

MATEMÁTICAS

Marta GARCÍA GONZÁLEZ

ENSEÑANZA DE LA SUMA Y LA RESTA: MATERIALES FÍSICOS Y REPRESENTACIONES GRÁFICAS

TFG / GBL 2013

Grado en Maestro en Educación Primaria
Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Trabajo Fin de Grado
Gradu Bukaerako Lana

***ENSEÑANZA DE LA SUMA Y LA RESTA:
MATERIALES FÍSICOS Y REPRESENTACIONES
GRÁFICAS***

Marta GARCÍA GONZÁLEZ

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y SOCIALES
GIZA ETA GIZARTE ZIENTZIEN FAKULTATEA

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Estudiante / Ikaslea

Marta GARCÍA GONZÁLEZ

Título / Izenburua

Enseñanza de la suma y la resta: materiales físicos y representaciones gráficas

Grado / Gradu

Grado en Maestro en Educación Primaria / Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Centro / Ikastegia

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales / Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea
Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Director-a / Zuzendaria

M^a Carmen PRADOS OSÉS

Departamento / Saila

Departamento de Matemáticas / Matematika Saila

Curso académico / Ikasturte akademikoa

2012/2013

Semestre / Seihilekoa

Primavera / Udaberrik

Preámbulo

El Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, modificado por el Real Decreto 861/2010, establece en el Capítulo III, dedicado a las enseñanzas oficiales de Grado, que “estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa de un Trabajo Fin de Grado [...] El Trabajo Fin de Grado tendrá entre 6 y 30 créditos, deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título”.

El Grado en Maestro en Educación Primaria por la Universidad Pública de Navarra tiene una extensión de 12 ECTS, según la memoria del título verificada por la ANECA. El título está regido por la *Orden ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil*; con la aplicación, con carácter subsidiario, del reglamento de Trabajos Fin de Grado, aprobado por el Consejo de Gobierno de la Universidad el 12 de marzo de 2013.

Todos los planes de estudios de Maestro en Educación Primaria se estructuran según la Orden ECI/3854/2007 en tres grandes módulos: uno, *de formación básica*, donde se desarrollan los contenidos socio-psico-pedagógicos; otro, *didáctico y disciplinar*, que recoge los contenidos de las disciplinas y su didáctica; y, por último, *Practicum*, donde se describen las competencias que tendrán que adquirir los estudiantes del Grado en las prácticas escolares. En este último módulo, se enmarca el Trabajo Fin de Grado, que debe reflejar la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas. Finalmente, dado que la Orden ECI/3854/2007 no concreta la distribución de los 240 ECTS necesarios para la obtención del Grado, las universidades tienen la facultad de determinar un número de créditos, estableciendo, en general, asignaturas de carácter optativo.

Así, en cumplimiento de la Orden ECI/3854/2007, es requisito necesario que en el Trabajo Fin de Grado el estudiante demuestre competencias relativas a los módulos de formación básica, didáctico-disciplinar y practicum, exigidas para todos los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria.

En este trabajo, el módulo *de formación básica* ha permitido desarrollar los apartados 2 y 3. En el punto 2 se hace referencia a las teorías que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo del niño y por las cuales se comprende el proceso de aprendizaje entre los niños de 6 a 12 años. Asimismo, en el punto 3 se presentan una serie de contenidos relacionados con la metodología de las secuencias, las cuales están basadas siguiendo las teorías del aprendizaje que comprenden el apartado anterior.

El módulo *didáctico y disciplinar* se refleja en el punto 3 del trabajo, ya que se trabaja la competencia matemática. Se han desarrollado dos secuencias de actividades matemáticas teniendo en cuenta los contenidos del currículo. Asimismo, esta competencia se verá reflejada en el planteamiento de actividades enfocadas a la resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana y el contexto del niño.

Asimismo, el módulo *practicum* aparece reflejado en varios puntos del trabajo. Aunque no se haya podido llevar las secuencias didácticas a la práctica, las experiencias prácticas previas en relación a este tema con alumnos de primer ciclo de Educación Primaria han permitido que se pueda desarrollar las dos secuencias pertenecientes al punto 3 y las expectativas e implicaciones, correspondientes al punto 4 de este trabajo. Por último también se verá reflejado en el apartado de conclusiones.

Uso lingüístico y género

Las referencias a personas o colectivos figuran en el presente trabajo en género masculino como género gramatical no marcado. Así, cuando sea necesario marcar la diferencia de comportamientos observados por razón de sexo, se indicará explícitamente en el texto.

Resumen

En este trabajo se presentan dos secuencias de actividades dirigidas a alumnos de primer ciclo de Educación Primaria con el objetivo de que comprendan el algoritmo de la suma y la resta. Se destaca la importancia que el uso de materiales físicos y representaciones gráficas tiene en la adquisición de esos conocimientos matemáticos.

Las actividades están planteadas y diseñadas de forma que se aprenda de manera significativa, siendo los propios alumnos los protagonistas en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Asimismo, se presentan inicialmente una serie de objetivos y cuestiones planteados con la finalidad de ser conseguidos y resueltos en caso de que las secuencias de actividades se llevasen a la práctica. En este trabajo, teniendo en cuenta la imposibilidad de ponerlo en práctica se han expuesto, como punto final, un conjunto de hipótesis y conclusiones. Para comprobar el grado de veracidad de las mismas, una puesta en práctica de las secuencias es imprescindible.

Palabras clave: algoritmo; suma; resta; materiales; representaciones.

Abstract

The present work contains two different activity sequences to put in practice with children from the first course of Primary School. The main goal is that they learn and understand the algorithm of addition and subtraction. It is important to emphasize the use of physical materials and graphs during the learning process of those mathematical contents.

The activities are made so that the students could learn through the significant learning.

Furthermore, there are some objectives and questions that have been suggested. However, taking into account that it has not been possible to put the activities in practice, it has been unfeasible to answer the questions and to know if the objectives have been achieved. For this reason, in the final part of this academic work appear some hypothesis and conclusions.

Keywords: algorithm; addition; subtraction; material; graph.

ÍNDICE

Introducción	viii
1. Antecedentes, objetivos y cuestiones	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	9
1.3. Cuestiones	9
2. Marco teórico : fundamentación e implicaciones	11
2.1. El papel del profesor	14
3. Material y métodos	17
3.1. Metodología	18
3.2. Secuencias de actividades	19
3.2.1. Secuencia 1	19
3.2.2. Secuencia 2	31
4. Expectativas e implicaciones	38
Conclusiones	42
Referencias	43
Anexos	44
A. Anexo I	44
B. Anexo II	46
C. Anexo III	48
D. Anexo IV	50

INTRODUCCIÓN

Este Trabajo de Fin de Grado que se presenta está enfocado a contenidos que pertenecen al campo de las Matemáticas. La decisión de elegir este campo no fue impuesta ni obligada ante la imposibilidad de elegir entre otras opciones, sino que se vio motivada e influenciada por la oferta de temas que se podían tratar y por el transcurso positivo que han supuesto las asignaturas que han conllevado el aprendizaje y la didáctica de las Matemáticas a lo largo de la carrera en la Universidad Pública de Navarra.

El tema fundamental que se trata es el uso de materiales físicos y representaciones gráficas para la enseñanza de las operaciones de suma y de resta en el primer ciclo de Educación Primaria. Dicho tema resultó ser elegido por el contenido llamativo que implica y por las experiencias previas que se han tenido, tanto con el trato con niños pertenecientes al primer ciclo, como con el tema en concreto.

Asimismo, se trata de un tema cuyo aprendizaje supone una base fundamental sobre la que se construyen otros conocimientos matemáticos. Por ello, este tema de cara al docente o futuro docente de Educación Primaria, puede suscitar un interés y una curiosidad, que le lleve a poner en práctica lo que aquí se presenta.

1. ANTECEDENTES, OBJETIVOS Y CUESTIONES

1.1 ANTECEDENTES

Puesto que este trabajo se centra en el uso de materiales físicos y representaciones en la enseñanza de las operaciones de suma y resta, se considera conveniente tratar el tema desde dos perspectivas que son, la adquisición del significado de las operaciones de suma y de resta a través de los problemas matemáticos, y la comprensión del cálculo escrito de ambos algoritmos a través del uso de materiales.

Es importante hacer una distinción, puesto que en ambas se trata de aprender los conceptos de las operaciones de suma y resta. Sin embargo, mientras que en la primera de ellas se trata de que el alumno comprenda y adquiera el significado de sumar y restar mediante la resolución de diversos tipos de problemas matemáticos, la segunda se centra en el cálculo escrito de las operaciones de suma y resta y la comprensión de los procedimientos correspondientes a través del uso de diferentes materiales.

- Significado de las operaciones de suma y resta a través de los problemas matemáticos.

Los conceptos de *suma* y *resta* no se introducen directamente en las aulas. Es evidente que las operaciones de sumar y restar describen acciones. “Juntar”, “añadir” y “reunir” son algunos de los términos que se emplean para introducir el concepto de suma. Por otro lado, “separar”, “quitar”, “dar” o “comparar” son términos que describen acciones y se adecúan al concepto de resta. Son dichos términos los que se van introduciendo de manera paulatina desde la etapa de Educación Infantil. De esta manera, el niño va familiarizándose con ellos aunque no sepa que realmente está realizando una operación de suma o de resta. Por tanto, se puede afirmar que el proceso de la enseñanza de la suma y la resta comienza en Educación Infantil.

La pregunta sería ¿de qué manera es más conveniente la enseñanza de las operaciones de suma y resta para que el alumno llegue a comprender su significado? El niño tiene

que llegar a establecer relaciones entre las acciones, anteriormente citadas, y las operaciones de sumar y restar. Entonces, ¿de dónde partir?

Hay dos perspectivas completamente opuestas sobre el aprendizaje de las operaciones de suma y resta. Por un lado, se encuentra la metodología clásica y, por otro lado, la postura actual.

A continuación se muestran dos figuras que representan los cuatro pasos que siguen y el orden en el que se basan ambas perspectivas.

En la Figura 1 se puede observar el orden de pasos a seguir para el aprendizaje de las operaciones de suma y resta. Además, se comprueba en qué lugar queda la resolución de problemas en el aprendizaje de dichas operaciones, desde una perspectiva tradicional

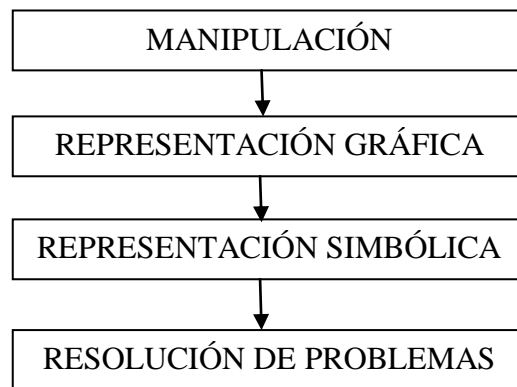


Figura 1. Esquema de la metodología clásica en el aprendizaje de las operaciones de suma y resta (Maza, C., 1991).

Si se observa la Figura 2 se puede comprobar el cambio que hay en el orden de los pasos a la hora de aprender las operaciones de suma y resta. Esta vez, el lugar que ocupa la resolución de problemas supone la base para el aprendizaje de dichas operaciones.

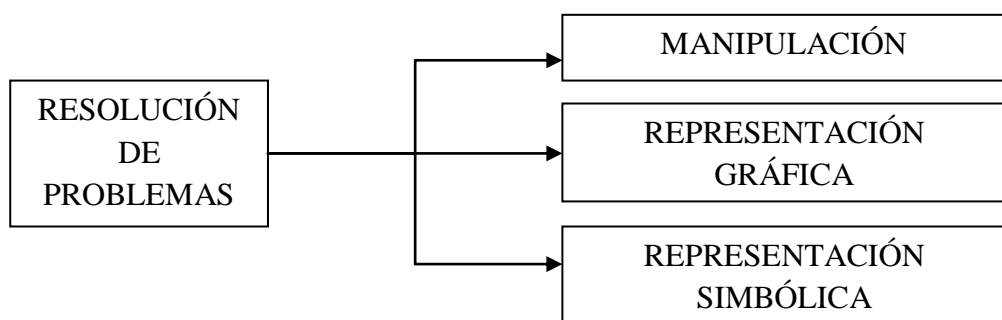


Figura 2. Esquema de la metodología actual en el aprendizaje de las operaciones de suma y resta (Maza, C., 1991).

“La resolución de problemas no es, pues, el objetivo terminal de la enseñanza de las operaciones sino el punto de arranque y el elemento que caracteriza todo el proceso de enseñanza” (Maza, C., 1991, p.20).

Por tanto, se puede afirmar que el planteamiento de problemas es el primer paso para adquirir la comprensión y el aprendizaje de las operaciones de suma y resta, concretamente. Tras esto, el niño lo resolverá manipulativamente. Después, lo resolverá gráficamente para, por último, resolverlo de forma simbólica, es decir, añadiendo el signo de las operaciones de suma y resta.

Los problemas matemáticos ayudan tanto a la enseñanza de la suma y la resta como a su comprensión por parte del alumnado, ya que la resolución de los mismos les va a suponer realizar unas acciones. Estas acciones van a estar relacionadas con los términos anteriormente citados, por lo que supone el acercamiento del niño con las operaciones de suma y resta de una manera natural y cercana al entorno del niño. Es evidente que si al niño se le va a introducir los conceptos de suma y resta mediante la realización de acciones, esto provoca directamente que dichas acciones estén implícitas en la resolución de problemas matemáticos, ya que en ellos se pasa de una situación a otra.

Este proceso de aprendizaje comienza en 2º curso de Educación Infantil y termina en 2º curso de Educación Primaria. Se trata de un proceso paulatino y ordenado, pero ¿es necesario realmente pasar por todos los pasos para llegar a la representación simbólica de las operaciones de suma y resta? Ante esta cuestión, parece ser que la respuesta es negativa, ya que no es obligatorio. Mientras que un niño puede saltarse el paso de la manipulación para ir directamente a la representación gráfica, otro niño requiere de una manipulación de materiales previa para llegar a la representación simbólica. Es decir, esto va a depender del propio niño y de cómo vaya adquiriendo este proceso. Hay que tener en cuenta las características cognitivas del alumnado. Lo ideal sería poder realizar de forma progresiva los cuatro pasos para afianzar la

representación simbólica final. Sin embargo, no es realmente necesario para el aprendizaje de las operaciones de suma y resta

Por otro lado, cabe mencionar los diversos tipos de problemas matemáticos existentes para el aprendizaje de las operaciones de suma y de resta. Con estos problemas el alumno se va a acercar a distintas realidades realizando diferentes acciones, ya que las operaciones de sumar o de restar no implican únicamente dos acciones. Maza (1991) muestra un ejemplo de clasificación de problemas de suma y de resta, los cuales quedarían divididos de la siguiente forma: problemas de cambio aumentando, problemas de cambio disminuyendo, problemas de combinación y problemas de comparación. Cada tipo de problema, a su vez, queda dividido en diferentes subtipos según la parte del problema que se trate de averiguar y resolver, como puede ser, por ejemplo, la cantidad inicial o final. Al tratarse de diferentes tipos de problemas, el grado de dificultad entre unos y otros es diferente. Por ello, es conveniente empezar e iniciar el aprendizaje de las operaciones de suma y de resta con problemas que parten de dos cantidades para llegar a una cantidad final que el niño debe averiguar, y posteriormente, continuar con aquellos que tengan una parte desconocida y que pueden resultar más complejos al alumnado.

A través de estos problemas matemáticos que se le planteen al niño, él irá desarrollando y adquiriendo sus propias estrategias para la resolución de los mismos. Asimismo, utilizará y desarrollará diferentes maneras de representación, como pueden ser sus dedos, marcas en el papel o los diagramas de Venn, una de las primeras representaciones gráficas que utiliza el niño.

Al principio, el niño no relacionará las acciones con el concepto de sumar o restar, sino que se dedicará a la resolución de los problemas utilizando sus estrategias y realizando diferentes acciones. Sin embargo, Maza (1991) llega a la conclusión de que las estrategias van evolucionando hacia una concepción unitaria de la operación que no se suele alcanzar antes del segundo año de escolaridad y que, en todo caso, depende de la enseñanza recibida. De esta manera, se puede decir que el niño finalmente llegará a la relación establecida entre los términos referidos a acciones y las operaciones de suma y de resta.

- Cálculo escrito de los algoritmos de suma y de resta a través del uso de materiales físicos.

El niño se verá en la necesidad de realizar un algoritmo cuando sus estrategias y recursos no sean suficientes para realizar las operaciones de suma y de resta que se le planteen. Será en ese momento cuando dejará de lado estrategias como el conteo o la memorización.

Se insiste en la idea de que para una buena realización de los algoritmos es necesario tener un buen conocimiento previo sobre el sistema de numeración decimal. La comprensión del sistema de numeración decimal supondrá la base por la cual el niño podrá ser capaz de realizar el cálculo de las operaciones de suma y de resta. Este conocimiento y comprensión del sistema de numeración decimal se irá adquiriendo desde la etapa de Educación Infantil, y sobre todo se irá trabajando de forma manipulativa y representativa.

Afirma Maza (1991) que el camino que lleva desde el conocimiento verbal de las decenas en primer curso de Preescolar hasta la aplicación del sistema de numeración a los algoritmos de la suma y de la resta no es corto. Sin embargo, aunque el camino sea corto, los pasos para ir avanzando deben establecerse y ser adquiridos y afianzados por el alumno, ya que llegar a comprender los algoritmos de suma y resta supone poseer un buen conocimiento acerca del sistema de numeración decimal.

Según Maza (1991), a partir de la obra de Piaget, se ha recomendado la manipulación de objetos como una forma adecuada para interiorizar las operaciones. Asimismo, una de las conclusiones a las que llega, es que la manipulación debe preceder a la representación gráfica. Por tanto, para llegar a una total comprensión de los algoritmos de la suma y de la resta, sería conveniente que el alumno manipulase previamente materiales físicos.

Si nos basamos en el orden de los pasos que se recomiendan seguir para el aprendizaje de las operaciones de suma y resta, ya vistos previamente, presentar material manipulativo al niño antes de realizar el cálculo escrito de las operaciones de suma y resta, o lo que es lo mismo antes de llegar a la representación simbólica, sería correcto y aconsejable en el momento de presentar dichas operaciones.

También se puede tomar como modelo la clasificación que hace Bruner, la cual corresponde a los diferentes niveles de representación de las operaciones aritméticas:

- Enactiva: Las operaciones se representan con material físico susceptible de ejercer sobre él acciones en forma de manipulaciones.
- Icónica: Las operaciones se representan mediante dibujos que son imágenes estáticas.
- Simbólica: Las operaciones se representan mediante el lenguaje y los símbolos. (Castro, E., 2001, p.233).

En esta clasificación también se puede comprobar que para llegar al cálculo escrito de las operaciones de suma y de resta es necesaria tanto una manipulación previa como una representación gráfica. De esta manera, el alumno estará más preparado en el momento de realizar el cálculo de dichas operaciones.

Por otro lado, es importante mencionar que estas operaciones se llevarán a cabo de forma progresiva. Es decir, se realizarán sumas y restas sin llevadas, y una vez que esto haya sido asimilado por el alumno, se procederá a introducir por medio de los materiales físicos las sumas y restas con llevadas, que en teoría suelen conllevar más dificultades de comprensión.

Por tanto, se puede concluir que el niño debe manipular material físico previamente a realizar el algoritmo escrito de las operaciones. La pregunta sería ¿qué tipo de material es más conveniente?

“Para el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones aritméticas es necesario que los sujetos realicen una gran variedad de actividades con materiales de distinto nivel de concreción. Se considera que lo más adecuado para iniciar el estudio de cualquier algoritmo es partir de objetos físicos que se puedan manipular y que tengan la misma estructura que el sistema de numeración decimal y, en este sentido, son especialmente útiles los bloques multibase”. (Castro, E., 2001, p. 232)

Tanto los bloques multibase como el ábaco son materiales preagrupados no proporcionales que pueden utilizarse para el aprendizaje de las operaciones de suma y resta. Ambos materiales, también han podido ser manipulados previamente en el

aprendizaje del sistema de numeración decimal, por lo que el alumnado podría estar ya familiarizado con los mismos.

Hernán F., y Carrillo E., (1988) están a favor del empleo del ábaco para practicar el algoritmo de la suma y de la resta ya que opinan que este material en concreto cumple perfectamente su misión de modelo físico.

Por otro lado, los diferentes materiales que propone Cascallana (1988) que sirven para comprender los procedimientos de cálculo, aplicándolos de forma razonada y no mecánica son: el ábaco (ya mencionado anteriormente), los bloques aritméticos multibásicos de Dienes, las regletas Cuisenaire, y los juegos de cálculo.

Véase a continuación una descripción de los materiales físicos que aparecen y se incluyen en las secuencias de actividades propuestas posteriormente y que detalla Cascallana (1988).

El ábaco es uno de los recursos más antiguo para la didáctica de las matemáticas; a través de su utilización el niño llega a comprender los sistemas de numeración y el cálculo de las operaciones con números naturales. Consta de un marco o soporte de madera y una serie de varillas metálicas paralelas que pueden estar colocadas horizontal o verticalmente; en estas varillas se irán insertando una serie de bolas de diferentes colores. Cada varilla representa un orden de unidades, que en el sistema de numeración decimal corresponde a las unidades, decenas, centenas, unidades de millar... Dado que el ábaco es un material cuya finalidad es iniciar y afianzar el cálculo de las operaciones con números naturales, se puede decir que servirá como objeto y material manejable en esa fase manipulativa comentada anteriormente. Será el ábaco un instrumento que sirva al alumnado para comprender las relaciones entre los diferentes órdenes.

Los bloques aritméticos multibásicos de Dienes son un recurso matemático diseñado para que los niños lleguen a comprender los sistemas de numeración sobre una base manipulativa concreta. Este material consta de una serie de piezas (cubos, barras, placas y bloques), generalmente de madera, que representan las unidades de primer, segundo, tercer y cuarto orden (unidades decenas, centenas y unidades de millar en el caso del sistema de numeración decimal). Por tanto, este material servirá al niño para

realizar agrupamientos y establecer relaciones y le ayudará a comprender el sistema de numeración decimal.

Las regletas Cuisenaire son un material matemático destinado básicamente a que los niños aprendan la descomposición de los números e iniciarles en las actividades de cálculo. Consta de un conjunto de regletas de madera de 10 tamaños y colores diferente; la longitud de las mismas va de 1 a 10 cm y la base es de 1 cm^2 . La utilización y manipulación de este material ayudará al niño a establecer equivalencias. El empleo de este material puede ser conveniente cuando se presente al alumnado problemas de comparación, ya que pueden representar las cantidades a comparar y llegar a averiguar la solución a través del uso de dicho material.

Estos materiales que se han descrito serán empleados por el niño para representar cantidades en la resolución de problemas y para comprender los algoritmos de las operaciones de suma y de resta.

Sin embargo, por el hecho de que se pueda y se recomiende utilizar material físico con el fin de representar y practicar las operaciones de suma y de resta, no se debe dejar al margen la representación simbólica de dichas operaciones. Se pueden ir introduciendo los números y símbolos de forma paulatina de forma que el niño vaya asociando poco a poco, hasta que el material físico deje de ser necesario para poder realizar dichas operaciones. Este proceso, dependerá del ritmo de aprendizaje de cada alumno, por lo que no se puede establecer un tiempo límite y concreto en la utilización de materiales físicos.

Parece ser que, tanto introduciendo las operaciones de suma y de resta como un mecanismo automático que se aprende como algo rutinario y sin que tenga mucho sentido para el alumno, como introduciéndolo de forma progresiva como ya se ha comentado anteriormente, se adquiere el significado de las operaciones de suma y resta.

Está claro y es cierto que el aprendizaje y el acercamiento a las operaciones de suma y de resta que tenga el niño, dependerá de la metodología que siga el docente. Evidentemente, son los maestros quienes eligen cómo enseñar y qué metodología

llevar a cabo. Ellos son los que deciden si quieren que este aprendizaje y comprensión estén basados en una manipulación previa o no.

Sin embargo, se puede concluir que en el aprendizaje de las operaciones de suma y de resta, se defiende la puesta en práctica de actividades basadas en las teorías que toman como punto de partida y de apoyo el uso de materiales físicos para la comprensión de los algoritmos.

1.2 Objetivos

En base a todo lo anterior, se plantean a continuación una serie de objetivos que se pretenden conseguir con la realización de este trabajo y que se pueden resumir de la siguiente forma:

- Averiguar si realmente resulta útil el uso de materiales físicos y cuáles pueden llegar a ser más eficaces para llegar a la comprensión del cálculo escrito de las operaciones de suma y de resta.
- Comprobar que tanto el uso de materiales físicos como la manipulación y las representaciones gráficas ayudan a una mejor y posterior comprensión, tanto a la hora de resolver problemas como en el momento de realizar el cálculo escrito de las operaciones de suma y de resta.
- Observar la evolución del aprendizaje de las operaciones de suma y de resta en el primer ciclo de Educación Primaria.

1.3 Cuestiones

Las cuestiones que surgen ahora realizando este trabajo y que se esperan poder resolver son las siguientes:

- ¿Necesitan en segundo curso de primaria utilizar materiales físicos o representar gráficamente las cantidades y números dados para poder llegar a los algoritmos de suma y de resta?
- ¿Cuáles son las diferencias entre un curso y otro en cuanto a la utilización de materiales físicos y representaciones gráficas?

- ¿Realmente supone el uso de materiales físicos una ayuda para adquirir y comprender los algoritmos de suma y de resta que se presentan en los diferentes cursos?
- ¿Necesitan continuamente manipular los materiales físicos o son capaces de ir dejándolos de lado una vez que van comprendiendo los algoritmos?
- ¿Es capaz el alumnado de valerse de sus propias estrategias y métodos para llegar a la resolución tanto de problemas como del cálculo escrito de operaciones de suma y de resta?

2. MARCO TEÓRICO: FUNDAMENTACIÓN E IMPLICACIONES DOCENTES

Existen diferentes teorías del aprendizaje en general, y otras más específicas que se centran en el aprendizaje de las matemáticas. A continuación, se exponen en primer lugar las teorías que se defienden y se pretenden fomentar en las aulas de hoy en día en el proceso de enseñanza – aprendizaje generalizado, y posteriormente aquellas teorías enfocadas al aprendizaje de conocimientos matemáticos.

La teoría constructivista y la teoría conductista son dos teorías generales sobre el aprendizaje. Sin embargo, mientras que esta última teoría (teoría conductista) ha pasado a un segundo plano en los últimos años, la teoría del constructivismo ha evolucionado y ha conseguido ser la teoría dominante y más defendida con relación al aprendizaje. Por esta razón y dada las características que presenta la teoría constructivista relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas, en este trabajo se deja al margen la teoría conductista.

Define Mario Carretero (1993) el constructivismo como la idea que mantiene que el individuo – tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos – no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. Entran en acción, entonces, las aportaciones de Piaget y Vygotsky que contribuyen a la elaboración de un pensamiento constructivista.

La teoría de Piaget se basa en la idea de que es el sujeto el que llega a construir el conocimiento interactuando con la realidad. Vygotsky hace hincapié en el aspecto social del aprendizaje, llegando a la conclusión de que el sujeto llega a la construcción del conocimiento de una manera más eficaz cuando se construye en un contexto de colaboración y cooperación entre distintos sujetos que aportan sus propias ideas en base al conocimiento que poseen.

Esta construcción del conocimiento de la que se habla se puede adquirir, tal y como expresa Baroody (1988) mediante la asimilación o la integración. Se denomina asimilación al hecho de comprender la nueva información en función del conocimiento

existente, mientras que se denomina integración a comprender algo nuevo por medio de una conexión entre piezas de información previamente aisladas. Por tanto, se debe tener en cuenta que el aprendizaje será diferente entre unos alumnos y otros, puesto que parte de lo que uno sabe, y no todos los alumnos llegan con los mismos conocimientos previos.

Teniendo esto en cuenta, se fomenta y se promueve el aprendizaje significativo del que habla Ausubel y que básicamente, es aquel que trata de implicar activamente al alumno en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Centrando ahora la atención en el aprendizaje de las matemáticas, se hace referencia a continuación al tema sobre el que trata este trabajo, es decir, al aprendizaje de las operaciones de suma y de resta y a las teorías dirigidas al aprendizaje de conceptos matemáticos.

La teoría cognitiva, teoría defendida en el campo de las matemáticas, muestra un aspecto constructivista con relación al aprendizaje de los conocimientos, ya que se basa en un principio fundamental que es aprender y comprender estableciendo relaciones entre la información que uno ya sabe y la información nueva que se le presenta. En otras palabras, la teoría cognitiva implica que es el alumnado el que va a construir su propio conocimiento.

Si se tiene en cuenta la teoría cognitiva, sus principios significativos y constructivistas, y las ideas que aportan Piaget y Vygostky, el proceso de enseñanza – aprendizaje debería darse teniendo en cuenta el contexto natural y social del niño. Es decir, si se quiere que el niño llegue a una representación simbólica de las operaciones de suma y de resta a través del uso de materiales físicos y representaciones gráficas, el entorno y el contexto del niño tiene que ser adecuado y adaptado. El niño debe estar rodeado de materiales físicos que reflejen y ayuden a este aprendizaje para que pueda interactuar con ellos y llegar a construir el aprendizaje. Por otro lado, será conveniente la presentación y el diseño de unas actividades que se desarrollen en grupo o en parejas con la finalidad de que los niños se encuentren dentro de un ambiente de trabajo y de aprendizaje social, en el que se ayuden, intercambien y valoren diversas opiniones.

Si se favorece el entorno del niño con los materiales físicos convenientes y se pretende que sea él mismo el que descubra los conocimientos matemáticos, como son las operaciones de suma y de resta, se fomenta un aprendizaje por descubrimiento. Defiende Orton (1990) que existe un momento en el que las matemáticas pueden ser descubiertas y, como consecuencia, el aprendizaje será más profundo y completo. Por otro lado, no ignora el hecho de que en ocasiones, la intervención del docente para explicar y aclarar los conocimientos sea fundamental en el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, parece ser que el aprendizaje por descubrimiento se defiende como un método para llevar a cabo mejor, y de forma más eficaz, en las aulas con niños de Preescolar o Primaria, mientras que en etapas más avanzadas, este tipo de aprendizaje resulta más complicado de fomentar.

El niño llegará al aprendizaje de las operaciones de suma y de resta cuando se le planteen actividades prácticas que deba resolver utilizando el material físico como instrumento para descubrir esos nuevos conocimientos.

Cabe mencionar la existencia de los cuatro estadios o períodos que distingue Piaget con relación al desarrollo intelectual del niño, ya que, en este caso, no se debe olvidar que mientras se esté produciendo este nuevo aprendizaje matemático en el niño, éste alcanzará un período diferente. En este caso, y dado el aprendizaje de los conocimientos matemáticos en los que se centra este trabajo, se puede decir que el niño pasará de la segunda etapa (estadio preoperatorio) a la tercera (estadio de operaciones concretas). Se debe tener una visión global pero también concreta de los aspectos psicológicos y cognitivos que presenta el niño. Debe tenerse esto en cuenta en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, en este caso de las operaciones de suma y de resta, para saber cómo evoluciona el niño y cómo se desarrollan sus capacidades, puesto que las etapas evolutivas que diferencia Piaget van en relación con el aprendizaje de las matemáticas. El no evolucionar y pasar de un período a otro influirá y afectará de manera negativa en el aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos.

Expresa Orton (1990) que es probable que cuando el niño se enfrenta a una nueva situación de aprendizaje sea importante la actividad física con objetos reales en la

etapa de las operaciones concretas, pero sólo hasta el momento en que el niño sea capaz de sustituir tales manipulaciones físicas por las correspondientes actividades mentales.

Por tanto, y para finalizar, se llega a la conclusión de que durante el aprendizaje de las operaciones de suma y de resta, el niño se encuentra en un momento en el que la manipulación y el empleo de materiales físicos será imprescindible para llegar a descubrir, construir y afianzar los nuevos conocimientos que se le presenten.

2.1 El papel del profesor

Puesto que la teoría cognitiva no defiende que el aprendizaje se base en que el alumno absorba la información (teoría de la absorción) que se le presente como si no poseyera conocimientos previos, el docente no debe limitarse a transmitir la información y los conocimientos que el alumnado debe aprender, sino que debe ser un guía en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Esto es, el maestro será el intermediario entre el alumno y el conocimiento. Será aquel que les ayude, les oriente y les guíe. La nueva información, es decir, los conocimientos nuevos, deberán ser descubiertos por el propio alumnado. Se habla de dejar libertad al alumnado en el aprendizaje, pero ¿dónde está el límite? Es por esto que debe ser el maestro quien guíe al alumnado hacia los conocimientos que deben ser adquiridos. Los docentes deberán dejar libertad en cuanto a qué quieren aprender y la manera en qué lo hacen pero siempre guiándoles y orientándoles hacia los objetivos que ellos se han propuesto con anterioridad.

De esta forma, es el alumno el que cobra un papel fundamental en el proceso de enseñanza – aprendizaje. De ahí que se diga que es el protagonista, como se hacía mención anteriormente haciendo referencia al aprendizaje significativo. El alumno irá descubriendo los nuevos conocimientos y relacionándolos con los que ya posee, tal y como dice la teoría cognitiva. Para ello es importante darles su tiempo, es decir, dejarles tiempo para pensar, descubrir y relacionar, en definitiva para aprender. Por supuesto, siempre con la presencia y la ayuda del maestro, quien en todo momento deberá estar pendiente del avance y el progreso del aprendizaje de su alumnado.

El docente debe tener en cuenta las características psicológicas y cognitivas del alumnado así como las diferencias existentes entre ellos. El ritmo de aprendizaje varía de un niño a otro y es un aspecto fundamental a tener en cuenta por el maestro. Deberá observar la forma en que su grupo de alumnos va adquiriendo los nuevos conocimientos y en base a esto pensar, desarrollar y poner en práctica diversas estrategias que puedan ayudar a que la nueva información se adquiera de manera más fácil y comprensible por el propio alumnado.

Dos aspectos fundamentales que debe tener en cuenta el maestro son: primero, el material, es decir, aquello que vaya a utilizar para que su alumnado vaya asimilando el conocimiento; y segundo, la adaptación del mismo. El docente deberá adaptar el material teniendo en cuenta las características del alumnado (el nivel, el curso, la edad, características cognitivas...).

Por otro lado, el docente deberá ser quien trate de implicar de forma activa a su alumnado en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Para conseguir esto, el desarrollo de una secuencia de actividades motivadoras y que capten el interés del alumno será imprescindible.

Es evidente que, a pesar de que el papel protagonista lo lleve el alumno en este caso, el papel que presenta el maestro en el proceso de enseñanza – aprendizaje es fundamental e imprescindible. El docente debe planificar, pensar y desarrollar una serie de actividades que ayudarán al alumnado a la comprensión del nuevo conocimiento. Evidentemente, antes de poner en práctica todo, debe pensar con antelación las dificultades que puedan surgir en el aula para saber cómo puede solventarlas de la mejor manera posible. Son muchos los obstáculos e inconvenientes que pueden surgir durante una sesión, por lo que deberán ser tenidos en cuenta por el maestro.

Por otro lado, un aspecto fundamental es la evaluación. Siguiendo la teoría cognitiva y por tanto basándose en un aprendizaje significativo, debe tratarse de una evaluación continua y formativa. Esto quiere decir que se valorará la evolución del alumnado a lo largo del proceso de enseñanza – aprendizaje. Para ello el maestro irá evaluando el grado de desarrollo de las capacidades de su alumnado, observará qué aprenden y qué

no. Deberá fijarse tanto en los logros, éxitos y progresos que consigan, como en las dificultades y obstáculos que se les presenten durante el proceso, de forma que sea él quien se moleste en poner remedio y soluciones. Al mismo tiempo, será importante evaluar la participación, el esfuerzo y el interés que muestre el alumnado a la hora de realizar las actividades y aprender los nuevos conocimientos. También, una buena organización y una buena capacidad de trabajo en equipo serán valoradas.

Se puede concluir que el hecho de que un docente se muestre dispuesto a llevar a cabo un proceso de enseñanza basado en la teoría cognitiva requiere de tiempo. Si algo debe aprovechar el docente es el tiempo. Aunque se trate de un proceso costoso, puesto que implica tener en cuenta muchos factores, al final el resultado y la satisfacción personal hace que todo el esfuerzo que se ponga merezca la pena.

3. MATERIAL Y MÉTODOS

Teniendo en cuenta tanto los antecedentes y teorías expuestas, como los objetivos y cuestiones presentes en puntos anteriores, se han desarrollado dos secuencias de actividades diferentes. La primera de ellas está dirigida al alumnado de primer curso de Educación Primaria, mientras que la segunda secuencia está diseñada para los alumnos que cursan el segundo curso de dicha etapa. Ambas secuencias están diseñadas con el objetivo de que los alumnos aprendan de manera significativa y por descubrimiento las operaciones de suma y de resta.

Es conveniente plantear dos secuencias diferentes puesto que es evidente que el alumno posee y va adquiriendo diferentes conceptos matemáticos a lo largo del primer y segundo curso. Por tanto, las secuencias están basadas en esa evolución y esa diferencia de aprendizaje. En este caso, se quiere trabajar el aprendizaje de las operaciones de suma y de resta en ambos cursos. Sin embargo, no será hasta segundo curso, y por tanto en la segunda secuencia que aquí se presenta, cuando se introduzcan las operaciones de restas con llevadas, dejando el resto de operaciones (sumas con y sin llevadas y restas sin llevadas) para las actividades diseñadas en la secuencia que va dirigida al primer curso de la etapa. El hecho de que existan estas diferencias de un curso a otro con respecto a las operaciones viene marcado por el aprendizaje del sistema de numeración decimal. En primer curso de Educación Primaria, el alumnado va a ir comprendiendo tanto el valor posicional como la relación y las equivalencias existentes entre unidades y decenas, llegando a la conclusión y al aprendizaje de que 10 unidades forman una decena. No es hasta segundo curso cuando se introduce el concepto de centenas, de forma que el alumnado llegue a comprender la relación entre centenas, decenas y unidades. Por esta razón, los números que se presentan en las actividades de la secuencia de primer curso, no pasan de dos cifras, mientras que ya en las actividades dirigidas al alumnado de segundo curso, las operaciones de suma y de resta se realizan con números de hasta tres cifras.

Se puede decir que el proceso tanto de enseñanza como de aprendizaje de las operaciones de suma y de resta es un proceso lento. Es lento porque se trata de un

aprendizaje progresivo y relacionado con otros conocimientos que el alumno debe ir adquiriendo al mismo tiempo, como es el ya comentado sistema de numeración decimal. Esto es, el alumno irá estableciendo las relaciones entre los distintos órdenes (unidades, decenas y centenas) a la vez que va aprendiendo a sumar y restar. Por tanto, el hecho de que el niño vaya afianzando los conocimientos matemáticos relacionados con el sistema de numeración decimal, supondrá una base sobre la cual se construirá el conocimiento relacionado con las operaciones de suma y de resta a las que el niño deberá hacer frente. Asimismo, se trata de un proceso de enseñanza – aprendizaje caracterizado por ser ordenado, es decir, por seguir una serie de pasos encaminados a la adquisición de las operaciones de suma y de resta y que se verán reflejados en las secuencias de actividades posteriormente.

3.1. Metodología

Aunque se hayan planteado dos secuencias de actividades diferentes, se puede decir que la metodología en la que están basadas ambas secuencias es la misma. Una metodología activa y participativa, que implique al alumnado en el proceso de enseñanza – aprendizaje es la que se pretende conseguir con la puesta en práctica de las secuencias de actividades. Se trata de llevar a cabo una metodología a través de la cual el alumnado sea consciente de su propio aprendizaje, que sea él mismo quien descubra y construya el nuevo conocimiento y sea capaz de aplicarlo y llevarlo a diversas situaciones que se le puedan presentar en su vida cotidiana.

Además, por otro lado, en vista de que las actividades están planteadas para que se realicen por parejas, e incluso en grupo, se pretende promover y fomentar tanto el trabajo en equipo como la colaboración, cooperación y ayuda entre los mismos. De esta manera, el conocimiento podrá ser construido por el grupo de iguales mediante la interacción entre ellos. Los niños podrán enriquecer sus conocimientos compartiendo los suyos propios con los de otros niños.

Asimismo, es conveniente mencionar que dentro de esta metodología se incluye el uso de diversos materiales. Durante la realización de las actividades prácticas que se proponen en ambas secuencias, se va a presentar a los alumnos diferentes materiales físicos con el objetivo de que sean ellos mismos quienes los manipulen y lleguen a la

construcción del nuevo conocimiento, es decir, a la comprensión de los algoritmos de la suma y de la resta. Los materiales físicos que se van a ofrecer han sido descritos previamente y son: el ábaco, las regletas Cuisenaire, y los bloques multibase.

Las secuencias de actividades propuestas están diseñadas para llevarlas a cabo teniendo en cuenta el ritmo de aprendizaje de cada alumno, por lo que no se puede establecer y determinar un período de tiempo concreto y limitado. El tiempo siempre dependerá del desarrollo y de la evolución del alumnado en relación al nuevo aprendizaje, por lo que se puede decir que el tiempo que se le vaya a dedicar a estas secuencias de actividades y a este proceso de aprendizaje es flexible.

3.2 Secuencias de actividades

Antes de presentar de manera individual las dos secuencias de actividades, es importante destacar que las actividades que las engloban están agrupadas en tres bloques diferentes. Los bloques de actividades están planteados de acuerdo a los pasos que se deben seguir y se recomiendan en el aprendizaje de las operaciones de suma y de resta. Es decir, el bloque 1 corresponde a la manipulación de materiales; el bloque 2 a la resolución de problemas; y por último, el bloque 3 corresponde a la representación simbólica.

3.2.1 Secuencia 1

A continuación se presenta la primera secuencia de actividades dirigida al alumnado de primer curso de Educación Primaria.

- Bloque 1: el objetivo de estas actividades consiste en que el niño llegue a la comprensión del algoritmo de la suma y de la resta a través del uso de diversos materiales físicos. Se trata de presentar al niño y rodear su entorno con ábacos, regletas Cuisenaire y bloques multibase. Todas las actividades de este bloque se realizarán en parejas para fomentar y destacar el carácter social del aprendizaje.
 - Actividad 1: se presentará al alumnado los bloques multibase. El docente mostrará al alumnado las diferentes piezas que forman este

material (cubos, barras, placas y bloques). A su vez, irá dejando a cada pareja de alumnos las diferentes piezas de manera que ellos puedan ver la relación existente entre ellas. Es decir, llegarán a ver y comprender que 10 cubos forman una barra, que 10 barras forman una placa, que una placa tiene 100 cubos... Se dejará tiempo suficiente para que ellos mismos puedan ir viendo y sean conscientes de las relaciones. Asimismo, se pueden realizar cuestiones que tengan que ver con la relación entre las diferentes piezas. A modo de ejemplo se presentan las siguientes: *¿qué sucede si juntamos 10 cubos?, ¿cuántas barras necesitamos para formar una placa?*

- Actividad 2: se continuará utilizando los bloques multibase. Una vez que han entendido y establecido las relaciones entre las piezas, los niños deberán, en esta ocasión, representar las diferentes cantidades que se les diga. Así, por ejemplo, se les explicará que deben representar el número 14. Algunos niños representarán dicho número con 14 cubos, mientras que otros puede que lo representen con 4 cubos y una barra. Los alumnos que hayan representado el número de la segunda forma, podrán explicar al resto de compañeros por qué han decidido establecer esa representación. De esta manera, se pretende que el niño llegue a establecer la relación entre cubos y placas (10 cubos forman una placa), o lo que es lo mismo, que 10 unidades forman una decena en el sistema de numeración decimal. Este proceso se puede repetir con diferentes números, cuya representación requiera de la utilización de las diferentes piezas del material, con el objetivo de que los alumnos vayan asimilando y siendo capaces de realizar y establecer relaciones por sí mismos.

Con estas dos primeras actividades se fomenta la idea que Dienes tenía acerca de la utilización de los bloques aritméticos multibase. A grandes rasgos, venía a decir que el hecho de ofrecer este material al entorno del niño iba a favorecer una mejor y más temprana comprensión del valor posicional.

- Actividad 3: se introducirá ahora el ábaco. Existen diferentes tipos de ábacos, sin embargo aquí se hace referencia al ábaco vertical. El ábaco debe mostrar solo 2 varillas, correspondientes al lugar de las unidades y las decenas. Se mostrará el ábaco con las varillas y se introducirán 9 bolas rojas en el lugar de las unidades. Se preguntará al alumnado el número de bolas que hay en esa varilla. Para introducir el sistema de numeración decimal en el ábaco, se mostrará que también hay unas bolas azules, que sólo pueden meterse en la otra varilla restante. Para que vean la relación existente entre las bolas rojas y azules (10 bolas rojas equivalen a una azul), se establecerá la siguiente relación. Teniendo en cuenta que han manejado anteriormente los bloques multibase, se les dirá que un cubo es igual que una bola roja. Se les preguntará: *¿cuántos cubos necesitábamos para formar una barra?* Se espera que los alumnos establezcan la equivalencia, es decir, que necesitaban 10 cubos. A continuación, se les dirá: *si una barra es igual que una bola azul, ¿cuántas bolas rojas necesitamos para tener una bola azul?* Se dejará tiempo al alumnado para que comenten e intercambien diferentes opiniones hasta que lleguen a la conclusión de que necesitan 10 bolas rojas para obtener una azul. Se les dejará ábacos a los alumnos para que puedan establecer por sí mismos la equivalencia.

- Actividad 4: se continúa utilizando el ábaco. Teniendo en cuenta que cada pareja de alumnos deberá tener un ábaco, se les dejará que representen diferentes cantidades. En este caso, también se permitirá el uso de los bloques multibase, más concretamente, los cubos y barras, ya que pueden servir como apoyo para representar las cantidades en el ábaco. Así, por ejemplo, si se les dice que representen el número 36, podrán representarlo primeramente con 3 barras y 6 cubos, para después en el ábaco representarlo con 3 bolas azules y 6 rojas.

- Actividad 5: en esta actividad se introducirá un nuevo material, las regletas Cuisenaire. Cada pareja de alumnos deberá tener todas las regletas de los diferentes colores que hay. Se dejará un tiempo para que manipulen el material y establezcan relaciones, como por ejemplo, que dos regletas amarillas corresponden a una naranja, que 10 blancas representan una naranja o que cada regleta es igual a otra más una. Podrán ser conscientes y determinar un número a cada regleta. Se podrán ir realizando preguntas relacionadas con estas equivalencias. Asimismo, se les puede preguntar *¿cómo podemos formar una regleta marrón utilizando el resto de regletas?* De esta manera, el alumnado puede establecer diferentes representaciones, como por ejemplo, utilizando una negra y una blanca, o 2 verdes y 1 roja. Esto supone que el alumno es capaz de realizar descomposiciones de un mismo número, ya que teniendo en cuenta que la regleta marrón corresponde al número 8, este puede obtenerse sumando 3 más 5, 4 más 4, etc. Por tanto, existen múltiples formas de representar y establecer relaciones con las regletas de colores. Para finalizar la actividad, se pueden realizar cuestiones para que los niños establezcan comparaciones entre las regletas. Por ejemplo: *Si tengo una regleta amarilla y otra verde ¿cuántas regletas blancas más tiene la amarilla que la verde?* Se espera que los niños comparen ambas regletas de forma que añadan a la verde tantas regletas blancas como sean necesarias para llegar a tener una amarilla.

- Actividad 6: el objetivo de esta actividad es que el alumnado llegue a la comprensión del algoritmo de la suma. Para ello, se utilizarán los cubos y barras de los bloques multibase. Se entregará a los alumnos que forman cada pareja cantidades diferentes de material. Por ejemplo, a uno se le dará 2 barras y un cubo, mientras que a otro se le dará una barra y 4 cubos. Deberán saber qué cantidades representan los materiales, en este caso, 21 y 14. Después juntarán el material que

tienen ambos componentes de la pareja, de forma que lleguen a ver que tienen en total 3 barras y 5 cubos, y que representa la cantidad de 35. Se repetirá el mismo procedimiento con otras cantidades que no conlleven sumar con llevadas para que repitan la operación y lleguen a la comprensión del algoritmo.

- Actividad 7: esta actividad tiene el mismo procedimiento que la anterior, pero en esta ocasión se introducirán cantidades que al juntarlas requieran realizar una operación de suma con llevadas. Se presentará a cada alumno que componga la pareja dos cantidades diferentes. Por ejemplo, 3 barras y 5 cubos por un lado, y 1 barra y 7 cubos por otro lado. Deberán averiguar qué cantidades tienen y posteriormente juntar el material. Una vez que lo junten y tengan que saber qué cantidad representan serán conscientes de que tienen 4 barras y 12 cubos. Para saber qué cantidad representa ese material, deberán agrupar los cubos formando una nueva barra y dejando dos cubos sueltos. De esta manera, llegarán a la cantidad de 52 (5 barras y 2 cubos). Se espera que los alumnos agrupen los cubos, que representan las unidades, y formen la nueva barra, que añade una decena. La actividad se continuará mostrando y ofreciendo diferentes cantidades a los alumnos con los cubos y barras, de forma que tengan que agrupar cubos y formar nuevas decenas.
- Actividad 8: esta actividad tiene como objetivo la comprensión del algoritmo de la suma. Para ello esta vez el alumno sumará distintas cantidades utilizando el ábaco. Para que todos comprendan cómo se realiza este procedimiento, se les mostrará un ejemplo. Tómese el siguiente como referencia. Se escribirán dos cantidades distintas en la pizarra (34 y 25). En primer lugar se representará el número 34 en el ábaco colocando 3 bolas azules en la varilla de las decenas y 4 bolas rojas en la varilla de las unidades. Después se colocarán unas pinzas

tanto en el lugar de las decenas como en el de las unidades para separar las cantidades. De esta forma, representará el número 25 poniendo 2 bolas azules y 5 bolas rojas sin que se mezclen con las ya existentes. Para sumar ambas cantidades, se les explicará que basta con quitar las pinzas y juntar las cantidades. Una vez explicado esto, se dejarán ábacos a cada pareja de alumnos para que ellos vayan realizando la suma de distintas cantidades que representen. Puede que haya alumnos que al representar las cantidades y realizar la operación de suma, se encuentren con una operación de suma con llevadas. Aunque no se haya trabajado aún con este material dicha operación, se pretende que el alumnado establezca las relaciones ya vistas para hacer frente a esa operación.

- Actividad 9: para asegurarse de que todos los alumnos saben realizar una suma con llevadas y teniendo en cuenta que en la actividad anterior no se ha explicado cómo se realiza esta operación con el ábaco, se procederá ahora a explicar con la colaboración de todos los alumnos y teniendo en cuenta que saben las equivalencias entre las unidades y decenas, el procedimiento de esta operación con el ábaco. Se pondrá un ejemplo con dos cantidades (56 y 27). Se representarán ambas cantidades en el ábaco separándolas con las pinzas tal y como se ha explicado en la actividad anterior. Después se quitarán las pinzas y se preguntará a los alumnos cuántas bolas rojas y azules se han juntado. Las contarán y comprobarán que hay 13 bolas de color rojo y 7 bolas de color azul. De esta manera, se espera que sea el propio niño el que diga que no puede haber 13 bolas rojas en el lugar de las unidades por lo que tiene que formar otra decena y añadir otra bola azul y dejar 3 bolas rojas que representan las unidades. Así llegarán a ver que la cantidad representada en el ábaco y que surge de la suma de las otras dos cantidades anteriores es 83. Para continuar realizando sumas con llevadas utilizando el ábaco, se proveerá a cada pareja de alumnos con

uno y, al igual que en la actividad anterior, se dejará que ellos mismos vayan realizando sumas con llevadas mediante la utilización del ábaco. Teniendo en cuenta que ya han utilizado otro material para realizar operaciones de sumas con llevadas, se puede ir haciendo referencia a la llevada en la representación simbólica, para que una vez que lleguen a esta fase, esa llevada no induzca a errores.

- Actividad 10: esta actividad está propuesta con el fin de que los alumnos comprendan la operación inversa a la suma. Para ello, el alumnado dispondrá de las regletas Cuisenaire. Se espera que ellos mismos vayan manipulando el material y comprobando que, por ejemplo, para formar una regleta azul, si se tiene ya una rosa, necesita una amarilla. Se pretende, también, que el alumnado establezca la relación entre el número y el color y por tanto vayan estableciendo las operaciones sencillas de resta.

- Actividad 11: el objetivo de esta actividad es que el niño llegue a la comprensión del algoritmo de la resta. Para ello, se utilizarán los bloques multibase. A cada alumno que componga las parejas se le dará una cantidad diferente, de forma que una cantidad sea mayor y otra menor. Véase un ejemplo: a una pareja de niños se le entregará el siguiente material. Por un lado, 2 barras y 6 cubos, y por otro lado, 1 barra y 5 cubos. Una vez entregados los materiales a las parejas, cada alumno deberá averiguar la cantidad que posee. Después, se dirá al alumnado: *vamos a quitar a la cantidad mayor, la cantidad menos. A ver qué pasa*. De esta forma, cada pareja debe realizar el algoritmo de la resta. Se espera que el alumnado, sin mayor problemas, llegue a lo siguiente. Para quitar 15 al número 26, deberá quitar 5 cubos y una barra. De esta se quedará con 1 barra y 1 cubo, que representan la cantidad de 11.

- Bloque 2: este bloque engloba actividades basadas en la resolución y en el planteamiento de problemas. Se pretende que a través de una serie de problemas que se le planteen al niño, este llegue a la comprensión del significado de las operaciones de suma y de resta. Para ello, se dejará que el niño emplee el material anteriormente citado como forma de representación o que se valga de otras estrategias o diferentes representaciones gráficas, como pueden ser marcas en el papel.
 - Actividad 12: se plantearán de forma oral y ordenada las siguientes situaciones:
 1. *Carolina tiene 3 pinturas rojas, Javier 7 azules y Carlos 5 pinturas verdes. Si juntamos todas las pinturas y las metemos en este estuche, ¿cuántas pinturas hay dentro?*
 2. *Tengo 15 tizas para pintar este dibujo de la pizarra. Cuando lo pinto, me doy cuenta de que sólo he gastado 4 tizas. ¿Cuántas tizas me quedan ahora?*
 3. *La madre de Guillermo le ha dado a Guillermo 25 euros para la campaña solidaria del colegio. Guillermo le dice a su padre a ver si le quiere dar más dinero. Su padre decide darle otros 10 euros. ¿Cuánto dinero va a llevar Guillermo al colegio?*
 4. *Teniendo en cuenta el número total de alumnos del aula y el número de chicas y chicos se plantea la siguiente situación. A modo de ejemplo se propone con los siguientes números: En esta clase hay 16 chicas y 12 chicos. ¿Cuántas chicas más que chicos hay?*

Una vez propuesta cada situación, se debe dejar tiempo para que todos los niños puedan pensar y llegar a una solución común. Se espera que todos lleguen a realizar las correspondientes operaciones. Pueden valerse de sus dedos o de marcas en el papel para llegar a la solución. En caso de que algún niño no entienda, se puede proceder a explicar la situación más detenidamente dándole al niño la oportunidad de utilizar

diversos materiales para representar las cantidades de forma que sea él quien manipule el material y sea el protagonista de la situación planteada.

Hasta aquí se han planteado cuatro situaciones que representa los cuatro diversos tipos de problemas existentes de suma y de resta: problema de cambio aumentando, problema de cambio disminuyendo, problema de combinación y problema de comparación. A excepción del problema de comparación, que es problema de comparación de diferencia desconocida, el resto de problemas planteados son de cantidad final desconocida. En dichas situaciones se ofrecerá al alumnado la posibilidad de utilizar material real o representaciones gráficas para simbolizar las cantidades del problema con el objetivo de ir familiarizando al niño con otras formas de representación. Como paso final, en cada situación planteada, es recomendable escribir la representación simbólica de la operación para que el alumno, vaya relacionando las acciones con las operaciones y cada vez lo asimile más rápidamente y como paso previo para llegar a la etapa de representación simbólica.

- Actividad 13: se proyecta el siguiente problema en el aula y un alumno lo lee en voz alta. *Para ir al colegio cojo todos los días el autobús. Cuando me subo, cuento las personas que hay sentadas y de pie. En total, hay 7 personas sentadas y 3 de pie. En la primera parada se bajan 2 y suben 4. En la segunda parada sube 1 pero no se baja nadie. Sin contarme a mí, ¿cuántas personas hay en el autobús?* Se deja tiempo para que los alumnos vuelvan a leer el problema, esta vez individualmente y en silencio. Una vez que lo hayan leído, se les dejará tiempo para pensar la solución y comentarla con el compañero para ver si han llegado a la misma. En un primer momento puede resultar complejo. Sin embargo, si se lee despacio y bien el alumno comprobará que el hecho de que sea largo o incluya más de una operación no hace

que sea difícil. Se espera que los alumnos realicen marcas en el papel representando a las personas. Si no se ha llegado a una correcta resolución del problema, se puede ayudar al alumno dibujando monigotes en la pizarra que sirvan como representación gráfica de las personas presentes en el autobús. Borrando y volviendo a dibujar, en función de las operaciones que requiera el problema, llegarán a ver que al final quedan 13 monigotes, es decir, 13 personas en el autobús.

- Actividad 14: se dará al alumnado una ficha (ver anexo I) en la cual hay propuestos una serie de problemas. Asimismo, se puede comprobar que en las situaciones que se plantean están escritas dos operaciones que se corresponden con la suma o la resta. El alumnado debe rodear la operación correcta que sirve para averiguar la solución. Aunque se entregará una copia de la ficha a cada alumno, deberán rellenarla y realizarla en parejas, de forma que puedan intercambiar y compartir opiniones. Se espera que el alumnado sea capaz de asociar las acciones con las operaciones, de forma que se pueda comprobar si han comprendido el significado de las mismas.

- Actividad 15: se propone al alumnado la siguiente situación: *En un ramo de flores hay 14 rosas blancas y 17 rosas rojas. ¿Cuántas rosas hay en total?* Se preguntará cómo podemos saber el número total de rosas. Se entiende que dirán que sumando las rosas blancas y rojas. Se escribirá la operación de suma en vertical en la pizarra de forma que el alumnado se fije que se trata de una suma con llevadas. Se les dirá que deben intentar resolver dicha operación con el material que les va a dar. El alumnado estará organizado en parejas de modo que a cada pareja se le ofrecerá el uso de los bloques multibase. Se pretende que los alumnos agrupen una nueva barra (decena) y dejen un cubo que representa a la unidad. De esta forma se entiende que llegarán al resultado: 31 rosas. En este caso y aunque se le haya dado la oportunidad al alumnado de

emplear el material físico, puede que ya haya alumnos que no requieran de su utilización porque ya han asimilado el algoritmo de la suma.

- Actividad 16: para continuar realizando sumas con llevadas, se presentará al alumnado la siguiente situación. *En 2º A de primaria hay 26 alumnos y en 2ºB hay 27. ¿Cuántos alumnos hay entre las dos clases?* El alumnado, organizado en parejas deberá coger las piezas de los bloques multibase que considere necesarias para poder representar las dos cantidades. Se entiende que realizarán la operación valiéndose de ese material llegando a la solución de 53 alumnos. De nuevo, en este momento también se puede comprobar si hay alumnos que prefieren prescindir del material físico para realizar dicha operación y pasar directamente al cálculo escrito de la misma. Puede que haya alumnos que ya hayan llegado a la fase de representación simbólica de las operaciones.
- Actividad 17: para realizar esta actividad, el alumnado seguirá disponiendo de los bloques multibase. Se les entregará una ficha (ver anexo II) que deberán realizar en parejas. En la ficha se presentan una serie de problemas de diferentes tipos. Estos problemas presentan tanto sumas con y sin llevadas como restas sin llevadas y que deberán resolverlos ya sea utilizando el material físico del que disponen o poniendo en práctica sus propias estrategias.
- Bloque 3: las actividades que engloban este bloque serían del mismo tipo que las planteadas anteriormente. Es decir, son actividades en las que el alumnado para llevarlas a cabo no necesita de materiales físicos con el objetivo de comprender y realizar las operaciones. Se da por hecho que el alumno ya ha llegado a la comprensión de los algoritmos y de las operaciones y que es capaz de realizar el cálculo escrito de las mismas sin problemas y sin emplear los diversos materiales que ha ido empleando en las actividades de los bloques

anteriores. El alumno ha llegado a la representación simbólica de las operaciones. No es cuestión, por tanto, de plantear diferentes actividades, sino de que el niño sea capaz de realizar los mismos tipos de problemas y operaciones valiéndose de la representación simbólica. Como paso intermedio entre el bloque 2 y el bloque 3, se puede plantear la representación gráfica de las operaciones utilizando diversos materiales. A continuación se muestra un ejemplo por el cual a través de la representación gráfica se puede llegar a la representación simbólica.

Se trata de emplear el ábaco plano. En lugar de utilizar el ábaco común como material físico, se puede utilizar este otro tipo de ábaco que se muestra en la Figura 3.

D	U
○ ○	○ ○ ○
○ ○ ○	○ ○

Figura 3. Ejemplo de representación gráfica de dos cantidades en un ábaco plano.

De esta manera, el alumno puede representar con bolitas o marcas en el papel las cantidades representando las unidades y decenas correspondientes y luego pasar a escribirlas de forma numérica. Siguiendo el ejemplo de la Figura 3 sería 23 y 32. De esta manera pasaría a la representación simbólica de las operaciones.

Finaliza de esta manera la secuencia de actividades dirigidas al alumnado de primer curso de Primaria.

3.2.2. Secuencia 2

Se presenta a continuación la secuencia de actividades diseñada para llevarla a cabo con alumnos de segundo curso de Educación Primaria.

Es evidente que el alumnado de este curso ya tiene más asimilados los algoritmos y comprende mejor los significados de suma y de resta, por lo que no necesitará utilizar tanto el material físico para realizar las operaciones. Sin embargo, en esta nueva secuencia de actividades se introduce el concepto de centenas y sus correspondientes equivalencias, y la resta con llevadas, por lo que puede ser en este momento concreto cuando el alumno necesite el empleo de los materiales físicos y representaciones gráficas.

- Bloque 1: las actividades de este primer bloque se centran en la utilización de materiales físicos para realizar descomposiciones e introducir el valor de las centenas. Aunque el alumnado comprenda el algoritmo de la suma y de la resta, con estas actividades se pretende afianzar la comprensión de los mismos.
 - Actividad 1: esta actividad tiene como objetivo que el alumno recuerde las descomposiciones de los números de manera que represente los mismos de maneras diferentes utilizando piezas de los bloques multibase, como son los cubos y las barras. Se les dará el material y se les dejará que representen diferentes cantidades de maneras diversas utilizando los cubos y las barras. Si se comprueba que no llegan a descomponer un número de más de una forma, se les podrá dar una pista diciendo que para representar el número 37, se puede coger 3 barras y 7 cubos, 2 barras y 17 cubos o 1 barra y 27 cubos. Se pretende que ellos mismos sean capaces de representar un mismo número de maneras diversas.
 - Actividad 2: el objetivo de esta actividad es introducir el concepto de centena. Para ello se dará al alumnado las piezas de los bloques multibase (cubos, barras y placas). En teoría, el alumnado ya habrá

manipulado este material previamente y habrá establecido la relación entre 10 barras y una placa. Por ello, se dejará que el alumnado represente diferentes cantidades, que van a implicar números de 3 cifras. Se pretende que el niño utilice las placas para representar las centenas y siga desarrollando y afianzando estrategias de descomposición de números.

- Actividad 3: para realizar esta actividad se utilizará el ábaco común. A diferencia de las actividades de la secuencia anterior, en esta ocasión, dado que ya se han familiarizado con la centena, se añadirá una varilla más al ábaco que representará la posición de este nuevo orden para ellos. En ella se podrán introducir bolas de color amarillo. Se entiende que los niños recordarán la relación existente entre las decenas y las unidades, es decir, que cuando se tengan en la varilla de las unidades más de diez, se formará una nueva decena y se añadirá una bola azul en la varilla que representa el lugar de las decenas. Para que el alumnado establezca la relación existente entre decenas y centenas, se les dirá que una bola azul es como una barra de los bloques multibase y que una bola amarilla es como una placa de los bloques multibase. La pregunta que se realizará será la siguiente: *¿cuántas barras necesitamos para una placa?* A lo que se espera que el alumnado responda 10, puesto que ya han visto la relación previamente. A continuación se preguntará: *entonces, ¿cuántas bolas azules necesitaré para obtener una bola amarilla?* El alumnado establecerá la misma relación y responderá que se necesitan 10 bolas azules. De esta manera se constituye la relación entre decenas y centenas. Asimismo, se espera que el alumnado se de cuenta de que también existe una relación entre centenas y unidades, es decir, que 100 unidades, forman una centena. Una vez vista esta relación, el alumnado, organizado en parejas, tendrá la oportunidad de representar diferentes números de tres cifras.

- Actividad 4: esta actividad tiene como objetivo que el alumnado practique el algoritmo de la suma con números de tres cifras, estableciendo y afianzando de esta forma la relación existente entre decenas y centenas. El alumnado organizado en parejas, en esta ocasión, podrá elegir el material que desea manipular. Teniendo en cuenta que ha trabajado anteriormente con ambos materiales y que sabe qué procedimiento debe emplear para realizar sumas con esos materiales, elegirá el que mejor le ayude a comprender y a realizar la operación de suma. Se dejará que sean ellos mismos los que vayan representando diferentes cantidades y sumándolas utilizando el material elegido.

- Actividad 5: el objetivo de esta actividad es introducir la resta con llevadas. Para ello se utilizará tanto las piezas de los bloques multibase (placas, barras y cubos) como el ábaco. Teniendo en cuenta que el alumnado ha trabajado la descomposición de números y las relaciones entre los diferentes órdenes, se trata de presentar al alumno una serie de situaciones que conlleven la operación de resta con llevada para que ellos descubran e intenten llegar a la solución de la misma empleando el material físico disponible. A modo de ejemplo se presenta la siguiente situación: *en una bolsa tengo 24 caramelos. He dado 18 caramelos a mis alumnos. ¿Cuántos caramelos me quedan en la bolsa?* Los alumnos, organizados en parejas deberán representar ambas cantidades en el material que ellos prefieran (ábacos o bloques multibase) y tratar de resolver la operación. Se entiende que (utilizando las piezas de los bloques multibase) llegarán a representar las cantidades de la siguiente forma: el número 24 estará representado por 2 barras y 4 cubos, mientras que el número 18 se representará con una barra y 8 cubos. El alumno deberá ser capaz de establecer relaciones y pasar una barra a 10 cubos, de forma que tenga 14 cubos y pueda quitar ahora los 8 cubos que representan las unidades. En caso de que utilicen el ábaco

representarán primero el número 18 con 8 bolas rojas y una azul, y posteriormente el número 24 colocando 4 bolas rojas y dos azules. Además deberán separar las cantidades con las pinzas. De la misma forma, pero con este material, el alumnado deberá convertir una decena en 10 unidades para poder restar ahora 14 menos 8. Se dejará el tiempo que haga falta para que los alumnos lleguen a este procedimiento. En caso de que haya dificultades se ayudará dando pistas sobre la relación entre las decenas y las unidades. Se continuará planteando más situaciones para que practiquen esta nueva operación de resta con llevadas.

- Actividad 6: con el objetivo de adquirir y seguir afianzando el procedimiento para realizar las restas con llevadas, el alumnado se enfrentará en esta ocasión a números de tres cifras. Se propondrá que representen dos cantidades diferentes utilizando o el ábaco o los bloques multibase y que se resten. Por ejemplo, 345 y 127. El alumnado debe ser consciente de que aunque los números a los que se enfrentan son mayores, el procedimiento es el mismo. Se hará referencia al hecho “pedir prestado” para que cuando se llegue a la fase de representación simbólica no se le olvide al alumnado que han quitado o a las decenas o a las centenas una.
- Bloque 2: este bloque presenta actividades en las que se incluye la resolución de problemas. Como se trata de alumnos de segundo curso, se entiende que para resolver problemas no necesitarán usar material físico. Sin embargo, al haber introducido las restas con llevadas, puede que en los problemas en los que esta operación esté implícita, el alumnado necesite recurrir al uso de los materiales para llegar al algoritmo. Es por ello, que se dará la oportunidad de emplear materiales físicos en estas actividades. Por otro lado, hay que comentar que los problemas que se presentan son de diferentes tipos. Se proponen problemas que engloban los 4 tipos: de combinación, de

comparación, de cambio aumentando y de cambio disminuyendo. A su vez, se procura que en las situaciones no se trate de averiguar la cantidad final sino que también se juegue con las cantidades iniciales o el cambio.

- Actividad 7: se propondrá en gran grupo la siguiente situación que se proyectará en el aula: *Ayer cuando fui a la panadería me fijé que había 28 barras de pan. Delante de mí había 3 personas. La primera se llevó 4 barras de pan, la segunda 9 y la tercera otras 4. Sin embargo, antes de que yo pidiera, el panadero repuso la estantería con 8 barras más de pan. ¿Cuántas barras de pan había entonces?* Se trata de un problema que requiere de la realización de más de una operación. Sin embargo, se tratan de operaciones sencillas aunque el problema pueda resultar un poco extenso. Se dejará que el alumnado, el cual estará organizado en parejas, recurra al material si necesita representar y realizar las operaciones con el mismo. Se espera que ya haya alumnos que no necesiten el material y utilicen el cálculo escrito para resolver la situación.
- Actividad 8: se entregará a cada alumno una ficha (ver anexo III). La ficha consta de una serie de problemas ya resueltos que tienen la solución escrita, pero no el procedimiento. Sin embargo, se explicará al alumnado que deben tratar de averiguar si esas soluciones son correctas o no. Para ello pueden utilizar el material disponible en el aula. El alumnado deberá corregir aquellas que sean incorrectas. Esta actividad se realizará en parejas y se corregirá posteriormente en gran grupo de forma oral para comprobar si han surgido dificultades.
- Actividad 9: se propondrá una nueva situación que implique ser resuelta mediante la operación de resta con llevadas. La situación se podrá proyectar en el aula y será la siguiente: *Juan tiene un taco de cromos. Su madre le da más. Decide contarlos y se fija que tiene un total de 54*

cromos. Si su madre le ha dado 17 cromos, ¿cuántos cromos tenía Juan antes de que su madre le diese más? Se trata de un problema de cambio aumentando de cantidad inicial desconocida. Se esperará a que todos los alumnos vuelvan a leer la situación planteada y tengan claro que para resolverla deberán realizar una resta. Se dejará que utilicen el material físico (ábacos o bloques multibase) para resolver la operación en caso de que necesiten ayuda del mismo. Se pretende que, dado que ya se han realizado varias operaciones de resta con llevada, el alumnado pueda resolver la operación realizando el cálculo escrito de la misma.

- Actividad 10: se entregará a cada alumno una ficha (ver anexo IV). La ficha consta de una serie de situaciones que el alumnado deberá resolver con su compañero. Para resolver los problemas, se dirá al alumnado, que pueden utilizar el material disponible en el aula. Si algún problema resulta más complejo, se podrá realizar en gran grupo, de manera que se resuelvan las posibles dudas que les puedan surgir.

- Bloque 3: al igual que en la secuencia de primer curso, este bloque pertenece a la representación simbólica de las operaciones. Los alumnos, una vez realizadas las actividades anteriores, han debido llegar a este nivel, en el cual la comprensión del algoritmo de la suma y de la resta está más afianzada y se realiza de forma mecánica.

Por tanto, en este nivel las actividades que se plantearían serían del mismo tipo que las anteriores, realizando operaciones a través de la resolución de problemas pero dejando al margen el uso del material físico empleado anteriormente. También, como paso intermedio entre el bloque 2 y el 3 y para que el alumno llegue a afianzar mejor la representación simbólica en este nivel, se puede plantear la representación gráfica de las operaciones de suma y de resta que el alumno ha ido realizando.

De acuerdo al ejemplo mostrado en la secuencia de primer curso, se continuaría presentando al alumnado el ábaco plano pero esta vez con una

nueva columna añadida a la izquierda de las decenas y que corresponde a las centenas, tal y como muestra la Figura 5.

C	D	U
○ ○ ○	○ ○	○ ○ ○
○ ○	○ ○ ○	○ ○

Figura 5. Ejemplo de representación gráfica de distintas cantidades en un ábaco plano.

Representando como se muestra en la Figura 5 las cantidades de 323 y 232, el alumno podrá llegar a la representación simbólica de las cantidades y realizar la operación correspondiente.

Se termina de esta forma la secuencia de actividades que se ha propuesto para llevar a cabo en un aula con alumnos de entre 7 y 8 años.

4. EXPECTATIVAS E IMPLICACIONES

Cabe comenzar este punto comentando que dado que no se ha podido llevar a la práctica las secuencias de actividades planteadas anteriormente en un centro escolar con alumnos de primer ciclo de Educación Primaria, no se puede establecer y determinar una serie de conclusiones reales y verídicas ya que no es posible asegurar y confirmar al cien por cien unos datos y unos resultados.

Sin embargo, sí se pueden plantear una serie de hipótesis teniendo en cuenta el tipo de actividades planteadas y las características que conforman los niños de ambos cursos de Primaria. Por tanto, lo que a continuación se presenta no son más que conjeturas.

En primer lugar, centrando la atención en el primer curso de Primaria, se puede suponer lo siguiente. El uso de los diferentes materiales físicos que se le han presentado al niño (ábacos, regletas Cuisenaire y bloques multibase) facilitará la representación de las cantidades que en las diferentes situaciones que se le planteen. Se puede decir, entonces, que representar cantidades con el material dado no conllevará grandes dificultades.

Sin embargo, el problema y las dificultades pueden presentarse en el momento en el que el niño tenga que operar utilizando el material. Si no tiene claras las equivalencias entre las diferentes piezas de los materiales, no podrá establecer relaciones y le será muy difícil hacer frente a una suma con llevadas. No será capaz de llegar a la conclusión de que, por ejemplo, si suma con el ábaco, 12 más 39, debe añadir una bola azul más al lugar de las decenas dejando una bola roja en el lugar de las unidades, ya que al sumar 9 más 2 tiene 11 unidades y por tanto, puede formar esa decena más.

Por esta razón, es muy importante que previamente a realizar la operación de suma, el docente insista en que alumno manipule los materiales y establezca las relaciones entre ellos. De esta forma y llegado el momento de realizar la operación, el niño ya tendrá asimilado que 10 cubos forman una barra y que 10 bolas rojas equivalen a una bola azul, es decir que 10 unidades forman una decena.

Del mismo modo, cuando el niño llegue a la fase de representación simbólica, uno de los errores que puede cometer, y que es de los más comunes, al realizar operaciones de suma con llevadas es que se le olvide, precisamente, la llevada. En este caso, el docente debe recordar que al sumar con llevadas están haciendo agrupamientos que dan lugar a la formación de decenas nuevas que deben añadir en el lugar de las decenas ya existentes.

Con relación al segundo curso se puede suponer lo siguiente. El proceso de enseñanza – aprendizaje de las operaciones de suma y de resta finaliza, como ya se ha comentado en puntos anteriores, en este curso. Con esto, se entiende que dicho aprendizaje está siendo cada vez más asimilado y adquirido (quizás incluso finalizando) en los alumnos. Las operaciones de suma y de resta se resolverán de forma más mecánica. Por tanto, de manera general y estableciendo una comparación con el primer curso, se puede suponer que las dificultades que el alumnado presente en segundo curso tenga en relación con las operaciones de suma y de resta, serán menores que en primero.

Dado que los alumnos de segundo curso se encuentran en un curso superior, es evidente que llevan más tiempo trabajando con las operaciones de suma y de resta, y que por tanto, no necesitarán de forma tan frecuente, como puede ser en primer curso, el empleo de materiales físicos o el uso de representaciones gráficas para llegar a las operaciones y su comprensión. Sin embargo, se puede suponer que al introducir las restas con llevadas en este curso, el uso del material físico se verá incrementado. Los alumnos necesitarán establecer relaciones y descomposiciones a través de la manipulación de estos materiales físicos para llegar a asimilar este nuevo conocimiento. Será en los momentos en los que el alumnado se enfrente a situaciones que tenga que resolver mediante la realización de una resta con llevadas cuando más recurra al empleo de los materiales físicos. Es evidente que este aprendizaje puede resultar más costoso, por lo que el docente deberá estar atento tanto a los progresos como a las dificultades que tengan sus alumnos para poder solventarlas de la mejor manera posible. De la misma forma, se puede suponer que si el alumnado tiene muy asimilado el sistema de numeración decimal y las relaciones entre los diferentes órdenes, llegarán a la comprensión del algoritmo de la resta con llevadas con menos dificultades.

Por otro lado, es en este curso cuando se introduce el valor posicional de las centenas. Si el niño tiene clara la relación entre decenas y unidades, no le costará llegar a la relación entre centenas, decenas y unidades. Sin embargo, al operar con números de tres cifras, el alumnado se puede encontrar ante números que considere muy mayores y puede que no sepa hacer frente a la nueva situación que se le plantea.

De forma general, se puede suponer, que dado que se trata de un aprendizaje progresivo y paulatino, la mayoría del alumnado podrá llegar a la fase de representación simbólica sin problemas, puesto que habrán ido adquiriendo e interiorizando el algoritmo de la suma y de la resta a lo largo de las actividades planteadas en los niveles anteriores, es decir, en la resolución de problemas y en la manipulación de materiales físicos.

Por otro lado, se ha presentado en ambas secuencias un paso intermedio para llegar a la representación simbólica. Este paso intermedio se refiere, como se ha explicado anteriormente, a la utilización de representaciones gráficas. Se puede suponer que aquellos alumnos que hayan interiorizado los algoritmos de manera más mecánica, no necesitarán utilizar este paso intermedio para llegar a la fase de representación simbólica. El material pasará, entonces, a ser un elemento totalmente prescindible para ellos. Sin embargo, también se puede suponer que habrá alumnos que tarden un poco más de tiempo en llegar a la fase de representación simbólica. Estos alumnos necesitarán seguir utilizando materiales físicos o representaciones gráficas durante un período más largo de tiempo que el resto de alumnos. Asimismo, será en este momento cuando el alumnado desarrolle y utilice sus propias estrategias para resolver las situaciones que se le planteen. Es muy posible que en primer curso el alumno utilice sus dedos o marcas en el papel como representación de las cantidades numéricas con las que se encuentre, pero ya en segundo curso, teniendo en cuenta que las cantidades son mayores, el alumno podrá recurrir a la representación del ábaco plano, ya comentada anteriormente, para representar esas cantidades.

Si se tiene en cuenta la evolución de un curso a otro se puede suponer lo siguiente. En primer curso el alumnado necesitará de un apoyo visual y manipulativo de forma más constante a la hora de llegar a realizar las operaciones de suma y de resta, ya sea a

través de la resolución de problemas o no; mientras que en segundo curso ese apoyo se verá disminuido puesto que se tienen más asimilados los algoritmos de la suma y de la resta. Se realizan de manera más mecánica. Sin embargo, se puede suponer que, si al alumnado de segundo curso se le presenta un problema que requiera de cierto grado de complejidad, la representación gráfica o el uso de material físico pueden ser imprescindibles para la comprensión del mismo y por tanto para llegar a la operación de suma o de resta. Se puede concluir, por tanto, que será en primer curso de primaria cuando el uso del material físico y las representaciones gráficas adquieran mayor importancia en el aprendizaje de las operaciones de suma y de resta como métodos y estrategias para llegar a la comprensión de los algoritmos.

Para finalizar, cabe decir que en todo momento el docente debe ser consciente de que los niños están aprendiendo conocimientos nuevos y de que debe ayudarles y realizar aquellas explicaciones que crea convenientes y útiles para su alumnado. Debe tener en cuenta que, posiblemente, no todos los alumnos establezcan las mismas relaciones ni lleguen a las mismas conclusiones y a la correcta solución de operaciones y problemas, por lo que nunca estará de más una explicación. El maestro debe implicarse activamente en el proceso de enseñanza desarrollando nuevas y eficaces estrategias. Además debe tener en cuenta los resultados que muestran sus alumnos ya que le servirán como guía para saber y determinar si su alumnado ha conseguido los objetivos propuestos o no con el fin de replantear y realizar posibles mejoras en el proceso de enseñanza que ha llevado a cabo.

CONCLUSIONES

Como se ha mencionado al principio del trabajo, el uso de materiales físicos se recomienda como paso previo para llegar a la fase de representación simbólica de las operaciones de suma y de resta. Por tanto, ese empleo que se haga del material va a suponer una ventaja para el niño, ya que favorece la comprensión del algoritmo de la suma y de la resta.

Sin embargo, ¿por qué se le da tanta importancia a la manipulación de los materiales? El niño aprende a través del uso de los materiales porque se trata de un aprendizaje que se ve influenciado por la motivación que el uso de ellos provoca en el niño.

El niño, de manera inconsciente, va a ir aprendiendo las operaciones de suma y de resta y asentando una base sólida en la comprensión del saber matemático a través de la utilización del material que se le presente. Para los niños, el material es un elemento lúdico. Por esta razón, se debe aprovechar esta concepción que el niño tiene sobre el material y utilizarla como método de motivación en el aprendizaje.

En las aulas de los centros escolares de hoy en día, se puede apreciar y observar que este hecho ocurre. Realmente, los docentes que imparten matemáticas introducen los materiales físicos porque saben que con ellos van a conseguir directamente motivar a sus alumnos. Se ha podido comprobar que mediante el uso de materiales el alumnado no solo llega a comprender los algoritmos de suma y de resta, sino que también le sirven como apoyo en la resolución de problemas para comprender el significado de las operaciones. Desde el punto de vista de mi experiencia práctica con alumnos de primer ciclo de Educación Primaria, puedo afirmar que la influencia de materiales, no sólo los mencionados este trabajo sino también fichas, pinturas, cromos..., es muy positiva para la comprensión de dichos conocimientos matemáticos.

REFERENCIAS

Baroody, J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*.

Madrid: Ministerio de Educación y Cultura: Visor, D.L.

Carretero, M. (1993). *Constructivismo y educación*. Zaragoza: Edelvives.

Cascallana, M.T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana.

Castro, E. (2001). *Didáctica de la matemática en Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Hernán, F.; Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y la resta*. Madrid: Síntesis.

Orton, A.(1990). *Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura, Centro de Publicaciones: Morata.

ANEXOS

Anexo I

Mi madre ha comprado una caja de bombones para celebrar su cumpleaños. En la caja había 9 bombones. Nos hemos comido 6. ¿Cuántos bombones quedan ahora en la caja?

Había bombones.

Nos comimos..... bombones.

$$\begin{array}{r} 9 \\ + 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 6 \\ \hline \end{array}$$

Quedan..... bombones.

Mi padre ha hecho un pastel y ha gastado 7 huevos. Si antes había 18 huevos en el frigorífico, ¿cuántos quedan ahora?

Había..... Huevos

Gastó..... huevos

$$\begin{array}{r} 18 \\ + 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ - 7 \\ \hline \end{array}$$

Quedan..... huevos

Ayer fui al dentista y me fijé que en la sala de espera había 6 periódicos y 3 revistas. ¿Cuántos periódicos más que revistas había?

Había periódicos.

Había revistas.

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ - 3 \\ \hline \end{array}$$

Habíaperiódicos más que revistas.

En una sala de cine hay 12 adultos y 7 niños. ¿Cuántas personas hay en total?

Hayadultos.

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 7 \\ \hline \end{array}$$

Hay.....niños.

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 7 \\ \hline \end{array}$$

Hay.....personas.

En el frutero de mi casa hay 2 manzanas. Si a la mañana había 8, ¿cuántas se han comido?

Haymanzanas.

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 2 \\ \hline \end{array}$$

Había.....manzanas.

$$\begin{array}{r} 8 \\ - 2 \\ \hline \end{array}$$

Se han comido.....manzanas.

El día 19 de este mes es mi cumpleaños. Si hoy es día 8, ¿cuántos días faltan para que llegue mi cumpleaños?

Hoy es día

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 8 \\ \hline \end{array}$$

Mi cumpleaños es el día.....

$$\begin{array}{r} 19 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$$

Faltan.....días.

Anexo II

Mi madre llevaba 35 euros para hacer la compra. Al salir del supermercado le quedaban 10 euros. ¿Cuánto se ha gastado en la compra?

Llevaba.....euros.

Le quedaron.....euros.

Operación:

Se ha gastado.....euros comprando.

Mi abuela Rosa tiene 67 años. Si yo tengo 14 años, ¿cuántos años tenemos entre las dos?

Rosa tiene.....años.

Yo tengo.....años.

Operación:

Tenemos.....años.

En una granja hay 26 animales. 14 de ellos son gallinas y el resto son cerdos y vacas. ¿Cuántos cerdos y vacas hay en total en la granja?

Hay.....animales.

.....son gallinas.

Operación:

.....cerdos y vacas hay en la granja.

Tengo 16 años y mi hermana tiene 12. ¿Cuántos años más que mi hermana tengo?

Tengo.....años.

Mi hermana tiene..... años.

Operación:

Tengo.....años más que mi hermana.

Para la fiesta del colegio hemos decidido decorar la clase con globos de colores. Hemos utilizado 14 globos azules, 7 amarillos y 10 verdes. ¿Cuántos globos hemos utilizado en total?

.....globos azules.

.....globos amarillos.

.....globos verdes.

Operación:

Hemos utilizado.....globos en total.

Quiero tener la colección entera de un álbum de cromos. Si el álbum completo son 24 cromos y ya tengo 11, ¿cuántos me hacen falta para terminar la colección?

Tengo.....cromos.

El álbum son.....cromos.

Operación:

Necesito.....cromos para completar el álbum.

Anexo III

En una charla del colegio nos hemos juntado los alumnos de 4 clases. En dos de las clases el número de alumnos era el mismo, 27 en cada una de ellas. Otra de las clases tiene 23 alumnos y la cuarta clase tiene 5 más que las dos que tienen el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos nos hemos juntado en la charla?

Solución: Nos hemos juntado 108 alumnos.

Carla ha traído bombones al colegio para celebrar su cumpleaños. En total ha traído 28 bombones y ha repartido uno a cada niño de la clase. Como hoy han faltado cuatro niños, le ha dado uno a la profesora. ¿Cuántos bombones han sobrado?

Solución: Han sobrado 4 bombones.

Javier tiene dos hermanos. Su hermano mayor tiene 3 años más que él, y el hermano pequeño tiene 6 menos que Javier. Si Javier tiene 19 años, ¿cuántos años tienen sus hermanos?

Solución: El hermano mayor tiene 21 años y el hermano pequeño tiene 13 años.

Este año Osasuna ha marcado 23 goles a lo largo de la temporada. Si durante la primera parte de la temporada, marcaron 12, ¿cuántos goles marcaron los jugadores en la segunda parte de la temporada?

Solución: En la segunda temporada marcaron 11 goles.

En un avión hay plaza para 57 personas. Si hay 34 plazas ocupadas, ¿cuántos asientos vacíos hay?

Solución: Hay 33 asientos vacíos.

Anexo IV**Situación 1:**

El domingo fui al parque de atracciones con mis padres y mi hermana. La entrada de mis padres costaba, entre los dos, 48 euros. Mi hermana, como tiene más de 8 años, tuvo que pagar 14 euros, y yo entré gratis. ¿Cuánto dinero nos costaron todas las entradas?

Situación 2:

La persona más mayor de mi familia tiene 74 años. Si se lleva 67 años con el más pequeño de la familia, ¿cuántos años tiene el pequeño?

Situación 3:

Hoy nos ha dicho la profesora que en la biblioteca del colegio hay 874 libros. La semana pasada, todos los niños de mi clase cogimos un libro cada uno y somos 27 alumnos. Hoy han devuelto el libro 14 niños. Sin embargo, a los niños de la clase de 2º B les tocaba hoy ir a la biblioteca y se han llevado 25 libros. ¿Cuántos libros hay ahora en la biblioteca?

Situación 4:

Para la fiesta de mi cumpleaños hemos comprado 9 litros de coca – cola, 5 litros de naranjada, 4 de limonada y 14 litros de agua. Durante la primera hora se habían bebido 4 litros de coca – cola, 1 de naranjada y otro de limonada, y 6 litros de agua. ¿Cuántos litros de bebida en total había al principio? ¿Cuántos litros de cada bebida quedan después de la primera hora?

Situación 5:

En una caja he guardado 90 fichas de colores. De las 90 fichas, 12 son rojas y 45 son verdes. ¿Cuántas fichas no son rojas?