuntza-ikaskuntza prozesua eraikitzeko.
4. **Kontzeptuak:** lantzen diren kontzeptu berriak, baita horiek heltzeko kontzeptu zaharrak (errepasoa).
5. **Propietateak:** kontzeptu matematikoak erlazionatzen dituzten proposizioak eta arauak.
6. **Argumentuak:** propietateetan ematen diren baieztapenen justifikazioa.

Sei objektu matematiko hauek testuliburuko 9. gaian zehar (*Funtzio baten limitea*) bilatu eta identifikatuko dira:

5.1.1. LENGOAIA

Aurretik aipatu dugun bezala, lengoaiaren azterketa egiteko, lengoaiaren hiru forma kontsideratuko dira: idatzizko terminoak, termino grafikoak eta sinbologia. Idatzizko terminoetan, kontzeptu matematikoak izendatzeko erabiltzen diren hitzak edo sintagmak zerrendatuko dira; termino grafikoetan, kontzeptu matematikoak irudikatzeko eta argitzeko marrazki, diagrama edota grafikoak; eta sinbologian, ohiko hizkuntza ordezkatzeko eta trinkotzeko erabiltzen diren sinbolo matematikoak (adibidez, “bat gehi bat, bi da” jarri beharrean, matematikan, sinbolikoki $1+1=2$ adierazten dugu). Hauen sailkapen txiki bat egin da ere, gai osoaren edukiak hobeto desberdintzeko:

Idatzizko terminoak	» **Segidak:** Segida. Segida baten limitea. Gaia. Gai orokorra. Monotonoa. Bornatua. Gorakorra. Beherakorra. » **Indeterminazioak:** Indeterminazioa. Indeterminazio motak Konjokatua (konjugatua). » **Funtzioak:** Funtzioa. Funtzio baten limitea (puntu batean, infinituan). Albo limiteak. Ezker/Eskuin limitea. Balio. Hurbilketa. Zatika definitutako funtzioa. » **Asintotak:** Adar infinitua. Asintota. Adar asintotikoa. Adar paraboliko. Asintota horizontala/bertikala/zeiharra. » **Jarraitutasuna:** Jarraitutasuna. Etenune. Funtzio (ez) jarraitua (tarte batean, ℝ osoan). Etenune gaindigarria. Jauzi finituko etenunea. Jauzi infinituko etenunea.
Adierazpen Grafikoak	» **Segidak:** - » **Indeterminazioak:** - » **Funtzioak:** Plus eta minus infinituan, konbergentzia/dibergentzia adierazten duten diagramak. Puntu baterako limitea adierazten duten bi diagrama (bata ezkerretik eta beste eskuinetik). Puntu baterako limitea infinitura joan daitekeela adierazten duten bi diagrama (plus eta minus infinitura). Albo limiteak bat egiten eta bat egiten ez duten adibide bien diagrama. » **Asintotak:** Asintota bertikalen/horizontalen diagramak. Asintotarik ez dagoela adierazten duten diagramak. Asintota zeiharraren adibide bat. » **Jarraitutasuna:** Etengune mota bakoitza adierazten duen diagrama bat.
Sinbologia	» **Orokorrak:** a, b, n, k, p, $\pm$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\in$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, ∞, x, f, g, L, c, $\neq$, P, Q, y, » **Segidak:** $a_1, a_2, \ldots a_n$; $n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ » **Indeterminazioak:** $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0; $e \approx 2{,}718$ » **Funtzioak:** $f(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c^{\pm}} f(x)$

	» **Asintotak:** $y = k, y = mx + n$ » **Jarraitutasuna:** $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

5.1. Taula: lengoaiaren azterketa unitate didaktikoan zehar.

5.1.2. EGOERAK

Kontzeptu matematikoak lantzeko, testuliburuak hainbat jarduera proposatzen ditu (3. kapituluan, gai honen hiru jarduera ikusarazi ziren), bai unitatean zehar, bai unitate amaieran errepasatzeko ere. Jarduera hauek bi egoeratan eman daitezke: testuingururik gabekoak (elementu matematikoen kalkulua modu formalean proposatzen dutenak) eta testuingurua dutenak (datuen irakurketa eta interpretazio bat eskatzen dutenak).

Testuingururik gabekoak	» **Unitatean zehar:** Segiden/Funtzioen limiteen kalkuluari buruzko ariketak. Funtzioen asintoten azterketari buruzko ariketak. Asintota kontzepturi buruzko datu batzuk emanda, horri buruzko galderak. Funtzioen jarraitutasunaren azterketari buruzko ariketak. » **Unitatearen amaieran:** Segida baten gai orokorraren kalkulua. Gai orokorrean zenbakiak ordezkatzea, limitea enpirikoki lortzeko. Indeterminazio mota guztietan trebatzeko limiteen kalkulua. Etengune mota guztietan trebatzeko jarraitutasunaren ariketak. Parametroen azterketa inplikatzen duten ariketak. Grafiko bati erreparatuta, limiteen irakurketa. Balio taula bati erreparatuta, limiteen (asintoten) irakurketa. Grafiko bati erreparatuta, jarraitutasunaren azterketa.
Testuingurua dutenak	» **Unitatean zehar:** -- » **Unitatearen amaieran:** Beste arloetako gaitasunak inplikatzen dituzten problemak. Testuen irakurketa eta horri buruzko galderak eta hausnarketak.

5.2. Taula: egoeren azterketa unitate didaktikoan zehar.

5.1.3. KONTZEPTUAK

Unitatean zehar hainbat kontzeptu berri landuko dira, baina askotan egiten den bezala, kontzeptu berri horiei heltzeko beste kontzeptu zahar batzuk (beste kurtsoetan eman direnak) aurkeztuko dira. Hauek dira 9. gaian zehar (*Funtzio baten limitea*) lantzen diren kontzeptuak:

Aurretiko kontzeptuak	Segidak. Segida baten gai orokorra. Segida baten konbergentzia. Funtzioak. Funtzio kontzeptua. Jarraitutasunaren azterketa (limiteak erabili gabe).
Kontzeptu berriak	Limite kontzeptua. Limitea infinituan. Limitea puntu batean. Albo limiteak. Indeterminazioak. Etengune motak. Asintotak.

5.3. Taula: kontzeptuen azterketa unitate didaktikoan zehar.

5.1.4. PROZEDURAK

Testuliburuak, irakaskuntza-ikaskuntza prozesua eraikitzeko erabiltzen dituen estrategien zerrendatzea eginen da.

» Elementu edo kontzeptu matematiko bat aurkeztu (segidak, segida motak, segiden limiteak, funtzioen infiniturako limiteak, funtzioen puntu baterako (albo) limiteak, asintotak, etengune motak), eta hori argitzen duen adibideak eman, bai modu analitikoan, bai grafikoan ere.

» Kalkulu baten beharra duen kontzeptu matematiko bat aurkeztu (indeterminazioak, jarraitutasuna), eta kalkulu hori ebazteko estrategia aurkezten dituzten ariketa ebatziak eman.

» Sinpleagoa den kontzeptu batetik (segida baten limitea), konplexuagoa den kontzeptu batera jauzi egitea (funtzio baten limitea).

» Gaiaren azpigai guztien ostean, landutako kontzeptuan trebatzeko oinarrizko ariketen proposamena.

» Gaiaren bukaeran ohikoenak diren ariketak ebatzita, adibide modura; eta ondoren, gai osoarekiko osagarriak diren ariketa sortaren proposamena.

5.1.5. PROPIETATEAK

Gaian zehar, kontzeptu matematikoak erlazionatzen dituzten hainbat eta hainbat proposizio agertzen dira: propietate bat betetzeko baldintzak, elementu matematiko batzuek betetzen dituzten berdintzak, kalkulua errazten duten arauak, eta abar. Proposizio hauek, dagokion azpigaiaren kontzeptuarekin batera zerrendatu dira:

Segida monotonoak eta bornatuak
Segida baten gai bakoitza aurrekoa baino handiagoa bada, hau da: $a_n < a_{n+1}$, n guztietarako, esaten dugu segida **monotono gorakorra** dela. (Antzekoa **monotono beherakorra** kasurako.)

Segida baten gai guztiak zenbaki jakin bat baino txikiagoak eta beste bat baino handiagoak badira, segida **bornatuta** dagoela esaten da.

Segida baten limitea

a_n gai orokorra duen zenbaki errealen segida baten **limitea** a zenbaki erreal bat da, baldin n-k oso balio handiak hartzen dituenean, segidan dagokion gaiak zenbaki horretara hurbiltzen badira.

Honela idazten da: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Honela irakurtzen da: «a_n segidaren limitea n infinitura doanean, a da»

Ohiko limiteen arteko eragiketen propietateak.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} a_n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\log_b a_n = \log_b \lim_{n\to\infty} a_n \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\ln a_n = \ln \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Funtzio baten limitea infinituan

» ***$f(x)$* funtzio baten limitea *x*-k $+\infty$-ra doanean jotzen duenean** L zenbaki erreal bat da, x-ren balioa oso handia denean funtzioaren balioa L zenbakira hurbiltzen bada.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

» $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, funtzioaren balioak gero eta handiagoak direnean.

» $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, funtzioaren balioak gero eta txikiagoak direnean.

(Baliokideak diren proposizioak baino minus infinituko kasurako: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.)

Funtzio baten albo limiteak (puntu batean)

» ***$f(x)$* funtzio baten limitea, *x*-k *c* puntu batera ezkerretik jotzen duenean,** L zenbaki erreal bat da, c-tik oso hurbil dauden eta c baino txikiagoak diren x-ren balioetako, funtzioaren balioak L-ra hurbiltzen badira.

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

(Baliokidea den proposizioa baino eskuineko albo limitearen kasurako: $\lim_{x \to c^+} f(x)$.)

- $\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$ edo $\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$, c-tik oso hurbil dauden balioetarako (c baino txikiagoak edo handiagoak, hurrenez hurren), funtzioaren balioak gero eta gehiago handitzen badira.

(Baliokideak den proposizioa baino minus infinituko kasurako: $\lim_{x \to c^\pm} f(x) = -\infty$.)

Funtzio baten limitea puntu batean

- $\boldsymbol{f(x)}$ **funtzioaren limitea,** $\boldsymbol{x}$**-k** $\boldsymbol{c}$ **puntu batera jotzen duenean,** L zenbaki erreal bat da, $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$ denean.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

- $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ bada, $f(x)$ funtzioak c puntuak **limiterik ez duela** esaten dugu."

Asintota horizontala, bertikala eta zeiharra

- $f(x)$ funtzio batek **asintota horizontal** bat du $y = k$-n, baldin $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$.
- $f(x)$ funtzio batek **asintota bertikal** bat du $x = c$ puntuan, baldin $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.
- $y = mx + n$ zuzena $f(x)$ funtzio baten **asintota zeihar** bat da, baldin:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \text{ eta } \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = n$$

Funtzio jarraitua

$f(x)$ **funtzio** bat **jarraitua da** $x = a$ **puntu batean**, hau betetzen badu:

- $f(a)$ existitzen bada.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existitzen bada.
- $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Funtzio bat ez bada jarraitua puntu batean, funtzioak puntu horretan **etenune** bat duela esaten dugu.

Funtzio bat jarraitua da tarte batean tarteko puntu guztietan jarraitua bada.

Etenune motak

Etenune gaindigarria

Esaten dugu a puntuan etenune gaindigarri bat dagoela, $\lim_{x \to a} f(x)$ existitzen bada - hau da, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ bada-, eta bi baldintza hauetako bat betetzen bada:

» Limitea ez izatea puntu horretan funtzioak duen balioaren berdina.

$$f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$$

» Funtzioa puntu horretan definituta ez egotea.

Jauzi finituko etenunea

Jauzi finituko etenunea dago a puntuan, ez bada existitzen $\lim_{x\to a} f(x)$, alboko limiteak existitu arren, horiek ez direlako berdinak.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Jauzi infinituko etenunea

Jauzi infinituko etenunea dago, a puntuan funtzioak asintota bertikal bat badu. Hots, alboko limite baten edo bien balioa infinitu bada.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ edo } \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

5.4. Taula: propietateen azterketa unitate didaktikoan zehar.

5.1.6. ARGUDIOAK

Azpigai bakoitzaren egituran, propietate berri baten aurkezpena egin ondoren, propietate hori adibideen eta ariketa ebatzien bidez justifikatzen da, hau da, propietateek lege orokorrak adierazten badituzte, adibideetan eta ariketetan hauen kasu partikularren kalkulua egiten da. Batzuetan ere, alderdi grafikoari heltzen dio testuliburuak, analitikoki lortu den emaitza bat irudikatzeko eta justifikatzeko.

Hau guztia, jarraian datorren 5.2. atalaren bidez azaltzen da, hor ikusten baita liburuak azaltzeko eta arrazoitzeko duen bidea (testuaren egitura aztertuz).

5.2. Unitate Didaktikoaren analisi orokorra

Atal honetan Zubia-Santillana argitaletxeko EGITEN JAKIN proiektuko testuliburuaren *9. GAIA: Funtzio baten limitea*-ren analisia eginen da (unitate didaktikoa lan honen **A** eranskinean eskaneatuta dago guztiz).

Liburuak oso egitura klasikoa jarraitzen du: matematikari buruzko testu batekin hasten da sarreran, hizkuntza- eta literatura-gaitasuna lantzen dituena; ondoren, gaiaren edukia dago, bederatzi azpigai edo ataletan banatuta dagoena; gero, ariketa ebatziak eta proposatutako jarduera sorta luzea aurkezten dira; eta azkenik, zientziarako gaitasuna lantzen duen jarduera sorta txiki bat dago, testu bati lotuta, zeinean bizitzako egoera erreal batean matematika aplikatzen den. Unitate Didaktikoaren (UD) antolaketa 5.5. Taulan laburbilduta dago.

Unitate didaktikoaren atala	Orrialde kopurua
Sarrera	1
1. Segidak. Segida baten limitea 1.1. Segidak 1.2. Segida monotonoak eta bornatuak 1.3. Segida baten limitea	2
2. Limiteak kalkulatzea 2.1. Berreketen limiteak 2.2. Polinomio baten limitea 2.3. Polinomioen arteko zatiketaren limitea	1
3. Eragiketak limiteekin	1
4. Indeterminazioak	1
5. Zenbait indeterminazioren ebazpena 5.1. $\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioak 5.2. $\infty - \infty$ motako indeterminazioa 5.3.1^{∞} motako indeterminazioa	3
6. Funtzio baten limitea infinituan	1
7. Funtzio baten limitea puntu batean 7.1. Alboko limiteak 7.2. Funtzio baten limitea puntu batean 7.3. $\frac{0}{0}$ motako indeterminazioa	3
8. Adar infinituak. Asintotak 8.1. Asintota horizontalak 8.2. Asintota bertikalak 8.3. Asintota zeiharrak	2
9. Funtzio baten jarraitutasuna 9.1. Oinarrizko funtzioen jarraitutasuna 9.2. Etenune motak	2
Ariketa ebatziak	4
Proposatutako jarduera sorta	8
Matematika zure bizitzan	1
Osotara:	30

5.5. Taula: unitate didaktikoaren eskema.

Kapitulu honetan UD-ko analisi orokorra eginen dugu, eta horretarako, hauek aztertuko ditugu: sarrera, edukiaren azpigaien egitura (ez da beharrezkoa kontsideratzen eduki osoaren atal guztien analisia egitea banan-banan, izan ere hauek emateko modua nahiko zuzena eta errepikakorra da eta egitura 5.5. Taulan laburbilduta dago dagoeneko), ariketa ebatziak eta *Matematika zure bizitzan* deituriko azken atala.

5.2.1. SARRERA:

5.1. Irudia: UD-ko sarreran aurkezten den testua.

Hasierako testuak ez du gaiarekin erlaziorik printzipioz, izan ere, mende eta milurtekoei buruz aritzen da, eta ez funtzioen limiteei buruz. Testuaren helburua, urteak zenbatzeko dugun ohiturari buruz hainbat bitxikeria aipatzea da, eta azkenean, mendeen hasierako urtearekin egiten den akats tipiko bat azaleratzen duen galdera bat planteatzen du (XXI. mendeko lehen urtea, adibide bat jartzearren, 2001 urtea da, eta ez 2000, jende askok pentsatzen duen moduan). Testuak planteatutako galdera hau da: *urte jakin bat badugu, zer mendetakoa da?* Erantzuna modu arrunt batean emango bagenu, honen moduko esaldi baten bidez adieraziko genuke:

"Urtearen lehenengo bi zifrak osatzen duten zenbakian fijatu, eta horri bat gehitu."

Esaldi horrek bi arazo ditu: batetik, ez da orokorra, ze lau zifretako urteetarako balio du soilik; eta bestetik, arau horrek sortzen du arestian aipatutako nahasmena, izan ere 2000 urteko lehenengo bi zifrak osatzen duten zenbakiari (20) bat gehitzen badiogu, 2000 urtea XXI mendekoa dela esango genuke, eta hori ez da egia. Aldiz, matematikoki badago modu bat erantzun **zehatza** emateko, inolako salbuespenik gabe. Kristo ondorengo urteak bakarrik kontsideratuz gero, hau da erantzuna:

$$\text{mendea} = \left\lceil \frac{\text{urtea} - 1}{100} \right\rceil + 1$$

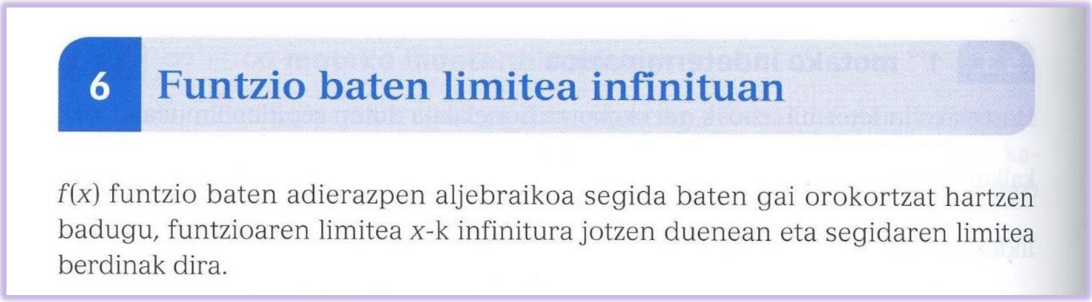
non $\lceil\ \rceil$ ikurrek, zatiketaren **zati osoa** adierazten duten. Hasieran, testuak aurkezten zuen gaiak ez zuen zerikusi handirik funtzioekin; orain aldiz, mendeak, urteen *funtzioan* lortzeko adierazpen bat daukagu, eta hori berez, funtzio bat da. Urteari aldagai askea deitzen badiogu, eta mendeari menpeko aldagaia, honakoa daukagu:

$$\text{urtea} \longrightarrow x$$
$$\text{mendea} \longrightarrow f(x)$$
$$f(x) = \left\lceil \frac{x-1}{100} \right\rceil + 1$$

Beraz hemen daukagu funtzioekin lotura.

5.2.2. ATALEN EGITURA

Atal edo azpigai guztien egitura eta elementuak berdinak dira liburu osoan zehar, gainera hauen maketazioaren forma ere bereizgarria da, ikasleek zuzenean irakurtzen duten informazio mota hobeto identifikatu dezaten. Atal guztiak izenburu eta azalpen testu labur batekin hasten dira. Kasu honetan erabiliko dugun adibidea, **6. Funtzio baten limitea infinituan** atala izanen da:

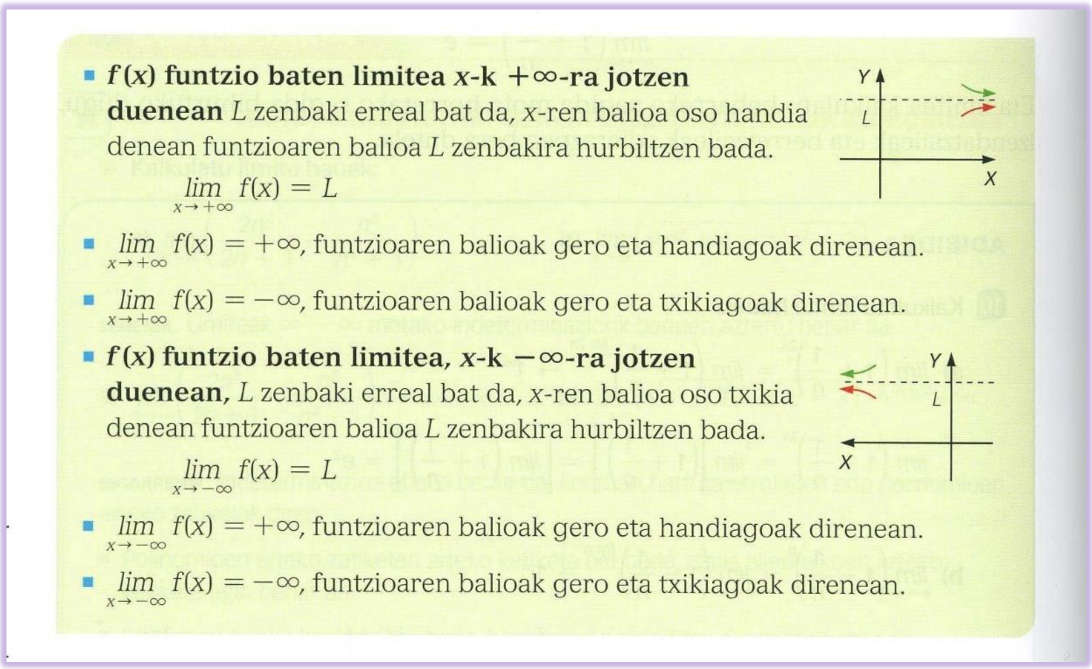


6 Funtzio baten limitea infinituan

$f(x)$ funtzio baten adierazpen aljebraikoa segida baten gai orokortzat hartzen badugu, funtzioaren limitea x-k infinitura jotzen duenean eta segidaren limitea berdinak dira.

5.2. Irudia: UD-ko atal baten izenburua eta sarrera

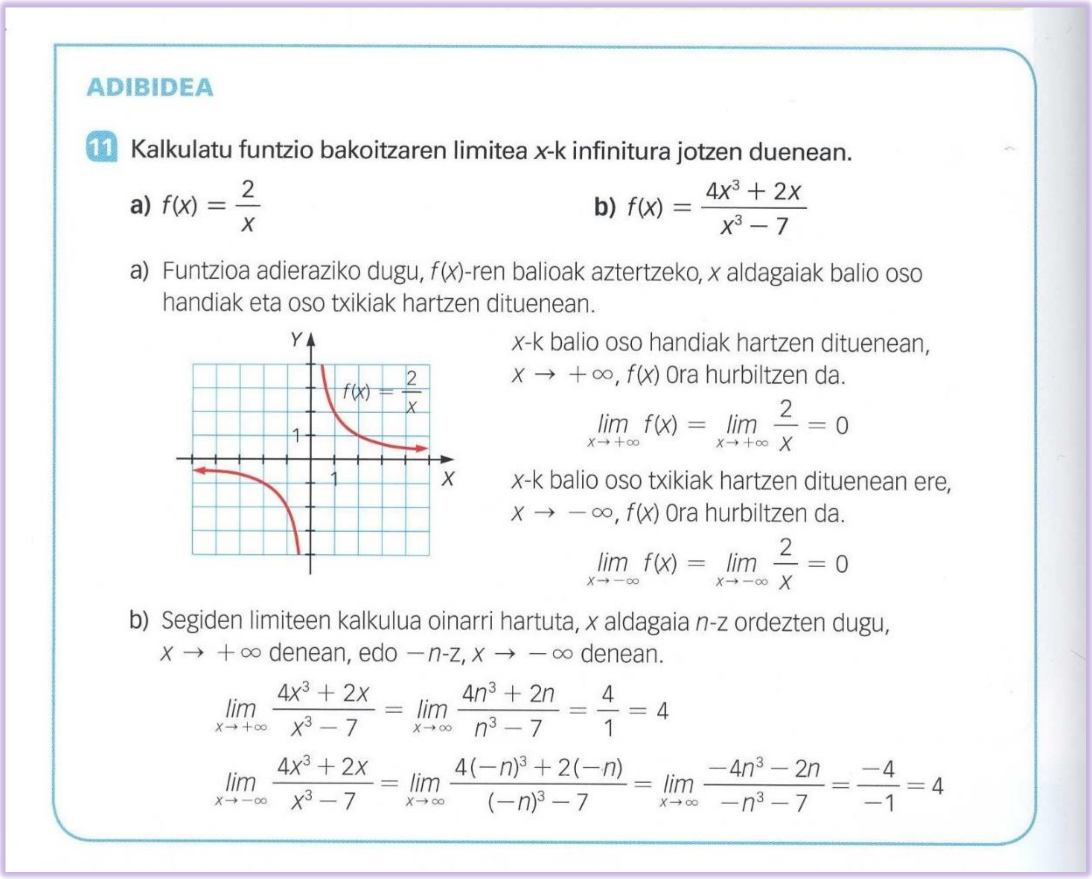
Azalpenaren jarraian hiru koadro mota ager daitezke: kontzeptu matematikoak (berdez), adibideak (urdin argiz) edo ariketa ebatziak (laranjak, EGITEN JAKIN izenpean). Kasu honetan kontzeptu matematikoen koadroa dugu (ikusi 5.3 Irudia), zeinean definizioak, proposizioak edo teoremak gordetzen diren (hauek dira askotan, ikasleek garrantzi handiena ematen dioten atala):



- **$f(x)$ funtzio baten limitea x-k $+\infty$-ra jotzen duenean** L zenbaki erreal bat da, x-ren balioa oso handia denean funtzioaren balioa L zenbakira hurbiltzen bada.
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, funtzioaren balioak gero eta handiagoak direnean.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, funtzioaren balioak gero eta txikiagoak direnean.
- **$f(x)$ funtzio baten limitea, x-k $-\infty$-ra jotzen duenean,** L zenbaki erreal bat da, x-ren balioa oso txikia denean funtzioaren balioa L zenbakira hurbiltzen bada.
  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, funtzioaren balioak gero eta handiagoak direnean.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, funtzioaren balioak gero eta txikiagoak direnean.

5.3. Irudia: UD-ko atal baten agertzen diren kontzeptu matematiko garrantzitsuak.

Ondoren, modu formalean aurkeztutako kontzeptu matematikoak argitu behar dira, kasu partikularretara eramanez. Hau testuliburuan bi modutan egiten da, adibideen bidez, edo ebatzitako ariketen bidez (hauek biak ezberdintzea apur bat nahasia izan daiteke, izan ere, adibideetan ere ariketa ebatziak aurkezten dira). Hauen bien arteko desberdintasuna nahiko fina da eta honetan datza: adibideetan, azaldutako kontzeptu matematikoarekin erlazioa duten ariketak ebatzita ageri dira, baina ariketa horiek ez dute zertan kontzeptu matematiko horien bereizgarri izan behar, eta ez dute zertan prozedura bera izan behar ere; aldiz EGITEN JAKIN izenpeko ariketa ebatzietan, kontzeptu matematiko batek zuzenean planteatzen duen problematika baten ebazpena egiten da, algoritmo definitu baten bidez. Gure kasuan, **6. Funtzio baten limitea infinituan** ataleko kontzeptuen koadroaren ondoren, adibide bat ageri da (ikusi 5.4. Irudia):



ADIBIDEA

11 Kalkulatu funtzio bakoitzaren limitea x-k infinitura jotzen duenean.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7}$

a) Funtzioa adieraziko dugu, $f(x)$-ren balioak aztertzeko, x aldagaiak balio oso handiak eta oso txikiak hartzen dituenean.

x-k balio oso handiak hartzen dituenean, $x \to +\infty$, $f(x)$ 0ra hurbiltzen da.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

x-k balio oso txikiak hartzen dituenean ere, $x \to -\infty$, $f(x)$ 0ra hurbiltzen da.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

b) Segiden limiteen kalkulua oinarri hartuta, x aldagaia n-z ordezten dugu, $x \to +\infty$ denean, edo $-n$-z, $x \to -\infty$ denean.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{4n^3 + 2n}{n^3 - 7} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{4(-n)^3 + 2(-n)}{(-n)^3 - 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{-4n^3 - 2n}{-n^3 - 7} = \frac{-4}{-1} = 4$$

5.4. Irudia: UD-ko atal batean aurkeztutako adibidea.

EGITEN JAKIN izenpean agertzen diren ariketen adibide bat jartzearren, hurrengo atalean (**7. Funtzio baten limitea puntu batean**) dagoena aukeratu da, izan ere, aurreko atalean ez zen ageri horrelako koadrorik:

EGITEN JAKIN

Funtzio baten limitea kalkulatzea puntu batean

▶ Kalkulatu $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ funtzioaren limitea $x = -1$ eta $x = 2$ puntuetan.

LEHENIK. Funtzioan puntuaren balioa idatzi behar da x-ren ordez. Zenbaki bat lortzen bada, hori da limitearen emaitza.

$x = -1$ denean: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{-1+2}{-1-2} = -\dfrac{1}{3}$

$x = 2$ denean: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{2+2}{2-2} = \dfrac{4}{0} = \infty$

BIGARRENIK. ∞ lortzen bada, alboko limiteak kalkulatu behar dira.

$x = 2$ denean: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\overbrace{x+2}^{>0}}{\underbrace{x-2}_{<0}} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\overbrace{x+2}^{>0}}{\underbrace{x-2}_{>0}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \to$ Ez da existitzen $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

5.5. Irudia: UD-ko atal batean aurkeztutako ebatzitako ariketa.

Azkenik, atal bakoitzaren bukaeran, adibideekin edo ebatzitako ariketekin antza duten jarduerak proposatzen dira (ikusi 5.6. Irudia), zailtasun maila handirik ez dutenak (jarduera -gehienak ariketak- konplexuagoak, gaiaren amaieran dagoen ariketa sortan daude):

JARDUERAK

21. Kalkulatu funtzioen limiteak adierazitako puntuetan.

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-2x+3}$ $x = 1$-en b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$ $x = -1$-en

22. Arrazoitu baduen limiterik $x = 2$, $x = 3$ eta $x = 4$ puntuetan, funtzio honek: $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x-2}$.

5.6. Irudia: UD-ko atal baten bukaeran aurkezten diren jarduerak.

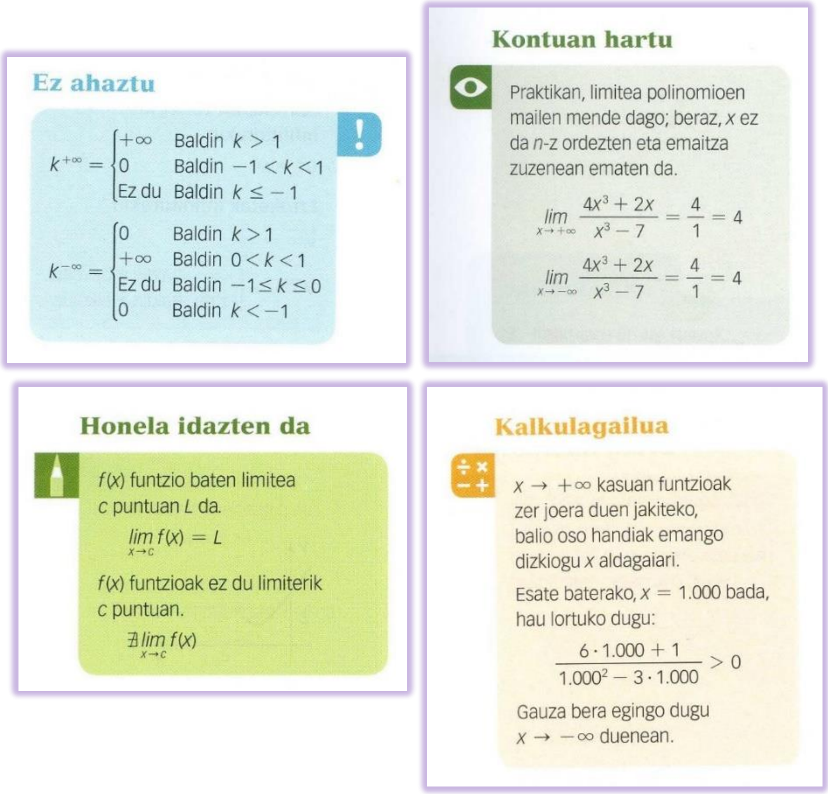
Egitura hau testuliburuko UD guztien azpiatalek jarraitzen dute. Horretaz gain, aipatu ez ditugun azken elementu batzuk falta dira aztertzeko: marjinetako koadroak. Hauek informazio osagarria ematen dute UD-n zehar, eta beharrezkoak ez diren baina bidea errazten duten informazioa gordetzen dute. Koadro hauek lau motatakoak izan daitezke (5.7. Irudian adibide bana aurkezten da):

» **Ez ahaztu**: noizbait testuliburuan (edo pasaden urteetako testuliburuetan) agertu izan den informazioa berriz erakusten dute.

» **Kontuan hartu**: espliziki esaten ez den, baina deduzitu daitekeen informazioa ematen dute.

» **Honela idazten da**: hizkuntza matematikoaren bidez (hizkuntza sinbolikoa) kontzeptuak zehaztasunez nola adierazten diren adierazten dute.

» **Kalkulagailua**: modu formalean aurkeztutako edukiak, modu enpiriko batean kalkulagailuaren bidez ondorioztatzeko bideak proposatzen dituzte.



5.7. Irudia: UD-ko marjinetan dauden koadroen adibidea bana.

5.2.3. ARIKETA EBATZIAK

Gaiaren edukiak bukatuta agertzen diren ariketa ebatziak, EGITEN JAKIN izenpeko ariketa ebatzien egitura berbera daukate, zeinean ariketa hori ebazteko pausuak banan-banan azaltzen diren, ez soilik matematikoki baizik eta esaldien bidez. Adibide modura aukeratu den ariketak (ikusi 5.8. Irudia), 1^{∞} motatako indeterminazioa ebazten duen limite bat aurkezten du. Limite hauek ebazteko prozedura hau, ikaslearentzat oso aberatsa izan daiteke, izan ere, irabazten dena ez da limite mota hau ebazteko gaitasuna (soilik), baizik eta adierazpen aljebraikoak nahierara moldatzeko trebetasuna.

Segida baten limitea

1^{∞} indeterminazioa duten $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{c_n}$ motako limiteak kalkulatzea

Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+2}$.

LEHENIK. Limiteak 1^{∞} motako indeterminaziorik baduen aztertu behar da.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+2}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)}\to 1^{\infty}$$

BIGARRENIK. Parentesi barruan 1 gehitu eta kendu behar da.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n-1}-1\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}+1}{n-1}\right)^{n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n+2}$$

HIRUGARRENIK. Zatikiaren zenbakitzailea izendatzailera pasatu behar da.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n+2}$$

LAUGARRENIK. Berretzailea lortutako izendatzaileaz eta haren alderantzizkoaz biderkatu behar da.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot(n+2)}$$

BOSGARRENIK. Limitetzat e duen segida osatzeko behar den berretzailea duen berreketa hartu behar da.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2(n+2)}{n-1}}$$

SEIGARRENIK. Limitea kalkulatu behar da.

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{n-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n-1}}=e^{2}$$

PRAKTIKATU

35. Kalkulatu limite hauek: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2-1}\right)^{3n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5+2n}\right)^{n^2-3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-n^2}{-n^2+2}\right)^{3n}$

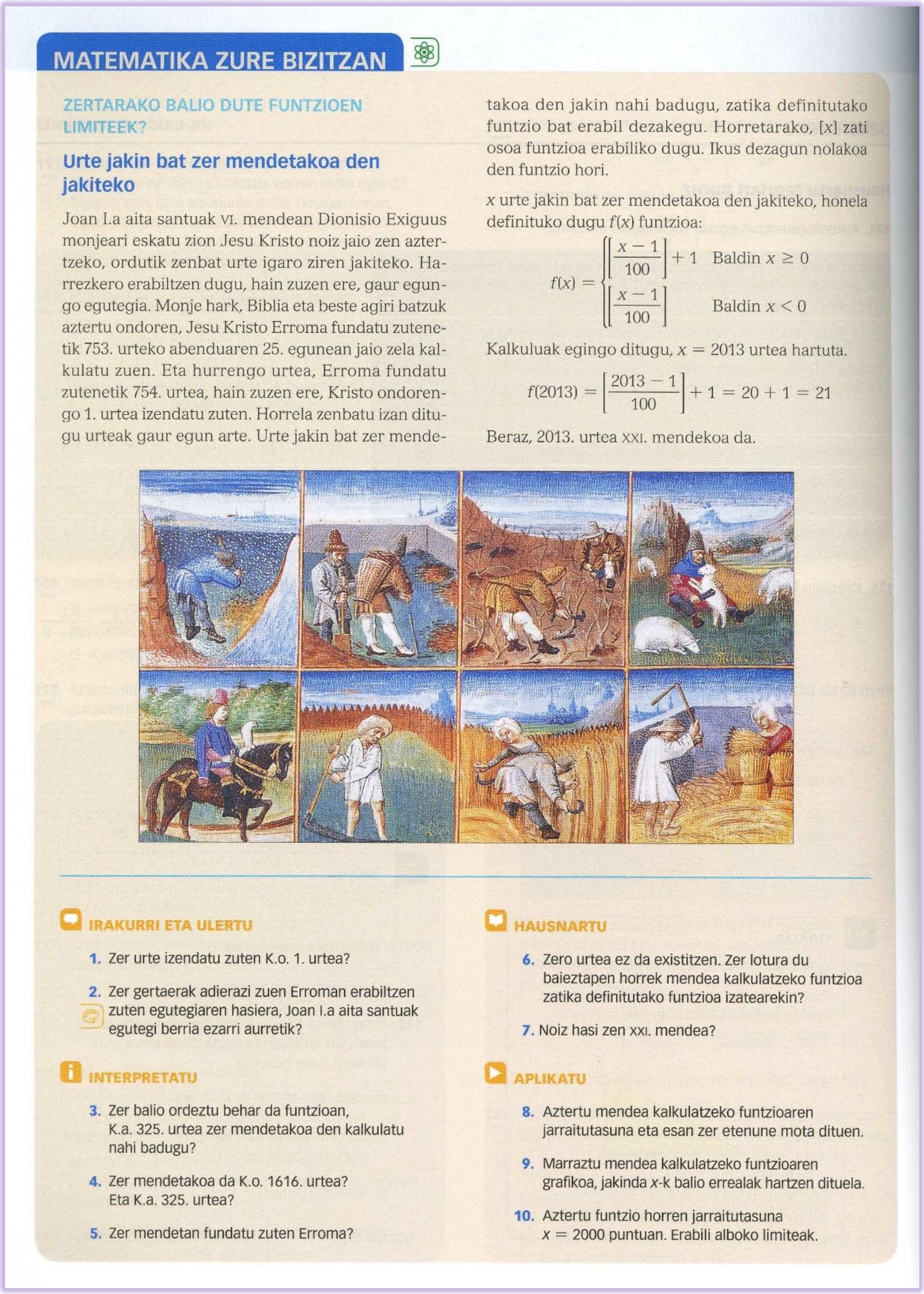
5.8. Irudia: UD-a behin bukatuta, aurkezten den ariketa ebatzi baten adibidea.

5.2.4. MATEMATIKA ZURE BIZITZAN

Azken atal honek, sarrerako testuari heltzen dio zuzenean, honek planteatutako galderari erantzunez (ikusi 5.8. Irudia). Gainera, ez ditu bakarrik kristo ondorengo urteak kontsideratzen baizik eta aurrekoak ere; eta erantzuna, kasu guztietarako orokortzeko erabiltzen duen baliabidea, zatika definitutako funtzioa da. Hona hemen, sarrerako testuaren galderaren erantzun osoa, modu matematikoan:

$$f(x)=\begin{cases} f(x)=\left\lceil\dfrac{x-1}{100}\right\rceil+1\ , & x<0\\ f(x)=\left\lceil\dfrac{x-1}{100}\right\rceil\ , & x\geq 0\end{cases}$$

non x urteak diren, eta $f(x)$, mendeak. Emaitza hauek gaia hasi baino lehen aurkeztea ez luke zentzu handirik izanen; gai osoa bukatu denean ordea, behin zatikako funtzioekin trebatu garela eta jarraitutasun kontzeptua menperatuta dugula, emaitza hau ulertzea askoz errazagoa izanen da (batez ere zati osoaren funtzioa, $z(x)=\lceil x\rceil$ gaian zehar ikusi badugu).



MATEMATIKA ZURE BIZITZAN

ZERTARAKO BALIO DUTE FUNTZIOEN LIMITEEK?

Urte jakin bat zer mendetakoa den jakiteko

Joan I.a aita santuak VI. mendean Dionisio Exiguus monjeari eskatu zion Jesu Kristo noiz jaio zen azterzteko, ordutik zenbat urte igaro ziren jakiteko. Harrezkero erabiltzen dugu, hain zuzen ere, gaur egungo egutegia. Monje hark, Biblia eta beste agiri batzuk aztertu ondoren, Jesu Kristo Erroma fundatu zutenetik 753. urteko abenduaren 25. egunean jaio zela kalkulatu zuen. Eta hurrengo urtea, Erroma fundatu zutenetik 754. urtea, hain zuzen ere, Kristo ondorengo 1. urtea izendatu zuten. Horrela zenbatu izan ditugu urteak gaur egun arte. Urte jakin bat zer mendetakoa den jakin nahi badugu, zatika definitutako funtzio bat erabil dezakegu. Horretarako, $[x]$ zati osoa funtzioa erabiliko dugu. Ikus dezagun nolakoa den funtzio hori.

x urte jakin bat zer mendetakoa den jakiteko, honela definituko dugu $f(x)$ funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{x-1}{100}\right] + 1 & \text{Baldin } x \geq 0 \\ \left[\dfrac{x-1}{100}\right] & \text{Baldin } x < 0 \end{cases}$$

Kalkuluak egingo ditugu, $x = 2013$ urtea hartuta.

$$f(2013) = \left[\dfrac{2013-1}{100}\right] + 1 = 20 + 1 = 21$$

Beraz, 2013. urtea XXI. mendekoa da.

IRAKURRI ETA ULERTU

1. Zer urte izendatu zuten K.o. 1. urtea?
2. Zer gertaerak adierazi zuen Erroman erabiltzen zuten egutegiaren hasiera, Joan I.a aita santuak egutegi berria ezarri aurretik?

INTERPRETATU

3. Zer balio ordeztu behar da funtzioan, K.a. 325. urtea zer mendetakoa den kalkulatu nahi badugu?
4. Zer mendetakoa da K.o. 1616. urtea? Eta K.a. 325. urtea?
5. Zer mendetan fundatu zuten Erroma?

HAUSNARTU

6. Zero urtea ez da existitzen. Zer lotura du baieztapen horrek mendea kalkulatzeko funtzioa zatika definitutako funtzioa izatearekin?
7. Noiz hasi zen XXI. mendea?

APLIKATU

8. Aztertu mendea kalkulatzeko funtzioaren jarraitutasuna eta esan zer etenune mota dituen.
9. Marraztu mendea kalkulatzeko funtzioaren grafikoa, jakinda x-k balio errealak hartzen dituela.
10. Aztertu funtzio horren jarraitutasuna $x = 2000$ puntuan. Erabili alboko limiteak.

5.9. Irudia: Sarrerako testuari heltzen dion liburuko azken atala.

6 Kapitulua

Unitate Didaktikoa lantzerakoan agertu daitezkeen zailtasunak eta aurreikusi daitezkeen erroreak

Kapitulu honetan **funtzioen limiteak eta jarraitutasuna** aztertzean ager daitezkeen zailtasun eta erroreak aztertuko dira. Hauen jatorria, anitza izan daiteke, adibidez: testuliburuko Unitate Didaktikoak (UD) egindako planteamendua, aurreko urteetako oinarri falta, kontzeptu berrien abstrakzio maila, eta abar.

Alde batetik aurreikusi daitezkeen zailtasunak aurkeztuko dira, eta gero erroreak eta horien jatorri posiblea. Zailtasunetan, kontzeptu edo estrategia orokorretan zentratuko gara; aldiz erroreetan, ikuspegi puntualago bat bilatuko dugu.

6.1. Zailtasunak

Hasteko, Iturrama BHI institutuan erabiltzen den testuliburuaren (lan honen 3. eta 5. kapituluetan erabili dena) (De la Prida, et al., 2015) planteamenduagatik sor daitezkeen zailtasunak aztertuko ditugu:

6.1.1. TESTULIBURUAREKIN ERLAZIONATUTAKO ZAILTASUNAK

Testuliburu honetan aztertzen ari garen UD-a, *9. GAIA: Funtzio baten limitea* da, hau izanik funtzioei eskinitako bigarren gaia. Kurtso honetan funtzioak lehendabizikoz tratatzen dituen gaia, *8. GAIA: Funtzioak* da, eta funtzioen kontzeptu orokorra eta oinarrizko funtzio elementalak aztertzeaz arduratzen da. Aztertzen ari garen hurrengo gai honek, funtzioen limitea eta honen aplikazioak tratatzea du helburu, baina gaiarekin hasi bezain pronto, funtzioak “alde batera” uzten dira, eta segidak tratatzera pasatzen gara; segiden limiteak aztertzen dira, eta horien bitartez aurkezten dira indeterminazioak. Eta behin pausu hauek eman direla, orduan heltzen zaio funtzio baten limitearen kontzeptuari. Bide honek hurrengo zailtasunak planteatu ditzake ikaslearengan:

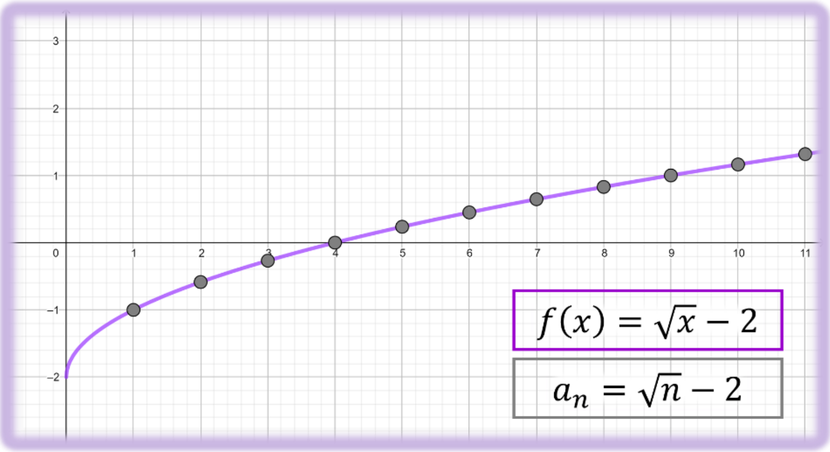
» **Kontzeptuen haustura:** aurreko gaian funtzioak tratatzen dira, eta bat batean ezberdina den kontzeptu bat sartzen da jokoan (segidak). Kontzeptua berria ez den arren, curriculumean segidak lantzen diren azken urtea DBH-ko 3. maila da, beraz ikaslearentzat oso urrun egon daiteke.

» **Tradizionalki desberdinak:** segida eta funtzio kontzeptuaren artean antzekotasun handia dagoen arren (ia-ia gauza bera dira, ikusi 6.1. Taula), ikasleek ez dute nola edo hala ikusten, izan ere, zenbaki segidak beti daude curriculumeko 2. multzoari (ZENBAKIAK ETA ALGEBRA) lotuta, eta aljebrako problemekin erlazionatzen dituzte zuzenean; aldiz funtzioak, beti daude alor grafikoari eta modelizazioari lotuta eta curriculumean multzo propio bat osatzen dute DBH osoan (4. MULTZOA.-FUNTZIOAK).

Zenbaki segidak	Funtzioak
$\begin{aligned} f:\ &\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &n \longmapsto a_n = f(n) \end{aligned}$	$\begin{aligned} f:\ &\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto y = f(x) \end{aligned}$

6.1. Taula: zenbaki segiden eta funtzioen definizio matematiko bana.

» **Grafikoen galera:** zenbaki segidek aljebra eta aritmetikako gaiekin askoz lotura tradizionalagoa dutenez, testuliburuko 9. gaian segidak lantzen diren bitartean (bost azpigaietan eta zortzi orrialdeetan zehar), ez da inolako diagrama edo grafikorik aurkezten, eta hauek oso tresna potenteak direla kontuan hartzen badugu, nahiko abstraktua izan daiteke limite kontzeptua ulertzeko bidea. Segidak ere grafikoen bidez irudikatu daitezke, lerro jarraitu bat erabili beharrean, puntu isolatuak erabiliz (ikusi 6.1. Irudia); argi utzi behar dena da, argumentu moduan zenbaki arruntak (eta ez errealak) sartzen ditugula, besterik ez.



6.1. Irudia: antzekoak diren segida eta funtzioak grafiko berean irudikatuta. Lerro jarraitu eta kolore morez, funtzioa; eta puntuen bidez eta kolore grisez, segida.

» **Ikurren arteko desberdintasunak:** segida eta funtzioa matematikoki idazteko erabiltzen ditugun ikurrak erabat ezberdinak dira, beraz honek ere, are gehiago zailtzen du bi kontzeptu hauen arteko erlazioa.

$$f(x),\, g(x),\, h(x) \equiv \text{"funtzioak"}$$

$$a_n,\, b_n,\, c_n \equiv \text{"zenbaki segidak"}$$

Testuliburuarekin erlazioa duen beste zailtasun bat, marjinetako koadro mota batean datza, **Ez ahaztu** izenpekoak alegia. Koadro hauek beste ataletan esandakoa berriz errepikatzen dute, batzuetan literalki eta bestetan eraldatuta; eta segun eta nola eraldatzen diren eduki horiek, nahasiak izan daitezke. Testuliburuaren testu nagusian (ez marjinetan), askotan, lege orokor bat aurkezten da, eta lege orokor hori kasuan kasu nola aplikatzen den irakastea, testu nagusiaren (eta noski, irakaslearen) betebeharra da. **Ez ahaztu** izenpeko koadro horiek askotan egiten dutena, lege orokor hori kasu partikularretara aplikatzea da (testu nagusia kriptikoegia izatekotan), eta askotan horrek, onura baino, gaitza ekar dezake. Gaia osotasunean ulertzen ez duen ikasleak, bidea erraza aurkituko du kasu partikular horiek guztiak memorizatzeko, testuliburuan esplizituki horrela agertzen diren adierazpenak baitira; kontzeptu ezberdinak bezala asimilatuko ditu eta ez du ulertuko, lege orokorraren kasu partikularrak direla.

6.1.2. EDUKIEKIN ERLAZIONATUTAKO ZAILTASUNAK

Testuliburuaz aparte, **funtzioen limiteak eta jarraitutasuna**ren gaia batxilergoko mailan aztertzean, jatorri ezberdineko hainbat zailtasun aurreikusi daitezke:

» **Limite kontzeptua bera:** puntu batera etengabe hurbiltzea inoiz iritsi gabe, egunerokotasunetik at dagoen kontzeptua da. Ez da intuitiboa, izan ere, etengabe hurbiltzen ari bagara, noizbait iritsiko garelako ustea daukagu. Inplizituki, hurbiltze-abiadura konstantea dela onartzen dugu, eta horrek, honako erlazio faltsua sortzera bideratzen gaitu[5]: "hurbiltzea" ⇒ "iristea".

» **Ez-ohiko sinbologia:** batxilergo zientifikoko 1. mailan, aljebraizazio maila handia dute (Godino, Aké, Gonzato, eta Wilhelmi, 2014), eta oso ohituta daude zenbakiak letren bidez adierazten (a, b, c, x, y, $t\ldots$). Hala ere, kurtso honetan letrez aparte, beste elementu algebraikoak erabiltzen hasten dira, eta ez soilik zenbakiak izendatzeko: azpiindizeak (x_0, $y_0\ldots$); goi-indizeak (a^+, $a^-\ldots$) letrak parentesiekin batzuetan, ($f(x)$, $g(x)\ldots$), eta parentesirik gabe besteetan (f, $g\ldots$); limitearen eragilea ($\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)\ldots$), eta abar. Gainera x eta y letrek, aldagaien kontzeptua hartzen dute, jada ez dute zenbaki bat ordezkatzen, baizik eta edozein zenbaki[6].

» **Adierazpen aljebraikoen moldatzea:** indeterminazioak ebazteko erabiltzen den prozedura orokorra, modu honetan laburbildu daiteke: funtzioaren adierazpen analitikoa, komeni zaigun forma izatera behartzea, eta behin hori lortu dugula, limitea aplikatzea. Estrategia hau (adierazpen aljebraikoak nahierara moldatzea) nahiko ez-ohikoa da DBH-ko mailetan, eta orokorrean ikasleek ez daude horrekin ohituta.

---

[5] Hau ekiditeko galdera tipikoa, honakoa izaten da: “Zer gertatuko litzateke lasterketa batean, beti geratzen zaidan distantziaren erdia aurreratuko banu? Noizbait iritsiko nintzateke?”

[6] Aldaketa hau dagoeneko DBH-ko 4. mailan ematen da (eta aurretik ere) baina, zientzietako batxilergoko 1. mailan bereganatzen du esanahi ezberdin hau.

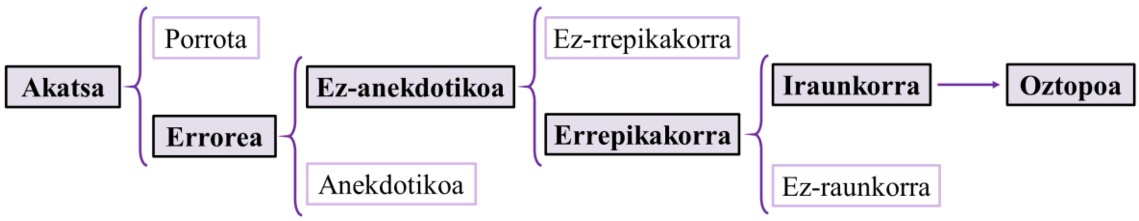
» **x ez den beste argumentu batzuk ordezkatzea:** funtzioak adierazteko, askotan $f(x)$ idazten dugu eta ez f (liburuetan horrela agertzen da ere). Funtzioa, beti x argumentuarekin lotuta aurkezten badugu, gero zailtasunak agertzen dira beste argumentu mota batzuk ordezkatzeko. Adibidez, oso tipikoa da ikasleengan, honako funtzioa izanik $f(x) = \frac{x^2-2}{3x^2}$, ez jakitea hurrengo adierazpena kalkulatzen: $\lim_{x\to\infty} f(x+3)$, izan ere, haientzako funtzioak adierazteko modua $f(x)$ da beti, beraz, beste argumentuak jokoan sartzen direnean, $f(x+3)$ kasu honetan, erabat ezberdinak (berriak) diren kontzeptuak direla uste izaten dute.

» **Jarraitutasunaren kudeaketa:** lan honen 4. kapituluan dagoeneko aipatu da zailtasun hau; zatika definitutako funtzioak jokoan sartzen ez badira, landutako funtzio elemental guztiak **jarraituak dira haien definizio eremuan**. Esaldi hau zer adierazten duen ulertarazteko, espero baino zailtasun handiagoak aurkitu ditzakegu irakasle modura, izan ere, DBH-n analitikoki landutako funtzio guztiak eta baita ere, batxilergoko 1. mailan landutako funtzio elemental guztiak, jarraituak dira haien definizio eremuan. Kontra-adibiderik izan ezean, kasu guztietan gertatzen den propietatetzat har daiteke.

6.2. Erroreak eta horien jatorri posiblea

Hasteko, komeni da bereiztea **errore** eta **porrota**ren artean. Ikasle batek, problematika bat ebazteko baliabiderik jaso ez badu, eta hori dela eta, akats egiten baldin badu, orduan esanen dugu ikasleak porrota egin duela; aldiz, baliabideak jaso baldin baditu, eta hala ere akats egin badu, errorea egin duela esanen dugu. Onartzen baldin badugu, irakaslearen lana egokia dela baliabideak transmititzerakoan, aztertu beharrekoak erroreak dira.

Atal honetan errore mota garrantzitsuenetan zentratuko gara: **oztopoak**. Oztopo bat, denboran zehar, ikasle ezberdinek egiten duten errorea da, zeinaren jatorria aztertuta dagoena, eta irakaskuntza-ikaskuntza hitzarmena hausten ez duena. Aipatu berri diren ezaugarriak kontsideratuz, errorearen hainbat motatakoak izan daitezke, eta 6.2. Irudian agertzen den eskemaren bidez sailkatu daitezke (Wilhelmi, 2009):



6.2. Irudia: erroren sailkapena; akatsetik, oztopora.

» **Errore anekdotikoa:** irakaskuntza-ikaskuntza hitzarmena haustura batengatik gertatzen da; informazioaren komunikazioan dago arazoa, ikasleak modu desegokian (baina barne logika bat jarraituz) erabiltzen baititu objektu matematikoak.

» **Errore errepikakorrak:** ikasle bat baino gehiagoko taldeean errepikatzen dena, talde horiek antzeko edo baldintza berberetan egonik.

» **Errore iraunkorrak:** belaunaldiz belaunaldi, edozein ikasle-taldetan gertatzen direnak, ikasle taldearen independeteak izanik.

» **Oztopoak:** aztertuta dagoen jatorri definitu baten bidez justifikatzen diren errore iraunkorrak. Oztopoen jatorriak hiru izan daitezke: ontogenikoa, ikaslearen garapen neurofisiologikoarekin zerikusia duena; didaktikoa, irakasle edo egoera didaktiko desegokiekin erlazionatutakoa; edo epistemologikoa, eduki beraren zailtasunarekin erlazionatutakoa.

Jarraian, **funtzioen limiteak eta jarraitutasuna** lantzeko jardueretan aurreikusi daitezkeen oztopoak aurkeztuko dira, bakoitza bere jatorri probableenarekin batera:

Akatsa	Jatorria
Limitearen eragilearekin $\left(\lim_{x\to\infty}\right)$ nahasmena: berdintza batetik bestera ahaztea edo ipini behar ez den lekuan ipintzea.	Idazkera matematikoan zehaztasun eta ohitura falta. Jatorri epistemologikoa.
Bat zati zero, zero dela esatea: $\frac{1}{0}=0$.	Biderketaren izaera, zatiketari esleitzea birritan pentsatu gabe. Jatorri ontogenikoa.
Funtzio arrazional baten puntu baterako limitean, $\frac{0}{0}$ motatako indeterminazioaren aurrean, $\frac{\infty}{\infty}$ indeterminazioko infiniturako limiteen estrategia erabiltzea.	Ariketen mekanizazioa. Jatorri didaktikoa.
Limite bat aplikatzerakoan $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}$ edo $\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}$ lortuz gero (adibidez), 1^{∞} motatako indeterminazio modura tratatzea, konturatu gabe, emaitzak 0 eta ∞ direla hurrenez hurren.	Ber infinituak suposatzen duena ongi ez azpimarratzea. Jatorri ontogenikoa/epistemologikoa.

$\lim_{x\to\infty} 1^{(x^2+1)}$ limitea, 1^{∞} motatako indeterminazioa dela pentsatzea.	1^{∞} indeterminazioak zertan datzan ongi ez azpimarratzea. Jatorri didaktikoa.
Etengune motak ez bereiztea.	Etengune bakoitza gertatzeko beharrezkoak diren baldintzak ongi ez azaltzea. Grafikoki ez azpimarratzea. Jatorri didaktikoa.
Zatikako funtzioetan, azpifuntzio bakoitzari dagokion tartean, berdintzak gaizki kudeatzea: behar baino gehiago jartzea, ez jartzea edota ez ulertzea zer adierazten duen.	Tarteak ematerako orduan, tarte itxiak eta irekiak ongi desberdintzea. Jatorri epistemologikoa.
Zatikako funtzio baten definizio eremua eskatzean, nahasteak: azpifuntzioen definizio eremuak zuzenean ematea, kontsideratu gabe, azpifuntzio bakoitzaren definizio eremuari, dagokion tartearen ebakidura egin behar dela.	Zatikako funtzioaren kontzeptua, funtzio baten definizio eremuaren kontzeptuarekin bat egiten duenean, kasuistikarik ez aplikatzea. Zatikako funtzioaren esanahia guztiz ez menperatzea. Jatorri epistemologikoa.

6.2. Taula: erroreak eta horien jatorri probableak.

7 Kapitulua
Ikasketa prozesua

Kapitulu honek lotura zuzena du esperimentazio atalarekin (8. kapituluarekin), Iturrama BHI institutuan burututako irakaskuntza-ikaskuntza prozesuan zentratzen baita. Horrela izanik, hainbat helburu ditu: batetik, hasiera batean erabili nahi izan zen oinarrizko metodologia aurkeztea, *flipped classroom* deiturikoa; bestetik, Iturrama BHI institutuan, koronabirusaren pandemiagatik bizitako egoeraren kudeaketa deskribatzea; eta azkenik, azaltzea nola burutu zen irakaskuntza-ikaskuntza prozesuaren moldaketa pandemiaren egoerara, eta zein izan zen jarduera guztien kronologia.

7.1. Metodologia: *flipped classroom*

Gaur egungo gizartea teknologia berriez inguratuta dago; egungo gizakiok ditugun ikus-entzunezko estimuluak konstanteak dira gure bizitzan, eta horien bidez erlazionatzera, aisia hartzera eta baita ere ikastera ohitu gara oharkabean. *Flipped classroom* metodologiak, gertaera hau aprobetxatzeko asmoa dauka, aspaldi zaharkituta dagoen hezkuntza eredua eraldatzeko.

Ingelesez, *flipped classroom*, *alderantzikatutako klasea* esan nahi du. Metodologia honen helburua, klasean gertatzen den irakaskuntza-ikaskuntza prozesuaren parte bat, gelatik kanpo (klase ordutik kanpo) eramatea da, klasean erabiltzen den denbora, prozesu kognitibo konplexuagoetan zentratzearren, hauek baitira benetako ikaskuntza esanguratsua balioztatzen dutenak. Hori gauzatzeko erabiltzen diren baliabideak, Informazio eta Komunikazioaren Teknologiak (IKT) dira.

Hezkuntza eredu klasikoan, irakaskuntza-ikaskuntza prozesuaren parte bat beti gertatu izan da gelatik kanpo, etxeko lanen moduan. Hezkuntza klasikoaren egitura honakoa da: klase orduan, teoria modu magistralean eman; denbora izatekotan, ariketa motatako jarduera batzuk egitea; eta beti ere, klase orduan emandako kontzeptuak barneratzeko, etxerako lan modura, ariketak bidaltzea. Alderantzikatutako klasearen kontzeptua, eduki teorikoak biltzen dituzten azalpen magistralak klasetik kanpo ematea da, klaseko denbora, esanguratsuagoak diren jarduerarako erabiliz, hala nola, kontzeptuen argitzea, ariketak ebazteko estrategien azalpena eta noski, ikasleen arteko elkarrekintzaren bidez, ikaskuntza sustatzea. Eduki teoriko hauek gelatik kanpo lantzeko, IKT-ak erabiliko dira, ez soilik irakaskuntza-ikaskuntza prozesua ahalbidetzen dutelako, baizik eta egungo gizarteak duen informaziorako kanal naturala delako.

Flipped classroom metodologiaren lau oinarriak, FLIP akronimoaren bidez azal daitezke modu dotore batean (ingelesez) (Calvillo, 2014):

» **“F”** *Flexible enviroment* (ingurugiro malgua): irakasleak espazio moldagarriak sortzen ditu, eta ikasleek erabakitzen dute noiz eta non ikasiko duten. Horren ondorioz, irakasleak ikasleengandik espero beharrekoak, denbora eta ebaluazio aldetik malguak izan beharko dira, ikaskuntza jasotzeko kanala malgua baita berez, eta ikasle guztien erritmo akademikoa eta autonomia ez baita berbera.

» **"L"** *Learning culture* (ikaskuntzaren kultura): ikaslearengan zentratutako ikaskuntza eredua (klase magistral batean, irakaslearengan zentratutako eredua daukagu). Ikasleak aktiboki parte hartzen du bere ikasteko prozesuan, galderak egiten, beste ikasle bati azaltzen, informazio-iturria zalantzan jartzen, edota gai konplexuago bati buruz hausnartzen.

» **"I"** *Intentional content* (gurarizko edukiak): *flipped* irakaskuntzarako eduki eta elementu aproposenen hautaketa egiten da (irakasleak egiten du), detaile guztiak zainduz, egokienak diren materialak sortzeko. Honen bidez, ikasketa prozesua denboran zehar maximizatzea bilatuko da, soilik beharrezkoak diren azalpenetara murriztuz.

» **"P"** *Professional educator* (irakasle profesionala): irakasleak aktiboki behatzen ditu ikasleak eta haiekin momentuan elkar eragiten duenez, kapaza da haien berariazko beharrak zuzenean identifikatzeko eta laguntza egokia ahalbidetzeko. Klasetik jasotzen duen estimulu eta erantzunen aurrean, irakasleak ikuspegi sakonagoa bereganatuko du, bere lanari buruz (eta bere kideen lanari buruz ere) hausnartzeko bidea topatuz.

Flipped classroom metodologiaren barnean, hainbat mota ezberdin daude ("7 Unique Fipped Classroom Models", 2019), eta horien arteko ohikoena, *alderantzikatutako klase* estandarra deritzo. Honetan, ikasleek eduki teorikoak gelatik kanpo bereganatzen dituzte, irakasleak ahalbidetutako bideoen bidez. Bideoak, irakasleak berak prestatu ditzake, edo beste irakasleenak erabili ditzake ere, horiek eskuragai baditu. Hauek, online plataforma batera igoko dira (Google Classroom, Youtube, EDpuzzle…) eta ikasleek aukera izanen dute hauek ikusteko, ordenagailu, tableta edo mugikor baten bidez. Gelako denbora, jarduera praktikoak egitera bideratuta egonen da. Metodologia honek zuzeneko abantaila asko dituen arren, desabantaila batzuk ere sortzen ditu. Hona hemen:

Abantailak	Desabantailak
» Ikaslea da bere ikaskuntzaren protagonista (eta ez irakaslea). » Denbora gehiago dago zalantzak ebazteko, konzeptuak hobeto barneratuz. » Autonomia sustatzen du ikaslearengan. » Ikasleak IKT-en erabileran trebatzen dira. » Ikus-entzunezko formatuak, informazioaren asimilazio azkarragoa ahalbidetzen du, liburu	» Baliabide (teknologiko) eskasak dituzten ikasleak albo batera uzten ditu. » IKT-en erabilera trebea eskatzen du irakaslearen partetik, material egokiak sortzeko. » Ikasleen artean aparteko elkarrekintzarik ez bada sustatzen, bakarkako ikaskuntza-prozesuan bilakatu daiteke.

formatuarekin konparatuta. » Ikasketa prozesu ezberdin/berri batean, ikaslearen motibazioa handitzen da. » Irakasleak sortutako materialak denboran zehar berreabilgarriak (eta ondorioz, perfekzionagarriak ere) dira.	

7.1. Taula: *flipped classroom* metodologiaren abantailak eta desabantailak.

7.2. COVID-19-aren pandemiagatik bizitako egoera

7.2.1. TESTUINGURUA

Nafarroako Foru Komunitatean, koronabirusak eragindako alarma-egoerak, irakaskuntza presentziala bertan behera utzi zuen 2020ko martxoaren 14tik, kurtso bukaera arte[7]. Hala ere, alarma-egoera ezarritako eguna larunbata izan zen arren, ostegun arratsaldetik dagoeneko, Nafarroako Foru Komunitateko gobernuak eskoletara ez joateko gomendioa egin zuen larrialdiko prentsaurreko baten bidez. Iruñeko Iturrama BHI-ko institutuan, martxoaren 13, ostiralean dagoeneko, klase guztiak suspendituta zeuden, (baita ere, egun horretarako programatuta zeuden azterketak), eta irakasleok larrialdiko klaustro baterako deialdia jaso genuen. Klaustro horretan zuzendaritza taldeak zehaztuko zuen, egoera nahasi horri aurre egiteko estrategia eta proposaturiko protokoloa.

7.2.2. PROTOKOLOA

Nafarroako zentro publikoko bigarren hezkuntzako ikasle eta irakasle orok Google-en bidez kudeatzen den helbide elektroniko bat dauka, @educacion.navarra.es moduan bukatzen dena. Kontu hauek, Google kontu arrunt batek baino abantaila gehiago dituzte, irakaskuntzarako espreski egituratuta baitaude, bai ikasleen eta bai irakasleen kasuan ere. Hau izanik, hezkuntza publikoak ahalbidetzen duen berezko online kanala, hezkuntzako Googleko kontu hauen bidez kudeatzen da ikaskuntza ez-presentzialaren Iturrama institutuko protokoloa.

[7] Maila berezi batzuetan salbuespenak egin ziren, adibidez, batxilergoko 2. mailan, data batetik aurrera, klaseetara itzultzeko aukera izan zuten ikasleek, USE-ren prestaketa egiteko. Antzekoa gertatu zen DBH-ko 4. mailan, titulua eskuratzeko arazoak zituzten ikasleekin.

Googlek ematen dituen aukera guztien artean, irakaskuntzarekin erlazio zuzenena duena Classroom izenekoa da, gela birtualak sortzeko tresna. Iturrama BHI-ko ikaskuntza guztia Classroom-en bidez egituratuta egonen da, hau da, ikasgai eta talde bakoitzeko, Classroom bat egonen da (izen bereizgarri eta bakarrarekin, adibidez, LB1_F_Mate I), eta taldeko ikasle guztiak egon beharko dira bertan sartuta, kudeatzailea nagusia irakaslea izanik. Ikasgai, kurtso eta talde guztien funtzionamendu orokor eta egokia bermatzearren, Classroomeko kudeatzaile gisa agertuko dira ere, talde horren tutorea eta zuzendaritza taldeko kide bat.

Irakasleak hezkuntzako helbide elektronikoaren bidez komunikatuko da ikasleekin, eta Classroomaren bidez gauzatuko du klasea. Hau da, prestatutako material guztiak Classroomera igoko ditu eta bidalitako (etxeko) lan guztiak Classroom bidez jasoko dira. Ikasleen lanari dagokionez, klase orduan nahiz klasetik kanpo egingo luketen lana modu batean ordezkatzearren, zeregin periodikoak (etxeko lanak) programatuko dira astero, 7.2. Taulako egitura finkoarekin Zeregin hauen iraupena, ordu batekoa izango da (klase ordu batean egiteko modukoak) eta ez da asteburuetan ez jai egunetan (aste santuan) aparteko zereginik bidaliko.

Iragartzea	**Jasotzea**
Astelehenan, goizeko 8:00etan	Asteazkenean, 20:00etan (DBH-n) eta 22:00etan (Batxilergoan)
Asteazkenean, goizeko 8:00etan	Ostiralean, 20:00etan (DBH-n) eta 22:00etan (Batxilergoan)

7.2. Taula: Iturrama BHI-ko protokoloak markatutako zereginak.

Irakasleek Meet izeneko tresna erabili ahalko dute (ez da derrigorrezkoa) bideo-deien bidez, zuzeneko online klaseak egiteko. Hala egitekotan, ohiko klase orduen ordutegia errespetatu beharko du, beste ikasgaietako klaseekin gainezarri ez daitezen.

Irakaskuntza-ikaskuntza prozesua garatzeko bideak, material ezberdinen erabilera, eta horien formatua aukeratzea, irakaslearen erabakiak dira, eta ez dago inolako proposamen berezirik, ez zentro mailan, ez departamentu mailan ere. Hauen adibideak izan daitezke: liburua irakurtzea eta zalantzak posta elektronikoz bidaltzea; sarean topatutako bideo eta diapositibak erabiltzea, eta zalantzak Meet bidezko derrigorrezko klaseetan galdetzea; liburuko gaitegia lantzen duen bideoak egitea eta zalantzak idatziz, nahiz adostutako Meet bidezko klaseetan galdetzea[8], eta abar.

Horrela jardun zen Iturrama BHI-n koronabirusagatik sortutako aparteko egoerari aurre egiteko. Nabarmentzekoa da, proposatutako protokoloa alarma-egoera osoan zehar mantendu zela, aldaketa esanguratsurik jasan gabe.

[8] Estrategia hau da lan honetan erabili izan dena.

7.3. Planteatutako jardueren banaketa

Pandemiaren testuinguruan, irakaskuntza-ikaskuntza gauzatzeko planteaturiko estrategia, jarraian azaltzen da:

> Ikasleek testuliburuko eduki teorikoak beste era batera azaltzen dituen bideoak jasoko dituzte, beti ere, liburuko azalpenekin konbinagarriak direnak (horrek ez du esan nahi, bai bideoak ikusi eta bai liburua irakurri behar dutenik). Bideo hauek irakasleak berak egindakoak izanen dira, eta gelako Classroomean nahiz Youtube plataforman (biak Googleren tresnak) igota egonen dira ikasleen eskura. Hauetan, eduki osoaren heina egoteaz gain, zereginak ebazteko estrategiak azalduko dira; bideoetan azaldu gabe geratu direnak (irakasleak ahaztutakoak, hala nola, zenbait ondorio, ariketa mota espezifiko bat ebazteko algoritmoa, akatsen zuzenketak, eta abar), Meeteko online klaseetan eta aparteko materialetan argituko dira. Klase hauei dagokionez, asteleheneko saioa (8:55-9:50 bitartean) izanen da derrigorrezkoa izanen den bakarra, asteko beste hiru saioak tutoretza-orduak bezala planteatuz (irakaslea ordu horietan Meeteko bideo-deira konektatuta egonen da, ikasleen zalantzak jasotzeko prest). Ikasleek egin beharreko zereginetan (7.2. atalean azaldu den modura), liburuko ariketak bidaliko dira orokorrean (salbuespen baten bat kenduta).

Estrategia honen guztiaren oinarrian, bideoak daude. Hauek ulergarriak ez badira, edo ikaslearentzako nahasiak baldin badira, arestian deskribatutako estrategia osoak ez du ezertarako balio. Beraz, bideo egokiak egiteko jarraitu daitezkeen irizpide gakoak deskribatuko dira jarraian:

» **Denbora:** bideoak laburrak izan behar dira, 10-15 minutukoak gutxi gorabehera, eta salbuespen kasuetan baino ez, 20 minutukoak edo luzeagoak. Denbora hori gehiegi luzatuz gero, ohiko klase magistral batean gertatzen diren akats edo zailtasun berberak aurkituko ditugu, azken finean, ikaslea entzulearen rola baitauka besterik ez.

» **Azpiegitura eta formatua:** bideoaren sorkuntza, arbela digital batekin egin daiteke, beraz egitura, diapositiba bidezko aurkezpen baten modukoa izanen da kasu horretan, hau da, pantailan hurrengo elementuak agertuko dira soilik: testua, diagramak, adierazpen matematikoak, irudiak eta abar. Irakaslearen ahotsa entzunen da azalpenetan, eta ez da bere irudirik agertuko; arbela digitala izanik, irakasleak bere arkatz optikoa erabiliko du klarion modura, pantailako elementuak nabarmentzeko edo aparteko iruzkinak egiteko.

» **Espazioaren banaketa:** bideoak ikustearen esperientzia arinago egitearren, komeni da arbelaren banaketa espaziala zaintzea. Helburua ez da ahalik eta espazio gehien aprobetxatzea (klaseko arbela batean gertatzen den bezala), baizik eta pantailako elementuen banaketa txukuna eta dotorea egitea, haien artean hutsune handiak utziz, eta horietaz arduratu gabe. Klaseko arbela batean ere, honek zentzua baduen ere, arbela borratzearen arazoa sartzen da jokoan; bideoetan aldiz, ikasleek azalpena gelditu edo atzera bota dezakete, arazorik gabe.

» **Dinamikotasuna:** askotan, diapositiba aurkezpen batean, diapositiba bakoitzeko elementuak batera eta aldi berean agertzen dira pantailan, eta hizlariak elementu horietan zeharreko azalpenak egiten ditu, elementu bakoitzari banan-banan arreta eskainiz. Honek estatikoegiak egiten ditu azalpenak, diapositiba berean aritzen baikara denbora luzez. Hori saihesteko, askoz naturalagoa litzateke, elementu berri batez hitz egiten dugunean, berau agertzea; hau da, elementuen agerpena, hizlariaren (irakaslearen) azalpenarekin sinkronizatuta egotea. Horrela, diskurtsoa aurrera egin ahala, elementuak modu sekuentzialean agertuko (eta desagertuko) dira, aldizka pantaila osoa betetzeko aukerarekin.

» **Garapen matematikoak:** garapen matematiko bat egiterako orduan (limite bat, adibidez), denbora aurreztearren, ez dira beti tribialak kontsideratzen diren pausuak idazten. Horrek arazoak sortzen ditu, izan ere, berdintza batetik bestera jauzi bat ematen den bakoitzean, ikasle bat egon daiteke pauso hori menperatzen ez duena. Garapen matematiko batean, ahalik eta pauso gehiago idatziz gero, orduan eta ikasle gehiago ulertuko dute ere (pausu gehiegi baldin badira, agian ez dira guztiak hitzez azaldu behar, baina modu sekuentzialean esplizituki agertzea onuragarria izan daiteke ere).

Orain arte eragiteko estrategia azaldu da, eta estrategiaren oinarri diren bideoen deskribapena egin da ere. Jarraian, azalduko da nola moldatu zen estrategia hau, Iturrama BHI-ko batxilergoko 1. mailara, **funtzioen limiteak eta jarraitutasuna** lantzen duen testuliburuko UD-a (*9. GAIA: Funtzio baten limitea*) emateko. Zentroko programazio laburrean, 11 saio daude gai honi eskainita (12, azterketa eguna kontatuz gero), hau da, kurtsoko hiru aste. Logikoa den moduan, koronabirusaren egoeraren testuinguruan, denbora hori ez zen nahikoa izan, eta lau aste luze arte luzatu zen. Hona hemen, irakaskuntza-ikaskuntza prozesu guztiaren egutegia (ikusi 7.1., 7.2. eta 7.3. Irudiak), eta hori azaltzeko legenda (ikusi 7.3. Taula):

Ikurra	Esanahia
B	**Bideoa:** osotara 8 bideo daude (**E** eranskinean biltzen dira), haietako bakar bat beste irakasle batena izanik (**B7*** alegia, horregatik dago markatuta izartxo baten bidez). Hauek dira: » **B1:** Sarrera » **B2:** Funtzio arrazionalen limitea (infinituan) » **B3:** Propietateak eta Indeterminazioak » **B4:** *e* Zenbakiarekin erlazionatutako Limiteak » **B5:** Limite luze bat » **B6:** Asintota Bertikalak eta Horizontalak » **B7*:** *e* Zenbakiarekin erlazionatutako Limiteak (beste irakasle batek egindakoa) » **B8:** Jarraitutasuna

A	**Ariketak bidaltzea:** protokoloan zehaztutako data eta orduetan bidalita, osotara 8. Jardueren zenbakia ez dago bideoen zenbakiekin zehazki lotuta, hau da, **A2** jarduera ez du zertan **B2** bideoarekin zerikusirik izan behar.
A	**Ariketak jasotzea:** protokoloan zehaztutako data eta orduetan jasota. Jasotze eguna jai izanik (martxoaren 20a eta maiatzaren 1a), hurrengo eskola-egunera pasatzen zen.
Z	**Ariketak ebatzita:** zeregin baten bidezko ariketa guztiak, irakasleak eginak igotzen ziren, behin entregatzeko epemuga pasata. Honen helburua, ikasleek haien prozedura eta emaitzak konprobatzea da. Kasu honetan, ebatzitako ariketen zenbakiek bai egiten duela bat bidalitako (jasotako) ariketekin, hau da, **Z5**-en ebatzitako ariketak, **A5** zereginean bidalitakoak dira. Hauek guztiak **B** eranskinean jasotzen dira.
G	**Galdera egitea:** zereginen barruan kokatutako jarduera, baina kasu honetan, idatzizko ariketa bat egin beharrean, galdera bat (edo gehiago) erantzun behar da.
M	**Idatzizko materiala:** ariketak ebazteko apunteak, bideoen planteamendu berberarekin, baina idatzirik. **C** eranskinean jasotzen dira. Esan beharrekoa da, asteleheneko Meeteko klase bakoitzaren ondoren, klasean zehar egindako arbelak ere partekatzen zirela diapositiba formatuan. Hala ere, arbela hauetan agerturikoak ez dira prestatutako materiala, baizik eta momentuan egindako ebazpen eta zirriborroak.
E	**Idatzizko ebaluazioa:** hirugarren ebaluazioko idatzizko azterketa.

7.3. Taula: egutegiko ikurren azalpena.

2020ko martxoa

As	At	Az	Og	Or	Lr	Ig
						1
2	3	45	5	6	7	8
9	10	11	12	Zentroen itxiera 13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	B1 G1 26	B2 G1 27	28	29
A1 B3 30	31	A1 A2 Z1		A2	Z2	B4

7.1. Irudia: funtzioen limiteak eta jarraitutasuna lantzeko burututako jarduera guztien kronologia. 2020ko martxoa.

2020ko apirila

As	At	Az	Og	Or	Lr	Ig
		A1 A2 Z1 1	2	A2 3	Z2 4	B4 5
A3 6	7	A3 8	Z3 9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
A4 20	21	A4 A5 Z4 22	B5 23	A5 24	Z5 25	26
A6 B6 B7* 27	28	A6 A7 29	B8 30			

7.2. Irudia: funtzioen limiteak eta jarraitutasuna lantzeko burututako jarduera guztien kronologia. 2020ko apirila.

2020ko maiatza

As	At	Az	Og	Or	Lr	Ig
				1	2	3
Z6 Z7 A7 4	5	A8 6	7	A8 8	Z8 9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	M 21	E 22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

7.3. Irudia: funtzioen limiteak eta jarraitutasuna lantzeko burututako jarduera guztien kronologia. 2020ko maiatza.

7.4. Aurreikusitako ikaslearen jarduera autonomoa

Kapitulu osoan azaldu den estrategiak, ikaslearen autonomia osotasunean onartzen du, Iturrama BHI-ko protokoloak markatutako zereginez aparte, ez baita inolako kontrolik egiten.

» **Autonomia zereginetan:** zereginak dira ikaslearen jarraipena egiteko modu kalifikagarri bakarra, izan ere, 7.2. atalean azaldu ez den arren, zeregin hauek notarako balio dute, modu adierazgarri baten. Ikasleek 48 ordu baino gehiago dituzte, zeregin bakoitza egiteko, eta haien erabakia da denbora horren barnean noiz egitea.

» **Autonomia Meeteko klaseetan:** asteleheneko klaseak derrigorrezkoak izan arren, ez dago bertaratze hori modu kalifikagarrian itzultzeko modurik. Klaseak “derrigorrezkoak” izatearen esanahia, bideotan azaldu gabe geratu ziren gakoak edota edukiak sar zitezkeelako zentzuan datza, beraz ikasle batek asteleheneko klasera ez konektatzearen ondorioa, azalpen esanguratsu bat galtzea besterik ez da. Horretaz aparte, beste egunetako Meeteko orduetan, zalantzak galdetzeko edo klasea jasotzeko eskubidea dute, baina haien aukeran geratzen da.

» **Autonomia bideoak ikusterakoan:** ez dago bideoen ikusteak kontrolatzeko modurik, izan ere, Youtube plataformak ikusteak zenbatzen dituen arren, bideoa Classroom plataformaren bidez ikusten bada, Youtubek ez du ikuste hori zenbatzen. Ikasleek erabaki dezakete noiz ikusi bideoak, eta ikasle bakoitza da bere erritmoa kontrolatzen duena.

Faktore hauek kontuan hartuta, nabarmendu behar da, protokoloak markatutako zereginen iraupena, ordu batekoa izan behar zuela gehienez ere. Horrek ez du esan nahi inola ere ez, ikasleek bakarrik hamar ordu (hamar ikasgai edukiz gero) egiten dutela lan bi egun osoetan, izan ere, atzeko lanetan askoz denbora gehiago onartzen zaie, edonolako baldintzetan dela ere (konfinamendua ez da erraza inorentzat).

8 Kapitulua
Esperimentazioa

Kapitulu honetan Iturrama BHI-ko institutuan egindako esperimentazioa deskribatuko da. Dagoeneko, 7. kapituluan komentatu da zein izan zen esperimentazioaren testuingurua (COVID-19-aren pandemiak sortutako ikaskuntza ez-presentziala), eta zein izan zen erabilitako estrategia. Oraingoan, ikasle-taldeaz eta haiek burututako jardueraz eta emaitzetaz zehatzago mintzatuko gara.

8.1. Lagina eta esperimentazioaren diseinua

Itrurrama BHI, Iruñean dagoen D ereduko institutua da, eta DBH-tik Batxilergorako kurtsoak biltzen ditu. Aipatzekoa da, arte plastikoen batxilergoa D ereduan eskaintzen duen Nafarroako zentro bakarra dela. Kurtso bakoitzeko talde kopurua DBH-n, lau edo bost ingurukoa da, klaseko ratioak 20 ingurukoak izanik; aldiz, batxilergoan, ratioak handiagoak dira (25-30 ingurukoak) eta talde kopurua ere. 2019-2020ko kurtsoan hurrengo banaketa zegoen: zientzietako hiru talde, letretako (giza zientzietako) bi eta artetako beste bi; osotara, zazpi talde. Institutua, Iruñerriko beste zentro publikoez hornitzen da orokorrean; eta batxilergoan, Iruñerritik haratagoko ikasleez ere (Altsasutik, Zangotzatik, Tafallatik…), izan ere, batxilergoa euskaraz eskaintzen duten zentro publiko gehiegirik ez dago Nafarroan.

Esperimentazioaren laginaren taldea, zientzietako batxilergoko talde bat da, 27 ikaslez osatuta dagoena. Ikasleen parte handi bat jatorrizko Iturramako ikasleez osatuta dagoen arren, DBH-ko ikaskuntza bakarrik eskaintzen duten zentroetatik etorritakoak ere badaude. Ez da talde bat ere anitza, ez kultura-jatorritik, ez egoera sozioekomomikoaren aldetik. Ikasketen aldetik, hiru ikasle daude batxilergoko 1. maila errepikatzen, eta matematikan zailtasunak dituztela ikusten da (badaude errepikatzaileak ez diren eta zailtasunak dituzten ikasleak ere, noski), baina orokorrean oso talde ona da, bai ikasketetan bai tratuan ere.

Esperimentazioari buruz, komentatu behar da kontratazio berezia dela bide, ni neu aritu nintzela irakasle modura lan egiten, eta ni izan nintzela hirugarren hiruhileko osoan zehar talde horretako (eta DBH-ko hiru taldetako) irakasle bakarra. Ez hori bakarrik, lanean bi astez iraun eta gero, koronabirusaren pandemiak bete betan harrapatu zuen kurtso lektiboa, hezkuntza sistema irakaskuntza-ikaskuntza prozesu ez-presentzialetara behartuz. Hori dela eta, gertatutako egoerak oso apartekoak izanagatik, ez zen lan honetara zehazki bideratutako prestaketa berezirik egin, eta beraz, esperimentazio atal honen ebaluaziorako kontuan hartu diren tresnak, ikasleen zereginen kontrola eta hirugarren ebaluazioaren azterketa globala izanen dira. Horretaz gain, institutuko ikasle guztiei inkesta bat pasa zitzaien, pandemiaren egoeraren kudeaketa baloratzeko ikasgaiz ikasgai (eta ondorioz, irakaslez irakasle). Inkesta honek **funtzioen limiteak eta jarraitutasuna**ren gaia baino, nire lan osoa (metodologia, inplikazioa, azaltzeko gaitasuna) baloratzen du, beraz 8. kapitulu honetan sartuko dugu ere.

8.2. Galdetegiak

Ikasleen hirugarren ebaluazioko notaren kalifikazio-irizpideak, konfinamenduan zehar aldatu ziren, aparteko egoera berezira moldatzeko. Hauek ziren:

Azterketa globala: % 50
Zereginen entrega: % 20
Zereginen kalifikazioa: % 30

Horretaz aparte, azterketan ez zen inolako nota minimorik exijitzen batezbestekoa egiteko. Atal honetan, kalifikatzeko hiru iturrietatik, bi deskribatuko ditugu: azterketa eta zereginen entrega. Baita ere, kalifikagarria ez den ikasgaiaren (eta irakaslearen) ebaluazio inkesta azalduko da.

8.2.1. ZEREGINEN ENTREGA

Protokoloak markatutako zereginei buruz, lan honetan aritu gara dagoeneko. Hala ere, horrek notarako zer suposatzen zuen ez dugu zehaztu. Osotara, ebaluazio osoan zehar 15 zeregin bidali zitzaizkien, horietako bederatzi (zortzi ariketa sorta, eta galdera bat), **funtzioen limiteak eta jarraitutasuna**ri buruzkoak izanik. Puntuatzeko sistema, honakoa izan zen: garaian edo epetik kanpo baina hurrengo egunean entregatuz gero, berandutzerik ez zen kontatu; epetik kanpo baina hurrengo bost egunetan zehar entregatuz gero, berandutzeak zeregin horren puntuaren laurden bat suposatzen zuen; eta azkenik, are beranduago entregatuz gero, puntu erdia kontatzen zen soilik. Azterketa/lan metaketa handia izatekotan, epeak malgutzen ziren kasuan kasu.

8.2.2. AZTERKETA GLOBALA

Zientzietako hiru taldeen aurrerapena ez zen berdina izan: lehenengo taldeak ez zituen deribatuak eman; bigarren taldeak, soilik deribatuaren definizioa eta interpretazio geometrikoa; eta hirugarren taldeak (lan honetako lagina dena), deribatuen gaia bukatu zuen. Hori dela eta, hirugarren taldekoek beste taldekoen baldintza beratan egoteko, azterketa globalean deribatuei buruzko edukiak aukerakoak ziren. Atal honetan, esperimentazioa egiteko azterketako jardueretan zentratuko gara, hau da, testuliburuko *9. GAIA: Funtzio baten limitea*-ri buruzko ariketetan alegia (azterketa osoa **D** eranskinean dago bilduta). Hona hemen:

1. Egin hurrengo limiteak (**1p bakoitza**):
a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+2}$ b) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2+x}\right)^{x}$ c) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$
2. Esan hurrengo funtzioak jarraituak diren eta ez badira, aurkitu etenune mota (**1p bakoitza**).
a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-2} & ; \quad x<0\\ x^2+x-\frac{1}{2} & ; \quad 0\le x\le 1\\ 3x & ; \quad x>1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \quad x\neq 1\\ x^2+1 & ; \quad x=1\end{cases}$
3. Kalkulatu funtzio honen definizio eremua, asintotak (baldin eta baditu esan nola hurbiltzen garen asintota horietara) eta aztertu jarraitutasuna (**3p**).
$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x+2}{x} & ; \quad x<0\\ \frac{2x+2}{x-2} & ; \quad x\ge 0\end{cases}$

8.1. Taula: **funtzioen limiteak eta jarraitutasuna** lantzen dituzten azterketako ariketak.
Oharra: ariketa bakoitzaren zenbakia ez da azterketa originalaren berdina.

8.2.3. IKASGAIAREN EBALUAZIO INKESTA

Inkestak, hasiera batean, ikasgaiaren alderdi ez-presentziala eta Classroomaren antolakuntza ebaluatzeko bideratuta ziren. Zuzendaritza taldeak, eredu bat luzatu zigun irakasleei, eta guk galderak gehitu, kendu edo eraldatu ahal genituen. Nire kasuan, Classroometaz aparte, bideoak baloratzea eskatu nien, horiek baitziren nire estrategiaren gakoa. Hona hemen galdetegia:

CLASSROOM honi buruzko inkesta.

Ikasle agurgarria, martxoak 13tik aurrera online egin dugun lanaren inguruko hausnarketa egiten ari gara eta nire lana hobetzeko, galdetegi hau betetzea eskertuko nizuke.

*Obligatorio

Zenbat denbora behar izan duzu zeregin bakoitza egiteko? *

- ○ Ordu bat baino gutxiago.
- ○ Ordu bat (gutxi gorabehera).
- ○ Ordu bat baino gehiago.
- ○ Otro: ______

Baloratu classroom honetan aspektu hauek. *

	Oso exkasa.	Eskax xamarra.	Normala.	Ona.	Oso ona.
Meet saioak	○	○	○	○	○
Bideoak	○	○	○	○	○
Classroom-aren antolakuntza	○	○	○	○	○

Bideoei dagokionez, baloratu 1-etik 5-era (1 izanda notarik txarrena, eta 5 izanda notarik hoberena). Adibidez, bideoen dinamikotasunean 1 jarriz gero, oso motelak eta "txaposoak" direla adierazten duzue. *

	1	2	3	4	5
Dinamikotasuna	○	○	○	○	○
Azaltzeko argitasuna	○	○	○	○	○
Bideoak ikusiz, badakit zer ikasi behar dudan	○	○	○	○	○
Aurkezpena (txukuntasuna)	○	○	○	○	○

Bideoei dagokionez, baloratu luzera. *

- ◯ Oso motzak.
- ◯ Motz xamarrak.
- ◯ Egokiak.
- ◯ Luze xamarrak.
- ◯ Oso luzeak.

Lan zama doitzen joan dela uste duzu? *

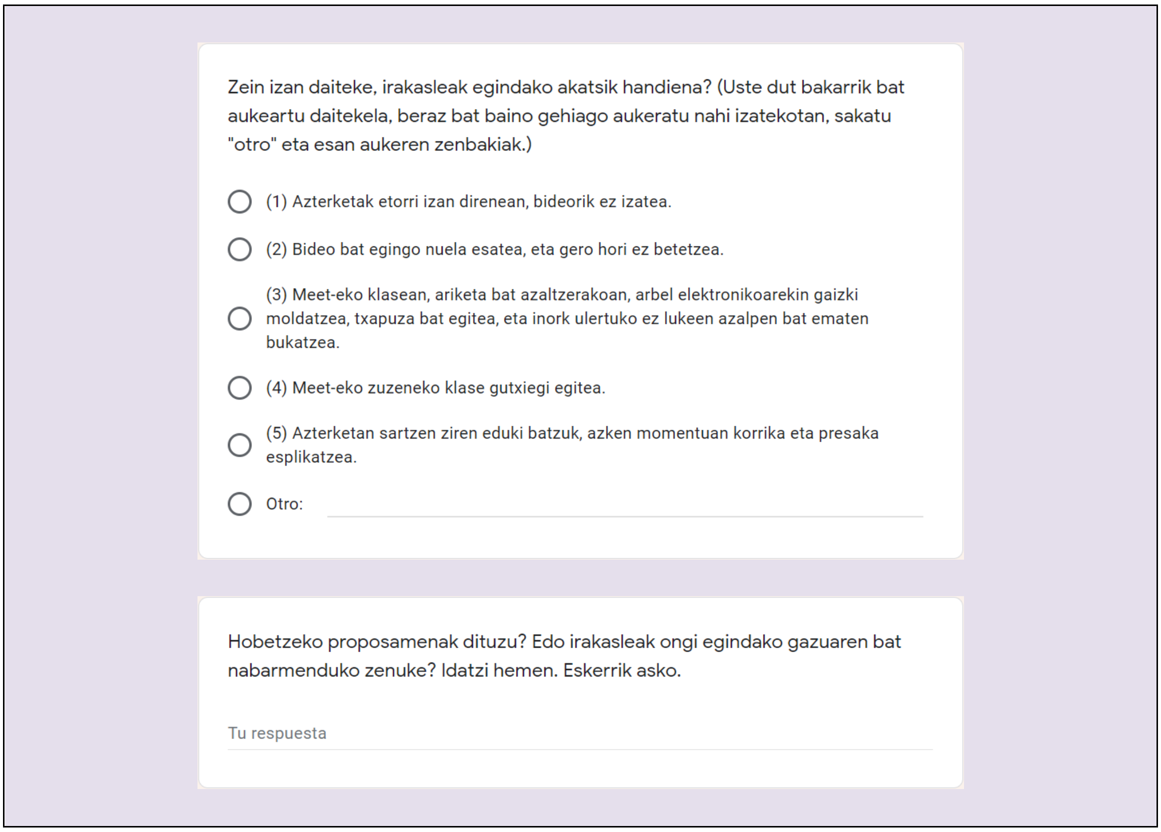
- ◯ Bai.
- ◯ Ez.

Baloratu irakaslearen lana hurrengo aspektuei dagokionez. *

	Oso exkasa.	Eskax xamarra.	Normala.	Ona.	Oso ona.
Irakasleak zurekin izandako arreta eta begirunea.	◯	◯	◯	◯	◯
Irakaslearen irakasteko modua.	◯	◯	◯	◯	◯
Ikastetxean emandako ikasketa maila.	◯	◯	◯	◯	◯
Kalifikatzeko eta ebaluatzeko irizpideak.	◯	◯	◯	◯	◯

Baloratu. *

	Erreza.	Errez xamarra.	Normala.	Zail xamarra.	Zaila.
Noizbait egin dugun Test-moduko galdetegiaren zailtasuna.	◯	◯	◯	◯	◯
Orokorrean, zereginen zailtasuna.	◯	◯	◯	◯	◯
Azterketaren zailtasuna.	◯	◯	◯	◯	◯



Zein izan daiteke, irakasleak egindako akatsik handiena? (Uste dut bakarrik bat aukeartu daitekela, beraz bat baino gehiago aukeratu nahi izatekotan, sakatu "otro" eta esan aukeren zenbakiak.)

- (1) Azterketak etorri izan direnean, bideorik ez izatea.
- (2) Bideo bat egingo nuela esatea, eta gero hori ez betetzea.
- (3) Meet-eko klasean, ariketa bat azaltzerakoan, arbel elektronikoarekin gaizki moldatzea, txapuza bat egitea, eta inork ulertuko ez lukeen azalpen bat ematen bukatzea.
- (4) Meet-eko zuzeneko klase gutxiegi egitea.
- (5) Azterketan sartzen ziren eduki batzuk, azken momentuan korrika eta presaka esplikatzea.
- Otro:

Hobetzeko proposamenak dituzu? Edo irakasleak ongi egindako gazuaren bat nabarmenduko zenuke? Idatzi hemen. Eskerrik asko.

Tu respuesta

8.3. Hasierako galderak eta aurreikusitako portaerak

Koronabirusaren pandemiagatik behartutako irakaskuntza-ikaskuntza ez presentziala, inoiz bizitako fenomeno bat izan da gure historian, hori dela eta, oso zaila izan zen aurreikustea nola igaroko ziren hurrengo egunak, eta nola bilakatuko ziren hainbat gertaera. Argi eduki behar dugu, alarma egoera bi astean behin luzatzen zela, eta nahiz eta irakasle eta zentro mailan etorkizunerako (kurtso bukaeraraino) planak egin, ikasle askoren buruetan hori ez zen behin betirako ideia. Hala ere, atal honetan, irakaskuntza-ikaskuntza gauzatzeko elementuen aurrean, momentuan aurreikusi ziren portaerak deskribatuko dira, bereziki ikaskuntza ez-presentzialaren testuinguruan.

8.3.1. ESTRATEGIA DIDAKTIKOA

Ikasle taldea orokorrean zintzoa eta saiatua izanik, oso kontziente ziren egoera bereziaz. Oso denbora gutxi neramanez haiekin lan egiten (bi aste), ez nuen espero haien partetik jarrera arazoak izatea, eta ez ere, haiek niri gehiegi exijitzea irakasle bezala.

Metodologia aldetik, nire estrategiaren moldatze azkarra ongi baloratzea espero nuen. Neure hasierako ideia lan honen esperimentazioa gauzatzeko, irakasle titularrarekin batera *flipped classroom* metodologia erabiltzea zen, beraz hasieratik izan nuen bideoak egiteko asmoa, eta hasieratik neukan bideo horiek sortzeko baliabideak. Horren ondorioz, konfinamendua hasi eta bi egun igaro ondoren, lehenengo bideoa igota zegoen dagoeneko. Bideoen estrategia hau, zuzeneko bideo-dei bidezko Meeteko klaseak baino metodologia erosoagoa aurkituko zutelaren susmoa ere banuen.

Kontzeptualki, ez nuen espero mundu guztiak limiteak lehendabizikoan ulertzea. Ikasle askok matematikak trabatuta dituzte aurreko kurtsoetatik, eta DBH-ko 4. mailan funtzio kontzeptua argi geratzen ez baldin bada, batxilergoko 1. mailan funtzioak eta limiteak urte berean menperatzea ez da erraza izanen. Kasu honetan (edo antzekoan) egongo ziren ikasleak izango zirela suposatzen nuen, eta onartzen nuen ere, nahiz eta bideo bakoitzeko azalpena erabat argia egiten saiatu, egonen zirela kasuak zeinetan ulertuko ez nindutenik.

8.3.2. ZEREGINEN ENTREGA

Zereginen entregei buruz ez zen espero aparteko arrakastarik, baizik eta portaera normatibo bat, zeinean ikasleen parte handi batek epean entregatzen dituzten arren, denetarik dagoen. Gainera, 8.2. atalean zehaztu diren kalifikazio-irizpideak ez ziren konfinamendu hasieratik definitu, baizik eta hilabete bat igarota, beraz zereginak entregatzearen notaren portzentajea ez jakinik, ikasle moduan errazagoa da benetako garrantzirik ez ematea.

Bestetik, ikasleak ez zeuden etxeko lanak derrigorrez egitera ohituta, izan ere, batxilergoko *Matematika I* ikasgaiko kalifikazio-irizpide arruntetan, azterketek notaren % 100-a suposatzen dute, eta etxeko lanak aukerakoak dira beti. Zereginak bakarkakoak zirela ez nuen inoiz esan (inplizituki, baziren), izan ere, ezin nuen ziurtatu bakarka eginen zituztenik. Are gehiago, zereginak egiten ez jakitekotan, zuzenean kopiatu beharrean, taldeka egitea proposatu nien, haien arteko kooperazioa eta komunikazio ez-presentziala sustatzeko, izan ere, ikasgaian galduta dabilen ikaslea oso bakarrik ikus dezake bere burua konfinamenduan.

8.3.3. AZTERKETA GLOBALA

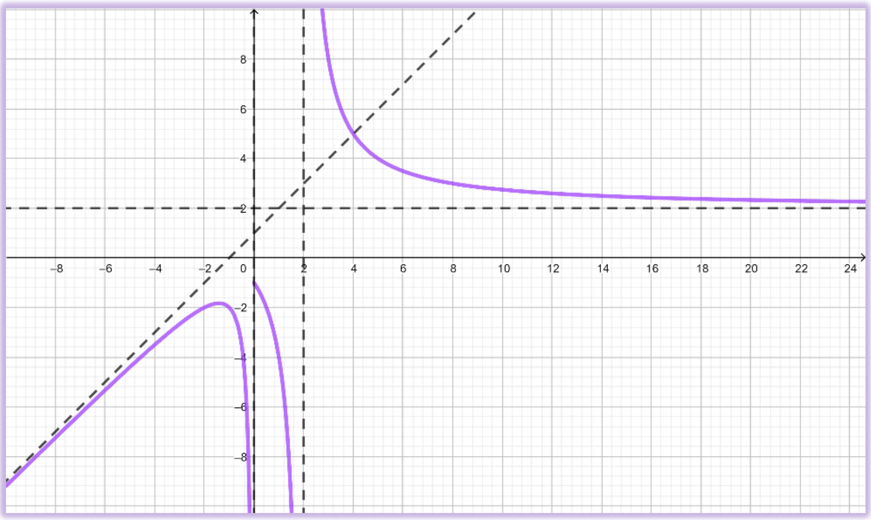
Azterketa globalari buruz, azalpenenetan sakontzea faltatu zitzaidan, eta horrek azalpen zuzena dauka. Kapitulu honen 8.2.2. azpiatalean esan den bezala, zientzietako taldeen erritmoa ezberdina zen. Nire taldeak, funtzioen deribatuaren gai osoa eman zuen; beste batek soilik definizioa eta esanahi geometrikoa; eta azkenekoak ez zituzten ezta deribatuak hasi ere. Azterketaren data hurbiltzen zen heinean, erabaki nuen deribatuen edukia nire taldearentzat aukerakoa izatea, eta horrela adierazi nien nire ikasleei, zientzietako beste taldeen aukera berdinak izateko. Modu horretan, azterketaren azkeneko ariketan, hiru bariante ezberdinen artean **bakarra** aukeratu zezaketen, zeinean zientzietako hiru taldeei zegozkien edukiak agertzen ziren (hau da, lehenengo barianteak, deribatuen eduki osoa barneratzen zuen; bigarrenak, soilik definizioa eta esanahi geometrikoa; eta hirugarrenak funtzioen limiteetan eta jarraitutasunean sakontzen zuen, deribatuak ukitu gabe). Ikasle modura, horrek esan nahi du, hirugarren bariantea aukeratuz gero, gai oso bat kentzen duzula ikasteko, beraz espero nuen ikasleen gehiengoak hirugarren bariantea aukeratzea. Aurrekoa gutxi balitz, deribazio erregelen bideorik ez zegoen (beste kontu batzuk direla eta, ia-ia gai osoa, Meeteko klaseen bidez eman nuen), beraz lehenengo bariantea aukeratzea ez litzateke oso estrategikoa izango, ikasleek ez baitzuten eduki teorikoa berriz ikusteko aukerarik. Honen guztiaren ondorioa hau da: azterketan aukerakoa den eduki hori guztia eman beharrean, **funtzioen limiteak eta jarraitutasun**ean sakondu izan banu, kontzeptu hauek askoz barneratuta izango lituzkete ikasleek.

Sakontasunaz aparte, ariketaz ariketa, azterketa aurretik, hurrengoak aurreikusi ziren ere:

Lehenengo ariketan, hiru limite ebaztea eskatzen zitzaien, horietako bakoitzarentzako estrategia ezberdina izanik: lehenengoa puntu baterako limitea izanik, $\frac{0}{0}$ motatako indeterminazio bat ebaztea eskatzen zitzaien, beraz orokorrean ongi ebatziko zutela espero nuen, baten batek, 6. kapituluan aipaturiko errorea egingo zuelarik ($\frac{\infty}{\infty}$ motatako indeterminazioaren estrategia aplikatzea); bigarrenean, akats gehiago espero nituen, izan ere, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdots = 0$ emaitza nahiko zuzena izan daitekeen arren, ikasleek beti, ariketa baden baino konplikatuagoa egitera jotzen dute, eta alde honetatik, birritan pentsatu gabe, 1^{∞} motatako indeterminazioak ebazteko estrategia aplikatuko zutela iragarri nezakeen (6. kapituluan aipatutako errorea ere); azkenik, hirugarren limitean ustezko $\infty - \infty$ motatako indeterminazioa ebatziko zutela espero nuen, konjugatuaren estrategia aplikatuz, limitearen bi terminoak zatiki berean bateratu beharrean, baina hau egin ostean topatuko zuten kale itsuaren aurrean, estrategia ongi bideratzea espero nuen.

Bigarren ariketa nahiko erraza egingo zitzaien ustea nuen, izan ere ariketan agertutako zatikako funtzioen jarraitutasunak ez zuen inolako oztopo nabarmenik planteatzen, ez definizio tarteen mugetan, ez azpifuntzio bakoitzaren eremu propioan (izan zezakeen zailtasun bakarra, (a) kasuaren lehenengo azpifuntzioan datza, izan ere, hau $x = 2$-an ez dago definituta, baina bere tartea $x < 0$ izanik, ez dago arazorik). Hori dela eta, ikasleen gehiengoak ariketako bi atalak ongi eginen zituztela uste izan nuen.

Azkenik, hirugarren ariketan, funtzioaren azterketa osoa eskatzen zen: definizio eremua, asintotak eta jarraitutasuna, beraz horrelako ariketa luzeetan, pausu batean edo bestean hanka sartzea erraza da. Definizio eremua aztertzean, 2. ariketan agertzen ez zen zailtasuna honetan bai ageri dela, baina soilik bigarren azpifuntzioan. Honek zailtasunak sortuko zituelakoan, guztiz ongi aztertutako definizio eremuen kasu ugari ez zela egongo aurreikusi nuen (ez zen hala gertatu). Asintota bertikalen kasuan, $x = 0$ eta $x = 2$-en artean, lehenengoarekin nahaste handiagoa egonen zela argi nuen, izan ere, $x = 0$ bi azpifuntzien muga izanik, infinitura bakarrik ezkerreko aldetik jotzen du; $x = 2$ asintota arruntagoa da (ikusi 8.1. Irudia). Asintota horizontal eta zeiharren kasuan, askori funtzioa nondik hurbiltzen zen aztertzea ahaztuko zitzaiela aurreikusi nuen, izan ere, nire bideoetan ez zegoen atal hau azalduta (Meet eta beste materialen bidez egin nuen) eta hori dela eta azterketa egunean bertan ozenki gogoratzea erabaki nuen. Jarraitutasuna aztertzerakoan, $x = 0$-ko asintota bertikalean, askok jauzi infinitua ez zutela identifikatuko aurreikusi nuen, eta termino asmaturen bat erabiliko zutela pentsatu nuen, hala nola *jauzi erdi-infinitua* edo. Eta azkenik, ariketa honetan ez nuen planteamendu ordenaturik espero asintotak eta jarraitutasuna ebazterakoan; askok emaitzak ongi kalkulatzen bazekizkiten ere, ez zituzten kontzeptuak **zehazki** bereizten eta hori dela eta, ariketaren garapen egituratu bat ez nuen espero. Klasean, behin baino gehiagotan, hurrengo esaldia esan nuen: “Asintota bertikala, zuzena bera da, $x = k$ motatakoa; aldiz, asintota horren inguruan gertatzen den eten mota, jauzi infinitua da.”, baina hala ere, argi neukan guztiz ulertzen ez zutela. Azken finean, fenomeno baten alderdi ezberdin eta espezifikoei izena jartzea, eta jakitea bereizten zein adierazten duen bakoitzak, zaila da, batez ere, ahozko hizkuntzan irakasleok modu analogoan erabiltzen baditugu termino horiek guztiak (askotan gertatzen da).



8.1. Irudia: azterketa globaleko 3. ariketaren funtzioaren adierazpen grafikoa, asintota guztiekin.

8.4. Emaitzak

Atal honetan ikasleen erantzuna aztertuko da 8.2. atalean aurkeztu diren ebaluazio tresnetan zehar, hau da, zereginen entrega, azterketa globala eta ikasgaiaren ebaluazio inkesta.

8.4.1. ZEREGINEN ENTREGA

Ikasle guztien zereginen kontrola, 8.2. Taulan agertzen da. Zeregin bakoitzaren entregari 1 puntu dagokio gehienez, eta 8.2.1. azpiatalean zehaztutako berandutzeen irizpideak kontuan hartuz, penalizazioak egon daitezke. Penalizazio hauek hobeto irudikatzeko, koloreak erabili dira:

Garaian edo epetik kanpo bada, hurrengo egunean, berdea:	1
Epetik kanpo baina bost egun igaro baino lehen, horia:	0,75
Are beranduago, gorria:	0,5

	Zereginak															
Ikasleak	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**	**X**	**XI**	**XII**	**XIII**	**XIV**	**XV**	**Osotara**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
3		0,5	1	1	0,5		1	0,75	1				0,5		0,5	**6,75**
4				1			1									**2**
5	1	1	1	1	1		1		1	1		1		1	1	**11**
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
8	1	0,5	1	1	0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	**10,5**
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1		**13**
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
11	1	1	1	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	**14,5**
12																
13																
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,75	1	1	1	**14,75**
15	1		1	1	0,5	1		1	0,5	1	1		1	1	1	**11**
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	**13**
18			1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
22	1	1	1	1	1		1			1	1	1	1	1		**11**
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**

8.2. Taula: zereginen kontrola.

Hemen, aurreko atalean aurreikusitako portaera normatiboa ikusten dugu. Ikasleen gehiengoak epean edo egun bat beranduago entregatu zituzten zereginak, salbuespen kasu batzuk kenduta: 12 eta 13 zenbakipeko ikasleek konfinamendu hasieratik argi utzi zidaten ikasgaia ez-ohiko deialdirako (edo hurrengo urterako) utziko zutela, beraz horiekin arazorik gabe. 8 zenbakipeko ikasleari lanerako ohitura mantentzea asko kostatzen zitzaion, animikoki oso ikasle goraberatsua zen eta hori dela eta zeregin asko utzi zituen egin gabe; hala ere, azterketa eguna baino leheneko egunetan pilak jarri eta egin gabeko zeregin guztiak entregatu zituen. 3 eta 4 zenbakipeko ikasleak errepikatzaileak ziren, eta lan ohituran ere galera nabarmenak zituzten.

8.4.2. AZTERKETA GLOBALA

Azterketa globaleko emaitzak hobeto interpretatzeko, estatistika bat egin da aurreikusitako errore nabarmenekin. Errore horiek, kode moduan izendatu dira eta 8.3. Taularen bidez azaltzen dira. Emaitza hauek hobeto interpretatzeko, hurrengoak kontsideratu behar dira: laginaren 27 ikasleetatik, 25-ek bakarrik egin zuten azterketa globala (aurreko azpiataleko 12 eta 13. ikasleak dira azterketa egin ez zutenak, noski); 25 ikasleetatik zazpik ez zuten hirugarren ariketa egin (8.3.3. azpiatalean azaldutakoaren arabera, deribatuen edukiak zituzten ariketaren beste barianteak aukeratu zituzten, beraz, 8.1. Taulako hirugarren ariketa, lan honen esperimentaziorako kontuan hartu dena, ez zuten egin); eta azkenik, ikasle guztiek ez zuten hainbat errore egiteko aukera izan (adibidez, asintota zeiharra identifikatzen ez badut, ez dut aztertuko nondik hurbilduko garen beraz E32z errorea eginez gero, ezin dut E32zn errorea egin; modu beran, nik 2. ariketa ez badut ezta saiatzen ere, ezingo ditut E21 eta E22 erroreak egin (ikusi 8.3. Taula)), beraz aldagai bakoitzerako laginaren tamaina aldakorra da. Taulan, errore bakoitza egindako ikasleen ehunekoa, maiztasunaren arabera koloreka sailkatu da hurrengo irizpidearekin:

% 10 edo txikiago:	berdea
% 10-etik, % 20-ra arte:	horia
% 20-tik, % 40-ra arte:	laranja
% 40 edo gehiago:	gorria

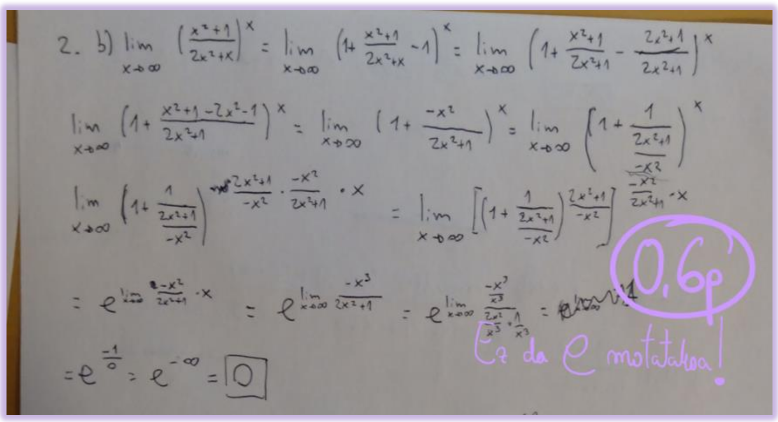
Ariketa zenbakia	Errorea	Esanahia	Ikasleen maiztasun erlatiboa	Ikasleen ehunekoa
1	E11	Lehenengo limitean, $\frac{\infty}{\infty}$ motatako indeterminazioak ebazteko estrategia aplikatzea.	1/25	% 4,000
	E12z	Bigarren limitean $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}$ behin lortuz, ez ondorioztatzea $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$ dela.	1/24	% 4,167
	E12e	Bigarren limitean 1^{∞} motatako indeterminazioak ebazteko estrategia aplikatzea.	13/24	% 54,17
	E13i	Hirugarren limitean $\infty - \infty$ indeterminazioaren aurrean, konjugatuaren estrategia erabiltzea.	2/23	% 8,696
	E13a	Hirugarren limitean, behin $\left(\frac{-1}{0}\right) = \pm\infty$ lortuta, ez aplikatzea albo limiteak.	7/20	% 35,00
2	E21	Lehenengo funtzioan, $x = 2$ puntuan jauzi infinitua dagoela uste izatea.	2/23	% 8,696
	E22	Bigarren funtzioan, bigarren azpifuntzioaren balioa $x = 1$ puntuan jakiteko, limitea aplikatu/idatzi.	11/23	% 47,83
3	E31Z	Definizio eremua aztertzerakoan, $x = 0$ definituta ez dagoela uste izatea.	3/18	%16,67
	E31B	Definizio eremua aztertzerakoan, $x = 2$ definituta dagoela uste izatea.	0/24	% 0,000

	E32b0	Asintotak aztertzerakoan, $x = 0$ asintota bertikala ez identifikatzea.	9/19	% 47,37
	E32b2	Asintotak aztertzerakoan, $x = 2$ asintota bertikala ez identifikatzea.	1/19	% 5,263
	E32h	Asintotak aztertzerakoan, $y = 2$ asintota horizontala ez identifikatzea.	3/18	% 16,67
	E32hn	Asintota horizontalera nondik hurbiltzen garen ongi ez kalkulatzea.	6/18	% 33,33
	E32z	Asintotak aztertzerakoan, $y = x + 1$ asintota zeiharra ez identifikatzea.	10/19	% 52,63
	E32zn	Asintota zeiharrera nondik hurbiltzen garen ongi ez kalkulatzea.	5/12	% 41,67
	E33Z	Jarraitutasuna aztertzerakoan $x = 0$-ko etena ez identifikatzea.	6/18	% 33,33
	E33Zi	$x = 0$ etengunea gaizki izendatu.	7/18	% 38,89
	E33B	Jarraitutasuna aztertzerakoan $x = 2$-ko etena ez identifikatzea.	4/18	% 22,22
Guztiak	EI	Etenguneen izenekin nahasmena izatea ($x = 0$-ko kasuaz aparte).	10/25	% 40,00
	EL	Limiteen oinarrizko kalkuluak ez menperatzea.	3/25	% 11,54

8.3. Taula: azterketan aurreikusitako erroreen azalpenak eta ehunekoak.

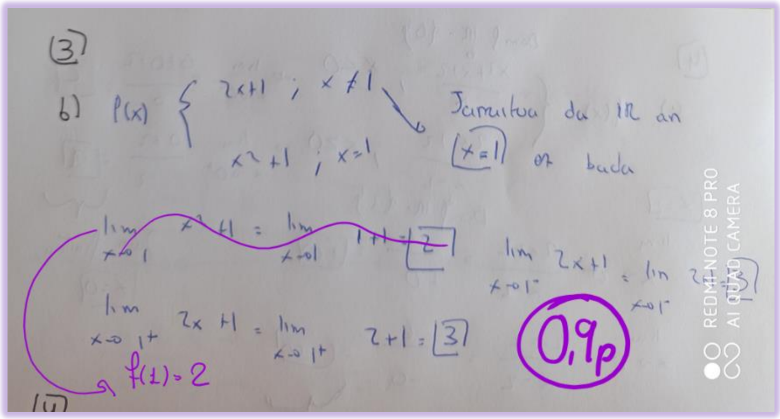
Argi ikusten dugu, errore asko sistematikoak direla, beraz horietako hainbat komentatuko ditugu, gorriz markatutakoetatik hasita:

Hasteko E12e daukagu. Ikasleak $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2+x}\right)^x$ limitea ikusterakoan, zuzenean jotzen zuten e motatako limitea ebaztera, aurretik konprobatu gabe, 1^∞-ko indeterminazioa ematen zuela edo ez. Hau, kanpotik ikusita, ikasleen despistea da izatez, baina hala ere, honen atzean hitzarmen haustura bat dago, izan ere, nik sakonki landu nituen e motatako limiteak, horiei ez solik bideo bat baizik eta hiru eskainiz (**B4**, **B5** eta **B7***); aldiz, $a^\infty = 0$ zela, $0 < a < 1$ denean, esan bai, askotan gainera, baina ez nuen gehiegi nabarmendu (funtzio esponentzialak tratatzen diren bideoan argi dago, baina bideo hau aurrekoa da, beraz ez da limiteez espliziki hitz egiten). Ondorioz, ikasleek limite mota hau azterketan bai ala bai sartuko zela uste izan zuten, eta konprobatu baino lehen, hori ebaztera jo zuten birritan pentsatu gabe. Hona hemen adibide bat:



8.2. Irudia: E12e errorea irudikatzen duen ariketa. Ikasleak **8,6** atera zuen.

Bigarren ariketa erraza izanda (edo hala kontsideratuta behintzat), E22 errorea askotan errepikatu zen. Akats hau ez da oso larria berez, izan ere idazkera moduko arazoa da, hau da, ikasleek argi zeukaten zer zen funtzioan gertatzen zena (eten gaindigarria), eta nola kalkulatzen zen. Aldiz, kalkulu horiek idazteko momentuan nahasteak zeuden limitearen eragilea idazten baitzuten, funtzioaren balioa puntu batean kalkulatzeko. Hau mekanizazio arazoa da, izan ere gai honetan “guztiak limiteak direnez”, horiek idaztera jotzen dute, errigorez idatzi behar dutenaz kezkatu gabe:

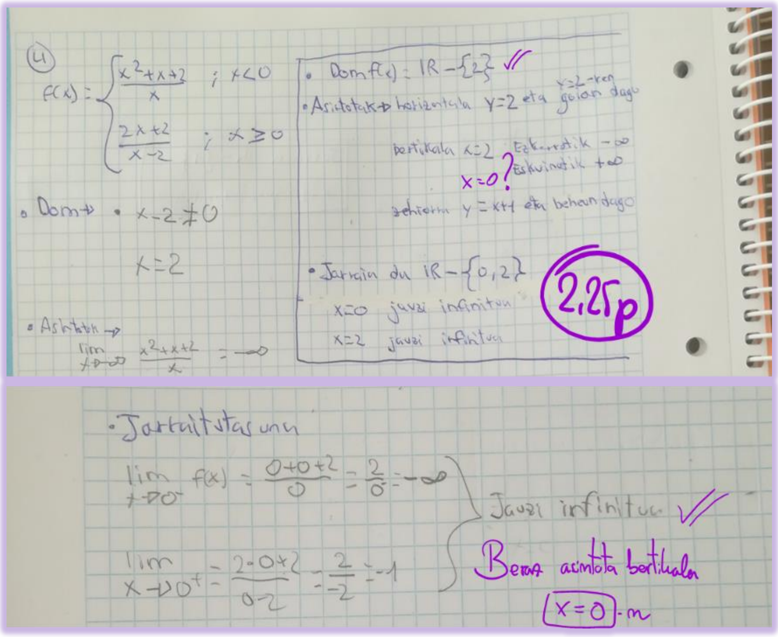


8.3. Irudia: E22 errorea irudikatzen duen ariketa. Ikasleak **7,4** atera zuen.

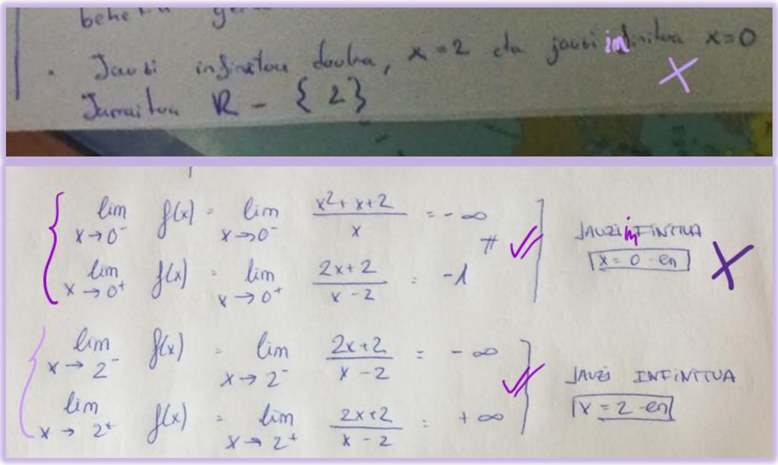
Hirugarren ariketan gehien esperotako errorea, guztiz gertatu zen, asintotak aztertzerakoan, ez zuten $x = 0$-ko asintota identifikatzen (E32b0). Honen zergatia 8.3.3. azpiatalean azaldu da dagoeneko. Izatez, jarraitutasuna aztertzean, $x = 0$ puntuan jauzi infinitua identifikatzen zuten ikasleen % 41,67-a (12tik, 5ek) ez zuten $x = 0$ asintota bertikala zehaztu. Hau oso adierazgarria da, beste asintota bertikalarekin konparatzen badugu, izan ere, $x = 2$ puntuan jauzi infinitua identifikatzen zuten ikasleen % 100-ak, $x = 2$ asintota bertikala zehaztu zuen. Gainera, ikasleek, argi ez daukaten elementua gaizki zehaztearen beldur badira, askotan nahiago dute ez zehaztea edo “ahaztutzat” ematea (ikusi 8.4. Irudia).

Honi lotuta ere, E33Zi errorea (laranjaz dago markatuta) ikasle askok egin zuten arren, ez ziren esperotako izen arrarorik ikusi eta gehienek jauzi infinitua zehaztu beharrean, jauzi finitua zehaztu zuten (ikusi 8.5. Irudia).

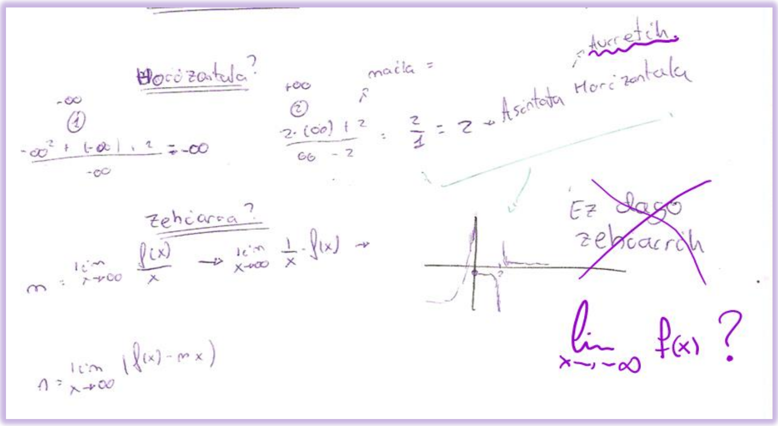
Asintota zeiharra izan zen gehien kaltetuetako kalkulu bat izan ere, E32z eta E32zn erroreak asko errepikatzen dira (lehenengoaren kasuan ikasleen erdia baino gehiagok egin zuen). Honek azalpen zuzena dauka, asintota zeiharra baita lan gehien daraman kalkulua (asintoten artean), eta gainera, aurretik esan den bezala, ez zegon honi buruzko bideorik. Ikasle asko kalkuluetan nahasten ziren eta bertan behera uzten zuten ariketa (ikusi 8.6. Irudia).



8.4. Irudia: E32b0 errorea irudikatzen duen ariketa. Ikasleak **9,15** atera zuen.

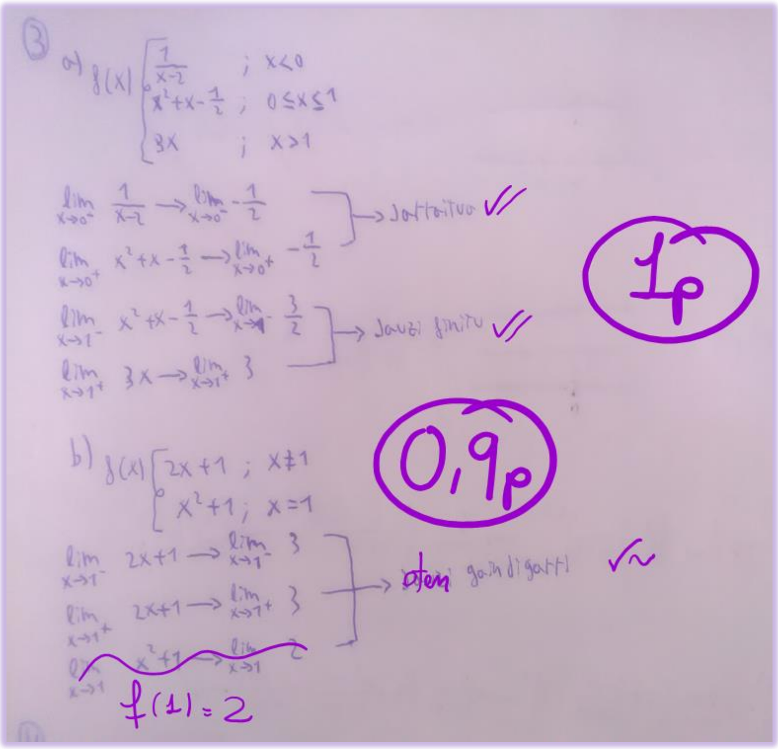


8.5. Irudia: E33Zi errorea irudikatzen dituzten bi ariketa. Ikasleek **8,7** eta **7,4** atera zuten hurrenez hurren.



8.6. Irudia: E32z errorea irudikatzen duen ariketa. Ikasleak **6,75** atera zuen.

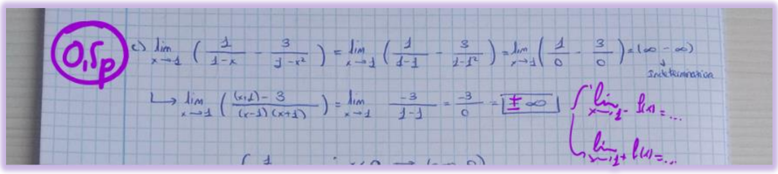
Gorriz markatutako azken errorea, EI da. Hau da, ikasleek orokorrean, etengune moten izenekin nahasteak zituzten, eta hau modu askotan nabarmendu zen. Orokorrean ez zen akats larria, izan ere, akatsa izendapenean zegoen eta ez kontzeptuan. Adibidez, ikasle batzuk "eten gaindigarria" idatzi beharrean, "jauzi gaindigarria" idazten zuten. Pentsa dezakegu eten gaindigarriaren eta jauzi finituaren arteko kontzeptuen nahasketa daukala, baina ariketa berean "jauzi gaindigarri" eta "jauzi finitua" idatziz gero, argi dago kontzeptuen izendatzearekin izandako nahaste arina dela.



8.6. Irudia: EI (eta baita ere E22) errorea irudikatzen dituen ariketa. Ikasleak **8,05** atera zuen.

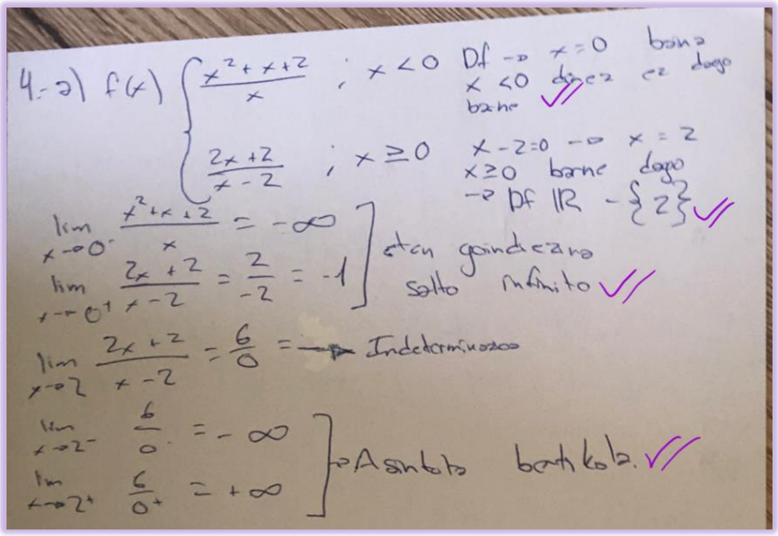
Laranjaz markatutako erroren artean ez ditugu guztiak komentatuko, soilik interes berezia dutenak:

Hasteko albo limiteen ebazpenaren ausentzia (E13a) daukagu, espero ez zen errore bat. Ikasle askok albo limiteak ebatzi gabe uzten zuten, eta honen arrazoi bakarra, prozedura argi ez edukitzea da, hau da, ez jakitea limite batek $\frac{k}{0}$ motatako emaitza emanez gero, albo limiteak ebatzi behar direla. Gainera, albo limiteak ebatzi ez zituzten ikasle askok $\frac{-1}{0} = \pm\infty$ emaitza jartzen zuten, beraz kontzeptualki bazekiten horrek infinitua (plus edo minus) ematen zuela, baina ez zuten hori gehiago garatzeko beharrik ikusten. Beste batzuk izendatzaileko zeroa positibotzat hartzen zuten, eta izendatzailea negatibo izanik, zuzenean $\frac{-1}{0} = -\infty$ idazten zuten (ikusi 8.7. Irudia). Errore honi zentzua eman dakioke bideoen ikuspuntutik, izan ere, nahiz eta zereginetan eta Meeteko klaseetan mota honetako limiteak ebatzi arren, ez zegoen prozedura hau esplizituki egiten zuen bideorik. Berriz ere, hitzarmen haustura bat izan daiteke honen kausa.



8.7. Irudia: E13a errorea irudikatzen dituen ariketa. Ikasleak **7,6** atera zuen.

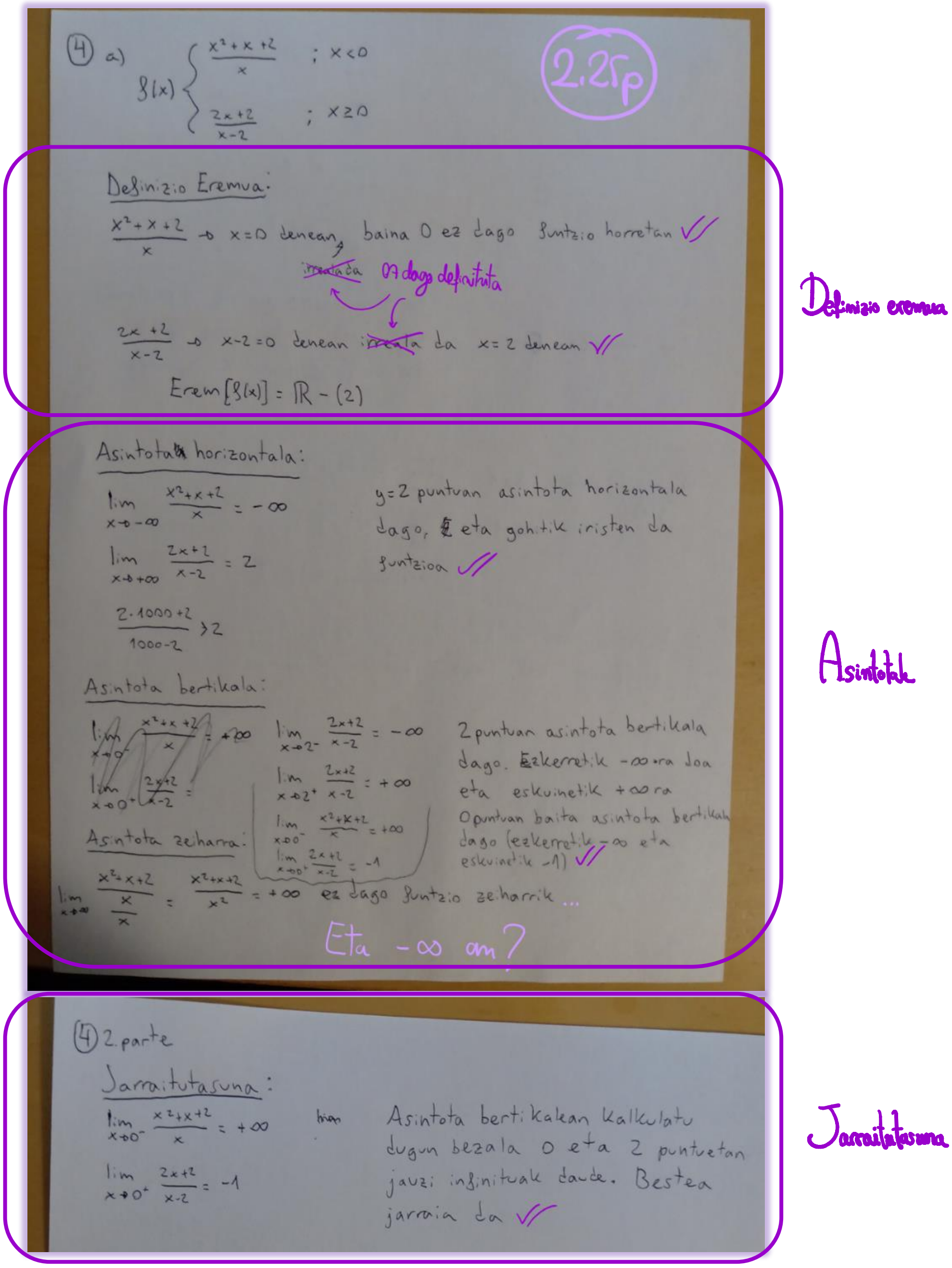
Laranjaz markatutakoetatik komentatuko dugun azkena, E33B izanen da, hau da, jarraitutasunean $x = 2$-ko jauzi infinitua ez zehaztea. Honek, hasiera batean akats nahiko larria dela pentsa dezakegu baina kasu gehienetan, ez du ezjakintasuna adierazten baizik eta jakintzaren antolamendu eza. Kapitulu honen 8.3.3. azpiatalean komentatu dugu dagoeneko nola ez zen espero, hirugarren ariketa ebazteko antolamendu ordenaturik. 8.8. Irudian, E33B errorea egiten da baina ez dago ezagupenen inolako galerarik, deskonfiguazioa baizik. Ikasleak $x = 0$-ko eten mota zehazten du, aldiz $x = 2$-n asintota bertikala. Bietan jarraitutako prozedura berdina da (albo limiteak ebaztea), baina ondorioak ateratzerakoan $x = 0$-n ez du asintota bertikalik zehazten, eta $x = 2$-n ez du jauzi infinitua zehazten ere.



8.8. Irudia: E33B errorea irudikatzen dituen ariketa. Ikasleak **8,65** atera zuen.

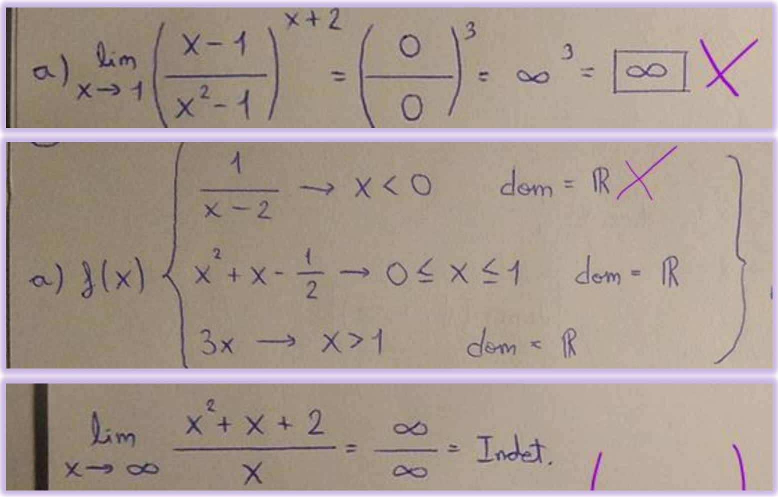
Hala ere, definizio eremuaren emaitzak argi eta garbi adierazten du $x = 2$ puntuan eten bat dagoela. Hemen, izenak eta kontzeptuen deskonfigurazia dira nahasteak sortzen dituztenak: ikasle honek uste du, jarraitutasuna aztertzea, soilik zatika definitutako mugak aztertzea dela (kasu honetan, $x = 0$), eta jarraitutasuna aztertzean ematen den emaitza eten mota denez, $x = 0$-n jauzi infinitua adierazten du; aldiz, asintotak aztertzea, definizio eremuaren barruan sartzen diren, zero egiten dituzten izendatzaileen puntuak aztertzea dela uste du (kasu honetan, $x = 2$), eta asintotak aztertzean ematen den emaitza asintotak berak direnez, $x = 2$-n asintota bertikala adierazten du. Ikasle honek badaki $x = 2$-n jauzi infinitua dagoela, baina ariketaren enuntziatuak jarraitutasuna aztertzea eskatzen badio, bakarrik muga aztertzea eskatzen ari zaiola interpretatuko du. Pertsonalki galdetu nion (ahoz) ea $x = 2$ puntuan etenik bazegoen, eta honakoa erantzun zidan: “Bai, asintota bertikala dago.” Ikasle honek ez dauka arazorik kualitatiboki bere hitzetan funtzioaren portaera deskribatzeko; aldiz, kontzeptuak errigorez izendatzeko, bai.

Hala ere, ariketa honetan oso antolakuntza ona egin zuten ikasleak egon ziren ere, nire aurreikuspenaren kontrara (Ikusi, 8.9. Irudia).

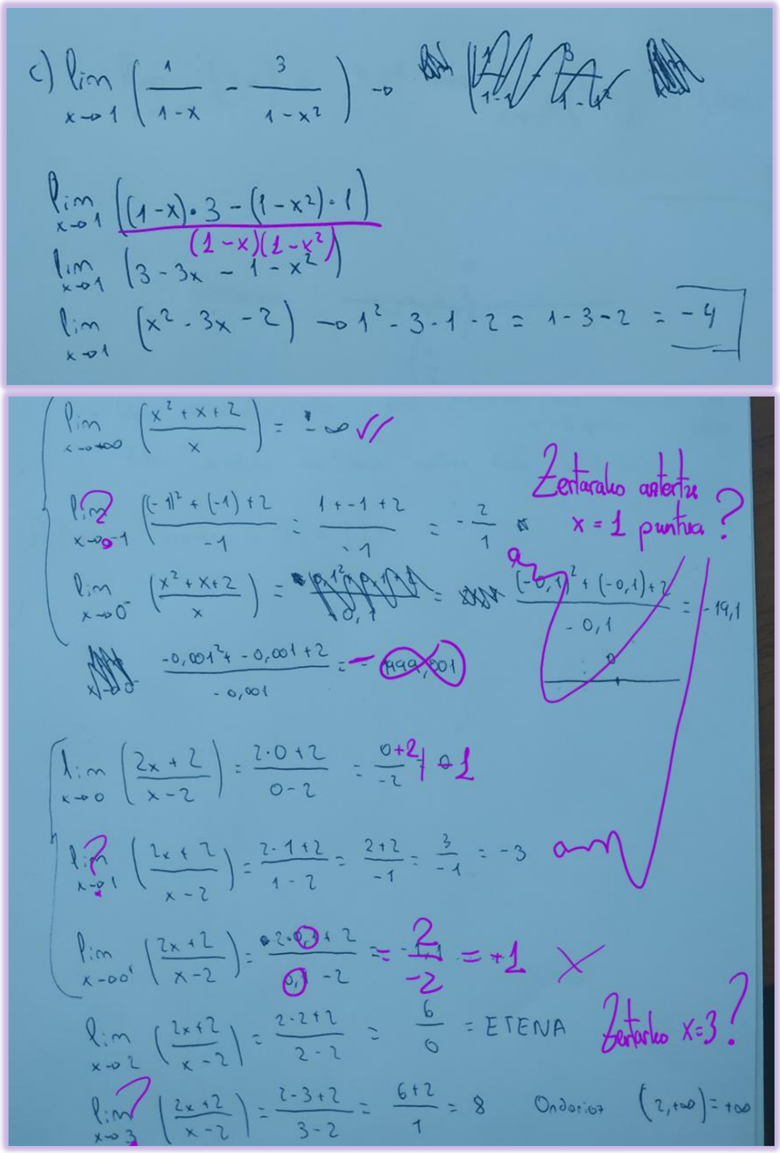


8.9. Irudia: 3. ariketa ebazteko egitura ordenatua aurkezten duen ariketa. Hala ere E32z errorea egiten du. Ikasleak **8,6** atera zuen.

Ikusten denez, ariketa bakoitzaren irudiaren azpitituluan, ikasle bakoitzaren nota agertzen da, eta orokorrean, errore hauek egin dituzten ikasleen nota ez da oso baxua, beraz ikasle-taldeko edozein mailatan eman daitezkeen erroreak dira. Aurkeztuko diren azkeneko erroreak, limiteen gaian benetako nahasteak (oso larriak) adierazten dituzten kasuak dira. Izatez, ezer gutxi dago komentatzeko, izan ere gaia oso gordin duten erantzunak dira, eta kontzeptuen galerak edozein lekutatik datoz. Ikasle hauen kasuan,



8.10. Irudia: galera handiak dituen ikasle baten ariketak. Ikasleak **3,55** atera zuen.



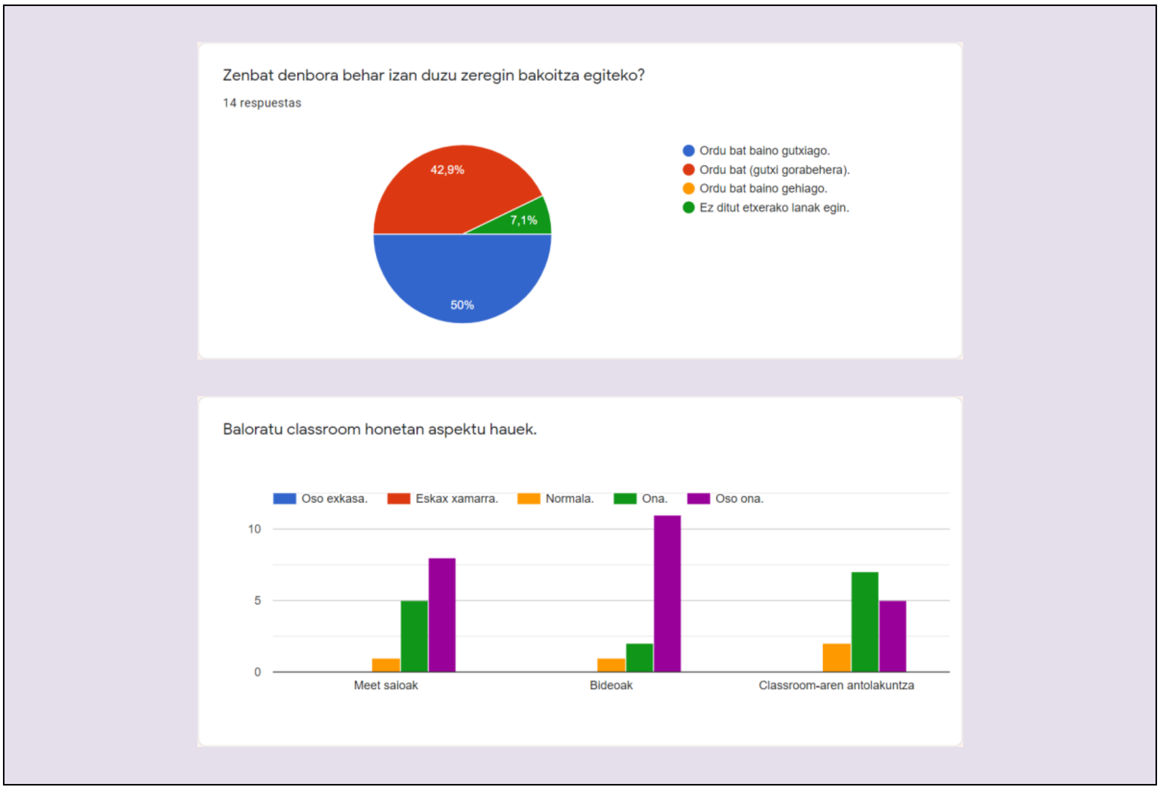
8.11. Irudia: galera handiak dituen ikasle baten ariketak. Ikasleak **2,75** atera zuen.

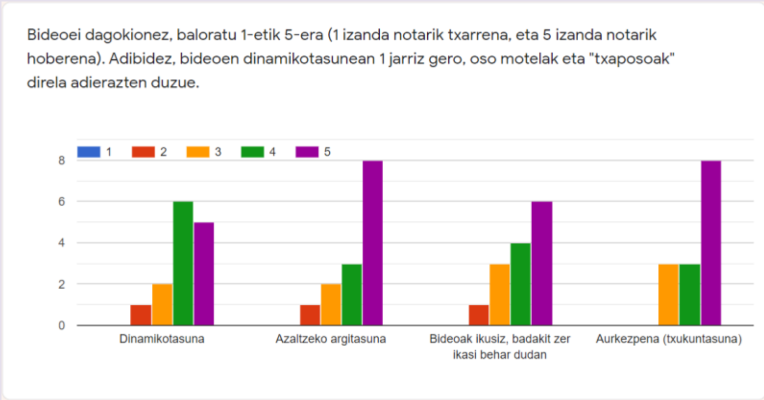
ez zuten azterketa gainditzea lortu eta ez-ohiko deialdira arte ez zuten *Matematika I* ikasgaia aprobatzea lortu. Adibide batzuk, 8.10. eta 8.11. Irudietan biltzen dira.

Azkenik aipatzea, azterketa egin zuten 25 ikasleetaik, 18k gainditu zutela.

8.4.3. IKASGAIAREN EBALUAZIO INKESTA

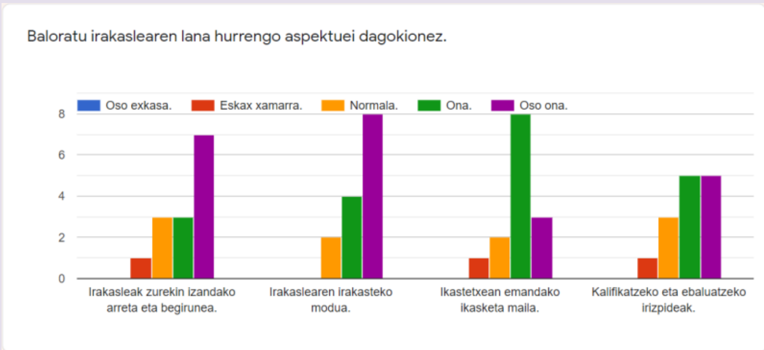
Inkesta, 8.2.3. azpiatalean aurkeztu den bezala, Google Forms formatukoa zen, beraz erantzunak modu ordenatu batean agertzen dira zuzenean. Esan beharra dago, inkesta betetzea aukerakoa zela eta 27 ikasletik 14k bete zutela bakarrik. Bidalitako eguna, hirugarren ebaluazioko azterketako notak eman eta lau egun pasa ondoren izan zen. Dagoeneko aprobatuta zuten ikasle askok, hezkuntzako aferak bukatutzat emanda, alde batera utzita zituzten; modu berean, aprobatu ez zuten ikasle askok, ohiko (edo ez-ohiko) deialdia prestatzen ari ziren, beraz ez zioten lehentasunik ematen aukerakoa den zeregin bati. Dena den 27tik 14 ikasle parte hartu izateak, ondorio sendoak ateratzeko nahikoa ez den arren, kontuan hartzeko adina erantzun biltzen ditu. Hona hemen:

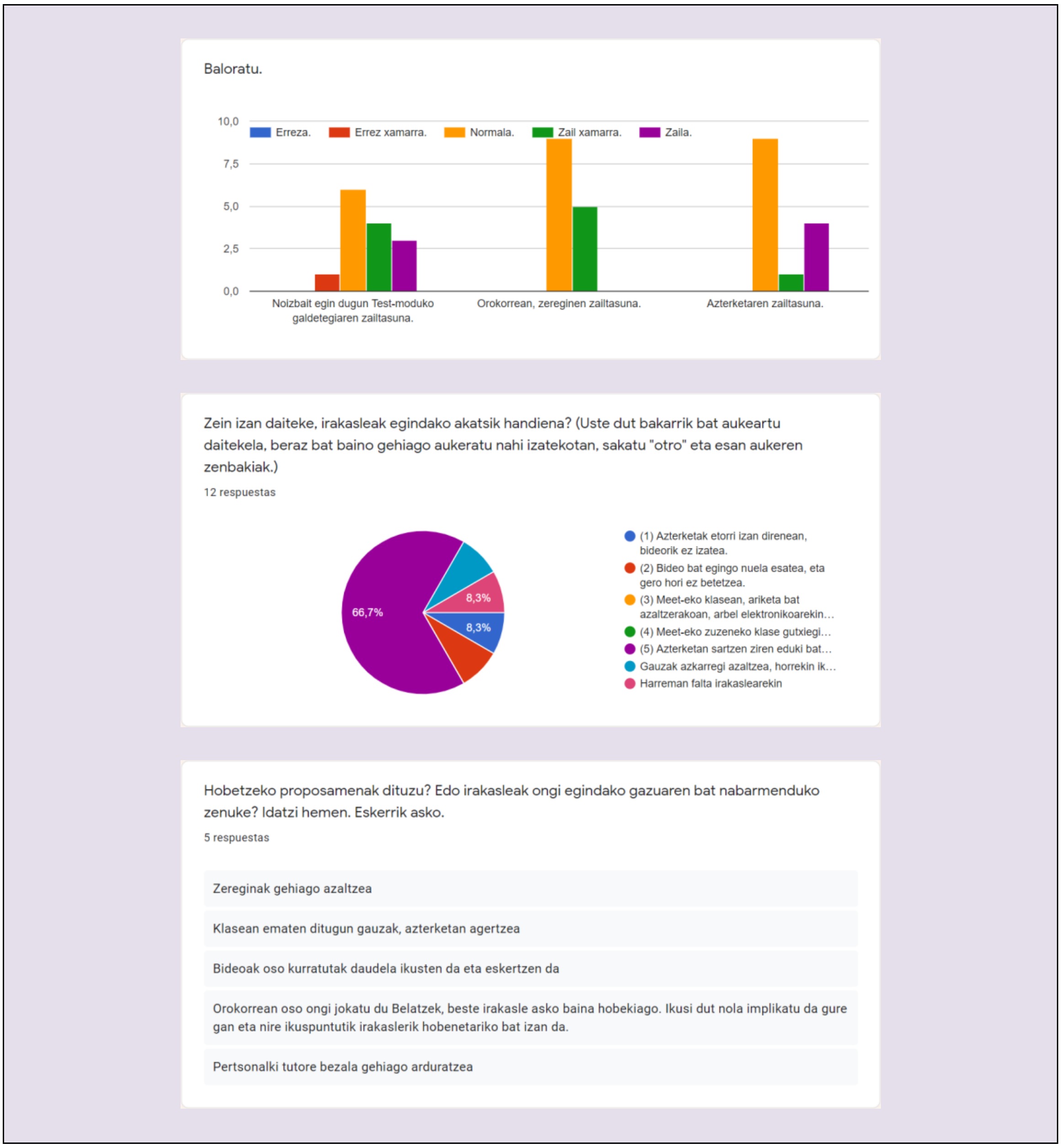



Bideoei dagokionez, baloratu 1-etik 5-era (1 izanda notarik txarrena, eta 5 izanda notarik hoberena). Adibidez, bideoen dinamikotasunean 1 jarriz gero, oso motelak eta "txaposoak" direla adierazten duzue.
1
2
3
4
5
8
6
4
2
0
Dinamikotasuna
Azaltzeko argitasuna
Bideoak ikusiz, badakit zer ikasi behar dudan
Aurkezpena (txukuntasuna)


Bideoei dagokionez, baloratu luzera.
14 respuestas
100%
Oso motzak.
Motz xamarrak.
Egokiak.
Luze xamarrak.
Oso luzeak.


Lan zama doitzen joan dela uste duzu?
14 respuestas
21,4%
78,6%
Bai.
Ez.


Baloratu irakaslearen lana hurrengo aspektuei dagokionez.
Oso exkasa.
Eskax xamarra.
Normala.
Ona.
Oso ona.
8
6
4
2
0
Irakasleak zurekin izandako arreta eta begirunea.
Irakaslearen irakasteko modua.
Ikastetxean emandako ikasketa maila.
Kalifikatzeko eta ebaluatzeko irizpideak.



Orokorrean balorazioak onak direla ikus daiteke, batez ere irakaskuntza-ikaskuntza ez-presentziala eragiteko estrategiarekin (Classrooma eta bideoak), eta horrela adierazten dute 2, 3 eta 4. galderetako emaitzek, azkeneko galderako iruzkin batekin batera (hirugarrena).

Azterketako eta zereginetako ariketen zailtasuna nahiko handia iruditu zaiela ere ikusten da, horrela adierazten baitute 7. galderako emaitzek; eta horren harira, aurreko azpiatalean komentatu diren hitzarmen hausturaren indikatzaile izan daitekeen iruzkin bat dago amaierako galderan (lehenengoa).

Inplikazioari buruz, orokorrean balorazioa ona dela ikusten da ere, hala agertzen baita 6. galderako emaitzetan, nahiz eta azkeneko galderetan, bi iruzkin kontrajarrita dauden (azken-aurrekoa eta azkena).

Irakasle bezala gehien kritikatutako akatsa, honakoa da: “Azterketan sartzen diren eduki batzuk, azken momentuan korrika eta presaka esplikatzea.” Hau zuzenean heldu daiteke, 8.3.3. azpiatalean azaldutakoarekin, hau da, edukien sakontasun falta. Esan beharra dago, egindako akatsik okerrenetako galderan (zortzigarrenean), 12 erantzunetatik 10, nik neuk aurreikusitakoak direla, beraz alde horretatik ongi dago jakitea neure akatsen kontziente naizela orokorrean.

8.5. Emaitzen eztabaida

Kapituluaren azken atal honetan, ikasle-taldeak lan honetan aurkeztu den irakaskuntza-ikaskuntza prozesuarekiko izan duen erantzuna ebaluatuko da.

Aurretik esan den bezala, jarrera aldetik ez zen inolako arazorik egon eta batxilergoko ikasleak izanik, askoren heldutasun maila nabaria zen dagoeneko. Hala ere, autonomia aldetik, ikasle asko ez zegoen erabat ez-presentziala den ikasketa prozesu bati aurre egiteko prest (logikoa den moduan). Gogoratu behar da, lan honetan planteatutako estrategia aurrera eramatean erabateko arrakasta izateko, ikasleen autonomia erabatekoa izan behar dela ere; nire partetik, ikasle guztiak arduratsuak izango zirela onartu nuen, eta hala aitortu nien konfinamendu hasieratik (beste ikasgaietan askoz kontrol handiagoa zuten, batez ere, Meeteko derrigorrezko klaseetan eta zereginen epeetan). Estrategia ireki honen aurrean, ikasleak oso modu normatiboan erantzun zuten arren, ikasleengan apur bat kontrol handiagoa izatea, ez litzateke gehiegizkoa izanen ere, kasu batzuetan beharrezkoa ez zen arren, besteetan bai. Adibidez, nik ikasle moduan zeregin bat entregatu ondoren, irakasleak igotako zuzenketarekin konparatzea litzateke arduratsuena, nire akatsak identifikatzeko edo zeregina ongi egin dudala berresteko. Ez baldin badut zuzenketa begiratzen, ezingo dut jakin zeintzuk diren nire akatsak, eta beraz, ez ditut inoiz konponduko. Hau egitea edo ez, ikasle bakoitzaren ardura zen, baina nik irakasle moduan zehaztutako estrategian, ez zen derrigorrezkoa; kontrol falta hau, lanerako ohitura eskasa zuten ikasle bat baino gehiagorentzat, ez zen mesedegarria izan.

Bestetik, azterketa globaleko emaitzei erreparatuz (18 gainditu 25 aurkeztutik), funtzioen gaia ongi ulertu zela esatea ez litzateke benetan egia izanen. Limiteen ebazpena eta zatikako funtzioen azterketa (definizio eremua, asintotak, jarraitutasuna…) mekanizaziora asko gerturatzen den prozedura izan daiteke, eta azterketako ariketak nahiko estandarrak izanik, ez dago ikaskuntza esanguratsu baten adierazgarri argirik ere. Ikasle batek, ariketa hauek egiteko metodo mekaniko bat erabili zezakeen, eta azterketa gainditu deus ere ulertu gabe (esan beharra dago, ariketa batzuk mekanizazio hau ekiditea bilatzen zutela, bereziagoak diren kasuak ipiniz, adibidez, hirugarren ariketako $x = 0$-ko jauzi infinitua), Hori dela eta, kritikoki jokatuz gero, kalifikazioak ikusita ezin da jakin zein puntura arte egon den benetako ikaskuntza bat ikasleengan.

Metodologiari dagokionez, bideoen bidezko irakaskuntzaren estrategia modu onean baloratzen dutela ikustea, kontuan hartzeko afera da. Alderdi honetatik, irakasle bezala egindako hainbat akats nabarmentzen badiren arren, metodologia ongi baloratzen dute ikasleek. Hau ulertzekoa da, izan ere, azalpen magistralak gelatik kanpo uztea eta bideoen bidez emateak dituen abantailak zuzenekoak dira ikasle bezala: ez dituzu gauzak azkar kopiatu behar arbela ezabatuko den beldurrez; askotan, kopiatzen ari bazara ez zara gai azalpena ulertzeko; kanpoko elementu batekin despistatuz gero, bideoa atzera bota dezakezu azalpena berriz entzuteko; azalpena entzun eta egunak pasatu ahala ahazten baduzu, bideoa berriz ikusteko aukera duzu, eta abar (abantaila hauek ez dira 7.1. atalean komentatu, izan ere, ez dira berez *flipped classroom* metodologiaren berezkoak, baizik eta azalpen magistral bat bideoetara trasladatzearen ondorioak). Abantaila horiek guztiak, klase magistral arrunt eta tradizional batekin alderatuta, aldaketa handiak izan daitezkeen arren, haratago joan gaitezke, izan ere, bideoen estrategia baliagarria dela ikusten den arren, ikaskuntza esanguratsu eta sakona gertatzeko erdizkako bidean geratzen da, eta guztiz osoa izateko, irakaslearen zuzeneko presentzia inplikatzen duten dinamikekin konbinatzea litzateke egokiena (hau da, benetako *flipped classroom* estrategia bat gauzatzea).

Azkenik, ebaluazioko kalifikazioei dagokionez, ikasleen gehiengoen notek gora egin zuten hirugarren ebaluazioan zehar (ebaluazio honetan liburuko *8. GAIA: Funtzioak* eta *9. GAIA: Funtzio baten limitea* sartzen ziren soilik). Hau ez da bat ere adierazgarria kontuan hartzen badugu koronabirusaren pandemiaren egoera, noten igoera zentro (eta lurralde) mailan gertatutako fenomenoa izan baitzen. Lan honetan planteatutako metodologiarekin eta irakaskuntza-ikaskuntza prozesuarekin zerikusia izatekotan, esperimentazioaren lagina den zientzietako nire taldean, beste taldeetan baino kalifikazio nabarmenki hobeak egongo lirateke, eta hori ez zen horrela gertatu; zientzietako hiru taldeetan kalifikazioak eta gainditu/suspentso kopuruak erabat antzekoak izan ziren (hiru irakasle ezberdin izanik), beraz, metodologia baliagarria izan daitekeen arren, ezin da esan aparteko arrakastarik izan duela ikasleengan.

Sintesia, ondorioak eta erantzun gabeko galderak

Funtzioen limiteak eta jarraitutasuna, zientzietako batxilergoko 1. mailako funtzioen edukirik garrantzitsuenetakoa (edo garrantzitsuena agian) dela argi geratzen da lan honetan. Nafarroako Foru Komunitateko curriculumak DBH-ko lau urteetan zehar prestatzen du bidea, funtzioak urtetik urtera, modu progresiboan tratatuz, zientzietako batxilergoan modu zuzenean eta erabateko abstrakzio mailan eragiteko. Hala izanik, funtzio baten limite kontzeptua menperatzea da kurtsoaren helburu nagusietako bat (deribatua kontzeptua menperatzearekin batera), curriculumeko ANALISIAK blokeari dagokionez. Helburu hauek gauzatzeko, Iturrama BHI institutuan erabiltzen den testuliburua egokia ikusten den arren, apur bat abstraktuegia geratzen da, testuinguru errealik ez baitu jardueraetan planteatzen. Alde horretatik, matematika eta errealitatearen arteko erlazioaren haustura erabatekoa da, eta nahiz eta zientzietako batxilergoan ikasleak objektu matematiko abstraktuak menperatzeko prestatu behar diren, errealitatearekin duten lotura ere ikusarazi behar zaie, jakin baitakigu, testuingurua duen ikaskuntza batek, hobeto asimilatzeko probabilitate handiagoa duela.

Irakaskuntza-ikaskuntza prozesuari dagokionez, lan honetarako espreski prestaturiko esperimentazioa garatu baino, 2020ko COVID-19-aren pandemiaren testuinguruan gauzatutako irakaskuntza-ikaskuntza ez-presentzialaraen esperientzia deskribatzea eta ebaluatzea da lan honen helburua nagusia, interes propioa duen oso egoera apartekoa aurkezten baitu. Emaitzen eztabaidan esan den moduan, lan honetan aurkeztutako metodologia bide erdian geratzen den arren, konfinamenduaren testuinguruan kokatzen badugu, ikasleentzako mesedegarria izan zela esan daiteke. Argi dago, irakaskuntza metodo tradizionaletik (klase magistraletatik) apur bat aldenduz gero, aurki ditzakegun abantailak anitzak eta zuzenekoak direla; eta lan honetan aurkeztu den esperientziak, ikasleengan ikaskuntza esanguratsu eta integratua gauzatzea lortzen ez duen arren, konfinamendu-egoeragatik oso baldintzatuta dagoela argi dago ere. Irakaskuntza-ikaskuntza prozesu ez-presentziala aurrera eramatea, gizartearen ia-ia estamentu guztiak modu batean edo bestean inplikatu dituen erronka izan da (eta jarraituko du izaten), eta bete-betan harrapatu ditu hezkuntza komunitateko irakasle, zentro eta bereziki, ikasleak ere. Lan honek planteatutako estrategia, erabat arrakastatsua izatetik urrun badagoen arren, elementu egokiak hartzen ditu, eta horiekin bide egokia eraikitzea posible dela iragarri daiteke.

Erreferentziak

Nafarroako Gobernua (2015) *24/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa Nafarroako Foru Komunitatean Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako irakaskuntzaren curriculuma ezartzen duena*. Nafarroako Aldizkari Ofiziala (NAO) 127, 2015ko uztailaren 2koa.

Nafarroako Gobernua (2015) *25/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa Nafarroako Foru Komunitatean Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako irakaskuntzaren curriculuma ezartzen duena*. Nafarroako Aldizkari Ofiziala (NAO) 127, 2015ko uztailaren 2koa.

Colera J . eta Gaztelu I. (2008). *Matematika 2.* Ariz-Basauri (Bizkaia): Anaya Haritza
ISBN: 978-84-667-7082-8

Gomez, M., Abril, R., Garcia, X. eta Urzelai, A. (2016). *DBH 3 Eki Matematika*. Donostia (Gipuzkoa): Ikaselkar, Eki Proiektua.
ISBN: 978-84-16438-24-2

Gámez, J. C., Gaztelu, A. M., Loysele, F., Marín, S., Nieto, V. eta Sánchez, L. (2016). *Matematika Akademikoa DBH 4 Ebatzi Saila*. Etxebarri (Bizkaia): Zubia Santillana, Egiten Jakin.
ISBN: 978-84-9108-162-3

De la Prida, C., Gaztelu, A. M., González, A., Lorenzo, J., Pérez, C. eta Sánchez, D. (2015). *Matematika I Ebatzi Saila*. Etxebarri (Bizkaia): Zubia Santillana, Egiten Jakin.
ISBN: 978-84-9894-904-9

Gámez, J. C., Marín, S., Martín, A., Pérez, C. eta Sánchez, D. (2015). *Matematika II Ebatzi Saila*. Etxebarri (Bizkaia): Zubia Santillana, Egiten Jakin.
ISBN: 978-84-9108-494- 5

Godino, J. D., Font, V. eta Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Relime Número, Especial*, 131-155

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., Wilhemi, M. R. (2014). Niveles de algebraización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*. 32.1, 131-155. doi: 10.5565/rev/ensciencias.965

Wilhelmi, M. R. (2009). *Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico*. Lima: C. Gaita, 2009, Enseñanza de las Matemáticas: IV Coloquio internacional (1-22 or.).

Calvillo, A. J. (2015). *Los 4 pilares y los 11 indicadores del Flipped Learnging*. Berreskuratuta: https://www.musikawa.es/media/los-4-pilares-y-los-11-indicadores-del-flipped-learning-autoevaluate-flippedkawa-flippedclassroom/

7 Unique Fipped Classroom Models. (2019ko ekainaren 4a). Berreskuratuta: https://www.panopto.com/blog/7-unique-flipped-classroom-models-right/

La innovación educativa - What is the flipped Classroom. Berreskuratuta: https://www.theflippedclassroom.es/what-is-innovacion-educativa/

Eranskinak

A. Testu-liburuko Unitate Didaktikoa
B. Zereginetan bidalitako ariketak
C. Azterketa prestatzeko materiala
D. Azterketa globala
E. Bideoak

A. Testu-liburuko Unitate Didaktikoa

9

Funtzio baten limitea

EDUKIAK

- Segidak. Segida baten limitea
- Eragiketak limiteekin
- Indeterminazioak
- Funtzioen limiteak
- Adar infinituak. Asintotak
- Jarraitutasuna. Jarraitutasun motak

Milurteko-aldaketak bereziak izaten dira. 1000. urtea baino pixka bat lehenago, lehen milurtekotik bigarrenera pasatzean, zoritxar-iragarleek, profetek eta igarleek munduaren berehalako amaiera iragartzen zuten moduan, 2000. urteko milurteko-aldaketa ere polemikoa izan zen. Munduaren amaiera iragartzen zuten pertsonaiez gain, milurteko-aldaketak ordenagailuetan kataklismoa ekarriko zutela zioten profeta informatikoak ere agertu ziren.

Bankuen datu-zentroak, hornidura elektrikoa, gasa, ura, aireportuetako zerbitzuak… kontrolatzeko ordenagailu handietan eromenezko martxan egin behar izan zuten lan 1999. urtean, komunikabideek *2000 efektua* izendatu zutenari aurre egiteko. 2000. urtea bigarren milurtekoko azken urtea edo hirugarren milurteko lehenengo urtea izan zen?

Urte jakin bat badugu…

Zer mendetakoa da?

223

1 Segidak. Segida baten limitea

Kontuan hartu

Segida bat n zenbaki arrunt bakoitzari a_n zenbaki erreal bat egokitzen dion funtziotzat har daiteke.

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ 1 \longrightarrow a_1 \\ 2 \longrightarrow a_2 \\ \quad \ldots \\ n \longrightarrow a_n \end{array}$$

1.1. Segidak

Segida bat zenbakitu daitezkeen zenbaki errealen multzo bat da:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots \qquad \text{non } n \in \mathbb{N}$$

Segida osatzen duten elementuetako bakoitzari segidako **gai** deritzo.

Segida baten **gai orokorra** segidako edozein gai kalkulatzeko aukera ematen duen adierazpen aljebraikoa da, zenbatgarren (n) gaia den kontuan hartuta. Honela adierazten da: a_n.

ADIBIDEAK

1 Segida hau dugu: 2, 4, 6, 8, 10, 12, …

a) Kalkulatu a_1, a_4 eta a_6 gaiak.

b) Kalkulatu gai orokorra.

c) Idatzi a_{10} eta a_{62} gaiak.

a) $a_1 \rightarrow$ Segidako lehen gaia da: $a_1 = 2$

$a_4 \rightarrow$ Segidako laugarren gaia da: $a_4 = 8$

$a_6 \rightarrow$ Segidako seigarren gaia da: $a_6 = 12$

b)
$$\begin{array}{cccccccl} 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & \ldots & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 2\cdot 1, & 2\cdot 2, & 2\cdot 3, & 2\cdot 4, & 2\cdot 5, & 2\cdot 6, & \ldots & \rightarrow \text{Gai bakoitza segidan duen posizioaren bikoitza da.} \end{array}$$

Segidako gai orokorra $a_n = 2n$ da, non n gaiak segida horretan duen posizioa den.

c) $a_n = 2n \xrightarrow{n=10} a_{10} = 2 \cdot 10 = 20 \qquad a_n = 2n \xrightarrow{n=62} a_{62} = 2 \cdot 62 = 124$

2 Segida baten gai orokorra $a_n = \dfrac{n^2-2}{n+4}$ da. Kalkulatu gai hauek: a_1, a_2, a_{18}, $a_{1.000}$.

$$a_n = \frac{n^2-2}{n+4} \xrightarrow{n=1} a_1 = \frac{1^2-2}{1+4} = -\frac{1}{5}$$

$$a_n = \frac{n^2-2}{n+4} \xrightarrow{n=2} a_2 = \frac{2^2-2}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{n^2-2}{n+4} \xrightarrow{n=18} a_{18} = \frac{18^2-2}{18+4} = \frac{322}{22} = \frac{161}{11}$$

$$a_n = \frac{n^2-2}{n+4} \xrightarrow{n=1.000} a_{1.000} = \frac{1.000^2-2}{1.000+4} = \frac{999.998}{1.004} = \frac{499.999}{502}$$

JARDUERAK

1. Kalkulatu gai orokor hau duen segidako a_{100}, a_{101} eta a_{102} gaiak:

$$a_n = \frac{n-2}{n^2}$$

2. Kalkulatu segida bakoitzaren gai orokorra.

a) 1, 3, 5, 7, …

b) $\frac{3}{5}, \frac{7}{15}, \frac{11}{45}, \ldots$

c) 0, 2, 6, 12, 20, …

d) $\frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{-3}{16}, \ldots$

224

1.2. Segida monotonoak eta bornatuak

Segida baten gai bakoitza aurrekoa baino handiagoa bada, hau da:

$$a_n < a_{n+1},\ n \text{ guztietarako,}$$

esaten dugu segida **monotono gorakorra** dela.

$a_n > a_{n+1}$ betetzen bada n guztietarako, segida **monotono beherakorra** da.

Segida baten gai guztiak zenbaki jakin bat baino txikiagoak eta beste bat baino handiagoak badira, segida **bornatuta** dagoela esaten da.

Ez ahaztu

Baldin $a_n < k$, n guztietarako eta k baterako, segida **goitik bornatuta** dago.

Baldin $a_n > l$, n guztietarako eta l baterako, segida **behetik bornatuta** dago.

ADIBIDEA

3 Aztertu segida bakoitzaren monotonia eta bornapena.

a) $a_n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \rightarrow$ Monotono gorakorra eta behetik bornatua.

b) $a_n = (-1)^n \longrightarrow -1, 1, -1, 1, \ldots \rightarrow$ Ez-monotonoa eta bornatua.

1.3. Segida baten limitea

a_n gai orokorra duen zenbaki errealen segida baten **limitea** a zenbaki erreal bat da, baldin n-k oso balio handiak hartzen dituenean, segidan dagozkion gaiak zenbaki horretara hurbiltzen badira.

Honela idazten da: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Honela irakurtzen da: «a_n segidaren limitea, n infinitura doanean, a da».

Ez ahaztu

Segida baten limitea, existitzen bada, bakarra da.

ADIBIDEA

4 Kalkulatu segida bakoitzaren limitea.

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ **b)** $a_n = n^2$ **c)** $a_n = (-2)^n$

a) $a_n = \dfrac{1}{n} \rightarrow \dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{100}, \ldots, \dfrac{1}{1.000}, \ldots \rightarrow 1;\ 0{,}5;\ 0{,}\widehat{3};\ \ldots;\ 0{,}01;\ \ldots;\ 0{,}001;\ \ldots$

Segidako gaiak 0ra hurbiltzen dira $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

b) $a_n = n^2 \rightarrow 1^2, 2^2, 3^3, 4^2, \ldots, 100^2, \ldots, 1.000^2, \ldots \rightarrow$
$\rightarrow 1, 4, 9, 16, \ldots, 10.000, \ldots, 1.000.000, \ldots$

Segida etengabe hazten da $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

c) $a_n = (-2)^n \rightarrow (-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5, \ldots \rightarrow -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

Posizio bikoitietan dauden gaiak positiboak dira, eta posizio bakoitietan daudenak, negatiboak. Ezin dugu zehaztu zer baliotara hurbiltzen den segida n oso handia denean. Beraz, a_n-k ez du limiterik.

JARDUERAK

3. Kalkulagailua erabiliz, kalkulatu segida bakoitzaren limitea.

a) $a_n = (-1)^{2n+4}$ c) $a_n = n^2 - n^3$ e) $a_n = \dfrac{n+3}{n}$

b) $a_n = n^2$ d) $a_n = 0{,}2^n$ f) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 7$

4. Idatzi adierazitako balioak limitetzat dituzten segidak.

a) 0 d) 4 g) Limiterik gabea.

b) $+\infty$ e) -3 h) a zenbaki bat.

c) $-\infty$ f) 0,5 i) a^2

2 Limiteak kalkulatzea

2.1. Berreketen limiteak

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} +\infty & \text{Baldin } k > 0 \\ 1 & \text{Baldin } k = 0 \\ 0 & \text{Baldin } k < 0 \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} k^n = \begin{cases} +\infty & \text{Baldin } k > 1 \\ 0 & \text{Baldin } -1 < k < 1 \\ \text{Ez da existitzen} & \text{Baldin } k < -1 \end{cases}$$

ADIBIDEA

5 Kalkulatu limiteak.

a) $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$; izan ere, $2 > 0$.

b) $\lim_{n\to\infty} n^{-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} (-2)^n \to$ Ez da existitzen; $-2 < 0$ da.

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, $0 < \frac{1}{2} < 1$ delako.

2.2. Polinomio baten limitea

$$\lim_{n\to\infty} (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0) = \lim_{n\to\infty} a_k n^k = a_k \cdot \lim_{n\to\infty} n^k$$

Ez ahaztu

$$k \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{Baldin } k > 0 \\ -\infty & \text{Baldin } k < 0 \end{cases}$$

$$k \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{Baldin } k > 0 \\ +\infty & \text{Baldin } k < 0 \end{cases}$$

ADIBIDEA

6 Kalkulatu limiteak.

a) $\lim_{n\to\infty} (3n^2 - 5n + 3) = \lim_{n\to\infty} 3n^2 = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} n^2 = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} (-2n^2 - 5n + 3) = \lim_{n\to\infty} (-2n^2) = (-2) \cdot \lim_{n\to\infty} n^2 = (-2) \cdot (+\infty) = -\infty$

2.3. Polinomioen arteko zatiketaren limitea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \ldots + b_1 n + b_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{b_p n^p} = \begin{cases} 0 & \text{Baldin } k < p \\ \frac{a_k}{b_p} & \text{Baldin} k = p \\ \pm\infty & \text{Baldin } k > p \end{cases}$$

Kontuan hartu

Baldin $k > p$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{b_p n^p} = +\infty$ Baldin $\frac{a_k}{b_p} > 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{b_p n^p} = -\infty$ Baldin $\frac{a_k}{b_p} < 0$

ADIBIDEA

7 Kalkulatu limiteak.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 3}{4n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{4n} = +\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 3}{-4n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{-4n} = -\infty$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n - 4}{4n^2 - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n^2} = 0$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 3}{-4n^2 - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{-4n^2} = -\frac{3}{4}$

JARDUERAK

5. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}n^2 - 2n + 7\right)$

c) $\lim_{n\to\infty} n^3$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

6. Kalkulatu gai orokor hauek dituzten segiden limiteak:

a) $\frac{8n}{2n^2 + 3n - 1}$

b) $\frac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}}$

226

3 Eragiketak limiteekin

a_n eta b_n zenbaki errealen bi segida badira eta haien limiteak existitzen badira, hau betetzen da beti:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \log_b a_n = \log_b \lim\limits_{n\to\infty} a_n \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

ADIBIDEA

8 Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{2n}+\dfrac{3n^2}{n^2-3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{2n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=\dfrac{4}{2}+\dfrac{3}{1}=5$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^3-1}{7n}\cdot\dfrac{n^2}{3n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-1}{7n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2+1}=(+\infty)\cdot\dfrac{1}{3}=+\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n}-\sqrt{\dfrac{9n^2}{n^2+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}-\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{9n^2}{n^2+1}}=0-\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^2}{n^2+1}}=$

$=-\sqrt{\dfrac{9}{1}}=-3$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_2\left(\dfrac{4n^2-1}{2n^2}\right)^3=\lim\limits_{n\to\infty}3\log_2\dfrac{4n^2-1}{2n^2}=3\lim\limits_{n\to\infty}\log_2\dfrac{4n^2-1}{2n^2}=3\log_2 2=3$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{n^2+3}{2n^2}=\ln\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3}{2n^2}=\ln\dfrac{1}{2}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3-1}{3n^3}\right)^{n^2}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-1}{3n^3}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty}=0$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}9^{\frac{n^2+1}{2n^2}}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}9\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}}=9^{\frac{1}{2}}-\sqrt{9}=3$

Ez ahaztu

$$k^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & \text{Baldin } k>1\\ 0 & \text{Baldin } -1<k<1\\ \text{Ez du} & \text{Baldin } k\le -1\end{cases}$$

$$k^{-\infty}=\begin{cases}0 & \text{Baldin } k>1\\ +\infty & \text{Baldin } 0<k<1\\ \text{Ez du} & \text{Baldin } -1\le k\le 0\\ 0 & \text{Baldin } k<-1\end{cases}$$

JARDUERAK

7. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^5-n^2}{2n^6+1}-\dfrac{3n^2-1}{n^2+1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-1}{n^3}\cdot\dfrac{4n^4}{2n^4+3}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{n^2+7}{2n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{3n^2+1}{n^2+n+2}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}-\dfrac{n-1}{n+1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3(1-n)}{2n^4-n-1}+\dfrac{4}{n^2}\right)$

8. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+1}{2n^4+1}+\dfrac{-n^3}{3n^3+n+1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{2n^3+1}{2n^3+n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{2}{n}\right)\dfrac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}9^{\frac{2n^2-1}{n^2+1}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}0{,}1^{\frac{n+1}{n^2}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}$

4 Indeterminazioak

Kasu batzuetan, limiteak kalkulatzean, lortzen dugun adierazpenaren bidez ezin dugu jakin limitea existitzen den eta zer balio duen, edo ez den existitzen. Adierazpen horiei **indeterminazio** deritzegu.

Indeterminazio motak

Zenbait indeterminazio mota bereizten dira.

- **$\infty - \infty$ motako indeterminazioak.**

  $(+\infty)-(+\infty)$ $\quad (-\infty)-(-\infty)$ $\quad (-\infty)+(+\infty)$ $\quad (+\infty)+(-\infty)$

- **$0 \cdot \infty$ motako indeterminazioak.**

  $0\cdot(+\infty)$ $\quad 0\cdot(-\infty)$ $\quad (+\infty)\cdot 0$ $\quad (-\infty)\cdot 0$

- **$\frac{0}{0}$ eta $\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioak.**

  $\frac{0}{0}$ $\quad \frac{+\infty}{+\infty}$ $\quad \frac{+\infty}{-\infty}$ $\quad \frac{-\infty}{+\infty}$ $\quad \frac{-\infty}{-\infty}$

- **1^{∞}, ∞^0 eta 0^0 motako indeterminazioak.**

  $1^{+\infty}$ $\quad 1^{-\infty}$ $\quad (+\infty)^0$ $\quad (-\infty)^0$ $\quad 0^0$

ADIBIDEA

9 Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n}+\frac{1-2n^3}{n^2+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n^3}{n^2+2}$
$=(+\infty)+(-\infty)\rightarrow$ Indeterminazioa

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n(2n+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}(2n+1)=0\cdot(+\infty)\rightarrow$ Indeterminazioa

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=0\cdot 2=0$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{n}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty}2^n}{\lim_{n\to\infty}n}=\frac{+\infty}{+\infty}\rightarrow$ Indeterminazioa

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\lim_{n\to\infty}n}=1^{\infty}\rightarrow$ Indeterminazioa

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2+1}{n}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=(-\infty)^0\rightarrow$ Indeterminazioa

g) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}}=(+\infty)^2=+\infty$

Ez ahaztu

Ez dira indeterminazioak:

Batuketa infiniturekin

$k+\infty=\infty \qquad \infty+\infty=\infty$

Biderketa infiniturekin $k\neq 0$

$k\cdot\infty=\infty \qquad \infty\cdot\infty=\infty$

Zatiketa infiniturekin

$\frac{\infty}{k}=\infty \qquad \frac{k}{\infty}=0$

Zatiketa zerorekin, $k\neq 0$

$\frac{0}{k}=0 \qquad \frac{k}{0}=\infty$

Zatiketa zero eta infiniturekin

$\frac{0}{\infty}=0 \qquad \frac{\infty}{0}=\infty$

Berreketak infiniturekin

$k^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & \text{Baldin } k>1\\ 0 & \text{Baldin } -1<k<1\\ \text{Ez du} & \text{Baldin } k<-1\end{cases}$

$\infty^k=\begin{cases}\infty & \text{Baldin } k>0\\ 0 & \text{Baldin } k<0\end{cases}$

$\infty^{\infty}=\infty$

Berreketak zerorekin $k\neq 0$

$k^0=1$

$0^k=\begin{cases}0 & \text{Baldin } k>0\\ \infty & \text{Baldin } k<0\end{cases}$

Berreketak zero eta infiniturekin

$0^{\infty}=0$

Erroketak infiniturekin

$\sqrt[k]{\infty}=\infty$

$\sqrt[k]{-\infty}=\begin{cases}-\infty & \text{Baldin } k \text{ bakoitia}\\ \text{Ez du} & \text{Baldin } k \text{ bikoitia}\end{cases}$

JARDUERAK

9. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{-n-5}-\frac{2n^2}{n+2}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n+1}{n^2-5}-\frac{n^2}{n+2}\right)$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n\frac{1}{3n-2}$

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{-n-3}{(0,3)^n}$

10. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n-2}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\log\frac{3n^2-6}{3n^2}$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+5}\right)^n$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n}{n-2}\right)^n$

228

5 Zenbait indeterminazioren ebazpena

Zenbait indeterminazio ebazteko eta limitearen balioa kalkulatzeko aukera ematen diguten metodo batzuk ikasiko ditugu.

5.1. $\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioak

Horrelako indeterminazioak agertzen dira erroketak dituzten polinomioen arteko zatiketen limiteak kalkulatzean. Ebazteko modua n-ren berretzaile handieneko berreketaz zatitzea da.

EGITEN JAKIN

$\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioak dituzten limiteak kalkulatzea

▶ Kalkulatu limite hauek: **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^2-3n+1}}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^2+3}$

LEHENIK. Limiteak $\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminaziorik duen aztertu behar da.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^2-3n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)}{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-3n+1)}} \to \frac{\infty}{\infty}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^2+3} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+5n^2)}}{\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+3)} \to \frac{\infty}{\infty}$

BIGARRENIK. n-ren berretzaile handienari erreparatu behar zaio, erro-ikurraren barruan dauden n-ren berretzaileak errotzaileaz zatitu behar direla kontuan hartuta.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^2-3n+1}}$ $\begin{array}{l} \to n\text{-ren maila handiena} = 1 \\ \to n\text{-ren maila handiena} = \frac{2}{3} \end{array}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^2+3}$ $\begin{array}{l} \to n\text{-ren maila handiena} = \frac{3}{2} \\ \to n\text{-ren maila handiena} = 2 \end{array}$

HIRUGARRENIK. Zenbakitzailea eta izendatzailea lortutako n-ren berreketaz zatitu behar dira.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^2-3n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n}}{\frac{\sqrt[3]{n^2-3n+1}}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}}{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+1}{n^3}}} = \frac{2}{0} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^2}}{\frac{n^2+3}{n^2}} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+5n^2}{n^4}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$

Ez ahaztu

$\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$

$\sqrt[k]{-\infty} = \begin{cases} -\infty & \text{Baldin } k \text{ bakoitia} \\ \text{Ez du} & \text{Baldin } k \text{ bikoitia} \end{cases}$

Ez ahaztu

$\frac{k}{+\infty} = 0 \quad \frac{k}{-\infty} = 0 \quad \frac{k}{0} = \infty$

JARDUERAK

11. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+6}}{n-3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2}{\sqrt{n^3-n^2-5}}$

12. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^4+3n-1}}{3n^2-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{\sqrt[3]{-3n^3+5n^2+7n-1}}$

5.2. $\infty - \infty$ motako indeterminazioa

Horrelako indeterminazioak agertzen dira erroketen arteko kenketen limiteak eta polinomioen arteko zatiketen arteko kenketen limiteak kalkulatzean. Lehen kasuan, konjokatuaz biderkatu behar da, eta bigarrenean, berriz, zatiduren arteko kenketa egin behar da.

EGITEN JAKIN

$\infty - \infty$ motako indeterminazioak dituzten limiteak kalkulatzea

▶ Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{2n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2-3}\right)$

LEHENIK. Limiteak $\infty - \infty$ motako indeterminaziorik baduen aztertu behar da.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{2n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}\right) \to \infty - \infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2-3}\right) \to \infty - \infty$

BIGARRENIK. Indeterminazioa ebatzi behar da, kontuan hartuta erroketak edo polinomioen arteko zatiketak diren.

- Polinomioen arteko zatiketen arteko kenketa bat bada, zatiki aljebraikoen arteko kenketa egin behar da.
- Erroketen arteko kenketa bat bada, konjokatuaz biderkatu eta zatitu behar da.

a) $$\frac{2n^2}{2n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}=\frac{2n^2(n^2+1)-n^3(2n+1)}{(2n+1)(n^2+1)}=\frac{\cancel{2n^4}+2n^2-\cancel{2n^4}-n^3}{(2n+1)(n^2+1)}=$$
$$=\frac{-n^3+2n^2}{2n^3+n^2+2n+1}$$

b) $$\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2-3}=\frac{\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2-3}\right)\left(\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2-3}\right)}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2-3}}=$$
$$=\frac{7}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2-3}}$$

HIRUGARRENIK. Lortutako adierazpenaren limitea kalkulatu behar da.

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{2n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+2n^2}{2n^3+n^2+2n+1}=-\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2-3}}=0$$

JARDUERAK

13. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n}-\dfrac{n^2}{n+1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2n^2}{3n-2}-\dfrac{-3n^2}{n-4}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+2}{4n^2-n-1}-\dfrac{n^3+2n+1}{n^2+1}\right)$

14. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{n^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+1}-n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n-1}-\sqrt{n^2+1}\right)$

230

5.3. 1^{∞} motako indeterminazioa

Horrelako indeterminazioak gai orokorra honelakoa duten segiden limiteak kalkulatzean agertzen dira: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Indeterminazio mota hori duten limiteak kalkulatzeko, berdintza hau erabiltzen dugu:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Eta limitea kalkulatu beharreko segida mota horretako segida bihurtuko dugu, izendatzaileak eta berretzaileak adierazpen bera dutela.

ADIBIDEA

10 Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\lim\limits_{n \to \infty} 2n} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2$$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lim\limits_{n \to \infty} n} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1}$$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\lim\limits_{n \to \infty} n} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2$$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n-2} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\lim\limits_{n \to \infty} 3n-2} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n-2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{3n-2} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{2}{n}\cdot(3n-2)} =$$

$$= \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2\cdot(3n-2)}{n}} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{6n-4}{n}} = e^6$$

Kontuan hartu

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ segida hau da:

$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$

$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}37037\ldots$

...

$a_{100} = 1{,}01^{100} = 2{,}70581\ldots$

Segida hori beti gorakorra da eta 2,718281… zenbakirantz jotzen du, *e* zenbakia esaten diogunerantz.

JARDUERAK

15. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n-1}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{3}}$

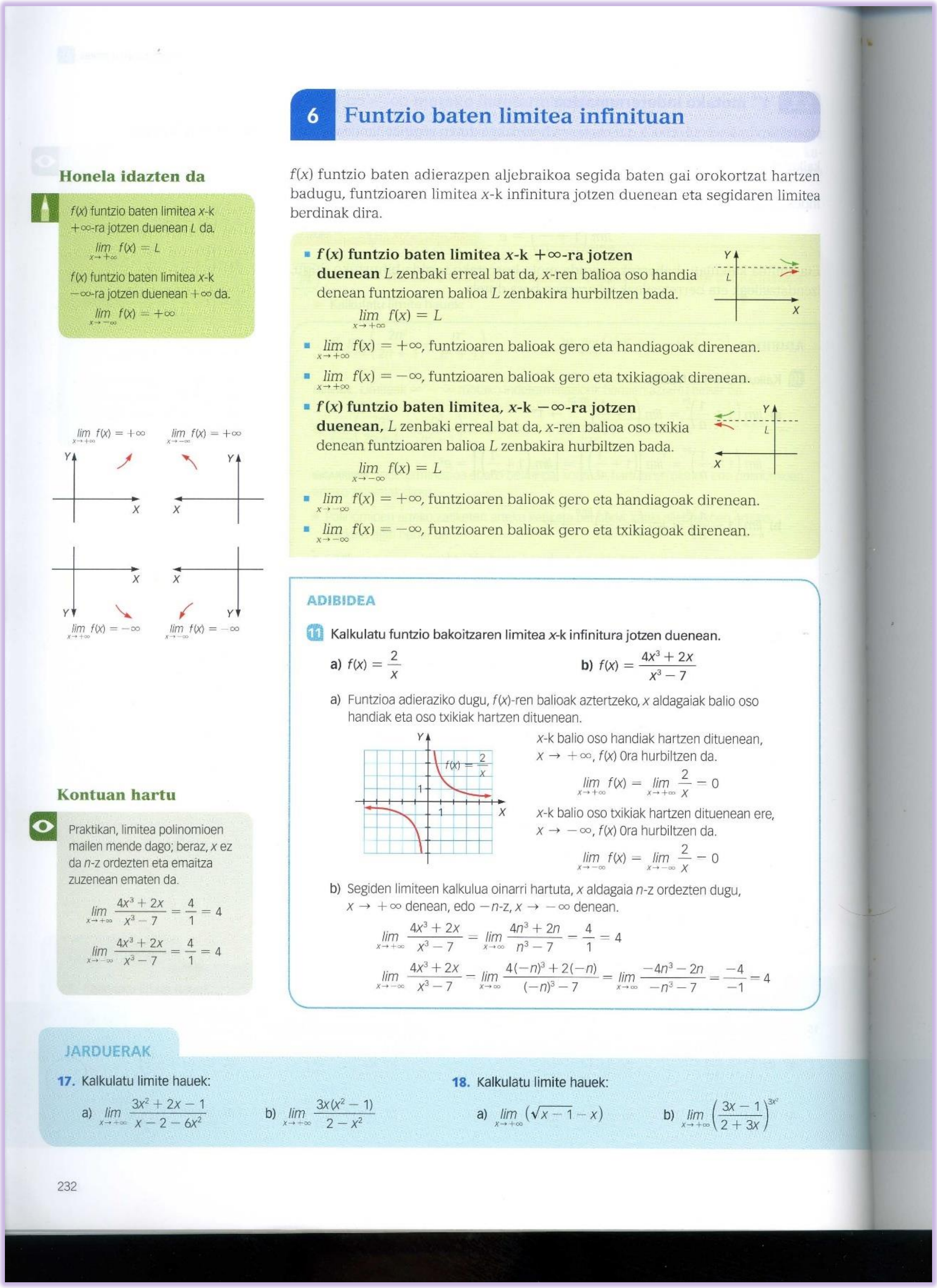
16. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{3n-2}$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right)^{2n}$



6 Funtzio baten limitea infinituan

Honela idazten da

$f(x)$ funtzio baten limitea x-k $+\infty$-ra jotzen duenean L da.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

$f(x)$ funtzio baten limitea x-k $-\infty$-ra jotzen duenean $+\infty$ da.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$f(x)$ funtzio baten adierazpen aljebraikoa segida baten gai orokortzat hartzen badugu, funtzioaren limitea x-k infinitura jotzen duenean eta segidaren limitea berdinak dira.

- **$f(x)$ funtzio baten limitea x-k $+\infty$-ra jotzen duenean** L zenbaki erreal bat da, x-ren balioa oso handia denean funtzioaren balioa L zenbakira hurbiltzen bada.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, funtzioaren balioak gero eta handiagoak direnean.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, funtzioaren balioak gero eta txikiagoak direnean.
- **$f(x)$ funtzio baten limitea, x-k $-\infty$-ra jotzen duenean,** L zenbaki erreal bat da, x-ren balioa oso txikia denean funtzioaren balioa L zenbakira hurbiltzen bada.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, funtzioaren balioak gero eta handiagoak direnean.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, funtzioaren balioak gero eta txikiagoak direnean.

ADIBIDEA

11 Kalkulatu funtzio bakoitzaren limitea x-k infinitura jotzen duenean.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7}$

a) Funtzioa adieraziko dugu, $f(x)$-ren balioak aztertzeko, x aldagaiak balio oso handiak eta oso txikiak hartzen dituenean.

x-k balio oso handiak hartzen dituenean, $x \to +\infty$, $f(x)$ 0ra hurbiltzen da.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

x-k balio oso txikiak hartzen dituenean ere, $x \to -\infty$, $f(x)$ 0ra hurbiltzen da.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} - 0$$

b) Segiden limiteen kalkulua oinarri hartuta, x aldagaia n-z ordezten dugu, $x \to +\infty$ denean, edo $-n$-z, $x \to -\infty$ denean.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{4n^3 + 2n}{n^3 - 7} - \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} - \lim_{x\to\infty} \frac{4(-n)^3 + 2(-n)}{(-n)^3 - 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4n^3 - 2n}{-n^3 - 7} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Kontuan hartu

Praktikan, limitea polinomioen mailen mende dago; beraz, x ez da n-z ordezten eta emaitza zuzenean ematen da.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \frac{4}{1} = 4$$

JARDUERAK

17. Kalkulatu limite hauek:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2 - 6x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x(x^2 - 1)}{2 - x^2}$

18. Kalkulatu limite hauek:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x - 1} - x\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x - 1}{2 + 3x}\right)^{3x^2}$

232

7 Funtzio baten limitea puntu batean

7.1. Alboko limiteak

Puntu batera ezkerretik hurbildu gaitezke, puntua baino txikiagoak diren balioekin, edo eskuinetik, balio handiagoekin.

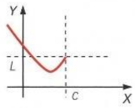
- **$f(x)$ funtzio baten limitea, x-k c puntu batera ezkerretik jotzen duenean,** L zenbaki erreal bat da, c-tik oso hurbil dauden eta c baino txikiagoak diren x-ren balioetarako, funtzioaren balioak L-ra hurbiltzen badira.

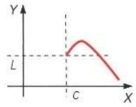
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

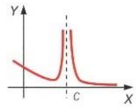
- **$f(x)$ funtzio baten limitea, x-k c puntu batera eskuinetik jotzen duenean,** L zenbaki erreal bat da, c-tik oso hurbil dauden eta c baino txikiagoak diren x-ren balioetarako, funtzioaren balioak L-ra hurbiltzen badira.

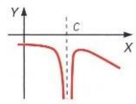
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

- $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = +\infty$ edo $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = +\infty$, c-tik oso hurbil dauden balioetarako (c baino txikiagoak edo handiagoak, hurrenez hurren), funtzioaren balioak gero eta gehiago handitzen badira.
- $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ edo $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty$, c-tik oso hurbil dauden balioetarako (c baino txikiagoak edo handiagoak , hurrenez hurren), funtzioaren balioak gero eta gehiago txikitzen badira.





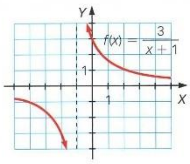




ADIBIDEAK

12 Kalkulatu $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ funtzioaren alboko limiteak $x = -1$ puntuan.

Funtzioa adieraziko dugu, -1en eskuinean eta ezkerrean $f(x)$-k zer balio hartzen dituen jakiteko.



x-k -1etik oso hurbilekoak eta -1 baino txikiagoak diren balioak hartzen dituenean, $f(x)$-k $-\infty$-ra jotzen du.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{3}{x+1} = -\infty$$

x-k -1etik oso hurbilekoak eta -1 baino handiagoak diren balioak hartzen dituenean, $f(x)$-k $+\infty$-ra jotzen du.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty$$

13 Kalkulatu $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{Baldin } x \le 1 \\ -x + 4 & \text{Baldin } x > 1 \end{cases}$ funtzioaren alboko limiteak $x = 1$-en.

Limitea ezkerretik: $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$

Limitea eskuinetik: $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-x + 4) = -1 + 4 = 3$

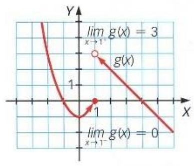
Honela idazten da

$f(x)$ funtzio baten limitea, x-k c-ra ezkerretik jotzen duenean, L da.

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

$f(x)$ funtzio baten limitea, x-k c-ra eskuinetik jotzen duenean, $+\infty$ da.

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$$



Alboko limiteak ez datoz bat.

JARDUERAK

19. Kalkulatu funtzioen alboko limiteak adierazitako puntuetan.

a) $\dfrac{-2x+1}{x-1}$ $x = 1$ puntuan   b) $\dfrac{x}{|x|}$ $x = 0$ puntuan

20. Adierazi zein diren funtzio honen alboko limiteak $x = -2$ puntuan:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{Baldin } x < -2 \\ 1 - x^2 & \text{Baldin } x \ge -2 \end{cases}$$

7.2. Funtzio baten limitea puntu batean

Honela idazten da

$f(x)$ funtzio baten limitea c puntuan L da.

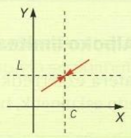
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

$f(x)$ funtzioak ez du limiterik c puntuan.

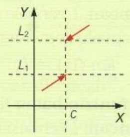
$$\nexists \lim_{x \to c} f(x)$$

- **$f(x)$ funtzioaren limitea, x-k c puntu batera jotzen duenean,** L zenbaki erreal bat da, $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$ denean.

  $$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



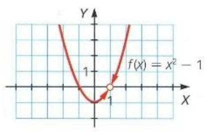
- Modu berean, $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ edo $-\infty$ da, alboko limiteak balio horiekin bat datozenean.



- $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ bada, $f(x)$ funtzioak c puntuan **limiterik ez duela** esaten dugu.

ADIBIDEA

14 Kalkulatu $f(x) = x^2 - 1$ funtzioaren limitea $x = 1$ puntuan.



Funtzioa grafikoki adierazten badugu, 1etik hurbil dauden balioetan funtzioaren balioek 0ra jotzen dutela ikus dezakegu.

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0$$

Hau da, $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$.

Kontuan hartu

$\lim_{x \to 2^-} f(x)$-k zer zeinu izango duen jakiteko, funtzioan x 2tik hurbil dagoen eta 2 baino txikiagoa den balio batez ordeztuko dugu.

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{1{,}99 + 2}{1{,}99 - 2} < 0$$

$x = 1{,}99$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty$$

Gauza bera $\lim_{x \to 2^+} f(x)$-rekin.

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{2{,}01 + 2}{2{,}01 - 2} > 0$$

$x = 2{,}01$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$$

EGITEN JAKIN

Funtzio baten limitea kalkulatzea puntu batean

Kalkulatu $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ funtzioaren limitea $x = -1$ eta $x = 2$ puntuetan.

LEHENIK. Funtzioan puntuaren balioa idatzi behar da x-ren ordez. Zenbaki bat lortzen bada, hori da limitearen emaitza.

$x = -1$ denean: $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{-1+2}{-1-2} = -\dfrac{1}{3}$

$x = 2$ denean: $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{2+2}{2-2} = \dfrac{4}{0} = \infty$

BIGARRENIK. ∞ lortzen bada, alboko limiteak kalkulatu behar dira.

$x = 2$ denean: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \dfrac{\overbrace{x+2}^{>0}}{\underbrace{x-2}_{<0}} = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{\overbrace{x+2}^{>0}}{\underbrace{x-2}_{>0}} = +\infty$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) \rightarrow \text{Ez da existitzen } \lim_{x \to 2} f(x).$$

JARDUERAK

21. Kalkulatu funtzioen limiteak adierazitako puntuetan.

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2 - 2x + 3}$ $x = 1$-en $\qquad$ b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$ $x = -1$-en

22. Arrazoitu baduen limiterik $x = 2$, $x = 3$ eta $x = 4$ puntuetan, funtzio honek: $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x-2}$.

234

EGITEN JAKIN

Zatika definitutako funtzio baten limitea kalkulatzea

▶ Kalkulatu limite hau: $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{Baldin } x \le -1 \\ -2x^2 + 4 & \text{Baldin } x > -1 \end{cases}$ $x = -1$ eta $x = 0$–n.

LEHENIK. Limitea kalkulatzeko aintzat hartutako puntuan funtzioa adierazpen aljebraiko batetik beste batera pasatzen bada, alboko limiteak kalkulatu behar dira.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

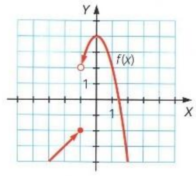
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-2x^2 + 4) = -2 \cdot (-1)^2 + 4 = 2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) \ne \lim_{x \to -1^+} f(x) \rightarrow \text{Ez da existitzen } \lim_{x \to -1} f(x).$$

BIGARRENIK. Ez bada mota horretako puntu bat, puntu horretako limitea kalkulatu behar da, x-ren ordez puntua idatziz funtzioaren adierazpen aljebraikoan.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (-2x^2 + 4) = -2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$0 > -1$



Alboko limiteak $x = -1$ puntuan ez datoz bat.

7.3. $\frac{0}{0}$ motako indeterminazioa

Indeterminazio mota hori funtzio arrazionalen limiteak kalkulatzean agertzen da, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ motakoetan, $P(c) = 0$ eta $Q(c) = 0$ den c puntuan. Ebazteko, zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioak faktorizatu eta sinplifikatu egin behar dira.

Ez ahaztu

$P(x)$ polinomio batek 0 balioa hartzen badu $x = c$ denean, $(x - c)$ binomioaz zatigarria da.

$P(c) = 0 \rightarrow P(x) = (x - c)\,P_1(x)$

EGITEN JAKIN

$\frac{0}{0}$ motako indeterminazioa duten limiteak kalkulatzea

▶ Kalkulatu $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$.

LEHENIK. Limiteak $\frac{0}{0}$ motako indeterminaziorik baduen aztertu behar da.

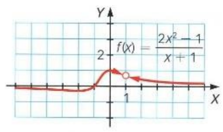
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{1^2 - 1}{1^3 - 1} \rightarrow \frac{0}{0}$$

BIGARRENIK. Zatiki aljebraikoko polinomioak faktorizatu eta sinplifikatu egin behar dira.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}{\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$$

HIRUGARRENIK. Limitea berriro kalkulatu behar da.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1 + 1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$



Alboko limiteak $x = 1$ puntuan bat datoz.

JARDUERAK

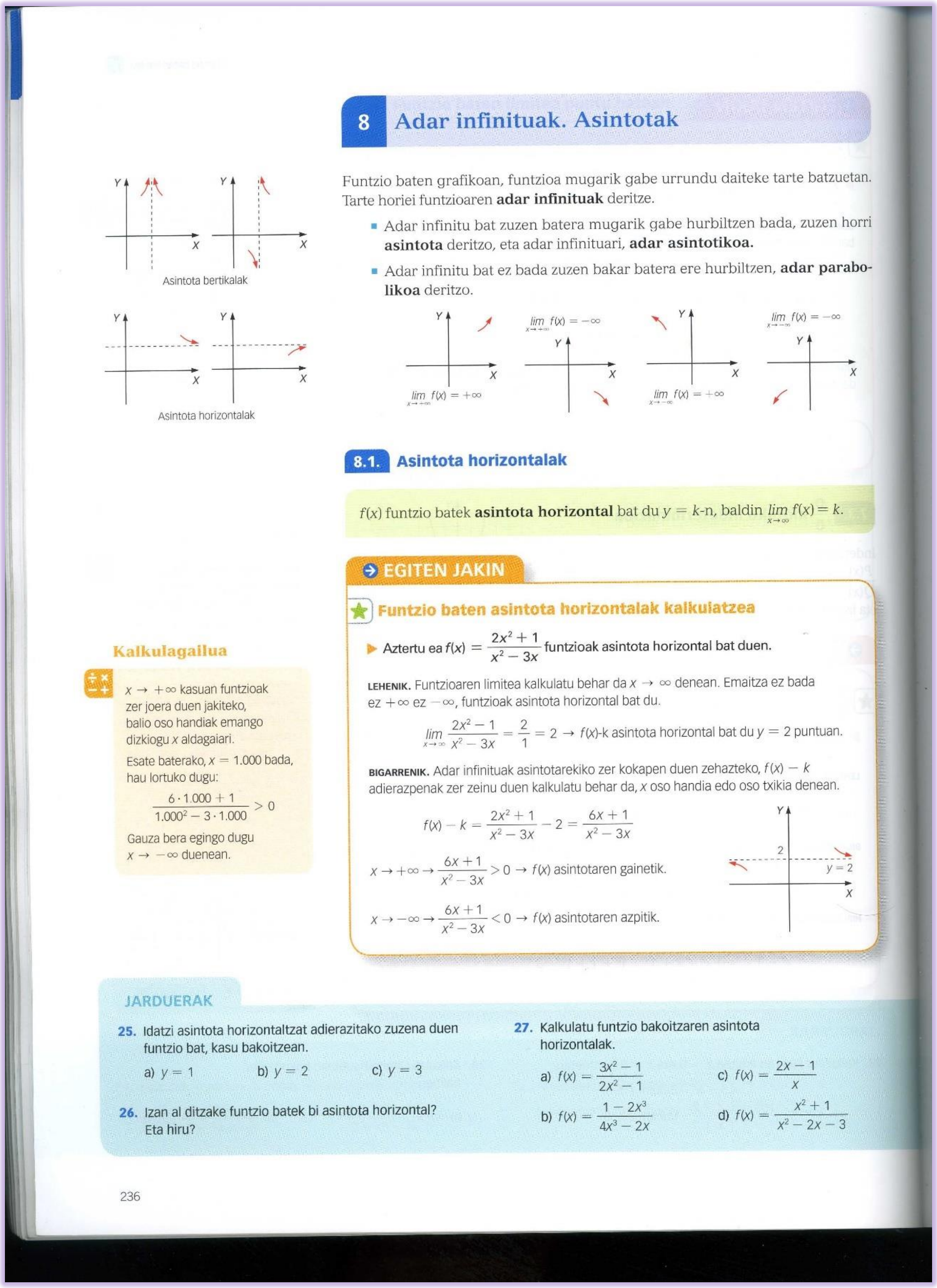
23. Kalkulatu $f(x)$-ren limitea $x = 0$ eta $x = 3$ puntuetan.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{Baldin } x \le 0 \\ \dfrac{x - 2}{x + 1} & \text{Baldin } x > 0 \end{cases}$$

24. Kalkulatu limite hauetako bakoitzaren balioa:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$



8 Adar infinituak. Asintotak

Funtzio baten grafikoan, funtzioa mugarik gabe urrundu daiteke tarte batzuetan. Tarte horiei funtzioaren **adar infinituak** deritze.

- Adar infinitu bat zuzen batera mugarik gabe hurbiltzen bada, zuzen horri **asintota** deritzo, eta adar infinituari, **adar asintotikoa.**
- Adar infinitu bat ez bada zuzen bakar batera ere hurbiltzen, **adar parabolikoa** deritzo.

8.1. Asintota horizontalak

$f(x)$ funtzio batek **asintota horizontal** bat du $y = k$-n, baldin $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$.

EGITEN JAKIN

Funtzio baten asintota horizontalak kalkulatzea

▶ Aztertu ea $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x}$ funtzioak asintota horizontal bat duen.

LEHENIK. Funtzioaren limitea kalkulatu behar da $x \to \infty$ denean. Emaitza ez bada ez $+\infty$ ez $-\infty$, funtzioak asintota horizontal bat du.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-3x} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow f(x)\text{-k asintota horizontal bat du } y = 2 \text{ puntuan.}$$

BIGARRENIK. Adar infinituak asintotarekiko zer kokapen duen zehazteko, $f(x) - k$ adierazpenak zer zeinu duen kalkulatu behar da, x oso handia edo oso txikia denean.

$$f(x) - k = \frac{2x^2+1}{x^2-3x} - 2 = \frac{6x+1}{x^2-3x}$$

$$x \to +\infty \to \frac{6x+1}{x^2-3x} > 0 \to f(x) \text{ asintotaren gainetik.}$$

$$x \to -\infty \to \frac{6x+1}{x^2-3x} < 0 \to f(x) \text{ asintotaren azpitik.}$$

Kalkulagailua

$x \to +\infty$ kasuan funtzioak zer joera duen jakiteko, balio oso handiak emango dizkiogu x aldagaiari.

Esate baterako, $x = 1.000$ bada, hau lortuko dugu:

$$\frac{6 \cdot 1.000 + 1}{1.000^2 - 3 \cdot 1.000} > 0$$

Gauza bera egingo dugu $x \to -\infty$ duenean.

JARDUERAK

25. Idatzi asintota horizontaltzat adierazitako zuzena duen funtzio bat, kasu bakoitzean.

a) $y = 1$ b) $y = 2$ c) $y = 3$

26. Izan al ditzake funtzio batek bi asintota horizontal? Eta hiru?

27. Kalkulatu funtzio bakoitzaren asintota horizontalak.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{2x^2-1}$ c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1-2x^3}{4x^3-2x}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}$

236

8.2. Asintota bertikalak

$f(x)$ funtzio batek **asintota bertikal** bat du $x = c$ puntuan, baldin $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.

➔ EGITEN JAKIN

Funtzio arrazional baten asintota bertikalak kalkulatzea

▶ Kalkulatu $f(x) = \dfrac{1-x}{x-2}$ funtzioaren asintota bertikalak.

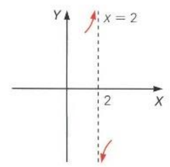
LEHENIK. Izendatzailearen erroak idatzi eta funtzioaren limitea kalkulatu behar da puntu horietan. Emaitza ∞ bada, funtzioak asintota bertikal bat du puntu horretan.

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-x}{x-2} = \infty \rightarrow f(x)$ funtzioak asintota bertikal bat du $x = 2$ puntuan.

BIGARRENIK. Alboko limiteak kalkulatu behar dira, adar infinituak asintotarekiko zer kokapen duen zehazteko.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\overbrace{1-x}^{<0}}{\underbrace{x-2}_{<0}} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{\overbrace{1-x}^{<0}}{\underbrace{x-2}_{>0}} = -\infty$$



8.3. Asintota zeiharrak

$y = mx + n$ zuzena $f(x)$ funtzio baten **asintota zeihar** bat da, baldin:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \text{ eta } \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = n$$

➔ EGITEN JAKIN

Funtzio baten asintota zeiharrak kalkulatzea

▶ Aztertu ea $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x+1}$ funtzioak baduen asintota zeiharrik.

LEHENIK. $\dfrac{f(x)}{x}$ adierazpenaren limitea kalkulatu behar da, $x \to \infty$ denean. Emaitza zeroz bestelako m zenbaki bat bada, asintota zeiharra du.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2-1}{x+1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-1}{x^2+x} = 2 \neq 0 \rightarrow m = 2$$

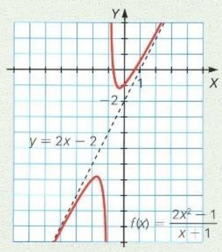
BIGARRENIK. Asintota zeiharra badu, $f(x) - mx$ adierazpenaren limitea kalkulatu behar da.

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{2x^2-1}{x+1} - 2x\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x-1}{x+1} = -2$$

Beraz, $f(x)$ funtzioak asintota zeihar bat du: $y = 2x - 2$.

Kontuan hartu

Asintota horizontaletan bezala, adar infinituek asintota zeiharrarekiko zer kokapen duten zehazteko, $f(x) - (mx + n)$ adierazpenaren zeinua kalkulatu behar da $x \to +\infty$ denean eta $x \to -\infty$ denean.



JARDUERAK

28. Kalkulatu funtzio bakoitzaren asintota bertikalak.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ b) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-1}$

29. Kalkulatu funtzio bakoitzaren asintota zeiharra, baldin badu.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{3x^3+2x}{x^2-9}$

9 Funtzio baten jarraitutasuna

$f(x)$ **funtzio** bat **jarraitua da** $x = a$ **puntu batean,** hau betetzen badu:

- $f(a)$ existitzen bada.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existitzen bada.
- $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Funtzio bat ez bada jarraitua puntu batean, funtzioak puntu horretan **etenune** bat duela esaten dugu.

Funtzio bat jarraitua da tarte batean tarteko puntu guztietan jarraitua bada.

9.1. Oinarrizko funtzioen jarraitutasuna

- **Funtzio polinomikoak** jarraituak dira $\mathbb{R}$ osoan.
- **Funtzio arrazionalak** ez dira jarraituak izendatzailea zero den puntuetan.
- Errokizun bikoitiko **erroketak dituzten funtzioak** ez dira existitzen errokizuna negatiboa bihurtzen duten balioetarako. Errokizuna bakoitia bada, jarraituak dira $\mathbb{R}$ osoan.
- **Funtzio esponentzialak** jarraituak dira $\mathbb{R}$ osoan.
- **Funtzio logaritmikoak** ez dira jarraituak logaritmoa zero edo zenbaki negatiboa den puntuetan.
- **Funtzio trigonometrikoen** artean, jarraitua ez den funtzio bakarra $f(x) = \tan x$ da, ez delako existitzen $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ puntuetan, non $k \in \mathbb{Z}$.

EGITEN JAKIN

Oinarrizko funtzio baten jarraitutasuna aztertzea

Aztertu funtzio bakoitzaren jarraitutasuna.

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{x-2}$ b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ c) $f(x) = \log(x+3)$

LEHENIK. Funtzioa zer puntutan ez dagoen definituta zehaztu behar da.

a) Funtzio arrazionala. Definitu gabe, izendatzailea zero bada: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

b) Erroketak dituztenak. Definitu gabe, errokizuna negatiboa bada: $x + 1 < 0 \rightarrow x < -1$

c) Funtzio logaritmikoa. Definitu gabe, 0 edo negatiboa bada: $x + 3 \leq 0 \rightarrow x \leq -3$

BIGARRENIK. Funtzioak etenuneak ditu kalkulatutako puntuetan eta jarraitua da gainerakoetan.

a) Jarraitua $\mathbb{R} - \{2\}$-n b) Jarraitua $[-1, +\infty)$-n c) Jarraitua $(-3, +\infty)$-n

JARDUERAK

30. Aztertu hiru funtzio hauetako bakoitzaren jarraitutasuna:

a) $f(x) = x^{-2}$ b) $f(x) = \sqrt{x-4}$ c) $f(x) = \ln(1-x^2)$

31. Aztertu funtzio bakoitzaren jarraitutasuna.

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ b) $f(x) = e^{x+1}$ c) $f(x) = \sin x^2 - 1$

238

9.2. Etenune motak

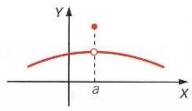
Etenune gaindigarria

Esaten dugu a puntuan etenune gaindigarri bat dagoela, $\lim_{x \to a} f(x)$ existitzen bada –hau da, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ bada–, eta bi baldintza hauetako bat betetzen bada:

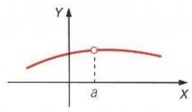
- Limitea ez izatea puntu horretan funtzioak duen balioaren berdina.

$$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

- Funtzioa puntu horretan definituta ez egotea.



$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

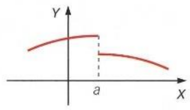


$f(a)$ ez da existitzen.

Jauzi finituko etenunea

Jauzi finituko etenunea dago a puntuan, ez bada existitzen $\lim_{x \to a} f(x)$, alboko limiteak existitu arren, horiek ez direlako berdinak.

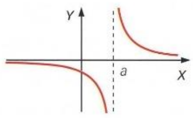
$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$



Jauzi infinituko etenunea

Jauzi infinituko etenunea dago, a puntuan funtzioak asintota bertikal bat badu. Hots, alboko limite baten edo bien balioa infinitu bada.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$



ADIBIDEA

15 **Aztertu funtzioaren jarraitutasuna eta sailkatu eten-puntuak.**

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{Baldin } x \leq -1 \\ \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{Baldin } x > -1 \end{cases}$$

Funtzioak etenuneak izan ditzake adierazpen batetik bestera pasatzeko puntuan, $x = -1$ puntuan, hain zuzen; bai eta funtzio arrazionalaren izendatzailea zero egiten duten puntuetan ere, $x = 2$ eta $x = -2$ puntuetan, alegia.

$x = 2$ denean: $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{2-2}{2^2-4} \to \dfrac{0}{0} \to f(2)$ ez da existitzen.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Etenune gaindigarria. $f(x)$ jarraitua litzateke $x = 2$ puntuan, $f(2) = \dfrac{1}{4}$ bihurtuz.

$x = -2$ denean: $\lim_{x \to -2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{-2-2}{(-2)^2-4} = \infty \to$ Asintota bertikala $x = -2$ puntuan

Jauzi infinituko etenunea.

$x = -1$ denean: $\lim_{x \to -1^-} (x+3) = -1+3 = 2$ $\qquad \lim_{x \to -1^+} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{-1-2}{(-1)^2-4} = 1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim_{x \to -1^+} f(x) \to \text{Jauzi finituko etenunea}$$

Kontuan hartu

- Etenune gaindigarriari horrela esaten zaio, funtzioak puntu horretan hartzen duen balioa birdefinituz gero funtzioa jarraitua bihurtzen delako.
- Jauzi finituko etenunea sarritan gertatzen da zatika definitutako funtzioetan; hain zuzen, funtzioaren adierazpen aljebraikoa aldatu egiten den puntuetan.
- Jauzi infinituko etenunean asintota bertikal bat egoten da $x = a$ puntuan.

JARDUERAK

32. Aztertu bi funtzio hauetako bakoitzaren jarraitutasuna:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\qquad$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{Baldin } x \leq 1 \\ x & \text{Baldin } 1 < x < 4 \\ 5 & \text{Baldin } x \geq 4 \end{cases}$

33. Aztertu funtzioen jarraitutasuna eta adierazi zer etenune mota duen bakoitzak.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & x < 1 \text{bada} \\ 2x-3 & x \geq 1 \text{bada} \end{cases}$ $\qquad$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-3x+2} & x \leq 1 \text{bada} \\ \dfrac{1}{2x-1} & x > 1 \text{bada} \end{cases}$

EGITEN JAKIN

Segida baten limitea

Erroketak dituzten polinomioen arteko zatiketa baten limitea kalkulatzea

Kalkulatu limite hauek: **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-1}{\sqrt{3n^4-2n^2+1}}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+n-7}}{2n+2}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2n-4}}{\sqrt[3]{2n^3-n^2}}$

LEHENIK. Zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioen mailak zehaztu behar dira.

a) $\dfrac{4n-1}{\sqrt{3n^4-2n^2+1}}$ $\begin{matrix} \longrightarrow \text{Maila} = 1 \\ \longrightarrow \text{Maila} = \frac{4}{2} = 2 \end{matrix}$

b) $\dfrac{\sqrt{3n^2+n-7}}{2n+2}$ $\begin{matrix} \longrightarrow \text{Maila} = \frac{2}{2} = 1 \\ \longrightarrow \text{Maila} = 1 \end{matrix}$

c) $\dfrac{\sqrt{n^3+2n-4}}{\sqrt[3]{2n^3-n^2}}$ $\begin{matrix} \longrightarrow \text{Maila} = \frac{3}{2} \\ \longrightarrow \text{Maila} = \frac{3}{3} = 1 \end{matrix}$

BIGARRENIK. Lortutako mailak alderatu behar dira, emaitzak polinomioen arteko zatiketen limiteen ebazpenean aplikatzeko.

a) Zenbakitzailearen maila < Izendatzailearen maila $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-1}{\sqrt{3n^4-2n^2+1}} = 0$

b) Zenbakitzailearen maila = Izendatzailearen maila $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+n-7}}{2n+2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) Zenbakitzailearen maila > Izendatzailearen maila $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2n-4}}{\sqrt[3]{2n^3-n^2}} = +\infty$

PRAKTIKATU

34. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2n^3+3n-1}}{\sqrt{1+2n^2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-6n+1}}{7n^3-7}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2n^2+n+7}}{8n-1}$

Segida baten limitea

1^∞ indeterminazioa duten $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^{c_n}$ motako limiteak kalkulatzea

Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n+2}$.

LEHENIK. Limiteak 1^∞ motako indeterminaziorik baduen aztertu behar da.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)} \to 1^\infty$$

BIGARRENIK. Parentesi barruan 1 gehitu eta kendu behar da.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+1}{n-1}-1\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}+1}{n-1}\right)^{n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n+2}$$

HIRUGARRENIK. Zatikiaren zenbakitzailea izendatzailera pasatu behar da.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n+2}$$

LAUGARRENIK. Berretzailea lortutako izendatzaileaz eta haren alderantzizkoaz biderkatu behar da.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot(n+2)}$$

BOSGARRENIK. Limitetzat *e* duen segida osatzeko behar den berretzailea duen berreketa hartu behar da.

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2(n+2)}{n-1}}$$

SEIGARRENIK. Limitea kalkulatu behar da.

$$\left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{n-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n-1}} = e^2$$

PRAKTIKATU

35. Kalkulatu limite hauek: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2n}{n^2-1}\right)^{3n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{5+2n}\right)^{n^2-3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1-n^2}{-n^2+2}\right)^{3n}$

240

Funtzio baten limitea puntu batean

Funtzio baten limitea kalkulatzea puntu batean

Kalkulatu limite hauek: **a)** $\lim_{x\to -3} \sqrt{x^2-9}$ **b)** $\lim_{x\to -2} \frac{2x-1}{x+2}$ **c)** $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

LEHENIK. *x* limitea kalkulatu beharreko puntuaz ordeztu behar da.

a) $\lim_{x\to -3} \sqrt{x^2-9} = \sqrt{(-3)^2-9} = 0$ b) $\lim_{x\to -2} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2(-2)-1}{(-2)+2} = \infty$ c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{(-1)+1} \to \frac{0}{0}$

BIGARRENIK. Limitea kalkulatu behar da, aurreko emaitza kontuan hartuta:

- Zenbaki bat bada, limitea kalkulatuta dago.

  a) $\lim_{x\to -3} \sqrt{x^2-9} = 0$

- Limitea ∞ bada, alboko limiteak kalkulatu behar dira. Ez badira berdinak, ez du limiterik.

  b) $\lim_{x\to -2^-} \frac{\overbrace{2x-1}^{<0}}{\underbrace{x+2}_{<0}} = +\infty$ $\lim_{x\to -2^+} \frac{\overbrace{2x-1}^{<0}}{\underbrace{x+2}_{>0}} = -\infty \to$ Ez da existitzen $\lim_{x\to -2} \frac{2x-1}{x+2}$

- $\frac{0}{0}$ motako indeterminazio bat bada, polinomioak faktorizatuz kalkulatu behar da.

  c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = -2$

PRAKTIKATU

36. Kalkulatu limite hauen balioak:

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2+16}$

b) $\lim_{x\to -3} \frac{5x-9}{2x^2+6x}$

Funtzio baten limitea puntu batean

Erroketak dituen $\frac{0}{0}$ motako indeterminazio bat duen limitea kalkulatzea

Kalkulatu limitea.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$$

LEHENIK. Limiteak indeterminazio bat duen aztertu behar da.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \frac{\sqrt{3+6}-3}{3-3} \to \frac{0}{0}$$

BIGARRENIK. Indeterminazioa ebazteko, zenbakitzailea eta izendatzailea erroketa duen polinomioaren konjokatuaz biderkatu behar da.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x+6)-3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{1}{6}$$

PRAKTIKATU

37. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

Adar infinituak. Asintotak

Funtzio bat adieraztea, asintotak eta ebakidura-puntuak jakinda

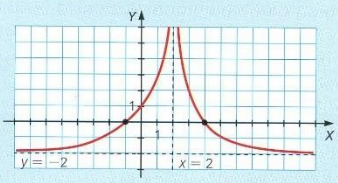
Marraztu ezaugarri hauek dituen funtzioaren grafikoa:

- **Asintota horizontal bat $y = -2$ puntuan eta gainetik hurbiltzen da hartara.**
- **Asintota bertikal bat $x = 2$ puntuan.**
- ***X* ardatza -1 eta 4 puntuetan ebakitzen du.**

LEHENIK. Asintotak eta koordenatu-ardatzekiko ebakidura-puntuak adierazi behar dira.

BIGARRENIK. Adar infinituei buruzko informazioa adierazi behar da.

HIRUGARRENIK. Adar infinituak ebakidura-puntuekin lotu behar dira, kurben bidez.



PRAKTIKATU

38. Funtzio baten grafikoak ardatzak jatorrian ebakitzen ditu, beti gorakorra da, $x = -1$ eta $x = 3$-n asintota bertikalak ditu, eta $y = 0$-n, horizontal bat. Marraztu grafikoa.

EGITEN JAKIN

Adar infinituak

Funtzio arrazional baten adar infinituen zeinua zehaztea

Kalkulatu funtzio bakoitzaren adar infinituak.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 1}{x - 9}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 1}{x + 6}$ **c)** $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 5x}{x + 5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 3x - 4}{-3x + 4}$

LEHENIK. Zenbakitzaileko eta izendatzaileko maila handieneko x-k hartu behar dira.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+7x-1}{x-9} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2x$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^3-5x}{x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (-2x^2)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2-1}{x+6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (-2x)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^3-3x-4}{-3x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^3}{-3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{3}x^2$

BIGARRENIK. Limiteak kalkulatu behar dira, zeinuen araua kontuan hartuta.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^2) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^2) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3}x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3}x^2 = +\infty$

PRAKTIKATU

39. Kalkulatu funtzio hauen adar infinituak:

a) $f(x) = \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 5x - 1}{1 - x}$

b) $f(x) = \dfrac{5x + x^2 - 3}{4 + 3x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^4 + 3x}{1 - x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{5 - 2x - x^3}{1 - x}$

Asintotak

Funtzio arrazional batek asintota horizontalik eta zeiharrik baduen aztertzea

Kalkulatu asintotak. **a)** $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x^2 + 2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2 + 6}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{-x^2 - 5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 3x}{-3x - 1}$

LEHENIK. Zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioen maila zehaztu behar da.

a) $4x - 1 \longrightarrow$ Maila: 1; $x^2 + 2 \longrightarrow$ Maila: 2
b) $-2x^2 \longrightarrow$ Maila: 2; $x^2 + 6 \longrightarrow$ Maila: 2
c) $x^3 - 4x \longrightarrow$ Maila: 3; $-x^2 - 5 \longrightarrow$ Maila: 2
d) $-2x^3 - 3x \longrightarrow$ Maila: 3; $-3x - 1 \longrightarrow$ Maila: 1

BIGARRENIK. Bi polinomioen mailak alderatu behar dira.

- Zenbakitzailearen maila izendatzailearena baino txikiagoa bada, funtzioak asintota horizontal bat du $y = 0$-n.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x - 1}{x^2 + 2} = 0 \rightarrow$ Asintota horizontala $y = 0$-n.

- Zenbakitzailearen maila eta izendatzailearena berdinak badira, funtzioak asintota horizontal bat du $y = a$-n, non $a \neq 0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2 + 6} = -2 \rightarrow$ Asintota horizontala $y = -2$-n.

- Zenbakitzailearen maila ken izendatzailearena 1 bada, funtzioak asintota zeihar bat du.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3 - 4x}{-x^2 - 5}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 4x}{-x^3 - 5x} = -1$ $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) + x] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-9x}{-x^2 - 5} = 0 \rightarrow$ Asintota zeiharra $y = -x$-n

- Zenbakitzailearen maila ken izendatzailearena 1 baino handiagoa bada, funtzioak ez du ez asintota horizontalik ez zeiharrik.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^3 - 3x}{-3x - 1} = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{-2x^3 - 3x}{-3x - 1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^3 - 3x}{-3x^2 - x} = \infty$

PRAKTIKATU

40. Kalkulatu funtzioen asintota horizontalak eta zeiharrak. a) $f(x) = \dfrac{2x^4 + 3x}{1 - x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{-3x}$ c) $f(x) = \dfrac{2x - x^3}{x^2 - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - 5x}$

242

Funtzio baten jarraitutasuna

Zatika definitutako funtzio baten jarraitutasuna aztertzea

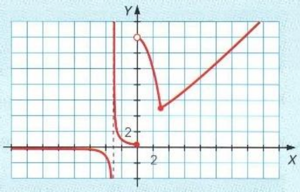
Aztertu funtzio honen jarraitutasuna eta adierazi zer etenune mota dituen: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{Baldin } x \le 0 \\ -x^2+14 & \text{Baldin } 0 < x \le 3 \\ \sqrt{x^2+16} & \text{Baldin } x > 3 \end{cases}$

LEHENIK. Funtzioen jarraitutasuna aztertu behar da, bakoitza definituta dagoen tartean.

- Baldin $x \le 0 \rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ funtzio arrazional bat da, ez dagoena definituta $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$ denean.

  $f(x)$ funtzioak asintota bertikal bat du $x = -3$-n; beraz, jauzi finituko etenune bat du $x = -3$-n.
- Baldin $0 < x \le 3 \rightarrow f(x) = -x^2 + 14$ funtzio polinomiko bat da. Beti jarraitua da.
- Baldin $x > 3 \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+16}$ errokizun bikoitiko erroketa duen funtzio bat da. Ez dago definituta errokizuna negatiboa bada. $x^2 + 16$ beti positiboa denez, funtzioa jarraitua da beti.

BIGARRENIK. Funtzioaren adierazpen aljebraikoa aldatzen den puntuetako jarraitutasuna aztertu behar da. Horretarako, puntu horietako alboko limiteak kalkulatu behar dira.



$x = 0$ denean: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + 14) = 14$

$f(x)$ funtzioak jauzi finituko etenune bat du $x = 0$-n,

$f(0) = \dfrac{1}{3}$ existitzen delako, baina $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ez.

$x = 3$ denean: $\lim\limits_{x \to 3^-} (-x^2 + 14) = 5$ $\qquad \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x^2+16} = 5$ $\qquad f(3) = -3^2 + 14 = 5 \rightarrow f(x)$ jarraitua da $x = 3$-n.

PRAKTIKATU

41. Aztertu funtzioen jarraitutasuna, eta adierazi zer etenune mota dituen funtzio bakoitzak.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{Baldin } x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{Baldin } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{Baldin } 3 \ge x \end{cases}$ $\qquad$ b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{Baldin } x \le 0 \\ 3x & \text{Baldin } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{x-4} & \text{Baldin } 2 \ge x \end{cases}$

Funtzio baten jarraitutasuna

Parametro baten balioa kalkulatzea, funtzio bat jarraitua izan dadin

Kalkulatu k-ren balioa, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \textbf{Baldin } x < 2 \\ kx + 1 & \textbf{Baldin } x \ge 2 \end{cases}$ **funtzioa jarraitua izan dadin.**

LEHENIK. Funtzioen jarraitutasuna aztertu behar da bakoitzaren definizio-eremuan.

$x = 2$ puntuan zer gertatzen den aztertu behar da, puntu horretan adierazpen aljebraiko batetik bestera pasatzen delako.

BIGARRENIK. Etenuneak egon daitezkeen puntuetan $f(a)$ eta $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ kalkulatu behar dira.

$f(2) = k \cdot 2 + 1 = 2k + 1 \qquad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 9) = 4 - 9 = -5 \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (kx + 1) = 2k + 1$

HIRUGARRENIK. k kalkulatu behar da, $x = a$ puntuan funtzioa eta limitea berdinak izateko; hots, $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ izateko.

$f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \rightarrow 2k + 1 = -5 \rightarrow k = -3 \rightarrow k = -3$ denean, funtzioa jarraitua da puntu guztietan.

PRAKTIKATU

42. Kalkulatu k-ren balioa, funtzio hauek jarraituak izateko:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{Baldin } x < 1 \\ -kx^2 + 2x - 1 & \text{Baldin } x \ge 1 \end{cases}$ $\qquad$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-k}{x-2} & \text{Baldin } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{Baldin } x \ge 0 \end{cases}$

JARDUERAK

Segida baten limitea

43. Kalkulatu segida bakoitzaren gai orokorra, lehen gaiei erreparatuz.

a) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots$

b) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

c) $-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}, \frac{8}{5}, \dots$

d) $2, \frac{3}{8}, \frac{4}{27}, \frac{5}{64}, \dots$

44. Kalkulagailua erabiliz, kalkulatu modu errepikarian definitutako segida honen limitea:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{4a_{n-1} + 3}$$

45. Kopiatu eta osatu taula, $a_n = \frac{3n - 1}{6n + 5}$ izanik.

n	1	10	100	1000	10.000
a_n					

Kalkulatu $\lim_{n \to \infty} a_n$.

46. Kopiatu ea osatu taula, $a_n = \frac{5n + 1}{n^2 + 5}$ izanik.

n	1	10	100	1000	10.000
a_n					

Kalkulatu $\lim_{n \to \infty} a_n$.

Indeterminazioak

47. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^6 + 1}{5n^4 + 3n^3 + 2n - 1}$

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{1 - n^3 + 2n - 5n^2}{2n^3 - 3n^2 + 6n - 1}$

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{4n^2 - 5n^4 + 2n - 1}{3n - 2n^3 + 5 - n^4}$

d) $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^5 + n^3 - n^4}{1 - 4n - n^5}$

e) $\lim_{n \to \infty} \frac{n(4n^2 - 1)}{n + n^2 - 2n^3}$

f) $\lim_{n \to \infty} \frac{(n^4 + 4n^3 + 2)n^2}{n^5 + 3n^4 + 4}$

48. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n - 3}}{3n + 1}$

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{8n^2 + 3n + 2}{\sqrt{n^3 + 2n^4}}$

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{5 - 2n + 6n^3}}{n^2 - n - 6}$

d) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n + 3n^2 + 1}{\sqrt{3(n^4 + n + 1)}}$

e) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n + \sqrt{1 + n^2}}{3n + 5}$

f) $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 3n + 2}}{n^2 + 5}$

49. Kalkulatu segida hauen limiteak:

a) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n} - \frac{5n^2}{n + 1} \right)$

b) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n + 1} + \frac{3 - n^2}{n} \right)$

c) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n^2}{n - 5} + \frac{-2n^3}{n + 3} \right)$

d) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n^3 + 4n}{2n} - \frac{4n^2}{7n^3} \right)$

e) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{6n^2 + 4n}{3n} - \frac{4n^3}{2n^2} \right)$

f) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{-7n^2 + 4}{2 - n^3} + \frac{5n^3 + n}{3 - n^4} \right)$

50. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim_{n \to \infty} \left(n - \sqrt{n^2 + 4n - 1} \right)$

b) $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2 + n + 31} - 3n \right)$

c) $\lim_{n \to \infty} \left(4n - \sqrt{16n^2 + 2} \right)$

51. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n + 3} \right)^{n-1}$

b) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n - 3}{2n + 1} \right)^{n^2+1}$

c) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{n}$

d) $\lim_{n \to \infty} \left(2 - \frac{n}{n + 1} \right)^{n}$

Funtzio baten limitea infinituan

52. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 3$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\ln|x|}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^2 + 2x + 1}$

d) $\lim_{x \to +\infty} xe^x$

53. Kalkulatu polinomio hauen limiteak:

a) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1)$

b) $\lim_{x \to +\infty} (3x - x^2 - 7x^4 - 3)$

c) $\lim_{x \to -\infty} (2x - 3x^5 + x^2 - 1)$

d) $\lim_{x \to -\infty} (4x^2 - x + 3x^4 - 1)$

e) $\lim_{x \to -\infty} (4x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 1)$

54. Kalkulatu balio absolutu hauen limiteak:

a) $\lim_{x \to \infty} |-x^2 + 5x - 1|$

b) $\lim_{x \to -\infty} |3x^3 - 2x^2 + x - 7|$

c) $\lim_{x \to -\infty} |1 - x^2 - 5x^6|$

55. Kalkulatu limiteak eta egiaztatu emaitzak kalkulagailuarekin.

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2}$

56. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{2 - x^3 + x^2}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x(x^3 - 4 + x)}{-7 + 4x^4 + x^3}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{(7 + 7x + 7x^3)x^2}{x^2(x^2 - 4x^3) - 2x^5}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x - 6x^4 + x^3}{3x + 2x^2 - 3}$

244

57. Kalkulatu limiteak kalkulagailuarekin, eta egiaztatu lortutako emaitzak.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+2x^3-x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x}$

58. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{5x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-2x-1}{\sqrt{3x^4-3x^3+1}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-2}{\sqrt{3x^2+2}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{\sqrt{x^5-7x+1}}$

59. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}$

60. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2}{2x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5x^2+1}{x}+\dfrac{3-x^2}{x+2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-2x}-\dfrac{2x^2+1}{2x-4}\right)$

61. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+}6-x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)$

62. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{3x+2}\right)^{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3x-2}$

63. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^3-3x}{8x^3+x^2-3x+1}\right)^{\frac{2x+1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x^2-2x+1}{x-8}\right)^{\frac{3x^2-2x+1}{x^2-3}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\dfrac{x^3-x^2+3x}{x^2+1}\right)^{2x}$

Funtzio baten limitea puntu batean

64. Kalkulatu adierazpen bakoitzaren alboko limiteak, limitearen balioa zehazteko.

a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-3x+2}{2x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to3} (1+2x)^x$

c) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}}$

d) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{4-2x}{x^2-2x}$

e) $\lim\limits_{x\to2} \ln\left(\dfrac{x+1}{3}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{5}{\sqrt{4+x}}$

65. Osatu taula, kalkulagailua erabiliz, eta egiaztatu $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$ bada $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-0{,}5$ dela.

x	0	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$							

66. Kalkulatu eskatutako bi limiteak.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{Baldin } x\le1 \\ x^2+1 & \text{Baldin } x>1 \end{cases}$$

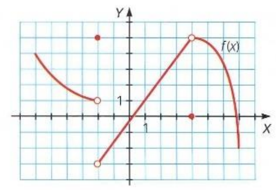
a) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

67. $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{Baldin } x<0 \\ \sqrt{x} & \text{Baldin } 0\le x\le4 \\ 3 & \text{Baldin } x>4 \end{cases}$ funtzioa hartuta, kalkulatu.

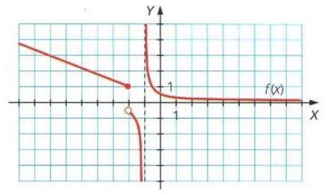
a) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

68. Erreparatu funtzioaren grafikoari eta kalkulatu limiteak.



a) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

69. Funtzioaren adierazpen grafikoa kontuan hartuta, kalkulatu limiteak.



a) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

JARDUERAK

70. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \sin x$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x}{\sin x}$

71. Zatika definitutako $f(x)$ hartuta, kalkulatu limiteak.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{Baldin } x < -2 \\ \dfrac{9}{x - 1} & \text{Baldin } -2 \leq x < 3 \\ x^2 + 6x - 32 & \text{Baldin } x \geq 3 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

EGITEN JAKIN

Polinomioen arteko zatiketa baten limitea kalkulatzea puntu batean

Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x - 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

LEHENIK. Zatiki aljebraikoaren izendatzailea puntu horretan zero den aztertu behar da.

$$x = 1 \rightarrow \begin{cases} \text{a) } 1 + 1 = 2 \neq 0 \\ \text{b) eta c) } 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

BIGARRENIK. Izendatzailea ez bada zero, puntu hori funtzioan ordeztu eta emaitza kalkulatu behar da.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x + 1} = \dfrac{1 - 1}{1 + 1} = \dfrac{0}{2} = 0$

HIRUGARRENIK. Izendatzailea zero bada, zenbakitzailea zero den aztertu behar da.

b) $x + 1 \xrightarrow{x = 1} 1 + 1 = 2$

Ez bada zero, alboko limiteak kalkulatu behar dira.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x + 1}{x - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x + 1}{x - 1} = +\infty$$

Limitea ez da existitzen.

c) $x^2 + x - 2 \xrightarrow{x = 1} 1 + 1 - 2 = 0$

Zero bada, $\dfrac{0}{0}$ motako indeterminazio bat dugu. Ebazteko, zenbakitzailea eta izendatzailea biderkagaitan deskonposatu, eta zatiki aljebraikoa sinplifikatu behar da.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \\ = \lim_{x \to 1} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

72. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x + 1}{x^2 + 2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 + 2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 2x}$

73. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 6x + 9}$

c) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3 - 3x^2}{2x^3 - x^2 + 3x}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

74. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x - 3} - 1}{x^2 - 16}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - 1}{\sqrt{2x - 2}}$

f) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{2x + 1} - 3}$

75. Kalkulatu limite hau:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2x}{\sqrt{x} - 1}$$

76. Kalkulatu limite hau:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$$

77. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

b) $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{\sqrt{x + b} - \sqrt{b}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{(x^3 + 2x) - (c^3 + 2a)}{x - c}$

d) $\lim\limits_{x \to -d} \dfrac{x^2 + (d - 4)x - 4d}{x^2 + (d - 1)x - d}$

78. Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \sqrt{\cos x - 3 \sin x}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan^3 x \cdot \cos^3 x$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \sin x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x \cdot \tan^2 x + \sin^2 x}{\tan^2 x}$

Funtzio baten asintotak

79. Kalkulatu funtzioaren limitea, x-k 0ra jotzen duenean eta x-k 3ra jotzen duenean.

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 3x^2}$$

Idatzi alboko limiteen balioak, beharrezkoa izanez gero.

246

80. Erreparatu funtzioaren balio-taulei.

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7}$$

x	1	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	−0,11	1,69	1,974	1,9975	1,99975

x	−1	−10	−100	−1.000	−10.000
$f(x)$	1	2,17	2,024	2,0025	2,00025

Egia al da $y = 2$ asintota bat dela? $x \to +\infty$ denean, funtzioa asintotaren gainetik edo azpitik dago? Zer gertatzen da $x \to -\infty$ denean?

81. Egin aurreko jarduerako taulen moduko bat eta adierazi ea $y = -3$ $f(x) = \dfrac{2 - 3x}{x + 1}$ funtzioaren asintota bertikal bat den. Funtzioa asintotaren gainetik edo azpitik dago?

82. Erreparatu funtzioaren balio-taulei.

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 3}$$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999
$f(x)$	−7	−17	−97	−997	−9.997	−99.997

x	3,0001	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	100.003	10.003	1.003	103	23

Egia al da $x = 3$ asintota bertikal bat dela? $x \to 3^-$ denean, funtzioaren adar infinituak $+\infty$-rako edo $-\infty$-rako joera du? Zer gertatzen da $x \to 3^+$ denean?

83. Egin aurreko jarduerako taularen moduko bat eta adierazi ea $x = -2$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2 + x}$ funtzioaren asintota bertikal bat den. Adar infinituak $+\infty$-rako edo $-\infty$-rako joera du?

84. Erreparatu funtzioaren balio-taulei.

$$f(x) = \frac{4x^2 + 6x}{2x - 3}$$

x	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	27,06	206,09	2.006,009	20.006,0009

Hona hemen $y = 2x + 6$ zuzenaren balio-taula:

x	10	100	1.000	10.000
y	26	206	2.006	20.006

Egia al da zuzena $f(x)$ funtzioaren asintota bat dela? Zer kokapen du funtzioak zuzenarekiko, x-k $+\infty$-ra jotzen duenean? Ikertu bien kokapen erlatiboa, x-k $-\infty$-ra jotzen duenean.

85. Egin aurreko jarduerako taularen moduko bat eta adierazi ea $y = 4x + 2$ zuzena $f(x) = \dfrac{8x^2 + 3}{2x - 1}$ funtzioaren asintota zeihar bat den. Funtzioa asintotaren gainetik edo azpitik dago?

86. Kalkulatu funtzio bakoitzaren asintota horizontalak eta bertikalak.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{-x + 5}{-4 - x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - 3}$

e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$

f) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$

87. Kalkulatu zer asintota zeihar dituen funtzio bakoitzak.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{5 - 3x^3}{2x^2 + 8}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x^3}{x^2 + x - 1}$

EGITEN JAKIN

Funtzio baten asintotak kalkulatzea

▶ Kalkulatu funtzio honen asintotak:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2}$$

LEHENIK. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ kalkulatu behar da. Emaitza zenbaki bat bada, asintota horizontal bat du.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = \infty \to \text{Ez du asintota horizontalik.}$$

BIGARRENIK. Funtzioa ez dago definituta puntu batzuetan. Puntu horiek aztertu eta limitea kalkulatu behar da. Limitea ∞ bada, asintota bertikal bat du.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2} \to \text{Ez dago definituta } x = 2\text{-n.}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = \frac{7}{0} = \infty \to \text{Asintota bertikala } x = 2\text{-n.}$$

HIRUGARRENIK. Baldin $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0$, hau kalkulatu behar da: $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$. Limite hori zenbaki bat bada, asintota zeihar bat du.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2 - 1}{x - 2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 2x} = 2 \neq 0 \to m = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{2x^2} - 1 - \cancel{2x^2} + 4x}{x - 2} = 4$$

Asintota zeihar bat du $y = 2x + 4$-n.

JARDUERAK

88. Kalkulatu funtzioen asintotak.

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x^3+2x^2-11x-12}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-2x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2-13x+15}$

89. Kalkulatu funtzioen asintotak.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}$

90. Kalkulatu funtzioen asintotak eta adar infinituen kokapenak.

a) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{(x-2)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+4}$

91. Kalkulatu funtzioen adar infinituak eta asintotak.

a) $f(x) = x^2+5x-1$ c) $f(x) = \log x$

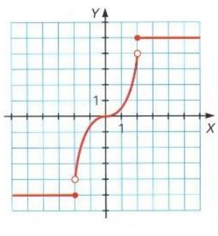
b) $f(x) = 2x-1$ d) $f(x) = \tan x$

92. Kalkulatu funtzio hauen asintotak:

a) $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{|x-1|}$

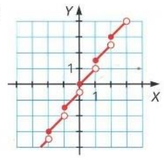
Funtzio baten jarraitutasuna. Motak

93. Aztertu funtzioaren jarraitutasuna $x = 2$, $x = 0$ eta $x = -2$ puntuetan.

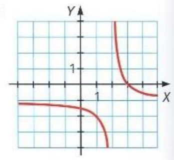


94. Adierazi funtzio bakoitzaren etenuneak eta esan zer motatakoak diren.

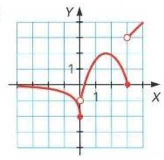
a)



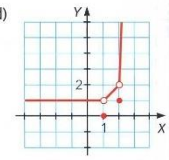
c)



b)



d)



95. Esan ea funtzio bakoitza jarraitua den adierazitako puntuan.

a) $f(x) = 1 - x^2$; $x = -1$ puntuan

b) $f(x) = -x^2 + 3x$; $x = \dfrac{1}{2}$ puntuan

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$; $x = 1$ puntuan

d) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-x-6}$; $x = -2$ puntuan

96. Osatu koadernoan funtzio honen taula:

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$$

x	2,5	2,9	2,999	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$							

Egiaztatu x-k 3ra jotzen duenean limitea hau dela:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

Zenbat da $f(3)$? Egin funtzioaren adierazpen grafikoa. Zertan dira desberdinak $f(x)$ eta $y = x + 1$ funtzioen grafikoak?

97. Adierazi zer etenune dituen funtzio hauetako bakoitzak.

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+3x+5}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-9}$

b) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-x-20}$ d) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{x^4-4x^2+3}$

98. Adierazi funtzio bakoitzaren etenuneak.

a) $f(x) = \sqrt{4-x}$ d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$ e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}$

99. Adierazi zer etenune dituen funtzio hauetako bakoitzak:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - x + 12}$

c) $f(x) = \sqrt{4+x}$

d) $f(x) = \sqrt{4 - 3x - x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 12}$

f) $f(x) = \sqrt{x-5}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$

100. Aztertu zenbaki bakoitzari haren zati osoa egokitzen dion funtzioaren jarraitutasuna.

$$f(x) = [x]$$

Adierazi zer etenune mota dituen funtzio horrek.

101. Aztertu funtzio bakoitzaren jarraitutasuna $x = -2$ puntuan. Etenunea badute, adierazi zer etenune mota den.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{Baldin } x \le -2 \\ \dfrac{3x+7}{x+3} & \text{Baldin } x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & \text{Baldin } x \ne -2 \\ 2 & \text{Baldin } x = -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{Baldin } x < -2 \\ 3 & \text{Baldin } x = -2 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{Baldin } x > -2 \end{cases}$

102. Definitu funtzio bakoitza beste modu batean, jarraituak izan daitezen zenbaki erreal guztietarako.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{Baldin } x < 1 \\ 1 & \text{Baldin } x = 1 \\ 3x - 1 & \text{Baldin } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{Baldin } x \ne 4 \\ 6 & \text{Baldin } x = 4 \end{cases}$

103. Kalkulatu zer balio hartu behar duen a-k, funtzio hauek jarraituak izateko:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{Baldin } x < 1 \\ a & \text{Baldin } x = 1 \\ \dfrac{x-3}{2} & \text{Baldin } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{Baldin } x \ne -2 \\ a & \text{Baldin } x = -2 \end{cases}$

104. Kalkulatu zer balio hartu behar duen a-k, funtzio hauek jarraituak izateko.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{Baldin } x \le 2 \\ 3x + a & \text{Baldin } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x - 2 & \text{Baldin } x \le -1 \\ ax^2 + x + a & \text{Baldin } x > -1 \end{cases}$

105. Zer balio hartu behar du a-k, funtzio hauek jarraituak izan daitezen?

a) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{Baldin } x \le -2 \\ ax - 2 & \text{Baldin } x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \tan \dfrac{-\pi}{2x} & \text{Baldin } x \le -2 \\ \log(ax + 7) & \text{Baldin } x > -2 \end{cases}$

106. Kalkulatu a-ren eta b-ren balioak, funtzio hauek jarraituak izan daitezen zenbaki erreal guztietarako:

a) $f(x) = \begin{cases} |2 - x| & \text{Baldin } x \le 2 \\ \dfrac{x}{b} & \text{Baldin } 2 < x \le 4 \\ a & \text{Baldin } x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2bx + 4 & \text{Baldin } x < 1 \\ ax + 5 & \text{Baldin } 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{3x - 1}{x} & \text{Baldin } x > 2 \end{cases}$

107. Kalkulatu zer balio izan behar duen a-k, funtzioak jarraituak izateko.

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{Baldin } x \le a \\ \log_2 x & \text{Baldin } x > a \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - x - 2 & \text{Baldin } x < -a \\ x^2 - 2 & \text{Baldin } a \le x \le a \\ x^3 + x^2 - x - 2 & \text{Baldin } x > a \end{cases}$

108. Kalkulatu m eta n, $f(x)$ jarraitua izateko $\mathbb{R}$-n.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{Baldin } x \le 1 \\ mx + n & \text{Baldin } 1 < x \le 3 \\ 4 & \text{Baldin } x > 3 \end{cases}$$

109. Aztertu lau funtzio hauen jarraitutasuna eremu osoan. Ondoren, adierazi zer etenune dituen funtzio bakoitzak.

a) $f(x) = \sin(x + \pi)$

b) $f(x) = \ln(x + e)$

c) $f(x) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = 2^{x-3}$

110. Ikertu funtzioen jarraitutasuna.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x + 1}{x^2 - x - 6} & \text{Baldin } x \le 1 \\ \dfrac{3x + 1}{x - 5} & \text{Baldin } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \log(x - 1) & \text{Baldin } x < 5 \\ 3 & \text{Baldin } x \ge 5 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{Baldin } x \le 0 \\ \sqrt{1 - x} & \text{Baldin } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{x^2 + 1} & \text{Baldin } x \le 0 \\ \log(x + 1) & \text{Baldin } x > 0 \end{cases}$

JARDUERAK

Limiteen problemak

111. Atleta batek 100 km egin behar ditu lasterka. Lehenengo egunean distantzia horren erdia egin du; bigarrenean, falta zaionaren erdia; hirugarrenean, bigarren egunean utzi zuenaren erdia; eta horrela, hurrenez hurren. Zenbat egun beharko ditu atletak 100 km-ak egiteko? Arrazoitu erantzuna.

112. Kalkulatu $\lim_{x\to 3}(f \circ g)$, funtzioak hauek izanik:

$$g(x) = x + 2 \qquad f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 10x}$$

113. Marraztu adierazitako baldintzak betetzen dituzten funtzioen gutxi gorabeherako grafikoa.

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - 2x] = 1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$

114. Idatzi funtzio arrazional bat kasu bakoitzean.

a) Asintota bakarrak $x = 2$ eta $x = -3$ dira.

b) Asintota bakarrak $x = -2$ eta $y = 3$ dira.

c) Asintotak $x = 4$ eta $y = 2x - 1$ dira.

115. Aztertu funtzioaren jarraitutasuna zenbaki erreal guztietarako.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{Baldin } x \neq 0 \\ 0 & \text{Baldin } x = 0 \end{cases}$$

116. Funtzio hau dugu:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{Baldin } x \leq 1 \\ ax + b & \text{Baldin } x > 1 \end{cases}$$

Kalkulatu a eta b, funtzioa jarraitua izateko $\mathbb{R}$ osoan eta $f(2) = 7$ izateko.

117. Aztertu funtzioaren jarraitutasuna, a eta b parametroen balioen mende.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + a}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{Baldin } x \neq 0 \\ b & \text{Baldin } x = 0 \end{cases}$$

118. Hau dio Bolzanoren teoremak:

f funtzioa jarraitua bada [a, b] tartean, eta f(a)-ren zeinua eta f(b)-rena desberdinak badira, c ∈ (a, b) puntu bat existitzen da, f(c) = 0 betetzen duena.

Aplikatu Bolzanoren teorema, $x^2 + x - 4 = 0$ ekuazioak (1, 2) tartean gutxienez soluzio bat baduela frogatzeko.

119. Aplikatu Bolzanoren teorema, $e^{-x} + 2 = x$ ekuazioak soluzioren bat baduela frogatzeko.

120. Kalkulatu a-ren balioa, limiteak balio finitua izan dezan.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax$$

a-ren balio hori hartuta, kalkulatu b, hau betetzeko:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax - b = 0$$

Zer erlazio dago $y = ax + b$ zuzenaren eta $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x - 1}$ funtzioaren artean?

121. Behean ageri den formula Albert Einsteinek idatzi zuen. Gorputz baten masa, M, adierazten du haren abiaduraren, v-ren, mende, c argiaren abiadura izanik (300.000 km/s).

$$M = \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

a) Kalkulatu M masaren limitea, v-k c-ra jotzen duenean.

b) Aztertu ea gorputz batek argiaren abiadura har dezakeen.

122. Ospitale bateko traumatologiako atalak sistema berri bat ezarri behar du, epe laburrean itxarote-zerrendak murrizteko.

Aurreikusten da hemendik aurrera $P(t)$ funtzioak adieraziko duela t (hilabetetan) une batean itxarote-zerrendan egon gabe ebakuntza egingo zaien pazienteen ehunekoa.

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{Baldin } 0 \leq t \leq 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0{,}4t} & \text{Baldin } t > 10 \end{cases}$$

Denbora asko pasatutakoan, zer ehuneko izango da?

123. Produktu jakin baten komertzial batek hilean 600 €-ko kopuru finko bat gehi komisio bat kobratzen du. Komisioa $x^2 - x + 1$ adierazpenaren mende dago, non x-k saldutako produktu kopurua adierazten duen.

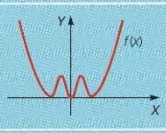
Komertzialak bere gastuak ordaindu behar ditu; hilean 50 € gehi saldutako produktu bakoitzeko 3 € dira. Kalkulatu komertzialaren hileko soldata adierazten duen funtzioa. Funtzio jarraitua al da?

250

Sakontzeko

Hausnartu teoriari buruz

124. Aukeratu erantzun egokia. (Udaberriko lehiaketa)

Zenbaki batekin hasi, zenbakia bikoiztu, eta gero, 1 kenduko diogu. Prozedura hori ondoz ondo 99 aldiz aplikatu ondoren, $2^{100} + 1$ lortzen dugu. Zein zenbakirekin hasiko gara?	1	2	3	4	5
Zenbat $y = f(x)$ funtzio jarraitutan da $f(x)$-ren grafikoa irudikoa bezalakoa. 	16	12	8	4	2
Zein zenbaki da 2.007.a 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ... segidan?	55	62	63	67	71
n zenbaki oso positibo bakoitzerako, $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$ da. Zenbatekoa da zenbaki lehenak diren $f(n)$-ren balio guztien batura?	794	796	798	800	802
Zein da 11^{48}-ren azkenaurreko zifra?	8	6	4	2	0

125. Kalkulatu limiteak.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \cdot \sin \dfrac{1}{x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \cos x\right)$

126. Aztertu funtzioen jarraitutasuna.

a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ b) $f(x) = |x^2 - 1|$ c) $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$

Pentsatu pixka bat gehiago

127. x angelua radianetan adierazita dagoela kontuan hartuta, frogatu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

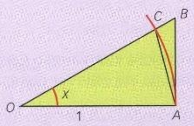
Frogatu, halaber, x angelua gradu hirurogeitarretan adierazita badago hau betetzen dela:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$$

GAKOA

$\dfrac{0}{0}$ motako indeterminazio bat ebatzi behar da.

Triangelu angeluzuzen batean, AC sektorearen azalera OAC eta OAB triangeluen azaleren artean dago.



Kontuan hartu OAB triangeluaren altuera $|AB| = \tan x$ dela, eta OAC-ren altuera, $\sin x$.

Matematikako olinpiadak

128. Egiaztatu $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ ez dela existitzen.

129. Kalkulatu limite hau:

$$\lim_{x\to\infty} \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \cos\frac{x}{2^3} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$$

GAKOA

Hartu formula hau

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

eta aplikatu behin eta berriz.

(Matematikako olinpiadak, Madril)

130. Arrazoitu ea aldagai errealeko $f(x)$ funtzio erreal baten jarraitutasuna egiazta daitekeen $x = 0$ puntuan, kasu hauetan:

a) n arrunta bada, $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = 1$ eta $f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) = -1$.

b) x erreal ez-negatiboa bada, $f(x) = x^2$; eta x erreal negatiboa bada, $f(x) = 0$.

c) n arrunta bada, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$.

(Matematikako olinpiadak, Madril)

MATEMATIKA ZURE BIZITZAN

ZERTARAKO BALIO DUTE FUNTZIOEN LIMITEEK?

Urte jakin bat zer mendetakoa den jakiteko

Joan I.a aita santuak VI. mendean Dionisio Exiguus monjeari eskatu zion Jesu Kristo noiz jaio zen aztertzeko, ordutik zenbat urte igaro ziren jakiteko. Harrezkero erabiltzen dugu, hain zuzen ere, gaur egungo egutegia. Monje hark, Biblia eta beste agiri batzuk aztertu ondoren, Jesu Kristo Erroma fundatu zutenetik 753. urteko abenduaren 25. egunean jaio zela kalkulatu zuen. Eta hurrengo urtea, Erroma fundatu zutenetik 754. urtea, hain zuzen ere, Kristo ondorengo 1. urtea izendatu zuten. Horrela zenbatu izan ditugu urteak gaur egun arte. Urte jakin bat zer mendetakoa den jakin nahi badugu, zatika definitutako funtzio bat erabil dezakegu. Horretarako, $[x]$ zati osoa funtzioa erabiliko dugu. Ikus dezagun nolakoa den funtzio hori.

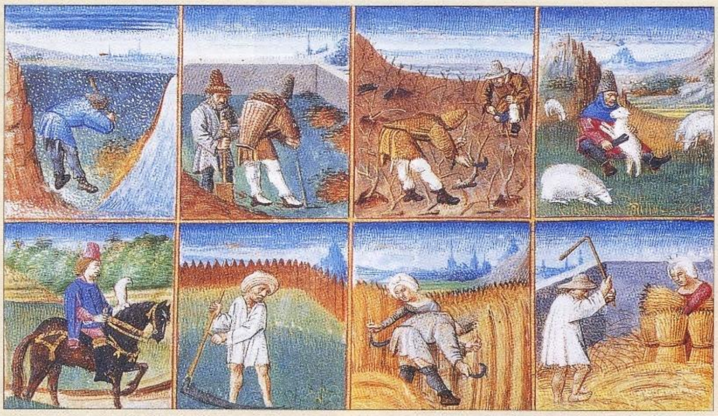
x urte jakin bat zer mendetakoa den jakiteko, honela definituko dugu $f(x)$ funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{x-1}{100}\right] + 1 & \text{Baldin } x \geq 0 \\ \left[\dfrac{x-1}{100}\right] & \text{Baldin } x < 0 \end{cases}$$

Kalkuluak egingo ditugu, $x = 2013$ urtea hartuta.

$$f(2013) = \left[\frac{2013-1}{100}\right] + 1 = 20 + 1 = 21$$

Beraz, 2013. urtea XXI. mendekoa da.



IRAKURRI ETA ULERTU

1. Zer urte izendatu zuten K.o. 1. urtea?
2. Zer gertaerak adierazi zuen Erroman erabiltzen zuten egutegiaren hasiera, Joan I.a aita santuak egutegi berria ezarri aurretik?

INTERPRETATU

3. Zer balio ordeztu behar da funtzioan, K.a. 325. urtea zer mendetakoa den kalkulatu nahi badugu?
4. Zer mendetakoa da K.o. 1616. urtea? Eta K.a. 325. urtea?
5. Zer mendetan fundatu zuten Erroma?

HAUSNARTU

6. Zero urtea ez da existitzen. Zer lotura du baieztapen horrek mendea kalkulatzeko funtzioa zatika definitutako funtzioa izatearekin?
7. Noiz hasi zen XXI. mendea?

APLIKATU

8. Aztertu mendea kalkulatzeko funtzioaren jarraitutasuna eta esan zer etenune mota dituen.
9. Marraztu mendea kalkulatzeko funtzioaren grafikoa, jakinda x-k balio errealak hartzen dituela.
10. Aztertu funtzio horren jarraitutasuna $x = 2000$ puntuan. Erabili alboko limiteak.

252

B. Zereginetan bidalitako ariketak

Z1:

Belatz Martinena Moreno

LIMITEAK:

$\boxed{\text{orr. } 232 - 17}$

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x-2-6x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2+2x-1}{x^2}}{\frac{x-2-6x^2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}-\frac{6x^2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-6}=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$$ ✓✓

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x(x^2-1)}{2-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-3x}{-x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+\cdots}{-x^2+\cdots}=-\infty$$

$$\cancel{=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}{-\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}}$$

$$=\left(\frac{3}{-0}\right)=-\infty$$ ✓✓

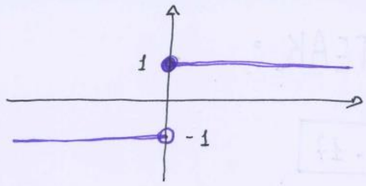
$\boxed{\text{orr. } 233 - 19}$

a) $$\lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x-1}=\left(\frac{-1}{0}\right)=-\infty$$ ✓✓

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-2x+1}{x-1}=\left(\frac{-1}{-0}\right)=+\infty$$ ✓✓

-1-

b) $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 \ ; & x \geq 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 \ ; & x < 0 \end{cases}$

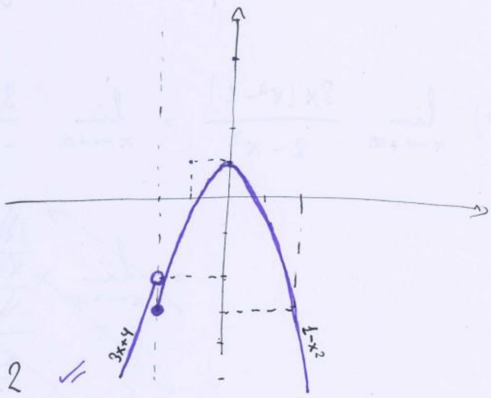


$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ ✓✓

$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$ ✓✓

$\boxed{\text{orr } 233. - 20}$

$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 \ ; & x < -2 \\ 1 - x^2 \ ; & x \geq -2 \end{cases}$



$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (3x + 4) = -2$ ✓✓

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (1 - x^2) = -3$ ✓✓

-2-

Z2:

LIMITEAK (II):

Belatz Martinena Moreno

$\boxed{\text{Orr. 244 - 49}}$

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n}-\frac{5n^2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)(n+1)-(5n^3)}{n(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+n^2+n-5n^3}{n^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^3+2n^2+n}{n^2+n}=-\infty$$

$\boxed{\text{Orr. 244 - 48}}$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(8n^2+3n+2)^2}{n^3+2n^4}}=$$

$$=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{64n^4+\cdots}{2n^4+\cdots}}=\sqrt{\frac{64}{2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$$

$\boxed{\text{Orr. 244 - 50}}$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-\sqrt{16n^2+2})(4n+\sqrt{16n^2+2})}{4n+\sqrt{16n^2+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{16n^2}-(\cancel{16n^2}+2)}{4n+\sqrt{16n^2+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{4n+\sqrt{16n^2+2}}=0$$

-1-

b) $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2 + n + 31} - 3n \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2+n+31} - 3n\right)\left(\sqrt{4n^2+n+31} + 3n\right)}{\sqrt{4n^2+n+31} + 3n} =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{4n^2+n+31-9n^2}{\sqrt{4n^2+n+31} + 3n} = \lim_{n \to \infty} \frac{-5n^2+n+31}{\underbrace{3n + \sqrt{4n^2+n+31}}} = -\infty$

Honen guztiaren maila, gehienez ere, 1 da.

- 2 -

Z3:

LIMITEEN KALKULUA (III)

Belatz Martinena Moreno

$\boxed{\text{Orr. 244 - 54}}$

a) $\lim_{x \to +\infty} |-x^2 + 5x - 1| = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} |3x3 - 2x^2 + x - 7| = +\infty$

c) $\lim_{x \to -\infty} |1 - x^2 - 5x^6| = +\infty$

- Edozein polinomioren kasuan:

$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \pm\infty$

edo

- Balio absolutuak, negatiboak positibo bihurtzen ditu. Beraz:

$\lim_{x \to +\infty} |P(x)| = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} |P(x)| = +\infty$

$\boxed{\text{Orr. 245 - 61}}$

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2+4})(x + \sqrt{x^2+4})}{x + \sqrt{x^2+4}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 4}{x + \sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{x + \sqrt{x^2+4}} = 0$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+6} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+6}) - x)(\sqrt{x^2+6} + x)}{\sqrt{x^2+6} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 6 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+6} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{\sqrt{x^2+6} + x} = 0$$

-1-

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x-2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)^{3x-2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{3x-2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}(3x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{x}(3x-2)} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]}_{= e}^{\overbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-2}{x}\right)}^{= 6}} =$$

$$= e^{6}$$

-9-

Z4:

LIMITEEN KALKULUA (IV):

Belatz Martinena Moreno

$\boxed{\text{Or } 244 - 48}$

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x + \sqrt{1+x^2}}{3x+5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{x}}{\frac{3x+5}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{5}{x}} =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}}{3 + \frac{5}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \cancel{\frac{x^2}{x^2}}}}{3 + \frac{5}{x}} =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \sqrt{\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0} + 1}}{3 + \cancel{\frac{5}{x}}_{\,0}} = \frac{2+\sqrt{1}}{3} = \frac{3}{3} = 1$ //

$\boxed{\text{Or } 244 - 51}$

d) $\lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + 1 - \frac{x}{x+1}\right)^x =$

$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x+1}\right)^x =$

$= \underbrace{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1}}_{= e}{}^{\cdot \frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1}} = e^1 = e$ //

-1-

$\boxed{\text{Orr } 245 - 59}$

Zenbakitzailearen maila : 2
Izendatzailearen maila : 1
$\Rightarrow$ Emaitza $\pm\infty$ da.

b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1} = -\infty$$

Izendatzaileko gai nagusiko koefizientea, >0
Zenbakitzaileko " " " , >0

Positibo zati positibo, positibo.

Baina $\lim_{x\to-\infty}$ denez, positibo zati negatibo, negatibo.

$\boxed{\text{Orr } 245 - 61}$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right)\left(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^3-3}\right)}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^3-3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}+3}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{7}{\underbrace{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3}}_{\infty+\infty\,=\,\infty}} = 0 \;//$$

Zerbait zati ∞, beti da zero.
"
Zenbaki bat bada, noski!

- 2 -

Z5:

Belatz Martinena Moreno

LIMITEEN KALKULUA (V):

$\boxed{\text{Orr. } 246 - 72}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x+1}{x^2+2x} = \left(\dfrac{1}{0}\right) = \pm\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x+1}{x^2+2x} = \left(\dfrac{1}{+0}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3x+1}{x^2+2x} = \left(\dfrac{1}{-0}\right) = -\infty \end{cases}$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2+2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{Orr. } 246 - 74}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x + \cancel{2} - \cancel{2}}{x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}\right)} =$$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\boxed{\text{Orr. } 249 - 73}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{2}{3}$

Z6:

Belatz Martinena Moreno

ASINTOTAK:

$\boxed{\text{Orr. 236 - 27}}$

a) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{2x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow$ Asintota horizontala $\boxed{y = \frac{3}{2}}$-n.

b) $f(x) = \dfrac{1-2x^3}{4x^3-3x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Asintota horizontala $\boxed{y = -\frac{1}{2}}$-n.

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2}{1} = 2$ $\Rightarrow$ Asintota horizontala $\boxed{y = 2}$-n

d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1$ $\Rightarrow$ Asintota horizontala $\boxed{y = 1}$-en

$\boxed{\text{Orr. 237 - 28}}$

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$; $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Ez dauka asintota bertikalik!

b) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$; $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow$ Asintota bertikala $\boxed{x=-2}$-n

c) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-1}$; $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Asintota bertikalak $\boxed{x=1}$ eta $\boxed{x=-1}$-en

- 1 -

$\boxed{\text{Orr } 237 - 29}$

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$; $\circ\; m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - x} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$\boxed{m = 1}$$

$$\circ\; n = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2 - x}{x-1} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + x}{x-1} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{n = 1}$$

Asintota zeiharra : $\boxed{y = x + 1}$

-2-

Z7:

Beletz Martinena Moreno

JARRAITUTASUNA :

Orr. 238 - 30

a) $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; f funtzioa jarraitua da $\boxed{\mathbb{R} - \{0\}}$-n .

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$; f funtzioa jarraitua da $\boxed{[4, +\infty)}$-n.

c) $f(x) = \ln(1-x^2)$

• $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0$ → $x = 1$; → $x = -1$

f funtzioa jarraitua da $\boxed{(-1, +1)}$-n.

Orr. 239 - 32

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; f funtzioa jarraitua da $\boxed{\mathbb{R} - \{2\}}$-n.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \ x \leq 1 \\ x & ; \ 1 < x < 4 \\ 5 & ; \ x \geq 4 \end{cases}$

• $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1$

• $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1$

f funtzioa jarraitua da $x = 1$ puntuan.

• $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} x = 4$

• $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} 5 = 5$

f funtzioa ez da jarraitua $x = 4$ puntuan.

f funtzioa jarraitua da $\boxed{\mathbb{R} - \{0, 4\}}$-n .

- 1 -

Orr. 239 - 33

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & ; \quad x < 1 \\ 2x-3 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$

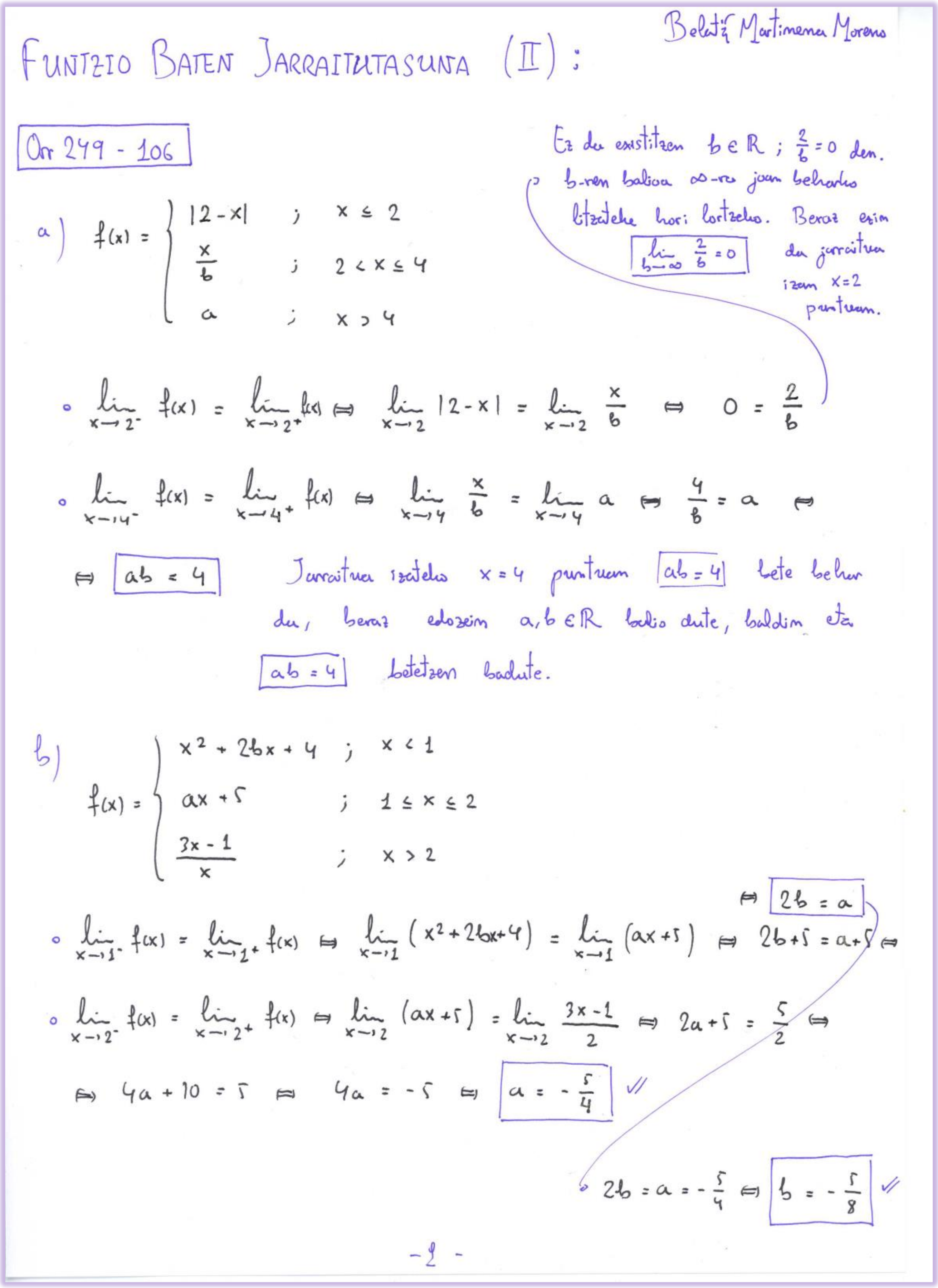
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x-3) = -1$

f funtzioa ez da jarraitua $x = 1$ puntuan. Jauzi duen etengune mota, jauzi infinitua da.

f funtzioa jarraitua da $\boxed{\mathbb{R} - \{1\}}$-n.

-2-

Z8:



Belatz Martinena Moreno

FUNTZIO BATEN JARRAITUTASUNA (II):

$\boxed{\text{Orr } 249 - 106}$

a) $f(x) = \begin{cases} |2-x| & ; \quad x \leq 2 \\ \dfrac{x}{b} & ; \quad 2 < x \leq 4 \\ a & ; \quad x > 4 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} |2-x| = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{b} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{2}{b}$

Ez da existitzen $b \in \mathbb{R}$; $\frac{2}{b} = 0$ den. b-ren balioa ∞-ra joan beharko litzateke hori lortzeko. Beraz ezin da jarraitua izan $x=2$ puntuan. $\boxed{\lim\limits_{b \to \infty} \frac{2}{b} = 0}$

- $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{b} = \lim\limits_{x \to 4} a \Leftrightarrow \dfrac{4}{b} = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{ab = 4}$

Jarraitua izateko $x=4$ puntuan $\boxed{ab=4}$ bete behar du, beraz edozein $a, b \in \mathbb{R}$ balio dute, baldin eta $\boxed{ab=4}$ betetzen badute.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2bx + 4 & ; \quad x < 1 \\ ax + 5 & ; \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{3x-1}{x} & ; \quad x > 2 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2bx + 4) = \lim\limits_{x \to 1} (ax+5) \Leftrightarrow 2b + 5 = a + 5 \Leftrightarrow \boxed{2b = a}$

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} (ax+5) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-1}{2} \Leftrightarrow 2a + 5 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a + 10 = 5 \Leftrightarrow 4a = -5 \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{5}{4}}$ //

$2b = a = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \boxed{b = -\frac{5}{8}}$ //

- 1 -

C. AZTERKETA PRESTATZEKO MATERIALA

ARIKETA

AZTERTU FUNTZIOAREN JARRAITUTASUNA

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 1}{x - 1} & ; \quad x < 5 \\[2ex] \dfrac{3x^2 + 1}{x^2} & ; \quad x \geq 5 \end{cases}$$

- **ZATIKA DEFINITUTAKO MUGA AZTERTU:** konprobatu ea mugan, ezker eta eskuin limiteek bat egiten duten.

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \frac{x^2 - 8x + 1}{x - 1} = -3{,}5$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{3x^2 + 1}{x^2} = 3{,}04$$

Ezker eta eskuin limiteak zenbaki erreal ezberdinak dira, hortaz, $x = 5$ punutan jauzi **finitu** bat dago.

ARIKETA

AZTERTU FUNTZIOAREN JARRAITUTASUNA

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 1}{x - 1} & ; \quad x < 5 \\[2ex] \dfrac{3x^2 + 1}{x^2} & ; \quad x \geq 5 \end{cases}$$

- **IKUSI FUNTZIOAK NON EMATEN DITUEN ARAZOAK:** izendatzailea zero bada, funtzioak puntu horretan "explotatuko" du.

$\boxed{x = 1}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 8x + 1}{x - 1} = \cdots = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 8x + 1}{x - 1} = \cdots = -\infty$$

Ezker eta eskuin limiteek minus eta plus infinito ematen dute (hurrenez hurren), hortaz, $x = 1$ punutan jauzi **infinitu** bat dago (asintota bertikala).

ARIKETA

AZTERTU FUNTZIOAREN JARRAITUTASUNA

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 1}{x - 1} & ; \quad x < 5 \\[2ex] \dfrac{3x^2 + 1}{x^2} & ; \quad x \geq 5 \end{cases}$$

f jarraitua: $\mathbb{R} - \{1, 5\}$-en

- $x = 1$-en jauzi **infinitua**.
- $x = 5$-en jauzi **finitua**.

ARIKETA

AZTERTU FUNTZIOAREN ASINTOTAK

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 1}{x - 1} & ; \quad x < 5 \\[2ex] \dfrac{3x^2 + 1}{x^2} & ; \quad x \geq 5 \end{cases}$$

- **ASINTOTA HORIZONTALA:** kalkulatu plus eta minus infiniturako limiteak.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 8x + 1}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2} = 3$$

$f(1000) = 3{,}000001$

Asintota horizontala dauka x plus infinitura doanean. Asintota $y = 3$ zuzena da, eta funtzioa goiko balioetatik hurbiltzen da.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+1}{x-1} & ; \quad x<5\\[2mm] \dfrac{3x^2+1}{x^2} & ; \quad x\geq 5\end{cases}$$

ARIKETA

AZTERTU FUNTZIOAREN ASINTOTAK

- **ASINTOTA BERTIKALA:** kalkulatu dugu jarraitutasuna aztertzean.

$\boxed{x=1}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-8x+1}{x-1} = \cdots = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-8x+1}{x-1} = \cdots = -\infty$$

Asintota bertikala dauka $x=1$ punutan. Asintota $x=1$ zuzena da. Ezkerretik plus infinitura jotzen du, eta eskuinetik minus infinitura.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+1}{x-1} & ; \quad x<5\\[2mm] \dfrac{3x^2+1}{x^2} & ; \quad x\geq 5\end{cases}$$

ARIKETA

AZTERTU FUNTZIOAREN ASINTOTAK

- **ASINTOTA ZEIHARRA:** bakarrik egon daiteke $x<5$ balioetan, izan ere, "azpifuntzio" horren zenbakitzailearen maila, izendatzailearena baino maila bat altuagoa da. Asintota zeiharra, minus infinituan egonen da beraz.

$$g(x)=mx+n$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2-8x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-8x+1}{x^2-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-8x+1}{x-1}-x\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-8x+1}{x-1}-\frac{x(x-1)}{x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-8x+1-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x+1}{x-1}=-7$$

$$\boxed{g(x)=x-7}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+1}{x-1} & ; \quad x<5\\[2ex] \dfrac{3x^2+1}{x^2} & ; \quad x\geq 5\end{cases}$$

ARIKETA

AZTERTU FUNTZIOAREN ASINTOTAK

- **ASINTOTA ZEIHARRA:** bakarrik egon daiteke $x<5$ balioetan, izan ere, "azpifuntzio" horren zenbakitzailearen maila, izendatzailearena baino maila bat altuagoa da. Asintota zeiharra, minus infinituan egonen da beraz.

Asintota zeiharra dauka minus infinituan. Asintota $g(x)=x-7$ zuzena da eta funtzioa goiko balioetatik hurbiltzen da.

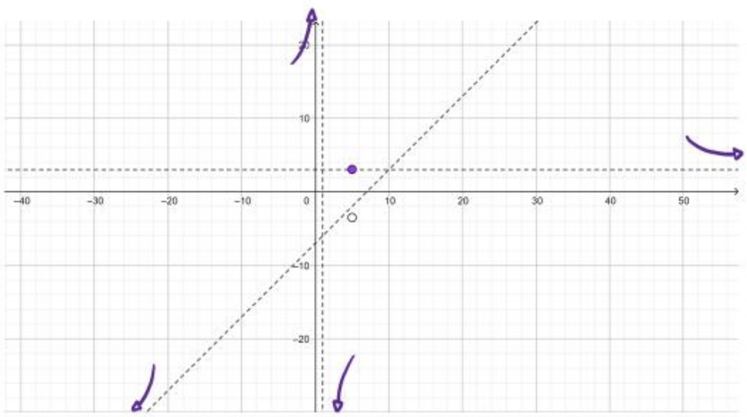
$f(-1000)=-1006{,}994006$

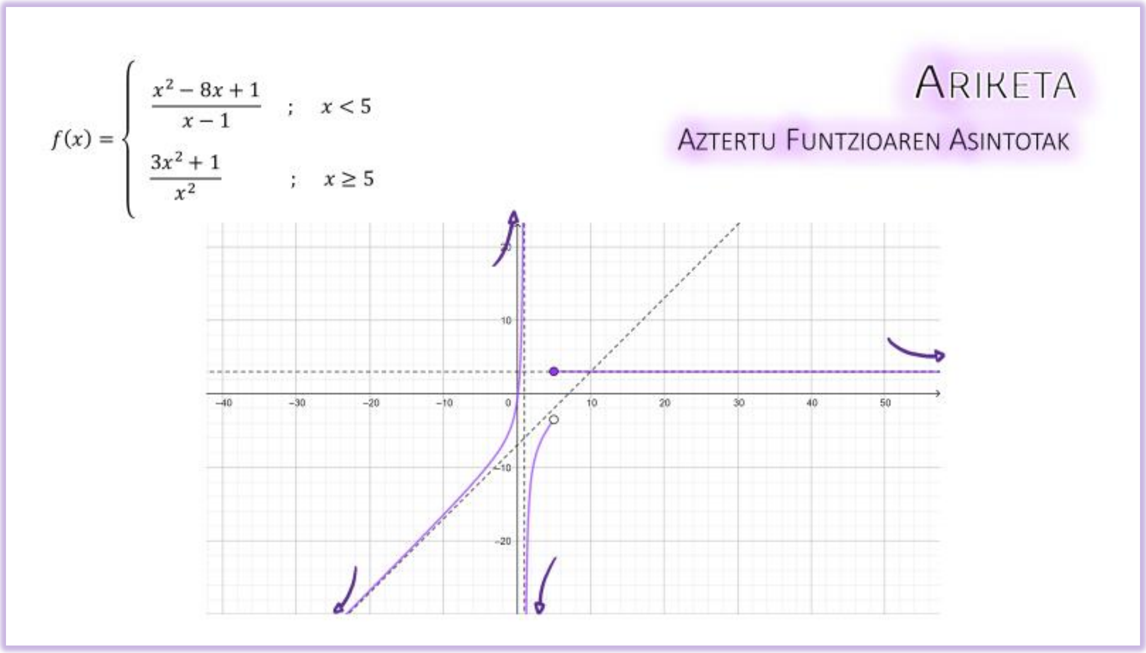
$g(-1000)=-1000-7=-1007$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+1}{x-1} & ; \quad x<5\\[2ex] \dfrac{3x^2+1}{x^2} & ; \quad x\geq 5\end{cases}$$

ARIKETA

AZTERTU FUNTZIOAREN ASINTOTAK





$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+1}{x-1} & ; \quad x<5\\[2mm] \dfrac{3x^2+1}{x^2} & ; \quad x\geq 5\end{cases}$$
ARIKETA
AZTERTU FUNTZIOAREN ASINTOTAK

D. AZTERKETA GLOBALA

Matematika I			NOTA
Ikasturtea: 19/20	Ebaluazioa: 3		
Data: 2020-05-22	Maila: Batx. 1	Taldea: F	
Analisia			

Izen-abizenak:

1. Kalkulatu funtzio hauen definizio eremua (1p bakoitza):

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$ b) $f(x)=\dfrac{\ln(4x-1)}{3-\sqrt{x+1}}$

2. Egin hurrengo limiteak (1p bakoitza):

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+x}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$

3. Esan hurrengo funtzioak jarraituak diren eta ez badira, aurkitu etenune mota (1p bakoitza).

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & ; \quad x<0\\ x^2+x-\dfrac{1}{2} & ; \quad 0\le x\le 1\\ 3x & ; \quad x>1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \quad x\neq 1\\ x^2+1 & ; \quad x=1\end{cases}$

4. Aukeratu hiru ariketa hauetan **bakarra** (3p).

a) Kalkulatu funtzio honen definizio eremua, asintotak (baldin eta baditu esan nola hurbiltzen garen asintota horietara) eta aztertu jarraitutasuna.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+2}{x} & ; \quad x < 0 \\ \dfrac{2x+2}{x-2} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

b) Kalkulatu funtzio honen definizio eremua, asintotak eta aztertu jarraitutasuna (jarraitua ez bada, aurkitu etenune mota). Horrez gain, kalkulatu funtzioaren deribatu funtzioa definizioaz baliatuz, eta erabili aurkitutako deribatua zuzen ukitzailea $x = 1$ puntuan kalkulatzeko.

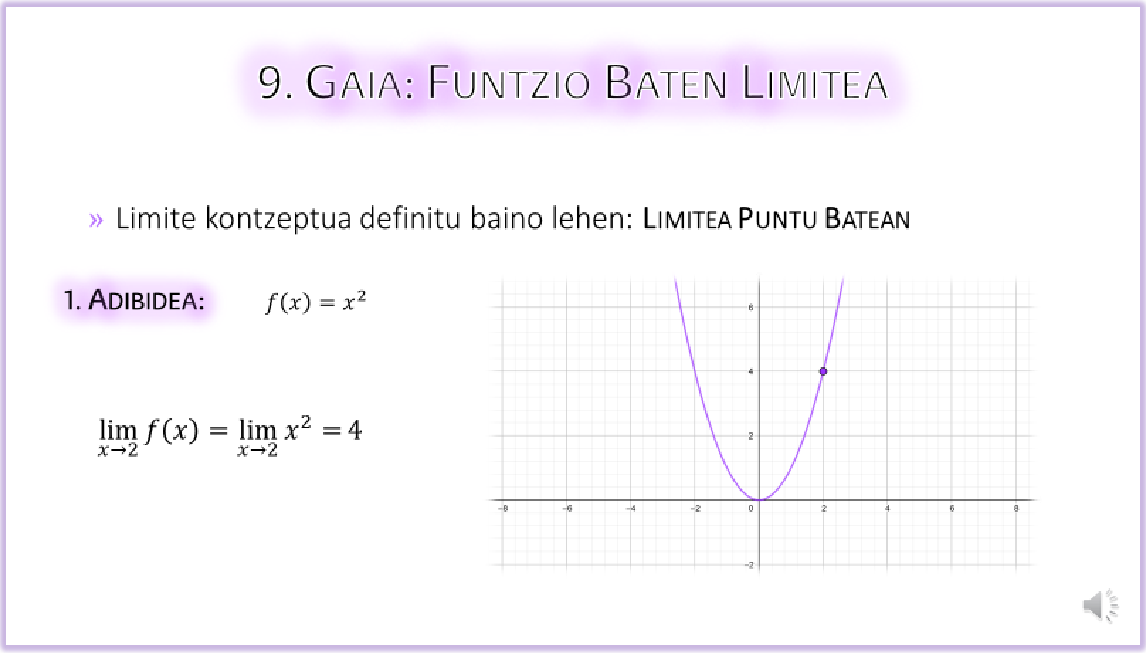
$$f(x) = \frac{x^2-9}{x+1}$$

c) Kontsideratu honako funtzioa:

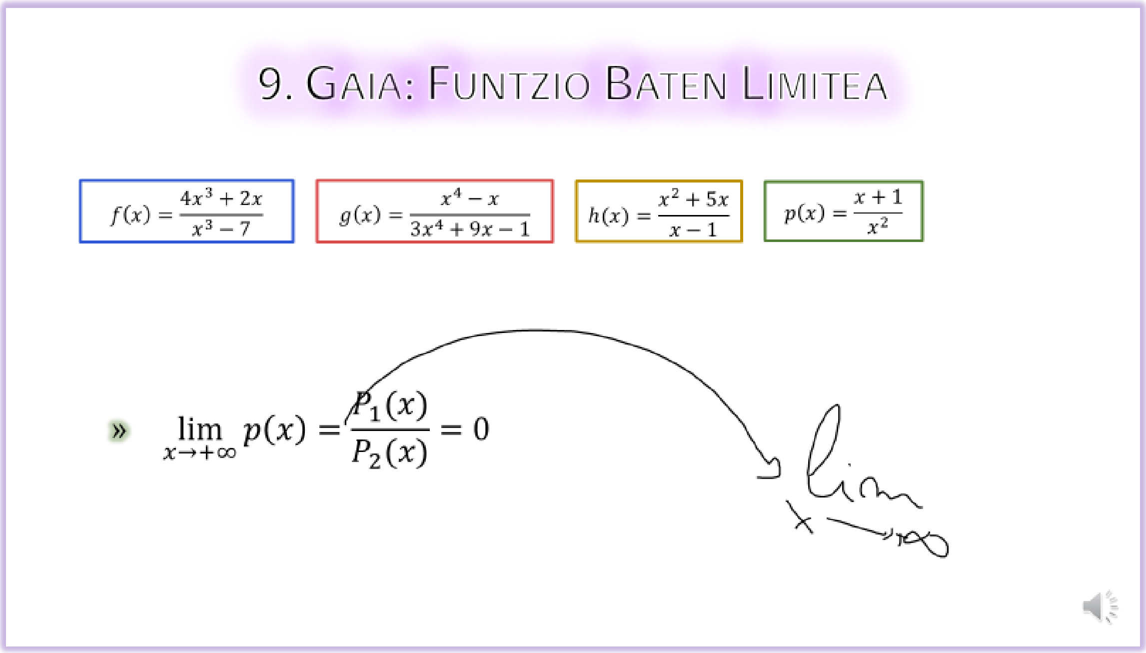
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+2}{x} & ; \quad x \leq 0 \\ [\cos(2x)]^2 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

» Kalkulatu definizio eremua eta aztertu jarraitutasuna.
» Kalkulatu deribatu funtzioa. Asintota bertikalik badu? Eta horizontalik? Esan zeintzuk.
» Kalkulatu funtzioaren zuzen ukitzailearen malda $x = \pi$ puntuan.

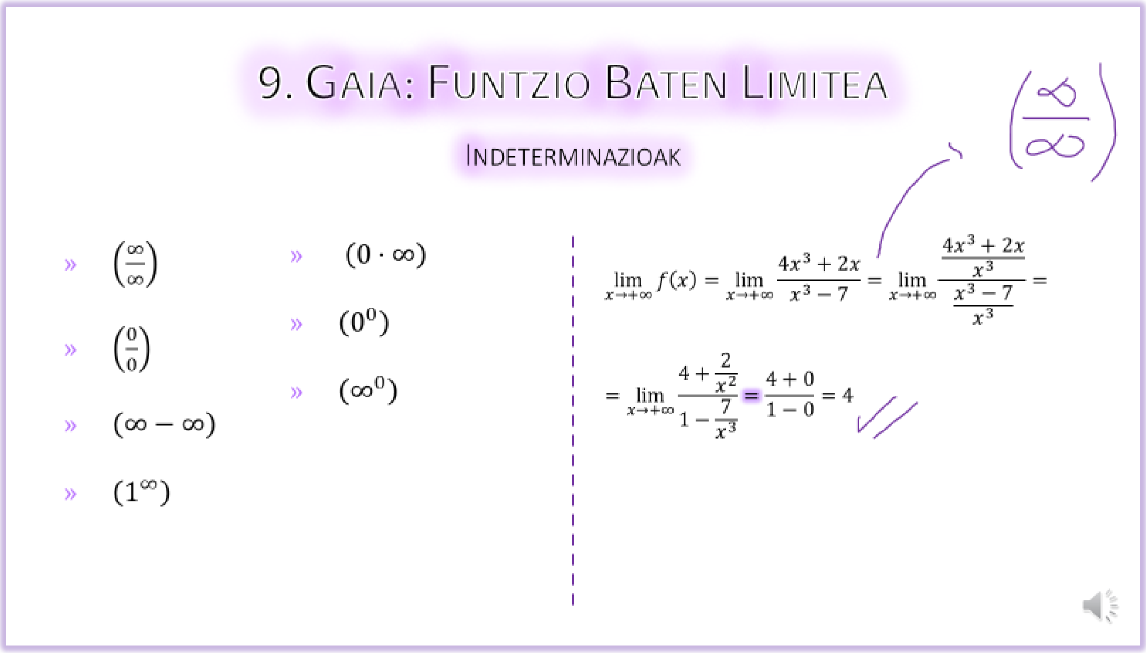
E. BIDEOAK



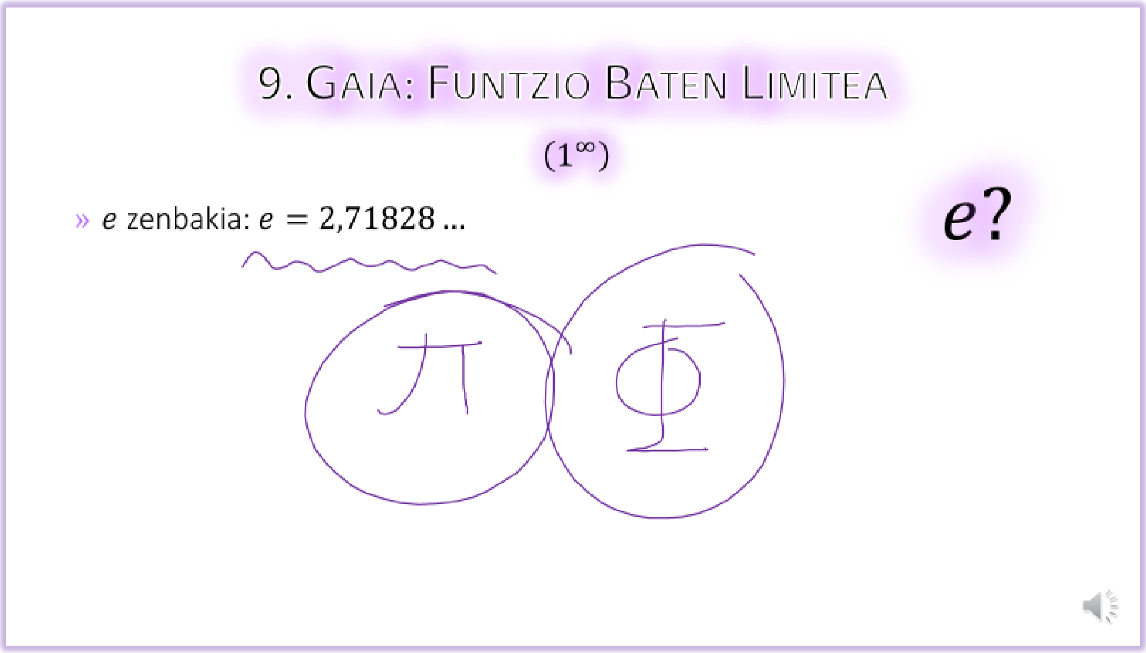
B1 Sarrera: https://www.youtube.com/watch?v=VNO2mZpZ7_E



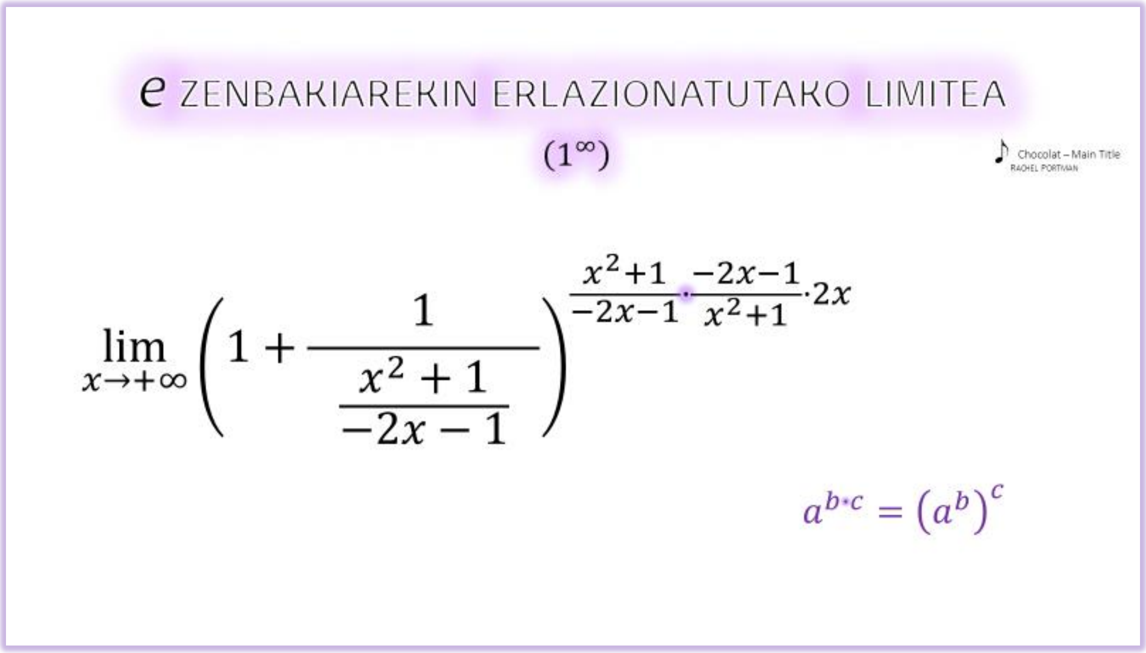
B2 Funtzio baten limitea (infinituan):
https://www.youtube.com/watch?v=_N-qg0UDmjg



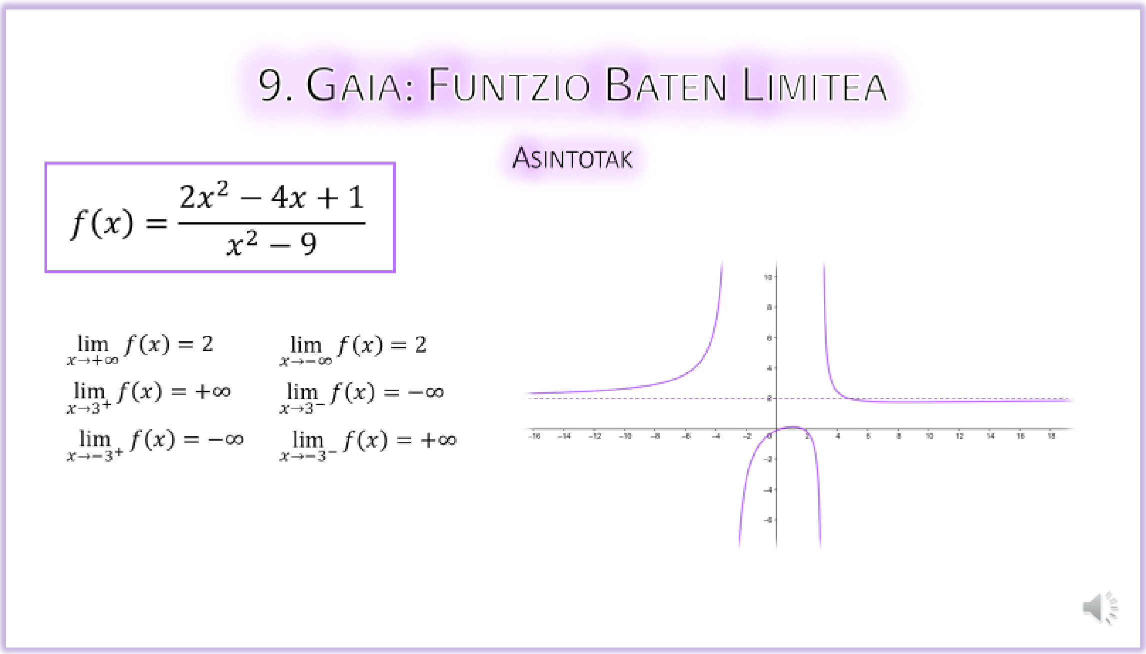
B3 Propietateak eta indeterminazioak:
https://www.youtube.com/watch?v=cLkOfbN-GVY&t=3s



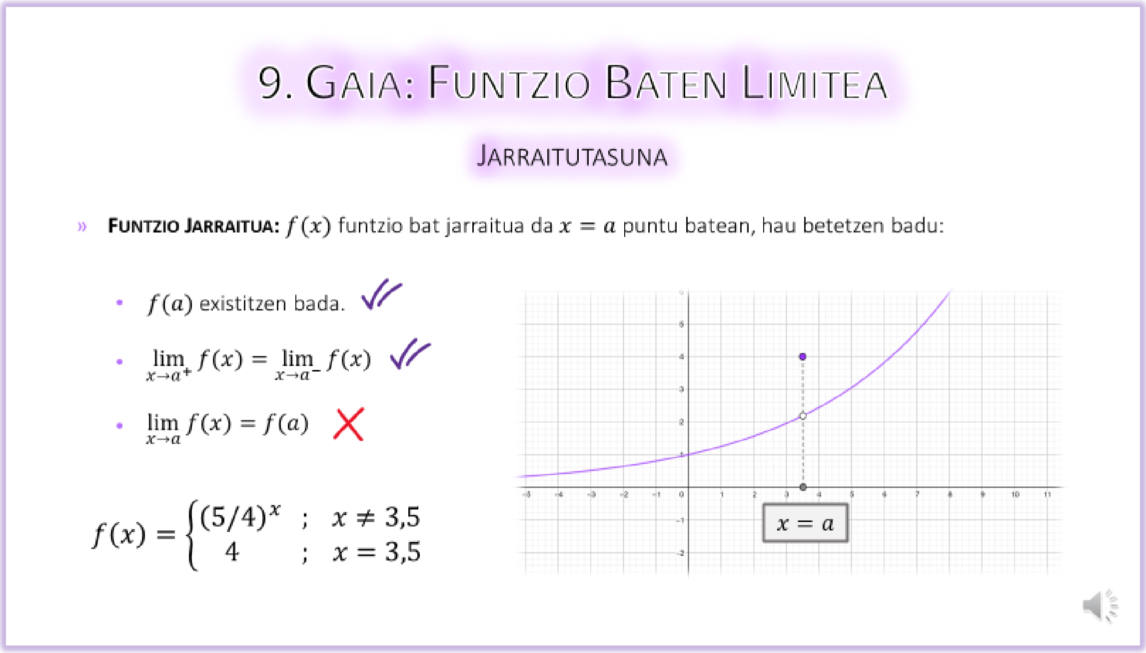
B4 *e* zenbakiarekin erlazionatutako limiteak:
https://www.youtube.com/watch?v=LfXPLodOsCA&t=559s



B5 Limite luze bat: https://www.youtube.com/watch?v=Gos1qwoRCKY



B6 Asintota bertikalak eta horizontalak:
https://www.youtube.com/watch?v=07ve6gNJPkI



B8 Jarraitutasuna: https://www.youtube.com/watch?v=AapTTNjqEDw

DERRIGORREZKO BIGARREN HEZKUNTZA

Zuzendaria:
Haritz Iribas Pardo, Matematika Departamentua