Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Análisis de un método de enseñanza-aprendizaje de la geometría en 3º ESO

Ruth Unzu Ripoll

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE:

Introducción general: 5

Parte I:Las matemáticas en el currículo vigente y en los libros de texto 7

Capítulo 1. La geometría en el currículo vigente **11**

1.1 Contenidos en Tercer Ciclo de Educación Primaria (5º y 6º de Primaria)...... 12

1.2 Contenidos en primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (1º y 2º ESO) 14

1.3 Contenidos en segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (3º y 4º ESO) 16

1.4 Contenidos Bachiller (1º y 2º de Bachiller).. 19

Capítulo 2. Criterios de evaluación en el currículo vigente. **21**

2.1 Criterios de evaluación en el tercer ciclo de Primaria (5º y 6º de Primaria). ... 21

2.2 Criterios de evaluación en el primer ciclo de la Enseñanza secundaria Obligatoria (1º y 2º de ESO). 22

2.3 Criterios de evaluación en el segundo ciclo de la Enseñanza secundaria Obligatoria (3º y 4º de ESO). 24

Capítulo 3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la geometría en el currículo vigente. **29**

3.1 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º ESO. 29

3.2 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO. 34

3.3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO. 40

3.4 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, opción A. 44

3.5 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, opción B. 49

3.6 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller Ciencias. 54

Parte II: Análisis de un método de enseñanza de la geometría en 3º de secundaria 57

Capítulo 4. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo **59**

4.1 Correspondencia entre el currículo y los libros de texto de ESO..................... 59

4.1.1 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 1º ESO 59

4.1.2 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 2º ESO 60

4.1.3 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 3º ESO 61

4.1.4 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 4º ESO (Óp. A). 62

4.1.5 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 4º ESO (Ópción B) 63
4.2 Correspondencia entre el currículo y los libros de texto de Bachiller..... 64
4.2.1 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 1º Bachiller (Opción Ciencias) 64
4.3 Conclusiones generales de la correspondencia entre currículo y libro de texto... 65
Capítulo 5. La geometría en el libro de texto de referencia 67
5.1 Objetos matemáticos involucrados..... 67
5.2 Análisis global de la unidad didáctica..... 70
Capítulo 6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica 73
6.1 Dificultades 73
6.2 Errores y su posible origen..... 74
Capítulo 7. Presentación y método de ejecución del ABP 75
7.1 Metodología utilizada..... 75
7.2 Objetivos y metas del aprendizaje..... 76
7.3 Recursos 77
7.4 Criterios de evaluación..... 77
7.5 Temporización..... 77
7.6 Actividad autónoma 77
Capítulo 8. Experimentación 79
8.1 Muestra y diseño de la experimentación..... 79
8.2 El examen, el informe, y la autoevaluación. 79
8.3 Comportamientos esperados..... 82
8.4 Resultados 82
8.5 Discusión de los resultados 87
Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas..... 89

Referencias 92
ANEXO A.Unidad didáctica del libro de texto..... 93
ANEXO B. Alguno de los informes presentados por los alumnos y alumnas...... 145

Introducción general:

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar y valorar un método de enseñanza – aprendizaje novedoso de los contenidos de geometría en 3º ESO. Esto método de enseñanza-aprendizaje está basado en la técnica pedagógica de aprendizaje basado en problemas o proyectos.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación a la geometría.

En la segunda parte se propone un método de enseñanza sobre la noción de geometría desde un punto de vista diferente al usado habitualmente en el aula y que se ha puesto en marcha en un aula de 3º ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Las matemáticas en el currículo vigente y en los libros de texto.

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de "La geometría" en el currículo del tercer ciclo de Primaria, de la ESO y de Bachillerato, y en los libros de texto de ESO y Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos.

- En el primer capítulo se muestran en forma de tabla, los contenidos del currículo vigente, en los cuales se hacen referencia a los distintos aspectos que se desarrollan en el bloque de la geometría en cada uno de los grados.

- En el segundo capítulo se abordan en forma de tabla los criterios de evaluación del currículo vigente, en los cuales se hacen referencia a todas las habilidades, destrezas, conceptos que debe ser capaz de adquirir el alumnado al final del nivel educativo en el que se encuentra.

- En el tercer capítulo se presentan ejemplos de las actividades tipo, (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) propuestas en un libro de texto de 3º ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores (es decir, desde 1º ESO hasta Bachiller).

- En el cuarto y último capítulo se muestran las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1. La geometría en el currículo vigente

En este primer capítulo se analiza el currículo oficial definido para diferentes aspectos y contenidos de la geometría, en distintos niveles educativos, en este caso, desde el tercer ciclo de Primaria hasta Bachillerato.

El currículo vigente de la educación obligatoria está desarrollado en los Boletines Oficiales del Estado, más concretamente en:

- MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.
- MEC (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. BOE 5, de 5 enero, 677–773.
- MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre. BOE 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

Para facilitar la comprensión y poder contrastar de manera más clara y eficiente los contenidos que se exigen en las distintas etapas educativas, el análisis del currículo, se realiza agrupando las etapas de Primaria, Secundaria y Bachillerato en tablas.

El formato de las tablas y la leyenda de las mismas, se muestra de manera resumida en las tabla 1.

	Primaria	**ESO**					**Bachiller Ciencias**		**Bachiller C. Sociales**	
Descriptor	**3er ciclo**	**1º**	**2º**	**3º**	**4º (Opción A)**	**4º (Opción B)**	**1º**	**2º**	**1º**	**2º**
C1	F1-P	F1-1ESO	F1-2ESO	F1-3ESO	F1-4AESO	F1-4BESO	F1-1BACH	F1-2BACH	-	-
C2	F2-P	F2-1ESO	-	-	-	F2-4BESO	F2-1BACH	F2-2BACH	-	-
C3	F3-P	F3-1ESO	F3-2ESO	F3-3ESO	F3-4AESO	F3-4BESO	-	-	-	-
C4	F4-P	F4-1ESO	F4-2ESO	F4-3ESO	-	-	F4-1BACH	F4-2BACH	-	-
C5	F5.P	F5-1ESO	F5-2ESO	F5-3ESO	F5-4AESO	-	-	-	-	-
C6	F6-P	F6-1ESO	F6-2ESO	F6-3ESO	F6-4AESO	F6-4BESO	-	-	-	-

Tabla 1.- Plantilla de los descriptores referentes a la geometría en el currículo evaluado.

Leyenda:

- Ci: Descriptor del contenido específico que es abordado en cada uno de los grados. Más concretamente, los descriptores son:
    - C1: Formas Planas y espaciales.
    - C2: Trigonometría.
    - C3: Semejanza de Figuras geométricas .

- C4: Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento.
- C5: Objetivos cognitivos.
- C6: Utilización herramientas tecnológicas.

- Fi-grado: Formulación relativa a un contenido relacionado con Ci en un determinado grado.
- La raya (—) significa que en ese grado no se explicita un contenido en el currículo vigente.

Los contenidos geométricos en todas las etapas educativas desde tercer ciclo de Primaria hasta Bachillerato en el currículo vigente, se muestra detallado en los siguientes apartados.

1.1 Contenidos en Tercer Ciclo de Educación Primaria (5º y 6º de Primaria)

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 3er CICLO DE PRIMARIA
Unidades de medida	Bloque 2 - La medida: estimación y cálculo de magnitudes. Longitud, peso/masa, capacidad y superficie.. • Realización de mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales. • Equivalencias entre unidades de una misma magnitud. • Estimación de longitudes, superficies, pesos y capacidades de objetos y espacios conocidos; elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida.
C1-Formas planas y espaciales	Bloque 2 - La medida: estimación y cálculo de magnitudes. Longitud, peso/masa, capacidad y superficie. • Desarrollo de estrategias personales para medir figuras de manera exacta y aproximada. • Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en mediciones y estimaciones. - Utilización de unidades de superficie. • Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición. Bloque 3 – Geometría. Formas planas y espaciales • Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo. • Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
C2-Trigonometría	Bloque 2 - La medida: estimación y cálculo de magnitudes. Medida del tiempo. • Unidades de medida del tiempo y sus relaciones. La precisión con

	los minutos y los segundos. • Equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos, en situaciones reales. Medida de ángulos. • El ángulo como medida de un giro o abertura. Medida de ángulos y uso de instrumentos convencionales para medir ángulos. • Utilización de la medición y las medidas para resolver problemas y comprender y transmitir informaciones. Bloque 3 - Geometría. La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros. • Ángulos en distintas posiciones.
C3-Semejanza de Figuras geométricas	Bloque 3 – Geometría. La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros. • La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas. Regularidades y simetrías. • Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	Bloque 3 - Geometría La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros. • Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros... Regularidades y simetrías. • Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos. • Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado.
C5-Objetivos cognitivos	Bloque 2 - La medida: estimación y cálculo de magnitudes. Medida de ángulos. • Interés por utilizar con cuidado y precisión diferentes instrumentos de medida y herramientas tecnológicas, y por emplear unidades adecuadas. Bloque 3. Geometría. Regularidades y simetrías. • Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones ante situaciones de incertidumbre relacionadas con la organización y utilización del espacio. Confianza en las propias posibilidades para utilizar las construcciones geométricas y los objetos y las relaciones espaciales para resolver problemas en situaciones reales.

	• Interés por la presentación clara y ordenada de los trabajos geométricos. Formas planas y espaciales. • Interés por la precisión en la descripción y representación de formas geométricas.
C6-Utilización herramientas tecnológicas	<u>Bloque</u> 3 – Geometría. La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros. • Utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para la construcción y exploración de formas geométricas.

Tabla 2.- Contenidos en Tercer Ciclo de Educación Primaria

1.2 Contenidos en primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (1º y 2º ESO)

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 1º ESO	CONTENIDOS 2º ESO
C1-Formas planas y espaciales	<u>Bloque 4</u> - Geometría • Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano. • Utilización de una terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico. Construcciones geométricas sencillas: • Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. • Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos. mediatriz y bisectriz. • Polígonos regulares. La circunferencia y el círculo. • Construcción de polígonos regulares con los instrumentos de dibujos habituales.	<u>Bloque 4</u> - Geometría • Volúmenes de cuerpos geométricos. • Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes. • Poliedros y cuerpos de revolución. • Desarrollos planos y elementos característicos. • Clasificación atendiendo a distintos criterios. • Utilización de procedimientos tales como la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento, deformación o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.
C2-Trigonometría	<u>Bloque 4</u> - Geometría • Medida y cálculo de ángulos en figuras planas.	
C3-Semejanza de Figuras geométricas	<u>Bloque 2</u> – Números • Razón y proporción.	<u>Bloque 2</u> – Números • Proporcionalidad directa e

	• Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. • Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa.	inversa. • Razón de proporcionalidad. • Aumentos y disminuciones porcentuales. • Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa. Bloque 4 - Geometría • Figuras con la misma forma y distinto tamaño.
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	Bloque 4 - Geometría • Análisis de relaciones y propiedades de las figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. • Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano. • Simetría de figuras planas. • Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.	Bloque 4 - Geometría • Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.
C5-Objetivos cognitivos	Bloque 1. Contenidos comunes. • Utilización de estrategias y técnicas simples en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más simple, y comprobación de la solución obtenida. • Expresión verbal del procedimiento que se ha seguido en la resolución de problemas. • Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre cantidades y medidas o sobre elementos o relaciones espaciales.	Bloque 1: Contenidos comunes. • Utilización de estrategias y técnicas en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la división del problema en partes, y comprobación de la solución obtenida. • Descripción verbal de procedimientos de resolución de problemas utilizando términos adecuados. • Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o sobre elementos o relaciones espaciales.

	• Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas.	• Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.
C6-Utilización herramientas tecnológicas	Bloque 1: Contenidos comunes. • Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. • Emplea de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.	Bloque 1: Contenidos comunes. • Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. • Emplea de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.

Tabla 3.- Contenidos en Primer Ciclo de Educación Secundaria

1.3 Contenidos en segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (3º y 4º ESO)

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 3º ESO
C1-Formas planas y espaciales	Bloque 4 - Geometría • Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. • Lugar geométrico.
C2-Trigonometría	
C3-Semejanza de Figuras geométricas	Bloque 4 - Geometría • Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	Bloque 4 - Geometría • Traslaciones, simetrías y giros en el plano. • Elementos invariantes de cada movimiento. • Uso de los movimientos para el análisis y representación • de figuras y configuraciones geométricas. • Planos de simetría en los poliedros. • Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.

	• Coordenadas geográficas y husos horarios. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados.
C5-Objetivos cognitivos	Bloque 1 – Contenidos comunes. • Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada. • Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa. • Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o simbólico o sobre elementos o relaciones espaciales. • Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas. Bloque 4 - Geometría. • Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.
C6-Utilización herramientas tecnológicas	Bloque 1 - Contenidos comunes. • Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Tabla 4.- Contenidos en Segundo Ciclo de Educación Secundaria (3º)

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 4º ESO –A	CONTENIDOS 4º ESO –B
C1-Formas planas y espaciales	<u>Bloque 4</u> - Geometría. • Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana. • Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.	<u>Bloque 4</u> - Geometría. • Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
C2-Trigonometría		<u>Bloque 4</u> - Geometría • Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.

		• Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.
C3-Semejanza de Figuras geométricas	Bloque 4 - Geometría. • Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. • Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas.	Bloque 4 - Geometría. • Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento		
C5-Objetivos cognitivos	Bloque 1: Contenidos Comunes. • Expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución de problemas con la precisión y rigor adecuados a la situación. • Interpretación de mensajes que contengan argumentaciones o informaciones de carácter cuantitativo o sobre elementos o relaciones espaciales. • Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.	
C6-Utilización herramientas tecnológicas	Bloque 1: Contenidos Comunes • Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propie-	Bloque 1: Contenidos Comunes • Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propie-

	dades geométricas.	dades geométricas.

Tabla 5.- Contenidos en Segundo Ciclo de Educación Secundaria (4º)

1.4 Contenidos Bachiller (1º y 2º de Bachiller)

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 1º BACH. CIENCIAS	CONTENIDOS 2º BACH. CIENCIAS
C1-Formas planas y espaciales	Bloque 2 - Geometría. • Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.	Bloque 2 - Geometría. • Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo, distancias, áreas y volúmenes.
C2-Trigonometría	Bloque 2 - Geometría. • Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.	Bloque 2 - Geometría. • Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos.
C3-Semejanza de Figuras geométricas		
C4-Geometría Analíticas: Vectores, simetrías, giros, traslaciones, movimientos y posicionamiento	Bloque 2 - Geometría. • Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector. • Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. • Distancias y ángulos. Resolución de problemas.	Bloque 2 - Geometría. • Vectores en el espacio tridimensional. • Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico. • Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. • Resolución de problemas de posiciones relativas
C5-Objetivos cognitivos		
C6-Utilización herramientas tecnológicas		

Tabla 6.- Contenidos en Bachillerato Científico

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 1º BACH. SOCIALES	CONTENIDOS 2º BACH. SOCIALES
C1-Formas planas y espaciales	En el currículo de contenidos de 1º Bachiller para matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, no se observa como objetivo, los contenidos geométricos.	En el currículo de contenidos de 2º Bachiller para matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, no se observa como objetivo, los contenidos geométricos.
C2-Trigonometría		
C3-Semejanza de Figuras geométricas		
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento		
C5-Objetivos cognitivos		
C6-Utilización herramientas tecnológicas		

Tabla 7.- Contenidos en Bachillerato de Ciencias Sociales

Capítulo 2. Criterios de evaluación en el currículo vigente.

Para facilitar la visualización del presente capítulo y poder observar de una manera más eficiente los datos comparativos entre los criterios de evaluación, el análisis de los criterios de evaluación se realizará agrupando en base a las distintas etapas educativas en forma de tablas. Las plantillas de las tablas son iguales a las plantillas referidas en el capítulo anterior (tabla 1).

Además como varios de los criterios de evaluación son adaptables a distintos descriptores, se pueden encontrar los descriptores agrupados dentro de la tabla.

2.1 Criterios de evaluación en el tercer ciclo de Primaria (5º y 6º de Primaria).

DESCRIPTOR	CRITERIOS TERCER CICLO DE PRIMARIA
C1-Formas planas y espaciales	**Punto 4:** Seleccionar, en contextos reales, los más adecuados entre los instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresar con precisión medidas de longitud, superficie, peso/masa, capacidad y tiempo. Con este criterio se pretende detectar la capacidad de escoger los instrumentos de medida más pertinentes en cada caso, y de estimar la medida de magnitudes de longitud, capacidad, masa y tiempo haciendo previsiones razonables. También se quiere comprobar la capacidad de utilizar con corrección las unidades de medida más usuales, convertir unas unidades en otras de la misma magnitud, y que los resultados de las mediciones que se realizan se expresan en las unidades de medida más adecuadas. Así mismo, se valorará la capacidad de explicar oralmente y por escrito, con progresiva autonomía, los razonamientos.
C2-Trigonometría. C3-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	**Punto 5:** Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno.
C4-Semejanza de Figuras geométricas	**Punto 6.** Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.

Tabla 8.- Criterios de evaluación en tercer ciclo de Primaria

2.2 Criterios de evaluación en el primer ciclo de la Enseñanza secundaria Obligatoria (1º y 2º de ESO).

DESCRIPTORES	CRITERIOS 1º ESO	CRITERIOS 2º ESO
C1-Formas planas y espaciales. C3-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	**Punto 4:** Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas. **Punto 5:** Estimar y calcular perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando la unidad de medida adecuada. Se pretende valorar la capacidad de estimar algunas medidas de figuras planas por diferentes métodos y de emplear la unidad y precisión más adecuada. Se valorará también el empleo de métodos de descomposición por medio de figuras elementales para el cálculo de áreas de figuras planas del entorno.	**Punto 4:** Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada. Mediante este criterio se valora la capacidad para comprender y diferenciar los conceptos de longitud, superficie y volumen y seleccionar la unidad adecuada para cada uno de ellos. Se trata de comprobar, además, si se han adquirido las capacidades necesarias para estimar el tamaño de los objetos. Más allá de la habilidad para memorizar fórmulas y aplicarlas, este criterio pretende valorar el grado de profundidad en la comprensión de los conceptos implicados en el proceso y la diversidad de métodos que se es capaz de poner en marcha.
C2-Trigonometría		
C3-Semejanza de Figuras geométricas		**Punto 2:** Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de

		utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.
C5-Objetivos cognitivos. C6-Utilización herramientas tecnológicas	**<u>Punto 8:</u>** Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución. Con este criterio se valora la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias simples de resolución, así como el hábito y la destreza necesarias para comprobar la solución. Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo, y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje adecuado, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros. También se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de intercambio.	**<u>Punto 7:</u>** Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución. Con este criterio se valora la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias de resolución, así como el hábito y las destrezas necesarias para comprobar la corrección de la solución y su coherencia con el problema planteado. Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje suficientemente preciso, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros. También se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de contraste.

Tabla 9.- Criterios de evaluación en primer ciclo de Secundaria

2.3 Criterios de evaluación en el segundo ciclo de la Enseñanza secundaria Obligatoria (3º y 4º de ESO).

DESCRIPTOR	CRITERIOS 3º ESO
C1-Formas planas y espaciales	
C2-Trigonometría	
C3-Semejanza de Figuras geométricas	
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	**Punto 4:** Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. Con este criterio se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, para que puedan ser utilizados como un recurso más de análisis en una formación natural o en una creación artística. El reconocimiento de los movimientos lleva consigo la identificación de sus elementos característicos: ejes de simetría, centro y amplitud de giro, etc. Igualmente los lugares geométricos se reconocerán por sus propiedades, no por su expresión algebraica. Se trata de evaluar, además, la creatividad y capacidad para manipular objetos y componer movimientos para generar creaciones propias
C5-Objetivos cognitivos.	**Punto 8:** Planificar y utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines y comprobar el ajuste de la solución a la situación planteada y expresar verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas, e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello. Se trata de evaluar la capacidad para planificar el camino hacia la resolución de un problema e incorporar estrategias más complejas a su resolución. Se evalúa, así mismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones, la coherencia y ajuste de las mismas a la situación que ha de resolverse así como la confianza en la propia capacidad para lograrlo. También, se trata de valorar la precisión del lenguaje utilizado para expresar todo tipo de informaciones que contengan cantidades, medidas, relaciones, numéricas y espaciales, así como estrategias y razonamientos utilizados en la resolución de un problema
C6-Utilización herramientas tecnológicas	

Tabla 10.- Criterios de evaluación en Segundo ciclo de Secundaria (3º)

DESCRIPTOR	CRITERIOS 4ºESO A.	CRITERIOS 4º ESO B
C1-Formas planas y espaciales. C3-Semejanza de Figuras geométricas. C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	**Punto 4:** Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de tras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.	**Punto 3:** Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar la capacidad de desarrollar estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta
C2-Trigonometría		
C5-Objetivos cognitivos.	**Punto 9:** Planificar y utilizar procesos de razonamiento y estrategias diversas y útiles para la resolución de problemas, y expresar verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello. Se trata de evaluar la capacidad de planificar el camino hacia la resolución de un problema, comprender las relaciones matemáticas que intervienen y elegir y aplicar estrategias y técnicas de resolución aprendidas en los cursos anteriores, confiando en su propia capacidad e intuición. Asimismo, se trata de valorar la precisión del lenguaje utilizado para expresar todo tipo de informaciones que contengan cantidades, medidas, relaciones, numéricas y espaciales, así como estrategias y razonamientos utilizados en la resolución de un problema.	
C6-Utilización herramientas tecnológicas		

Tabla 11.- Criterios de evaluación en Segundo ciclo de Secundaria (4º)

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 1º BACH. - CIENCIAS	CONTENIDOS 2º BACH. - CIENCIAS
C1-Formas planas y espaciales. C3-Semejanza de Figuras geométricas. C2-Trigonometría	**Punto 2:** Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; así como, identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas. Se pretende evaluar la capacidad para representar geométricamente una situación planteada, eligiendo y aplicando adecuadamente las definiciones y transformaciones geométricas que permitan interpretar las soluciones encontradas; en especial, la capacidad para incorporar al esquema geométrico las representaciones simbólicas o gráficas auxiliares como paso previo al cálculo. Asimismo, se pretende comprobar la adquisición de las capacidades necesarias en la utilización de técnicas propias de la geometría analítica para aplicarlas al estudio de las ecuaciones reducidas de las cónicas y de otros lugares geométricos sencillos.	
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	**Punto 3:** Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones. La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la inter-	**Punto 2:** Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en tres dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones. La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la inter-

	pretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el plano.	pretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el espacio de tres dimensiones.
C5-Objetivos cognitivos.		**<u>Punto 3:</u>** Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.

Tabla 11.- Criterios de evaluación en Bachillerato científico

Capítulo 3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la geometría en el currículo vigente.

En este capítulo se van a analizan los diferentes libros de texto que corresponden a los distintos niveles de la educación secundaria obligatoria. Se identificarán en cada curso distintos, ejercicios y cuestiones tipo, que podemos encontrar en los citados libros y así poder determinar si hay relación con el currículo vigente.

Los libros de texto analizados[1] son:

- 1º ESO: Proyecto “Esfera”, de la editorial SM.
- 2º ESO: Proyecto “Esfera”, de la editorial SM.
- 3º ESO: Proyecto “Esfera”, de la editorial SM.
- 4º ESO opción A: Proyecto “Múltiplo”, de la editorial SM.
- 4º ESO opción B: Proyecto “Pitágoras”, de la editorial SM.
- 1º Bachiller Ciencias: Proyecto “La casa” del saber, de la editorial Santillana.

3.1 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º ESO.

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio que indica claramente lo que tiene que realizar el alumnado, y busca el manejo del alumnado de las herramientas utilizadas para realizar formas geométricas.
  Ubicación del ejemplo el libro de texto: Tema 11 “Formas Geométricas” p.206 .

19 Dibuja un segmento vertical de 7 centímetros de longitud.

a) Traza su mediatriz utilizando regla y compás.

b) Comprueba que el punto de corte de la mediatriz con el segmento es su punto medio.

Figura – 1-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio similar al anterior.
  Ubicación del ejemplo en el libro de texto: Tema 11 “Formas Geométricas” p.207.

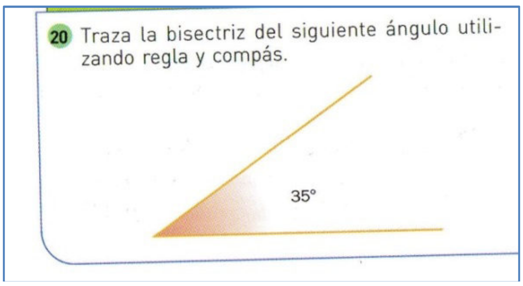
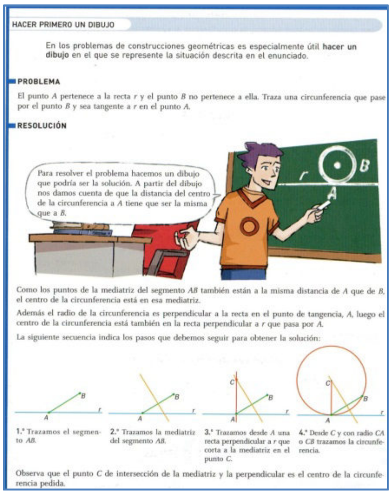


Figura – 2-

[1] En la bibliografía se pueden encontrar las referencias de los libros de texto.

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio guionizado para observar la necesidad de realizar los dibujos para una correcta interpretación del enunciado.
  Ubicación del ejemplo en el libro de texto: Tema 11 "Formas Geométricas" p.212.



HACER PRIMERO UN DIBUJO

En los problemas de construcciones geométricas es especialmente útil **hacer un dibujo** en el que se represente la situación descrita en el enunciado.

PROBLEMA

El punto *A* pertenece a la recta *r* y el punto *B* no pertenece a ella. Traza una circunferencia que pase por el punto *B* y sea tangente a *r* en el punto *A*.

RESOLUCIÓN

Para resolver el problema hacemos un dibujo que podría ser la solución. A partir del dibujo nos damos cuenta de que la distancia del centro de la circunferencia a *A* tiene que ser la misma que a *B*.

Como los puntos de la mediatriz del segmento *AB* también están a la misma distancia de *A* que de *B*, el centro de la circunferencia está en esa mediatriz.

Además el radio de la circunferencia es perpendicular a la recta en el punto de tangencia, *A*, luego el centro de la circunferencia está también en la recta perpendicular a *r* que pasa por *A*.

La siguiente secuencia indica los pasos que debemos seguir para obtener la solución:

1.º Trazamos el segmento *AB*.

2.º Trazamos la mediatriz del segmento *AB*.

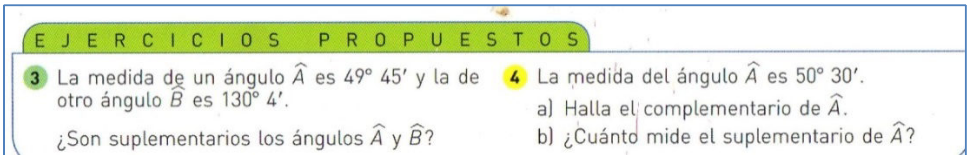
3.º Trazamos desde *A* una recta perpendicular a *r* que corta a la mediatriz en el punto *C*.

4.º Desde *C* y con radio *CA* o *CB* trazamos la circunferencia.

Observa que el punto *C* de intersección de la mediatriz y la perpendicular es el centro de la circunferencia pedida.

Figura – 3-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Pregunta directa al alumnado para resolver relaciones entre ángulos.
  Ubicación del ejemplo en el libro de texto: Tema 11 "Formas Geométricas" p.201.



EJERCICIOS PROPUESTOS

3 La medida de un ángulo $\widehat{A}$ es 49° 45′ y la de otro ángulo $\widehat{B}$ es 130° 4′.

¿Son suplementarios los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$?

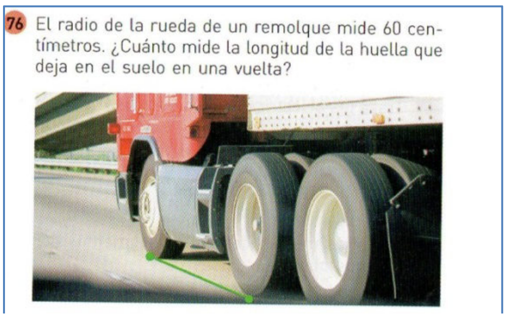
4 La medida del ángulo $\widehat{A}$ es 50° 30′.

a) Halla el complementario de $\widehat{A}$.

b) ¿Cuánto mide el suplementario de $\widehat{A}$?

Figura – 4-

- **Ejemplo Tipo:** Problema .
  Descripción: En este problema se añade la dificultad de que el alumnado debe establecer una relación entre la huella que deja el camión que es lineal y la longitud de la circunferencia.
  Ubicación del ejemplo en el libro de texto: Tema 11 "Formas Geométricas" p.216.



76 El radio de la rueda de un remolque mide 60 centímetros. ¿Cuánto mide la longitud de la huella que deja en el suelo en una vuelta?

Figura – 5-

- **Ejemplo Tipo**: Cuestión.
  Descripción: Mediante estas cuestiones se verá si el alumnado es capaz de relacionar todos los saberes adquiridos y razona adecuadamente la respuesta.
  Ubicación del ejemplo en el libro de texto: Tema 12 “Figuras planas” p.236.

42 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Hay paralelogramos que no son rombos.

b) Hay trapecios que tienen los cuatro ángulos iguales.

c) Hay cuadriláteros que son rombos y rectángulos a la vez.

d) Hay rectángulos que tienen los cuatro ángulos iguales pero no rectos.

Figura – 6-

- **Ejemplo Tipo**: Problema.
  Descripción: Problemas que tiene como objetivo que el alumnado establezca relaciones entre contextos cotidianos y conceptos aprendidos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 11 “Figuras planas” p.238.

76 Los abuelos de Pablo tienen un prado sin cercar en forma triangular y un caballo. Quieren atar el caballo de modo que desde un punto pueda ir lo más lejos posible, alcanzando solamente a dos lados del prado pero sin pacer la hierba de la vecina.

a) ¿Dónde tienen que colocar la estaca?

b) Haz la construcción correspondiente.

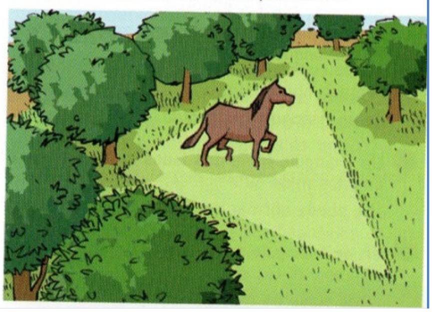


Figura – 7-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión .
  Descripción: Cuestión para desarrollar el razonamiento deductivo del alumnado, en base a los conocimientos adquiridos (suma de ángulos de un polígono).
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 12 “Figuras planas” p.225.

E J E R C I C I O S P R O P U E S

10 ¿Se puede construir un triángulo de manera que sus ángulos midan 105°, 45° y 35°?
Razona la respuesta.

Figura – 8-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ejemplo directos de cálculo de áreas, con la complejidad de que no son figuras sencillas sino compuestas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 13 “Longitudes y Áreas” p.259.

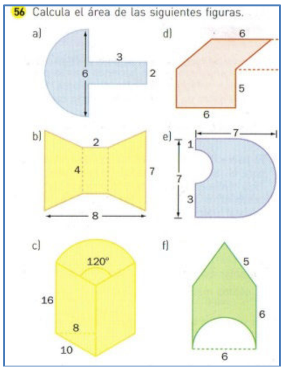


Figura – 9-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Aunque podría incluirse como un problema, en el que se trata de contextualizar el “Teorema de Pitágoras,”. Las pistas dadas en el dibujo guían al alumnado en la resolución del mismo y le eximen de la capacidad de pensar y de hacer el dibujo, como indicaba 2 temas antes.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 13 “Longitudes y Áreas” p.260.

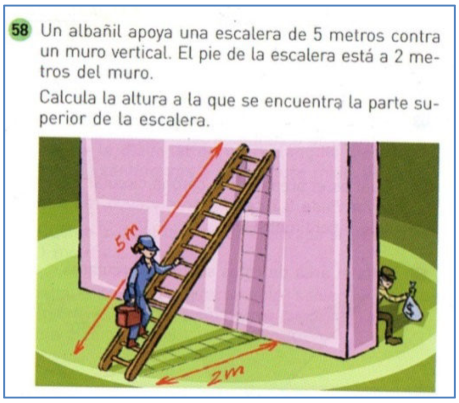


Figura – 10-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Necesidad de razonar la respuesta en base a los conocimientos adquiridos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 13 “Longitudes y Áreas” p.259.

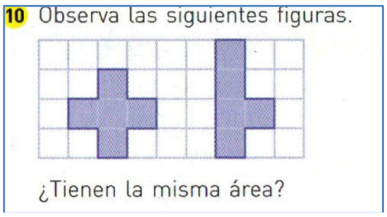


Figura – 11-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Cálculo de áreas por el método de descomposición, no dejan ningún aspecto a la elección del alumnado.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto Tema 13 "Longitudes y Áreas" p.259.

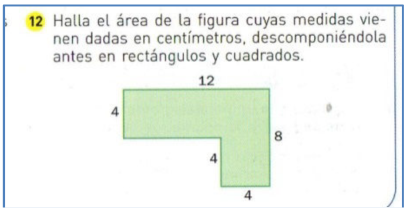

12 Halla el área de la figura cuyas medidas vienen dadas en centímetros, descomponiéndola antes en rectángulos y cuadrados.

Figura – 12-

- **Ejemplo Tipo**: Problema.
  Descripción: Calculo de elementos más complejos, necesidad de identificar las circunferencias concéntricas y utilizar la fórmulas, o realizar el ejercicio por descomposición.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 13 "Longitudes y Áreas" p.268.

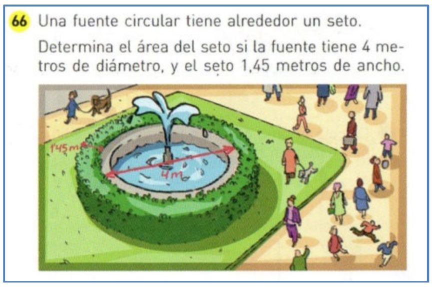

66 Una fuente circular tiene alrededor un seto.
Determina el área del seto si la fuente tiene 4 metros de diámetro, y el seto 1,45 metros de ancho.

Figura – 13-

- **Ejemplo Tipo**: Cuestión.
  Descripción: Mediante este ejercicio el alumnado puede comprobar cuál es la respuesta correcta de manera empírica.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 14 "Cuerpos geométricos y volúmenes" p.267.

10 Una cartulina tiene forma de triángulo rectángulo escaleno.
¿Cuántos conos distintos puede generar?

Figura – 14-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ídem. que un ejemplo anterior, pero este con volúmenes.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 14 "Cuerpos geométricos y volúmenes" p.269.

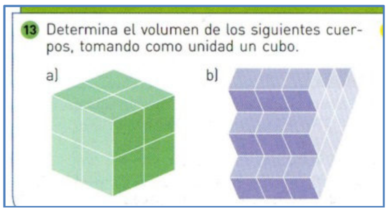
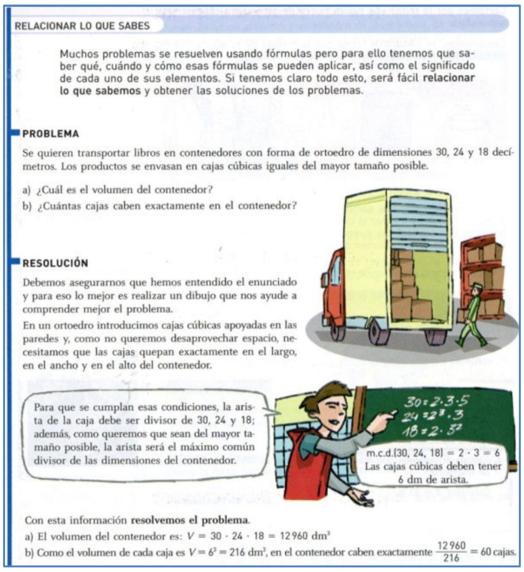

13 Determina el volumen de los siguientes cuerpos, tomando como unidad un cubo.

Figura – 15-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Las aplicaciones prácticas de los ejercicios contextualizados garantizarían que el saber ha sido institucionalizado.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 14 "Cuerpo geométricos y volúmenes" p274.



RELACIONAR LO QUE SABES

Muchos problemas se resuelven usando fórmulas pero para ello tenemos que saber qué, cuándo y cómo esas fórmulas se pueden aplicar, así como el significado de cada uno de sus elementos. Si tenemos claro todo esto, será fácil **relacionar lo que sabemos** y obtener las soluciones de los problemas.

PROBLEMA

Se quieren transportar libros en contenedores con forma de ortoedro de dimensiones 30, 24 y 18 decímetros. Los productos se envasan en cajas cúbicas iguales del mayor tamaño posible.

a) ¿Cuál es el volumen del contenedor?
b) ¿Cuántas cajas caben exactamente en el contenedor?

RESOLUCIÓN

Debemos asegurarnos que hemos entendido el enunciado y para eso lo mejor es realizar un dibujo que nos ayude a comprender mejor el problema.

En un ortoedro introducimos cajas cúbicas apoyadas en las paredes y, como no queremos desaprovechar espacio, necesitamos que las cajas quepan exactamente en el largo, en el ancho y en el alto del contenedor.

Para que se cumplan esas condiciones, la arista de la caja debe ser divisor de 30, 24 y 18; además, como queremos que sean del mayor tamaño posible, la arista será el máximo común divisor de las dimensiones del contenedor.

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
$24 = 2^3 \cdot 3$
$18 = 2 \cdot 3^2$

m.c.d.(30, 24, 18) = $2 \cdot 3 = 6$
Las cajas cúbicas deben tener 6 dm de arista.

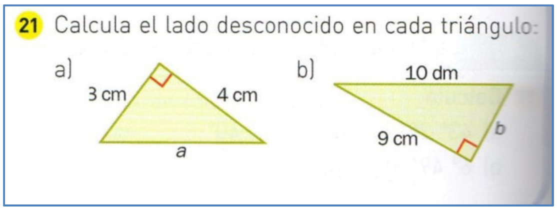
Con esta información **resolvemos el problema**.

a) El volumen del contenedor es: $V = 30 \cdot 24 \cdot 18 = 12\,960$ dm³
b) Como el volumen de cada caja es $V = 6^3 = 216$ dm³, en el contenedor caben exactamente $\frac{12\,960}{216} = 60$ cajas.

Figura – 16-

3.2 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO.

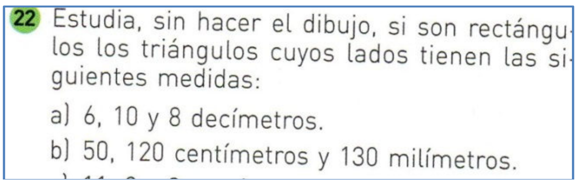
- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de aplicación directa del teorema de Pitágoras.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema11 "Medidas, teorema de Pitágoras" p. 210.



21 Calcula el lado desconocido en cada triángulo:

Figura – 16-

- **Ejemplo Tipo**: Cuestión.
  Descripción: En el presente ejemplo, se busca si el alumnado ha entendido correctamente el teorema de Pitágoras y los triángulos rectángulos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema11 "Medidas, teorema de Pitágoras" p. 211.



22 Estudia, sin hacer el dibujo, si son rectángulos los triángulos cuyos lados tienen las siguientes medidas:

a) 6, 10 y 8 decímetros.
b) 50, 120 centímetros y 130 milímetros.

Figura – 17-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejemplo para ejercitar el cálculo operaciones con ángulos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema11 “Medidas, teorema de Pitágoras” p. 217.

49 Realiza las siguientes operaciones.

a) 39° 17′ 43″ + 52° 48′ 30″
b) 46° 53′ 8″ + 20° 6′ 53″
c) 70° 18′ 33″ − 49° 20′ 15″
d) 65° 34′ 28″ − 5° 17′ 38″
e) 2 · (44° 30′ 12″)
f) 5 · (10° 24′ 8″)
g) (64° 29′) : 3
h) (43° 7′ 5″) : 7

Figura – 18-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Aunque no está contextualizado en elementos de la vida cotidiana, se considera problema ya que a priori no se ve directamente la relación con el teorema de Pitágoras.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema11 “Medidas, teorema de Pitágoras” p. 217.

57 Calcula el lado de un rombo sabiendo que sus dia gonales miden lo siguiente.

a) 12 y 16 centímetros   b) 6 y 8 decímetros

Figura – 19-

- **Ejemplo Tipo**: Problema.
  Descripción: Problema de aplicación de teorema de Pitágoras, aunque al indicar tan claramente los triángulos se observa la implicación del teoría de Pitágoras en el resultado final.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema11 “Medidas, teorema de Pitágoras” p. 218.

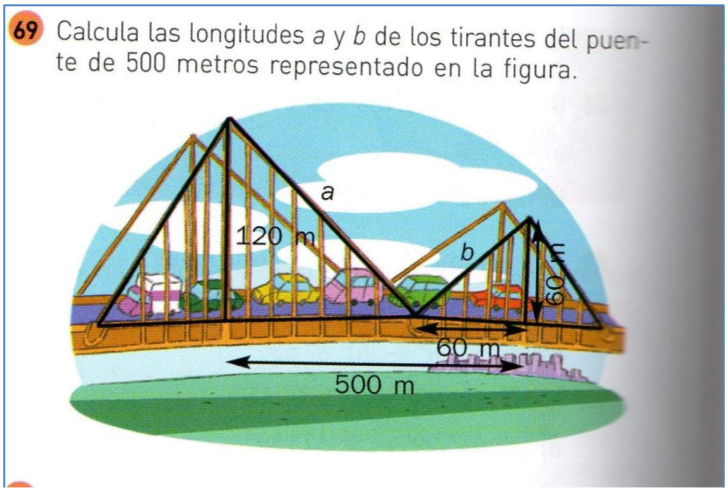


Figura – 20-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio para trabajar con ángulos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema11 “Medidas, teorema de Pitágoras” p. 219.

75 ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos en que queda dividido por su bisectriz otro de 47° 39′?

Figura – 21-

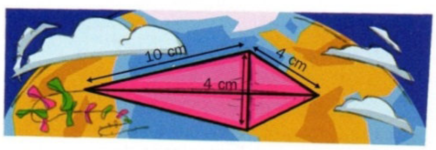
- **Ejemplo Tipo**: Problema.
  Descripción: Problema de aplicación del teorema de Pitágoras, a priori no observable su implicación en la resolución del mismo.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema11 “Medidas, teorema de Pitágoras” p. 219.

80 Halla el lado desigual de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 13 centímetros, y la altura, 5 centímetros.

Figura – 22-

- **Ejemplo Tipo**: Cuestión.
  Descripción: Cuestión de aplicación del teorema de Tales, a priori no observable su implicación en la resolución del mismo. Además creo que se puede considerar cuestión, ya que hay distintas soluciones.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema12 “Semejanza. Teorema de Tales” p. 237.

75 Se quiere construir una cometa de lados 1,5 veces mayores que los de la figura.



¿Es suficiente un metro cuadrado de papel para construirla?

Figura – 23-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa del Teorema de Tales.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema12 “Semejanza. Teorema de Tales” p. 234.

34 Los siguientes triángulos se encuentran en posición de Tales. Calcula la medida del lado *a*.

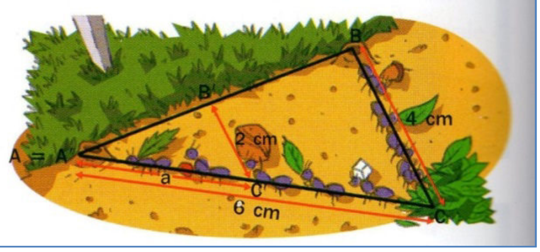


Figura – 24-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: En el presente ejemplo te indica el camino para obtener la razón de semejanza.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema12 “Semejanza. Teorema de Tales” p. 235.

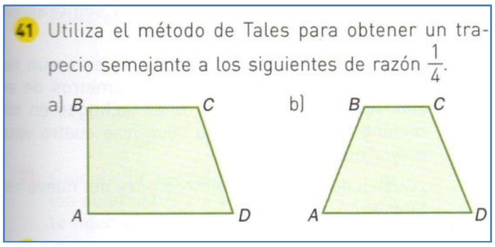


Figura – 25-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Problema de resolución mediante el teorema de Tales.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema12 “Semejanza. Teorema de Tales” p. 227.

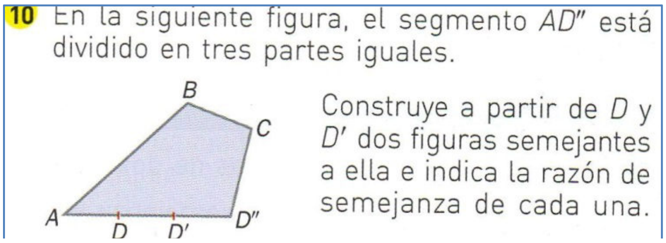


Figura – 26-

- **Ejemplo Tipo**: Problema.
  Descripción: Problemas de aplicación de escalas y planos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema12 “Semejanza. Teorema de Tales” p. 236.

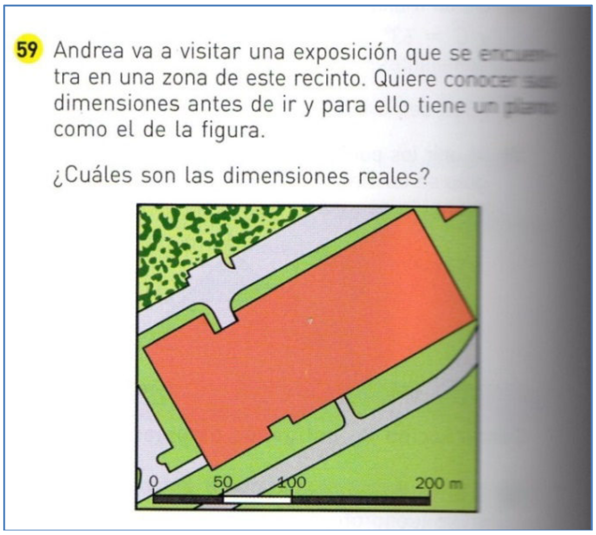


Figura – 27-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Problema con aplicación tanto del teorema de Tales como de las escalas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema12 “Semejanza. Teorema de Tales” p. 236.

61 Para sujetar unas plantas, Mario quiere cortar un listón de 1,20 metros en 3 trozos de manera que el segundo sea la mitad del primero, y el tercero, el triple del segundo.

Ha decidido hacer un dibujo a escala 1 : 20 para realizar las divisiones del segmento y, a partir de ellas, calcular las medidas reales.

Calcula la longitud de cada uno de los trozos en que Mario ha de dividir el listón.

Figura – 28-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Comprobación de manera visual de la relación de Euler.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema13 “Cuerpos geométricos” p. 245.

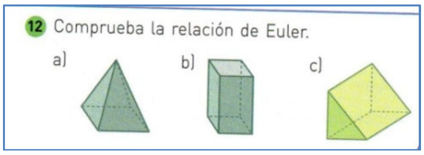


Figura – 29-

- **Ejemplo Tipo:** Problema .
  Descripción: El alumnado debe relacionar el radio de la circunferencia que determina la base, con el lado del cilindro, según su eje de giro.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema13 “Cuerpos geométricos” p. 256.

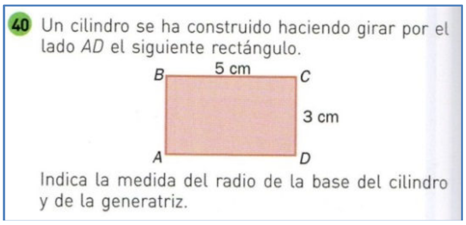


Figura – 30-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: El alumnado debe ser capaz de identificar el eje de giro y la figura que va a formar y base a ese giro.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema13 “Cuerpos geométricos” p. 257.

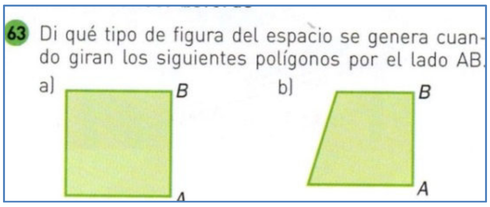


Figura – 31-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión .
  Descripción: Relacionar el lado del rectángulo con la longitud de la circunferencia. Ello implica una comprensión adecuada del desarrollo plano de un cilindro.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema13 "Cuerpos geométricos" p. 258.

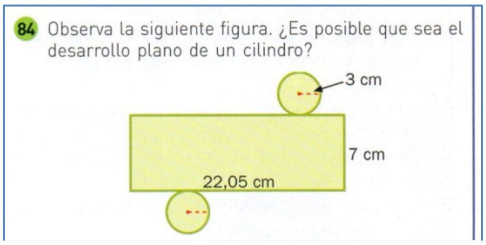


Figura – 32-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Primeramente el alumnado intentará determinar en base a ciertos razonamientos según sus conocimientos previos, la respuesta. Después deberá comprobarla de manera estricta.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema14 "Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos" p. 265.

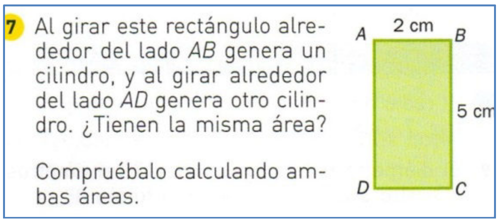


Figura – 33-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejemplo de aplicación directa de formulación de volúmenes.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema14 "Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos" p. 279.

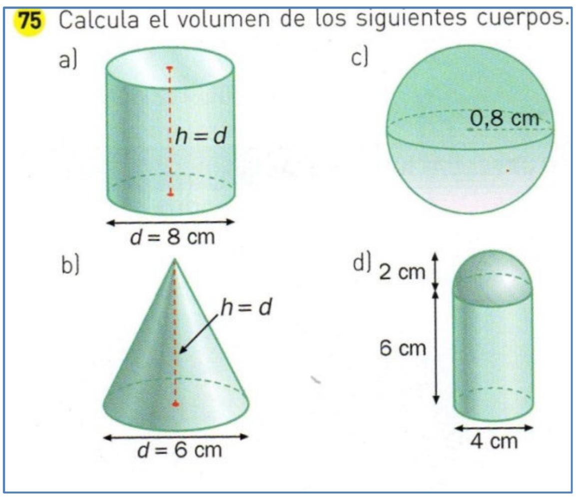


Figura – 34-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Ejemplo contextualización para calcular áreas. El proceso de resolución debe seguir unos pasos que nos están guionizados en el ejemplo.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema14 "Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos" p. 278.

62 Las paredes de una cocina están recubiertas d azulejos cuadrados de 15 centímetros de lado. La dimensiones de la cocina son: largo, 3,75 metros ancho, 2,25, y alto, 2,50. La puerta mide 85 po 210 centímetros, y la ventana es cuadrada d 135 centímetros de lado. ¿Cuántos azulejos se ha necesitado para recubrir la cocina?

Figura – 35

3.3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO.

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa del cálculo de ángulos interiores de un polígono cualesquiera.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema8 "Geometría del plano" p. 133.

2 Determina cuánto mide el ángulo desconocido en estas figuras.

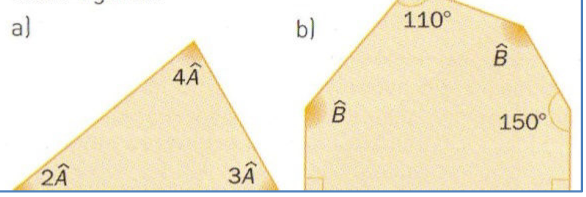


Figura – 36-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de asimilación de concepto "lugar geométrico".
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema8 "Geometría del plano" p. 138.

15 Copia las circunferencias de la figura y dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas. Describe la figura resultante.

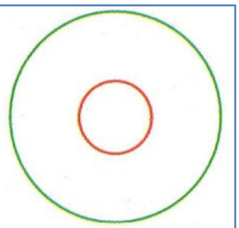


Figura – 37-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa de fórmula de áreas, no hay ningún valor desconocido. Identificar distintas figuras geométricas en la figura compuesta.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema8 “Geometría del plano” p. 140.

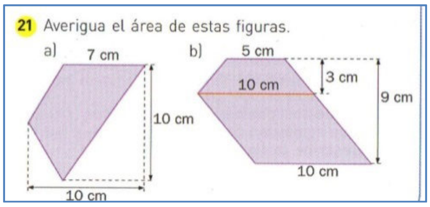


Figura – 38-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Aplicación del teorema de Tales y semejanza de triángulos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema8 “Geometría del plano” p. 144.

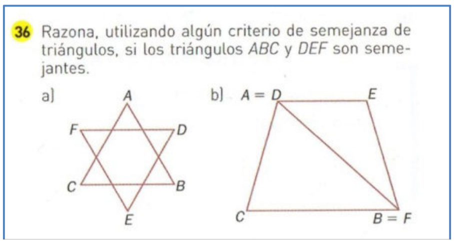


Figura – 39-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio descontextualizado de aplicación de traslaciones en el plano.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema9 “Traslaciones, giros y simetrías en el plano” p. 153.

12 Dibuja en unos ejes de coordenadas una circunferencia de centro $O(0, 0)$ y radio 3 unidades.

Traslada sucesivamente la circunferencia según los vectores $\vec{u}(3, 0)$, $\vec{v}(-3, 0)$, $\vec{w}(0, 3)$ y $\vec{z}(0, -3)$.

Figura – 40-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Cuestión para comprobar si el alumnado ha comprendido en qué consisten las simetrías de figuras y las traslaciones en el plano.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema9 “Traslaciones, giros y simetrías en el plano” p. 155.

19 A una figura se le aplica un giro de centro O y amplitud 200° y, a continuación, un nuevo giro del mismo centro y ángulo α. ¿Qué valor positivo debe tener α para que la figura vuelva a su primera posición?

Figura – 41-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Identificación de los diferentes ejes de simetría
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema9 "Traslaciones, giros y simetrías en el plano" p. 159.

34 ¿Cuáles son los ejes de simetría de los triángulos equiláteros? ¿Y de los triángulos rectángulos?

Figura –42-

Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema9 "Traslaciones, giros y simetrías en el plano" p. 160.

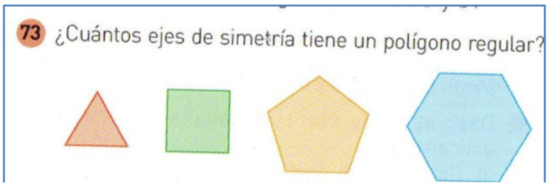


Figura – 43-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa de suma de vectores. No solicita nada extra como indicar o enunciar que es "combinación lineal de vectores".
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema9 "Traslaciones, giros y simetrías en el plano" p. 163.

39 Dados los vectores $\vec{u}(-1, 2)$, $\vec{v}(2, 4)$ y $\vec{w}(0, 5)$, realiza estas operaciones.

a) $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$ c) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
b) $\vec{u} - (\vec{w} + \vec{w})$ d) $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})$

Figura – 44-

- **Ejemplo Tipo**: Cuestión.
  Descripción: El alumnado debe razonar e identificar que propiedades tienen los vectores y como nos pueden ayudar a resolver este problema. Relacionar también con las simetrías. Muy completo.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema9 "Traslaciones, giros y simetrías en el plano" p. 165.

Figura – 44-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de aplicación directa del teorema de Euler.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 10 "Figuras y cuerpos geométricos" p. 169.

2 Completa la siguiente tabla.

	Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

Figura – 45-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa del teorema de Pitágoras.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 10 "Figuras y cuerpos geométricos" p. 171.

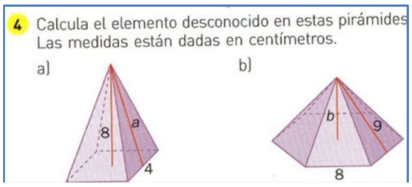


Figura – 46-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Comprobación de si es el alumnado ha comprendido como se formar los cuerpos redondos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 10 "Figuras y cuerpos geométricos" p. 172.

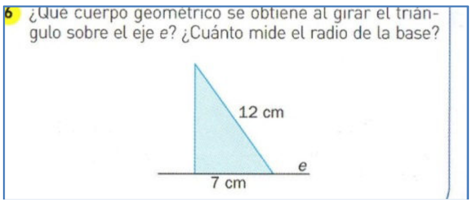


Figura – 47-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa de áreas en figuras sencillas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 10 "Figuras y cuerpos geométricos" p. 142.

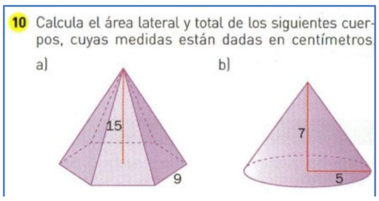


Figura – 48-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa de áreas y volúmenes en figuras compuestas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 10 "Figuras y cuerpos geométricos" p. 177.

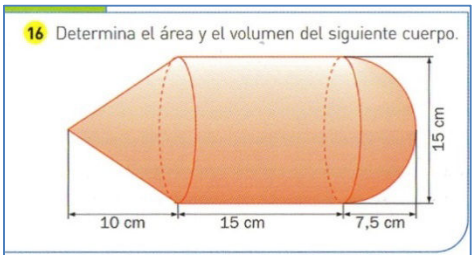


Figura – 49-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Problema muy completo que requiere conocimientos de áreas, volúmenes, escalas, unidades de medida. Y la relaciones entre ellas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 10 "Figuras y cuerpos geométricos" p. 186.

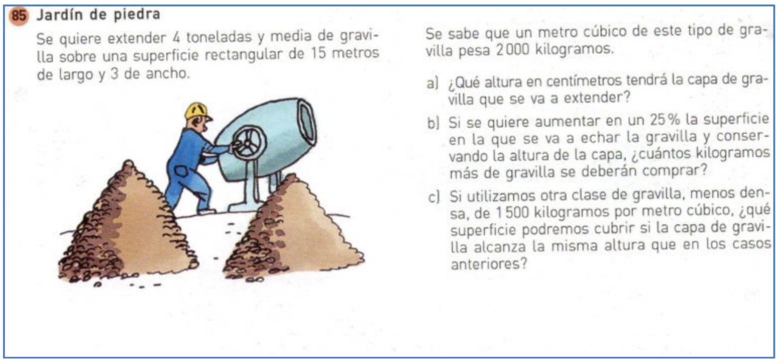


Figura – 50-

3.4 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, opción A.

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de aplicación de Semejanza de triángulos, del teorema de Tales y del teorema de Pitágoras.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Semejanza y Trigonometría" p. 135.

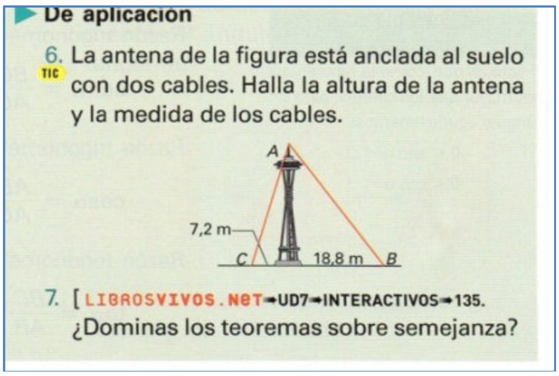
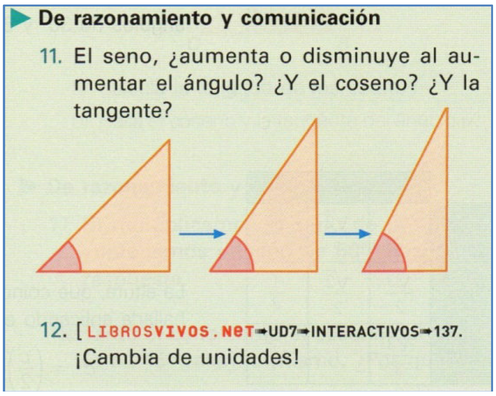


Figura – 51-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Cuestión para valorar si realmente se entiende como se calcula el seno, coseno y tangente de un ángulo.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Semejanza y Trigonometría" p. 137.



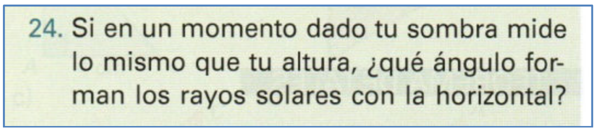
De razonamiento y comunicación

11. El seno, ¿aumenta o disminuye al aumentar el ángulo? ¿Y el coseno? ¿Y la tangente?

12. [LIBROSVIVOS.NET→UD7→INTERACTIVOS→137. ¡Cambia de unidades!

Figura – 52-

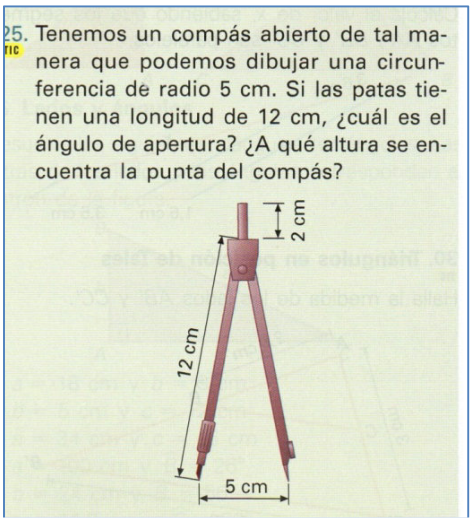
Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Semejanza y Trigonometría" p. 141.



24. Si en un momento dado tu sombra mide lo mismo que tu altura, ¿qué ángulo forman los rayos solares con la horizontal?

Figura – 53-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio completo de aplicación de trigonometría, semejanza y teorema de Pitágoras. Permite establecer la relación entre los mismos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Semejanza y Trigonometría" p. 141.



25. Tenemos un compás abierto de tal manera que podemos dibujar una circunferencia de radio 5 cm. Si las patas tienen una longitud de 12 cm, ¿cuál es el ángulo de apertura? ¿A qué altura se encuentra la punta del compás?

Figura – 53-

- **Ejemplo Tipo**: Cuestión.
  Descripción: Relación entre escalas de medidas lineales y superficiales o volumétricas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Semejanza y Trigonometría" p. 142.

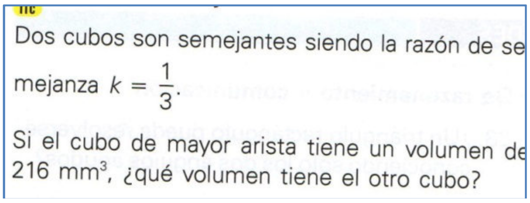

Dos cubos son semejantes siendo la razón de semejanza $k = \frac{1}{3}$.
Si el cubo de mayor arista tiene un volumen de 216 mm³, ¿qué volumen tiene el otro cubo?

Figura – 54-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa del teorema de Tales.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Semejanza y Trigonometría" p. 142.

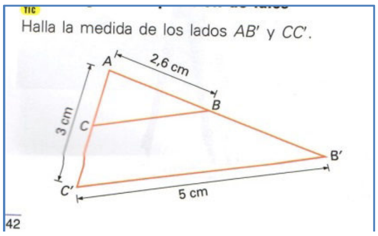
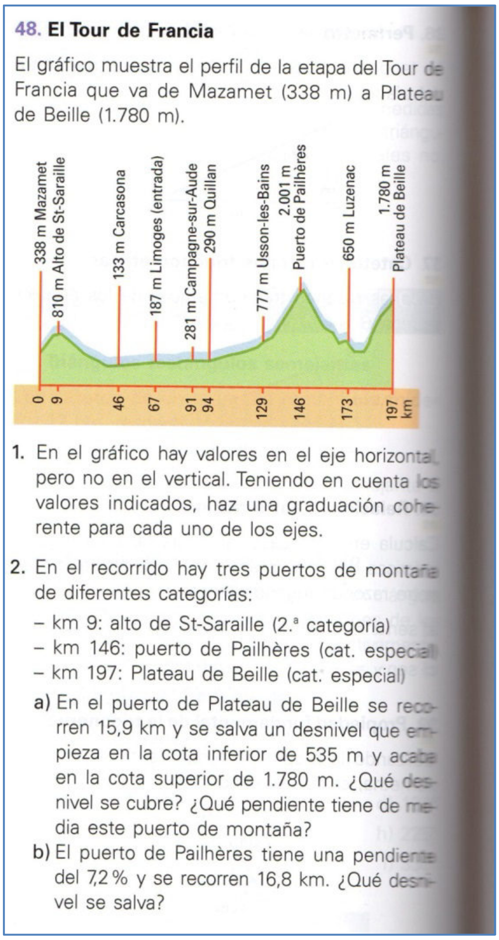

Halla la medida de los lados AB' y CC'.

Figura – 55-

- **Ejemplo Tipo**: Problema.
  Descripción: Aplicación de escalas, unidades de medidas, y pendientes.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Semejanza y Trigonometría" p. 144.


48. El Tour de Francia

El gráfico muestra el perfil de la etapa del Tour de Francia que va de Mazamet (338 m) a Plateau de Beille (1.780 m).

1. En el gráfico hay valores en el eje horizontal pero no en el vertical. Teniendo en cuenta los valores indicados, haz una graduación coherente para cada uno de los ejes.
2. En el recorrido hay tres puertos de montaña de diferentes categorías:
   – km 9: alto de St-Saraille (2.ª categoría)
   – km 146: puerto de Pailhères (cat. especial)
   – km 197: Plateau de Beille (cat. especial)
   a) En el puerto de Plateau de Beille se recorren 15,9 km y se salva un desnivel que empieza en la cota inferior de 535 m y acaba en la cota superior de 1.780 m. ¿Qué desnivel se cubre? ¿Qué pendiente tiene de media este puerto de montaña?
   b) El puerto de Pailhères tiene una pendiente del 7,2 % y se recorren 16,8 km. ¿Qué desnivel se salva?

Figura – 56-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Aplicación de las escalas en un plano.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Semejanza y Trigonometría" p. 145.

Figura – 57-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa de volúmenes de poliedros sencillos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Semejanza y Trigonometría" p. 157.

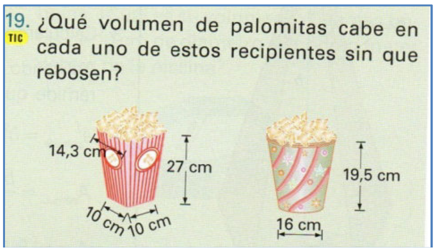


Figura – 58-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa de superficies de polígonos y circunferencias.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 8 "Problemas métricos" p. 160.

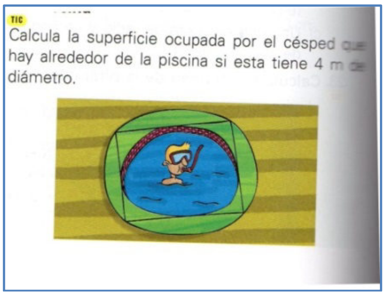


Figura – 59-

Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 8 “Problemas métricos” p. 160.

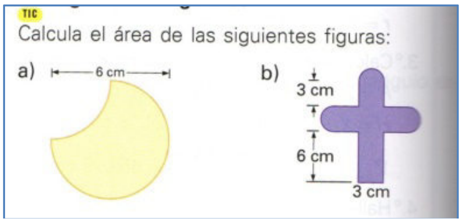


Figura – 60-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de aplicación directa de suma de vectores o resta de vectores.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 9 “Vectores y Rectas en el plano” p. 173.

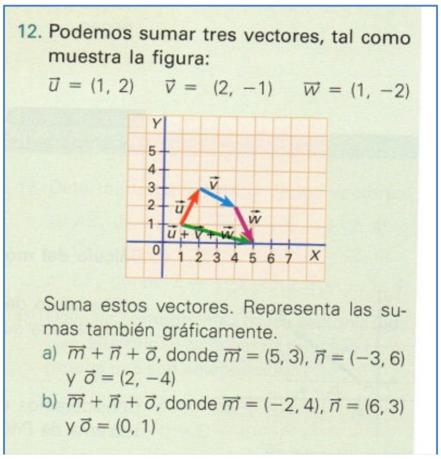


Figura – 61-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: A diferencia del ejercicio anterior, en este ejercicio el alumnado debe ser capaz de identificar los vectores y así poder trabajar con ellos para la resolución final. Este ejercicio se puede resolver de otras maneras.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 9 “Vectores y Rectas en el plano” p. 173.

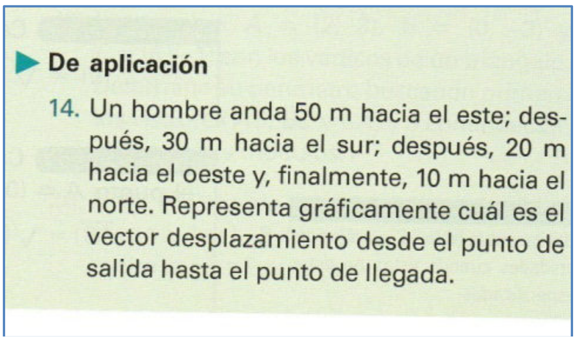


Figura – 62-

3.5 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, opción B.

- **Ejemplo** Tipo: Ejercicio.
  Descripción: Aplicación directa de escalas en el plano y hallar superficies.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 5 "Semejanza" p. 83.

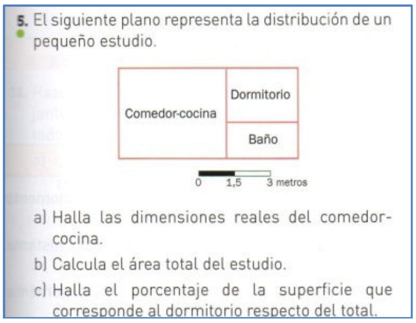


Figura – 63-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Cuestión de utilización directa del teorema de Tales.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 5 "Semejanza" p. 85.

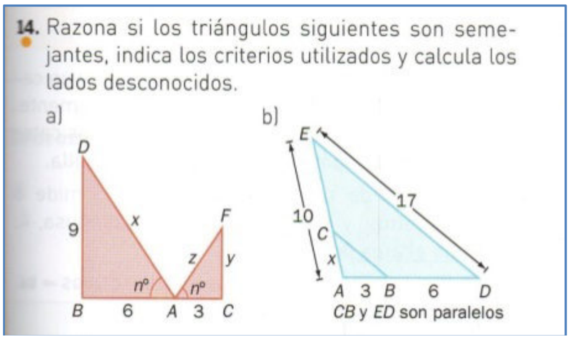


Figura – 64-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de aplicación directa del teorema de Tales.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 5 "Semejanza" p. 89.

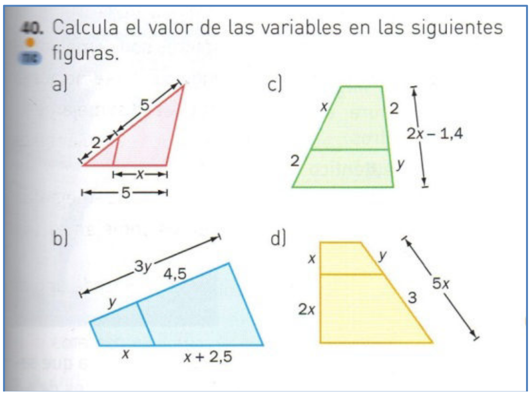


Figura – 65-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Cuestionario que permite estimar el grado de comprensión del alumnado, ya que debe razonar diferentes aspecto de simetrías, más allá de los triángulos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 5 "Semejanza" p. 88.

35. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.

a) Todos los cuadrados son semejantes.
b) Todos los rectángulos son semejantes.
c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
d) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
e) Todos los triángulos isósceles son semejantes.
f) Todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes.
g) Todos los pentágonos regulares son semejantes.
h) Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.
i) Si dos triángulos rectángulos tienen cada uno un ángulo de 66°, son semejantes.
j) Dos triángulos rectángulos con los catetos proporcionales son semejantes.
k) Los polígonos iguales son semejantes con razón de semejanza 1.
l) Todas las circunferencias son semejantes.

Figura – 66-

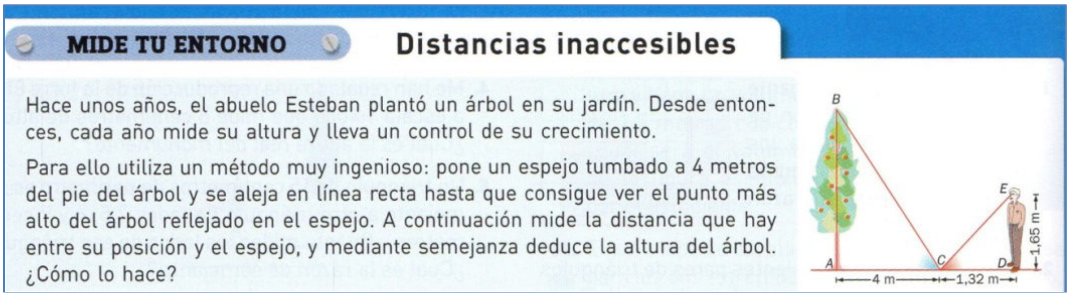
- **Ejemplo Tipo**: Problema.
  Descripción: Problema interesante para relacionar escalas con proporción lineal con volumétricas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 5 "Semejanza" p. 90.

58. TIC Un estudiante de Bellas Artes desea trabajar en una figura a escala del *David* de Miguel Ángel cuya altura es de 60 centímetros.

Si el auténtico *David* mide 4,34 metros de altura y tiene un volumen de 1,2 metros cúbicos, ¿cuál será el volumen de la figura esculpida por el estudiante?

Figura – 67-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Aunque viene dibujo, se ubica en ejemplo tipo problema al buscar el razonamiento por parte del alumnado. Resolución del problema a través de los teoremas de Tales y de Pitágoras.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 5 “Semejanza” p. 92.



MIDE TU ENTORNO Distancias inaccesibles

Hace unos años, el abuelo Esteban plantó un árbol en su jardín. Desde entonces, cada año mide su altura y lleva un control de su crecimiento.
Para ello utiliza un método muy ingenioso: pone un espejo tumbado a 4 metros del pie del árbol y se aleja en línea recta hasta que consigue ver el punto más alto del árbol reflejado en el espejo. A continuación mide la distancia que hay entre su posición y el espejo, y mediante semejanza deduce la altura del árbol. ¿Cómo lo hace?

Figura – 68-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio similar a otro anterior ubicado en 4º ESO Opción A. (figura 53).
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 6 “Trigonometría” p.105.

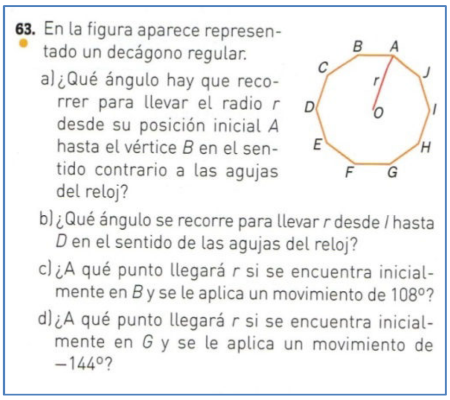
42. Un compás tiene dos patas de 10 centímetros de largo.

¿Qué ángulo forman sus patas si al abrirlo traza una circunferencia de diámetro 10 centímetros?

43. Resuelve el triángulo $a=38$ cm, $b=30$ cm, $\widehat{B}=38^{\circ}$. ¡Ten cuidado, hay dos soluciones!

Figura – 69-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: En este ejercicio se pretende que el alumnado establezca la medida del ángulo central, parece más complicado pero al ser un polígono regular debe recordar sus características. El alumnado quizá lo relaciona con trigonometría de triángulos y lie el problema.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 6 “Trigonometría” p.110.



63. En la figura aparece representado un decágono regular.

a) ¿Qué ángulo hay que recorrer para llevar el radio r desde su posición inicial A hasta el vértice B en el sentido contrario a las agujas del reloj?

b) ¿Qué ángulo se recorre para llevar r desde I hasta D en el sentido de las agujas del reloj?

c) ¿A qué punto llegará r si se encuentra inicialmente en B y se le aplica un movimiento de 108°?

d) ¿A qué punto llegará r si se encuentra inicialmente en G y se le aplica un movimiento de −144°?

Figura – 70-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Relacionar una medida "superficial" (no tiene en cuenta el grosor del tablero) y una medida volumétrica (el ascensor) y conseguir relacionarlas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 6 "Trigonometría" p.114.

123. TIC Juan quiere saber si puede bajar el tablero de su mesa en el ascensor.
La diagonal del tablero mide 149,22 cm y forma un ángulo de 35,69º con la arista mayor.
El ascensor mide 95 × 80 × 205 cm.

¿Podrá Juan bajar su mesa en el ascensor?

Figura – 71-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: El alumnado debe relacionar este problema con el teorema de Tales y de Pitágoras y añadirle los conocimientos de Trigonometría que ha adquirido. Un alumnado que maneja bien los conceptos se podría preguntar: "si cuando observamos la montaña desde 1061 m antes, ¿estaremos a la misma altura?".
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 6 "Trigonometría" p.114.

121. TIC Desde un lugar situado al pie de una montaña se observa el pico más alto con un ángulo de elevación de 45º. Si se retrocede 1061 metros, el ángulo es de 30º.

Calcula la altura de la montaña

Figura – 72-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicios de aplicación directa de teoría de vectores, sería más interesante indicar también que realizara las gráficas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Geometría Analítica" p.128.

Actividades propuestas

30. Estudia la posición relativa de las rectas:
TIC a) $r: 2x+y-5=0, \quad s: 4x+3y=11$
b) $r: -2x+3y-4=0, \quad s: 4x-6y=8$
c) $r: -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+\frac{5}{4}=0, \quad s: 2x-3y-5=0$

Figura – 73-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de aplicación directa de obtener todas las ecuaciones de la recta. ¿Cómo las obtiene? De manera mecánica o intuitiva. Esto sería un indicador de la evolución del alumnado en su conocimiento de geometría analítica.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Geometría Analítica" p.131.

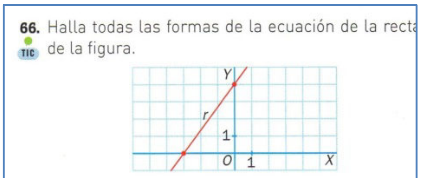
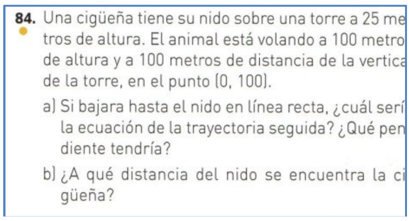


Figura – 74-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Problema de aplicación para obtener la ecuación de la recta y descubrir los diferentes parámetros que esta nos ofrece. Sin embargo, la teoría de vectores es más útil si se relaciona con fuerzas, campos magnéticos, esfuerzo, etc. Sería más interesante darle un sentido más práctico.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "geometría Analítica" p.132.



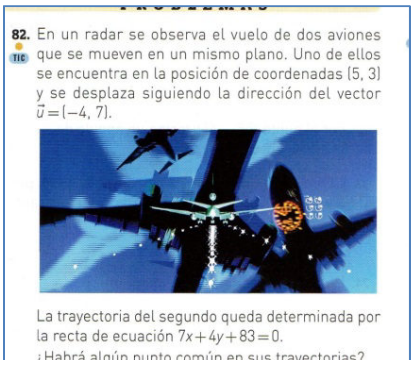
84. Una cigüeña tiene su nido sobre una torre a 25 me tros de altura. El animal está volando a 100 metro de altura y a 100 metros de distancia de la vertica de la torre, en el punto (0, 100).

a) Si bajara hasta el nido en línea recta, ¿cuál serí la ecuación de la trayectoria seguida? ¿Qué pen diente tendría?

b) ¿A qué distancia del nido se encuentra la ci güeña?

Figura – 75-

- Ejemplo Tipo: Problema.
  Descripción: Otro problema de aplicación de vectores, pero puede generar confusión en el alumnado, ya que, quizá en la pantalla de visión (plano) sí que puede haber colisión, pero en el aire, cada avión puede estar a una altura diferente, por lo que la colisión no es tal.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 7 "Geometría Analítica" p.132.



82. En un radar se observa el vuelo de dos aviones que se mueven en un mismo plano. Uno de ellos se encuentra en la posición de coordenadas (5, 3) y se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{u}=(-4, 7)$.

La trayectoria del segundo queda determinada por la recta de ecuación $7x+4y+83=0$.

¿Habrá algún punto común en sus trayectorias?

Figura – 76-

3.6 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller Ciencias.

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de resolución directa de medidas de ángulos a través de senos y cosenos. Probablemente el alumnado hará un copiar-pegar del tema. No desarrollará capacidades deductivas.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 3 “Trigonometría” p.87.

Completa, sin usar la calculadora, los valores del seno de los siguientes ángulos.

$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π

Figura – 77-

- **Ejemplo Tipo**: Cuestión.
  Descripción: Interesante ejercicio para desarrollar la relación entre todos los conceptos aprendidos, sin embargo la pregunta puede llevar a confusión, ¿Qué ángulo de visión se refiere? Imagino que nuestra visión genera un ángulo de visión igual en ambas direcciones.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 3 “Trigonometría” p.88.

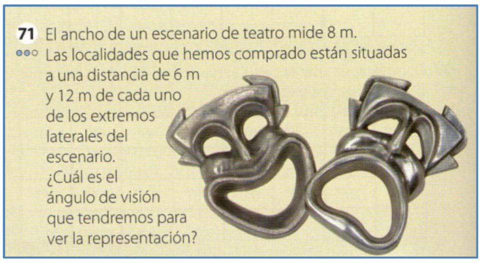

71 El ancho de un escenario de teatro mide 8 m. Las localidades que hemos comprado están situadas a una distancia de 6 m y 12 m de cada uno de los extremos laterales del escenario. ¿Cuál es el ángulo de visión que tendremos para ver la representación?

Figura – 78X-

- **Ejemplo Tipo:** Problema.
  Descripción: Problema muy completo, permite establecer relaciones entre triángulos, dirección, sentido, modulo. Además de relacionar una unidad de medida como es la velocidad con el módulo de un vector.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 3 “Trigonometría” p.88.

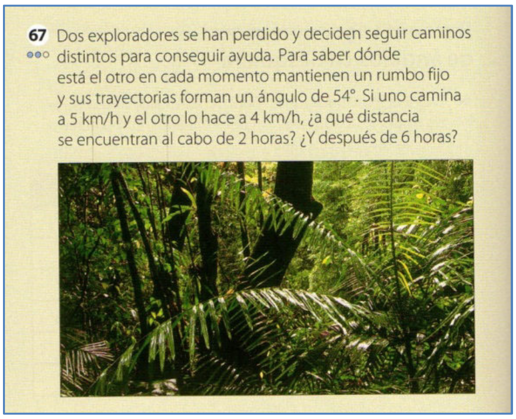

67 Dos exploradores se han perdido y deciden seguir caminos distintos para conseguir ayuda. Para saber dónde está el otro en cada momento mantienen un rumbo fijo y sus trayectorias forman un ángulo de 54°. Si uno camina a 5 km/h y el otro lo hace a 4 km/h, ¿a qué distancia se encuentran al cabo de 2 horas? ¿Y después de 6 horas?

Figura – 79-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de aplicación directa del teorema de Pitágoras o bien usando las relaciones trigonométricas, hay una evolución en los métodos de resolución de los ejercicios, sin embargo, todos los ejercicios son con triángulos rectángulos, por lo que el alumnado no ve más allá y se puede encontrar con la dificultad de resolver problemas cuando estos no formen triángulos rectángulos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 3 "Trigonometría" p.91.

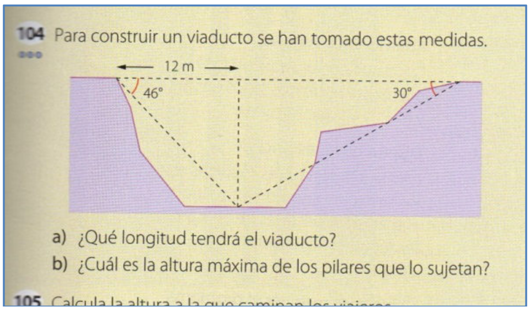


Figura – 80-

- **Ejemplo Tipo:** Cuestión.
  Descripción: Con esta cuestión se trata de valorar si el alumnado comprende bien el funcionamiento del producto escalar, no obstante, al igual que en ejemplos anteriores, sería más interesante realizar problemas más prácticos en los cuales se pueda comprender mejor para que son necesarios estos cálculos.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 5 "Geometría Analítica" p.137.

71 ¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$?
Con este resultado demuestra que si un paralelogramo tiene las diagonales perpendiculares, solo puede ser un cuadrado o un rombo.

Figura – 81-

- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio de aplicación directa de producto escalar.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 5 "Geometría Analítica" p.139.

102 ¿Qué ángulo forman las rectas?

a) $r: y=\frac{-6x-4}{3}$ $\quad s: -4x+2y-1=0$

b) $r: x+1=\frac{y-5}{2}$ $\quad s: y=\frac{9x-8}{3}$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=3+\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: 2x+2y-1=0$

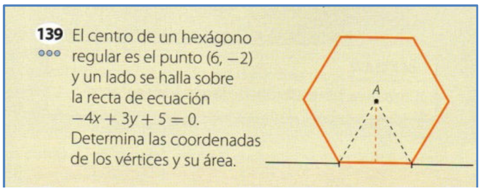
d) $r: y=\frac{6x+1}{-3}$ $\quad s: \frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}$

e) $r: 3x-y-3=0$ $\quad s: \frac{x+2}{2}=\frac{y}{-4}$

f) $r: \left.\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=3 \end{array}\right\}$ $\quad s: \frac{x-4}{3}=\frac{y+6}{6}$

Figura – 82-

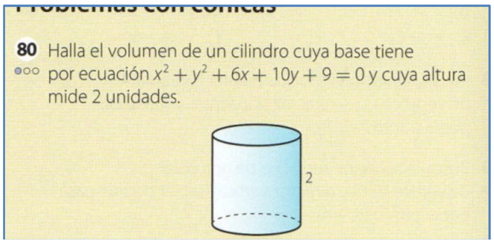
- **Ejemplo** Tipo: Ejercicio.
  Descripción: Ejercicio más complejo, para hallar áreas y la coordenadas de los vértices. En este caso el alumnado debe obtener todos los datos de manera analítica.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 5 "Geometría Analítica" p.141.



139 El centro de un hexágono regular es el punto (6, −2) y un lado se halla sobre la recta de ecuación $-4x + 3y + 5 = 0$. Determina las coordenadas de los vértices y su área.

Figura – 83-

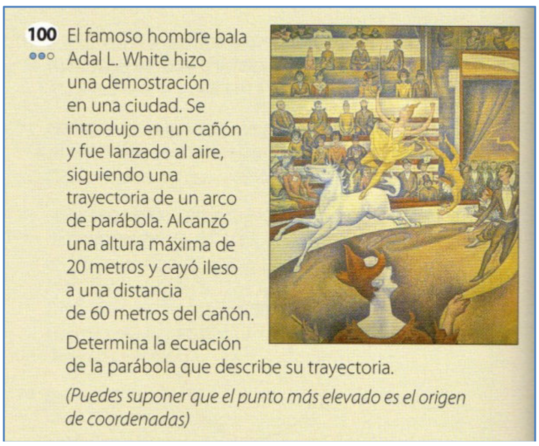
- **Ejemplo Tipo:** Ejercicio.
  Descripción: En cursos inferiores se daba a los alumnos los radios de las circunferencias o círculos, en este caso con tienen que obtener esta información de manera analítica. Hay una gran evolución en el manejo de la información.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 6 "Lugares geométricos. Cónicas" p.164.



80 Halla el volumen de un cilindro cuya base tiene por ecuación $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$ y cuya altura mide 2 unidades.

Figura – 84-

- **Ejemplo Tipo**: Ejercicio.
  Descripción: Hubiera sido interesante que el alumnado discutiera que tipo de trayectoria podría generar el lanzamiento, sin embargo han limitado el ejercicio al indicar que se determinara la ecuación de la parábola.
  Ubicación de la actividad en el libro de texto: Tema 6 "Lugares geométricos. Cónicas" p.167.



100 El famoso hombre bala Adal L. White hizo una demostración en una ciudad. Se introdujo en un cañón y fue lanzado al aire, siguiendo una trayectoria de un arco de parábola. Alcanzó una altura máxima de 20 metros y cayó ileso a una distancia de 60 metros del cañón.
Determina la ecuación de la parábola que describe su trayectoria.
(Puedes suponer que el punto más elevado es el origen de coordenadas)

Figura – 85-

Parte II:
Análisis de un método de enseñanza de la geometría en 3º de Secundaria.

El currículo educativo en el área de las matemáticas durante toda la etapa educativa es un currículo en espiral, es decir, es un currículo en el que todos los temas van apareciendo una y otra vez. De esta manera conseguimos un aprendizaje más efectivo en el que el estudiante construye nuevos conocimientos apoyándose en otros que ya posee. En definitiva, ese conocimiento, más formalizado e institucionalizado que el anterior generará un saber en el estudiantes que le permitirá relacionar distintos conceptos matemáticos.

También se ha observado que las destrezas y habilidades del alumnado para resolver problemas geométricos contextualizados generan muchos problemas a la hora de interpretar la información.

El alumnado tiene una serie de carencias y limitaciones que le impiden adquirir el saber científico necesario en geometría. Por ello, en esta parte, se va a desarrollar el método de enseñanza- aprendizaje basado en un método de enseñanza-aprendizaje consistió en un aprendizaje basado en proyectos (ABP*) (Ingles: Proyect Based Learning PBL)*.

Se ha determinado este método de enseñanza-aprendizaje para el apartado de áreas, perímetros y volúmenes de figuras geométricas, en base a que en el currículo de geometría de cursos anteriores, está incluidos esta temáticas, y se pretende dar un enfoque más cognitivo o sistémico que transmisivo.

Con este método se pretende que el alumnado sea capaz de adquirir más habilidades y destrezas visuales, y ser capaz de identificar desde otras perspectivas los distintos elementos geométricos planos o cuerpos sólidos.

Para evaluar y valorara de manera más o menos objetiva esta propuesta de estudio de la unidad didáctica, se va a realizar un método de estudio de investigación en matemáticas, el cual es más conocido como “Ingeniería Didáctica”, la cual fue definida por Artigue en 1989.

Los momentos metodológicos de la ingeniería didáctica son 4 (Artigue et al. 1995):

a) Estudio Preliminar.
   En esta fase abordaremos las dimensiones:
   - Epistemológica: Matemáticas en la unidad didáctica
   - Cognitiva – Dificultades y errores.
   - De enseñanza - Descripción del proceso de estudio implementado
b) La concepción y el análisis a Priori
   Esta fase determina la hipótesis que queremos evaluar. En nuestro caso esta hipótesis implica que el alumnado es capaz de adquirir las destrezas y habilidades necesarias para enfrentarse a cualquier problemas geométrico de nivel de 3º ESO.
c) Experimentación
   Adquisición de todos los resultados obtenidos medibles, para ello definiremos una serie de variables que nos servirán como valores de estudio.
d) Análisis a Posteriori y evaluación
   En esta fase se realizará la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Para realizar este estudio de investigación esta segunda parte del proyecto se va a dividir en 4 capítulos:

- Primer capítulo: Análisis de cómo trata el libro el tema de geometría.
- Segundo capítulo. Dificultades y problemas que pueden encontrar los alumnos con este tema.
- Tercer capítulo, se analiza el proceso de estudio.
- Cuarto capítulo se analiza la experimentación con los resultados esperados.

Capítulo 4. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

4.1 Correspondencia entre el currículo y los libros de texto de ESO.

Siguiendo el guion mostrado en la primera parte del presente trabajo, se muestra la correspondencia entre el currículo y los libros de texto en forma de tabla. De tal manera que podremos observar la relación existente entre ambos, en base a los descriptores anteriormente identificados.

4.1.1 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 1º ESO.

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 1º ESO EN EL CURRICULO	CONTENIDOS 1º ESO EN EL LIBRO DE TEXTO
C1-Formas planas y espaciales	▪ Construcciones geométricas sencillas. Clasificación y propiedades .	▪ Propone la construcción de elementos básicos para terminar con figuras geométricas planas. ▪ Definición, clasificación y propiedades de las construcciones geométricas ▪ Perímetros y áreas de figuras sencilla. ▪ Volúmenes de figuras sencillas (fuera de currículo)
C2-Trigonometría	▪ Medida y cálculo de ángulos.	▪ Cálculo de ángulos en triángulos y polígonos ▪ Ángulos opuestos, y de lados paralelos. ▪ Ángulos inscritos en una circunferencia.
C3-Semejanza de Figuras geométricas	▪ Razón y Proporcionalidad.	▪ Triángulos iguales. ▪ Proporcionalidad y Razón..
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	▪ Paralelismo y perpendicularidad. ▪ Simetría de figuras planas.	▪ Simetría de figuras planas.

Tabla 12.- Correspondencia entre Libro de Texto y Currículo en 1º ESO

4.1.2 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 2º ESO

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 2º ESO EN EL CURRICULO	CONTENIDOS 2º ESO EN EL LIBRO DE TEXTO
C1-Formas planas y espaciales	▪ Calculo de longitudes, superficies y volúmenes. ▪ Poliedros y cuerpos de revolución. ▪ La composición, descomposición, o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.	▪ Teorema de Pitágoras. ▪ Poliedros y cuerpos de revolución. ▪ Calculo de áreas y volúmenes. ▪ Desarrollo plano de poliedros y cuerpos de revolución. ▪ Composición y descomposición de figuras sencillas.
C2-Trigonometría		
C3-Semejanza de Figuras geométricas	▪ Proporcionalidad directa e inversa. ▪ Figuras semejantes .	▪ Teorema de Tales ▪ Construcción e identificaciones de polígonos semejantes. ▪ Mapas y planos a distinta escala.
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	▪ Regularidades y relaciones.	▪ No incluye ningún tema relacionado con figuras simétricas ni tipos de simetrías, etc… ▪ Sí que hay mención a posición entre rectas, planos y planos y rectas.

Tabla 13.- Correspondencia entre Libro de Texto y Currículo en 2º ESO

4.1.3 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 3º ESO

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 3º ESO EN EL CURRICULO	CONTENIDOS 3º ESO EN EL LIBRO DE TEXTO
C1-Formas planas y espaciales	▪ Lugar geométrico.	▪ Lugares geométricos. ▪ Longitud y áreas de figuras planas compuestas. ▪ Volúmenes de poliedros y cuerpos de revolución compuestos.
C2-Trigonometría		
C3-Semejanza de Figuras geométricas	▪ Teorema de Tales y Pitágoras.	▪ Triángulos semejantes. ▪ Polígonos semejantes. ▪ Teorema de Tales y de Pitágoras.
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	▪ Traslaciones, simetrías y giros. ▪ Planos de simetría en los poliedros. ▪ Coordenadas geográficas y husos horarios. asociados.	▪ Vectores – Traslaciones, giros y simetrías. ▪ Ejes y centros de simetría en figuras planas. ▪ Ejes y centros de simetría en poliedros y cuerpos de revolución. ▪ Coordenadas geográficas.

Tabla 14.- Correspondencia entre Libro de Texto y Currículo en 3º ESO

4.1.4 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 4º ESO (Óp. A)

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 4º ESO Opción A EN EL CURRICULO	CONTENIDOS 4º ESO Opción A EN EL LIBRO DE TEXTO
C1-Formas planas y espaciales	▪ Medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.	▪ Calculo de áreas y volúmenes de figuras compuestas. ▪ Problemas métricos.
C2-Trigonometría		▪ Razones trigonométricas en triángulos rectángulos (fuera de currículo). ▪ Calculo de razones trigonométricas (fuera de currículo).
C3-Semejanza de Figuras geométricas	▪ Proporcionalidad directa e inversa. ▪ Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras.	▪ Proporcionalidad directa, inversa y compuesta (fuera de currículo). ▪ Calculo de interés.
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento		▪ Vectores y rectas. ▪ Posición relativa de rectas. (fuera de currículo).

Tabla 15.- Correspondencia entre Libro de Texto y Currículo en 4º ESO (Opción A)

4.1.5 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 4º ESO (Óp. B)

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 4º ESO Opción B EN EL CURRICULO	CONTENIDOS 4º ESO Opción B EN EL LIBRO DE TEXTO
C1-Formas planas y espaciales	▪ Medida de longitudes, áreas y volúmenes.	▪ Longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.
C2-Trigonometría	▪ Razones trigonométricas. Relaciones métricas en los triángulos. ▪ Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos.	▪ Medida de ángulos ▪ Razones trigonométricas y relación entre ellas. ▪ Utilización de la calculadora. ▪ Teoremas del seno y coseno.
C3-Semejanza de Figuras geométricas	▪ Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	▪ Figuras semejantes. ▪ Escalas. ▪ Teorema de Tales. ▪ Semejanza de triángulos.
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento		▪ Vectores libres (fuera de currículo). ▪ Operaciones con vectores (fuera de currículo). ▪ Producto escalar (fuera de currículo).

Tabla 16.- Correspondencia entre Libro de Texto y Currículo en 4º ESO (Opción B)

4.2 Correspondencia entre el currículo y los libros de texto de Bachiller

4.2.1 Correspondencia entre el currículo y el libro de texto de 1º Bachiller (Opción Ciencias)

DESCRIPTOR	CONTENIDOS 1º BACHILLER DE CIENCIAS EN EL CURRICULO	CONTENIDOS 1º BACHILLER DE CIENCIAS EN EL LIBRO DE TEXTO
C1-Formas planas y espaciales	▪ Lugar geométrico en el plano. Cónicas.	▪ Elipse, Hipérbola, Parábola y circunferencias.
C2-Trigonometría	▪ Medida de un ángulo en radianes. ▪ Razones trigonométricas. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas.	▪ Medida de ángulos. ▪ Relaciones trigonométricas de cualquier ángulo. ▪ Fórmulas y ecuaciones trigonométricas. ▪ Resolución de triángulos. Teorema del seno y del coseno.
C3-Semejanza de Figuras geométricas		
C4-Simetrías, giros, movimientos y posicionamiento	▪ Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector. ▪ Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos	▪ Vector libre. ▪ Producto escalar y aplicaciones. ▪ Ecuaciones de la recta y posiciones relativas. ▪ Distancia y ángulo entre rectas.

Tabla 17.- Correspondencia entre Libro de Texto y Currículo en Bachillerato Científico

4.3 Conclusiones generales de la correspondencia entre currículo y libro de texto.

Se ha analizado según la etapa o nivel educativo, cada uno do los descriptores identificados en el currículo de mínimos. Se concluye de manera general que hay una gran correspondencia entre el currículo y el libro de texto. El libro de texto incluye todos los contenidos mínimos especificados por el currículo. Es por tanto un recurso educativo muy útil para el docente, ya que le puede servir de guía y de apoyo en su labor educativa.

Como se ha mencionado con anterioridad, el currículo de geometría apenas tiene variantes a lo largo de su etapa educativa, sin embargo, la dificultad y el grado de abstracción van en aumento conforme aumenta el nivel educativo en el que se encuentra. De hecho, se observa que, en los libros de texto de primer ciclo de secundaria, se enuncian diferentes conceptos básicos de geometría, como son, los teoremas de Tales, teoremas de Pitágoras, los lugares geométricos, etc., sin realizar ningún tipo de demostración, lo que implica que el alumnado debe creer lo que se dice, y no pone en tela de juicio esta valoración. La asume como cierta. Y además los ejercicios son siempre ejemplos descontextualizados, lo cuales tienen un método de resolución mecánico y estandarizado, y no da opción de adquirir habilidades lógicas y deductivas en el alumnado.

Se observa también que hay bloques en los que se han ampliado contenidos respecto a los contenidos especificados en el currículo del curso. Así por ejemplo se introducen los vectores en 4º ESO. Estos anexos o ampliaciones en la unidad didáctica del libro estarán a criterio del docente si ve necesaria su enseñanza. En caso afirmativo probablemente ser enseñará como un nuevo conocimiento siempre y cuando el tiempo y la institución así lo permitan. En el caso anteriormente mencionado, se ve necesaria la introducción del concepto de vector, debido a que en el currículo de Física y Química empiezan a trabajar distinto conceptos como son el Trabajo, la inercia, la Fuerza, etc… que requiere de los conceptos básicos de vectores.

Lo mismo se observa en el tema de la trigonometría en 4 ESO opción A. En el currículo no está contemplada la idea de inculcar el saber científico del concepto de razones trigonométricas, por lo que todas las características, propiedades, cálculo de distancia, y medición de ángulos, etc. A priori y bajo la epistemología, sólo se podrán resolver de manera mecánica utilizando el teorema de Pitágoras y sólo para triángulos rectángulos. No acepta otro enfoque más analítico.

.

En cuanto a las ausencias de los libros de texto, están más orientadas al desarrollo cognitivo del alumnado. El libro de texto no ofrece la posibilidad de que el alumnado desarrolle sus habilidades y se enfrente a diversos problemas. No establece relaciones entre problemas que se pueden observar en la vida cotidiana. No establece relaciones interdisciplinares. La mayoría de los ejemplos son ejercicios de aplicación directa de la teoría emitida con anterioridad y que implica que el alumnado resuelva los ejercicios de manera mecánica pero sin recapacitar sobre diversas opciones, Generando que cuando deba resolver un problema con valores o soluciones diferentes no sepa enfrentarse a ellos.

Capítulo 5. La geometría en el libro de texto de referencia

El libro de referencia es un libro muy completo de fundamentos de geometría y son muy diversos los aspectos y conceptos que enumera en sus páginas. Por ello para realizar una valoración de los objetos matemáticos involucrados, nos centraremos únicamente en algunos aspectos que hacen referencia a los triángulos y los cuerpos sólidos.

No se realiza una valoración del cálculo de áreas y volúmenes al no estar el libro de referencia focalizado en esta parte del temario.

5.1 Objetos matemáticos involucrados

En este capítulo se va a analizar el tema "Geometría" del libro de referencia "Fundamentos de geometría" de H.S.M. Coxeter. Es interesantes ver el enfoque de este libro de referencia, aunque es un enfoque mucho más euclidiano, lo que implica una complejidad elevada para la etapa educativa en la que nos encontramos. Y además muchos de los conceptos que están contenidos en el currículo para esta etapa educativa no están implícitos en el libro de referencia mencionado.

Para la realización de este capítulo, se usará como texto de referencia el artículo de *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*, de Juan D. Godino, Vincenç Font y Miguel R. Wilhelmi de 2006.

En este artículo, se postula que la idoneidad global de un método de enseñanza-aprendizaje se debe valorar teniendo en cuenta los cinco criterios siguientes:

- La idoneidad epistémica
- La idoneidad cognitiva
- La idoneidad semiótica
- La idoneidad mediacional
- La idoneidad emocional

Para analizar los objetos matemáticos involucrados, haremos un análisis semejante al realizado en el artículo de referencia (Pág. 139).

Para comenzar se realiza la configuración de los objetos, esta configuración puede ser cognitivas o epistémica, y está formada por un conglomerado de objetos que puede abarcar al lenguaje, a la situación, a las reglas (conceptos, procedimientos y proposiciones) y argumentos.

➢ **LENGUAJE**
<u>*Verbal*</u> - Geometría euclidiana, Axiomas, Pons Asinorum, Triángulos, Medianas, Centroides, circunferencias circunscritas, circunferencias inscritas, ortocentro, Triángulo rectángulo, triángulos semejantes… - Isometrías, simetrías, traslaciones. - Circunferencia, cónicas, tangentes,… - Cuerpos platónicos, pirámides, prismas, y poliedros…

Gráfico

- Figuras donde se presentan como son los pasos para realizar las demostraciones gráficas de todos los teoremas.
- Figuras de representación de las formas geométricas y sus puntos y rectas notable.
- Modelos de diferentes representaciones de los poliedros.
- Figuras donde se presentan las curvas representadas en ejes de coordenadas.
- Tablas de propiedades de los cuerpos platónicos.

➢ **SITUACIONES**

- Problemas descontextualizados en el que se piden demostraciones de puntos notables de los triángulos.
- Problemas descontextualizados en los que se piden- demostración de composición de simetrías, realizar una simetría, realizar una traslación.
- Cuestiones sobre descomposición de los cuerpos platónicos en triángulos.
- Cuestiones sobre reglas de Euler y diagramas de Schlegel.

➢ **CONCEPTOS**

Previos	*Emergentes*
- Los cinco postulados de Euclides. - Conceptos de punto, recta, triángulo, segmento, lado vértice, arista, cara. - Tipos de triángulos.	- Grupos de simetrías. - Polígonos. - Cuerpos sólidos. - Cuerpos platónicos. - Regla de Euler. - Vista en perspectiva, vista ordinaria o red y el diagrama de Schlegel.

➢ **PROCEDIMIENTOS**

- Admitir ciertos conceptos y relaciones (cinco postulados de Euler).
- Utilización de las herramientas básicas (regla y compás).
- Utilización de demostraciones geométricas usando reflexiones.
- Pons Asinorum.
- Regla de Euler .
- Representaciones de perspectivas diferentes de los poliedros..
- Utilización de los planos de simetría.

➢ **PROPIEDADES**

- En un triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los catetos.
- Si los ángulos de dos triángulos son respectivamente iguales, los lados respectivos serán proporcionales.
- Los triángulos semejantes son entre sí como el cuadrado de la razón de sus lados correspondientes.
- Regla de Euler V+C=A+2.
- Distintas vistas de los cuerpos platónicos. (figura 87).

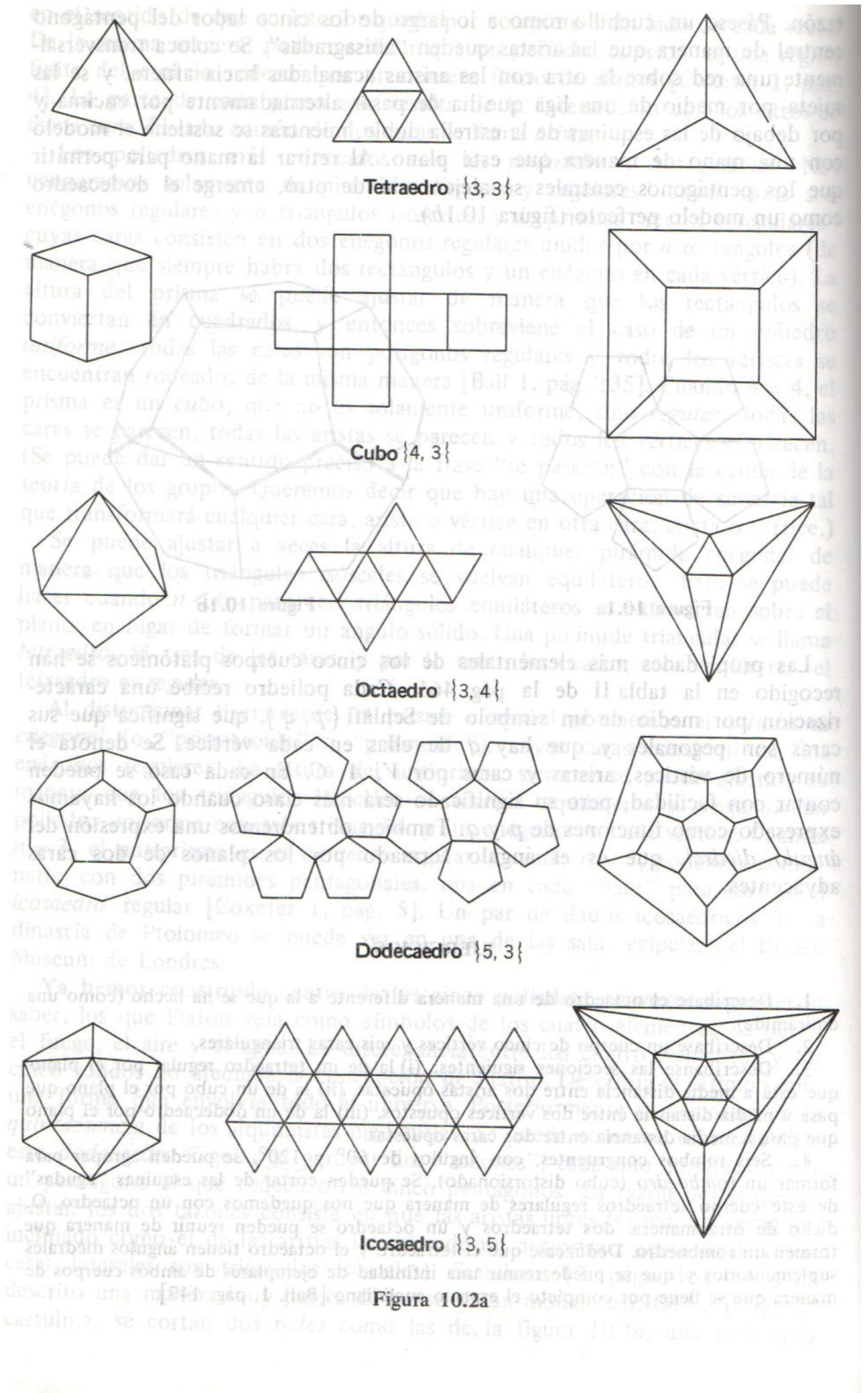


Figura- 87 –

➢ ARGUMENTOS

- Demostraciones gráficas usando únicamente regla y compas.
- Demostración del teorema de Pitágoras, mediante el cuadrado de la proporcionalidad que hay entre triángulos semejantes.
- Demostración de la regla de Euler gracias a los diagramas de Schlegel.
- Diagramas de Schlegel gracias a los modelos de esqueletos de poliedros que construyó Leonardo da Vinci.

5.2 Análisis global de la unidad didáctica

Para el análisis de la unidad didáctica de "Geometría" en 3º E.S.O. el docente del centro educativo se apoya en el libro de texto "*Matemáticas"* de 3º ESO, serie Esfera, de la editorial SM, el cual se adjunta en el Anexo A.

Aunque la metodología utilizada no va a seguir la utilización del libro de texto, es interesante observar la unidad didáctica que engloba el libro de texto y que servirá de guion al alumnado para conocer todos los conceptos que están involucrados en el temario.

- Tema 8 – Geometría del plano.

  En este bloque se repasan y se refuerza conceptos ya aprendidos en otros cursos.
  - Medidas de figuras planas.
  - Polígonos.
  - Áreas.
  - Teorema de Tales.
  - Teorema de Pitágoras.

  Conceptos
  - Ángulos de un triángulo.
  - Rectas notables de un triángulo.
  - Puntos notables de un triángulo.
  - Triángulos semejantes.
  - Razón de semejanza.
  - Polígonos semejantes.
  - Teorema de Tales.
  - Triángulos en posición de Tales.
  - Teorema de Pitágoras.
  - Lugares geométricos.
  - Longitudes de figuras poligonales.
  - Longitudes de figuras circulares.
  - Áreas de figuras circulares.

  Los objetivos de la unidad didáctica son:
  - Conocer y representar las rectas y puntos notables de un triángulo, así como otros puntos geométricos por las propiedades que verifican.
  - Aplicar el teorema de Tales para calcular lados desconocidos de triángulos semejantes y para la resolución de problemas
  - Aplicar el teorema de Pitágoras para la resolución de problema.as.
  - Calcular longitudes y áreas de figuras planas.
  - Resolución de problemas relacionados con el cálculo de longitudes y áreas.

- Tema 9 – Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

Varios de los conceptos que se adjuntan en el libro de texto en este tema, no están incluidos dentro de los contenidos mínimos del currículo, por lo que debido a la escasez de tiempo por lo que los conceptos relacionados con los vectores no se van a desarrollar en el presente curso de 3º ESO

Conceptos

- Vector fijo, elementos y componentes.
- Vectores equipolentes.
- Traslaciones y propiedades.
- Vector de traslación.
- Traslaciones sucesivas.
- Giros en el plano. Centros y ángulos de giro.
- Sentido de giro.
- Giros sucesivos concéntricos.
- Simetría axial.
- Eje de simetría.
- Simetría central y propiedades.
- Centros de simetría .
- Eje de simetría de figuras planas.

Los objetivos de la unidad didáctica son:

- Operar con vectores tanto analítica como gráficamente
- Obtener la figura transformada de una dad mediantes una transformación geométrica.
- Obtener la figura transformada de una dad mediante un producto de transformaciones.
- Reconocer la transformación o producto de transformaciones que nos lleva de una figura a otra.
- Aplicar las propiedades de las transformaciones para identificar figuras simétricas.

- Tema 10 – Figuras y cuerpos geométricos

Muchos de los contenidos de la unida ya han aparecido en cursos anteriores, por lo que servirá para repasar y consolidad la visión espacial de los alumnos y alumnas.

Conceptos

- Poliedros, elementos
- Fórmula de Euler
- Poliedros regulares
- Prismas y pirámides. Propiedades métricas
- Cuerpos redondos. Elementos de simetría
- Áreas de poliedros y cuerpos redondos. Desarrollo en el plano
- Volumen de poliedros y cuerpos redondos.
- Esfera y superficie esférica
- Semiesfera. Casquete esférico
- Zonas y husos horarios
- Coordenadas geográficas.

Los objetivos de la unidad didáctica son:

- Identificar y distinguir los poliedros, clasificándolos e indicando sus elementos, desarrollo plano y propiedades.
- Reconocer los cuerpos redondos indicando su desarrollo plano y propiedades.
- Calculas longitudes, áreas y volúmenes de distintos ciertos geométricos.
- Aplicar el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos en la resolución de problemas.
- Calcular distancias entre dos puntos de la superficie terrestre conociendo sus coordenadas.

En definitiva, lo importante en geometría de 3º ESO, no es que los alumnos se aprendan de memoria las fórmulas, sino que sean capaces de deducirlas a través de la experiencia, por ello se propone un método de enseñanza-aprendizaje que va más allá de la resolución de ejercicios. En definitiva, se propone un modelo docente menos transmisivo y más sistémico.

Por ello el libro de texto, va a servir de recurso didáctico para que el alumnado pueda llevar a cabo el trabajo que se le ha encomendado.

Capítulo 6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica.

En todas las teorías sobre la enseñanza y aprendizaje de la Matemática se ve la necesidad de identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, para poder progresar de manera efectiva en el método de enseñanza-aprendizaje.

A pesar de que, hay una gran variedad de dificultades Di Blasi Regner y Otros (2003) las agrupan en los siguientes tópicos:

a) Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.

Este conflicto involucrado en el uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión.

b) Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

Siempre se ha considerado como una de las principales dificultades en el aprendizaje de la Matemática, el aspecto deductivo formal. De hecho, el abandono de las demostraciones formales en algunos programas de Matemática del Nivel Medio se ha estimado como adecuado, pero esto no incluye el abandono sobre el pensamiento lógico. Además se promueve una aplicación más instrumental de las reglas matemáticas.

c) Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza tienen que ver con la Institución escolar, con el currículo de Matemática y con los métodos de enseñanza.

d) Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.

Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de Matemática que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza.

En los siguientes apartados vamos a identificar distintos tipos de dificultades y errores que los alumnos y alumnas pueden tener a la hora de enfrentarse a los ejercicios, problemas y aprendizaje de la geometría, pero se van a centrar únicamente en la parte referida al cálculo de longitudes, áreas, perímetros, volúmenes, cambios de unidades y escalas, que es el tema en el que está centrado el presente proyecto.

6.1 Dificultades

- Falta de conocimientos previos.
- No identificar de manera correcta los distintos elementos, características o propiedades de los triángulos, polígonos o poliedros. Por ejemplo distinguir entre altura, generatriz o apotema.
- Para aplicar Pitágoras, parece que siempre la incógnita debe ser la hipotenusa.
- Poca visión espacial. Dificultad para realizar el desarrollo plano de un cuerpo solido que no sea exactamente como los ejemplos del libro.

- No saber identificar cuando pueden aplicar el teorema de Tales, o el teorema de Pitágoras. Generalmente les cuesta analizar y utilizar la técnica más adecuada.
- Como todos los ejercicios que han resuelto hasta el momento eran ejercicios descontextualizados, no saber plantear la solución cuando se encuentran antes una situación contextualizada.
- Dificultad para aplicar escalas que no sean lineales. Para ellos siempre 1:20 implica 1 cm en la maqueta son 20 cm en la realidad. Esta información la traducen tanto si hablamos de distancias como de superficies o volúmenes. Por ejemplo, en vez de establecer una relación de $1{:}20^2$en superficie o 20^3 en volumen, mantienen la relación 1:20.
- Al calcular el área total no identifican las partes del área que no forman parte de la figura, o bien la cuentan varias veces. ES decir, cuando tenemos una figura compuesta por un cilindro y media esfera, la superficie de contacto entre ambas se cuenta dos veces a la hora de calcular el área total.
- Utilización incorrecta de la calculadora. Piensan que la calculadora sabe lo que quieren hacer, no haden caso al orden de las operaciones.
- No identifican correctamente las medidas en el desarrollo planos de los poliedros, por ejemplo, muchos alumnos confunden la altura en los cilindros. Identifican la altura donde debía estar la longitud de la circunferencia.
- No saben identificar los distintos elementos de un poliedro si está no aparece en la posición habitual, por ejemplo, en el caso de los prismas, cuando un prisma (triangular), si este no está apoyado sobre la base, ya no saben identificar los distintos elementos del prisma.
- En el examen no han sido capaces de resolver un ejercicio al carecer de visión espacial.

6.2 Errores y su posible origen.

- Los errores de cálculo y de utilización de calculadora, se debe a su escaso uso en etapas anteriores y a no enseñar a utilizar distintos tipos de calculadoras. Hay calculadoras que aceptan una entrada de datos progresiva y otras que no. Origen del error.
- No identificar cuando utilizar los teoremas. Hasta ahora se promueve la resolución de ejercicios descontextualizados en el que siempre se indica al alumnado lo que debe hacer. Origen del error – Contrato didáctico.
- Proporcionalidad. Solo han aprendido que cuando dos magnitudes están en proporcionalidad, podemos conseguir una de ellas sin más que multiplicando la otra por la razón. Origen del error – La institucionalización.
- Visión espacial. Siempre se ha resuelto ejercicios de manera directa, y los dibujos están plasmados en el libro, por lo que el alumnado no debe hacer esfuerzo en ver como se realiza u obtienen las distintas figuras geométricas o cuerpos de revolución. Origen del error – Contrato didáctico.
- Escaso trabajo personal, siempre esperan que les resuelvan sus dudas sin pensarlas, por lo que cuando se resuelven las dudas, el alumnado cree saber ya la solución, pero esta sólo es válida para un caso concreto.
- Comprobación de los resultados obtenidos. Cuando un resultado no es "bonito" piensan que se han equivocado, y esperan en ese caso que el docente les diga dónde. Origen del error – Responsabilidad matemática. Un resultado no debe ser bonito, debe ser coherente.

Capítulo 7. Presentación y método de ejecución del ABP

Tras realizar el estudio preliminar de la unidad didáctica, en este capítulo se realizará el análisis a priori de los resultados o conclusiones esperado para el presente proyecto de investigación. En este capítulo se presenta cual ha sido el ABP, propuesto, cuales son los objetivos que se pretenden conseguir con el ABP, los criterios de evaluación, que son similares a los propuestos por la unidad didáctica y la temporización del método de enseñanza-aprendizaje.

Todos los conceptos mínimos de geometría en 3º ESO, han sido referenciados en cursos anteriores, estaban enfocados a que el alumnado resolviera problemas de geometría de manera mecánica y estandarizada.

Sin embargo, el alumnado debe ser capaz de identificar, las distintas figuras geométricas, poliedros, puntos geométricos, etc. y debe sabe construirlos. Por ello, la unidad didáctica de geometría requieres de un método de enseñanza-aprendizaje más cognitivo y experimental, el cual debe promover la capacidad deductiva del alumnado y hacerle más independiente. De esta manera podrá desarrollar sus capacidades, lógicas, inductivas, deductivas, etc.

En definitiva, el alumnado aprenderá sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar de acuerdo a criterios libremente elegidos, construir, dibujar, modelizar, medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Todo ello se logra, estableciendo relaciones constantes con el resto de los bloques y con otros ámbitos como el mundo del arte o de la ciencia, pero también asignando un papel relevante a la parte manipulativa a través del uso de materiales (geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) y de la actividad personal realizando plegados, construcciones, etc. para llegar al concepto a través de modelos reales. A este mismo fin puede contribuir el uso de programas informáticos de geometría dinámica.

Otra idea importante en el desarrollo de un ABP, es lograr promover otras competencias en el estudiante como son:

- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana .
- Competencia artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

7.1 Metodología utilizada.

La metodología que se va a utilizar es la ejecución de un Aprendizaje basado en proyectos (ABP).

El presente proyecto, ha sido realizado en grupos de 3 o 4 alumnos y alumnas de 3 ESO, estos grupos se han realizado de tal manera que eran grupos heterogéneos entre sí, sin embargo eran homogéneos entre ellos.

Para comenzar con el ABP se entrega al alumnado el siguiente problema.

“En la fiesta del Colegio se van a presentar unas maquetas de locomotoras de diferentes épocas realizadas a escala por alumnos de 3º de la ESO acompañadas de diversa documentación técnica.

Nuestra misión consiste en seleccionar una locomotora que nos haya llamado la atención (Orient Express, La vuelta al mundo de Willy Fog, del salvaje Oeste, del AVE...), y realizar con ella una maqueta a escala 1:20.

Para realizar las maquetas podemos utilizar los materiales que consideremos oportunos, pero nos piden que únicamente pueden tener las formas de los siguientes cuerpos geométricos: prismas, pirámides, cilindros conos y esferas, y además tenemos que incluirlos todos.

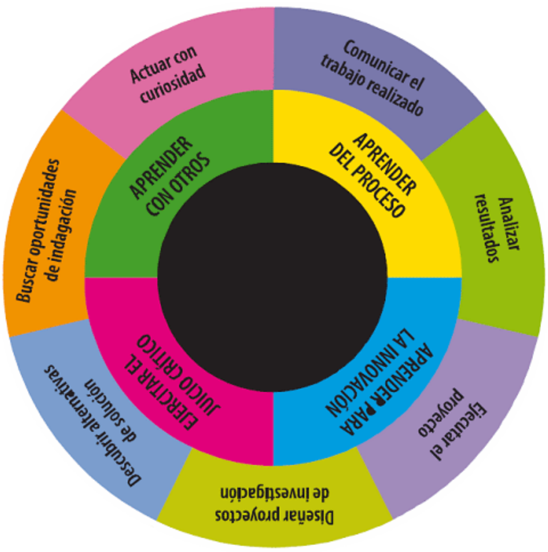
Una vez acabada tenemos que calcular el volumen interior de la maqueta, y hacer una estimación del volumen real que debería tener la locomotora inicial.

Además sabemos que la locomotora original está en proceso de reparación y está oxidada, por lo que habrá que darle un recubrimiento de pintura antióxido, y tendremos que calcular cuánta pintura será necesaria utilizar para pintar la locomotora así como el coste de la misma. ”

En definitiva el objetivo final, es que el alumnado deberá ser capaz de identificar las distintas partes de la locomotora original elegida por el grupo, con los distintos poliedros y cuerpos de revolución conocidos. Posteriormente deberá realizar todas las medidas y cálculos necesarios para poder realizar una maqueta a escala de la locomotora.

7.2 Objetivos y metas del aprendizaje

- Saber aplicar el teorema de Tales.
- Saber manejar planos y maquetas.
- Conocer las áreas y perímetros de figuras planas y aplicar el teorema de Pitágoras.
- Distinguir y clasificar los diferentes tipos de poliedros y cuerpos de revolución, así como sus elementos principales.
- Saber calcular el área total de los poliedros y cuerpos de revolución.
- Saber calcular el volumen de los poliedros y cuerpos de revolución.
- Competencias
  - Aprender con otros.
  - Aprender del proceso.
  - Comunicar el trabajo realizado.
  - Actuar con curiosidad.
  - Buscar oportunidades.
  - Analizar resultados.
  - Ejecutar el proyecto.
  - Etc…



7.3 Recursos.

- Libro Matemáticas SM 3º ESO.
- Moodle (Herramienta virtual en la que se cuelgan diversos recursos para que el alumnado pueda hacer uso de ellos y llevar a cabo todos los apartados del problema.
- Libros o web para encontrar información relativa a locomotoras, materiales, desarrollos planos, demostraciones matemáticas, etc.

7.4 Criterios de evaluación

- Adecuación de la locomotora elegida y descripción técnica de la misma.
- Cálculos necesarios para realizar la maqueta a escala.
- Adecuación de los cuerpos geométricos a la maqueta.
- Estética final de la maqueta.
- Cálculo del área total de la maqueta.
- Estimación del área total de la locomotora.
- Estimación coste pintura.
- Cálculo volumen de la maqueta.
- Estimación volumen locomotora.
- Trabajo en grupo.
- Autoevaluación del grupo.
- Trabajo, coordinación y aportaciones al grupo.

7.5 Temporización

- Primer día : Presentación del Proyecto a desarrollar. Indicando al alumnado los objetivos del proyecto y sus fases. Haciendo especial hincapié en que este proceso de aprendizaje se centra en el alumnado.
  Organización de los grupos, reparto de los contenidos a cada grupo, qué se/ que no se, reparto de las tareas a los miembros del grupo, designar un coordinador de grupo.

- Segundo día: Selección de la locomotora designada y asignación de los distintos poliedros y figuras geométricas que se van a utilizar para intentar realizar una maqueta lo más similar a la realidad.

- Tercer y Cuarto día. Elaboración del informe con los cálculos y patrones de las figuras geométricas designadas.

- Quinto y Sexto día: Elaboración de la maqueta según los patrones asignados.

7.6 Actividad autónoma

Todo el proceso de ejecución del ABP y del aprendizaje de los contenidos geométricos de 3º ESO indicados anteriormente son adquiridos de manera autónoma por el alumnado. En definitiva, todo el proceso de aprendizaje de geometría está centrado en el alumnado, y el docente es un mero guía del proceso de enseñanza-aprendizaje. La misión del docente es ayudar al alumnado en este proceso, cuando así lo sea requerido.

Capítulo 8. Experimentación.

En el presente capítulo se describe el proceso seguido, el estudio de los errores observados, de los cuales algunos se habían previsto, sin embargo otros no, la evaluación realizada la cual sirve como método de observación para ver si realmente el método de enseñanza-aprendizaje empleado ha tenido el valor y los resultados esperados. Posteriormente se describirá los resultados obtenidos en el método de evaluación, los cuales servirán de base para realizar las conclusiones obtenidas.

En definitiva, el objetivo de esta experimentación es estimar o evaluar, si el proceso de enseñanza realizado ha resultado eficaz y satisfactorio para los tres polos (las matemáticas, el alumnado y el docente).

Para poder llevar a cabo una correcta conclusión de los resultados obtenidos es muy importante el apartado de "Comportamientos esperados".

Además la efectividad de una teoría en didáctica de las matemáticas se puede determinar por la evolución que hay entre el análisis a priori y un análisis a posteriori. La hipótesis que se formula a priori, si son validadas o refutadas por los hechos observados a posteriori, permiten estimar una correcta validación de la técnica empleada, sin embargo si estos hechos emitidos a priori, no pueden ser aceptados con los hechos observados a posterior, implicará que la teoría formulada no puede ser validada completamente y quizá permitirá estimar posibles soluciones o mejoras de la teoría, para futuras teorías).

8.1 Muestra y diseño de la experimentación.

El método de enseñanza-aprendizaje de geometría basado en un ABP, ha sido llevado a cabo con alumnos de 3º ESO de un centro escolar, y además ha sido realizado por tres docentes diferentes. Sin embargo, para la presente experimentación, se tendrán en cuenta sólo los resultados obtenidos por uno de los cursos. No obstante, se añadirá alguna conclusión realizada u observada por el resto de docentes.

En definitiva la muestra está formada por 18 alumnos y alumnas heterogéneos entre sí.

8.2 El examen, el informe, y la autoevaluación.

Para conseguir obtener los resultados y las conclusiones, se elaboró un examen para poder evaluar los conocimientos adquiridos por el alumnado. No obstante, al tratarse de un PBL, el cual promueve el auto-aprendizaje, es importe evaluar y obtener resultados de los informes solicitados, de la maqueta realizada (ver Anexo II), pero también de la autoevaluación. El método de evaluación constaría de 50 % nota del examen y 50% nota del informe con la autoevaluación.

Sin embargo, la nota negativa a la hora de analizar los resultados, es que no se va a poder evaluar los resultados de todos los alumnos implicados, ya que hubo un grupo de 4 alumnos que no presento ni el informe, ni la maqueta. Por lo tanto se realiza un estudio de los tres apartados de manera individualizada.

a) Examen.

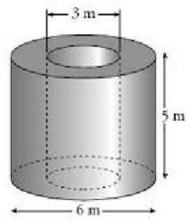
Se puede observar que el examen elaborado para evaluar al alumnado en sus competencias geométricas, está muy orientado al trabajo realizado. Es decir, no hay muchos problemas contextualizados, ni cuestiones.

Matemáticas 3º ESO
Temas 8 y 10. Geometría
Mayo 2013

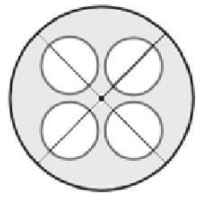
NOMBRE: ....

1.- Halla el volumen, área lateral y área total de un tronco de cono sabiendo que el radio de las dos circunferencias que lo delimitan es 6 y 2 respectivamente. Sabemos además que la altura del trondo de cono es 9 (1.5 puntos)

2.- Calcula el volumen existente entre los dos cilindros concéntricos. (1,5 puntos)



3.- Calcula el área sombreada, sabiendo que el radio del círculo mayor mide 6 cm y el radio del menor 2 cm. (1 punto)



4.- Un poste de 5 metros de altura se ha sujetado al suelo mediante dos cables de 6 metros de longitud. ¿A qué distancia se han sujetado los cables de la base del poste? (1 punto)

5.- Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1,5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 € el metro cuadrado. Calcula: (1,5 puntos)

- ¿Cuánto costará pintar la piscina?
- ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?

6.- Calcular el volumen de la figura resultante de cortar una esfera de radio 5cm. en 8 partes iguales (1 punto)

7.- Calcular el área total de la fitura anteriormente descrita

8.- Calcular el área de la misma figura si la escalamos en la proporción 1:2 (0.5 puntos)

9.- Calcula la superficie total de la siguiente figura. (1 punto)

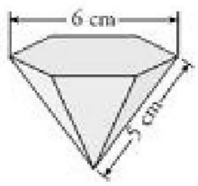


Figura- 88 –

El primer, el segundo ejercicio, el quinto y el noveno, se pide de manera directa el cálculo de áreas y volúmenes que han sido realizados ya previamente por el alumnado para la elaboración de la maqueta.

El cuarto ejercicio, quizá se pueda considerar un problema más contextualizado de aplicación del teorema de Pitágoras. Este teorema ha sido aplicado en diferentes desarrollos planos de las figuras geométricas empleadas para realizar la maqueta.se pide de manera directa el cálculo de áreas y volúmenes que han sido realizados ya previamente por el alumnado para la elaboración de la maqueta.

El sexto, séptimo y octavo, son ejercicios relacionados entre sí, que implica un poco más de perspectiva en el alumnado, el cual a pesar de haber realizado una esfera para colocar en su maqueta, debe ser capaz de realizar un estudio visual de la misma para ser capar de realizar el ejercicio. Se promueve la capacidad visual e imaginativa del alumnado.

b) Informe (maqueta).

El informe realizado por los alumnos debía contener como mínimo los siguientes elementos.

- Variedad de figuras geométricas identificadas.
- Patrones de las distintas figuras geométricas empleadas.
- Área Lateral y total.
- Volumen lateral.
- Escalas.

La parte más importante de cara a los conceptos matemáticos está registrada en el informe, sin embargo, se va a valorar también el esfuerzo realizado para diseñar la locomotora.

MATEMÁTICAS 3º ESO: PBL – MÁQUETA DE LOCOMOTORA
FICHA DE AUTOEVALUACION DE LOS ALUMNOS

Alumno/a: ____

Profesora: Ruth Unzu

Valoración en los siguientes aspectos.

0=Nada 1=Poco (Menos grupo) 2=Medio (Como el grupo)
3=Bastante (Poco más grupo) 4=Mucho (Solo lo ha hecho esa persona)

Nombres de todos los componentes del grupo (incluido el tuyo)				
Participación activa en la elaboración de la maqueta				
Participación activa en la elaboración del informe.				
Buscar información, para solventar problemas en la ejecución del proyecto.				
Originalidad de aportaciones				
Pensamiento crítico				
Aportación de alternativas de mejora				
Nota Final (de 1 a 10)				

Observaciones:

Opinión del PBL

Figura- 87 –

a) Autoevaluación.

Por último la autoevaluación, es un apartado muy importante, ya que permite estimar el grado de implicación del alumnado en el PBL y su grado de satisfacción con el mismo. Esta autoevaluación, además de ayudar al docente a estimar y valorar de manera individualizada un trabajo de grupo, permite realizar un estudio crítico de la implicación del alumnado y el éxito o fracaso de su realización por parte del alumnado.

Se observa como en la autoevaluación se pide, que el alumnado se evalúe y evalué a sus compañeros en aspectos relacionados con el trabajo realizado, con su implicación en el proyecto aportando ideas y pensamientos críticos. La nota además en estos aspectos está más relacionada con la relación del individuo dentro del grupo que con su evaluación de manera individual.

8.3 Comportamientos esperados

- Evaluación subjetiva del trabajo realizado, no realizan una evaluación optimista.
- Que el informe final será realizado únicamente por el alumno o alumna más aventajado.
- Esfuerzo irregular de todos los miembros del grupo.
- Escaso trabajo de comprensión.
- Bajos conocimientos previos.
- Fallos que se han cometido en los ejercicios propuestos pero que no implican un resultado nulo en la evaluación final del ejercicio.
    - Ejercicio 1 – No saben calcular la generatriz o apotema del tronco de cono
    - Ejercicio 2 – No restan los volúmenes de los cilindros.
    - Ejercicio 3 – No restan la superficie de las 4 circunferencia .
    - Ejercicio 4 – O está bien o está mal.
    - Ejercicio 5 – En el área total tienen en cuenta las dos bases de un prisma .
    - para calcular el gasto en pintura (no se puede pintar la parte superior de la piscina).
    - No saben pasar de m^3 a litros.
    - Ejercicio 6 – No dividen el volumen de la esfera en 8 partes.
    - Ejercicio 7 – No dividen la superficie de la esfera en 8 partes o no le añaden los medios círculos de la superficie lateral.
    - Ejercicio 8 – O está bien o está mal.
    - Ejercicio 9 – No calculan bien la apotema del hexágono.

8.4 Resultados

Antes de empezar a valorar los resultados tanto en la resolución de los ejercicios planteados en el examen como en la autoevaluación, es necesario indicar, que el alumnado, a priori no tenía como dificultad a la hora de resolver los ejercicios su nivel de memorización, ya que se ha permitido llevar una tabla con las distintas fórmulas al examen. Esto se ha decidido en base a que, lo que se pretende es estimar si el alumnado ha adquirido las habilidades necesarias para resolver cualquier tipo de problema, ejercicio o cuestión relacionadas con el cálculo de cualquier tipo de medida líneas, superficies o volumétrica de figuras.

a) Examen – Calificación de notas registradas.

Se muestran los resultados obtenidos en la resolución del examen, se ha realizado una tabla en intervalos de dos puntos, más un dato más debido a que hubo 3 estudiantes que no se presentaron al examen.

Nota	Nº Alumnos o alumnas	Porcentaje
No presentado	4	22.22%
[0,2)	5	27.77%
[2,4)	2	11.11%
[4,6)	5	27.77%
[6,8)	2	11.11%
[8,10]	0	0%

Tabla 18 – Calificaciones del examen

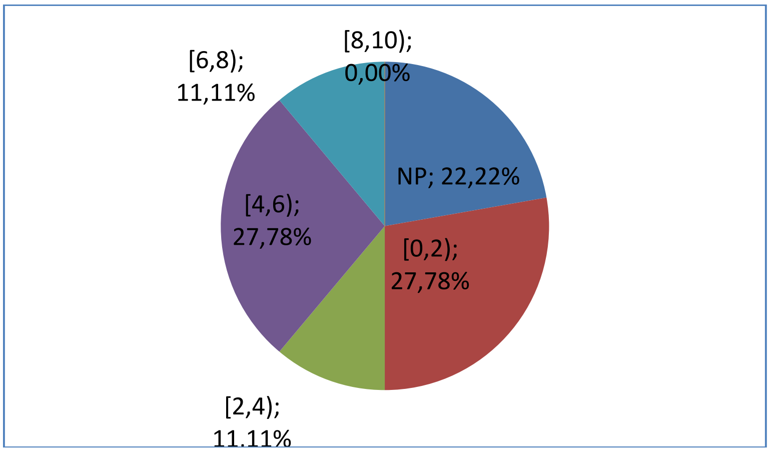


Grafico -1- Porcentaje de notas del alumnado

En la siguiente gráfica se muestra como ha sido la resolución y ejecución por ejercicio. Se han valorado tres opciones, cuando el ejercicio está bien, cuando el ejercicio está mal, y la tercera opción, cuando se ha realizado parte del ejercicio, en esta parte, se tienen en cuenta los fallos de los comportamientos esperados que se menciona en el apartado anterior.

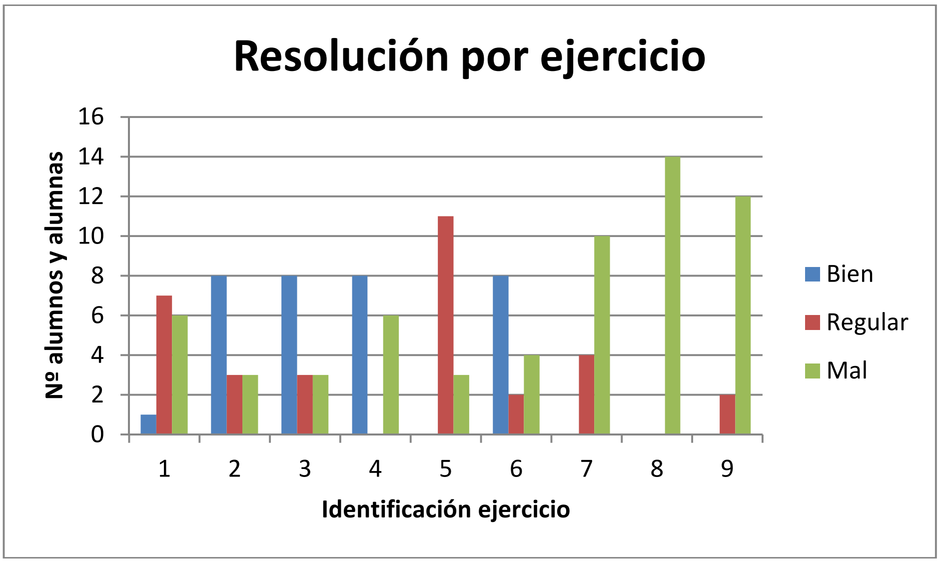


Grafico -2- Resolución por ejercicio

b) Informe (maqueta)
Al final cuatro son los grupos que han realizado, finalizado y presentado el trabajo. Los denominaremos A; B, C, D.
En la tabla se indicarán una serie de descriptores que indican mayor o menor dificultad en el trabajo y los grupos que las han introducido.

Descriptor	Grupos
Incluye cilindros	A – B – C - D
Incluye prismas	A – B – C - D
Incluye esferas	A
Incluye cuerpos de revolución	A – B – C - D
Incluyen troncos de prisma o conos	A – C
Incluyen una figura no descrita en el libro	D
Conocen la medidas reales	A – C - D
Se inventan las medidas reales	C
Encajan todas las piezas	A
Calculan correctamente el volumen	A – C
Calcula correctamente la superficie total de cada figura independiente	A – B – C
Calcula correctamente la superficie lateral de la maqueta	
Calcula el volumen de la locomotora real	A – C
Calcula la superficie real de la locomotora.	
Calcula la cantidad de pintura necesaria para pintar la locomotora.	A – C

Tabla 19 – Identificación de descriptores que se han realizado en cada trabajo

c) Autoevaluación

Tablas que muestran la nota final con la que los alumnos se han autoevaluado y han evaluado a sus compañeros. En cada fila se colocará la nota que ha puesto el usuario de esa fila, y en cada columna aparecerán las notas que le han puesto a ese usuario. Es decir, En la fila B, ponemos las notas que ha puesto B a sus compañeros, y en la columna B, veremos las notas que le han puesto al alumno B sus compañeros. Al no poder poner nombres, identificaremos a cada estudiante con una letra.

	A	B	C	D
A	6	8	8	6
B	5	10	10	6
C	5	8	8	5
D	5.5	9.5	8.6	5.1
MEDIA	5.4	8.9	8.7	5.5

Tabla 20 – Autoevaluación grupo 1

	E	F	G	H
E	5.5	7	8	4
F	5	8.5	5	5
G	8	8	8	8
H	7	8	6.5	6.5
MEDIA	6.3	7.9	6.8	5.9

Tabla 21 – Autoevaluación grupo 2

	I	J	K
I	9	0	9
J	7	4	6
K	9	0	9
Media	8.3	1.3	8

Tabla 22 – Autoevaluación grupo 3

	L	M	N
L	9	6	2
M	8	7	1
N	9	6	3
Media	8.6	6.3	2

Tabla 23 – Autoevaluación grupo 4

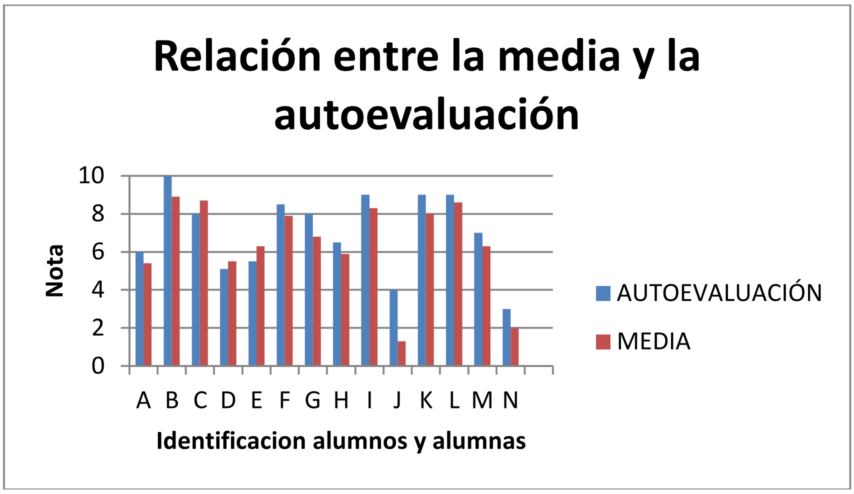


Grafico -3- Notas Autoevaluación por alumno o alumna

Se observa en la gráfica, que en general el alumnado ha valorado de manera bastante objetiva la actividad que han realizado y su implicación en el proyecto en relación con sus compañeros. Así mismo, se observa que la valoración que tiene el alumnado de la implicación y trabajo de sus compañeros en relación al grupo se asemeja mucho entre ellos.

No obstante, siempre hay casos extremos, en este caso, el alumno o alumna B, se ha otorgado un 10, y sus compañeros no las han valorado como 10 pero si como un componente importante del grupo. En otro de los grupos al alumno o alumna "J" sus compañeros le han dado un "0" y este alumno o alumna considera que ha trabajado menos, pero que si ha trabajado algo.

d) Resultados desde el punto de vista de la ingeniería didáctica.

Para realizar un estudio de estos resultados vamos a identificar distintas variables, teniendo en cuenta no sólo los resultados obtenidos en el examen escrito, sino también valorando el trabajo realizado por cada grupo en el desarrollo del informe y la maqueta y el trabajo realizado de manera individual.

El grupo que no ha presentado el proyecto final, no están incluidos dentro del informe y de la valoración de grupo, sin embargo, sí que va a entrar dentro del estudio de los resultados desde el punto de vista didáctico.

V1.- Estudiante que trabaja de manera activa en el desarrollo del proyecto.
V2.- Estudiante cuyo grupo ha utilizado todas las figuras geométricas en el diseño de la locomotora.
V3.- Estudiante cuyo grupo ha calculado bien el área total superficial de la locomotora en maqueta.
V4.- Estudiante cuyo grupo ha realizado bien los cálculos de la escala.
V5.- Estudiante que ha sabido calcular el volumen del cilindro.

V6.- Estudiante que ha calculado el volumen final que hay entre los cilindros.
V7.- Estudiante que ha sabido calcular la superficie de los círculos.
V8.- Estudiante que ha calcula bien el área sombreada del ejercicio 3.
V9.- Estudiante que ha aplicado Pitágoras en el ejercicio 4.
V10.-Estudiante que ha identificado Pitágoras para los cálculo de los apotemas.
V11.-Estudiante que ha calculado bien la apotema en el ejercicio 1.
V12.-Estudiante que ha calculado bien la apotema en el ejercicio 9.
V13.-Estudiante que sabe calcular volumen y área total de un prisma (ej. 5)
V14.-Estudiante que sabe identificar el área a pintar en el ejercicio 5.
V15.-Estudiante que sabe traducir m^3 a litros.
V16.-Estudiante que ha sabido calcular el volumen de un octavo de esfera.
V17.-Estudiante que resuelve el área lateral de un octavo de esfera.
V18.- Estudiante que sabe calcular el volumen a escala.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	V18
A	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
B	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
C	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
D	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
F	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
G	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
H	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
I	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
J	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
K	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
L	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
M	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
Q	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Tabla 8 – Variables didácticas

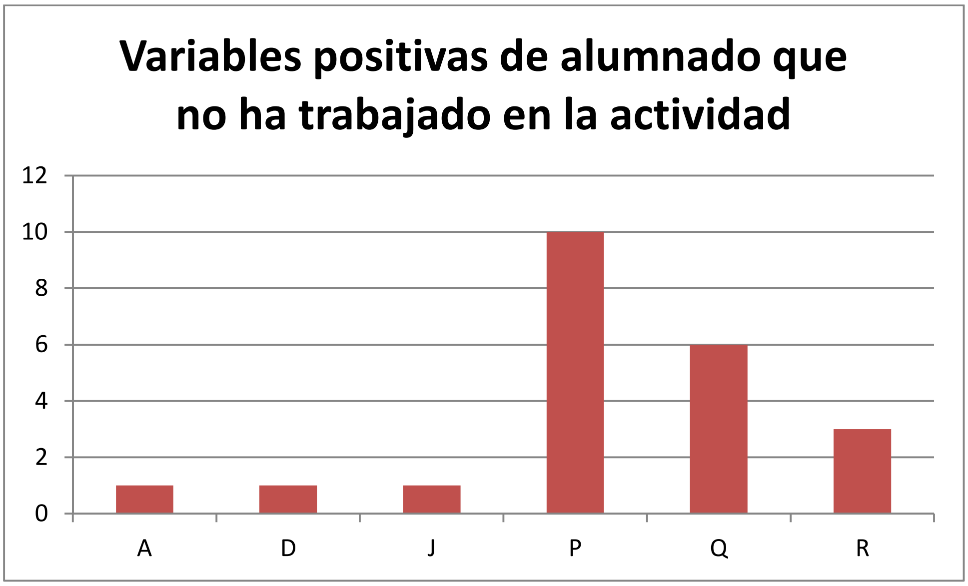


Grafico -4- Variables del alumnado que no ha trabajado

Grafico -5- Variables del alumnado que no ha trabajado

8.5 Discusión de los resultados.

En esta fase, es donde se van a contrastar los resultados obtenidos con los resultados que habían sido determinados a priori.

Primeramente mencionar, que el trabajo en grupo no ha sido tan satisfactorio como se esperaba debido a la mala disposición de muchos alumnos a trabajar con algunos compañeros. Además de la dificultad de gestionar el trabajo en grupo entre ellos. Estos aspectos los cuales eran parte fundamental del trabajo han truncado los resultados. A parte de valorar el trabajo puramente matemático, este proyecto trata de evaluar y mejorar otras habilidades o competencias externas a las matemáticas, tales como desarrollar el carácter críticos del estudiante, promover su curiosidad, etc…Lamentablemente se puede observar en las tablas de resultados tanto de las calificaciones obtenidas por el alumnado como de los informes presentados, así como la tabla de variables que hemos creado para identificar mejor las limitaciones y comportamientos que han tenido los alumnos, que el resultado obtenido no ha sido satisfactorio. Por lo que la hipótesis planteada no ha podido ser refutada. No obstante, la ingeniería didáctica no es ciclo cerrado, por lo que esta primera experimentación no ha servido para obtener información, interpretarla y poder de esta manera confeccionar otro proyecto superando las limitaciones o fallos realizados en este y no previstos en el análisis a preliminar.

- Excepto un alumno, el alumnado que tiene la V1-V2-V3 no ha adquirido ninguna de los conocimientos, saberes, habilidad, ni destreza.
- Al no corregir los proyectos antes del examen, no me di cuenta que los alumnos no habían correctamente guiados en cuanto a determinar el área lateral, por lo que todos los alumnos y alumnas han fallado en este tema.
- Los alumnos que tiene V1 en general han realizado correctamente V5-V6-V7.
- Alumnado con V9, han tenido V10 pero no han sabido obtener V11 y V12.
- Alumnado sin V3 tampoco V14.
- Las variables más importantes V11 – V12 – V14 - V17- V18 y a la que derivan todas las demás no han sido adquiridas por ningún alumno.

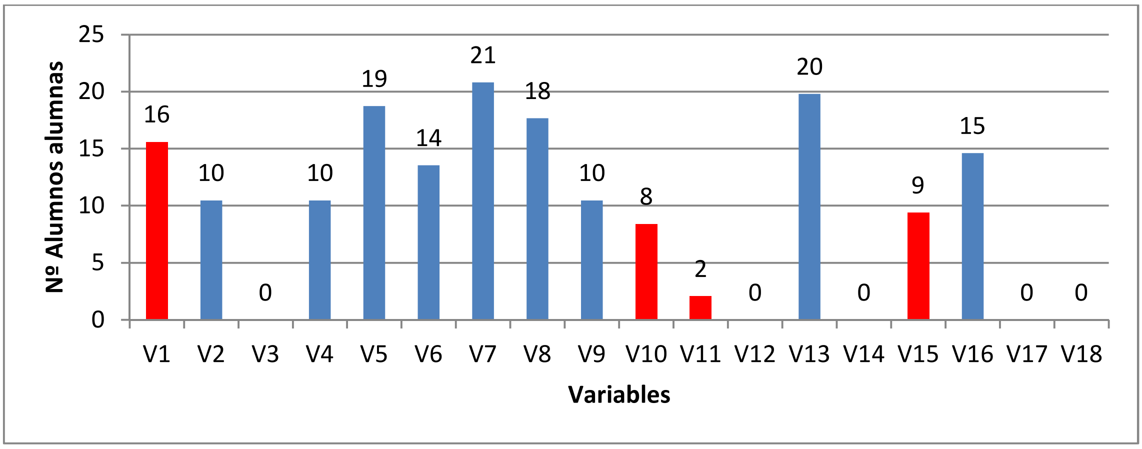


Grafico -6- Nº de Alumnos que ha alcanzado cada variable

Todos esos aspecto son los que se ven en las gráficas mostradas, sin embargo hay otros aspectos que se han observado en el aula y han perjudicado el desarrollo de la actividad y como docente no he sabido gestionar.

- Hay alumnos que no se han implicado en el proyecto.
- Hay alumnos que han realizado todo el proyecto solos.
- No ha habido comunicación dentro del grupo.
- No ha habido una gestión adecuada de las tareas.
- Se ha generado malestar intra-grupos.

En general el objetivo no ha sido conseguido, y el análisis a priori no se puede sostener con el análisis a posteriori, ya que el alumnado en general sigue sin:

- Resolver problemas contextualizados de Pitágoras.
- Identificar la posibilidad de aplicar el teorema de Pitágoras en problemas donde no se vea claramente que tenemos un triángulo rectángulo.
- Resolver ejercicios de áreas completamente bien (es decir, identificar que es el área de una figura).
- Realizar el desarrollo en plano de un cuerpo geométrico sólido.
- Desarrollar la imagen visual de un cuerpo sólido (esfera o 1/8 de esfera).
- Relacionar el desarrollo en plano de un poliedro con el cálculo del área lateral.
- Aplicar el teorema de Tales en ejercicios donde no se le indique que los triángulos son semejantes, o están en posición de Tales.
- Calcular volúmenes conocida su escala.
- Relacionar medidas de volúmenes con medida de capacidad.

NOTA: Se ha hecho mención que la evaluación de los resultados se ha realizado únicamente en unos de los grupos. Sin embargo, la valoración negativa de la propuesta didáctica, o mejor dicho, del modo de ejecución es compartido por todos los docentes que han realizado la actividad.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas.

Breve síntesis.

La evolución de los métodos de aprendizaje tiene como objetivo lograr un aprendizaje más eficiente, y sobre todo que el alumnado consiga la competencia matemática adecuada a su nivel educativo, entendiendo por competencia matemática, como*" la habilidad para utilizar los números, los símbolos y el razonamiento matemático, para interpretar distintos tipos de información y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana. Esta competencia implica el conocimiento de elementos matemáticos y procesos de razonamiento que llevan a la solución de problemas" (Claudio Martínez).*

Uno de los últimos métodos que más éxito está teniendo en el método de enseñanza-aprendizaje es el "Aprendizaje basado en proyectos (ABP*)" (Ingles: Proyect Based Learning PBL)*, por ello y bajo la consigna de que el alumnado de 3º ESO posee ciertos conocimientos previos de geometría, se ha he realizado la enseñanza de geometría de 3º ESO, mediante un ABP.

Este método implica que todo el trabajo del método enseñanza-aprendizaje recaiga sobre el alumnado y el profesor sea un mero guía del alumnado.

Sin embargo, a pesar del objetivo positivo que se tenía con este proceso de aprendizaje, los resultados obtenidos no han sido tan satisfactorios como se esperaba. Hay que realizar una crítica constructiva y evaluar cuáles han sido los errores, dificultades que se han encontrado los tres polos, y que han llevado a un resultado no esperado.

Al finalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría en 3º ESO; y evaluar los resultados obtenidos, se llega a la conclusión de que el alumnado no ha sido capaz de adquirir los conceptos geométricos necesarios, ni de desarrollar las habilidades y destrezas necesarias para poder resolver los distintos problemas geométricos aptos en esta etapa.

a) Posibles factores que han intervenido de manera negativa en el desarrollo de la actividad.

Dificultades relacionadas con las matemáticas.

- Carencia de conceptos previos.
- Incomprensión de las fórmulas empleadas.
- Problemas de lógica.

Dificultades del alumnado.

- Escaso trabajo personal.
- Escaso esfuerzo y motivación para resolver problemas.
- No ha habido interpretación de los resultados, se han limitado a copiar las fórmulas o buscar apoyo en el profesor o en personal ajeno.
- Escasa visión espacial.
- El alumnado carece de habilidades deductiva y no sabe utilizar los conceptos que conoce, en problemas contextualizados.

Dificultades del profesor.

- No prever las dificultades de manera previa.
- No ha sabido guiar de manera correcta al alumnado. Y no ha sido capaz de ver las carencias de este.
- Transposición didáctica errónea.
- No evaluar los resultado antes de del cuestionario final, para de esta forma comprobar las limitaciones que había en los informes.
- Intervenciones poco institucionalizadas.

Conclusiones generales del trabajo.

Mediante la realización de este proyecto se han intentado desarrollar varias de las competencias básicas que deben adquirir los estudiantes como son:

- Competencia matemática.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana.
- Competencia cultural y artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

Se ha intentado validar el método seguido en la enseñanza de la geometría en 3º de ESO mediante un diseño y experimentación según el enfoque de la ingeniería didáctica.

Si bien es claro, que a veces las experiencias novedosas no tienen el éxito esperado, cabe la posibilidad de poder solventar los errores y fallos y poder estructurar la actividad de una manera más eficiente.

En este caso se ha observado una clara diferencia entro lo que se analizaba a priori y lo que realmente se concluye. Esto es debido a que la información o comunicación entre los tres polos no ha sido lo convenientemente organizada.

En base a la unidad didáctica del libro de texto, se puede concluir que en los libros de texto de educación obligatoria, existe una clara tendencia a mecanizar y robotizar a los estudiantes, guiándoles en exceso, mostrando ejercicios muy básicos y con un proceso de resolución similar, evitando los problemas complejos, pero sobretodo obviando demostraciones y propiedades de los objetos matemáticos que podrían estimular al estudiante y sobretodo darle sentido a las aplicaciones futuras de los conceptos.

Por ejemplo, el libro no demuestra cómo se obtiene el área lateral de los cuerpos sólidos, sino que directamente indica como calcularlo, generando que cuando estamos ante alguna modificación del cuerpo sólido el estudiante se ve incapacitado para realizar el problema.

También se intenta independizar conceptos, por lo que no se establecen relaciones entre distintos contenidos, lo que provoca incertidumbre en el alumnado cuando se le comenta que puede aplicar conceptos y nociones ya conocidas. En este caso diremos que el alumnado ha adquirido el conocimiento pero no el saber, ya que no consigue relacionar o utilizar nociones fuera del entorno limitado que le ha creado el libro. Por ejemplo y a pesar de llamarse igual, los alumnos no crean conexiones entre el cálculo del apotema de un polígono regular o el cálculo del apotema de un poliedro.

Cuestiones abiertas.

Son muchas las cuestiones que surgen tras observar los resultados obtenidos en el presente trabajo fin de master.

- ¿Cómo podemos enfocar nuevamente esta unidad didáctica para conseguir resultados más favorables?.
- Está enfocada correctamente la metodología y enseñanza de la geometría en cursos anteriores.
- ¿Ha adquirido el alumnado las nociones mínimas que debería tener en 3º ESO, según los contendidos mínimos del currículo oficial en los cursos anteriores?.
- ¿Se prepara al alumnado para ser capaz de realizar un proceso de auto-aprendizaje? O bien, ¿Estamos desarrollando alumnos y alumnas que sólo se saben enfrentar a problemas tipo?.
- ¿Qué es lo que ha sucedido para que los resultados no han sido los deseados y que no se haya logrado que el alumnado adquiera las destrezas necesarias para resolver problemas de geometría en la vida cotidiana?.
- ¿Cómo podemos motivar al alumnado para que desee indagar más allá de lo estrictamente teórico.?
- ¿Es importante desarrollar otras competencias a parte de las matemáticas? ¿o solo es valorable la competencia matemática.?
- Esta el trabajo del estudiante enfocado para poder desarrollar otras competencias a parte de la matemáticas.

Referencias

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.

MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. BOE 5, de 5 enero, 677–773.

MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre. BOE 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

CFN (2009). Decreto Foral 61/2009, de 20 de Julio. BON 109, de 4 de Septiembre, 11447-11502.

CFN (2008). Decreto Foral 49/2008, de 12 de Mayo. BON 70, de 6 de Junio, 6552- 6643.

De lo Santos, I., González, J.L., Laca, C.R. (2007) *Matemáticas 1º ESO Esfera.* Madrid: Editorial S.M

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bujanda, M.P., Mansilla, S. (2009) *Matemáticas 21º ESO Esfera.* Madrid: *Editorial S.M*

Vizmanos J.R., Anzola M., Bellón M., Hervás J.C. (2006) *Matemáticas 3º ESO Esfera.* Pinto: Editorial S.M

Celma, J., Del Cueto, S., Dols, S., Fontich, A., Fornals, P., López, S., Peralta, L., Rebagliato, J., Vall, J., Visedo, N., Donaire, J.J., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E. (2012) *Matemáticas 4º ESO Opción A Multiplo.* Madrid: Editorial S.M

Vizmanos, J.R., Alcaide, F., Serran,o E., Hernández, J., Moreno, M., De los Santos, I., Hervás, J.C., (2011) *Matemáticas 4º ESO Opción B Pitágoras.* Madrid: Editorial S.M

Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Molano, A., Del Río, J., Santos, D., De Vicente, M. (2008) *Matemáticas 1º Bachillerato.* Torrelaguna: Editorial Santillana

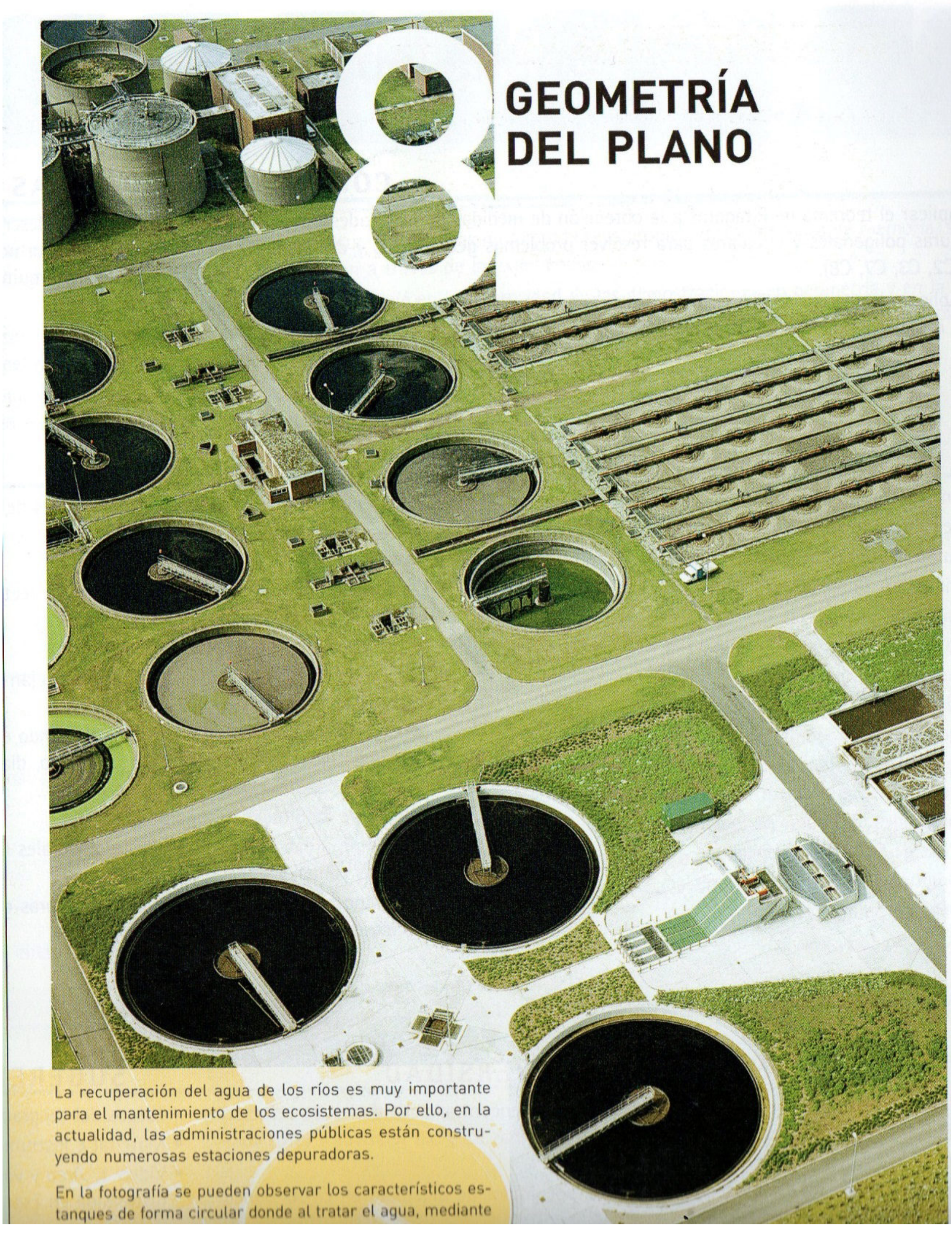
Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Especial), 133–156.

Coxeter, H.S.M. (1988) *"Fundamentos de Geometría".* México D.F. Editorial Limusa

Lacasta E., Gomez E., Rodríguez M., (2006) "El paso de la aritmética al algebra en la educación secundaria obligatoria". *Indivisa, Boletín de estudios e investigación.* Monografía IV, pp 79-92

Michelle Artigue, (1995). "Ingeniería Didáctica". In. Artigue M., Douady, R., Moreno, L.,Gómez, P., (Eds) .*"Ingeniería Didáctica en Educación". (*pp. 33-61). Bogotá: Editorial: Grupo Editorial Iberoamericana.

ANEXO A.
Unidad didáctica del libro de texto

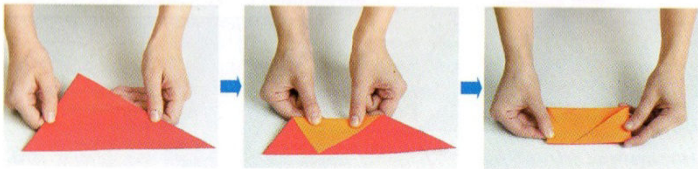


8 GEOMETRÍA DEL PLANO

La recuperación del agua de los ríos es muy importante para el mantenimiento de los ecosistemas. Por ello, en la actualidad, las administraciones públicas están construyendo numerosas estaciones depuradoras.

En la fotografía se pueden observar los característicos estanques de forma circular donde al tratar el agua, mediante

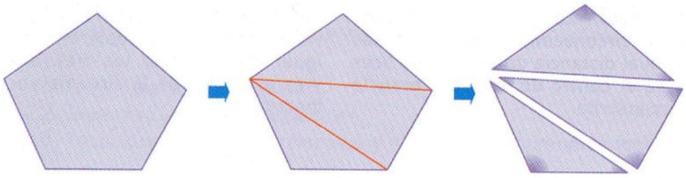
Recorta un triángulo de cartulina y realiza el siguiente experimento.



Con esta construcción comprobamos que los ángulos suman 180°.

La suma de los **ángulos** interiores de un **triángulo** es **180°**.

Vamos a ver ahora cuánto suman los ángulos interiores de un polígono.



Tomamos un polígono cualquiera.

Trazamos diagonales y descomponemos en triángulos.

La suma de los ángulos de cada triángulo vale 180°.

La suma de los ángulos interiores del pentágono es: $3 \cdot 180° = 540°$

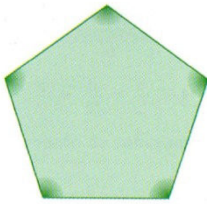
Si un polígono tiene n lados, el número de triángulos que se forman al trazar las diagonales es $n - 2$.

La suma de los **ángulos** interiores de un **polígono** de n lados es $\mathbf{180° \cdot (n - 2)}$.

TEN EN CUENTA

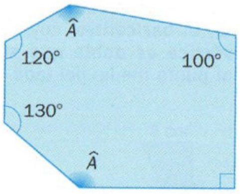
Si el polígono es regular, to dos sus ángulos interiore son iguales y su medida es

$$\frac{180 \cdot (n-2)}{n}$$



EJERCICIO RESUELTO

1. Calcula la medida del ángulo que falta en la siguiente figura.



Los ángulos interiores de un hexágono suman: $4 \cdot 180° = 720°$

Se suman los ángulos y se iguala a 720°.

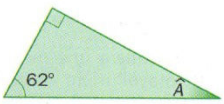
$\widehat{A} + 100° + 90° + \widehat{A} + 130° + 120° = 720° \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\widehat{A} = 280° \Rightarrow \widehat{A} = 140°$

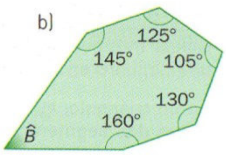
EJERCICIOS PROPUESTOS

1 Calcula la medida del ángulo que falta en cada figura.

a)

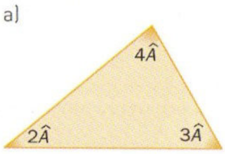


b)

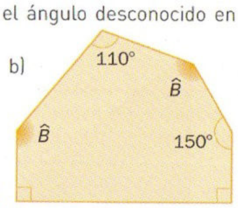


2 Determina cuánto mide el ángulo desconocido en estas figuras.

a)

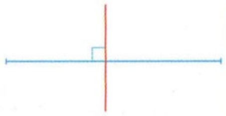


b)

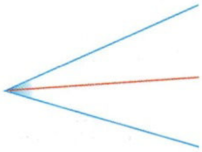


RECUERDA

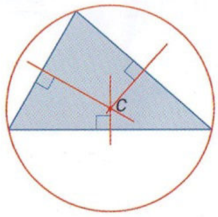
La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.



La **bisectriz** de un ángulo es la recta que pasa por su vértice y divide al ángulo en dos partes iguales.



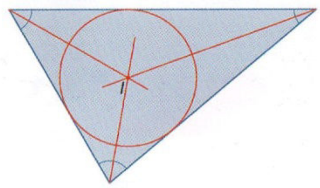
Mediatrices y circuncentro



Las **mediatrices** de un triángulo son las mediatrices de cada uno de sus lados.

Las mediatrices se cortan en un punto, el **circuncentro**, que está situado a igual distancia de los tres vértices y es el centro de la circunferencia circunscrita.

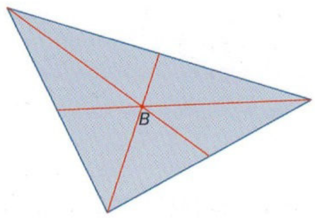
Bisectrices e incentro



Las **bisectrices** de un triángulo son las bisectrices de cada uno de sus ángulos.

Las bisectrices se cortan en un punto, el **incentro**, que está situado a igual distancia de los tres lados y es el centro de la circunferencia inscrita.

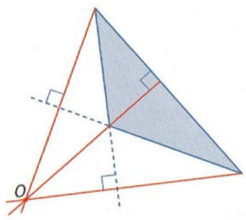
Medianas y baricentro



Las **medianas** de un triángulo son las rectas que pasan por cada vértice y por el punto medio del lado opuesto.

Las medianas se cortan en un punto, el **baricentro**, cuya distancia al vértice es doble que su distancia al punto medio del lado opuesto.

Alturas y ortocentro



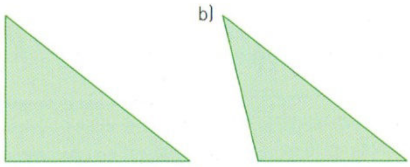
Las **alturas** de un triángulo son las rectas perpendiculares trazadas desde cada vértice al lado opuesto o a su prolongación.

Las alturas se cortan en un punto llamado **ortocentro**.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3 Copia cada triángulo y halla gráficamente el circuncentro, el incentro, el baricentro y el ortocentro.

a) b)



4 Dibuja en un triángulo rectángulo las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas.

5 Dibuja en un triángulo equilátero la circunferencia inscrita y la circunscrita.

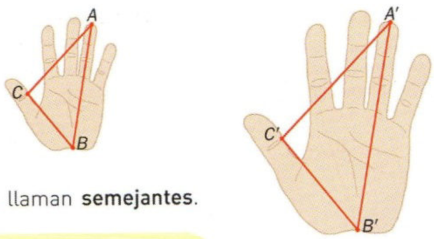
6 Dibuja tres puntos *A*, *B* y *C*, no alineados, y traza una circunferencia que pase por ellos.

7 En un triángulo, el baricentro divide a una mediana en dos segmentos. Si el mayor mide 6 centímetros, ¿cuánto mide el otro segmento?

3. Polígonos semejantes

Estas dos figuras se han obtenido con una fotocopiadora, ampliando o reduciendo.

Si unimos los tres puntos A, B y C, y sus homólogos A', B' y C', podemos comprobar que los dos triángulos tienen los **lados proporcionales** y los **ángulos iguales**.



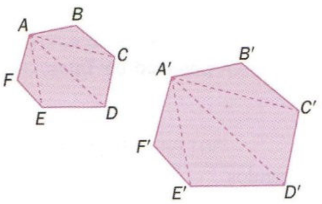
Dos triángulos que cumplan estas condiciones se llaman **semejantes**.

Dos **triángulos** son **semejantes** si tienen sus ángulos iguales y sus lados son proporcionales.

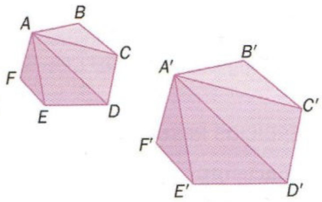
Para saber si dos triángulos son semejantes, no es necesario conocer los tres lados y los tres ángulos. Los siguientes criterios indican los elementos mínimos necesarios para saber si dos triángulos son semejantes.

1. Tener dos ángulos iguales.
2. Tener los lados proporcionales.
3. Tener dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.

La semejanza de triángulos permite definir la **semejanza de polígonos**.



Estos dos polígonos se descomponen en triángulos desde dos vértices homólogos.

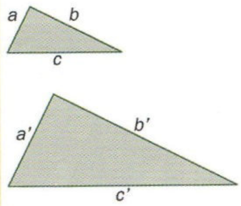


Si los triángulos obtenidos son semejantes, los lados del polígono son proporcionales, y los ángulos iguales.

Dos **polígonos** son **semejantes** si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales.

TEN EN CUENTA

El cociente entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes se llama razón de semejanza.

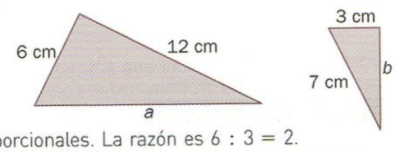


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k razón de semejanza

EJERCICIO RESUELTO

2. Calcula a y b en estos triángulos semejantes.



Los lados deben ser proporcionales. La razón es $6 : 3 = 2$.
Los lados del pequeño son 3, 6 y 7, y los del grande son 6, 12 y 14.

EJERCICIOS PROPUESTOS

8 Razona si las siguientes parejas de triángulos pueden ser semejantes.

a) 40°, 50°, $\widehat{A}$; 40°, $\widehat{B}$, 90°

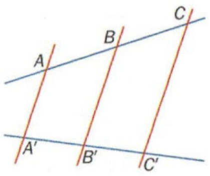
b) 60°, 60°, 60°; 8 cm, 8 cm, 8 cm

9 Los lados de un rectángulo miden 8 y 4 centímetros, respectivamente. Un rectángulo semejante tiene como perímetro 240 centímetros.

¿Cuáles son sus dimensiones?

TEN EN CUENTA

También se cumplen las siguientes proporcionalidades.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Ejemplo. *Dibuja un triángulo ABC, de lados 4, 6 y 8 centímetros. A continuación, traza una paralela al lado BC que corte a los otros dos lados. Se forma el triángulo AB'C'.*

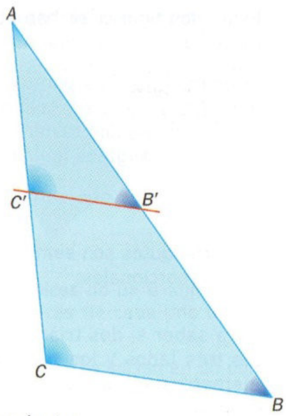
Comprueba que los triángulos ABC y AB'C' son semejantes.

Medimos los lados AB', $B'C'$ y AC', y obtenemos valores proporcionales.

$$\frac{8}{AB'} = \frac{4}{B'C'} = \frac{6}{AC'} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$$

Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{A'}$ son iguales por ser coincidentes, y los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{B'}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{C'}$, por tener lados paralelos.

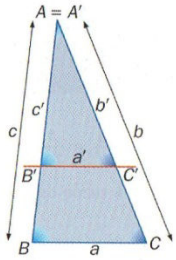
$$\widehat{A} = \widehat{A'} \qquad \widehat{B} = \widehat{B'} \qquad \widehat{C} = \widehat{C'}$$



Por tanto, los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.

Este resultado, válido para cualquier triángulo, se conoce como **teorema de Tales**.

El teorema de Tales gráficamente



$$\widehat{A} = \widehat{A'} \quad \widehat{B} = \widehat{B'} \quad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Teorema de Tales. Toda recta paralela a un lado de un triángulo ABC, que corta a los otros dos lados, determina un triángulo más pequeño $AB'C'$, semejante al triángulo original.

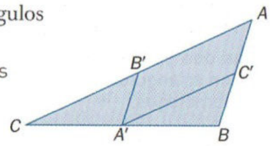
Los triángulos ABC y $AB'C'$ se dice que están en **posición de Tales**.

EJERCICIOS RESUELTOS

3. Encuentra en la siguiente figura triángulos en posición de Tales.

ABC y *A'B'C* tienen el común *C* y los lados opuestos a *C* son paralelos.

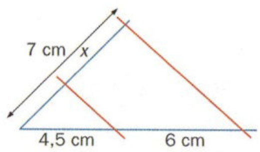
ABC y *A'BC'* tienen el común *B* y los lados opuestos a *B* son paralelos.



4. Calcula el valor de la figura.

$$\frac{4,5}{7-x} = \frac{6}{x} \Rightarrow 4,5x = 42 - 6x \Rightarrow$$

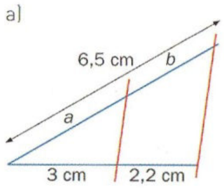
$$\Rightarrow 10,5x = 42 \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$



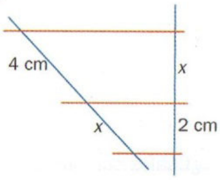
EJERCICIOS PROPUESTOS

10 Calcula el valor de los lados desconocidos.

a)



b)



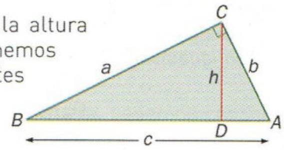
11 Los lados de un triángulo miden 8, 10 y 12 centímetros. Construye sobre él otro triángulo, en posición de Tales, sabiendo que la razón de semejanza es 0,5.

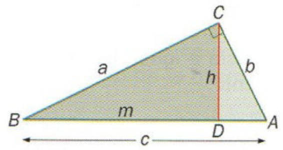
12 Un alumno dibuja dos rectas *r* y *s*, secantes. A continuación, marca en *r* tres puntos *A*, *B* y *C*, que distan entre sí 3 y 4 centímetros, respectivamente. Por esos puntos traza rectas paralelas que cortan a *s* en *A'*, *B'* y *C'*. Si la distancia entre *A'* y *B'* es 6 centímetros, ¿cuál es la distancia entre *A'C'* y *B'C'*?

5. Teorema de Pitágoras

A partir del teorema de Tales se puede demostrar que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

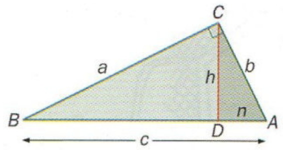
Dibujamos en el triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa. Obtenemos así dos triángulos rectángulos semejantes al primero.





El triángulo ABC es semejante al triángulo BCD por tener los ángulos iguales.

$$\frac{m}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = mc$$



El triángulo ABC es semejante al triángulo ADC por tener los ángulos iguales.

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = nc$$

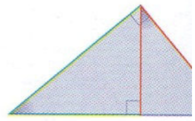
Por tanto, si sumamos las dos expresiones se tiene:

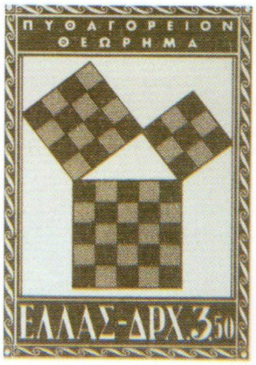
$$a^2 + b^2 = mc + nc = (m + n) \cdot c = c \cdot c = c^2$$

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Ten en cuenta

Dos ángulos que tiene lados perpendiculares iguales si ambos son dos o ambos obtusos.





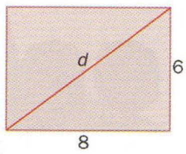
En 1955 Grecia emitió un sello con una demostración geométrica del teorema de Pitágoras.

EJERCICIOS RESUELTOS

5. El suelo de una clase es un rectángulo de dimensiones 6 y 8 metros. ¿Cuál es la distancia máxima que se puede recorrer en la clase?

La distancia máxima la determina la diagonal del rectángulo que forma el suelo de la clase.

$d^2 = 6^2 + 8^2 \quad d = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ m



6. Un carpintero construye un marco para un cuadro de dimensiones 90 y 120 centímetros. Para ver si el marco está bien hecho, mide la diagonal y obtiene como resultado 145 centímetros. ¿Está bien hecho el marco?

Si el marco está bien construido, los dos lados y la diagonal deben formar un triángulo rectángulo, luego deben verificar el teorema de Pitágoras.

$90^2 + 120^2 = 8\,100 + 14\,400 = 22\,500 \qquad 145^2 = 21\,025$

Como $22\,500 \neq 21\,025$, el marco no está bien construido.

EJERCICIOS PROPUESTOS

13 La sala de una biblioteca tiene base rectangular cuyos lados miden 12 y 15 metros, respectivamente.

¿Cuánto mide la diagonal?

14 Averigua cuáles de los siguientes datos corresponden a triángulos rectángulos.

a) 9, 15 y 17
b) 6, 8 y 10
c) 9, 12 y 15
d) 12, 16 y 19

Mediatriz

Ejemplo. *Unos amigos están jugando a meter goles. ¿Dónde deben colocar el balón para que las distancias a los pies de los dos postes de la portería sean iguales?*

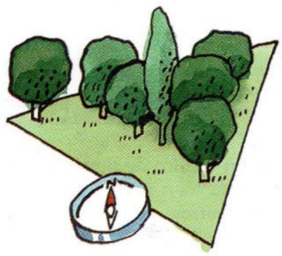
Para que la distancia del balón al pie de cada uno de los postes, *A* y *B*, sea la misma, debemos trazar la mediatriz del segmento *AB* y poner el balón en cualquier punto de la misma, ya que cualquiera de ellos está a igual distancia de los extremos del segmento.

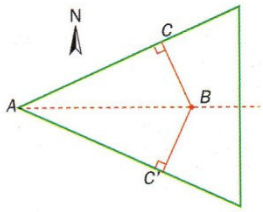
Podemos definir la mediatriz de un segmento por medio de la propiedad que cumplen todos sus puntos.

Cualquier conjunto de puntos del plano que cumplen una determinada propiedad o condición se llama **lugar geométrico en el plano**. Así, la **mediatriz de un segmento *AB*** es el **lugar geométrico** de los puntos del plano que están a la misma distancia, equidistan, de los extremos del segmento *AB*.

Bisectriz

Ejemplo. *Al diseñar un parque de forma triangular se quiere trazar en él un camino principal que lo atraviese y que se encuentre, en todos sus puntos, a la misma distancia de los límites norte y sur del mismo. Razona por dónde debe trazarse dicho camino.*





En la figura observamos que los puntos de la bisectriz del ángulo $\widehat{A}$ cumplen la condición pedida. Cualquiera de ellos se encuentra a la misma distancia de las vallas norte y sur del parque. Para comprobarlo, tomamos el punto *B*, trazamos desde él las perpendiculares a las vallas, formando dos triángulos *ABC* y *ABC'*. Al ser estos semejantes con un lado común, confirmamos que las distancias *BC* y *BC'* son iguales.

Al igual que con la mediatriz, podemos definir la bisectriz de un ángulo por medio de una propiedad que cumplen todos sus puntos.

Bisectriz de un ángulo es el **lugar geométrico** de los puntos del plano que equidistan de los lados de dicho ángulo.

Circunferencia

Ejemplo. *Un grupo de alumnos de un campamento está sentado alrededor de una hoguera. Si la distancia de cada uno al centro de esta es la misma, ¿qué figura geométrica sugiere la posición de todos ellos*

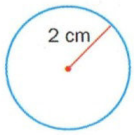
Al estar todos a la misma distancia de la hoguera, podemos considerarlos como puntos en una circunferencia que tiene por centro la hoguera, y por radio, la distancia de cualquiera de los alumnos a la hoguera.

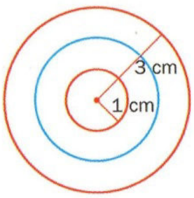
Todos los puntos de una circunferencia cumplen la misma condición respecto del centro de la misma.

Una **circunferencia** es el **lugar geométrico** de los puntos del plano que equidistan de un punto interior que llamamos centro, siendo esta distancia común el radio de la circunferencia.

EJERCICIOS RESUELTOS

7. Dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una distancia de 1 centímetro de una circunferencia que tiene un radio de 2 centímetros.





El lugar geométrico pedido estará formado por dos circunferencias concéntricas a la dada, una interior de radio 2 − 1 = 1 centímetro y otra exterior de radio 2 + 1 = 3 centímetros.

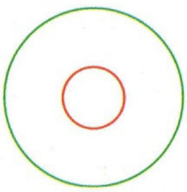
Por tanto, el lugar geométrico buscado, son dos circunferencias concéntricas de radio 1 y 3 centímetros respectivamente.

8. Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas de la figura.

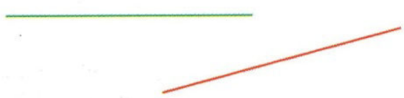
Al ser las dos rectas paralelas, el lugar geométrico pedido coincide con la recta paralela a las dadas y que equidista de ellas, marcada en rojo en la figura.

EJERCICIOS PROPUESTOS

15 Copia las circunferencias de la figura y dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas. Describe la figura resultante.

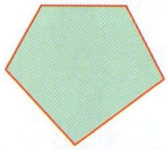


16 Copia los segmentos de la figura y dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambos. Describe la figura resultante.

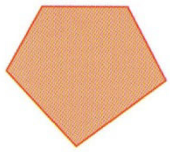


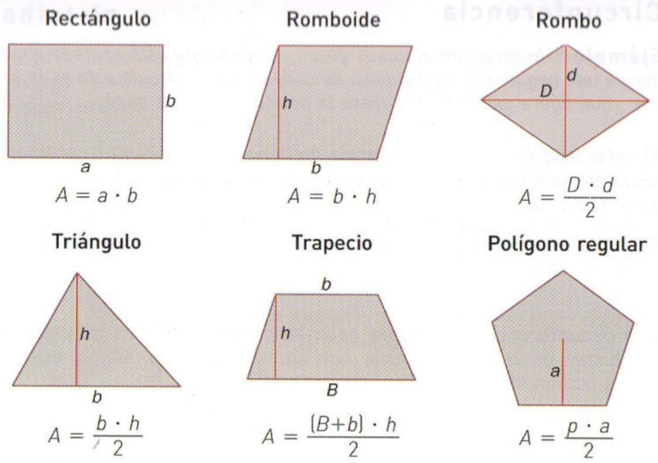
RECUERDA

El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de los lados.



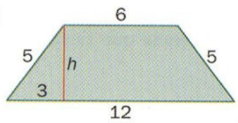
El área de un polígono es la medida de su superficie.





EJERCICIOS RESUELTOS

9. Calcula el área de un trapecio isósceles cuyos lados miden 5, 6, 5 y 12 centímetros.

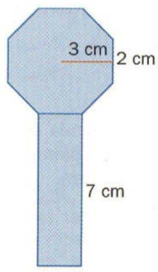


Se necesita conocer la altura.

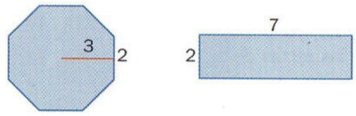
$h = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ cm

$A = \frac{(6 + 12) \cdot 4}{2} = 36$ cm^2

10. Calcula el área y el perímetro de la figura.



El área pedida es la suma del área de un octógono regular y la de un rectángulo.



$A = \frac{(8 \cdot 2) \cdot 3}{2} + 2 \cdot 7 = 38$ cm^2

$p = 7 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 2 = 30$ cm

EJERCICIOS PROPUESTOS

17 Halla el área de un triángulo isósceles cuyos lados miden 8, 6 y 6 centímetros.

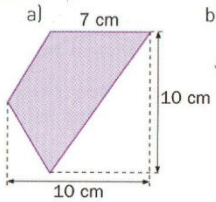
18 Calcula el área y el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 18 y 12 centímetros.

19 La diagonal menor de un rombo mide 6 centímetros y el lado 5 centímetros. Determina su área.

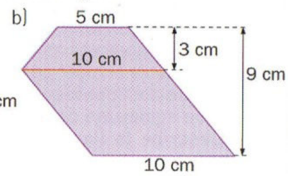
20 ¿Cuánto mide el área de un hexágono regular de 20 centímetros de lado? ¿Y su perímetro?

21 Averigua el área de estas figuras.

a)



b)



Ejemplo. *Queremos plantar césped y poner una valla alrededor de una plaza circular de 5 metros de radio. Averigua cuántos metros cuadrados de césped vamos a plantar y cuántos metros de valla necesitamos.*

Metros cuadrados de césped:

Área del círculo de radio 5 = $\pi \cdot 5^2 = 78{,}54$ m^2

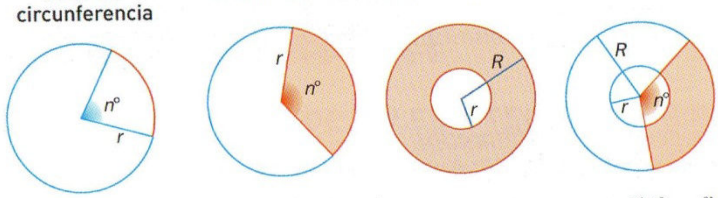
Metros de valla:

Longitud de la circunferencia de radio 5 = $2\pi \cdot 5 = 31{,}42$ m

Las longitudes de los arcos y las áreas de los sectores son proporcionales a sus medidas en grados.

Longitud: **Arco de circunferencia**

Área: **Sector circular** | **Corona circular** | **Trapecio circular**



$L = \dfrac{2\pi r \cdot n°}{360°}$ $\qquad A = \dfrac{\pi r^2 \cdot n°}{360°}$ $\qquad A = \pi(R^2 - r^2)$ $\qquad A = \dfrac{\pi n°(R^2 - r^2)}{360°}$

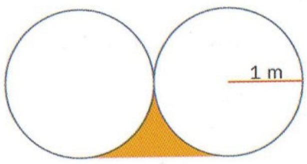
RECUERDA

La longitud de la circunferencia es $2\pi r$.

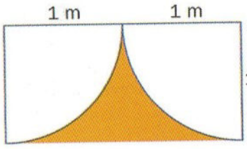
El área del círculo es πr^2.

EJERCICIO RESUELTO

11. Calcula el área de la figura coloreada.



El área pedida se obtiene restando del área del rectángulo el área de dos cuartos de círculo de igual radio.



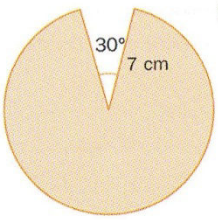
$A_1 = 2 \cdot 1 = 2$ m^2 $\qquad A_2 = \dfrac{1}{4}\pi \cdot 1^2$

El área de la figura es: $A = 2 - 2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\pi\right) = 0{,}43$ m^2

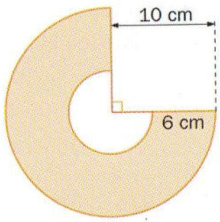
EJERCICIOS PROPUESTOS

22 Halla el área de las siguientes figuras.

a)

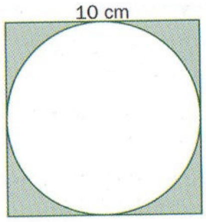


b)

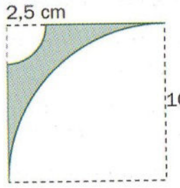


23 Calcula el área de las figuras sombreadas.

a)



b)



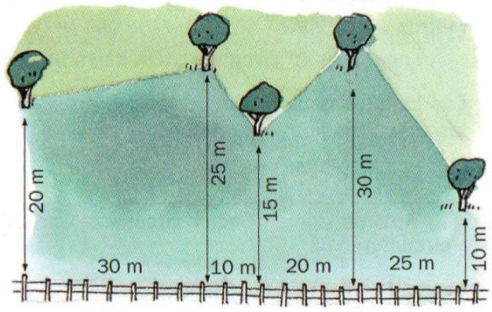
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

UTILIZA LA DESCOMPOSICIÓN EN TRAPECIOS

Para medir la superficie de una figura irregular es útil descomponerla en trapecios. En este caso es aconsejable:

— Descomponer la figura en trapecios.

— Calcular el área de cada trapecio y sumar los resultados.



Problema

Una finca linda por un lado con un camino rectilíneo y en la parte opuesta con un río. Conocemos la distancia que hay desde el camino hasta una hilera de cinco árboles que están en el borde del río.

¿Cuál es el área aproximada de la finca?

Resolución

Dibujamos una descomposición de la figura en trapecios

Trazamos la figura formada por el camino y la fila de árboles, unidos por segmentos.

En esta figura trazamos rectas perpendiculares al camino que pasen por los árboles, de tal forma que obtenemos una serie de trapecios.

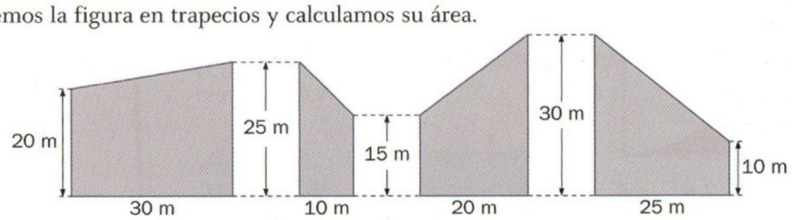
Calculamos el área de cada trapecio

Como conocemos las bases y las alturas de cada trapecio, calculamos su área.

Sumamos todas las áreas

Sumamos todos los resultados y obtenemos el área de la finca por aproximación.

Descomponemos la figura en trapecios y calculamos su área.



$$A_{T_1} = \frac{(20 + 25) \cdot 30}{2} = 675 \text{ m}^2 \qquad A_{T_3} = \frac{(15 + 30) \cdot 20}{2} = 450 \text{ m}^2$$

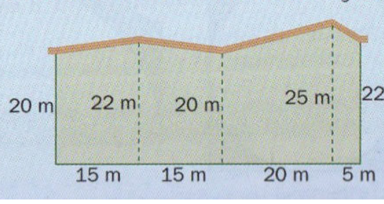
$$A_{T_2} = \frac{(25 + 15) \cdot 10}{2} = 200 \text{ m}^2 \qquad A_{T_4} = \frac{(30 + 10) \cdot 25}{2} = 500 \text{ m}^2$$

El área aproximada de la finca es la suma de las áreas de todos los trapecios.

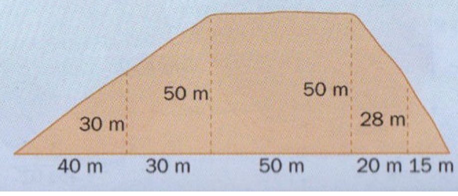
$$A = 675 + 200 + 450 + 500 = 1\,825 \text{ m}^2$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

24 Calcula el área de la finca de la figura.

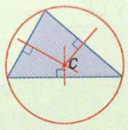


25 Determina el área del islote de la figura.



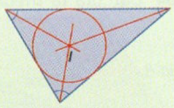
RECTAS Y PUNTOS NOTABLES

Circuncentro



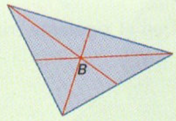
Punto donde se cortan las **mediatrices**.

Incentro



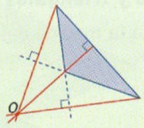
Punto donde se cortan las **bisectrices**.

Baricentro



Punto donde se cortan las **medianas**.

Ortocentro



Punto donde se cortan las **alturas**.

POLÍGONOS SEMEJANTES

Tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales.

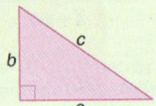
TEOREMA DE TALES Y TEOREMA DE PITÁGORAS

Teorema de Tales

Una recta paralela a un lado de un triángulo, que corta a los otros dos lados, determina otro triángulo semejante al original.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

LUGARES GEOMÉTRICOS

Lugar geométrico en el plano es cualquier conjunto de puntos del plano que cumplen una determinada propiedad o condición.

Mediatriz de un segmento *AB*

Puntos que equidistan de los extremos del segmento *AB*.

Bisectriz de un ángulo

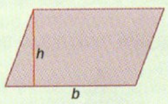
Puntos que equidistan de los lados de dicho ángulo.

Circunferencia

Puntos que equidistan de un punto interior llamado centro.

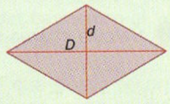
LONGITUDES Y ÁREAS

Romboide



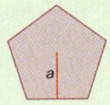
$$A = b \cdot h$$

Rombo



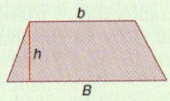
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Polígono regular



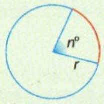
$$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

Trapecio



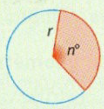
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Longitud del arco de circunferencia



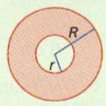
$$L = \frac{2\pi r n°}{360°}$$

Área del sector circular



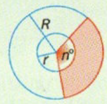
$$A = \frac{\pi r^2 n°}{360°}$$

Área de la corona circular



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Área del trapecio circular

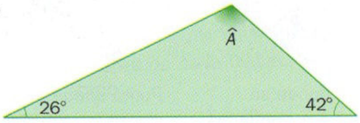


$$A = \frac{\pi n°(R^2 - r^2)}{360°}$$

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

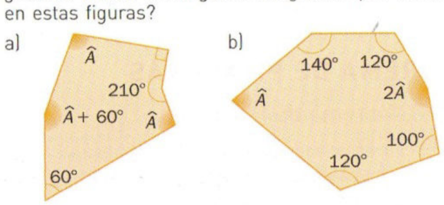
Ángulos y triángulos

26 Halla la medida del ángulo $\widehat{A}$ en el siguiente triángulo.



27 Calcula la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

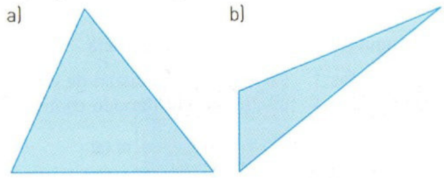
28 ¿Cuánto miden los ángulos designados por letras en estas figuras?



29 Dibuja un triángulo equilátero y traza sus mediatrices, medianas, bisectrices y alturas.

Explica qué observas.

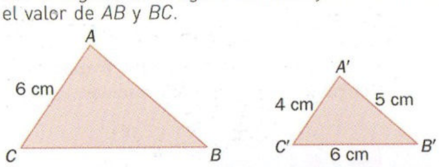
30 Traza la circunferencia inscrita y la circunscrita de los siguientes triángulos.



Figuras semejantes. Teorema de Tales

31 Los lados de un triángulo miden, respectivamente, 10, 12 y 14 centímetros. Los de otro triángulo miden 15, 18 y 21 centímetros. ¿Son semejantes?

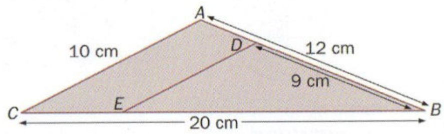
32 Los triángulos de la figura son semejantes. Calcula el valor de AB y BC.



33 Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 9 centímetros. El lado menor de otro triángulo semejante al dado mide 20 centímetros.

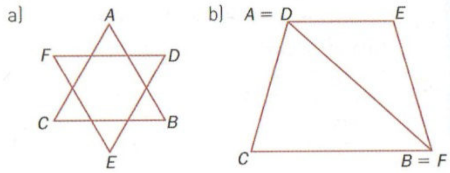
Halla la medida de los otros lados.

34 Calcula la medida de $\overline{DE}$ y $\overline{CE}$.



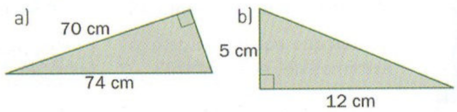
35 Los lados de un triángulo miden 9, 12 y 16 centímetros. Calcula las longitudes de los lados de otro triángulo semejante al dado, tal que su perímetro es 148 centímetros.

36 Razona, utilizando algún criterio de semejanza de triángulos, si los triángulos ABC y DEF son semejantes.



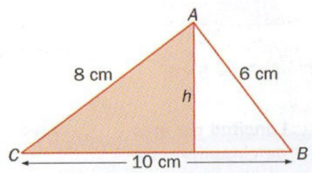
Teorema de Pitágoras

37 Averigua el valor del lado desconocido de estos triángulos.



38 Determina *la* altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12 centímetros.

39 Calcula el área del triángulo rectángulo sombreado.

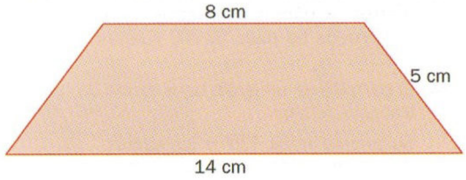


Lugar geométrico

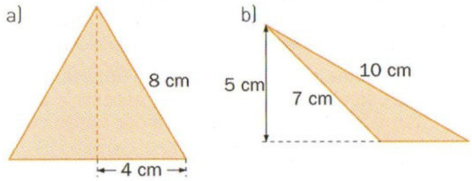
40 Construye varios triángulos isósceles cuyo lado desigual sea un segmento AB dado y nombra con la letra C el tercer vértice de dichos triángulos. ¿Cuál es el lugar geométrico que forman los puntos C?

Longitudes y áreas

41 Halla el área del trapecio isósceles de la figura.

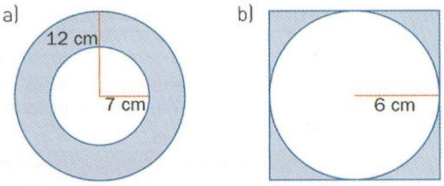


42 Calcula el área de estos triángulos.

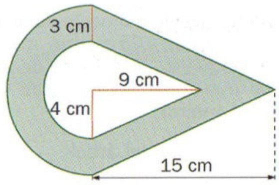


43 ¿Cuánto mide el área de un círculo de 20 centímetros de diámetro?

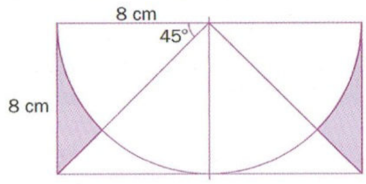
44 Determina el área de las regiones sombreadas.



45 Halla el área de la región sombreada de la figura.



46 Calcula el área de la región sombreada.



47 El perímetro de un rombo es 40 centímetros y su diagonal mayor mide 16 centímetros. Averigua su área.

48 Calcula la longitud del arco de circunferencia y el área del sector circular cuyo radio es 6 decímetros y cuyo ángulo mide 160°.

49 Halla el área de un hexágono regular de 12 centímetros de lado.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

50 Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo que mide 35°. ¿Son semejantes?

51 En un triángulo trazamos desde el vértice *A* la mediana al lado *BC* y medimos su longitud, 18 centímetros. Calcula la distancia del baricentro al vértice *A* y al punto medio del lado *BC*.

52 ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorrer un jugador de fútbol en un campo cuyas medidas son 100 × 70 metros?

53 En una circunferencia inscribimos un triángulo equilátero y unimos cada uno de sus vértices con el centro de la circunferencia.

¿Cómo son cada uno de los triángulos que se forman?

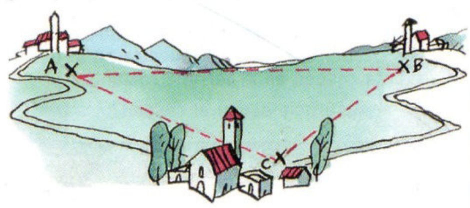
54 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 9 centímetros, respectivamente. Los catetos de otro triángulo rectángulo miden 10 y 15 centímetros. ¿Son semejantes ambos triángulos?

55 ¿Dónde se encuentra situado el ortocentro de cualquier triángulo rectángulo?

Ayúdate de un dibujo para encontrar la respuesta.

56 Tres pueblos *A*, *B* y *C* quieren construir una piscina común para sus habitantes, de forma que quede a la misma distancia de los tres.

¿En qué punto deben construirla?



57 La aguja pequeña del reloj de Julia describe un ángulo de 20° en 35 minutos. Razona si Julia tiene un reloj que atrasa o adelanta.

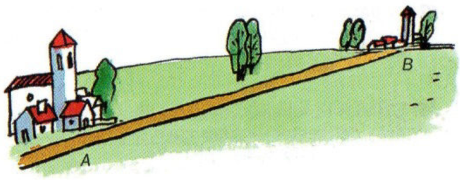
> activ

PROBLEMAS PARA APLICAR

58 En un determinado momento del día, un árbol arroja una sombra de 4,23 metros, mientras que, en el mismo momento, la sombra de un palo que mide 1,20 metros es de 0,64 metros.

Averigua la altura del árbol.

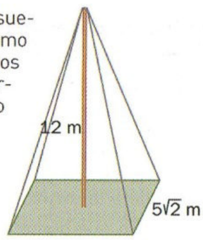
59 En la carretera del dibujo se va a poner una gasolinera que se encuentre a la misma distancia de los pueblos *A* y *B*. ¿Dónde tiene que construirse?



60 Un hexágono tiene dos ángulos rectos y tres ángulos iguales que miden, cada uno, 132°. Halla el sexto ángulo.

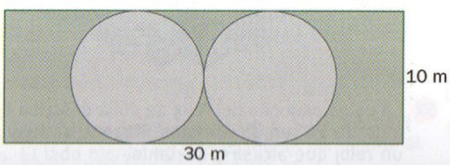
61 Un poste se ha sujetado al suelo mediante cuatro cables, como muestra la figura. Los puntos de amarre de los cables forman un cuadrado, en cuyo centro se sitúa el poste.

Calcula cuánto cable se ha necesitado en la operación.



62 En un terreno rectangular se construyen dos fuentes circulares, como se muestra en la figura, y se planta césped en el terreno restante.

¿Qué superficie ocupa el césped?

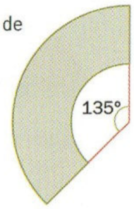


63 La rueda de un coche tiene un radio de 33 centímetros. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido el coche si la rueda ha dado 80 000 vueltas?

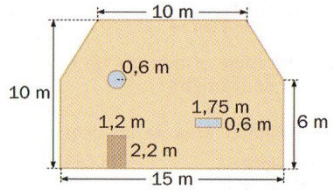
64 El parterre de un jardín tiene forma de trapecio circular.

Su ángulo mide 135° y los radios de las circunferencias 10 y 6 metros, respectivamente.

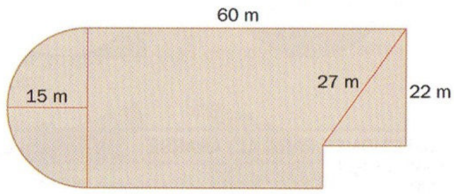
Calcula la superficie que se puede plantar de césped.



65 Queremos pintar la fachada de la casa de la figura. Calcula cuánta pintura es necesaria si se gastan 2,5 kilogramos de pintura por metro cuadrado.

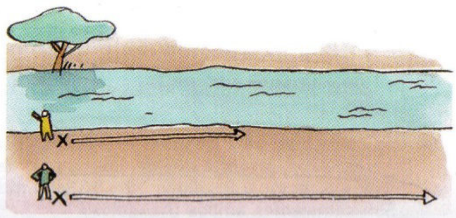


66 La finca de la figura se vende a 200 euros el metro cuadrado. Calcula cuál es su precio total.



67 Juan y Miguel quieren medir la anchura del río de su pueblo y proceden de la siguiente manera: Juan se coloca en el borde del río y Miguel a 3 metros de él, alineados ambos con un árbol que está en la otra orilla. La línea que forman es perpendicular al río. Caminan paralelamente al río, Juan 2,8 metros y Miguel 6 metros, hasta que vuelven a estar alineados con el árbol.

¿Qué anchura tiene el río?



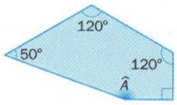
idades

REFUERZO

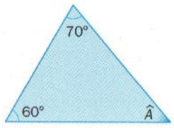
Ángulos y triángulos

68 Averigua la medida del ángulo $\widehat{A}$ de la figura.

a)



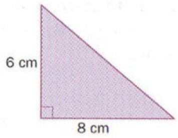
b)



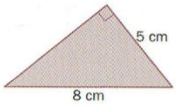
Teorema de Pitágoras

69 Calcula el valor desconocido en los siguientes triángulos rectángulos.

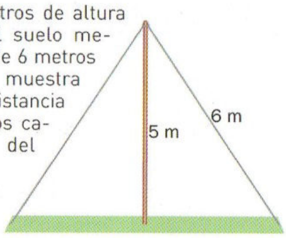
a)



b)



70 Un poste de 5 metros de altura se ha sujetado al suelo mediante dos cables de 6 metros de longitud, como muestra la figura. ¿A qué distancia se han sujetado los cables de la base del poste?

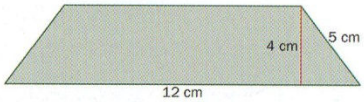


Lugar geométrico

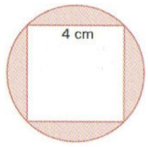
71 Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una distancia d de una recta r dada.

Longitudes y áreas

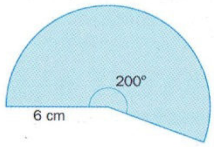
72 Halla el perímetro y el área del trapecio isósceles de la figura.



73 Determina el área de la región sombreada de la figura, donde el lado del cuadrado mide 4 centímetros.



74 Halla el perímetro y el área de la figura.



AMPLIACIÓN

75 Los perímetros de dos triángulos isósceles semejantes miden, respectivamente, 32 y 40 centímetros. Si el lado desigual del menor mide 8 centímetros, ¿cuánto miden los lados del mayor?

76 Por los vértices A, B y C de un triángulo trazamos una paralela al lado opuesto, formándose el triángulo de vértices A', B' y C'. Halla:

a) La relación entre los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{C'}$.

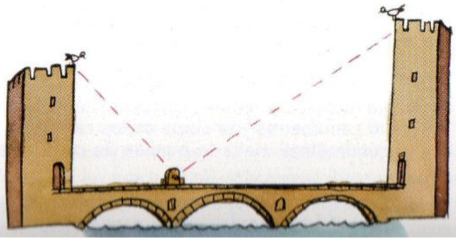
b) La relación entre los baricentros de ambos triángulos.

c) La relación entre los triángulos ABC, $AB'C$, $AC'B$ y $A'BC$.

77 Dos puntos A y B están situados en el plano a una distancia de 10 centímetros. Determina todos los puntos que están a 8 centímetros de A y a 6 cen-

78 Dos torres A y B, una de 40 metros y la otra de 30 metros de altura, están separadas por un puente de 60 metros de largo. En un punto C del puente hay una fuente. Dos pájaros que están en las almenas de cada una de las torres salen a beber de la fuente a la vez y con la misma velocidad, llegando al mismo tiempo a la fuente.

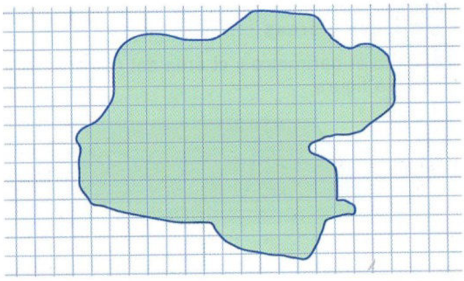
¿A qué distancia está la fuente de ambas torres?



PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

79 La superficie de la isla

Para estimar la superficie de una isla, Juan ha dibujado sobre una cuadrícula el contorno de la misma con la ayuda de una fotografía aérea y un mapa.



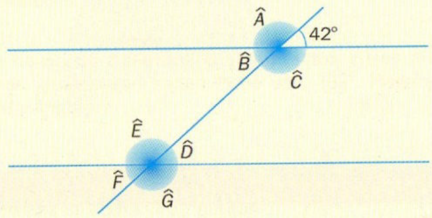
a) Observa el dibujo y di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no.

- El número de cuadrados que están totalmente contenidos en el área encerrada por el contorno corresponde a una estimación inferior de dicha área.
- El número de cuadrados que tocan, al menos en parte, el área encerrada por el contorno corresponde a una estimación superior de dicha área.

b) Calcula ambas estimaciones y el error máximo que se cometerá si se toma como nueva estimación la media aritmética de las dos anteriores.

AUTOEVALUACIÓN

1 Calcula la medida de los ángulos desconocidos de esta figura.



2 ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de un octógono regular?

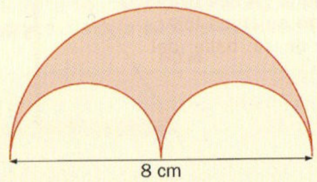
3 Dibuja un triángulo rectángulo y traza su circuncentro. Explica lo que observas.

4 Los lados de un triángulo miden 6, 7 y 9 centímetros, respectivamente. Otro triángulo semejante tiene de perímetro 66 centímetros. ¿Cuánto miden sus lados?

5 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 centímetros y la suma de los catetos es 14 centímetros. Halla la medida de cada cateto.

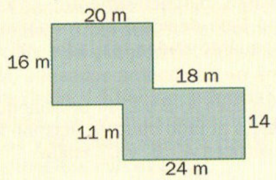
6 Determina la longitud de la circunferencia y el área del círculo de radio 5 centímetros.

7 Averigua el área de la región roja de la figura.



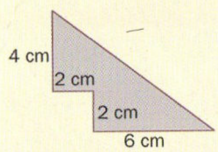
8 El terreno de la figura se vende a razón de 250 euros el metro cuadrado.

¿Cuál es su precio total?

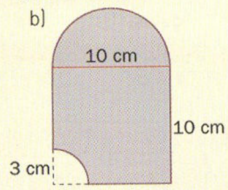


9 Calcula el área de las siguientes figuras.

a)



b)



Más actividades en www.librosvivos.net (Tu libro: 107032)

9 TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRÍAS EN EL PLANO

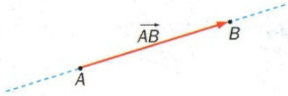
Los rosetones que decoran las vidrieras de muchas catedrales se obtienen al hacer girar repetidamente un mismo motivo alrededor de un punto.

Otros elementos decorativos se consiguen aplicando a un motivo traslaciones o simetrías.

Las traslaciones, giros y simetrías son transformaciones geométricas que permiten obtener figuras tales como los

1. Vectores en el plano

Un **vector** $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado que tiene su **origen** en el punto A y su **extremo** en el punto B.



En $\overrightarrow{AB}$ se pueden considerar los elementos:

Módulo: Es la longitud del segmento AB. Se designa por $|\overrightarrow{AB}|$.

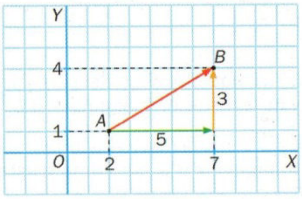
Dirección: Está determinada por la recta que pasa por A y B.

Sentido: Está determinado por su orientación en la recta, de A a B.

En los ejes de coordenadas, un vector queda determinado dando el recorrido horizontal y el vertical, desde el origen hasta el extremo.

El origen del vector $\overrightarrow{AB}$ es $A(2, 1)$ y el extremo $B(7, 4)$.

El recorrido horizontal es: $7 - 2 = 5$, y el vertical: $4 - 1 = 3$.



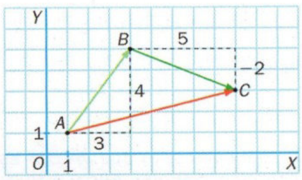
Estos números se llaman **componentes** o **coordenadas** del vector $\overrightarrow{AB}$, y se escribe $\overrightarrow{AB}(5, 3)$.

Los vectores que tienen **igual módulo**, **dirección** y **sentido** se llaman vectores **equipolentes**.

Las **componentes** o **coordenadas** del vector $\overrightarrow{AB}$, determinado por los puntos $\boldsymbol{A(x, y)}$ y $\boldsymbol{B(x', y')}$, son $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}(x' - x, y' - y)}$.

El vector $\overrightarrow{OA}$ que tiene por origen el origen de coordenadas O y por extremo el punto A se llama **vector posición** del punto A.

Ejemplo. *Dado el punto A(1, 1), representa los vectores $\overrightarrow{AB}(3, 4)$, $\overrightarrow{BC}(5, -2)$ y $\overrightarrow{AC}$, y halla las componentes del vector $\overrightarrow{AC}$.*



Observa que:

$(3, 4) + (5, -2) = (3 + 5, 4 - 2) = (8, 2)$

Las componentes de $\overrightarrow{AC}$ son $(8, 2)$.

El vector $\overrightarrow{AC}$ tiene por origen el origen de $\overrightarrow{AB}$, y por extremo, el extremo de $\overrightarrow{BC}$.

El vector $\overrightarrow{AC}$ se dice que es **suma** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

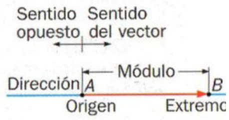
Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AC}$ se obtienen sumando las coordenadas respectivas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

La **suma** de los **vectores** $\overrightarrow{AB}(x, y)$ y $\overrightarrow{BC}(x', y')$ es el vector $\overrightarrow{AC}(x + x', y + y')$.

$$\boldsymbol{(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')}$$

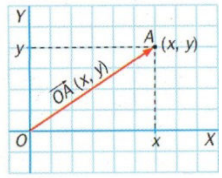
Ten en cuenta

Estos son los elementos de un vector.



Ten en cuenta

Las coordenadas del vector de posición de un punto coinciden con las coordenadas del punto.



Punto:

$A(x, y)$

Vector posición:

$\overrightarrow{OA} = (x - 0, y - 0) = (x, y)$

Ejercicios propuestos

1. Dibuja un paralelogramo y razona qué pares de vectores determinados por los vértices son equipolentes.

2. Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(1, 1)$, $B(6, 1)$ y $C(4, 5)$. Halla las coordenadas

3. Se sabe que las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son $(2, -3)$. Determina las coordenadas del extremo $B(x, y)$ si el origen es $A(3, 2)$.

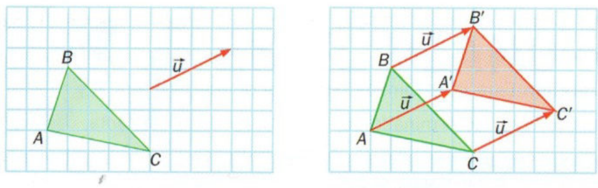
4. Representa los vectores $\overrightarrow{AB}(5, 6)$ y $\overrightarrow{BC}(3, 1)$ y

2. TRASLACIÓN EN EL PLANO

TEN EN CUENTA

- En el plano no existe ningún punto que sea **invariante** bajo una traslación de vector guía no nulo. Esto significa que el punto trasladado nunca coincide con el punto original.
- Las rectas paralelas a la dirección del vector de traslación son invariantes bajo la traslación.

Ejemplo. *Dibuja tres vectores equipolentes al vector $\vec{u}$ que tengan su origen en los vértices del triángulo ABC. ¿Qué figura forman sus extremos?*



El triángulo *ABC* se desplaza según el «camino» indicado por el vector $\vec{u}$ y se obtiene el triángulo *A'B'C'*.

Esta transformación geométrica que permite pasar del triángulo *ABC* al triángulo *A'B'C'* se llama **traslación**.

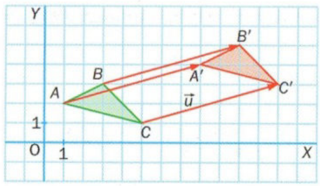
El vector $\vec{u}$ se llama **vector de traslación** o también **vector guía**.

Una **traslación** de vector guía $\vec{u}$ transforma un punto ***P*** del plano en otro ***P'***, de modo que los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PP'}$ son equipolentes.

Se cumple: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{u}$

Ejemplo. *Traslada el triángulo de vértices A(1, 2), B(3, 3) y C(5, 1) según el vector $\vec{u}$(7, 2).*

Representamos el triángulo en unos ejes de coordenadas.



$\overrightarrow{OA} + \vec{u} = (1, 2) + (7, 2) = (8, 4) = \overrightarrow{OA'}$

$\overrightarrow{OB} + \vec{u} = (3, 3) + (7, 2) = (10, 5) = \overrightarrow{OB'}$

$\overrightarrow{OC} + \vec{u} = (5, 1) + (7, 2) = (12, 3) = \overrightarrow{OC'}$

En la traslación, los segmentos *AB* y *A'B'* son iguales, ya que *AA'B'B* es un paralelogramo. Por tanto, también lo son los triángulos *ABC* y *A'B'C'*, ya que los tres lados son iguales.

Para **trasladar una figura** se trasladan los puntos que la determinan.

EJERCICIOS PROPUESTOS

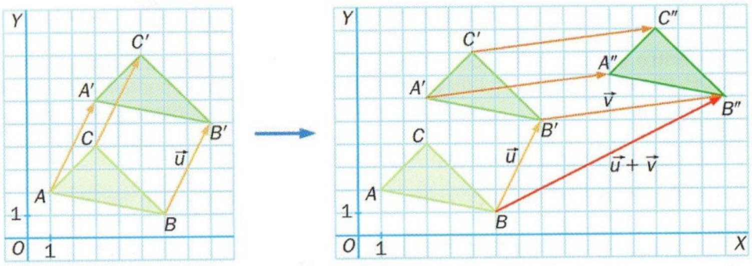
5 Las coordenadas de los vértices de un triángulo son *A*(1, 1), *B*(5, 3) y *C*(3, 4).

a) Representa el triángulo.

7 Halla las coordenadas del punto *P*(*x*, *y*) si su trasladado según el vector $\vec{u}$(6, 5) tiene por coordenadas (10,10).

Ejemplo. *Los vértices de un triángulo son A(1, 2), B(6, 1) y C(3, 4). Se aplica sucesivamente al triángulo las traslaciones de vectores $\vec{u}(2, 4)$ y $\vec{v}(8, 1)$. ¿Qué triángulo se obtiene?*

Representamos el triángulo *ABC*, aplicamos la traslación de vector guía $\vec{u}$, y, luego, la de vector guía $\vec{v}$.



$\overrightarrow{OA} + \vec{u} = (1, 2) + (2, 4) = (3, 6) = \overrightarrow{OA'}$ $\quad \overrightarrow{OA'} + \vec{v} = (3, 6) + (8, 1) = (11, 7) = \overrightarrow{OA''}$

$\overrightarrow{OB} + \vec{u} = (6, 1) + (2, 4) = (8, 5) = \overrightarrow{OB'}$ $\quad \overrightarrow{OB'} + \vec{v} = (8, 5) + (8, 1) = (16, 6) = \overrightarrow{OB''}$

$\overrightarrow{OC} + \vec{u} = (3, 4) + (2, 4) = (5, 8) = \overrightarrow{OC'}$ $\quad \overrightarrow{OC'} + \vec{v} = (5, 8) + (8, 1) = (13, 9) = \overrightarrow{OC''}$

Se obtiene el triángulo de vértices *A''*(11, 7), *B''*(16, 6) y *C''*(13, 9).

El mismo resultado se obtiene sumando previamente las coordenadas de los vectores de traslación y luego aplicando la traslación de vector guía $\vec{u} + \vec{v}$. En este caso: $\vec{u} + \vec{v} = (2, 4) + (8, 1) = (10, 5)$

La **aplicación sucesiva de dos traslaciones** de vectores guías $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **es otra traslación** de vector guía $\vec{u} + \vec{v}$.

La aplicación sucesiva de traslaciones se llama también **producto** de traslaciones.

EJERCICIO RESUELTO

1. El producto de dos traslaciones de vectores guía $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tiene por vector guía $\vec{w}(5, 7)$. Si $\vec{u}(3, 1)$, ¿cuál es el vector $\vec{v}$?

El vector pedido es: $\vec{v}(x, y)$
Se debe cumplir: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$
Sustituyendo los vectores por sus coordenadas: $(3, 1) + (x, y) = (5, 7)$
Por tanto, $x = 2$ e $y = 6$. El vector es: $\vec{v}(2, 6)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

9 Se aplica al punto *P* una traslación de vector $\vec{u}(2, 3)$ y, a continuación, otra de vector $\vec{v}(3, 5)$ y se llega al punto *Q*(10, 12).

a) ¿Cuál es el vector de la traslación sucesiva?

b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto *P*?

10 El producto de dos traslaciones tiene por vector guía $\vec{w}(7, 10)$.

Si una de ellas tiene como vector guía $\vec{u}(2, 3)$, ¿cuál es el vector guía de la otra traslación?

11 El triángulo *ABC* tiene por coordenadas de los vértices *A*(3, 5), *B*(5, 7) y *C*(5, 2).

Calcula las coordenadas del triángulo obtenido mediante las traslaciones sucesivas de los vectores guías $\vec{u}(6, 2)$ y $\vec{v}(7, -2)$.

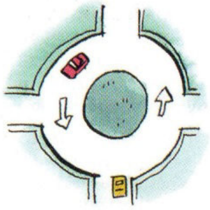
12 Dibuja en unos ejes de coordenadas una circunferencia de centro *O*(0, 0) y radio 3 unidades.

Traslada sucesivamente la circunferencia según los vectores $\vec{u}(3, 0)$, $\vec{v}(-3, 0)$, $\vec{w}(0, 3)$ y $\vec{z}(0, -3)$.

4. GIROS EN EL PLANO

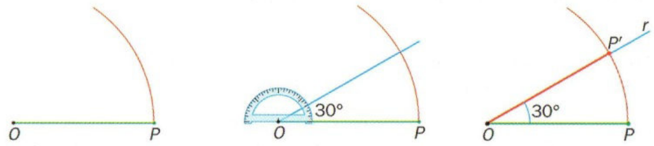
TEN EN CUENTA

Los ángulos tienen sentido.



El sentido de giro es positivo si coincide con el sentido de giro de una rotonda de circulación y negativo en caso contrario.

Ejemplo. *Gira 30° el segmento OP manteniendo fijo el punto O.*



Con centro en O y radio OP, trazamos un arco mayor de 30°.

Con origen en OP y sentido positivo marcamos un arco de 30°.

La recta r corta al arco en el punto P'. OP' es el segmento girado de OP.

De la construcción deducimos: $POP' = 30°$, $OP = OP'$.

El punto P' es el transformado del punto P en un **giro** de centro O y ángulo de giro 30°.

Para determinar un giro, necesitamos conocer un punto, el **centro de giro**, y el ángulo de giro o **amplitud**.

El punto P' se llama **homólogo** de P.

Un **giro** de **centro O** y **ángulo α** transforma un punto P del plano en otro P' del mismo plano tal que: $OP = OP'$ y $\alpha = POP'$

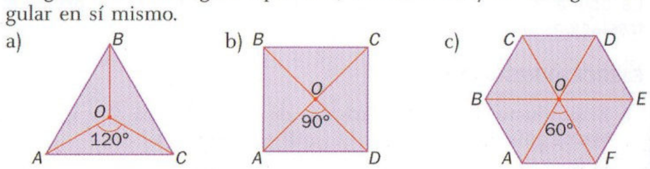
Girar una figura es girar cada uno de sus puntos. En la práctica, solo es necesario girar los puntos que la determinan.

TEN EN CUENTA

En el plano, el único punto **invariante** bajo un giro de centro O y ángulo α ($\alpha < 360°$) es el propio punto O, el centro de giro.

EJERCICIO RESUELTO

2. Indica en cada figura el centro y los ángulos de giro que transforman la figura en un triángulo equilátero, un cuadrado y un hexágono regular en sí mismo.



a) Centro de giro O. Ángulos de giro: 120°, 240°, 360° y sus opuestos.
b) Centro de giro O. Ángulos de giro: 90°, 180°, 270°, 360° y sus opuestos.
c) Centro de giro O. Ángulos de giro: 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360° y sus opuestos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

13 En una rotonda convergen cuatro calles perpendiculares. ¿Qué ángulos de giro pueden realizar los coches que entran en la rotonda y salen por las calles posibles, sin cometer infracciones?

14 Dibuja unos ejes de coordenadas en un papel cuadriculado y señala el punto $P(4, 3)$.

¿Cuáles son las coordenadas del punto P' que se obtiene al girar 180° el punto P tomando como cen-

15 Dibuja unos ejes de coordenadas en un papel cuadriculado y señala el punto $P(5, 4)$.

¿Cuáles son las coordenadas del punto P' que se obtiene al girar 90° el punto P tomando como centro de giro el origen de coordenadas?

16 Dibuja un octógono regular.

¿Cuáles son los giros posibles que transforman el

5. Giros sucesivos

Ejemplo. *Aplica al punto P un giro de centro O y ángulo 30°, y luego al punto obtenido P′ otro giro del mismo centro y amplitud 40°.*

Con centro en el punto *O*, giramos el punto *P* un ángulo de 30° y obtenemos el punto *P′*.

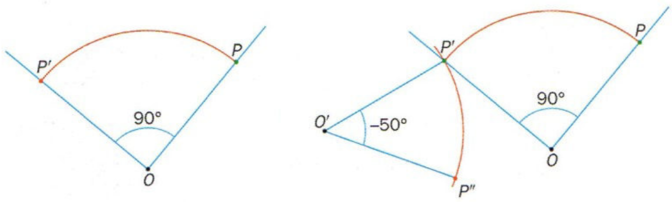
A continuación, con el mismo centro *O*, giramos el punto *P′* un ángulo de 40° y obtenemos el punto *P″*.

Esta aplicación sucesiva de giros del mismo centro es equivalente a un giro de centro *O* y ángulo de giro igual a la suma de ángulos, es decir, 70°.

La **aplicación sucesiva de giros** de centro *O* y amplitudes α y β es **otro giro** de centro *O* y amplitud $\alpha + \beta$.

La aplicación sucesiva de dos giros se llama también **producto** de giros.

Ejemplo. *Aplica al punto P un giro de centro O y ángulo 90°, y luego al punto obtenido P′ otro giro de centro O′ y amplitud −50°.*



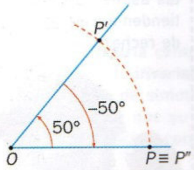
Con centro en el punto *O*, giramos el punto *P* un ángulo de 90° y obtenemos el punto *P′*.

A continuación, con centro en el punto *O′*, giramos el punto *P′* un ángulo de −50° y obtenemos el punto *P″*.

Al realizar estos giros en orden contrario, se comprueba que **el producto de giros de distinto centro no es conmutativo**, ya que no se obtiene el mismo resultado.

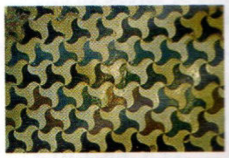
Ten en cuenta

Si los ángulos de giro fueran 50° y −50°, el ángulo de giro final sería 0°.



Esta operación equivaldría a un giro nulo.

Sabías que...



Este mosaico de la Alhambra de Granada está basado en los giros sucesivos de un mismo motivo: la *pajarita*.

Ejercicios propuestos

17 Dibuja un triángulo equilátero *ABC*. Con centro *A* gira el triángulo un ángulo de 60°. Si repites este proceso con los triángulos que vas obteniendo, ¿qué figura resulta cuando vuelves a la dada?

18 Dibuja un cuadrado *ABCD*. Con centro *A* gira el cuadrado un ángulo de 90°. Si repites este proceso con los cuadrados que vas obteniendo, ¿qué figura resulta cuando vuelves a la original?

19 A una figura se le aplica un giro de centro *O* y amplitud 200° y, a continuación, un nuevo giro del mismo centro y ángulo α. ¿Qué valor positivo debe tener α para que la figura vuelva a su primera posición?

20 Dibuja un triángulo equilátero *ABC*. Con centro *A* gira el triángulo un ángulo de 180°. Después aplica al triángulo obtenido *AB′C′* un giro de centro *B* y amplitud −180°.

SABÍAS QUE...

Las estadísticas confirman que resultan más atractivos los rostros simétricos, mientras que las asimetrías muy marcadas tienden a asociarse con signos de rechazo.

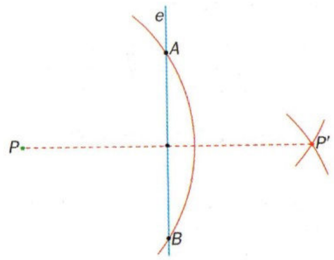
La preferencia por la simetría se ha visto reflejada en las artes de todos los pueblos, como se aprecia en esta escultura inca.

Ejemplo. *Dibuja con regla y compás el punto simétrico de un punto P respecto de una recta e.*

Con centro en *P* y radio suficiente para que corte al eje de simetría se obtienen los puntos de intersección *A* y *B*.

Sin variar el radio, y con centro en *A* y *B*, se obtiene *P'*.

El cuadrilátero *PAP'B* es un rombo, ya que los lados son iguales, luego las diagonales se cortan en el punto medio. Por tanto, la recta *e* es mediatriz de *PP'*.



La recta *e* se llama **eje de simetría** y es la mediatriz de los segmentos determinados por los puntos homólogos *P* y *P'*.

Dos puntos ***P*** y ***P'*** son **simétricos** respecto de un eje ***e***, cuando el eje *e* es **mediatriz** del segmento *PP'*.

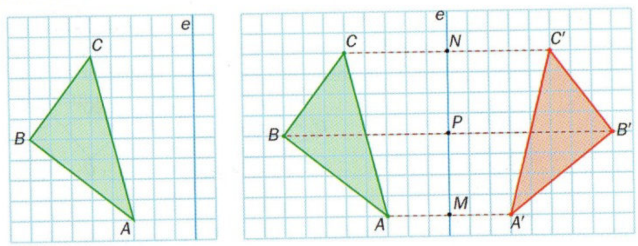
La simetría respecto de un eje se llama **simetría axial**.

TEN EN CUENTA

- Los puntos del eje de simetría axial son los únicos **invariantes** bajo dicha simetría. Esto significa que cada punto del eje coincide con su simétrico.
- Las rectas perpendiculares al eje de simetría son también invariantes bajo una simetría axial.

EJERCICIO RESUELTO

3. Dibuja la figura simétrica de un triángulo *ABC* respecto de una recta exterior *e*.



Para dibujar la figura simétrica de *ABC* respecto a la recta *e*, es necesario encontrar los puntos simétricos de cada vértice.

Buscamos el punto simétrico del punto *A*:

– Trazamos la recta *AM* perpendicular a la recta *e*.

– En la recta *AM* se dibuja un punto *A'* tal que la distancia de *A* a *M* sea igual a la distancia de *M* a *A'*.

El punto simétrico de *A* respecto del eje *e* es *A'*.

De igual forma, se obtienen los puntos *B'* y *C'*, simétricos de *B* y *C*.

Los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son simétricos respecto del eje *e*.

EJERCICIOS PROPUESTOS

21 Dos puntos *A* y *A'* son simétricos respecto de un eje *e*. Dibuja el eje.

22 Dibuja un rectángulo *ABCD*. Construye con regla y compás el eje de simetría que transforma *A* y *B* en *D* y *C*, respectivamente.

23 Dibuja un hexágono regular. Construye con regla y compás un eje de simetría de sus vértices.

24 Dibuja un pentágono regular. Construye con regla y compás sus ejes de simetría.

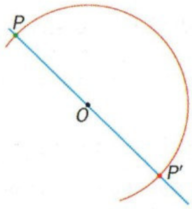
7. SIMETRÍA CENTRAL: DEFINICIÓN

Ejemplo. *Dibuja con regla y compás el punto simétrico del punto P respecto del centro O.*

Se traza la recta *PO*.

Con centro en *O* y radio *OP*, se traza un arco que corta a la recta en *P* y en *P'*.

El punto de intersección *P'* es el punto simétrico de *P*.



El punto *O* se llama **centro de simetría** y es el punto medio del segmento determinado por los puntos homólogos.

Dos puntos ***P*** y ***P'*** son **simétricos** respecto de un punto ***O*** cuando *O* es el **punto medio** del segmento ***PP'***.

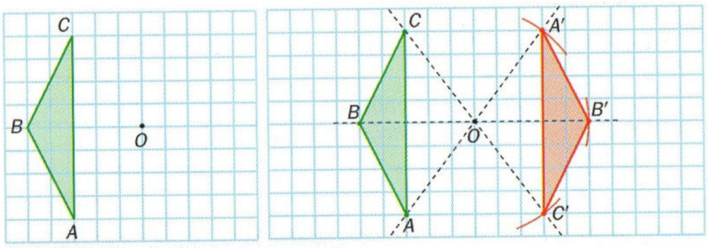
La simetría respecto de un punto se llama **simetría central**.

TEN EN CUENTA

- En una simetría centra el único punto **invariant** es el centro de simetrí Esto significa que su s métrico coincide con mismo.
- Las rectas que pasan p el centro de simetría tan bién son invariantes ba simetría central.

EJERCICIO RESUELTO

4. Dibuja la figura simétrica del triángulo *ABC* respecto del punto *O*.



Para dibujar la figura simétrica, es necesario encontrar los puntos simétricos de los vértices.

Buscamos el punto simétrico de *A*:

- Se traza la recta *AO*.
- Con centro en *O*, se traza la circunferencia de radio *OA*. Su intersección con la recta *OA* es el punto *A'*, simétrico de *A* respecto a *O*.

El punto *O* es punto medio de *AA'*.

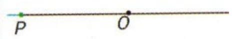
De igual forma, se obtienen los puntos *B'* y *C'*, simétricos de *B* y *C*.

Uniendo los puntos *A'*, *B'* y *C'* se obtiene el triángulo *A'B'C'*.

Los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son simétricos respecto del punto *O*.

TEN EN CUENTA

Si *P* y *P'* son simétricos re pecto de un punto *O*, e tonces las distancias de *C* *P* y a *P'* son iguales.



EJERCICIOS PROPUESTOS

25 Dibuja dos puntos cualesquiera *A* y *A'*, y encuentra su centro de simetría.

26 Dibuja un triángulo *ABC*, y su simétrico *A'B'C'* respecto de un punto *P*. ¿Tienen el mismo sentido de giro según el orden de los vértices?

27 Comprueba si los vértices son simétricos respecto del punto donde se cortan sus diagonales:

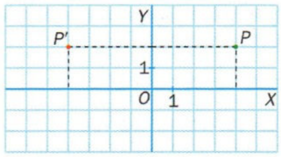
a) En un cuadrado.
b) En un pentágono.
c) En un hexágono.

8. Simetrías y coordenadas

Los puntos de la figura son simétricos respecto al eje OY.

Observa la relación que hay entre las coordenadas.

$P(4, 2)$ $P'(-4, 2)$



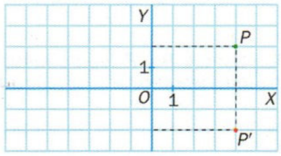
Dos puntos, $P(x, y)$ y $P'(x', y')$, son **simétricos respecto del eje OY** si sus **abscisas son opuestas** y sus **ordenadas son iguales**.

$$x' = -x \qquad y' = y$$

Los puntos de la figura son simétricos respecto al eje OX.

Observa la relación que hay entre las coordenadas.

$P(4, 2)$ $P'(4, -2)$



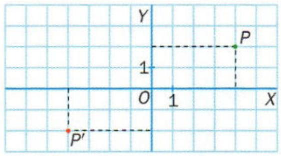
Dos puntos, $P(x, y)$ y $P'(x', y')$, son **simétricos respecto del eje OX** si sus **abscisas son iguales** y sus **ordenadas son opuestas**.

$$x' = x \qquad y' = -y$$

Los puntos de la figura son simétricos respecto del origen.

Observa la relación que hay entre las coordenadas.

$P(4, 2)$ $P'(-4, -2)$



Dos puntos, $P(x, y)$ y $P'(x', y')$, son **simétricos respecto del origen** si sus **abscisas** y sus **ordenadas son opuestas**.

$$x' = -x \qquad y' = -y$$

EJERCICIO RESUELTO

5. Dado el triángulo de coordenadas $A(3, -2)$, $B(0, 1)$ y $C(2, 4)$, halla las coordenadas del triangulo simétrico en una simetría respecto del:

a) Eje OY. b) Eje OX. c) Origen.

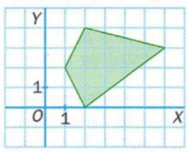
a) $A'(-3, -2)$; $B'(0, 1)$; $C'(-2, 4)$
b) $A'(3, 2)$; $B'(0, -1)$; $C'(2, -4)$
c) $A'(-3, 2)$; $B'(0, -1)$; $C'(-2, -4)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

28 Halla las coordenadas del punto simétrico a $P(-3, 5)$ respecto del eje OX, del eje OY y del origen.

29 Dado el cuadrilátero de vértices
$A(2, 4)$ $B(-3, 5)$ $C(-3, -1)$ $D(3, -2)$
halla las coordenadas de su simétrico respecto del eje OX, del eje OY y del origen.

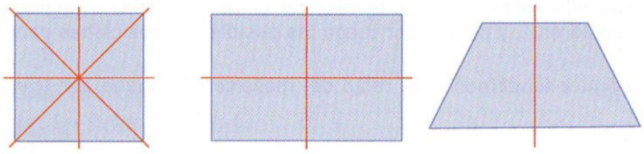
30 Determina las coordenadas de la figura simétrica de esta figura respecto del eje OX, del eje OY y del origen.



9. Ejes y centro de simetría en las figuras

Ejemplo. *¿Cuántos ejes de simetría tienen un cuadrado, un rectángulo y un trapecio isósceles?*

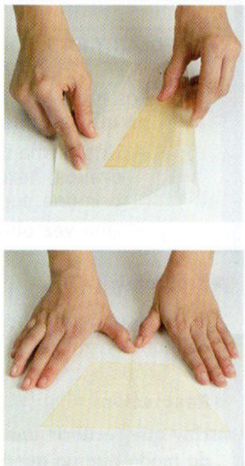
Si dibujamos cada figura en un papel y lo doblamos de modo que coincidan las dos partes de la figura, entonces la doblez es un eje de simetría.



El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, las dos diagonales y las dos rectas determinadas por los puntos medios de los lados.

El rectángulo tiene dos ejes de simetría, las dos rectas determinadas por los puntos medios de los lados paralelos.

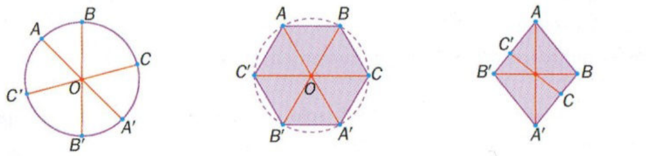
El trapecio isósceles tiene un eje de simetría, la recta que une los puntos medios de los lados paralelos.



Observa el proceso de obtención del eje de simetría de un trapecio isósceles.

Una figura tiene un **eje de simetría** si todo punto de la misma tiene su simétrico respecto al eje en la **misma figura**.

Ejemplo. *¿Dónde tienen el centro de simetría las siguientes figuras?*



En una circunferencia su centro es el centro de simetría de la figura.

El centro de simetría de un hexágono regular es el centro de la circunferencia circunscrita.

El rombo tiene como centro de simetría el punto donde se cortan las diagonales.

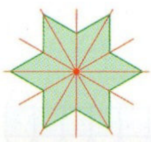
Una figura tiene un **centro de simetría** si todo punto de la misma tiene su simétrico respecto del centro en la **misma figura.**

EJERCICIO RESUELTO

6. Traza los ejes y centro de simetría de la estrella.

Los ejes de simetría son las rectas que pasan por vértices opuestos.

El centro de simetría es el punto de corte de las rectas anteriores.



EJERCICIOS PROPUESTOS

31 En un triángulo isósceles, ¿cuál de las tres alturas es eje de simetría? Razona la respuesta.

33 Traza, si los tiene, los ejes y el centro de simetría de un heptágono.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MANIPULAR Y EXPERIMENTAR MANUALMENTE

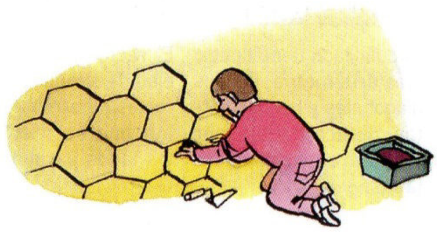
Los mosaicos son una forma de recubrir superficies planas con polígonos, de tal modo que no queden huecos entre ellos ni se superpongan.

— Una forma de construir diferentes mosaicos es recortar en una cartulina triángulos, cuadrados, hexágonos regulares..., y comprobar luego las posibles disposiciones para recubrir una superficie.

— Una vez obtenida la figura fundamental el resto del mosaico se obtiene por traslación.

Problema

Recubre una superficie con un mosaico formado por polígonos regulares.



Resolución

Hay que recubrir una superficie con polígonos regulares de modo que no queden huecos ni se solapen las figuras.

Construimos un modelo

Recortamos polígonos regulares en una cartulina y probamos distintas posibilidades de recubrir el plano.

Sacamos conclusiones

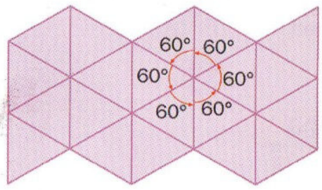
Nuestra construcción debe cumplir dos condiciones:

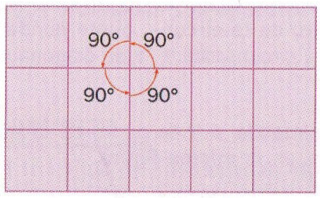
a) Que los lados de los polígonos midan lo mismo.

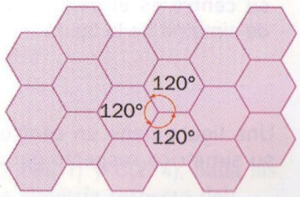
b) Que la suma de los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice sea 360°.

Como la suma de los ángulos en cada vértice ha de ser 360°, solo es posible combinar cinco tipos de polígonos regulares: triángulos, cuadrados, hexágonos, octógonos y dodecágonos.

Solo hay tres tipos posibles de mosaicos basados en un solo polígono regular.

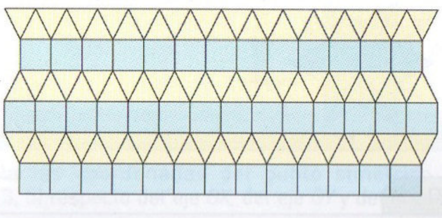


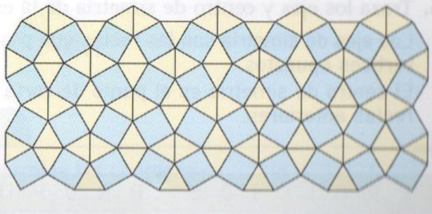




Si se utiliza más de un polígono regular, solo son posibles ocho tipos de mosaicos.

Así, con triángulos equiláteros y cuadrados de igual lado, las dos posibilidades son:

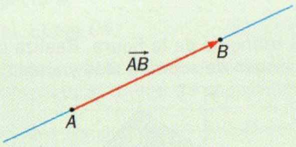




PROBLEMAS PROPUESTOS

VECTORES Y TRASLACIONES

Vectores



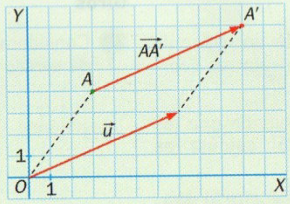
Módulo: Longitud $|AB|$.

Dirección: Recta que pasa por *A* y *B*.

Sentido: El que va de *A* a *B*.

Los vectores **equipolentes** tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

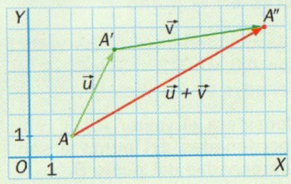
Traslaciones



$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + \vec{u}$

A' es el trasladado del punto *A*, según el vector guía $\vec{u}$.

Traslaciones sucesivas



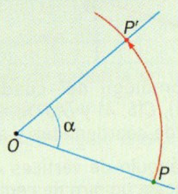
$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{OA'} + \vec{v} = (\overrightarrow{OA} + \vec{u}) + \vec{v}$

$= \overrightarrow{OA} + (\vec{u} + \vec{v})$

A'' es el traslado del punto *A*, según el vector guía $\vec{u} + \vec{v}$.

GIROS

Giro



Giro de centro *O* y ángulo α:

$OP = OP'$

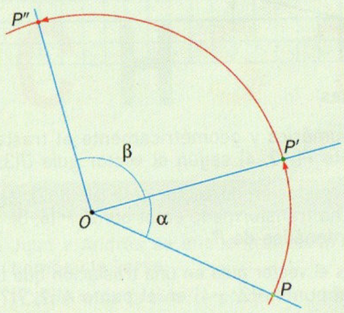
$\alpha = POP'$

P' es el transformado de *P*, según el giro de centro *O* y ángulo α.

Si $\alpha > 0$, el sentido de giro es positivo.

Si $\alpha < 0$, el sentido de giro es negativo.

Giros sucesivos

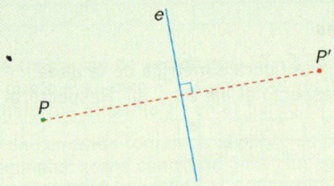


Giros del mismo centro *O* y ángulos α y β.

P'' es el transformado de *P*, según el giro de centro *O* y ángulo $(\alpha + \beta)$.

SIMETRÍAS

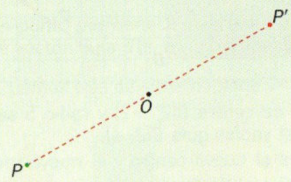
Simetría axial



Eje de simetría: *e*

P y *P'* son simétricos respecto al eje *e*, si la recta ***e*** es **mediatriz** del segmento *PP'*.

Simetría central



Centro de simetría: *O*

P y *P'* son simétricos respecto al centro *O*, si el punto ***O*** es el **punto medio** del segmento *PP'*.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Vectores en el plano

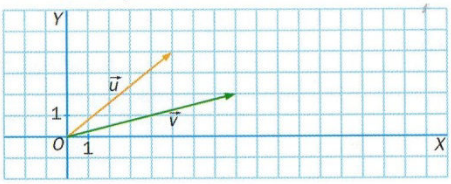
37 Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(0, 4)$, $B(2, -3)$ y $C(-2, 7)$. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.

38 Considera el vector $\overrightarrow{AB}(3, -5)$. Sabiendo que las coordenadas del punto A son $(1, 5)$, calcula las coordenadas del punto B.

39 Dados los vectores $\vec{u}(-1, 2)$, $\vec{v}(2, 4)$ y $\vec{w}(0, 5)$, realiza estas operaciones.

a) $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$
b) $\vec{u} - (\vec{w} + \vec{w})$
c) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
d) $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})$

40 Calcula la suma numérica y geométrica de los vectores del dibujo.



Traslaciones

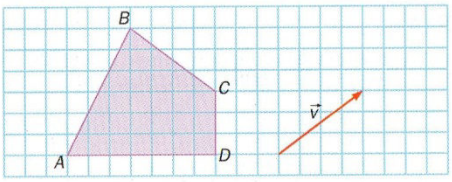
41 Halla numérica y geométricamente el trasladado del punto $P(-2, 4)$ según el vector guía $\vec{u}(3, -2)$.

42 En una traslación de vector guía $\vec{u}(-3, 2)$, el punto P se ha transformado en el punto $P'(6, 3)$. Halla las coordenadas de P.

43 ¿Cuál es el vector guía en una traslación que transforma el punto $A(2, -4)$ en el punto $A'(7, 7)$?

44 En una traslación de vector guía $\vec{u}(-4, 3)$, halla las coordenadas de los transformados de los vértices del triángulo ABC, siendo $A(0, -2)$, $B(1, 3)$ y $C(2, 4)$.

45 Dibuja la figura trasladada de la dada, según el vector guía $\vec{v}$.



46 Un círculo de centro $O(2, -2)$ y radio 5 se traslada según el vector guía $\vec{u}(3, 4)$.

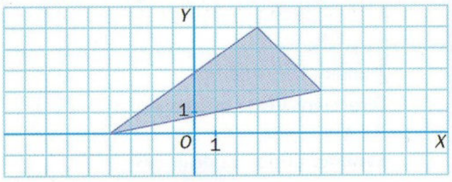
a) ¿Cuál es el nuevo centro y el nuevo radio?
b) Dibuja el círculo trasladado.

47 Considera el punto $P(2, 5)$. Aplícale sucesivamente las traslaciones de vectores guía $\vec{u}(-1, 5)$ y $\vec{v}(3, -2)$.

a) ¿Cuál es el punto trasladado?
b) ¿Cuál es el vector guía resultante?

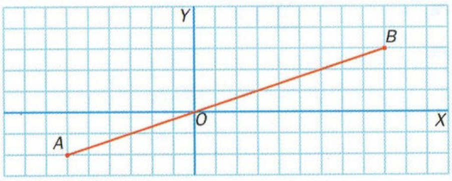
Giros

48 Considera el triángulo de la figura. Realiza un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 90°.



49 Dibuja el transformado del segmento AB mediante un giro de centro O y amplitud:

a) 30°
b) −30°

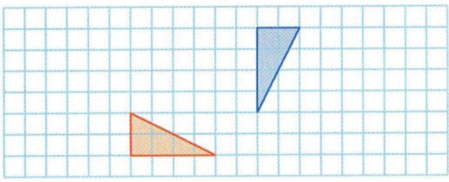


50 Dibuja el homólogo del cuadrado de vértices $A(3, 1)$, $B(6, 1)$, $C(6, 4)$ y $D(3, 4)$ en un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 180°.

51 Dibuja un triángulo de vértices $A(-3, 4)$, $B(1, -1)$ y $C(6, 0)$ y aplícale un giro de centro el origen y amplitud −90°. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del nuevo triángulo?

52 Los puntos $A(4, 3)$ y $B(-3, 4)$ son homólogos en un giro de centro el origen de coordenadas. ¿Cuál es la amplitud del giro?

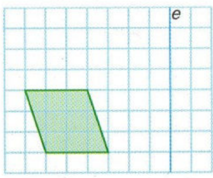
53 Encuentra el centro y la amplitud del giro que transforma la figura roja en su homóloga azul.

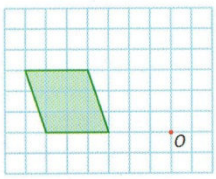


Simetrías

54 Dibuja la figura simétrica de la dada:

a) Respecto al eje e.
b) Respecto al punto O.





55 Construye el punto simétrico del punto $A(5, 2)$ respecto a:

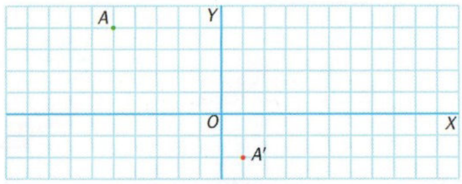
a) El eje OX. b) El eje OY.

56 Construye el punto simétrico del punto $A(-1, 4)$ respecto al origen de coordenadas.

57 Dados los puntos A y A' del dibujo, construye:

a) Su eje de simetría.

b) Su centro de simetría.



58 Calcula las coordenadas del simétrico del triángulo de vértices $A(1, 0)$, $B(3, -2)$ y $C(1, -4)$.

a) Respecto al eje OX.

b) Respecto al eje OY.

59 Señala un eje de simetría en un:

a) Pentágono regular.

b) Triángulo rectángulo isósceles.

60 Calcula las coordenadas de los puntos simétricos de los extremos del segmento AB, donde $A(-3, 2)$ y $B(2, 1)$.

a) Respecto al eje OX.

b) Respecto al eje OY.

c) Respecto al origen de coordenadas.

d) Dibuja los apartados anteriores.

61 Determina los ejes de simetría, si los tienen, de las siguientes letras.

A B G K N

62 Encuentra los centros de simetría, si los tienen, de las siguientes letras.

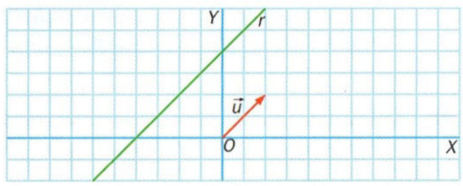
C H S T Z

CUESTIONES PARA ACLARARSE

63 ¿Cuántos vectores determinan dos puntos? ¿Qué relación existe entre dichos vectores?

64 Una traslación lleva el origen de coordenadas al punto $P(5, 3)$. ¿Cuál es su vector guía?

65 ¿En qué recta se transforma una recta paralela al vector guía de una traslación?



66 Una traslación de vector guía $\vec{u}(-2, 5)$ transforma un punto P en otro P'. ¿Cuál es el vector guía que transforma el punto P' en el punto P?

67 En un cuadrado tomamos el punto de corte de sus diagonales como centro de giro. ¿En qué figura se transforma el cuadrado si aplicamos un giro de amplitud 90°? ¿Y de 180°? ¿Y de 270°?

68 ¿En qué figura se transforma un círculo al que se le aplica un giro de centro el centro del círculo y de amplitud un ángulo α cualquiera?

69 Juan y Andrés se encuentran después de mucho tiempo sin verse:

¿Cómo te va la vida? —pregunta Juan.

¡Muy diferente! —le contesta Andrés—. *Mi vida ha dado un giro de trescientos sesenta grados.*

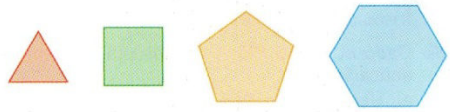
¿Qué error matemático encuentras en la contestación de Andrés?

70 ¿En qué se transforma por una simetría axial una recta perpendicular al eje de simetría?

71 ¿Qué puntos permanecen invariantes (no se mueven) por una simetría axial? ¿Y por una central?

72 Un punto permanece invariante por una traslación de vector guía $\vec{u}(a, b)$. ¿Cuánto valen a y b?

73 ¿Cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular?

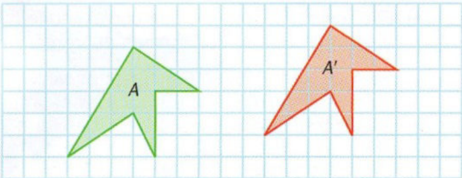


74 En un triángulo rectángulo encontramos un eje de simetría. ¿Qué tipo de triángulo es? ¿Cuál es el eje de simetría?

REFUERZO

Traslaciones

88 ¿Qué traslación transforma la figura A en la figura A'?



89 A un punto $P(2, 6)$ se le aplica una traslación de vector guía $\vec{u}$ y se obtiene su transformado, $P'(3, -5)$. A su vez, a P' se le aplica otra traslación de vector guía $\vec{v}$ y se obtiene $P''(0, -2)$. Averigua cuál es el vector guía que traslada P a P''.

Giros

90 A una figura se le aplica un giro de centro O y amplitud de 200° y, a continuación, un nuevo giro con el mismo centro y amplitud 230°.

Explica cuál es el giro resultante.

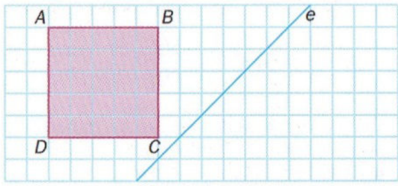
91 Al cuadrilátero de vértices $A(-2, 1)$, $B(2, 2)$, $C(3, 4)$ y $D(0, 4)$ se le aplica un giro de centro A y amplitud 90°. Dibuja la figura resultante y halla las coordenadas de los puntos homólogos a los dados.

92 Halla las coordenadas del transformado del punto $A(1, 4)$ por un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud $-90°$.

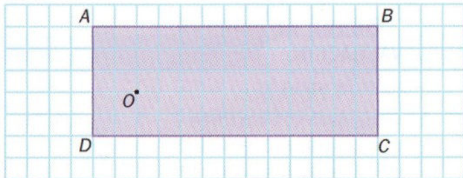
Simetrías

93 Halla las coordenadas del punto simétrico al punto $A(4, 2)$ por una simetría de centro $O(-1, 1)$. Ayúdate de un dibujo para obtener la respuesta.

94 Construye la figura simétrica al cuadrado $ABCD$, respecto del eje e.



95 Construye la figura simétrica al rectángulo $ABCD$, respecto del punto O.

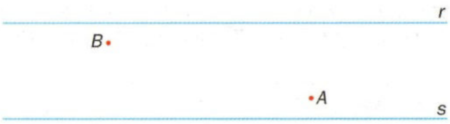


AMPLIACIÓN

96 A un triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(5, -1)$ y $C(4, 3)$ se le ha aplicado un giro de centro $O(9, 3)$, de forma que el punto B se ha transformado en $B'(13, -1)$.

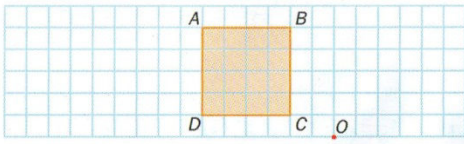
Encuentra el ángulo de giro y los transformados de los puntos A y C. Haz un dibujo para obtener la respuesta.

97 Describe el camino más corto para ir del punto A al punto B, si previamente se debe pasar primero por la recta r y luego por la recta s.

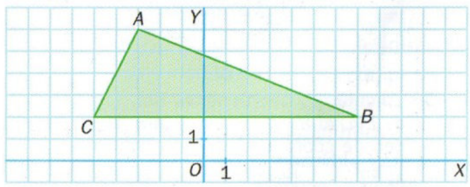


98 ¿Qué movimiento se obtiene si se aplican consecutivamente dos simetrías centrales de distinto centro a una figura? Utiliza un dibujo para resolver el problema.

99 Al cuadrado de la figura se le aplica un giro de centro O y amplitud 90°. Encuentra dos simetrías axiales que, aplicadas sucesivamente al cuadrado, dan el mismo resultado que el giro.



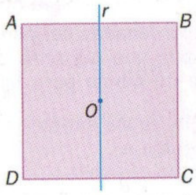
100 En el triángulo ABC se aplica una simetría central de centro M, punto medio de BC. Calcula las coordenadas de los simétricos de los vértices del triángulo dado, $A'B'C'$. ¿Qué figura forman $ABA'C$?



PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

101 Movimientos del cuadrado

El cuadrado de vértices *ABCD* tiene por centro el punto *O*. La recta *r* pasa por *O* y por los puntos medios de los lados *AB* y *DC*.



a) Dibuja el cuadrado después de haberle aplicado el movimiento *G* determinado por el giro de centro *O* y amplitud 90°.

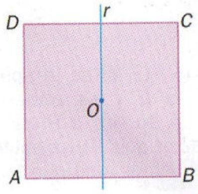
b) Dibuja el cuadrado después de haberle aplicado una simetría, *S*, de eje *r*.

c) Dibuja el cuadrado después de haberle aplicado el movimiento G^3, entendiendo como G^3 el movimiento que resulta de aplicar tres veces consecutivas *G*.

d) Dibuja el cuadrado después de haberle aplicado los movimientos *GS* y SG^3, entendiendo por *GS* el movimiento que resulta de aplicar primero *G* y luego *S*.

e) Escribe el movimiento que corresponde a la siguiente figura de dos formas diferentes.

Solo puedes utilizar *G* y *S* tantas veces como quieras de forma consecutiva y en el orden que consideres adecuado.



f) ¿Crees que la aplicación de estos movimientos es siempre conmutativa? Pon algún ejemplo que justifique tu respuesta.

AUTOEVALUACIÓN

1 Considera los vectores $\vec{u}(-5, 4)$ y $\vec{v}(4, 2)$.

a) Calcula: $\vec{u} - \vec{v}$

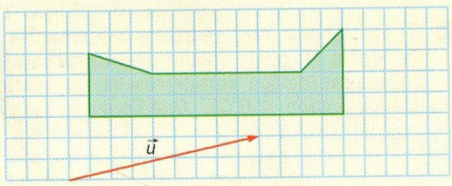
b) Halla: $\vec{u} - (\overline{v + v})$

c) Calcula geométricamente: $\overline{u + v}$

2 Considera el triángulo de vértices $A(0, -3)$, $B(3, 2)$ y $C(-5, 1)$. Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.

3 Determina, numérica y geométricamente, el trasladado del segmento de extremos $P(-2, 3)$ y $Q(5, 4)$, según el vector guía $\vec{u}(2, -3)$.

4 Aplica geométricamente una traslación de vector guía $\vec{u}$ a la figura del dibujo.



5 Calcula las coordenadas del punto homólogo de $P(4, 4)$ al aplicarle un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud:

a) 90° b) 45° c) −90° d) 180°

6 Dado el segmento de extremos $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$, halla las coordenadas de su simétrico respecto a:

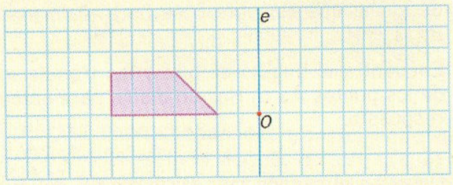
a) El eje *OX*.

b) El eje *OY*.

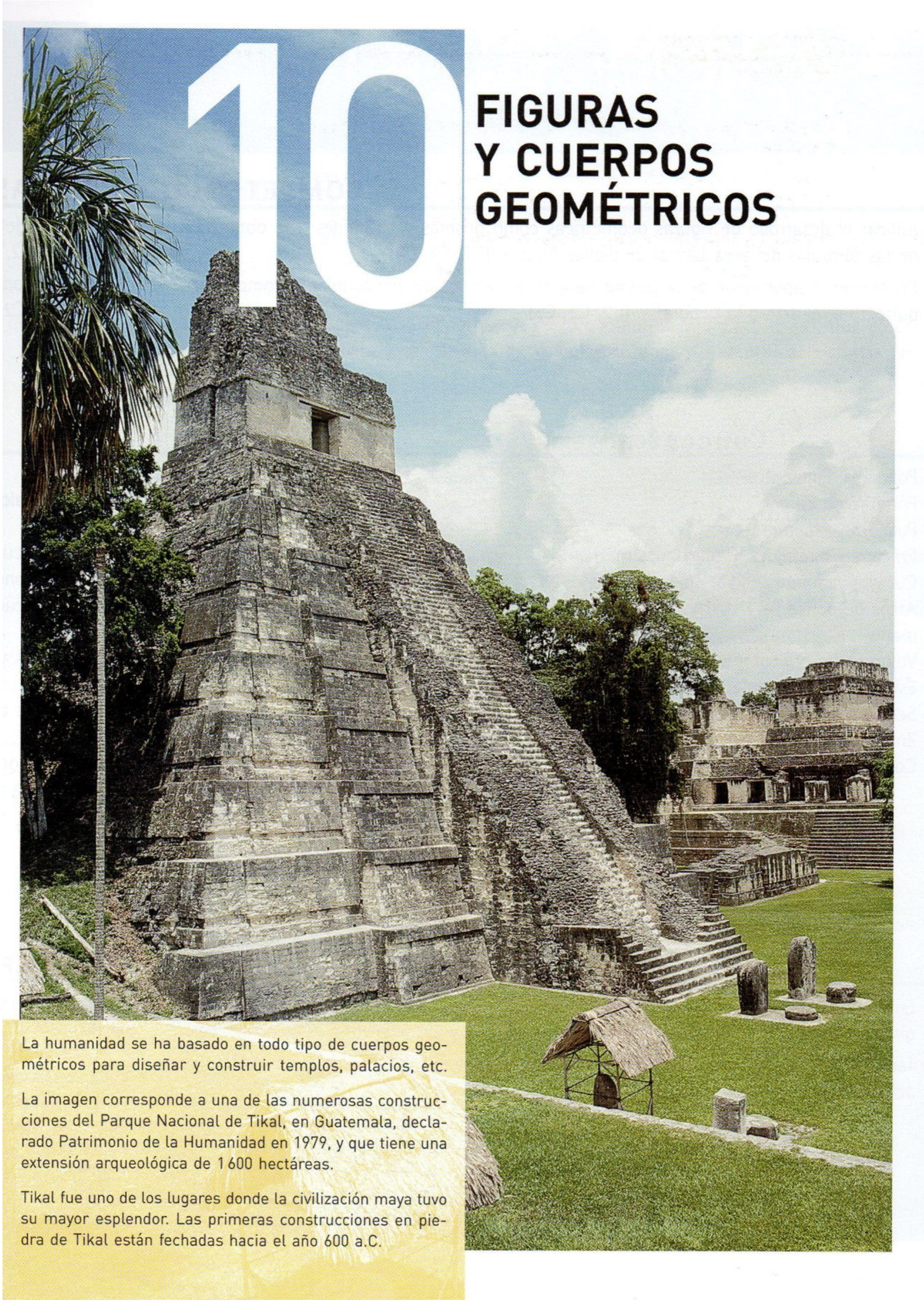
c) El origen de coordenadas.

7 Dibuja la figura simétrica de la dada, respecto a:

a) El eje *e*. b) El punto *O*.



8 Maite está en el punto *A* dando un paseo con su perra y va a iniciar la vuelta a su casa, punto *B*, pero antes quiere pasar por el río para que su perra pueda beber. ¿Cuál es el camino más corto que puede elegir Maite?



10 FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

La humanidad se ha basado en todo tipo de cuerpos geométricos para diseñar y construir templos, palacios, etc.

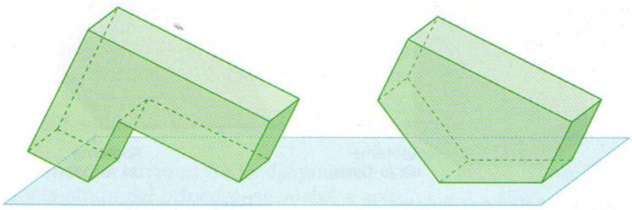
La imagen corresponde a una de las numerosas construcciones del Parque Nacional de Tikal, en Guatemala, declarado Patrimonio de la Humanidad en 1979, y que tiene una extensión arqueológica de 1 600 hectáreas.

Tikal fue uno de los lugares donde la civilización maya tuvo su mayor esplendor. Las primeras construcciones en piedra de Tikal están fechadas hacia el año 600 a.C.

1. Poliedros

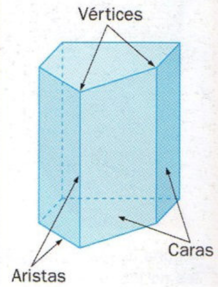
Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos planos.

Observa estos dos poliedros. El primero tiene alguna cara que no se puede apoyar sobre un plano, por lo que decimos que es **cóncavo**, pero el segundo poliedro sí se puede apoyar sobre un plano por cualquiera de sus caras, por lo que decimos que es **convexo**.



Recuerda

Los elementos principales de un poliedro son los siguientes.



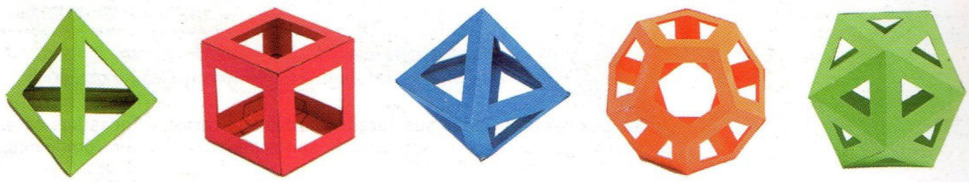
En los polígonos convexos el número de caras (C), vértices (V) y aristas (A) verifican la siguiente relación:

$$C + V = A + 2$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de **fórmula de Euler**.

Poliedros regulares

Si tratamos de unir polígonos regulares iguales, comprobamos que solo son posibles cinco poliedros.

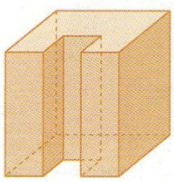


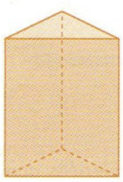
Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
4 triángulos equiláteros	6 cuadrados	8 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros

Un **poliedro regular** es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales, de modo que en cada vértice concurren el mismo número de caras.

Ejercicios propuestos

1 Indica cuál de estos poliedros es cóncavo y cuál es convexo.

a) 

b) 

2 Completa la siguiente tabla.

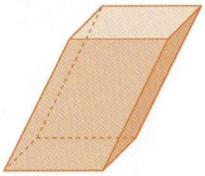
	Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

2. Prismas y pirámides

Ten en cuenta

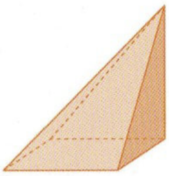
Tanto los prismas como las pirámides pueden ser oblicuos.

Prisma oblicuo



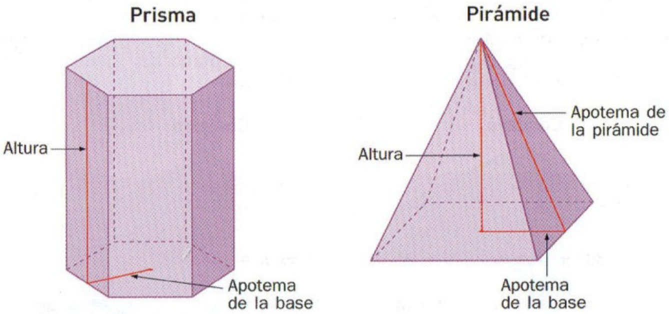
Alguna de las caras laterales no es un rectángulo.

Pirámide oblicua



Alguna de las caras laterales no es un triángulo isósceles.

Los poliedros se clasifican en prismas y pirámides.



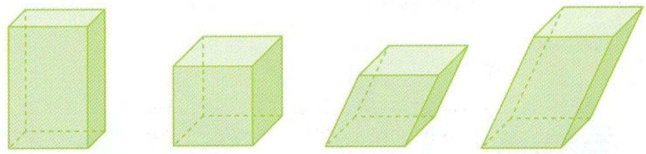
Bases: dos polígonos iguales y paralelos.
Caras laterales: paralelogramos.

Base: un polígono.
Caras laterales: triángulos

En algunos prismas, cualquier cara puede ser su base por ser todas las caras paralelogramos. Estos prismas se llaman **paralelepípedos**.

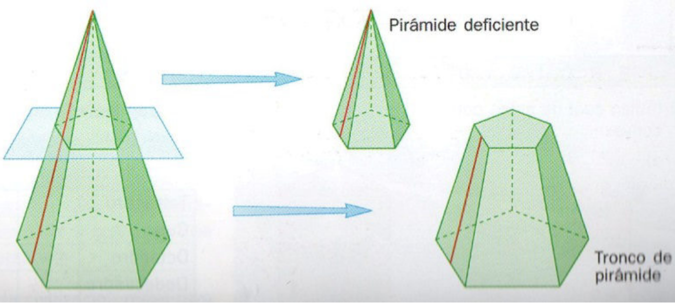
Los paralelepípedos se clasifican en:

Ortoedro	Cubo	Romboedro	Romboidedro
Todas sus caras son rectángulos.	Todas sus caras son cuadrados.	Todas sus caras son rombos.	Todas sus caras son romboides.



Tronco de pirámide

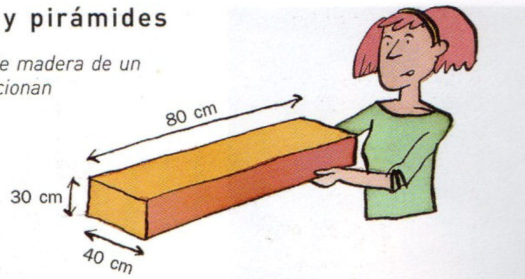
Observa cómo se corta una pirámide por un plano paralelo a la base.



Propiedades métricas de prismas y pirámides

Ejemplo. *María quiere enviar por correo un listón de madera de un metro de longitud. En la oficina de correos le proporcionan una caja como la de la figura.*

¿Le cabe el listón en la caja que le han dado?

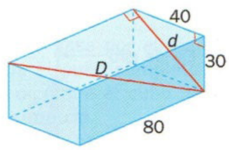


Para averiguarlo, tenemos que calcular la longitud de la diagonal del ortoedro.

Primero aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal de la base.

$$d^2 = 30^2 + 40^2 \Rightarrow d = \sqrt{900 + 1\,600} \Rightarrow d = 50 \text{ cm}$$

Conociendo la longitud de la diagonal de la base y la altura del ortoedro, se vuelve a aplicar el teorema de Pitágoras, para calcular la longitud de la diagonal del ortoedro.



$$D^2 = 50^2 + 80^2 \Rightarrow D = \sqrt{2\,500 + 6\,400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 94{,}34 \text{ cm}$$

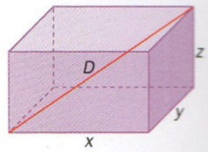
Por tanto, el listón no cabe en la caja.

En un ortoedro, el **cuadrado** de una diagonal es igual a la **suma de los cuadrados** de los valores de sus tres dimensiones.

TEN EN CUENTA

En general en un ortoedro se tiene que

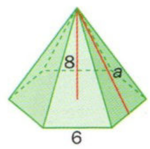
$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

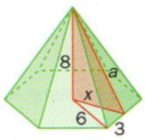


Este resultado se conoce como teorema de Pitágoras en el espacio.

EJERCICIO RESUELTO

1. Aplica el teorema de Pitágoras y halla el elemento desconocido en esta pirámide. Las medidas están dadas en centímetros.





Primero se calcula el apotema de la base.

$$x = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 5{,}20 \text{ cm}$$

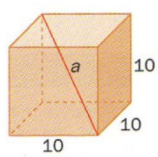
Una vez conocido x se calcula el valor de a.

$$a = \sqrt{8^2 + (5{,}20)^2} = 9{,}54 \text{ cm}$$

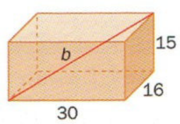
EJERCICIOS PROPUESTOS

3 Halla el elemento desconocido en los siguientes prismas. Las medidas están dadas en centímetros.

a)

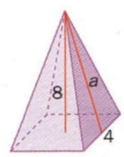


b)

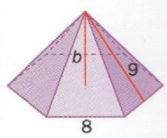


4 Calcula el elemento desconocido en estas pirámides. Las medidas están dadas en centímetros.

a)

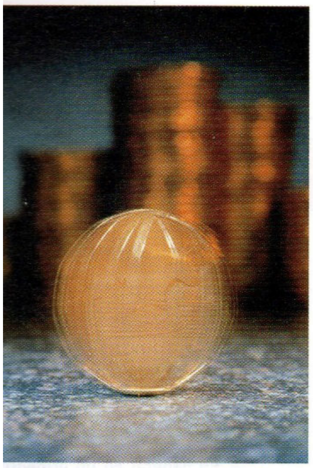


b)



172

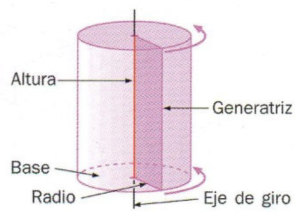
3. Cuerpos redondos



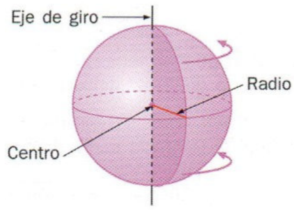
Al girar una moneda se dibuja en el espacio una esfera.

Un **cuerpo redondo** se obtiene al girar una superficie plana alrededor de un eje, situado en el mismo plano, de modo que cada punto de esta superficie describe una circunferencia al dar una vuelta completa.

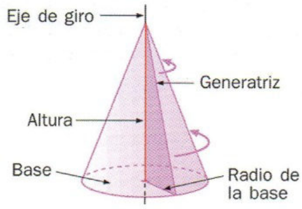
Cilindro



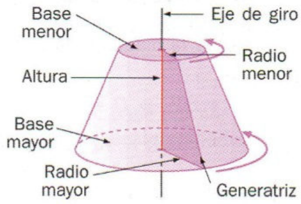
Esfera



Cono



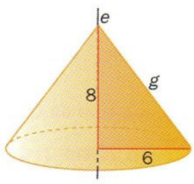
Tronco de cono

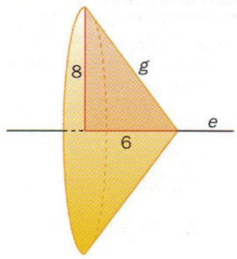


EJERCICIO RESUELTO

2. ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo sobre cualquiera de sus catetos si estos miden 6 y 8 centímetros, respectivamente? Halla su generatriz.

En ambos casos se obtiene un cono.

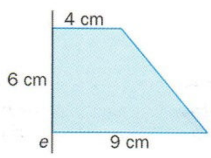




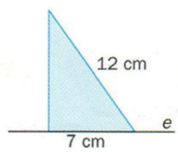
La generatriz mide lo mismo en ambos conos: $g = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm

EJERCICIOS PROPUESTOS

5 ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al girar el trapecio sobre el eje *e*? Halla la generatriz.



6 ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al girar el triángulo sobre el eje *e*? ¿Cuánto mide el radio de la base?

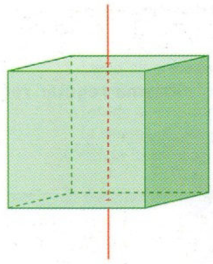


4. Simetría en poliedros y cuerpos redondos

Eje de simetría

Sobre el cubo de la figura hemos trazado una recta que pasa por el centro de dos caras opuestas.

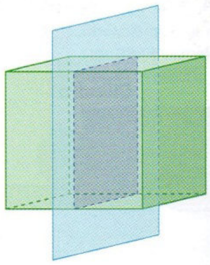
Si giramos el cubo alrededor de la recta dada 90°, conseguimos que se superponga consigo mismo. Lo mismo ocurre si el ángulo de giro es cualquier múltiplo de 90°. Entonces se dice que el cubo tiene simetría de rotación, y la recta se llama **eje de simetría**.



Eje de simetría de un cuerpo es una recta tal que, si giramos el cuerpo alrededor de ella con un determinado ángulo, se superpone consigo mismo.

Plano de simetría

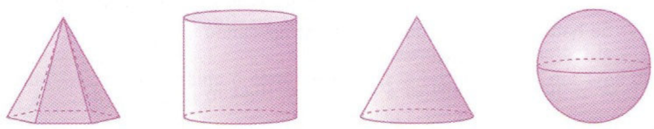
En el cubo de la figura hemos trazado un plano que pasa por el eje de simetría. Si dicho plano fuera un espejo, reflejaría el cubo completo al aplicárselo a una de las dos partes. Entonces se dice que el cubo tiene **simetría especular** y el plano se llama **plano de simetría**.



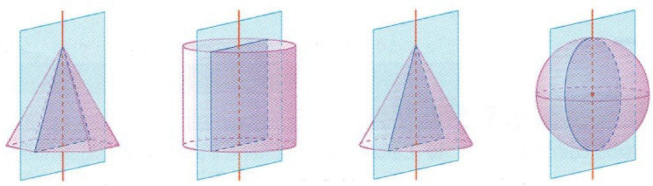
Plano de simetría de un cuerpo es un plano que contiene al eje de simetría y que divide el cuerpo en dos mitades que son imagen especular la una de la otra.

EJERCICIO RESUELTO

3. Sobre cada una de las siguientes figuras, representa un eje y un plano de simetría.



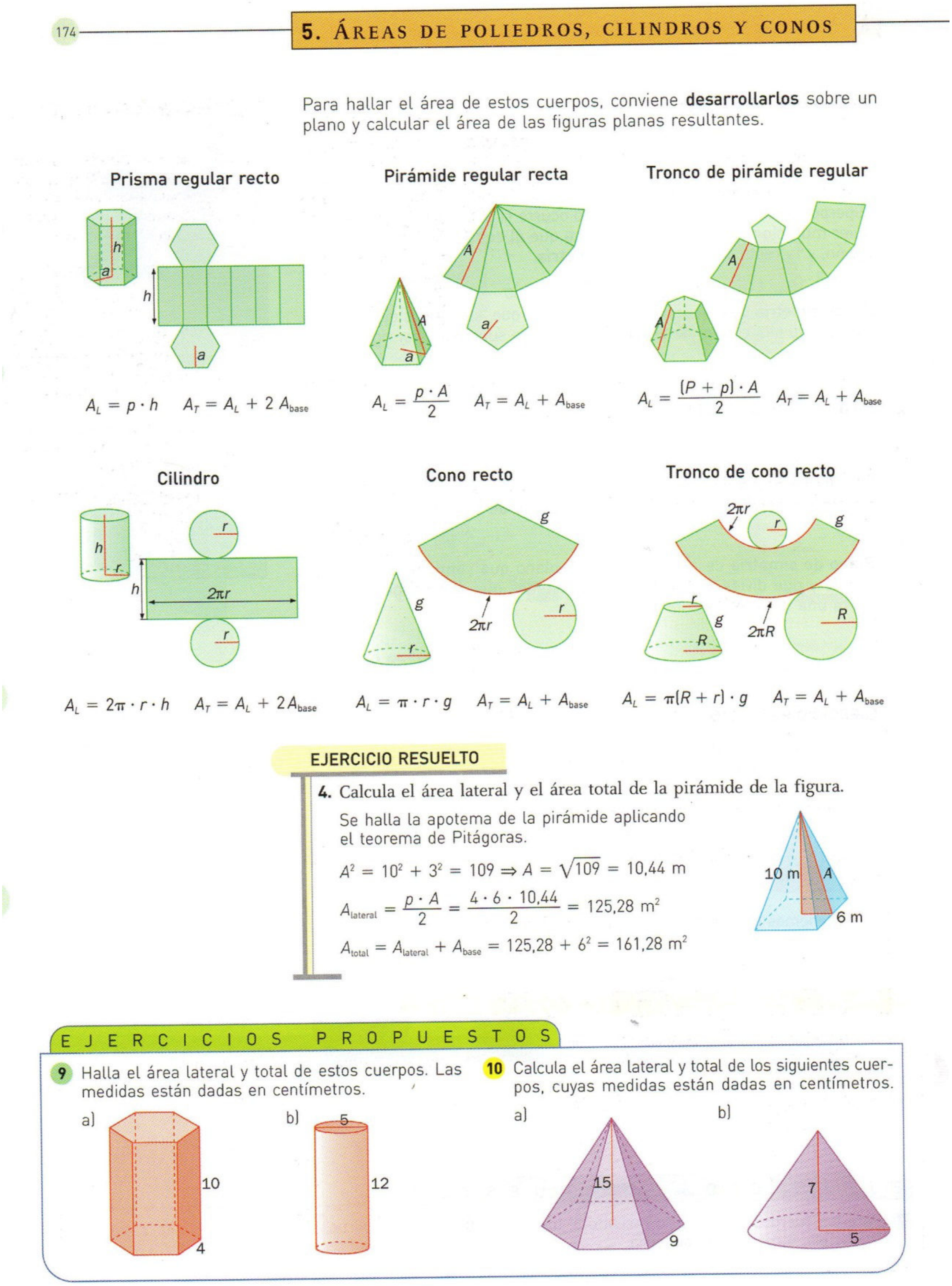
Si tenemos en cuenta las definiciones de eje y de plano de simetría:



EJERCICIOS PROPUESTOS

7 Para los cuerpos del ejercicio resuelto 3, traza, si es posible, otros ejes de simetría.

8 Para los cuerpos del ejercicio resuelto 3, traza, si es posible, otros planos de simetría.



174

5. ÁREAS DE POLIEDROS, CILINDROS Y CONOS

Para hallar el área de estos cuerpos, conviene **desarrollarlos** sobre un plano y calcular el área de las figuras planas resultantes.

Prisma regular recto

$A_L = p \cdot h \quad A_T = A_L + 2\,A_{base}$

Pirámide regular recta

$A_L = \dfrac{p \cdot A}{2} \quad A_T = A_L + A_{base}$

Tronco de pirámide regular

$A_L = \dfrac{(P + p) \cdot A}{2} \quad A_T = A_L + A_{base}$

Cilindro

$A_L = 2\pi \cdot r \cdot h \quad A_T = A_L + 2A_{base}$

Cono recto

$A_L = \pi \cdot r \cdot g \quad A_T = A_L + A_{base}$

Tronco de cono recto

$A_L = \pi(R + r) \cdot g \quad A_T = A_L + A_{base}$

EJERCICIO RESUELTO

4. Calcula el área lateral y el área total de la pirámide de la figura.

Se halla la apotema de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras.

$A^2 = 10^2 + 3^2 = 109 \Rightarrow A = \sqrt{109} = 10{,}44$ m

$A_{lateral} = \dfrac{p \cdot A}{2} = \dfrac{4 \cdot 6 \cdot 10{,}44}{2} = 125{,}28 \text{ m}^2$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 125{,}28 + 6^2 = 161{,}28 \text{ m}^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

9 Halla el área lateral y total de estos cuerpos. Las medidas están dadas en centímetros.

a) b)

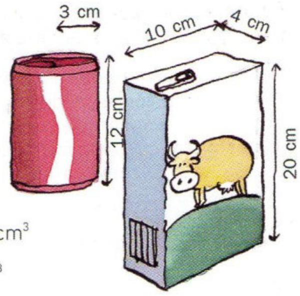
10 Calcula el área lateral y total de los siguientes cuerpos, cuyas medidas están dadas en centímetros.

a) b)

6. Volúmenes de poliedros, cilindros y conos

Ejemplo. *Halla el volumen de estos envases.*

Los envases son un cilindro y un prisma; en ambos casos el volumen es el área de la base por la altura.



$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = (\pi \cdot 3^2) \cdot 12 = 339{,}29 \text{ cm}^3$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = (10 \cdot 4) \cdot 20 = 800 \text{ cm}^3$

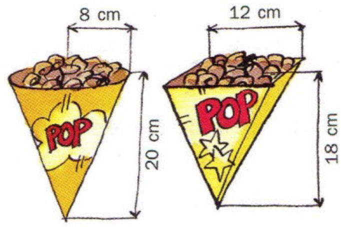
El **volumen** del **prisma** o **cilindro** es igual al área de la base por la altura.

$$V = A_{base} \cdot h$$

Ejemplo. *Hemos construido con cartulina los siguientes envases para palomitas.*

¿Cuál tiene mayor volumen?

Los envases son un cono y una pirámide de base cuadrada; en ambos casos el volumen es un tercio del área de la base por la altura.



$V_{cono} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 1\,340{,}41 \text{ cm}^3$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3}(12^2) \cdot 18 = 864 \text{ cm}^3$

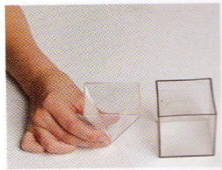
Por tanto, tiene mayor volumen el cono.

El **volumen** de la **pirámide** o **cono** es igual a la tercera parte del área de la base por la altura.

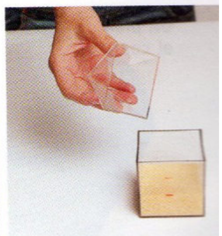
$$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$$

Ten en cuenta

Llena un ortoedro y, a continuación, pasa todo su contenido a una pirámide con la misma altura y cuya base tenga la misma área.



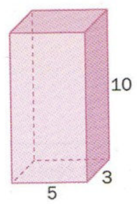
Observa que se necesita vaciar tres pirámides para llenar el ortoedro.



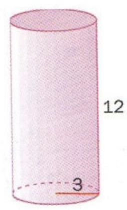
Ejercicios propuestos

11 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos. Las medidas están dadas en centímetros.

a)

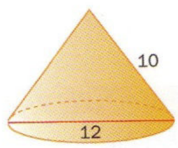


b)

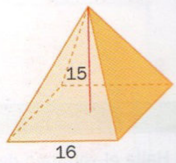


12 Halla el volumen de los siguientes cuerpos, cuyas medidas están dadas en centímetros.

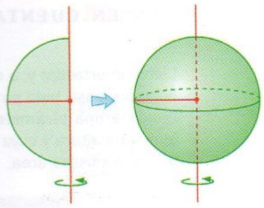
a)



b)

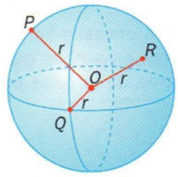


7. La esfera. Elementos, área y volumen



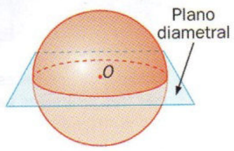
Al girar un semicírculo alrededor de su diámetro, se genera en el espacio un cuerpo que se llama **esfera**.

Si solo giramos alrededor de su diámetro la semicircunferencia correspondiente a dicho semicírculo, se genera una superficie curva denominada **superficie esférica**, que está formada por todos los puntos que se encuentran a igual distancia del centro de la esfera.



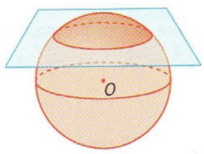
Al cortar con planos una esfera se obtienen cuatro figuras geométricas.

Semiesfera



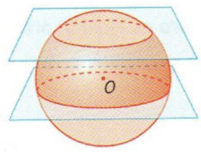
Un plano que pasa por el centro.

Casquete esférico



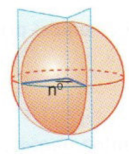
Un plano secante a la esfera.

Zona esférica



Dos planos paralelos secantes a la esfera.

Huso esférico



Dos planos que tienen un diámetro en común.

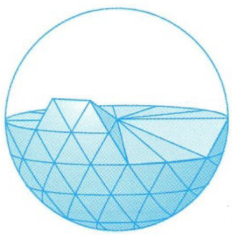
Volumen de la esfera

Construimos un cilindro cuya altura y base coincida con el diámetro de una semiesfera.

Llenamos con arena la semiesfera y pasamos toda esta arena al cilindro; comprobamos que se necesitan tres semiesferas para llenarlo.

Por tanto: $V_{esfera} = 2 \cdot V_{semiesfera} = 2\left(\frac{1}{3}\right)V_{cilindro} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Área de la superficie esférica



La superficie del poliedro de la figura está formada por decenas de triángulos distintos, que dan la sensación de una esfera casi perfecta. Si unimos cada vértice de estos triángulos con el centro de la esfera, se forman pirámides triangulares cuyos volúmenes, aunque diferentes entre sí, suman aproximadamente el volumen de la esfera.

Al aumentar el número de triángulos, la suma de las áreas de sus bases se aproxima al área de la superficie esférica, S, y la altura de las pirámides se aproxima al radio, r. Así, el volumen de la esfera se podrá calcular como $V = \frac{S \cdot r}{3}$, pero, por otra parte, el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, luego se tiene:

$$\frac{S \cdot r}{3} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3; \quad \text{de donde:} \quad S = 4\pi \cdot r^2$$

El área de la superficie esférica es: $\mathbf{A = 4\pi \cdot r^2}$

El volumen de la esfera es: $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

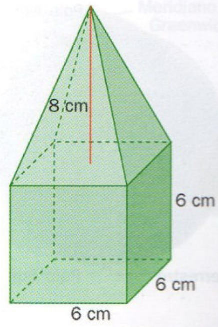
13 Halla el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 12 centímetros.

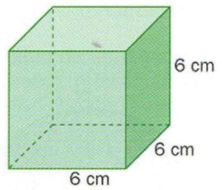
14 El volumen de una esfera es de 500 centímetros cúbicos. Calcula el área de dicha esfera.

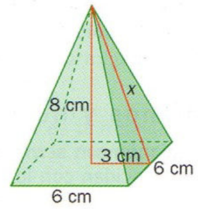
8. Áreas y volúmenes de cuerpos compuestos

Ejemplo. *Calcula el área del cuerpo de la figura del margen.*

La superficie del cuerpo está compuesta por 5 caras de un cubo y por las caras laterales de una pirámide cuadrangular.







$x = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} = 8{,}54$ cm

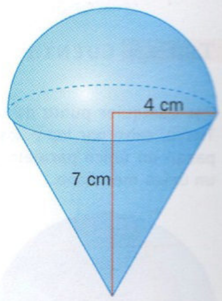
$A_1 = 5 \cdot 6^2 = 180\ \text{cm}^2$ $\qquad A_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} 6 \cdot 8{,}54 = 102{,}48\ \text{cm}^2$

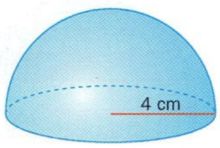
Por tanto, el área del cuerpo es la suma de las dos áreas.

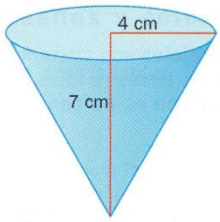
$$A = A_1 + A_2 = 180 + 102{,}48 = 282{,}48\ \text{cm}^2$$

Ejemplo. *Calcula el volumen del cuerpo de la figura del margen.*

El volumen de este cuerpo está compuesto por el volumen de una semiesfera y el volumen de un cono.







$V_1 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = 134{,}04\ \text{cm}^3$ $\qquad V_2 = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 7}{3} = 117{,}29\ \text{cm}^3$

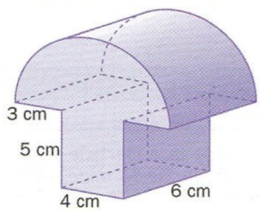
Por tanto, el volumen del cuerpo es la suma de los dos volúmenes.

$$V = V_1 + V_2 = 134{,}04 + 117{,}29 = 251{,}33\ \text{cm}^3$$

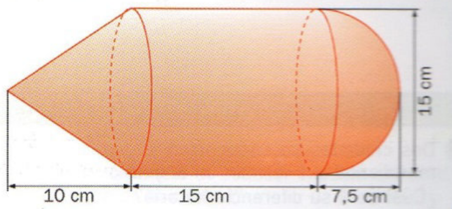
Para calcular el área y el volumen de un cuerpo compuesto, hay que descomponerlo en cuerpos simples, calcular sus respectivas áreas y volúmenes individualmente, y sumarlos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

15 Calcula el área y el volumen de este cuerpo.



16 Determina el área y el volumen del siguiente cuerpo.

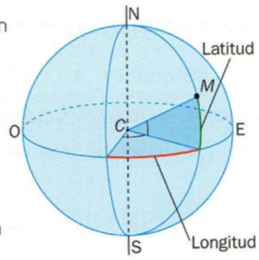


10. Coordenadas geográficas

Para determinar la posición de un punto sobre la superficie terrestre, se utiliza un **sistema de coordenadas** formado por el **ecuador** y el **meridiano de Greenwich**. El origen del sistema es el punto de corte del meridiano de Greenwich con el ecuador y la unidad de medida es el **grado**.

Cualquier punto de la superficie terrestre queda determinado por dos coordenadas: la **latitud** y la **longitud**.

La longitud de un lugar *M* (distinto de los polos) es la medida en grados del arco, medido en el ecuador, formado por el meridiano del lugar y el meridiano de Greenwich.



La longitud varía de 0° a 180° en dirección este (*E*) y de 0° a 180° en dirección oeste (*O*).

La latitud de *M* es la medida en grados del arco, medido en el meridiano del lugar, formado por el ecuador y el paralelo del lugar.

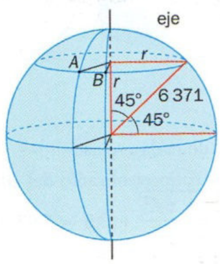
La latitud varía de 0° a 90° en dirección norte (*N*) en el hemisferio norte y de 0° a 90° en dirección sur (*S*) en el hemisferio sur.

Todos los puntos de un mismo meridiano tienen la misma longitud.

Todos los puntos del mismo paralelo tienen la misma latitud.

EJERCICIO RESUELTO

6. Calcula la distancia entre los puntos de la superficie terrestre $A(15°\,E,\ 45°\,N)$ y $B(35°\,E,\ 45°\,N)$.



Ambos puntos tienen la misma latitud; por tanto, se halla la distancia recorriendo el paralelo 45° N cuyo radio mide *r*.

$$r^2 + r^2 = 6371^2 \Rightarrow r = 4505 \text{ km}$$

El arco del paralelo determinado por los puntos *A* y *B* mide:

$$35° - 15° = 20°$$

La distancia entre *A* y *B* es:

$$\frac{2\pi \cdot 4505 \cdot 20°}{360°} = 1572 \text{ kilómetros}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

19 Halla la distancia entre estos dos puntos terrestres.

$A(10°\,O,\ 25°\,S)$ $B(10°\,O,\ 55°\,S)$

20 Las coordenadas geográficas de una ciudad son $(15°\,E,\ 45°\,N)$.

¿Cuál es la distancia al ecuador medida sobre el meridiano de dicha ciudad?

180

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

TANTEO CON CUERPOS GEOMÉTRICOS

Para resolver un problema, se puede dividir el problema en pequeñas partes e ir resolviendo cada una de ellas por separado, sin perder de vista el objetivo final.

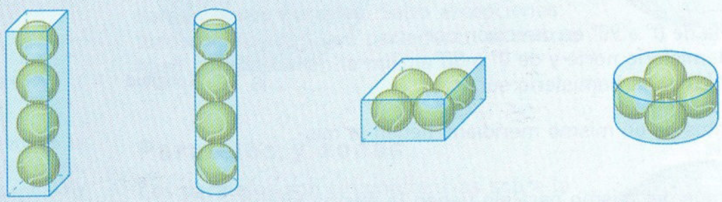
Problema

Un fabricante de pelotas de tenis quiere empaquetarlas de 4 en 4, en envases que tengan la menor superficie posible, con el fin de reducir costes y así abaratar su precio. ¿Qué forma tendrá el envase y cuáles serán sus medidas? (El radio de una pelota de tenis mide 3,3 centímetros.)

Resolución

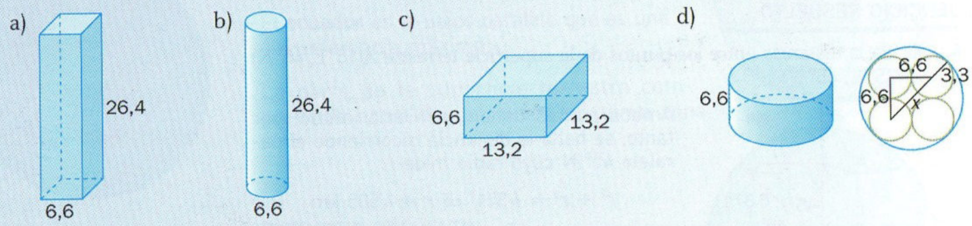
Pensar en distintos cuerpos geométricos que resuelven el problema

En todos los casos haremos que las pelotas sean tangentes entre sí y a las paredes del envase.



Hallar la superficie de cada cuerpo geométrico y compararlas

Hay que calcular el área total de cada uno de los siguientes cuerpos geométricos.



Con los datos que tenemos, se aplica la fórmula para calcular el área total de cada envase.

a) $A = 6{,}6 \cdot 26{,}4 \cdot 4 + 2 \cdot 6{,}6^2 \text{ cm}^2 = 784 \text{ cm}^2$

b) $A = 2\pi \cdot 3{,}3 \cdot 26{,}4 + 2\pi \cdot 3{,}3^2 = 615{,}8 \text{ cm}^2$

c) $A = 6{,}6 \cdot 13{,}2 \cdot 4 + 2 \cdot 13{,}2^2 = 696{,}96 \text{ cm}^2$

d) Primero debemos conocer el radio del cilindro

$$\frac{x}{2} + 3{,}3 = \frac{\sqrt{6{,}6^2 + 6{,}6^2}}{2} + 3{,}3 = 7{,}97 \text{ cm}$$

$A = 2\pi \cdot 7{,}97 \cdot 6{,}6 + 2\pi \cdot 7{,}97^2 = 729{,}62 \text{ cm}^2$

El menor área total se obtiene en el envase *b*, el fabricante deberá empaquetar las pelotas en cilindros cuya base tenga un diámetro igual al de la pelota y cuya altura sea 4 veces el diámetro de esta.

PROBLEMAS PROPUESTOS

21 Una empresa que fabrica caramelos en forma de cubo de 1 centímetro de arista quiere preparar paquetes de 4 caramelos.

¿Qué tipo de envasado deberá realizar para reducir los costes al mínimo?

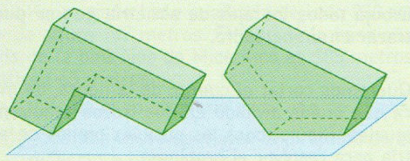
22 Las medidas, en centímetros, de un tetrabrik de leche son: 16,5 × 9,5 × 6. Un fabricante quiere empaquetar 12 tetrabriks.

¿Cómo debe envasarlos para que el gasto sea mínimo?

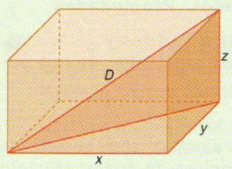
Organiza tus ideas

POLIEDROS

Poliedros cóncavos y convexos



Teorema de Pitágoras en el espacio



$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

SIMETRÍA EN POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS

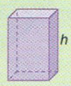
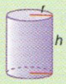
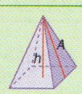
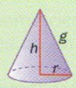
Eje de simetría de un cuerpo

Es una recta tal que, si giramos el cuerpo alrededor de ella con un determinado ángulo, se superpone consigo mismo.

Plano de simetría de un cuerpo

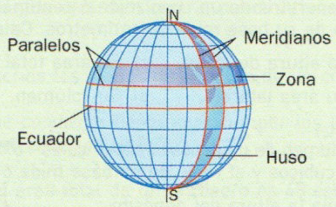
Es un plano que contiene al eje de simetría y que divide el cuerpo en dos mitades que son imagen especular la una de la otra.

ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

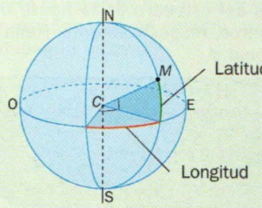
	Área lateral	Área total	Volumen
Prisma 	$p \cdot h$	Área lateral + 2 · Área base	Área base · h
Cilindro 	$2\pi r \cdot h$	Área lateral + $2\pi \cdot r^2$	Área base · h
Pirámide 	$\frac{p \cdot A}{2}$	Área lateral + Área base	$\frac{\text{Área base} \cdot h}{3}$
Cono 	$\pi \cdot r \cdot g$	Área lateral + $\pi \cdot r^2$	$\frac{\text{Área base} \cdot h}{3}$
Esfera 		$4\pi \cdot r^2$	$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

LA SUPERFICIE TERRESTRE

La Tierra



Coordenadas terrestres



EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Poliedros y cuerpos redondos. Propiedades

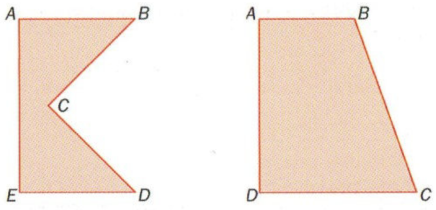
23 Un poliedro regular tiene 8 vértices y 12 aristas. Utiliza la fórmula de Euler para saber de qué poliedro se trata.

24 Queremos construir con alambre el esqueleto de un tetraedro de 8 centímetros de arista. ¿Cuánto alambre necesitamos?

25 Dibuja un prisma pentagonal recto, e indica cuántas aristas, cuántas caras y cuántos vértices tiene.

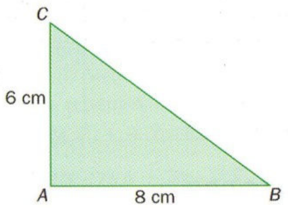
26 Dibuja una pirámide hexagonal recta, e indica cuántas aristas, cuántas caras y cuántos vértices tiene.

27 Dibuja la figura que se obtiene al hacer girar los siguientes polígonos sobre el lado que se indica.

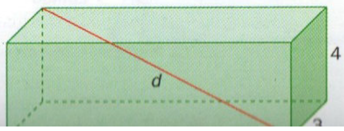


a) Lado *AE*   b) Lado *AD*

28 El triángulo rectángulo *BAC* de la figura se hace girar sobre el cateto *AB*. Dibuja el cuerpo que se obtiene y calcula la longitud de su generatriz.



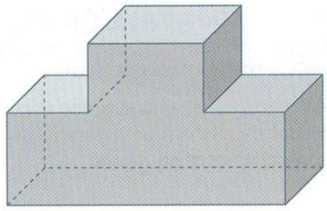
29 Las aristas del ortoedro de la figura miden 12, 4 y 3 centímetros, respectivamente. Halla la longitud de la diagonal *d*.



Simetría en poliedros y cuerpos redondos

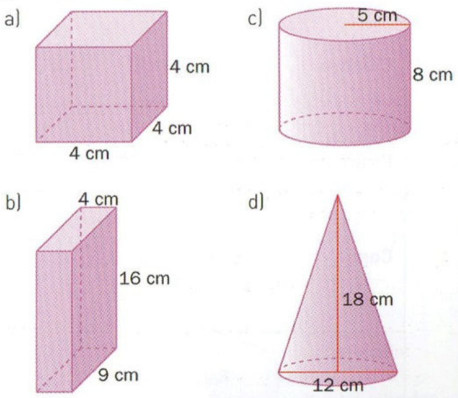
30 Dibuja todos los ejes de simetría que se pueden trazar en un octaedro.

31 Queremos cortar el cuerpo de la figura, de manera que quede dividido en dos trozos exactamente iguales. Dibuja todos los posibles planos de simetría para resolver el problema.



Áreas y volúmenes de poliedros, cilindros y conos

32 Calcula el área lateral y el área total de los siguientes cuerpos.



33 Un prisma recto, cuya base es un rectángulo de dimensiones 5 y 6 centímetros, tiene una altura de 15 centímetros. Calcula su volumen.

34 La generatriz de un cono mide 6 centímetros y el radio de su base mide 3 centímetros. Calcula:

a) La altura del cono.   c) Su área total.

b) Su área lateral.   d) Su volumen.

35 El volumen de un depósito cilíndrico es 1 695,60 metros cúbicos y el radio de su base mide 6 metros.

i d a d e s

36 Las pirámides de los faraones Keops y Micerinos se pueden encontrar muy próximas en Gizeh, aunque con proporciones bien distintas. La pirámide de Keops tiene base cuadrada de lado 230 metros y de altura 147 metros. El lado de la base cuadrada de la pirámide de Micerinos es 105 metros y la altura 65 metros.

a) Calcula el volumen de cada una de ellas.

b) ¿Cuántas veces es mayor la pirámide de Keops respecto a la de Micerinos?

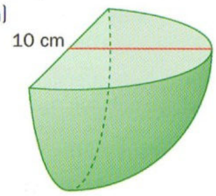
La esfera

37 Calcula el área de una superficie esférica cuyo radio mide 7 centímetros.

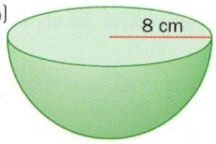
38 Halla el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 18 centímetros.

39 Averigua el volumen de cada uno de estos cuerpos.

a)



b)



40 Calcula el volumen de una esfera cuya superficie esférica mide 1 256 centímetros cuadrados.

41 En una superficie esférica de radio 10 centímetros, se tiene una circunferencia máxima y una circunferencia menor paralela a ella.

Calcula la distancia entre sus centros sabiendo que el radio de la cincunferencia menor es 5 centímetros.

La Tierra. Coordenadas geográficas

42 Calcula la superficie de cada uno de los husos horarios, sabiendo que el radio de la Tierra es, aproximadamente, 6 371 kilómetros.

43 Calcula la distancia que recorre un avión que vuela entre un punto de Europa de coordenadas geográficas (8° E, 45° N) y otro de América de coordenadas (70° O, 45° N), siguiendo el paralelo común.

44 Dos puntos A y B situados sobre el Ecuador tienen de longitud 20° E y 20° O.

¿Cuál es la distancia entre ambos? Recuerda que el Ecuador mide 40 030 km.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

45 ¿Qué nombre recibe la pirámide que tiene todas sus caras iguales?

46 ¿Qué cuerpo geométrico se forma al unir los centros de las caras de un tetraedro?

47 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Los cilindros son poliedros.

b) Un prisma regular recto pentagonal tiene siete caras.

c) El menor número de caras que concurren en el vértice de un poliedro es tres.

d) En cualquier poliedro todas las caras son iguales.

48 ¿Cuántos ejes de simetría puedes trazar en una esfera?

49 Describe los planos de simetría de un cilindro.

50 ¿Qué condición tienen que cumplir los planos de simetría de una esfera?

51 Si el área total de un tetraedro es 48 centímetros cuadrados, ¿cuánto mide el área de su base?

52 Un cilindro y un cono tienen la misma base y el mismo volumen.

¿Qué diferencia de altura existe entre ambos?

53 Disponemos de un cubo y de una esfera que tienen el mismo volumen, 125 centímetros cúbicos.

¿Cuál de ellos tiene mayor superficie?

54 Dos esferas de radios 5 y 7 centímetros tienen un solo punto en común.

¿Qué distancia hay entre sus centros?

55 Una esfera y una semiesfera tienen el mismo volumen.

¿Qué relación existe entre sus radios?

56 Encuentra la relación que existe entre los volúmenes de un cono y de un cilindro, cuyas bases y alturas miden lo mismo.

57 ¿Existe algún paralelo que mida lo mismo que un meridiano? En caso afirmativo, di cuál es.

58 ¿Cuántos grados abarca un huso horario?

59 ¿Cuáles son las coordenadas geográficas del polo Norte y del polo Sur?

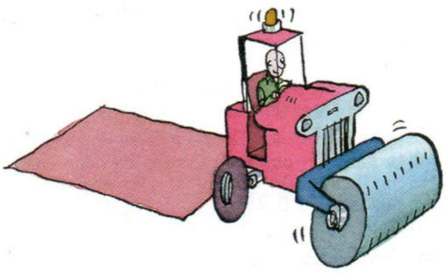
> a c t i v

PROBLEMAS PARA APLICAR

60 Calcula la cantidad de lámina de hojalata necesaria para fabricar un bote de conservas de forma cilíndrica, cuya base tiene un diámetro de 16 centímetros y cuya altura mide 20 centímetros.

61 Una apisonadora tiene un rodillo de 1,20 metros de diámetro y 2,30 metros de largo.

¿Qué superficie de tierra apisona en cada vuelta de rodillo?

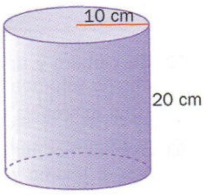


62 Una fábrica de bastones recibe un pedido de cajas de 80 centímetros de alto, 7 centímetros de ancho y 3 centímetros de largo.

Calcula cuánto mide el bastón más largo que se puede embalar en una de estas cajas.

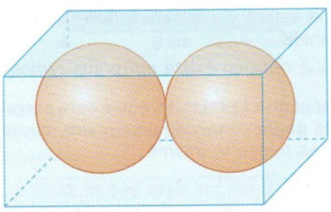
63 Una empresa dona a una ONG 1 000 000 centímetros cúbicos de leche en polvo. Para envasarla, utilizan unos botes como los de la figura.

¿Cuántas unidades se necesitan?



64 En la caja de la figura se quieren guardar dos esferas macizas de 10 centímetros de radio.

¿Qué volumen ocupa el aire que queda en la caja?



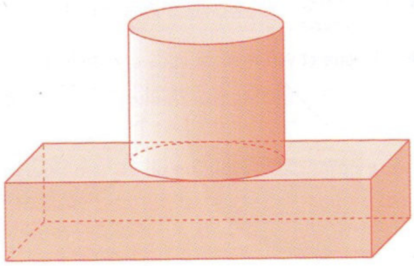
65 El volumen de un depósito cilíndrico es 1 695,60 metros cúbicos y el radio de su base mide 6 metros.

Calcula la altura del depósito.

66 Un obelisco está formado por un prisma recto de base cuadrada coronado por una pirámide. El lado de la base mide 80 centímetros, mientras que la altura del prisma es de 10 metros y la altura total del obelisco es de 13 metros.

Halla su volumen.

67 El pedestal de una estatua como el de la figura, se quiere dividir en dos partes iguales. ¿De cuántas maneras se puede hacer?



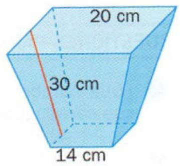
68 Un recipiente tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular como el de la figura.

Calcula:

a) La altura del recipiente.

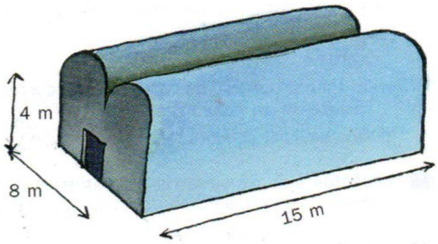
b) El área lateral.

c) El área total (observa que está abierto por arriba).



69 La nave de un almacén tiene la forma indicada en la figura.

Determina el volumen de la nave.



70 Dos puntos de la esfera terrestre se dice que están situados en las antípodas cuando son diametralmente opuestos; es decir, el segmento que los une pasa por el centro de la Tierra. Calcula las coordenadas de las antípodas de Roma cuyas coordenadas geográficas son (12° 40′ E, 41° 50′ N).

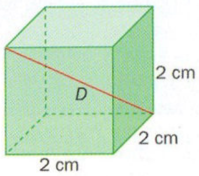
REFUERZO

Poliedros

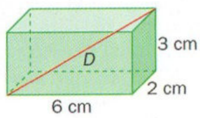
71 Señala cuántas caras, aristas y vértices tiene una pirámide hexagonal recta, y comprueba que verifica la fórmula de Euler.

72 Calcula los elementos que están señalados con una letra en los siguientes cuerpos.

a)



b)



Simetría en poliedros y cuerpos redondos

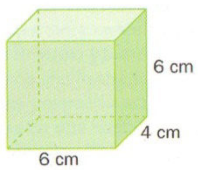
73 Dibuja los planos de simetría de un prisma hexagonal recto.

74 Dibuja todos los planos de simetría de un cubo que pasen por dos aristas opuestas. ¿Cuántos hay?

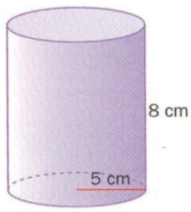
Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

75 Halla el área lateral, el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos.

a)

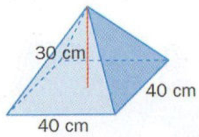


b)

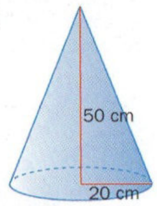


76 Averigua el área lateral, el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a)



b)



77 Un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3 y 4 centímetros, respectivamente, gira alrededor del cateto mayor.

Calcula el área total y el volumen del cuerpo que genera.

La esfera y la Tierra

78 Halla el área y el volumen de las siguientes esferas.

a) Radio = 10 cm b) Diámetro = 31 cm

79 Una circunferencia, cuya longitud es de 15,70 centímetros, gira alrededor de un diámetro generando una esfera.

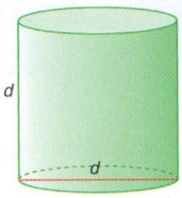
Calcula el volumen de dicha esfera.

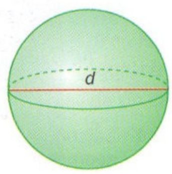
80 Dos puntos, *A* y *B*, situados sobre el ecuador, tienen de longitud 30° E y 15° O, respectivamente.

¿Cuál es la distancia entre ambos? Recuerda que el ecuador mide 40 030 kilómetros.

AMPLIACIÓN

81 Halla la relación que existe entre el volumen de la esfera y el del cilindro de la figura, sabiendo que el diámetro de la base del cilindro, su altura y el diámetro de la esfera miden lo mismo.



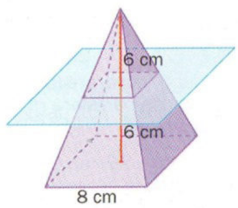


82 Un barco está situado en un punto de coordenadas (20° O, 60° S) y avanza en dirección este 15° sobre el mismo paralelo.

a) ¿En qué punto se encontrará situado?

b) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?

83 La pirámide de la figura se corta con un plano paralelo a la base por el punto medio de la altura de la pirámide.



Calcula la relación que existe entre los volúmenes de las dos figuras resultantes.

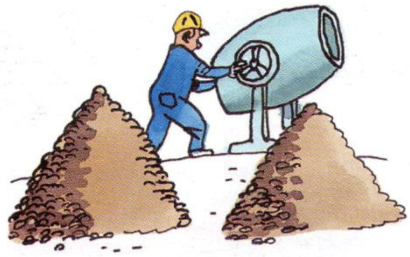
84 Una esfera de 20 centímetros de radio se corta con un plano a 12 centímetros del centro.

Averigua la longitud de la circunferencia que se origina al cortar la superficie esférica con el plano.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

85 Jardín de piedra

Se quiere extender 4 toneladas y media de gravilla sobre una superficie rectangular de 15 metros de largo y 3 de ancho.



Se sabe que un metro cúbico de este tipo de gravilla pesa 2000 kilogramos.

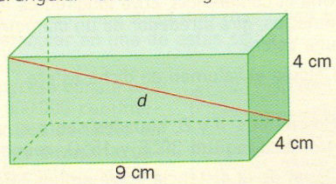
a) ¿Qué altura en centímetros tendrá la capa de gravilla que se va a extender?

b) Si se quiere aumentar en un 25 % la superficie en la que se va a echar la gravilla y conservando la altura de la capa, ¿cuántos kilogramos más de gravilla se deberán comprar?

c) Si utilizamos otra clase de gravilla, menos densa, de 1500 kilogramos por metro cúbico, ¿qué superficie podremos cubrir si la capa de gravilla alcanza la misma altura que en los casos anteriores?

AUTOEVALUACIÓN

1 Calcula la longitud de la diagonal del prisma cuadrangular recto de la figura.



2 Queremos pintar el techo y las paredes de una habitación de 4 metros de largo por 3,5 metros de ancho y 3 metros de alto.

Sabiendo que la pintura cuesta 3 euros por cada metro cuadrado de pared, ¿cuánto nos costará pintar la habitación?

3 En un cubo, cuya arista mide 4 centímetros, introducimos una esfera maciza tangente a las caras del cubo.

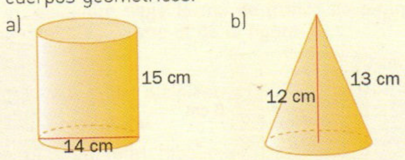
Determina el volumen del espacio comprendido entre ambos cuerpos.

4 Las coordenadas geográficas de dos ciudades son: $A(10° E, 45° N)$ y $B(10° O, 45° N)$

Calcula la distancia entre ambas, teniendo en cuenta que el radio de la Tierra es 6371 kilómetros.

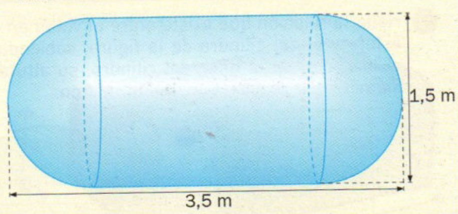
5 Averigua el área lateral y el área total de estos cuerpos geométricos.

a) b)



6 Para abastecer de agua algunas zonas de África, una empresa dona depósitos como el de la figura.

Calcula el volumen de cada depósito.



7 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a) Pirámide de base cuadrada, de 7 centímetros de altura, cuya base tiene una arista de 6 centímetros.

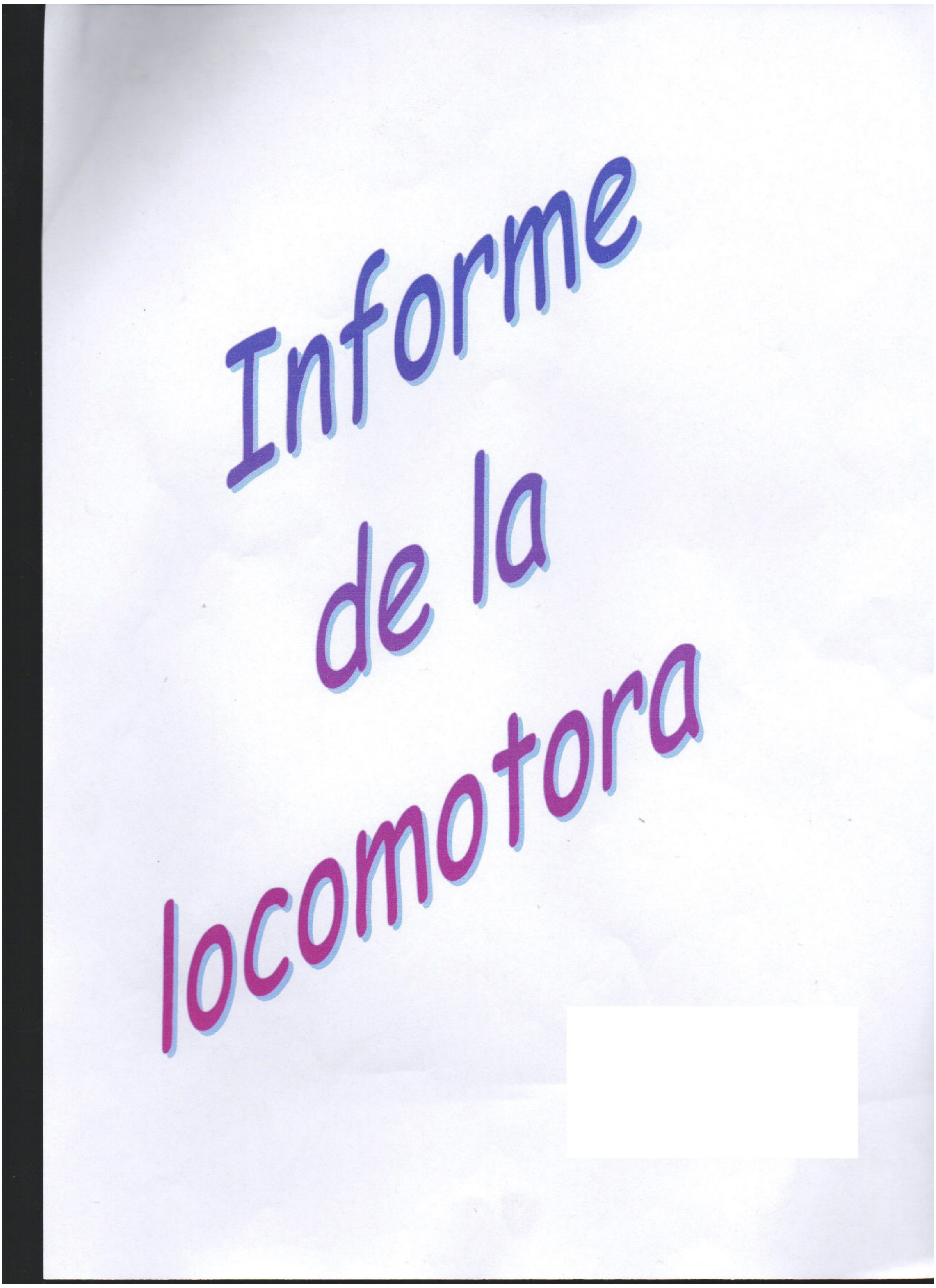
b) Prisma recto de base hexagonal, de 8 centímetros de altura, cuya base tiene una arista de 2 centímetros.

ANEXO B.
Alguno de los informes presentados por los alumnos y alumnas.

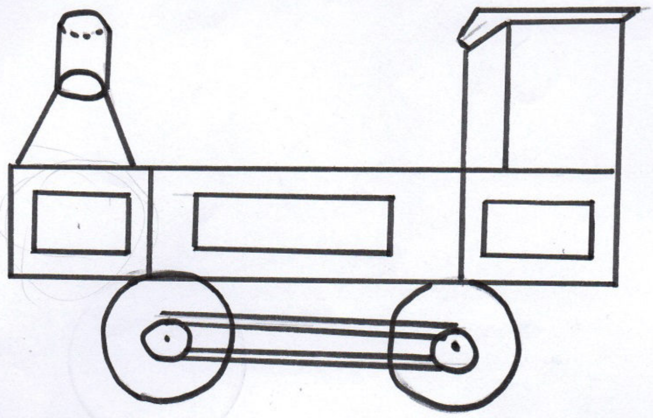
Presentación de alguno de los informes presentados por los alumnos y alumnas de 3º ESO, en el que muestran como han realizado sus medidas para conseguir llevar a cabo la actividad desempeñada a lo largo de PBL.

Se muestran tres de los trabajos realizados:

TRABAJO -1 –



1. DESCRIPCIÓN TÉCNICA Y CÁLCULOS.



D

ESTARÁ FORMADA:

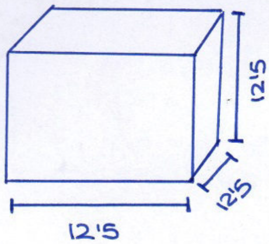
1. Un cubo, que hará de cabina.
2. 2 cilindros que seran las dos ruedas (bases)
3. Un tronco de cono, que sujetará la chimenea
4. Un cilindro pequeño arriba, la chimenea.
5. En Medio: los cubos iguales en los dos laterales
6. En medio de los cubos iguales uno más grande que estos dos.

1

• CÁLCULOS

— Cabina más ancha que el resto??

PRISMA (CABINA)



En realidad todos los lados miden

2'5m -> 250cm

Escala 1:20 = 12'5 cm B

$A_L = p \cdot h = 50 \cdot 12'5 = \boxed{625\ cm^2}$ B

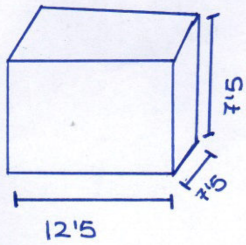
— Sobraría en el total

$A_T = A_L + 2 \cdot A_{BASE} = 625 + 2 \cdot 156'25 = \boxed{937'5\ cm^2}$

$V = A_{BASE} \cdot h = 12'5 \cdot 12'5 \cdot 12'5 = \boxed{1953'125\ cm^3}$

B

CUERPO DE LA LOCOMOTORA (LATERALES)



En realidad:

largo: 150 cm = 1'50m Escala 1:20 = 7'5cm B

ancho: 150 cm = 1'50m " 1:20 = 7'5 cm B

altura: 250 cm = 2'50m " 1:20 = 12'5 cm B

$A_L = p \cdot h = 40 \cdot 7'5 = \boxed{300\ cm^2}$ B

— Parte sobra

$A_T = A_L + 2 \cdot A_{BASE} = 300 + 2 \cdot 93'75 = \boxed{487'5\ cm^2}$

$V = A_{BASE} \cdot h = 93'75 \cdot 7'5 = \boxed{703'125 cm^3}$

LOS DOS CUBOS:

$A_L = 300 \times 2 = \boxed{600\ cm^2}$

$A_T = 487'5 \times 2 = \boxed{975 cm^2}$

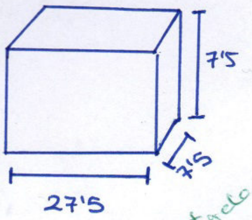
$V = 703'125 \times 2 = \boxed{1406'25\ cm^3}$

Sobraría los dos laterales como una lateral cuando sumáis todo

2

CUERPO LOCOMOTORA (MEDIO)

Una duda
no debería tener la misma
altura que el ancho??



En realidad:

Largo: 550cm = 5'50m Escala 1:20 = 27'5

Ancho: 150cm = 1'50m " 1:20 = 7'5 cm

altura: 150cm = 1'50m Escala 1:20 = 7'5 cm

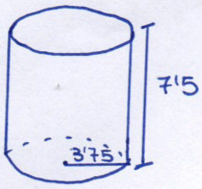
Se tratan 2 laterales como A lateral cuando sumas todo

$A_L = p \cdot h = 70 \cdot 7'5 = \boxed{525 cm^2}$

$A_T = A_L + 2 \cdot A_{BASE} = 525 + 2 \cdot 206'25 = \boxed{937'5 cm^2}$

$V = A_{BASE} \cdot h = 206'25 \cdot 7'5 = \boxed{1546'87 cm^3}$

CILINDRO (RUEDAS)



En realidad:

Radio: 75cm = 0'75m Escala 1:20 = 3'75 cm

Altura: 150cm = 1'5 m Escala 1:20 = 7'5 cm

$A_L = 2\pi \cdot r \cdot h = \boxed{176'71 cm^2}$

$A_T = A_L + 2\pi \cdot r^2 = 176'71 + 2\pi \cdot 3'75^2 = \boxed{265'06 cm^2}$

$V = A_{BASE} \cdot h = \pi \cdot r^2 = 44'17 \cdot h = \boxed{331'33 cm^3}$

DOS CILINDROS:

$A_L = 176'71 \times 2 = \boxed{353'42 cm^2}$

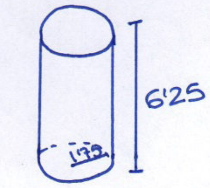
$A_T = 265'06 \times 2 = \boxed{530'12 cm^2}$

$V = 331'33 \times 2 = \boxed{662'66 cm^3}$

B

3

CILINDRO (CHIMENEA)



EN REALIDAD:

MB RADIO: 35 cm = 0'35 m Escala 1:20 = 1'75 cm

ALTURA: 125 cm = 1'25 m Escala 1:20 = 6'25 cm

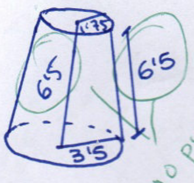
$A_L = 2\pi \cdot r \cdot h = \boxed{68'72\ cm^2}$

Idem anterior

$A_T = A_L + 2\pi \cdot r^2 = 68'72 + 19'22 = \boxed{87'94\ cm^2}$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \boxed{60'13\ cm^3}$

TRONCO CONO



no pueden ser iguales

EN REALIDAD:

MB r = 35 cm = 0'35 m Escala 1:20 = 1'75 cm

R = 70 cm = 0'70 m " 1:20 = 3'5 cm

g = 130 cm = 1'30 m " 1:20 = 6'5 cm

h = 130 cm = 1'30 m " 1:20 = 6'5 cm

$A_L = \pi \cdot (R+r) \cdot g = \pi \cdot (3'5+1'75) \cdot 6'5 = \boxed{107'20\ cm^2}$

$A_T = A_L + A_{BASE} = 107'20 + 10'99 = \boxed{118'19\ cm^2}$??

(V Grande − V pequeño)

(buscado)

MB $V = \frac{1}{3} \pi \cdot h (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \boxed{145'90\ cm^3}$

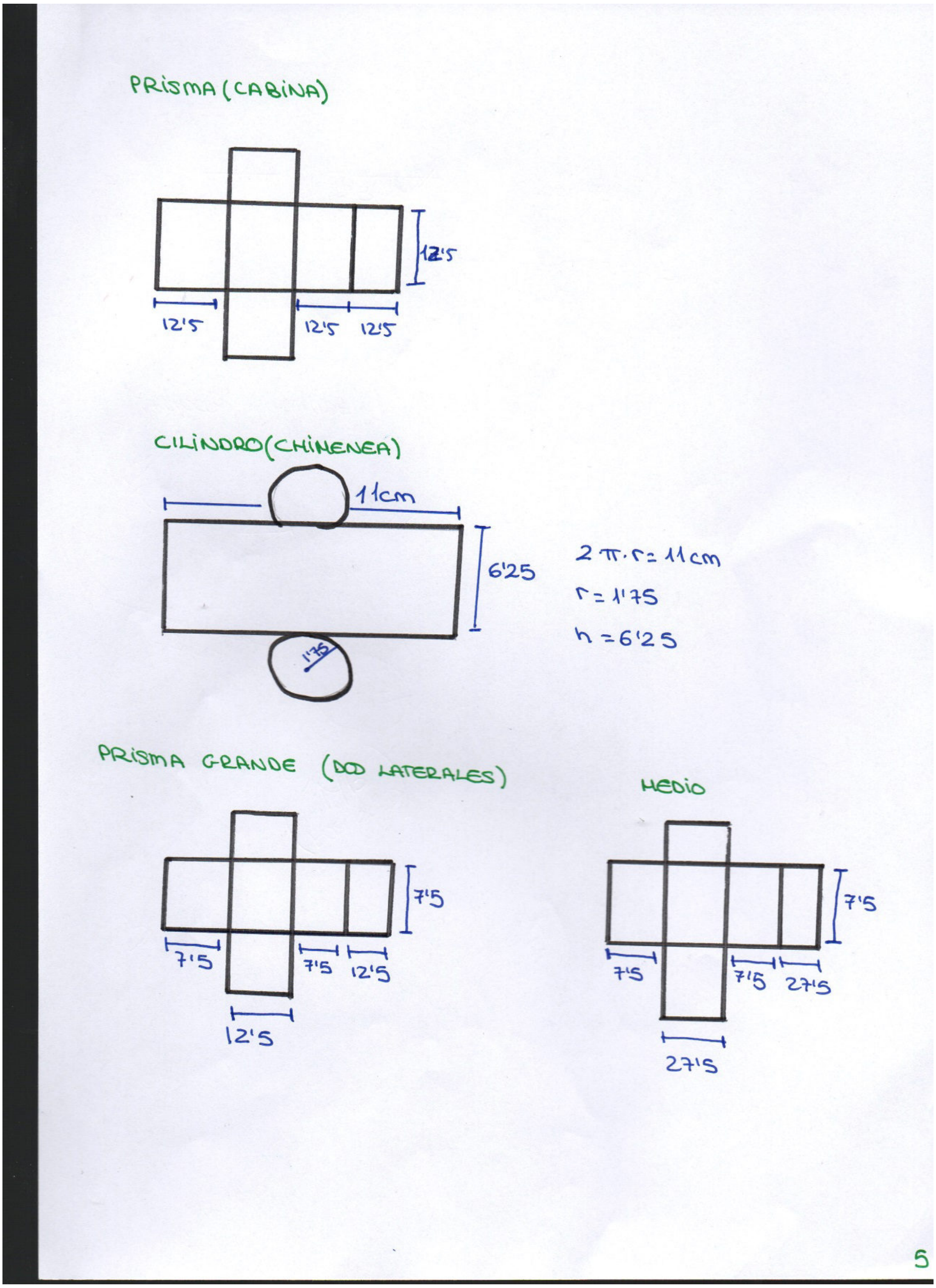
VOLUMEN TOTAL LOCOMOTORA:

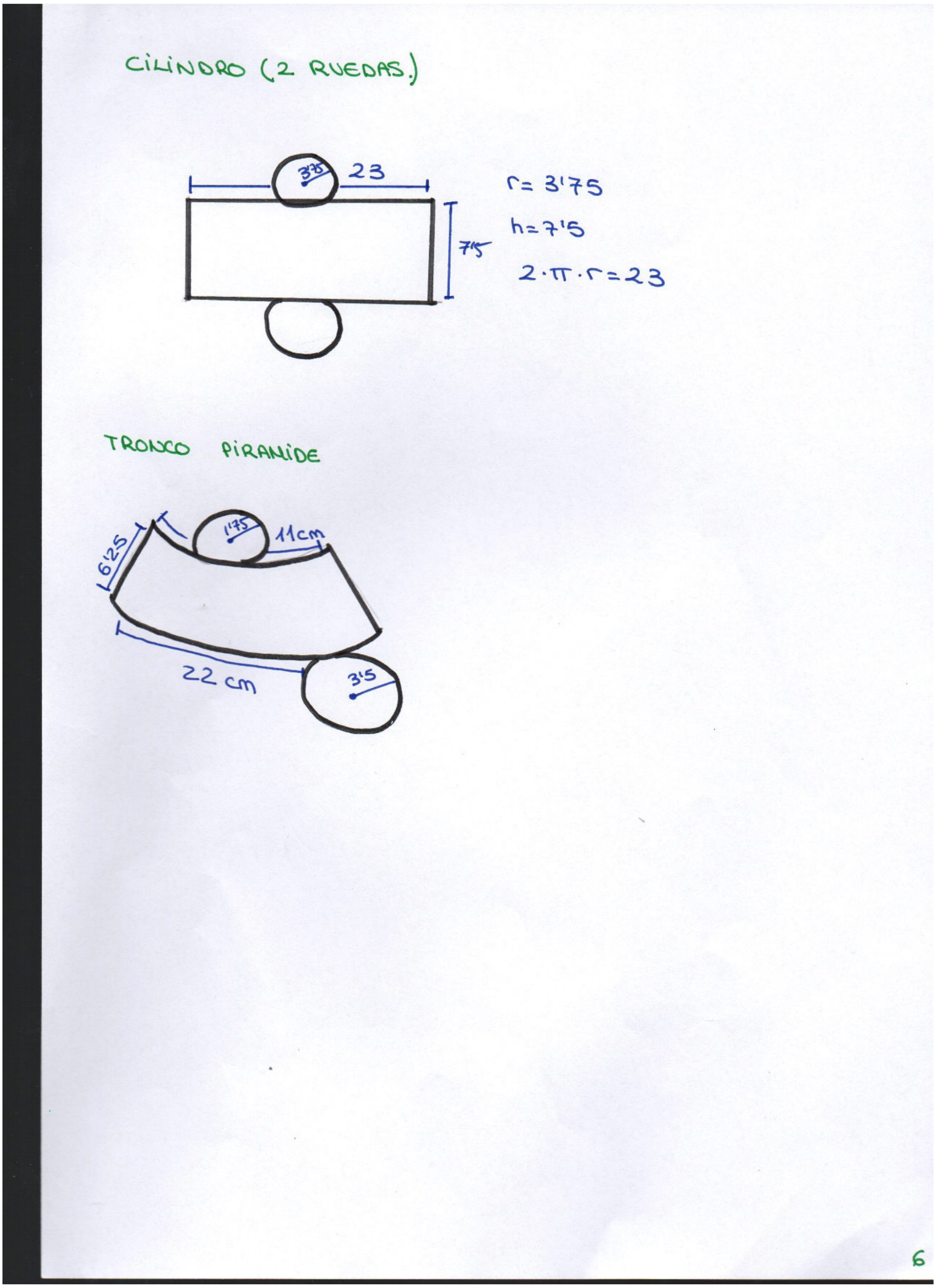
B $1953'125 + 1406'25 + 1546'87 + 662'66 + 60'13 + 145'90 = \boxed{5774'93\ cm^3}$

SUPERFICIE TOTAL LOCOMOTORA: Habría que quitar los laterales que no son exteriores

$937'5 + 975 + 937 + 530'12 + 87'94 + 118'19 = \boxed{3585'75\ cm^2}$

4

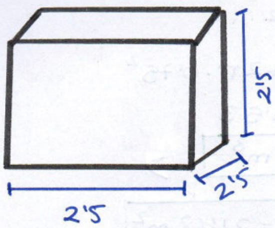

PRISMA (CABINA)
12'5
12'5
12'5
12'5
CILINDRO(CHIMENEA)
11cm
6'25
1'75
2 π · r = 11 cm
r = 1'75
h = 6'25
PRISMA GRANDE (DOS LATERALES)
7'5
7'5
7'5
12'5
12'5
MEDIO
7'5
7'5
7'5
27'5
27'5
5



CILINDRO (2 RUEDAS)
3'75
23
7'5
r= 3'75
h=7'5
2·π·r=23
TRONCO PIRAMIDE
1'75
11cm
6'25
22 cm
3'5
6

VOLUMENES Y ÁREAS REALIDAD

PRISMA (CABINA)

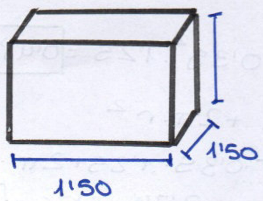


Area base · h

$V = 2'5^3 = \boxed{15'625\ m^3}$ B

$A\,total = 2'5^2 \cdot 6 = \boxed{37'5\ m^2}$ M.

CUERPO DE LA LOCOMOTORA (LATERALES)



$V = 1'50 \cdot 1'50 \cdot 2'50 = \boxed{5'625\ m^3}$ B

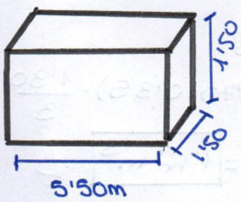
$A_T = (1'50 \cdot 1'50) \cdot 4 + (1'50 \cdot 2'50) \cdot 2$

$15 + 4'5 = \boxed{16'5\ cm^2}$ M

$\times 2 \rightarrow V = \boxed{11'25\ m^3}$

$A_T = \boxed{33\ cm^2}$

MEDIO



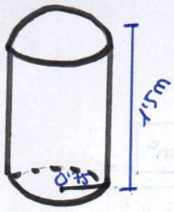
$V = \boxed{12'375\ m^3}$

$A_T = (5'50 \cdot 1'50) \cdot 4 + 4'50$

$33 + 4'50 = \boxed{37'5\ cm^2}$

7

CILINDRO (RUEDAS)



$V = \pi \cdot r^2 \cdot 1'5 = 2'64\ m^3$ B

$A_T = 2\pi r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$

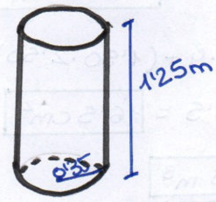
$2\pi \cdot 0'75 \cdot 1'5 + 2\pi \cdot 0'75^2$

$7'065 + 3'53$

$\boxed{10'52\ m^3}$ B

x2 cilindros: $\boxed{V = 5'28\ m^3}$ B $\boxed{A_T = 21'18\ m^2}$ B

CILINDRO (CHIMENEA)



Volumen: $\pi \cdot 0'35^2 \cdot 1'25 = \boxed{0'48\ m^3}$ B

$A_T = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$

$2\pi \cdot 0'35 \cdot 1'25 + 2\pi \cdot 0'35^2$

$2'74 + 0'76 = \boxed{3'5\ m^2}$ B

TRONCO CONO

Hemos obtener·

$V = \pi (R^2 + r^2 + R \cdot r) \cdot \frac{h}{3}$

$\pi \cdot (0'70^2 + 0'35^2 + 0'70 \cdot 0'35) \cdot \frac{1'30}{3}$

$\pi \cdot (0'85) \cdot \frac{1'30}{3} = \boxed{1'16\ m^3}$ B

$A_T = \pi [R(g+R) + r(g+r)]$

$\pi \cdot [0'70(1'30 + 0'70) + (1'30 + 0'75) \cdot 0'75]$

$\pi [1'4 + 0'57)$

$\pi \cdot 1'97 = \boxed{6'20\ m^2}$

VOLUMEN TOTAL LOCOMOTORA

$15'625 + 11'25 + 12'375 + 5'28 + 0'48 + 1'16 = \boxed{46'17\ m^3}$

AREA TOTAL

$37'5 + 33 + 37'5 + 21'18 + 3'5 + 6'20 = \boxed{138'88\ m^2}$

PINTURA PARA PINTAR LA LOCOMOTORA (REALIDAD)

1L pintas $5m^2$

1L —— $5m^2$

x —— $138'88\ m^2$

$x = \boxed{27'76\ L}$ de pintura hay que comprar

Si un litro de pintura vale 5'25 euros

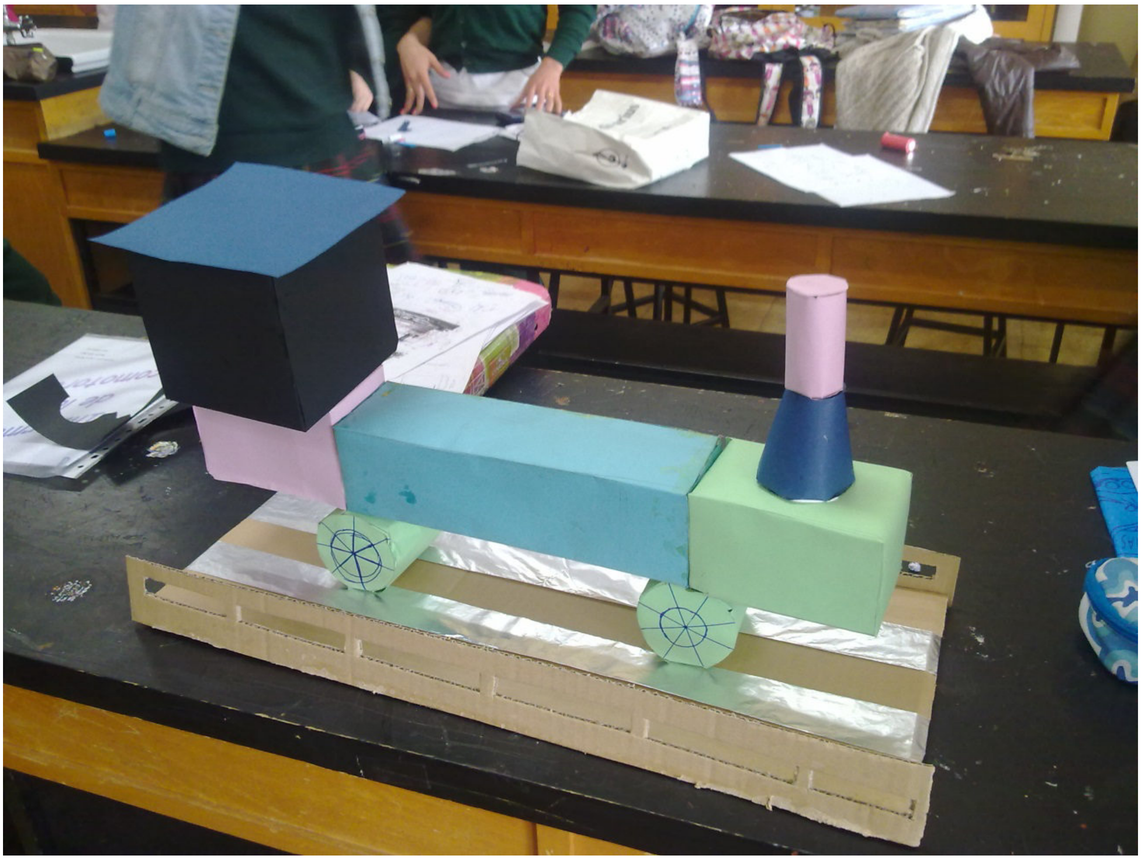
1L —— 5'25€

27'76 —— x €

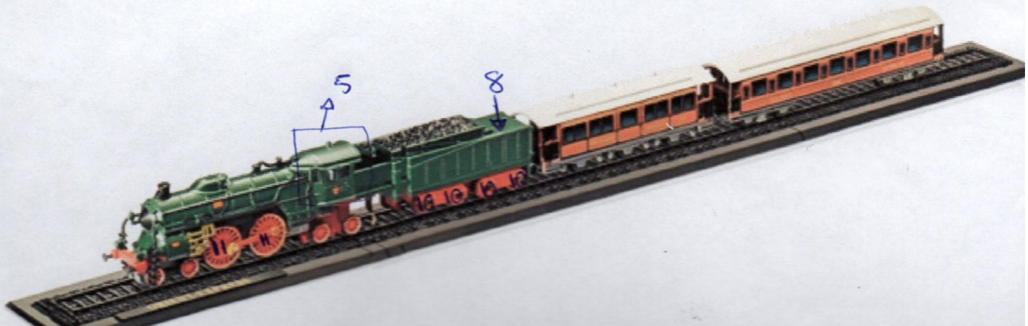
$x = \boxed{145'74\ euros}$ cuesta pintar toda la locomotora

8

Maqueta final del trabajo 1:



TRABAJO -2 –



1. CILINDRO DELANTERO
2. PRISMA DELANTERO
3. TRONCO DE PIRAMIDE
4. MEDIA ESFERA
5. CUBO Y MITAD DE CILINDRO
6. TRONCO DE CONO
7. PRISMA RECTANGULAR SIN TAPA
8. PRISMA RECTANGULAR
9. 2 CUBOS Y 1 PRISMA
10. 8 CILINDROS PEQUEÑOS
11. 2 CILINDROS GRANDES

Trabajo matematicas
Locomotora

1. Medida de la maqueta

En la pagina que hemos encontrado aparecia una maqueta de Orient-Express con una escala de 1:220 y su longitud era 235 mm

A partir de este dato hemos calculado la medida de nuestra locomotora: 51'7 m medida real locomotora

16'6 cm —— 51'7 m

8'5 cm —— x

$x = \frac{8'5 \cdot 51'7}{16'6} = 26'47$ m. Ok

Como nos salia una maqueta muy grande, nos cambiaron la escala a 1:50

2647 cm : 50 = 52 cm de maqueta Ok

Altura:

1: 6'12 cm → escala del dibujo a la maqueta

1'5 de altura en el dibujo x 6'12 = 9'18 cm de altura.

1

Medidas:

1. CILINDRO DELANTERO:

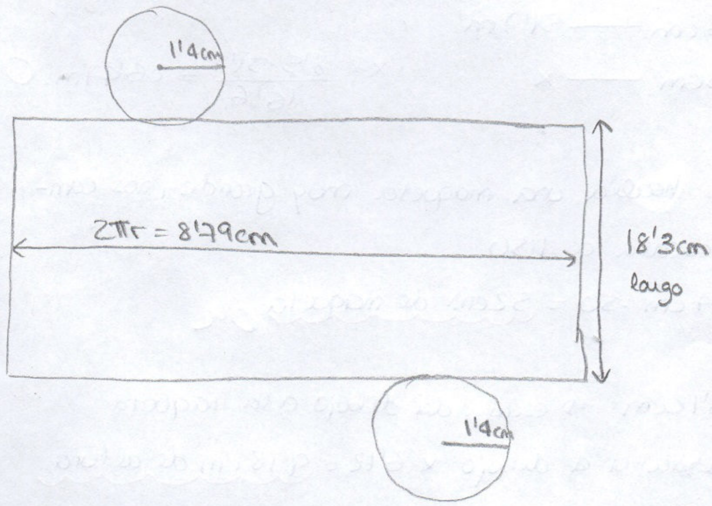
8'5 cm — 52cm $\qquad x = \frac{3 \cdot 52}{8'5} = $ 18'3 cm largo

3cm — x

Realidad { diametro: 1'4 m
Radio: 0'7m → 70cm real

1cm → 50cm $\qquad \frac{70 \cdot 1}{50} = $ 1'4cm de radio

x → 70cm

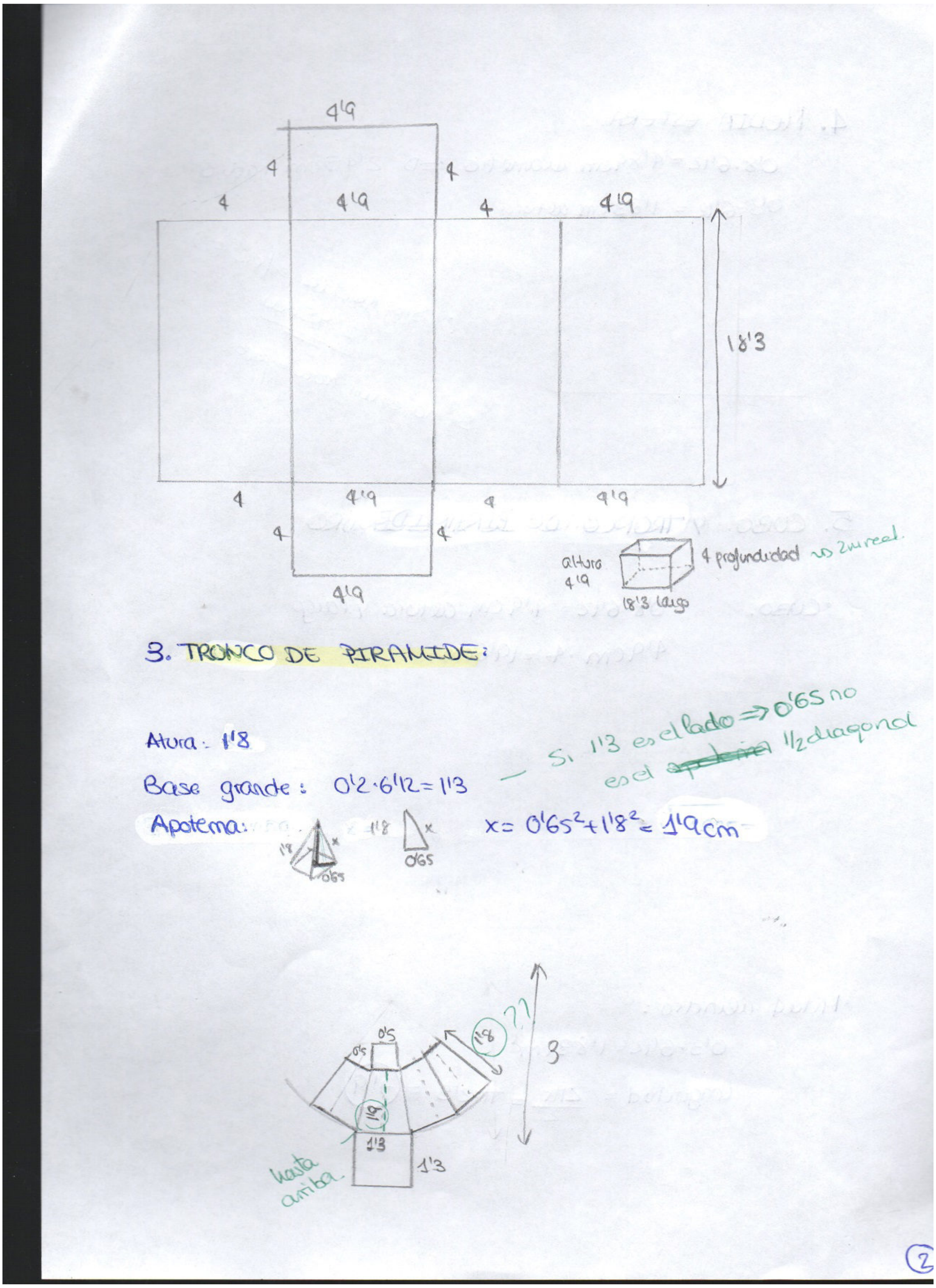


2. PRISMA DELANTERO (RECORTADO)

8'5cm → 52cm $\qquad x = \frac{3 \cdot 52}{8'5} = $ 18'3cm largo

3cm → x

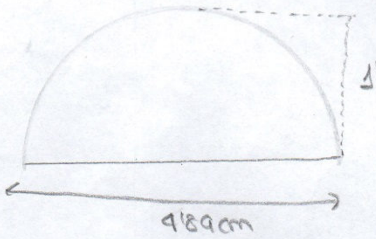
Base: 18'3 : 4 = 4'57 cm base ??


4'9
4
4
4
4'9
4
4'9
18'3
4
4'9
4
4'9
4
4
4'9
altura
4'9
4 profundidad
18'3 largo
3. TRONCO DE PIRAMIDE:
Atura: 1'8
Base grande: 0'2·6'12 = 1'3
Apotema:
1'8
x
0'65
x = 0'65²+1'8² = 1'9cm
Si 1'3 es el lado ⇒ 0'65 no
es el ~~apotema~~ 1/2 diagonal
0'5
0'5
1'8
??
3
1'9
1'3
1'3
hasta arriba.
2

4. MEDIA ESFERA.

0'8·6'12 = 4'89cm diametro ⟹ 2'45 cm radio

0'3·6'12 = 1'83 cm altura



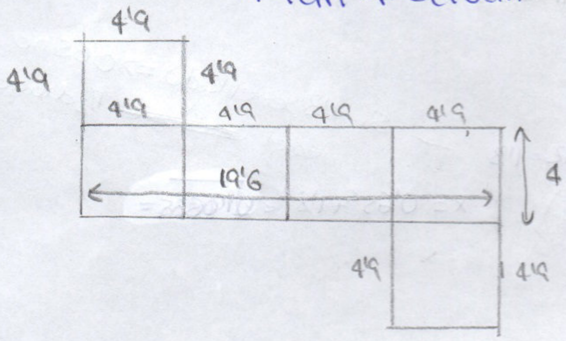
Si es media esfera ⟹ 2'45cm

Si no es un trozo esfera

5. CUBO Y LA MITAD DE UN CILINDRO

•Cubo: 0'8·6'12 = 4'9 cm altura y largo

4'9 cm ·4 = 19'6cm



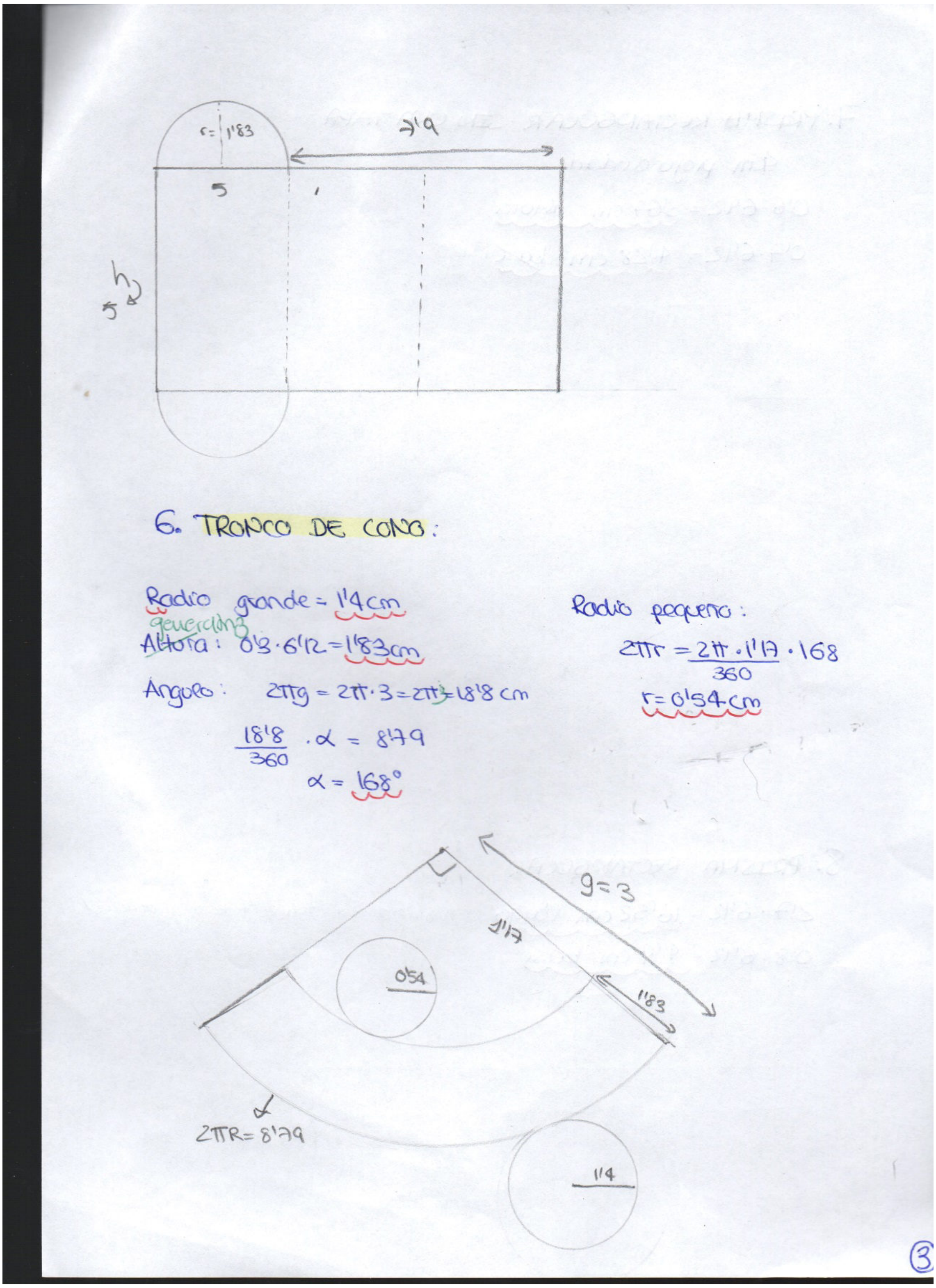
4'9 altura  4cm profundidad

4'9 largo

•Mitad cilindro:

0'3·6'12 = 1'83cm

Longitud = $\frac{2\pi r}{2}$ = π·2'5 = 7'9



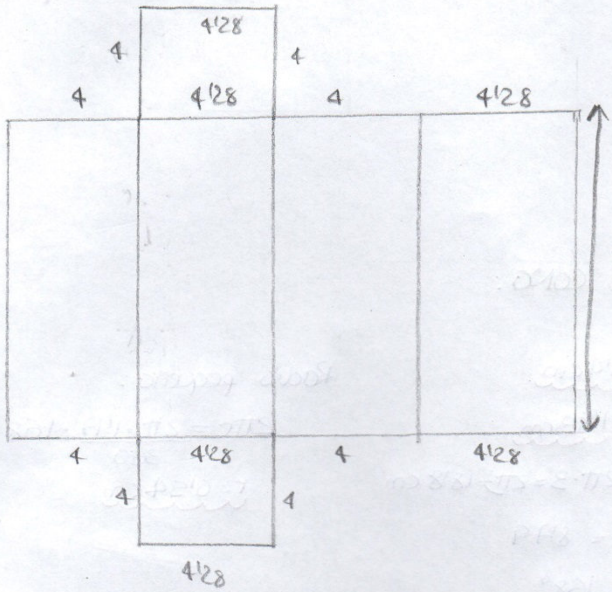
r = 1'83
5
6. TRONCO DE CONO:
Radio grande = 1'4 cm
~~Altura~~ generatriz: 0'3 · 6'12 = 1'83 cm
Ángulo: 2πg = 2π · 3 = 2π3 = 18'8 cm
18'8/360 · α = 8'79
α = 168°
Radio pequeño:
2πr = 2π · 1'17 · 168 / 360
r = 0'54 cm
g = 3
1'17
0'54
1'83
α
2πR = 8'79
1'4
3

7. PRISMA RECTANGULAR SIN UNA TAPA

4cm profundidad

0'6 · 6'12 = 3'67 cm altura

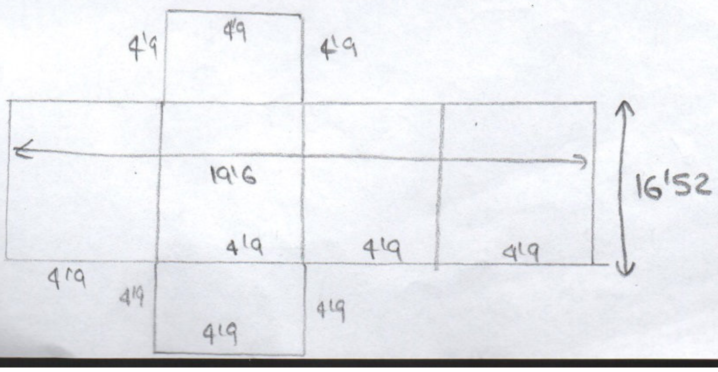
0'7 · 6'12 = 4'28 cm ~~base~~ largo



8. PRISMA RECTANGULAR

2'7 · 6'12 = 16'52 cm largo   No debería tener 4 de profundidad.

0'8 · 6'12 = 4'9 cm base

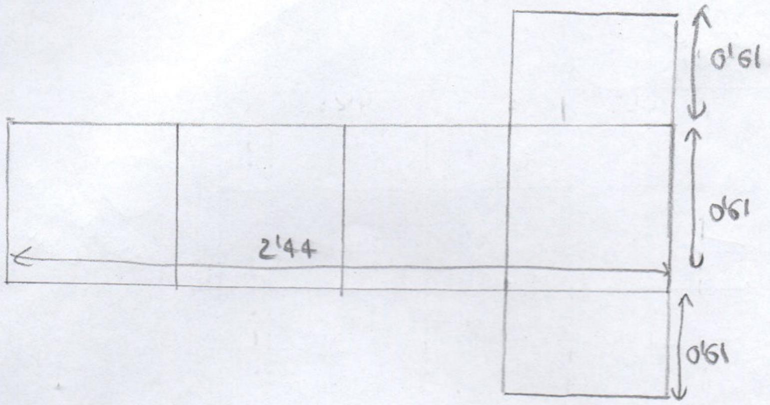


9. 2 CUBOS y 1 PRISMA

• Cubo: 0'1 · 6'12 = 0'61 cm altura /largo/ancho

Plastilina

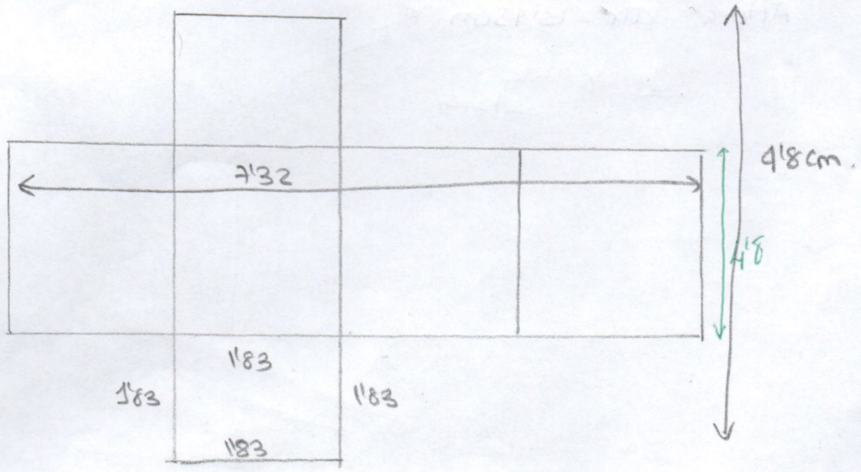
0'61 · 4 = 2'44 cm longitud



• Prisma: 0'8 · 6'12 = 4'8 cm altura

0'3 · 6'12 = 1'83 cm base largo/ancho

1'83 · 4 = 7'32 cm longitud



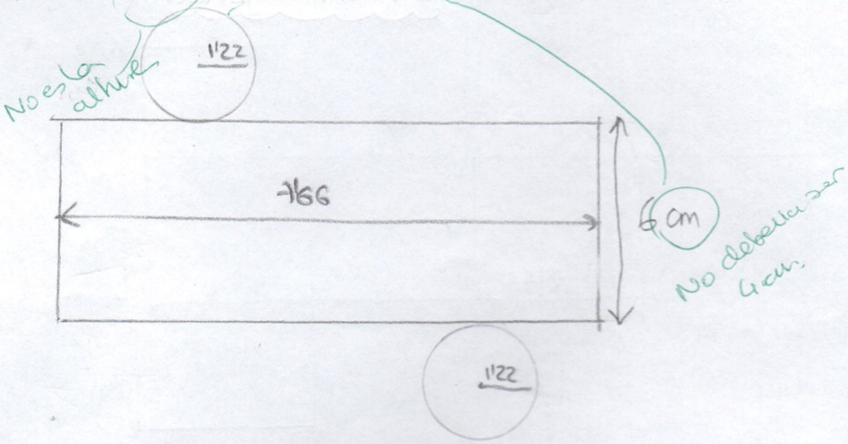
4

10. 8 CILINDROS MISMA MEDIDA PEQUEÑOS

0'4 · 6'12 = 2'44 cm diametro

radio = 1'22 cm

Altura = 2πr = 7'66 cm



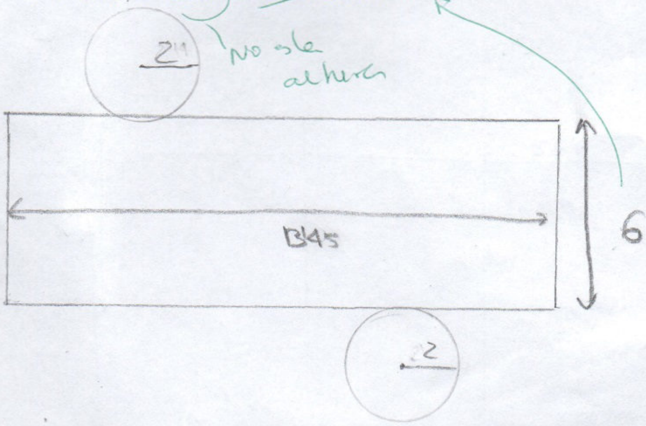
11. 2 CILINDROS MISMA MEDIDA GRANDES

0'7 · 6'12 = 4'28 cm diametro

radio = 2'14 cm

Altura = 2πr = ~~13'45~~ cm 6

No es la altura



AREAS Y VOLUMENES FIGURAS:

1. CILINDRO DELANTERO:

Area lateral: $2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 1'4 \cdot 18'3 = \boxed{160'97\ cm^2}$ B

Area total: $AL + 2\pi r^2 = 160'97 + 2\pi \cdot 1'4^2 = 160'97 + 12'31 =$ $\boxed{173'28\ cm^2}$ B

Volumen: $Abase \cdot h = 6'16 \cdot 18'3 = \boxed{112'728\ cm^3}$ OK

$Abase = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1'4^2 = 6'16\ cm^2$

2. PRISMA DELANTERO:

Area lateral: $p \cdot h = 17'8 \cdot 18'3 = \boxed{325'74\ cm^2}$ B

Area total: $AL + 2Ab = 325'74 + 2(19'6) = 325'74 + 39'2 =$

Area base: $b \cdot a = 4'9 \cdot 4 = 19'6 cm^2$ $\boxed{364'94\ cm^2}$ B

Volumen: $Abase \cdot h = 19'6 \cdot 18'3 = \boxed{358'68\ cm^3}$ B

3. TRONCO DE PIRAMIDE:

Area lateral: $\frac{(P+p) \cdot A}{2} = \frac{(5'2+2) \cdot 1'9}{2} = \frac{7'2 \cdot 1'9}{2} = \boxed{6'84\ cm^2}$ B

$P = 1'3 \cdot 4 = 5'2$

$p = 0'5 \cdot 4 = 2$ $A = 1'9$

Area total: $AL + Abase = 6'84 + 1'69 = \boxed{8'53\ cm^2}$

Area base: $l^2 = 1'3^2 = 1'69 cm^2$

$0'5^2$

1

Volumen: V_1= Grande: $\frac{A_{base}\cdot h}{3} = \frac{1'69\cdot 3}{3} = 1'69 cm^3$

V_2= Pequeña: $\frac{A_{base}\cdot h}{3} = \frac{0'25\cdot 1'2}{3} = 0'1 cm^3$

$V_1 - V_2 = 1'69 - 0'1 = \boxed{1'59 cm^3}$ B

4. MEDIA ESFERA:

Area lateral: $\frac{4\pi\cdot r^2}{2} = \frac{4\pi\cdot 2'45^2}{2} = \frac{4\pi\cdot 6'0025}{2} = \boxed{37'71 cm^2}$ B

Volumen: $\frac{4}{3}\pi\cdot r^3 \Rightarrow$ esfera entera

$\frac{2}{3}\pi\cdot r^3 \Rightarrow$ mitad esfera $= \frac{2}{3}\pi\cdot 2'45^3 = \frac{2}{3}\pi\cdot 14'70 =$ B

$\boxed{30'78 cm^3}$

5. CUBO Y MITAD DE CILINDRO:

·Cubo: Abase: $4'9^2 = \boxed{24'01 cm^2}$

Atotal: $24'01\cdot 6 = \boxed{144'06 cm^2}$

Volumen: Ancho × largo × Altura =

$4'9\cdot 4'9\cdot 4 = \boxed{96'04 cm^3}$ B

·Mitad de cilindro:

Alateral: $2\pi r\cdot h = 2\pi\cdot 1'83\cdot 5 = \boxed{57'49 cm^2}$

Atotal: $A_L + 2\pi r^2 = 57'49 + 2(\pi\cdot 1'83^2) =$

$57'49 + 2(\pi\cdot 3'34) =$

$57'49 + 20'98 = \boxed{78'47 cm^2}$ Mal

Volumen: $A_{base}\cdot h = 5'26\cdot 5 = \boxed{26'3 cm^3}$ B

Abase: $\frac{\pi\cdot r^2}{2} = \frac{\pi\cdot 1'83^2}{2} = 5'26$

6. TRONCO DE CONO:

Alateral: $\pi \cdot (R+r) \cdot g = \pi (1'4 + 0'54) \cdot 2'30 = \pi \cdot 1'94 \cdot 2'30 = \boxed{14'01 cm^2}$

generatriz: 1'83, 1'4, x

$g = 1'83$

$x^2 = 1'83^2 + 1'4^2$

$x^2 = 1'96 + 3'34$

$x = \sqrt{5'30} = 2'30$

Area total: AL + Abase = $14'01 + 6'15 = \boxed{20'16 cm^2}$

Abase: $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1'4^2 = 6'15$ NO SERÍA MEJOR LA BASE ARRIBA

Volumen: V_1 = Grande: $\frac{Abase \cdot h}{3} = \frac{6'15 \cdot 3}{3} = 6'15 cm^3$ g no es h.

V_2 = Pequeña: $\frac{Abase \cdot h}{3} = \frac{0'916 \cdot 1'17}{3} = 0'36 cm^3$

$V_1 - V_2 = 6'15 - 0'36 = \boxed{5'79 cm^3}$ mal

7. PRISMA RECTANGULAR SIN UNA TAPA:

Alateral: $p \cdot h = 16'56 \cdot 3'67 = \boxed{60'77 cm^2}$

Atotal: $Al + 2 Abase = 60'77 + 2 \cdot 17'12 = 60'77 + 34'24 = \boxed{95'01 cm^2}$

Abase: $b \cdot a = 24'01 cm^2$ B

Volumen: $Abase \cdot h = 24'01 \cdot \cancel{16'52} = \boxed{396'64 cm^3}$ 3'67

8. PRISMA RECTANGULAR:

Alateral: $p \cdot h = 19'6 \cdot 16'52 = \boxed{323'79 cm^2}$ B

Atotal: $Al + 2 Abase = 323'79 + 48'02 = \boxed{371'81 cm^2}$ B

Abase: $b \cdot a = 24'01 cm^2$

2

Volumen: Abase · h = 24'01 · 16'52 = $\boxed{\text{396'64 cm}^3}$

9. 2 CUBOS Y 1 PRISMA.

· Cubo: Abase = 0'61^2 = $\boxed{\text{0'37 cm}^2}$

Atotal = 0'37 · 6 = $\boxed{\text{2'22 cm}^2}$

Volumen = Ancho · Altura · Largo = 0'61^3 = $\boxed{\text{0'23 cm}^3}$

· Prisma: Alateral: p · h = 7'32 · 4'8 = $\boxed{\text{35'13 cm}^2}$

Atotal: AL + 2 Ab = 35'13 + 2 (3'34) =

Abase: 1'83 · 2 = 3'34 cm^2 35'13 + 6'68 = $\boxed{\text{41'81 cm}^2}$

Volumen: Abase · h = 3'34 · 4'8 = $\boxed{\text{16'032 cm}^3}$

10. 8 CILINDROS MISMA MEDIDA PEQUEÑOS:

Area lateral: 2πr · h = 2π · 1'22 · 6 = $\boxed{\text{45'99 cm}^2}$

Atotal: AL + 2πr^2 = 45'99 + 2 (π · 1'22^2) = 45'99 + 2'97 =

$\boxed{\text{48'96 cm}^2}$

Volumen: Abase · h = 4'67 · 6 = $\boxed{\text{28'02 cm}^3}$

Abase: π · r^2 = π · 1'22^2 = 4'67

Como son ocho cilindros iguales el area y el volumen sera igual.

Area total · 8 = 48'96 · 8 = $\boxed{\text{391'68 cm}^2}$

Volumen · 8 = 28'02 · 8 = $\boxed{\text{224'16 cm}^3}$

11. 2 CILINDROS GRANDES.

Area lateral: $2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 = \boxed{226'19\,cm^2}$ 4

Area total: $AL + 2\pi r^2 = 226'19 + 2(\pi \cdot 2^2) = 226'19 + 25'13 =$ $\boxed{251'32\,cm^2}$

Volumen: $A_{base} \cdot h = 12'56 \cdot 6 = \boxed{75'36\,cm^3}$

Abase: $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 12'56\,cm^2$

Como son dos cilindros tendrán la misma area y el mismo volumen.

Area total $\cdot 2 = 251'32 \cdot 2 = \boxed{502'64\,cm^2}$

Volumen $\cdot 2 = 75'36 \cdot 2 = \boxed{150'72\,cm^3}$

AREA Y VOLUMEN LOCOMOTORA EN LA MAQUETA.

AREA: $173'28 + 364'94 + 8'53 + 37'71 + 144'06 + 78'47 + 20'16 + 95'01 + 371'81 + 2'22 + 41'81 + 391'68 + 502'64 = \boxed{2232'32\,cm^2}$

↑ Hay que quitar areas laterales.

VOLUMEN: $112'728 + 358'68 + 1'59 + 30'78 + 96'04 + 26'3 + 5'79 + 396'64 + 396'64 + 0'23 + 16'032 + 224'16 + 150'72 = \boxed{1816'33\,cm^3}$

3

VOLUMEN Y AREA LOCOMOTORA REAL:

Area:

$1 cm^2$ maqueta $\longrightarrow$ $50^2 cm^2$ real

2232'32 cm $\longrightarrow$ x

B´

2232'32 · 50^2 = 5580800 cm^2 = $\boxed{558'08\ m^2 \text{ en la real}}$

Volumen: 1cm maqueta $\longrightarrow$ $50^3 cm^3$ real

1816'33 cm $\longrightarrow$ x

B

1816'33 · 50^3 = 227041250 cm^3 = $\boxed{227'041250\ m^3 \text{ en la real}}$

PRECIO DE LA PINTURA:

Buscando en Internet encontramos una pintura antioxidante para la locomotora. El precio de la pintura era 12€ y en el bote venía 1L. Con un litro daba para pintar 5m². B

1L — 5m²

x — 558'08 m²

x = 111'616 L

1L — 12

111'616 — x

$x = \frac{111'616 \cdot 12}{1} = \boxed{1339'392 €}$ costara la pintura. B-

Maqueta final del trabajo 2:

Trabajo 3:

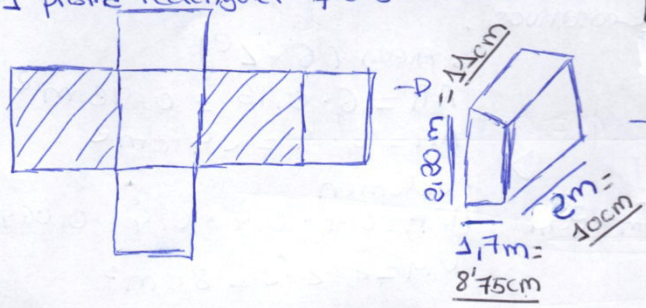
LOCOMOTORA

4

La locomotora real mide 7 metros de largo y 2m de ancho, y para hacer la maqueta, hemos cogido la escala 1 : 20.

Esta la hemos dividido en:

1 prisma rectangular que formará la cabina.



→ AREAS

$\boxed{AR} = 7'8 \cdot 2 + 2(3,4) = 22,$ [illegible] m^2

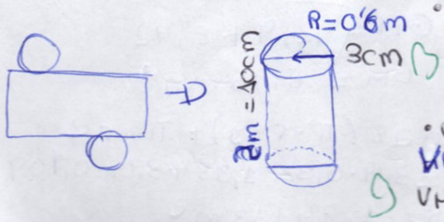
$AM = (22+17,5) \cdot 10 + 2 \cdot 87,5 = 570\ cm^2$

→ Volumenes

$VM = 8'75 \times 10 \times 11 = 962'5\ cm^3$

$\boxed{VR} = 1'75 \times 2 \times 2'20 = 7'7\ m^3$

3 cilindros iguales que forman las ruedas.



• Areas → $(2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2)$

$AR = (2 \cdot 3'14 \cdot 0'6 \cdot 2) + (2 \cdot 3'14 \cdot 0'6^2) = 9,797\ m^2$

$AM = (2 \cdot 3'14 \cdot 3 \cdot 10) + (2 \cdot 3'14 \cdot 9) = 244,92\ cm^2$

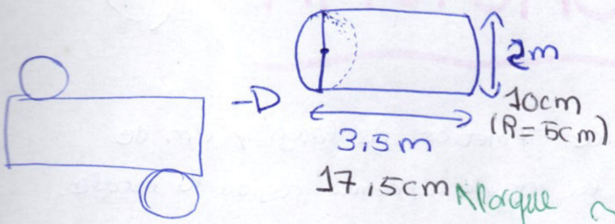
• Volumenes (Area base · h)

$VR = (3,14 \cdot 0,36) \cdot 2 = 2,2608\ m^3$

$VM = (3,14 \cdot 9) \cdot 10 = 282,6\ cm^3$

Aprox. muy floja.

1 cilindro que forma la parte delantera de la locomotora.



Porque
Ahora usas otro dato

• Areas $(2\pi r \cdot h) + 2\pi \cdot r^2$

$A_R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 3{,}5) + 2 \cdot 3{,}14 \cdot$
$= 28{,}26\ m^2$

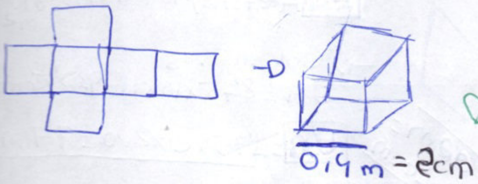
$A_M = (2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 17{,}5) + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 =$
$= 706{,}5\ cm^2$

• Volumen $(\pi r^2 \cdot h)$

$V_R = 3{,}14 \cdot 1 \cdot 3{,}5 = 10{,}99\ m$

$V_M = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 17{,}5 = 1.373{,}8\ cm^3$

3 pequeños cubos decorativos.



• Areas $(6 \cdot l^2)$

$A_R = 6 \cdot 0{,}16 = 0{,}96\ m^2$

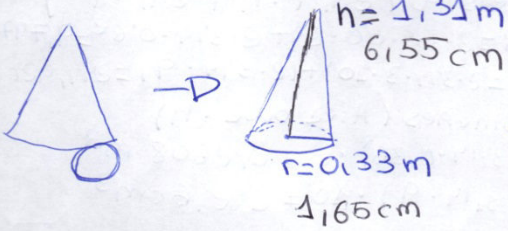
$A_M = 6 \cdot 4 = 24\ cm^2$

• Volumen

$V_R = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064\ m^3$

$V_M = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8\ cm^3$

1 cono decorativo: No informas que escala



$G_R = \sqrt{1{,}31^2 + 0{,}33^2}$

$G_R = 1{,}351\ m$

$G_M = \sqrt{42{,}9 + 2{,}72}$

$G_M = 6{,}76\ cm$

• Areas $(\pi \cdot r \cdot g) + \pi \cdot r^2$

$A_R = 3{,}14 \cdot 0{,}33 \cdot 1{,}35 + 3{,}14 \cdot 0{,}109$

$A_R = 1{,}74113\ m^2$

$A_M = (3{,}14 \cdot 1{,}65 \cdot 6{,}76) + 3{,}14 \cdot 2{,}72$

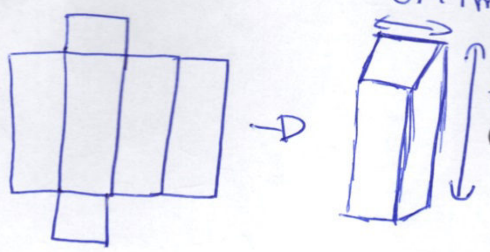
$A_M = 43{,}5644\ cm^2$

Volumenes $\left(\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}\right)$

$V_R = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}109 \cdot 1{,}31}{3} = 0{,}1495\ m^3$

$V_M = \frac{3{,}14 \cdot 2{,}72 \cdot 6{,}55}{3} = 55{,}942\ cm^3$

1 prisma rectangular que actua como la chimenea



• Áreas $(p \cdot h) + 2 \cdot A \text{ base})$

$AR = 3{,}5 \cdot 1{,}31 + 2 \cdot 0{,}44^2$
$= 4{,}97 \ m^2$

$AM = 17{,}5 \cdot 6{,}55 + 2 \cdot 2{,}2^2$
$= 124{,}31 \ cm^2$

• Volúmenes (Área base · h)

$VR = 0{,}1936 \cdot 1{,}31$
$VR = 0{,}2536 \ m^3$
$VM = 4{,}84 \cdot 6{,}55 = 31{,}702 \ cm^3$

ÁREAS:

- Maqueta → $570 + (3 \cdot 244{,}92) + 706{,}5 + (3 \cdot 24) + 43{,}564 + 124{,}31 =$ $\boxed{= 2.251{,}134 \ cm^2}$ 2.139,1 2,88
- Real → $22{,}4 + (3 \cdot 9{,}797) + 28{,}26 + (0{,}96 \cdot 3) + 1{,}74 + 4{,}97$ $\boxed{= 89.641 \ m^2}$

Volúmenes:

- Maqueta → $962'5 + (3 \cdot 282{,}6) + 1.373{,}8 + (3 \cdot 8) + 55{,}942 +$ $31{,}702 = 3.295{,}744 \ cm^3$
- Real → $7{,}7 + (3 \cdot 2{,}2608) + 10{,}94 + (3 \cdot 0{,}064) + 0{,}1495$ $+ 0{,}2536 = 26{,}0675 \ m^3$

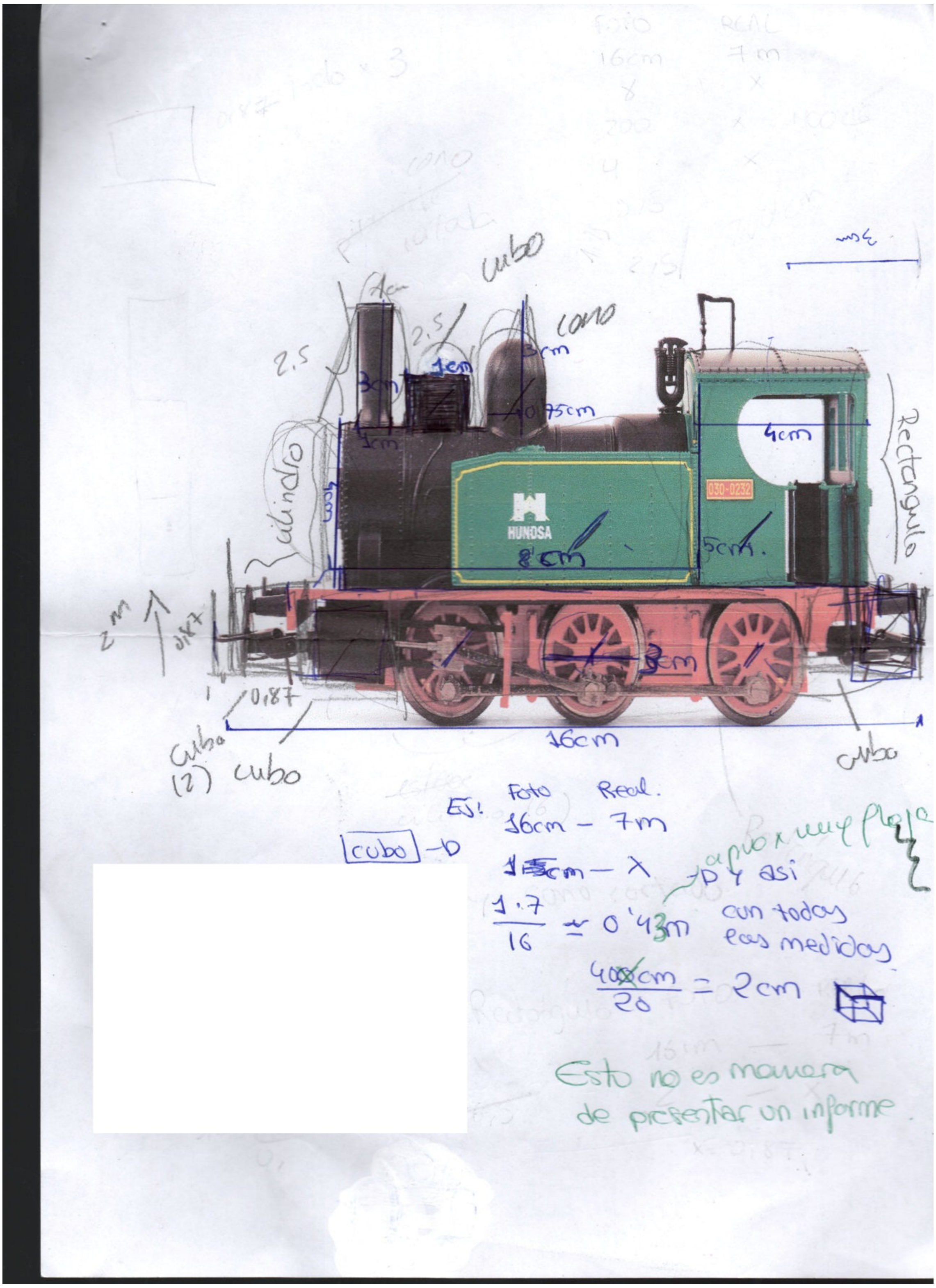
Bote de pintura:

$1 \ l \rightarrow 12 \ €$
$89.641 \rightarrow x$

$x = \frac{89641 \cdot 12}{1} = 1.075.692 €$??

$\frac{1.075.692}{5} = 215.138{,}4 \ l$

comparar m^2 con l


cubo
cono
cilindro
Rectangulo
4cm
8cm
5cm
16cm
cubo
(2) cubo
EJ: Foto Real.
16cm – 7m
cubo
1·7 / 16 ≃ 0'43m
y así con todas las medidas
aprox muy flojo
Esto no es manera de presentar un informe

Maqueta final del trabajo 3: