Aitor CASTILLO LÓPEZ

FUNTZIOAK

FUNTZIOEN IKASKETA PROZESU BAT PUZZLE METODOLOGIAREN BIDEZ DBH2N

MBL 2017

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

MATEMATIKA Arloa

Unibertsitate Masterra Bigarren Hezkuntzako Irakasletzan

Unibertsitate Masterra Bigarren Hezkuntzako Irakasletzan

Derrigorrezko Bigarren Hezkuntza, Batxilergoa, Lanbide Heziketa eta Hizkuntzen Irakaskuntza

Master Bukaerako Lana

Matematika Arloa

Funtzioen ikaskuntza prozesu bat puzzle metodologiaren bidez DBH2n

Aitor Castillo López

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Laburpena

Esku artean daukazun txostena Master Bukaerako Lan (MBL) bat da; Bigarren Hezkuntzako Irakasletzako Master Unibertsitarioaren Bukaerako Lana, alegia. Ikasturtean ikasitakoari amaiera emateko, MBL honek DBH 2. mailako funtzioen unitatea ikasteko modu ezberdinen aurrean ikaslearen erantzuna zein izanen den aztertzea du helburu nagusi. Txosten honek azaldu egiten du zein izan den esperimentuaren diseinua, lagina emaitzak e.a. baina horretarako aldez aurretik eginiko analisia ere aztertu egiten da. Aurrekoa dela eta, lana bi ataletan antolatu da. Lehenengoan, curriculumaren eta testu-liburuen luzetarako azterketa egiten da Lehen Hezkuntzako hirugarren zikloan, Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzan eta Batxilergoan, zehazturiko gaiaren inguruan. Bigarrenean, berriz, funtzioei buruzko ikasketa prozesu bat proposatzen da, eta proposamen hori DBH 2. ikasmailari dagokion ikasgela batean ezarri da, Masterreko Practicum II irakasgaiaren baitan. Esperimentazio horretatik lortu diren emaitzak *ad hoc* diseinaturiko galdetegi batean oinarritzen dira, kontuan hartuz, halaber, baldintzapen instituzionalak. Sintesia, zenbait ondorio eta erantzun gabe gelditu diren zenbait galdera borobildu eta itxiko dute lana.

Abstract

This final Master's degree Work aims to study the learning process of mathematical functions in second grade of high school. This work is not merely a research dossier, furthermore, it is a memory report of all those things learned during the academic year. The work is structured in two parts. In the first one, there is a longitudinal study of the curriculum and the textbooks in the third cycle of Primary, Secondary Education and Baccalaureate, in relation to the indicated topic. The second part suggests a process of study on functions, which has been launched in a classroom of second grade of high school in the framework of Practicum II of the Master. The results obtained from this experimentation are based on an ad hoc questionnaire, also taking into account institutional constraints. The work concludes with a synthesis, conclusions and open questions.

Resumen

Este trabajo es un Trabajo de Fin de Máster (TFM), exactamente, del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria en la especialidad de Matemáticas. Tiene como finalidad investigar el proceso de aprendizaje de las funciones matemáticas en una clase de alumnos de 2º de Educación Secundaria Obligatoria, pero además, este trabajo es también una memoria de todo lo aprendido durante el curso académico. Para facilitar su comprensión, este TFM ha sido dividido en dos partes. En la primera se analizan los contenidos y cómo evaluarlos tal y como se presenta nen el currículo oficial de enseñanzas. En la segunda, se detalla cómo es el experimento propuesto, la muestra los resultados etc.: Es decir, La primera parte esta compuesta por el análisis *a priori*, mientras que la segunda está dirigida a analizar los datos *a posteriori*. Como cierre del trabajo se expondrán la síntesis, las conclusiones y las preguntas sin responder que hayan podido quedar.

AURKIBIDEA

Sarrera orokorra

Master Bukaerako Lan honek DBH 2. mailako funtzioen unitatea ikasteko modu ezberdinen aurrean ikaslearen erantzuna zein izanen den aztertzea du helburu nagusi.

Lana bi ataletan antolatu da. Lehenengoan, curriculumaren eta testu-liburuen luzetarako azterketa egiten da Lehen Hezkuntzako hirugarren zikloan, DBHn eta Batxilergoan, zehazturiko gaiaren inguruan.

Bigarrenean, funtzioei buruzko ikasketa prozesu bat proposatzen da, eta proposamen hori DBH 2. ikasmailari dagokion ikasgela batean ezarri da, Masterreko Practicum II irakasgaiaren baitan. Esperimentazio horretatik lortu diren emaitzak *ad hoc* diseinaturiko galdetegi batean oinarritzen dira, kontuan hartuz, halaber, baldintzapen instituzionalak.

Lanaren amaieran, aurkeztu egiten dira sintesia, zenbait ondorio eta erantzun gabe gelditu diren zenbait galdera.

I Atala:

Funtzioak indarrean dagoen curriculumean eta testu-liburuetan

Master Bukaerako Lanaren lehenengo zati honetan, aztertu egiten da funtzioen gaiari zer nolako tratamendua egiten zaion curriculumean eta testu-liburuetan Lehen Hezkuntzako hirugarren zikloan, DBHn eta Batxilergoan.

Analisia lau kapitulutan banatzen da. Lehenengo eta bigarren kapituluetan, taula-formatuan aurkezten dira indarrean dagoen curriculumeko edukiak eta ebaluazio irizpideak, ikasmailen arabera.

Hirugarrenean, DBHko testu-liburuetan azaltzen diren jardueren adibideak aurkezten dira (ariketak, problemak, galderak eta egoerak), DBH 2. Ikasmaila aurreko bi ikasturteetako eta hurrengo bi ikasturteetako jarduerak, alegia.

Behin bi iturri horietako (curriculuma eta testu-liburuak) edukiak konparatu ostean, analisi horren ondorioak laugarren kapituluan aurkezten dira. Hemen, helburua izango da esku-liburuek indarrean dagoen curriculumarekiko duten koherentzia baloratzea, eta nabarmendu egingo dira analisirako gaia den ezagutza matematikoak horietan dituen ausentziak eta presentziak.

1 Kapitulua: Funtzioak indarrean dagoen curriculumean

Kapitulu guztietan lehen honek kontestuan sartzen lagunduko du eta gaur egun indarrean dagoen curriculumean agertzen diren funtzioen gaiari buruzko, edota, funtzioen gaiarekin hertsiki loturiko edukien zerrendatzea eginen da.

Lehen kapitulu hau hiru azpiataletan banatu egin da: Lehen Hezkuntzako edukiak, Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako edukiak eta, azkenik, Batxilergoko edukiak.

1.1- Lehen hezkuntzako edukiak

Lehen Hezkuntzako (LH) curriculumak (NG, 2014) zehaztu egiten ditu hirugarren zikloan ikasleek landu beharreko eduki matematikoak. Lan honen eremua Derrigorrezko Bigarren Hezkuntza (DBH) den arren, LHko eduki horien analisi bat egitea interesgarria da, laburrean besterik ez bada ere, eduki horiek determinatzen dutelako DBHko lehenengo mailan ikasle batek izango dituen aurre ezagutzak.

Azterketaren asmoa funtzioen ataleko edukiak aztertzea den arren, maiz ikusiko da ezinbestekoa dela, baita ere, eduki horiei loturiko zenbakizko edukiak eta eduki aljebraikoak aipatzea, zenbaitetan estuki loturik agertzen direlako eduki funtzionalak eta horien manipulazio aljebraikoa.

LHko 5. ikasmailan, eduki funtzionalak aldagai estatistikoen eta ausazko prozesuen adierazpen grafikoei hertsiki loturik agertzen dira. Ikasleek datu kualitatiboak eta kuantitatiboak bildu eta sailkatzen dituzte maiztasun tauletan, eta barra-diagrama eta sektore-diagrama errazak eraiki eta interpretatu behar dituzte. Barra-diagrametan, ardatz cartesiarren hasierako erabilera bat egiten da, eta sarrera hori baliagarria izango da etorkizunean, bi aldagai nahasten dituzten funtzioen adierazpenak egiteko.

Bi aldagairen arteko harreman funtzionalak aztertzeko, geometriak ematen du testuinguru naturala. Lehenengo eta behin, irudi geometriko lauen eta espazioko formek dituzten elementuen izendatzea identifikatzea lantzen da, esate baterako, zirkunferentziaren elementurena: zentroa, erradioa, diametroa, korda, arkua, tangentea eta zirkulu-sektorea. Behin identifikazioa landurik, elementu horiek dituzten mendekotasunen analisia eta sailkapena lantzen dira da: adibidez, behin poligonoak identifikatu eta izendatu ostean, horien sailkapena egiten da aldeen kopuruaren arabera, paralelismoaren arabera, angeluen arabera, ahurtasun eta ganbiltasunaren arabera, e.a.

Aurrerago, erlazio horien arteko loturek, perimetroaren eta azaleraren analisia eta kalkulua ekarriko dute, non zenbakizko adierazpenak eta adierazpen aljebraikoak agertuko diren. Zenbakizko izaera eta izaera aljebraikoa duten eduki geometriko horiek lotura dute adierazpen funtzionalekin, esate baterako, espazioaren oinarrizko irudikapenak egitearekin, eskalen bidez eta grafiko errazen bidez. Testuinguru horretan, koordenatu cartesiarren sistema erabiltzen da, baita ere, mugimenduen deskribapena egiteko.

Ardatza cartesiarrak erabiltzen diren aldiro, erabilitako unitateak adierazi behar dira, eta eduki horiek lotura dute, honenbestez, neurriarekin ere, batez ere. Neurtuko diren magnitudeak, oro har, luzera, azalera eta denbora izango dira, eta honela, sistema metriko hamartarra landu beharko da, eta baita sistema hirurogeitarra ere.

Bai taula eta grafikoak egiterako orduan, nola irudi geometrikoen analisia egiterako orduan ere, ezinbestekoa da zenbakien arteko ohiko eragiketak egitea, eremu naturalean, zatikiekin edota zenbaki hamartarrekin. Honela, testuinguru funtzionalean, aztertu behar izaten dira zenbaki arrazional eta hamartarren arteko loturak eta horien propietateak, hurbiltzeak eta borobiltzeak, eragiketak, e.a. Barra diagramen adierazpenetan, zenbakien ordena lantzeko testuinguru bat aurkituko dugu, eta sektore diagramak eraikitzerako orduan, berriz, ehunekoak eta horien propietateak aztertzeko testuingurua izango dugu.

Arestian aipatu bezala, LHko 6. ikasmailan ere, eduki funtzionalak aldagai estatistikoen eta ausazko prozesuen adierazpen grafikoei hertsiki loturik agertzen dira. Datu kuantitatiboak eta kualitatiboak bildu eta sailkatzen dituzte maiztasun tauletan, eta barra-diagrama, eta sektore-diagrama errazak eraiki eta interpretatu behar dituzte ikasmaila honetan ere diagrama poligonalak ez beste. Gainera, ikasmaila honetan eta lehenengo aldiz moda agertzen da, nolabait, funtzioen maximoekin guztiz erlazionaturiko kontzeptua.

Geometriaren esparruari dagokionez, espazioaren oinarrizko irudikapena, eskala eta grafiko errazak interpretatzeak uztartu ditzake geometria eta aurreko ildoa. Ikasmaila honetan elementu geometriko gehiago agertzen dira, baina, elementuen harreman funtzionalaz haratago, elementuen arteko menpekotasunak agertuko dira inplizituki, hala nola, prisma, piramidea, zilindroa eta konoaren azalera eta bolumenak kalkulatzeak, nahiz eta inplizituki izanda ere, parametroak erlazionatuko dituzten funtzioak erabiltzea inplikatzen du. Hortaz, berriro ere, erlazio horien arteko loturek, azaleren zein bolumenaren analisia eta kalkulua dakarte, eta ondorioz, zenbakizko adierazpenak eta paramatroz osaturiko adierazpen aljebraikoak.

Geometriaren alorrean simetria ere landuko da, etorkizunean funtzioen esparruan aztergai izanen den funtzioen ezaugarri dena.

Curriculumean lehenengo aldiz koordenatu cartesiarren sistema agertzen da esplizituki, eta ondorioz, ardatzen unitateak adierazi beharko dira, beraz, neurrien erabilera funtzioen irudikapenarekin hertsiki loturiko alorra izanen da. Ikasmaila honetan neurtuko diren magnitudeak, oro har, luzera eta bolumena izango dira, eta honela, sistema metriko hamartarra errepasatuko da.

Gainera, proportzioa eta funtzio linealekin erlazioa duen gaia ematen da neurrien alor honetan: moneta sistema. Moneta sistema baliokidetasunak, eragiketak eta kanbioak aplikatuz erabiltzea dute eduki eta etorkizunean funtzio linealak ulertzen lagunduko du.

Aurreko guztien analisia egiterako orduan ere, ezinbestekoa da zenbakien arteko ohiko eragiketak egitea, eremu naturalean, zatikiekin edota zenbaki hamartarrekin. Honela, testuinguru funtzionalean, aztertu behar izaten dira zenbaki arrazional eta hamartarren arteko loturak eta horien propietateak, hurbiltzeak eta borobiltzeak, eragiketak, e.a. Garrantzitsua da zifren balio posizionala, ostean, ardatz cartesiarrean zenbakiak egoki kokatu ahal izateko.

Laburpen moduan 1. taulan bildu dira LHko hirugarren zikloari dagozkien aipatutako edukiak.

1.2- Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako edukiak

Hurrengo atal honetan zehar DBHko edukiak aztertuko dira (NG, 2007) eta aurreko atalean bezala bi ziklotan banatu dira lau ikasturteak; lehen zikloa eta bigarren zikloa. Lehen zikloak 1. eta 2. ikasmailak hartzen ditu barne, bigarrenak, berriz, 3. eta 4. ikasmailak.

ADIERAZLEA	3. zikloa
A1 Grafikoak	4. MULTZOA. GEOMETRIA. -Kokapena planoan eta espazioan. -Zuzenen eta zirkunferentzien arteko posizio erlatiboak. -Espazioaren oinarrizko irudikapena, eskala eta grafiko errazak. -Erregulartasunak eta simetriak: erregulartasunak ezagutzea eta, zehazki, ardatz eta ispilu motako simetriak. 5. MULTZOA. ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA. -Estatistikako grafiko eta parametroak. -Intuizioz zentralizazio neurriekin hastea: batez besteko aritmetikoa eta moda. -Grafiko errazak interpretatzea: barra-diagramak, poligonalak eta sektorialak. -Estatistikako grafikoen bidez aurkezten diren informazioen azterketa.
A2 Espazio cartesiarra	3. MULTZOA. NEURRIAK. -Sistema metriko hamartarreko unitateak. -Luzera, edukiera, pisua. -Magnitude bereko neurriak konparatu eta ordenatzea. 4. MULTZOA. GEOMETRIA. -Koordenatu cartesiarren sistema. Kokapenen eta mugimenduen deskribapena.
A3 Funtzioak	3. MULTZOA. NEURRIAK. -Sistema metriko hamartarreko bolumen unitateak. -Moneta sistema. Moneta sistema baliokidetasunak, eragiketak eta kanbioak aplikatuz erabiltzea.
A4 Idazkera aljebraikoa	2. MULTZOA. ZENBAKIAK ETA ALJEBRA. -Eragiketen propietateak eta haien arteko erlazioak zenbaki arruntak erabiliz. -Portzentajeak. Zatiak portzentajeak erabiliz adieraztea. -Algoritmoen automatizazioa. -Kalkuluak buruz egiteko estrategiak landu eta erabiltzea. -Kalkulua: Batuketaren, kenketaren, biderketaren eta zatiketaren algoritmo estandarrak erabiltzea. Algoritmoen automatizazioa. Batuketa moduan eta batuketa-biderketa moduan deskonposatzea.
A5 Zenbaki zuzena	2. MULTZOA. ZENBAKIAK ETA ALJEBRA. -Zenbaki osoak, hamartarrak eta zatikiak: Zenbakizko ordena. Zenbakien konparazioa. -Zenbaki-sistema hamartarra: zifren balio posizionala, hamarrekoak, ehunekoak, etab. -Zatikiaren eta zenbaki hamartarraren arteko erlazioa, zatikiak ordenatzeko aplikatzea. -Hainbat motatako zenbaki multzoak ordenatzea. -Zenbaki positiboak eta negatiboak.

1. taula: Lehen Hezkuntzako edukiak.

Curriculumean esplizituki ‘funtzioak eta grafikak’ multzoa agertzen den lehen ikasmaila da DBHko lehen hau. Baina, multzo hau ez da funtzioen gaiari heltzen dion bakarra zeren eta zeharkako eduki anitz aurki daitezke geometria, zenbakiak eta aljebra bezalako multzootan. Aipatu beharrekoa da oraingoan estatistika eta probabilitatea eduki multzoa funtzioekin izan zezakeen erlazioa galdu duela, aurreko atalean ez bezala, oraingoan, funtzioen inguruko eduki multzoa banandu baitute.

Alabaina, has gaitezen funtzioak eta grafikak eduki multzoa aztertzen. Honen arabera, datuak balio-tauletan antolatu beharko dituzte ikasleek, gerora, balio-taula aztertu ondoren, zuzeneko proportzionaltasun erlazioak identifikatzeko eta magnitudeak zuzenki proportzionalak ez diren kasuetan, kontradibideak erabiltzeko. Eguneroko egoeretan mendekotasun harremanak identifikatu eta hitzez adierazi beharko dituzte ere.

Geometria eduki multzo eta funtzioen eduki multzoen arteko zubi izanen da plano cartesiarra. Koordenatu cartesiarrak erabiltzen ikasten hasten dira nerabeak. Ardatz koordenatuen sisteman puntuak irudikatu beharko dituzte eta baita puntuak identifikatu beren koordenatuetatik abiatuta ere. Zer esanik ez, plano cartesiarra zein ardatz cartesiarrak hertsiki loturik daudela zuzenen propietateekin; paralelotasuna eta perpendikulartasuna, alegia.

Hortaz, hurrengoak izanen dira geometria multzotik eman beharreko eta funtzioen gaiarekin erlazioa duten eduki sorta. Lehenik eta behin irudi lauen simetria;

irudien simetria hautemateak funtzioen simetria hautematera eramanen du. Bigarrenik, formulen bidez azalerak estimatzea. Formulak baliatzea … Eta hirugarrenik mundu fisikoko egoerak, formak, propietateak eta egiturak zehaztasunez deskribatzeko terminologia egokia erabili beharko dute, ondorioz, funtzioen deskribapenerako hizkuntzan trebatuko dira ikasleak.

Alor aljebraikoari dagokionez, ezezagunak diren zenbakiak eta zehaztu gabeko zenbakiak sinbolizatzeko letrak erabiliko dira, beraz, aldagai kontzeptua lantzen da inplizituki. Eguneroko hizkuntzako adierazpenak hizkuntza aljebraikora itzuli zein aurkako bidea egin beharko dute ikasleek eta formula sinpleetan zenbakizko balioak lortu beharko dituztenez, espresio aljebraikoen interpretazioa landuko dute.

Bukatzeko, zenbaki edukien multzoan ere hainbat eduki agertzen dira funtzioen alorrarekin erlaziona daitezkeenak, eta hauen artean adibiderik nabarienak zenbaki negatiboak ezagutzea eta eragiketen hierarkia dira. Parentesien erabilera egokia funtsezkoa izanen da funtzioekin ibiltzean. Garrantzia edukiko dute zenbaki hamartarrek ere. Zatikien eta hamartarren arteko erlazioak ardatz cartesiarraren erabilera egokia ahalbidetuko du.

Bukatzeko, aipatu beharrekoa da ‘guztientzako edukiak’ delako multzoan tresna teknologikoak erabiltzea aipatzen dela, eta lan honekin erlazioa dauka GeoGebra plataforma erabili baita unitatean zehar.

Lehen zikloko bigarren ikasmaila honetarako ere ‘funtzioak eta grafikoak’ delako eduki multzoan banandu da. Oraingoan, datu bilketa ez beste grafiken analisian oinarritzen dira edukiak. Sakonago aztertzen dira grafikak eta funtzioen analisira joko duten edukiak emanen dira, etorkizuneko funtzioen analisiari begira.

Grafikoki aurkeztutako fenomenoen deskripzio lokala eta orokorra egitea bilatzen da. Azterketa grafikoaren ekarpenak egoera bat aztertzeko; hazkundea eta beherapena, alegia, zein jarraitutasuna eta etena ikasi beharreko edukiak dira. Ardatzekiko ebakiguneak zein maximo eta minimo erlatiboak ere curriculumak ezarritako edukiak dira. Ikusten den moduan funtzioen eta grafikoen deskribapen kualitatiboari heldu nahi dioten edukiak dira.

Bestetik, aurreko urteetan emandako edukiak ere berreskuratzen dira, hala nola, taulak eta datu bilketa, non, oraingoan adierazpen aljebraiko sinpleetatik datuak lortzea eskatzen zaion ikasleari. Gainera, zuzenki edo alderantziz proportzionalak diren bi magnituderen arteko erlazioa ulertu beharko du ikasleak haien balio-taularen eta grafikoaren analisiaren bidez. Beraz, proportzionaltasunari lotuz, proportzionaltasun-konstantea interpretatu eta benetako egoerei aplikatzea eskatzen da.

Funtzioen barne kalkulagailu-grafikoen eta ordenagailu-programen erabilera ere aurki daiteke, ikasleek grafikoak egin eta interpreta dezaten. Baina, azken hau guztientzako edukietan barne ere aurki daiteke.

Aljebrari dagokionez funtzioen esparrutik hurbil geratzen da. Ikasmaila honetarako eduki aljebraikoak lehenengo mailako ekuazioak ebaztera bideratu dira. Lehenik, ikasleek adierazpen aljebraiko baten zenbakizko balioa nola lortu eta ekuazioen eta beren soluzioen esanahia ikasi behar dute ondoren problemak ebazteko erabiltzeko.

Geometrian ere aurki daitezke aurrekoekin erlazionatutako edukiak: adibidez, segmentuen proportzionaltasuna edota eskala-faktorea. Irudien arteko erlazioak egiaztatzeko, Thales dela medio, proportzionaltasun konstantea agertzen da berriro eta funtzioen esangura ulertzeko lagungarri suerta daiteke. Ordea, bolumenak kalkulatzea, parametroekin edota aldagai anitzeko funtzioekin lotzen du geometria.

Aurreko urtean izan bezala, oraingoan ere estatistika eta probabilitatea funtzioen esparrutik aldentzen da, datu bilketan eta grafiken interpretazioan soilik aurki daiteke funtzio esparruarekin lotura.

Bigarren taulan ikus daitekeen moduan funtzioekin zerikusia duten edukiak bildu dira (Ikusi 2. taula).

ADIERAZLEA	**1.**	**2.**
A1 Grafikoak	4. multzoa. Geometria – Planoan irudi geometrikoak deskribatzeko oinarrizko elementuak. Mundu fisikoko egoerak, formak, propietateak eta egiturak zehaztasunez deskribatzeko terminologia egokia erabiltzea. 5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Taulan aurkeztu edo grafikoan irudikatutako informazioen interpretazio puntuala eta orokorra.	5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Grafikoki aurkeztutako fenomenoen deskripzio lokala eta orokorra. – Azterketa grafikoaren ekarpenak egoera bat aztertzeko: hazkundea eta beherapena. Jarraitutasuna eta etena. Ardatzekiko ebakiguneak. Maximo eta minimo erlatiboak. – Balio-taula, enuntziatu edo adierazpen aljebraiko sinple batetik abiatuta, egoera bat grafikoki irudikatzea.
A2 Espazio cartesiarra	4. multzoa. Geometria – Planoko irudien propietateak eta erlazioak aztertzea: paralelotasuna eta perpendikulartasuna.. 5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Koordenatu cartesiarrak. Ardatz koordenatuen sisteman puntuak irudikatzea. Puntuak identifikatzea beren koordenatuetatik abiatuta.	5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Kalkulagailu grafikoak eta ordenagailu-programak erabiltzea grafikoak egin eta interpretatzeko.
A3 Funtzioak	4. multzoa. Geometria – Irudi lauen simetria. Naturan eta eraikuntzetan simetria hautematea.	3. multzoa. Aljebra – Lehen mailako ekuazioak ebaztea. 5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Grafikoki aurkeztutako fenomenoen deskripzio lokala eta orokorra. – Azterketa grafikoaren ekarpenak egoera bat aztertzeko: hazkundea eta beherapena. Jarraitutasuna eta etena. Ardatzekiko ebakiguneak. Maximo eta minimo erlatiboak.
A4 Idazkera aljebraikoa	3. multzoa. Aljebra – Letrak erabiltzea hasiera batean ezezagunak diren zenbakiak eta zehaztu gabeko zenbakiak sinbolizatzeko. – Eguneroko hizkuntzako adierazpenak hizkuntza aljebraikora itzultzea eta alderantziz. – Formula sinpleetan zenbakizko balioak lortzea.	3. multzoa. Aljebra – Propietateak orokortu eta erlazioak sinbolizatzeko hizkuntza aljebraikoa. Pautak eta erregulartasunak behatu ondoren formula eta termino orokorrak lortzea. – Adierazpen aljebraiko baten zenbakizko balioa nola lortu. – Lehen mailako ekuazioak ebaztea. 4. multzoa. Geometria – Gorputz geometrikoen bolumenak.
A5 Zenbaki zuzena	2. multzoa. Zenbakiak – Zenbaki negatiboen beharra, egoerak eta aldaketak adierazteko. – Zenbaki osoen bidezko eragiketen esanahia eta erabilerak. – Zenbaki hamartarrak. Zatikien eta hamartarren arteko erlazioak.	2. multzoa. Zenbakiak – Berbidura perfektuak. Erro karratuak. Erro hurbilduak estimatu eta lortzea.

2. taula: DBHko lehenengo zikloko edukiak.

DBHko bigarren zikloko lehen ikasmaila honetan ere ‘funtzioak eta grafikoak’ delako eduki multzoa agertzen da. Edukien multzoa aztertuz aurki daiteke orokorrean bi motako edukitan bana daitezkela: grafiken deskripzio kualitatiboen ingurukoak eta funtzioen aljebran sakontzen dutenak.

Lehen multzoari jarraiki, ikasleek eguneroko gertaerak eta beste irakasgai batzuetako fenomenoak adierazten dituzten grafikoen analisia eta deskripzio kualitatiboa egiten hasi beharko dira, deskribapen kualitatibotik haratago, egoera baten analisia egin beharko dute, dagokion grafikoaren ezaugarri lokalak eta orokorrak aztertuz: eremua, jarraitutasuna, monotonia, muturrak eta ebakiguneak. Informazioaren teknologiak erabiltzea funtzio eta grafikoen analisi kontzeptuala egiteko eta haien propietateak ezagutzeko izanen da ere eman beharreko edukia, zeinak grafiko batek adierazten duen fenomenoaren portaerari buruz hipotesiak egiteko helburua dauka.

Funtzioen inguruko eduki aljebraikoak aztertzearren, aipatutako grafiko horien adierazpen aljebraikoak adierazten duten fenomenoen portaerari buruz hipotesiak ere egin beharko dituzte ikasleek. Honela, funtzioen adierazpen aljebraikoan sakonduko da. Honen adibide da eredu linealak erabili beharko dituztela hainbat jakintza-arlotan eta eguneroko bizitzan gertatzen diren egoerak aztertzeko. Honetarako, taulak egin, irudikapen grafikoak egin eta adierazpen aljebraikoak lortu beharko dituzte ikasleek. Gainera, abstrakzioan aurrera-pauso gisa, zuzenaren ekuazioa irudikatzeko modu desberdinak erabiliko dituzte.

Ikus daitekeen moduan, zenbat eta curriculumeko ikasmailetan gorago jo, aljebra eta funtzioak hainbat eta hurbilago daude elkarren artetik. Honen adibide dira eduki aljebraikoen multzoan aurki daitezkeen eduki batzuk: ezezagun bakarra duten lehen eta bigarren mailako ekuazioak ebaztea eta, bi ezezaguneko bi ekuazio linealek osatutako sistemak. Azkenik adierazpen aljebraikoak eraldatzea eta berdintasun nabarmenak ditugu.

Aipatzekoa da beste eduki-aljebraikoek ere garrantzia handia dutela etorkizunean matematika ikasteko prozesuan. Segida errepikariak, progresio aritmetiko zein geometrikoak eta zenbaki multzoen erregulartasunak ulertzea oinarrizkoa da edozein funtzioen analisi moduko liburua jarraitu nahi bada. Barragués et al. (2014) ikus daitekeen moduan, funtzioen analisirako erabiltzen den oinarrizko kontzeptua limitea da; hots, ez dago limitea definitzerik segidak ulertu gabe, serieak ulertu gabe integral anitzen konbergentzia frogatzerik ez dagoen hein berean.

Zenbaki hamartarrak eta zatikiak izanen dira eman beharreko edukiak zenbakien alorrean: zatikiak hamartar bihurtzea eta alderantziz, zenbaki hamartar zehatzak eta periodikoak, zatiki sortzailea, zatiki eta hamartarren bidezko eragiketak, kalkulu hurbildua eta biribiltzea, zifra esanguratsuak, errore absolutua eta erlatiboa e.a. Baina, bigarren mailako ekuazioak ebatziko duten arren, zenbaki irrazionalen presentzia curriculumean eskasa da. Hori bai, zenbaki razionalak, hamartarrak zein zatikiak, zenbakizko zuzenean irudikatu beharko dituzte, eta azken hau, funtzioen alorrarekin hertsiki loturiko edukia da. Bukatzeko, geometriari dagokionez, simetriaz beste ez dago funtzioekin loturiko edukirik.

DBHko laugarren mailetako A eta B aukerek, biek ala biek daukate eduki-multzoen banaketa bera, baina, oraingo honetan A aukeraren curriculumeko analisia egiten da. *Grosso modo* ikus daiteke nola A aukera honetan estatistika edukiak garrantzia hartzen duen.

Aurreko ataletan egin den bezala, lehenik eta behin funtzio eta grafikoen eduki-multzoa aztertuko da. Ikasmaila honetan eta A eredu honetarako ikasleari eskatuko zaizkion edukiak hurrengoak izanen dira, funtzio zein grafiken interpretazio kualitatiboari bideratutakoak. Enuntziatu, taula, grafiko edo adierazpen analitiko baten bidez deskribatutako fenomeno bat interpretatzea eta emaitzak aztertzea. Batez besteko aldakuntza tasa: funtzio baten aldakuntzaren neurria tarte baten barnean. Tauletan, grafikoetan eta hitzezko enuntziatuetan hazkunde modu desberdinak aztertzea. Linealak ez diren beste funtzio eredu batzuk aztertu eta erabiltzea: esponentziala eta koadratikoa. Informazioaren teknologiak erabiltzea haiek aztertzeko.

Aurreko paragrafoan ikus daitekeen moduan funtzioen analisia alde batera utzi da eredu honetan, hortaz, aljebra eduki-multzoak ere ez du harreman handirik izango funtzioen gaiarekin, bakar-bakarrik ekuazioen ebazpenean eta aldagaien erabileran.

Eduki geometrikoek ere galduko dute funtzioekin izan ahal luketen lotura (funtzio trigonometrikoak).

B aukeran, ordea, eduki estatistikoak agertzen diren arren, orokorrean funtzioen analisira bideratutako edukiak direla ikus daiteke curriculuma azaletik irakurrita.

Lehenik eta behin, funtzio eta grafikoekin lotura daukaten edukien multzoa ikusita, A aukeran eman beharreko edukiez aparte, B aukerakoek, gainera, zatika definitutako funtzioekin lan egin beharko dute, eta baita bestelako funtzio-ereduekin ere: funtzio koadratikoa, alderantzizko proportzionaltasunekoa, esponentziala eta logaritmikoa hain zuzen ere.

Aipatu beharrekoa da estatistika eta probabilitatea alorrean ere funtzioekin erlazio handiagoa daukatela edukiek, ikasleek banaketa baten adierazgarritasuna kalkulatzea eskatuko baitzaie, banaketaren batez bestekoaren eta desbideratze tipikoaren bidez, edo beste neurri batzuen bidez, deszentralizazioak, asimetriak eta balio atipikoak baliatuz.

Edukin geometrikoak hizpide, hauek funtzioen analisirako edukiak berreskuratuko dituzte. Ikasleei bideratutako edukiak arrazoi trigonometrikoen inguruan ibiliko dira. Arrazoi trigonometrikoak, haien arteko harremana eta kalkulagailua erabiltzea angeluak eta arrazoi trigonometrikoak kalkulatzeko izanen dira eduki eta esplizituenak. Gainera, luzera, azalera eta bolumena neurtzeko (mundu fisikoko problemak ebazteko) ezagutza trigonometrikoak erabiltzea dute eduki ere bai. Arrazoi trigonometrikoek funtzioekin duten loturak bi dira nagusiki: funtzio baten deribatua eta funtzio trigonometrikoak. Alegia, funtzio baten deribatua ulertzeko lehenik eta behin malda kontzeptua, eta ondorioz, tangentea baita ere, ulertu behar dira. Zer esanik ez, funtzio harmonikoen analisirako arrazoi trigonometrikoen definizioak behintzat ezagutu beharko dira.

Aljebra edukiek ere funtzioen analisira hurbilduko dira. Honen adierazle dira hurrengo edukiak: ekuazio sistemen ebazpen grafikoa eta aljebraikoa, beste ekuazio mota batzuk ebaztea saiakuntza eta erroreen sistemaren bidez edo metodo grafikoetatik abiatuta, bitarteko teknologikoak erabiliz eta, azkenik, inekuazioen ebazpena, interpretazio grafikoa eta Inekuazioak erabiliz problemak planteatu zein ebatzi hainbat testuingurutan. Hortaz, plano cartesiarrarekin inoiz baino hurbilago dauden edukiak dira, alegia, funtzioen interpretazioarekin hertsiki loturiko edukiak.

Oraingo ikasmaila honetan, eta dagokion B eredu honetarako, zenbaki irrazionalak agertuko dira curriculumean lehen aldiz zenbakien eduki-multzoan. Beraz, zenbaki konplexuak aipatzen ez diren arren, zenbakien zuzena behintzat osotasuna lortuko du. Hurrengo orrian bildu dira edukiak (ikusi 3. taula).

1.3- Batxilergoko edukiak

Azken atal honetan zehar batxilergoko edukiak aztertuko dira (NG, 2015) eta bi azpiataletan banatu da; zientzia aplikatuei eta gizarte zientziei bideratutako batxilergoko espezialitateei dagokienak, alegia. Bi espezialitateon bi ikasmailak aztertu dira batxilergoaren irudirik zabalena eskuratu ahal izateko. Esan beharrekoa da, batxilergoa, lan honetan aztertzen den ikasmailaren kontestutik at geratzen den arren, matematikaren

ADIERAZLEA	3.	4. A	4. B
A1 Grafikoak	5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Egoera baten analisia egitea, dagokion grafikoaren ezaugarri lokalak eta orokorrak aztertuz. – Grafiko batek eta beraren adierazpen aljebraikoak adierazten duten fenomenoaren portaerari buruz hipotesiak egitea.	5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Enuntziatu, taula, grafiko edo adierazpen analitiko baten bidez deskribatutako fenomeno bat interpretatzea. Emaitzak aztertzea.	5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Zatika definitutako funtzioak. Egiazko egoerak bilatu eta interpretatzea. 6. multzoa. Estatistika eta probabilitatea – Banaketa baten adierazgarritasuna kalkulatzea bere batez bestekoaren eta desbideratze tipikoaren bidez, edo beste neurri batzuen bidez, deszentralizazioak, asimetriak eta balio atipikoak izanez gero.
A2 Espazio cartesiarra	-	-	3. multzoa. Aljebra – Ekuazio sistemen ebazpen grafikoa eta aljebraikoa. Ekuazio eta sistemen bidez eguneroko problemak eta beste jakintza-arlo batzuetakoak ebaztea. – Inekuazioen ebazpena. Interpretazio grafikoa
A3 Funtzioak	3. multzoa. Aljebra – Zenbaki-segiden azterketa. Progresio aritmetiko eta geometrikoak. – Segida errepikariak. Progresioak, segida errepikari gisa. – Ezezagun bakarra duten lehen eta bigarren mailako ekuazioak ebaztea. Bi ezezaguneko bi ekuazio linealek osatutako sistemak.	5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Linealak ez diren beste funtzio eredu batzuk aztertu eta erabiltzea: esponentziala eta koadratikoa. Informazioaren teknologiak erabiltzea haiek aztertzeko.	3. multzoa. Aljebra – Ekuazio sistemen ebazpen grafikoa eta aljebraikoa. Ekuazio eta sistemen bidez eguneroko problemak eta beste jakintza-arlo batzuetakoak ebaztea. – Beste ekuazio mota batzuk ebaztea saiakuntza eta erroreen sistemaren bidez edo metodo grafikoetatik abiatuta, bitarteko teknologikoak erabiliz. 4. multzoa. Geometria – Arrazoi trigonometrikoak. 5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Bestelako funtzio-ereduak bereiztea: funtzio koadratikoa, alderantzizko proportzionaltasunekoa, esponentziala eta logaritmikoa.
A4 Idazkera aljebraikoa	3. multzoa. Aljebra – Egoerak hitzezko lengoaiatik lengoaia aljebraikora itzultzea. – Adierazpen aljebraikoak eraldatzea. Berdintasun nabarmenak. 5. multzoa. Funtzioak eta grafikoak – Grafiko batek eta beraren adierazpen aljebraikoak adierazten duten fenomenoaren portaerari buruz hipotesiak egitea.	3. multzoa. Aljebra – Letrazko adierazpenak erabiltzea formula eta ekuazioetako balioak lortzeko testuinguru desberdinetan.	2. multzoa. Zenbakiak – Erroak berretura moduan adieraztea. Errotzaile baliokideak. Errotzaileak alderatu eta sinplifikatzea. 3. multzoa. Aljebra – Letrazko adierazpenen erabilera. Berdintasun nabarmenen erabilera.
A5 Zenbakizko zuzena	2. multzoa. Zenbakiak – Zenbakizko zuzenean nola irudikatu. Zenbaki arrazionalen alderaketa.	2. multzoa. Zenbakiak – Tarteak. Tarteen esanahia eta tarteak adierazteko moduak. – Zenbakiak irudikatzea zenbakizko zuzenean.	2. multzoa. Zenbakiak – Zatiki eran ezin adierazi diren zenbakiak hautematea. Zenbaki irrazionalak. – Zenbakiak zuzen errealean irudikatzea. Tartearen esanahia eta hura adierazteko moduak.

3. taula: DBHko bigarren zikloko edukiak.

ikaskuntzan etapa bat da, alegia, derrigorrezko ikasketen eta ikasketa unibertsitarioen arteko zubia; hortaz, interesgarria suerta daiteke atal honetan aztertukoa.

Berriro ere aipatzeko kontua da asmoa, funtzioen ataleko ebaluazio irizpideak aztertzea den arren, edukien aurreko atalean bezala, eduki horiei loturiko zenbakizko edukiak eta eduki aljebraikoak, geometrikoak e.a. aipatzea, ondorioz, eduki hauek, zenbaitetan estuki loturik agertzen direlako eduki funtzionalak eta horien manipulazio aljebraikoa zein esangura grafikoa.

Batxilergoko aro berri honetan, Matematika I irakasgaiaren eduki matematikoen multzoak berrantolatzen ditu curriculumak. Geometria eta 'estatistika eta probabilitatea' multzoak berdin geratu dira, baina, zenbakiak eta aljebra multzoak 'zenbakiak eta aljebra' deritzon multzoak uztartuko ditu eta, bestetik, funtzioen multzoa 'analisiak' deituko da, beraz, has gaitezen analisien multzoa aztertzen.

Analisien multzoan aurkituko dugu funtzioen gaiari gehien heltzen dioten edukiak, hala nola, aldagai errealeko oinarrizko funtzio errealak: polinomikoak, arrazional errazak, balio absolutua, erroa, trigonometrikoak eta haien alderantzizkoak, esponentzialak, logaritmikoak eta funtzio zatika definituak, eta kontzeptu berri bat: alderantzizko funtzioa.

Multzo honek ere kalkuluaren hastapen edukiak ditu, besteak beste, funtzio baten puntu bateko eta infinituko limitearen kontzeptua, honela, limiteen kalkuluan sartzeko, eta ondorioz, albo-limiteak eta Indeterminazioak. Honek eramanen gaitu funtzio baten jarraitutasuna eta etenak aztertzera.

Lehen aldiz curriculumean funtzioak eta geometria esplizituki bilbatuko dira deribatuaren kontzeptuarekin. Ikasleek funtzio baten puntu bateko deribatua eta honen interpretazio geometrikoa ere emanen dute: zuzen ukitzaile eta normala, alegia. Bestetik, limiteekin egin daitezkeen operazioekin, deribatuen kalkulua eta katearen erregela bezalako erregelak dute eduki.

Azken finean, eduki hauek funtzioen analisi grafikora bideratuta daudenez, infinituko limitearen kontzeptua eta hauen kalkulua ere ikasi beharko dute curriculumaren arabera.

Aurreko eduki guztiei lotuta zenbakiak eta aljebra alor matematikoen barne diren edukiak daude. Adibidez, limiteak lantzean, garrantzia edukiko du zenbakizko zuzenean distantzia kontzeptuan jantzia izatea. Bestetik, eta arestian aipatu bezala, zenbakizko segidek ere garrantzia izanen dute aurrerantzean funtzioen analisian maila unibertsitarioan. Ekuazio ez-aljebraikoen ebazpena ezinezkoa liteke funtzioen analisian sakondu gabe.

Geometria eduki multzoak funtzioekin erlazioa duen arren, hauek gehien bat funtzio trigonometrikoen analisirako, konikak eta eremu bektorialaren lehen kontaktua edukitzeko bideratu dira. Hauetako eduki batzuk hurrengoak litzateke.

Trigonometrikoak: edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak. Batura angeluen arrazoi trigonometrikoak, beste biren kendura, bikoitza eta erdia. Eraldatze trigonometrikoen formulak. Teoremak. Ekuazio trigonometriko errazen ebazpena, triangeluen ebazpena, eta ondorioz, zenbait problema geometrikoren ebazpena.

Konikak: planoko leku geometrikoak. Zirkunferentzia, elipsea, hiperbola eta parabola: ekuazioa eta elementuak.

Eremu bektoriala: Planoko bektore libreak. Eragiketa geometrikoak. Biderkadura eskalarra. Bektore baten modulua. Bi bektoreren angelua. Oinarri ortogonal eta ortonormalak. Geometria metriko laua. Zuzenaren ekuazioak. Zuzenen posizio erlatiboak.

Batxilergoko bigarren urtean ikasleek unibertsitate-aurreko matematikak landu beharko dituzte Matematikak II irakasgaian, alegia, kurtso bukaeran unibertsitatean beharrezkoak izan behar zaizkien eduki guztiak jada barneratuta eduki behar lituzkete. Hurrengo paragrafotan aztertuko den moduan ikusiko da nola kurtso hau kalkuluari bideratutako kurtsoa den.

Aurreko atalean egin den moduan, oraingo honetan ere 'analisiak' delako eduki-multzoa aztertu da lehena. Curriculumak ezarritako multzo honen arabera, ikasleek ikasturte honetarako hurrengo edukiak barneratu beharko lituzkete. Funtzio baten puntu bateko eta infinituko limitea. Funtzio baten jarraitutasuna eta eten motak. Bolzanoren teorema. Funtzio deribatua. Rolle-ren teorema eta batez besteko balioaren teorema. L'Hôpital-en erregela. Limiteen kalkulurako aplikazioa. Deribatuaren aplikazioak: optimizazio problemak. Funtzio baten jatorrizkoa. Integral mugagabea. Jatorrizkoak kalkulatzeko teknika elementalak. Integral mugatua. Batez besteko balioaren teorema eta kalkulu integralaren funtsezko teorema, eta azkenik, Eskualde lauen azaleraren kalkulurako aplikazioa. Denak ala denak funtzioen gaiarekin hertsiki loturiko edukiak dira, guztiek ala guztiek funtzioen analisirako edukiak baitira, alegia.

Hala eta guztiz ere, aurreko atalena bezala, Geometria eta 'Zenbakiak eta aljebra' edukien multzoak aztertu dira hauen funtzioekiko erlazioak aztertzeko.

Eduki geometrikoei dagokionez, plano cartesiarretik espazio cartesiarrerako jauzia ematea dute helburu. Zer esanik ez, jada ikasleek duten abstrakzio mailak, aurreko ikasturteetan emandako edukiekin batera, geometria prozesu guztiz aljebraikoen bidez ebaztea zein aztertzea posible egiten du. Ikasleei unibertsitate-aurreko ikasmaila honetan hurrengoa eskatuko zaie geometria alorrean… Hiru dimentsioko espazioko bektoreak: biderkadura eskalarra, bektoriala eta mistoa eta hauen esangura geometrikoa. Zuzenaren ekuazioa eta espazio planoaren ekuazioa. Hauek, aurrerantzean, aldagai anitzeko funtzioen zein funtzio bektorialen ulermenerako ezinbestekoak izanen dira. Azken argudio hau dela-eta izan da aztertua A2 Espazio cartesiarra adierazlea ikasmaila guztietan zehar.

Bestetik, geometrikoagoak diren beste eduki batzuk ere daude: propietate metrikoak (angelu, distantzia, azalera eta bolumenen kalkulua). Baina hauek ez dute aurrekoak bezain estutasun handia funtzioekin eta arbuiatuko dira.

Aurreko edukiak ematea posible da aurreko ikasturteetan eduki aljebraikoak ere eman dituztelako ikasleek. Eduki aljebraikoei dagokionez, bigarren ikasmaila honetan ez dute funtzioekiko loturarik, eta, hortaz ez dira aztertuko.

Aurreko azpiataletan egin den modu berean, matematika akademikoen edukiak aztertu ondoren, funtzioekin erlazionaturiko edukiak bildu dira hurrengo orriko taulan (ikusi 4. taula).

Zer esanik ez, gizarte zientzietara aplikatutako matematika ez du aurrekoak bezalako kutsu teorikorik eta estatistikaren interpretaziorako bideratutako ikasgaia da hein handi batean. Hala eta guztiz ere, grafikoen interpretazioa, intuitiboki bada ere, funtzioen gaiarekin hertsiki loturiko ildoa da, eta horregatik, curriculumean ez dira funtzioen inguruan diharduten edukiak falta, nahiz, esan beharra dago, nahiko urriak direla.

Matematika ikasgai honen edukiak, aurrekoa bezala, 'zenbakiak eta aljebra', analisiak, geometria eta 'estatistika eta probabilitatea' eduki multzoetan banatu dira. Lehenengoari dagokionez, funtzioen gaiarekin erlazio estua izan dezaketen hurrengo edukiak aurkitu dira: zenbaki arrazional eta irrazionalen multzoa, zenbaki erreala eta azken hau zenbakizko zuzenean irudikatzea (tarteak barne). Polinomioak, faktoreetako deskonposizioa. Ekuazio linealak, koadratikoak eta beraietara murrizten ahal direnak, esponentzialak eta logaritmikoak eta hauen aplikazioak. Bi ezezagun dituzten lehen eta

ADIERAZLEA	I	II
A1 Grafikoak	3. MULTZOA.–ANALISIAK -Funtzioen irudikapen grafikoa. 4. MULTZOA.–GEOMETRIA -Planoko leku geometrikoak. -Konikoak. Zirkunferentzia, elipsea, hiperbola eta parabola. Ekuazioa eta elementuak.	3. MULTZOA.–ANALISIAK -Funtzio baten puntu bateko eta infinituko limitea. Funtzio baten jarraitutasuna. Eten motak. Bolzanoren teorema. -Integral mugatua. Batez besteko balioaren teorema eta kalkulu integralaren funtsezko teorema. Eskualde lauen azaleraren kalkulurako aplikazioa.
A2 Espazio cartesiarra	4. MULTZOA.–GEOMETRIA -Planoko bektore libreak. Eragiketa geometrikoak. -Biderkadura eskalarra. Bektore baten modulua. Bi bektoreren angelua. -Oinarri ortogonal eta ortonormalak. Geometria metriko laua. Zuzenaren ekuazioak. Zuzenen posizio erlatiboak. -Distantziak eta angeluak. Problemen ebazpena.	4. MULTZOA.–GEOMETRIA -Hiru dimentsioko espazioko bektoreak. Biderkadura eskalarra, bektoriala eta mistoa. Esanahi geometrikoa. -Zuzenaren ekuazioa eta espazio planoaren ekuazioa. -Posizio erlatiboak (intzidentzia, paralelismo eta zutasuna, zuzenen eta planoen artean). -Propietate metrikoak (angelu, distantzia, azalera eta bolumenen kalkulua).
A3 Funtzioak	3. MULTZOA.–ANALISIAK -Aldagai errealeko funtzio errealak. Funtzio oinarrizkoak. -Eragiketak eta funtzioen osaera. Alderantzizko funtzioa. -Funtzio baten puntu bateko eta infinituko limitearen kontzeptua. Limiteen kalkulua. Albo-limiteak. Indeterminazioak. -Funtzio baten jarraitutasuna. Etenen azterketa. -Funtzio baten puntu bateko deribatua. Funtzioaren puntu bateko deribatuaren interpretazio geometrikoa. Zuzen ukitzaile eta normala. -Funtzio deribatua. Deribatuen kalkulua. Katearen erregela.	3. MULTZOA.–ANALISIAK -Funtzio deribatua. Rolle-ren teorema eta batez besteko balioaren teorema. L'Hôpital-en erregela. Limiteen kalkulurako aplikazioa. -Deribatuaren aplikazioak: optimizazio problemak. -Funtzio baten jatorrizkoa. Integral mugagabea. Jatorrizkoak kalkulatzeko teknika elementalak. -Integral mugatua. Batez besteko balioaren teorema eta kalkulu integralaren funtsezko teorema. Eskualde lauen azaleraren kalkulurako aplikazioa.
A4 Idazkera aljebraikoa	2. MULTZOA.–ZENBAKIAK ETA ALJEBRA -Zenbaki errealak: haren ikaskuntzaren beharra errealitatea ulertzeko. Balio absolutua. Desberdintzak. -Distantziak zenbakizko zuzenean. Tarteak eta inguruneak. Hurbilketa eta erroreak. Idazkera zientifikoa. -Zenbakizko segidak: gai orokorra, monotonia eta akotazioa. e zenbakia. -Ekuazio ez aljebraiko errazen ebazpena.	-
A5 Zenbakizko zuzena	2. MULTZOA.–ZENBAKIAK ETA ALJEBRA -Zenbaki errealak: haren ikaskuntzaren beharra errealitatea ulertzeko. Balio absolutua. Desberdintzak.	-

5. taula: Batxilergo akademikoaren edukiak.

bigarren mailako ekuazioen sistemak: sailkapena, aplikazioak eta interpretazio geometrikoa.

Bigarrenari dagokionez, analisiak, alegia, funtzioen gaia lantzen den hainbat eduki ditugu, aurreko lerrootan aipatu bezala, matematikaren interpretazio funtzionala garatu ahal izateko, hala nola, curriculumak aipatzen duen lehen edukia hurrengoa baita: 'Problemen ebazpena eta gizarte fenomeno eta fenomeno ekonomikoen interpretazioa, funtzioen bidez'. Matematika I ikasgaian eman beharreko eduki eduki batzuk hemen ere agertzen diren arren, hauetako batzuk ez dute gaia sakontzen. Honen adibide da limiteen inguruko ezagutza; batak limiteak sakontasunean lantzen dituen heinean, besteak azaletik landuko ditu. Funtzio baten puntu bateko limitearen ideia intuitiboa eduki behar dute ikasleek, ostean limite errazen kalkulua egiteko. Behin limitearen ideia intuitiboa landurik, deribatua eta funtzio deribatuaren kontzeptua dute eduki, hauek modu geometrikoan lantzen dute eta funtzio errazen deribatuak lortu beharko dituzte.

Azkenik, aipatu beharrekoa da, beste matematika ikasgaia ez bezala, honek esplizituki estatistikarekin erlazio handia duten edukiak landu beharko dutela analisiak eduki multzo honetan, hala nola, batez besteko aldakuntza tasa eta istanteko aldakuntza tasa, gizarte fenomenoak eta fenomeno ekonomikoak aztertzeko aplikazioak eta Interpolazio eta estrapolazio lineal eta koadratikoa problema errealei aplikatzearren.

Estatistika eta probabilitatea eduki-multzoak ez dio funtzioen gaiari helduko, gaia heldu zezakeen modu bakarra banaketekin izango litzateke, baina, maila honetan ez dute banaketaren kontzeptuarekin lan askorik eginen, bakarrik binomiala eta normalarekin, zeinak bietatik lehena ez den funtzio jarraitua.

Batxilergoko zikloa ixteko, bigarren ikasmaila honetan, ikasleek funtzioekin erlazionaturiko hurrengo edukiak erdietsi beharko dituzte.

Analisiak delako eduki multzoa aztertuta, multzoa osatzen duten eduki guztiek dute erlazioa funtzioekin. Ikasleek jarraitutasuna zein eten motak ikasteko helburua dute; jarraitutasunaren ikasketa, funtzio elementaletan eta zatika definituetan. Deribatuei dagokienez, ikasmaila honetan aplikagarritasun gehiagorekin lantzen dira, deribatuen aplikazioa funtzio polinomiko, arrazional eta irrazional erraz, esponentzial eta logaritmikoaz aparte, gizarte zientziekin eta ekonomiarekin ikusteko duten optimizazio problemak ere landuko dituzte. Ikus daitekeen moduan, funtzioen matematika ez da teoriara bideratu.

Irudikapen grafikoaren alorrean, bi eduki mota ditugu. Bata, funtzio polinomiko, arrazional, irrazional, esponentzial eta logaritmiko errazen ikaskuntza eta irudikapen grafikoa aztertzea, haien ezaugarri lokal eta globaletatik abiatuta; alegia, grafikoen azterketa. Eta bestea, ordea, integralak. Jatorrizkoaren kontzeptua zein jatorrizkoen kalkulua landuko dute: oinarrizko propietateak eta berehalako integrala zein alorren kalkulua, finean, integral mugatuak kalkulatu ahal izateko.

Zenbakiak eta aljebra delako eduki multzoak funtzioekin izan zezakeen lotura guztiak hautsi egiten ditu. Honen kausa da matrizeen eta adierazpen matrizialen inguruko edukiak direla, ondorioz, ez da atal honetan eduki multzo hau aztertuko. Gainera, estatistika eta probabilitatea multzoak ere ez du funtzioen gaia landuko.

Azken azpiatal honen inguruan agertutako edukiak bildu dira hurrengo orriko taulan (ikusi 5.taula).

ADIERAZLEA	**I**	**II**
A1 Gafikoak	4. MULTZOA.–ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA -Banaketa binomiala. Ereduaren karakterizazio eta identifikazioa. Probabilitateen kalkulua. -Banaketa normala. Banaketa normalaren tipifikazioa.	3. MULTZOA.–ANALISIAK -Funtzio polinomiko, arrazional, irrazional, esponentzial eta logaritmiko errazen irudikapen grafikoa, haien lokal eta globaletatik abiatuta. -Jatorrizkoaren kontzeptua. Jatorrizkoen kalkulua. -Alorren kalkulua: Integral mugatua. Barrow-en erregela.
A3 Funtzioak	3. MULTZOA.–ANALISIAK -Problemen ebazpena eta gizarte fenomeno eta fenomeno ekonomikoen interpretazioa, funtzioen bidez. -Aldagai errealeko funtzio erreala. -Interpolazio eta estrapolazio lineal eta koadratikoa. Problema errealei aplikatzea. -Aldagai errealeko funtzio errealen adierazpen analitiko eta grafikoen identifikazioa. -Funtzio baten puntu bateko limitearen ideia intuitiboa. -Limite errazen kalkulua. -Batez besteko aldakuntza tasa eta istanteko aldakuntza tasa. Gizarte fenomenoak eta fenomeno ekonomikoak aztertzeko aplikazioa. -Funtzio baten puntu bateko deribatua. Interpretazio geometrikoa. -Funtzio deribatua. Funtzio elemental errazen deribazio erregelak, funtzio polinomiko, esponentzial eta logaritmikoen batura, biderkadura, zatidura eta konposizioa direnak.	3. MULTZOA.–ANALISIAK -Jarraitutasuna. Eten motak. Jarraitutasunaren ikasketa, funtzio elementaletan eta zatika definituetan. -Deribatuen aplikazioa funtzio polinomiko, arrazional eta irrazional erraz, esponentzial eta logaritmikoen ikaskuntzara. -Optimizazio problemak, gizarte zientziekin eta ekonomiarekin ikusteko izanen dutenak. -Funtzio polinomiko, arrazional, irrazional, esponentzial eta logaritmiko errazen ikaskuntza eta irudikapen grafikoa, haien lokal eta globaletatik abiatuta. -Jatorrizkoaren kontzeptua. Jatorrizkoen kalkulua: Oinarrizko propietateak. Berehalako integrala. -Alorren kalkulua: Integral mugatua. Barrow-en erregela.
A4 Idazkera aljebraikoa	2. MULTZOA.–ZENBAKIAK ETA ALJEBRA -Polinomioak. Eragiketak. Faktoreetako deskonposizioa. -Ekuazio linealak, koadratikoak eta beraietara murrizten ahal direnak, esponentzialak eta logaritmikoak. Aplikazioak. -Bi ezezagun dituzten lehen eta bigarren mailako ekuazioen sistemak. Sailkapena. Aplikazioak. Interpretazio geometrikoa.	-
A5 Zenbakizko zuzena	2. MULTZOA.–ZENBAKIAK ETA ALJEBRA -Zenbaki arrazional eta irrazional. Zenbaki erreala. Zenbakizko zuzenean irudikatzea. Tarteak.	-

5. taula: Batxilergo aplikatuko edukiak.

2 Kapitulua: Funtzioen inguruko ebaluazio-irizpideak indarrean dagoen curriculumean

Bigarren atal honetan curriculumean agertzen diren eta funtzioekin zerikusia duten ebaluazio irizpideen analisia eginen da. Azterketa, aurreko 1. atalean egin den bezala, Lehen Hezkuntzako bosgarren ikasmailatik Batxilergoko bigarren ikasmaila arteko urteetarako egin da eta matematika aukera guztiak aztertzea du helburu.

Atala, oraingoan ere, hiru azpiataletan banatu da: Lehen Hezkuntza, Derrigorrezko Bigarren Hezkuntza eta Batxilergoa, alegia. Azpiatal hauek ez dira ataltxotan banatu eta osotasunean eta jarraian aztertuko dira.

Hauen analisia egiteko, ebaluazio irizpideak hartu eta arestian aztertutako edukiekin bateragarritasuna bilatu da zuzenean. Ikusiko den moduan, belztutako ebaluazio irizpideak izanen dira aurreko kapituluan agertutako edukiekin bat egiten dutenak. Dinamika hau errepikatuko da LH, DBH eta Batxilergoa osatzen duten urte guztietarako.

2.1-Lehen hezkuntzan

Lehen Hezkuntzako curriculumak (NG, 2014) zehaztu egiten ditu hirugarren zikloan ikasleek landu beharreko eduki matematikoen ebaluazio irizpideak. Aurreko kapituluan esan bezala, lan honen eremua Derrigorrezko Bigarren Hezkuntza den arren, LHko ebaluazio irizpide horien analisi bat egitea interesgarria da, laburrean besterik ez bada ere, irizpide horiek determinatzen dutelako DBHko lehenengo mailan ikasle batek izango dituen aurre-edukien ezagutza maila behar bezain ona dela egiaztatzeko.

Azterketaren asmoa funtzioen ataleko ebaluazio irizpideak aztertzea den arren, edukien aurreko atalean bezala, ebaluatu beharreko eduki horiei loturiko zenbakizko edukiak eta eduki aljebraikoak aipatzea, eta ondorioz, hauek ebaluatzeko irizpideak, alegia, zenbaitetan estuki loturik agertzen direlako eduki funtzionalak eta horien manipulazio aljebraikoak edota esangura grafikoak.

Azpiatal honetarako curriculumeko ebaluazio irizpide batzuk aurkeztuko dira soilik. Funtzioekin zerikusirik ez duten ebaluazio irizpideak ez dira lanean ageri, eta honengatik, curriculumeko irizpide multzo batzuk edota irizpide zehatz batzuk ez dira hurrengo orriotan agertuko.

LH5 - ZENBAKIAK ETA ALJEBRA
1. Zenbaki mota desberdinak (arruntak, osoak, zatikiak eta hamartarrak hamarrenak arte) irakurri, idatzi eta **ordenatzea**, arrazoitze egokiak eginez. 2. Zenbaki mota desberdinak beren balioaren arabera **interpretatzea**, eguneroko bizitzako egoeretan. 3. Zenbakizko eragiketa eta **kalkulu errazak eragiketen propietateei erreferentzia** egiten dieten prozedura desberdinen bidez egitea, buruz egindako kalkulua barne, problemak ebazteko egoeretan. 5. **Zenbaki osoak, hamartarrak, zatikizkoak** eta portzentaje errazak erabiltzea eguneroko bizitzako egoeretan **informazioa interpretatu** eta trukatzeko. 7. **Batuketaren, kenketaren, biderketaren eta zatiketaren algoritmo estandarrak ezagutu, erabili eta automatizatzea zenbaki mota desberdinekin,** emaitzak problemak ebazteko testuinguruetan eta eguneroko bizitzako egoeretan egiaztatuz.

6. taula: LH 5. ikasmailako ebaluazio irizpideak, zenbakiak eta aljebra.

LH5 - GEOMETRIA
1. **Paralelotasunaren, perpendikulartasunaren, simetriaren, geometriaren, perimetroaren eta azaleraren nozio geometrikoak erabiltzea** eguneroko bizitzako egoerak deskribatu eta ulertzeko. 6. Eguneroko bizitzako problemak identifikatu eta ebaztea, landutako ezagutza geometrikoak erabiliz, **errealitatearen eta matematikaren arteko loturak ezarriz,** ezagutza matematiko egokien baliagarritasuna baloratuz eta problemak ebazteko aplikaturiko prozesuaren gainean hausnartuz.

6. taula: LH 5. ikasmailako ebaluazio irizpideak, Geometria.

LH5 - ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA
1. Informazio kuantifikagarria bildu eta erregistratzea, **irudikapen grafikoko baliabide erraz** batzuk erabiliz: datu-taulak, barrablokeak, diagrama linealak…, eta informazioa komunikatzea. 2. Ingurune hurbilari buruzko datu multzo baten **irudikapen grafikoak egin,** irakurri eta interpretatzea. 3. Eguneroko bizitzan ezinezkoak, posibleak edo ziurrak diren gertaerak dituzten egoerak identifikatzea, ezagutza matematiko egokien baliagarritasuna baloratuz eta problemak ebazteko aplikatutako prozesuaren gainean hausnartuz.

7. taula: LH 5. ikasmailako ebaluazio irizpideak, Estatistika eta Probabilitaea

LH6 - ZENBAKIAK ETA ALJEBRA
1. Zenbaki mota desberdinak (erromatarrak, **arruntak, osoak, zatikiak eta hamartarrak** ehunenak arte) irakurri, idatzi eta **ordenatzea**, arrazoitze egokiak eginez. 3. **Zenbakizko eragiketa eta kalkulu errazak** eragiketen propietateei erreferentzia egiten dieten prozedura desberdinen bidez egitea, buruz egindako kalkulua barne, problemak ebazteko egoeretan. 6. Zenbakiekin eragiketak egitea **eragiketen hierarkia** kontuan hartuta eta eragiketen propietateak, estrategia pertsonalak eta egin beharreko kalkuluaren arabera erabiltzen diren prozedurak (algoritmo idatziak, buruz egindako kalkulua, gutxi gorabeherako kalkulua, zenbatespena, kalkulagailua) aplikatuz, erabilera egokienari buruz erabakiz. 9. Ikaslearen mailari egokituriko eguneroko bizitzako problemak identifikatu eta ebaztea, **errealitatearen eta matematikaren arteko loturak** ezarriz, ezagutza matematiko egokien baliagarritasuna baloratuz eta problemak ebazteko aplikaturiko prozesuaren gainean hausnartuz.

8. taula: LH 6. ikasmailako ebaluazio irizpideak, Zenbakiak eta Aljebra.

LH6 - GEOMETRIA
1. **Koordenatu-ardatzak planoan ezagutzea. Par ordenatuak sistema cartesiarrean irudikatzea.** 3. Gorputz geometrikoak ezagutzea, **oinarrizko elementuak deskribatzea**, hainbat irizpideren arabera sailkatzea eta erreproduzitzea, ingurunea ulertu eta interpretatzeko ezagutzak aplikatuz. 5. Irudi erregularretan **simetria kontzeptua** lantzen hastea.

9. taula: LH 6. ikasmailako ebaluazio irizpideak, Geometria.

LH6 - ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA
1. Informazio kuantifikagarria bildu eta erregistratzea, **irudikapen grafikoko** baliabide erraz batzuk erabiliz: datu-taulak, barrablokeak, diagrama linealak…, eta informazioa komunikatzea.

10. taula: LH 6. ikasmailako ebaluazio irizpideak, Estatistika eta Probabilitatea.

2.2-DBH

DBH osoan zehar edukiak multzo ezberdinetan banatu dira (NG, 2007), eta oraingoan, ebaluazio irizpideak zortzina paragrafotan biltzen dira urte bakoitzeko. Hauen analisia egiteko, zuzenean ebaluazio irizpideak hartu eta arestian aztertutako edukiekin bateragarritasuna bilatu da. Ikusiko den moduan, **belztutako** ebaluazio irizpideak izanen dira aurreko kapituluan agertutako edukiekin bat egiten dutenak. Dinamika hau errepikatuko da DBH osatzen duten urte guztietan.

Metodo hau erabilita, azaleko irakurketa azkar batekin ikus daiteke interesatzen zaizkigun edukien presentzia, proportzioa eta kokapena urtez urte eta hauen nondik norakoa. Beraz, irakurketa aholku gisa, kapitulu hau hobe da azaletik irakurtzea, baina, aldi berean belztutako edukien presentzia eta pisua aztertu urtez urte eta alorrez alor.

DBDko 1. mailan zortzi multzotan bana daitezke ebaluazio irizpideak. Hauetan lehena, zenbaki natural eta osoak eta zatiki nahiz hamartar errazak, horien bidezko eragiketak eta horien propietateak erabiltzea informazioa bildu, eraldatu eta trukatzeko irizpideak dira. Egiaztatu behar da ikasleak gai diren zenbakiak eta eragiketak identifikatu eta erabiltzeko, haien esanahiaz eta propietateez jabetzen diren, kalkulu modurik egokiena hautatzen duten (buruzkoa, idatzizkoa edo kalkulagailu bidezkoa) eta zenbakiak behar bezala erabiltzen dituzten informazioak transmititzeko. Arreta berezia jarriko zaio, kasu errazetan, eragiketa konbinatuak erabiltzeko gaitasunari, eragiketa aritmetikoen sekuentziaren laburpen moduan.

Bigarrena, problemak ebaztea lau eragiketen bidez, zenbaki osoekin, hamartarrekin eta zatikiekin, kalkulu mota egokia erabiliz eta emaitza testuinguruari noraino egokitzen zaion baloratuz. Baloratu nahi da ea ikasleak gai diren **eragiketa desberdinei esanahi berriak esleitzeko** eta egoera bakoitzerako kalkulu mota egokiena hautatzeko. Era berean, ebaluatu nahi da nola interpretatzen diren kalkuluetan lortutako emaitzak, eta egiaztatu nahi da ikasleek ez dutela emaitza besterik gabe ontzat ematen, aitzitik, abiapuntuko egoerarekin erkatzen dutela.

Hirugarren multzoan, zenbaki multzoetako erregulartasunak, pautak eta erlazioak identifikatu eta deskribatzea, **letrak erabiltzea kantitateak sinbolizatzeko**, adierazpen aljebraikoak lortzea laburpen gisa zenbaki sekuentzietan, eta **formula sinpleen zenbakizko balioa lortzea.** Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ikasleak gai diren zenbaki multzo bateko gauza komunak, sekuentzia logikoa eta multzoaren osagaiak ordenatzea ahalbidetzen duen irizpidea hautemateko eta, ahal denean, hautemandako erregulartasuna modu aljebraikoan adierazteko. Era berean ebaluatu nahi da nola erabiltzen den "berdin" ikurra esleitzaile gisa eta nola erabiltzen den letra. Halaber, irizpide honen barruan sartzen da letra bakarreko formula sinpleetan balioa lortzea.

Laugarrenik, **Irudi lauak bereizi eta deskribatzea**, beren propietateen arabera sailkatzea eta lortutako ezagutza geometrikoa aplikatzea mundu fisikoa interpretatu eta deskribatzeko, **termino egokiak erabiliz**. Ikasleek eguneroko bizitzako egoera eta arazo desberdinei aurre egiterakoan geometriaren oinarrizko kontzeptuak erabiltzeko gaitasuna baduten egiaztatu nahi da. Halaber, elementu eta forma geometriko desberdinak erabiliz lortutako esperientzia baloratu nahi da.

Irudi lauen perimetroak, azalerak eta angeluak estimatu eta kalkulatzea neurketa-unitate egokia erabiliz. Metodo desberdinak erabiliz irudi lauen neurri batzuk kalkulatzeko eta unitate eta zehaztasun egokiena erabiltzeko gaitasuna baloratu nahi da. Gainera, kontuan hartuko da nola erabiltzen diren oinarrizko irudien bidezko deskonposizio metodoak inguruneko irudi lauen azalerak kalkulatzeko.

Taulak eta grafikoak erabiliz askotariko informazioak antolatu eta interpretatzea, eta mendekotasun erlazioak identifikatzea eguneroko egoeretan. Irizpide honen bidez baloratu nahi da ea ikasleak gai diren eguneroko egoera batean esku hartzen duten aldagaiak eta haien arteko mendekotasun erlazioa zehazteko eta grafikoan irudikatzeko. Gainera, taulen erabilera ebaluatu nahi da, informazioa biltzeko eta **ardatz koordenatuetara transferitzeko tresnak** diren aldetik, eta tauletan eta grafikoetan dagoen informazioa kualitatiboki interpretatzeko gaitasuna ere bai.

Aldez aurretik modu enpirikoan lortutako informazioetatik abiatuta, zerbait gertatzeko posibilitateari buruzko iragarpenak egitea. Baloratu nahi da ea ikasleak gai diren halabeharrezko gertaerak ausazkoetatik bereizteko eta, azken horietan, ausazko esperientzia bat hainbat aldiz errepikatuz lortutako erregulartasunak aztertzeko eta horietatik abiatuta zentzuzko iragarpenak egiteko. Gainera, irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ikasleek ulertzen ote duten maiztasun erlatiboaren kontzeptua eta, hortik abiatuta, probabilitatearen nozioa ondorioztatzeko gai diren.

Problemak ebazteko estrategia eta teknika errazak erabiltzea, hala nola enuntziatuaren analisia, saiakuntza eta errorea edo problema errazago baten ebazpena; lortutako soluzioa egiaztatzea, eta ebazpenerako erabili den prozedura azaltzea, ikaslearen mailarako hizkuntza matematiko egokia erabiliz. Irizpide honen bidez ebaluatu nahi da nola ekiten dioten ikasleek problema ebazteari, soluzioa lortzeko prozedura estandarrik ez dagoenean. Hainbat alderdi ebaluatuko dira: ea enuntziatua ulertzen den testuaren zati bakoitzaren azterketaren eta alderdi nagusienen identifikazioren bitartez, nola aplikatzen diren ebazpenerako estrategia sinpleak, eta ea ikasleak soluzioa egiaztatzeko ohiturarik eta trebetasunik ba ote duen. Era berean, ebaluatu egin behar dira ebazpenak bilatzeko jarraikitasuna, nork bere buruarengan soluzioa lortzeko konfiantza izatea, eta garatutako ideia eta prozesu pertsonalak hitz egokiez transmititzeko gaitasuna, ikaskideek uler ditzaten. Truke jarduera hori egiteko jarrera positiboa izatea ere kontuan hartuko da.

DBHko 2. ikasmailarako ebaluazio irizpideak zerrendatuko dira hurrengo orriotan. Beste ikasmailetan gertatu bezala, oraingoan ere ebaluazio irizpideak multzo ezberdinetan sailkatu dira, eta hauek, paragrafoka adierazi dira. Hauetan lehen ebaluazio irizpide multzoa hurrengoa da: **Zenbaki oso, zatiki, hamartar eta ehuneko errazak erabiltzea, baita haien eragiketak eta propietateak ere, informazioa bildu, eraldatu eta trukatzeko eta eguneroko bizitzarekin zerikusia duten arazoak ebazteko.** Egiaztatu behar da ikasleak gai diren zenbakiak eta eragiketak identifikatu eta erabiltzeko, haien esanahiaz eta propietateez jabetzen diren, kalkulu modurik egokiena hautatzen duten (buruzkoa, idatzizkoa edo kalkulagailu bidezkoa) eta lortutako emaitzen koherentzia eta zehaztasuna kalkulatzeko gai diren. Irizpide honen bidez ebaluatu beharreko eragiketen artean **berretzaile naturalaren bidezko berreketak ere sartu behar dira.** Zatikiekin, hamartarrekin eta ehunekoekin kalkuluak errazago egiteko estrategien erabilera eta kalkulu horiek askotariko testuinguruetan aplikatzeko gaitasuna ebaluatzeari arreta berezia jarri behar zaio.

Bigarrena, proportzionaltasun numerikoko eta geometrikoko erlazioak identifikatzea eta eguneroko bizitzako egoeretan problemak ebazteko erabiltzea. Egiaztatu nahi da ikasleak gai diren bi magnituderen arteko proportzionaltasun erlazioa identifikatzeko testuinguru desberdinetan. Era berean, estrategia desberdinak tarteko (**taulak erabiltzea**, proportzionaltasun-konstantea lortu eta erabiltzea, unitatera murriztea etab.), elementu ezezagunak lortu behar dira problema batean, egiazko egoeretan proportzionaltasun erlazioak dituzten beste elementu batzuetatik abiatuta.

Problemei ekiteko beste tresna batzuk bezala, **hizkuntza aljebraikoa** ere erabiltzea **lehen mailako ekuazioak** sinbolizatu eta orokortzeko, **planteatzeko eta ebazteko.** Egiaztatu nahi da ikasleak gai diren hizkuntza aljebraikoa erabiliz propietate errazak orokortzeko eta erlazioak sinbolizatzeko. Gainera, lehen mailako ekuazioak planteatu behar dituzte, metodo aljebraikoen bitartez eta, halaber, saiakuntza eta erroreen metodoen bitartez ebazteko. Halaber, ebaluatu nahi da ea ikasleak gai diren aljebraren ordez estrategia pertsonalak baliatzeko problemak planteatu eta ebazteko orduan. Era berean kontuan hartu behar da emaitzen koherentzia.

Espazio eta objektuen luzerak, azalerak eta bolumenak estimatu eta kalkulatzea, planteatutako egoerari dagokion zehaztasunaz; neurketa prozesuak ulertzea, eta estimazioaren edo kalkuluaren emaitza neurri unitate egokienean ematea. Irizpide honen bidez ebaluatu nahi da ea ikasleak gai diren luzera, azalera eta bolumen kontzeptuak ulertu eta bereizteko eta bakoitzari dagokion unitatea hautatzeko. Horiez gain, egiaztatu behar da objektuen tamaina estimatzeko gaitasun nahikoak lortu dituzten. Formulak buruz ikasi eta aplikatzeko gaitasunetik harantzago, irizpide honen bidez aintzat hartu behar da ea ikasleak sakonean ulertzen dituen prozesuarekin zerikusia duten kontzeptuak eta ea askotariko metodoak erabiltzeko gauza den.

Taulan, grafikoan, adierazpen aljebraiko baten bidez edo enuntziatu baten bitartez emandako erlazio funtzional xumeak interpretatzea, horietatik balioak lortzea eta aztertutako fenomenoari buruzko ondorioak ateratzea. Irizpide honen bidez baloratu nahi da nola erabiltzen diren informazioa aurkezteko modu desberdinak elkarrekin lotzeko mekanismoak; batez ere, proportzionaltasun erlazio bati dagokion grafikotik hitzezko aurkezpenera, **zenbakizko aurkezpenera edo aurkezpen aljebraikora pasatzea**. Halaber, ebaluatu behar da **grafikoaren analisia egiteko eta analisi horren emaitza emandako aldagaien esanahiarekin lotzeko gaitasuna**.

Populazio baten ezaugarriak ezagutzeko galdera egokiak formulatzea eta erantzuteko datu jakingarriak bildu, antolatu eta aurkeztea; horretarako, metodo estatistiko egokiak eta tresna informatiko aproposak erabiltzea. Ikasleen ingurunearekin zerikusia duten kasu errazetan, egiaztatu behar da gai diren azterketa estatistikoaren fase guztiak garatzeko: azterketarako galdera edo galderak egin, informazioa bildu, taula eta grafikoetan antolatu, balio nagusiak lortu (batez bestekoa, moda, balio maximoa eta minimoa, heina) eta lortutako datuetatik zentzuzko ondorioak atera. Halaber, kalkulu orria erabiltzeko eta aztergai den egoerari ongien egokitzen zaizkion **grafikoak antolatu eta sortzeko gaitasuna baloratu nahi da.**

Azkenik, problemak ebazteko estrategia eta teknikak erabiltzea, hala nola enuntziatuaren analisia, saiakuntza eta errore sistematikoa, problema zatikatzea edo lortutako soluzioaren koherentziaren egiaztapena, eta ebazpenerako erabili den prozedura azaltzea, ikaslearen mailarako hizkuntza matematiko egokia erabiliz. Irizpide honen bidez ebaluatu nahi da nola ekiten dioten ikasleek problema ebazteari, soluzioa lortzeko prozedura estandarrik ez dagoenean. Hainbat alderdi ebaluatuko dira: ea enuntziatua ulertzen den testuaren zati bakoitzaren azterketaren eta alderdi nagusienen identifikazioren bitartez, nola aplikatzen diren ebazpenerako estrategia sinpleak, eta ea ikasleak soluzioa zuzena dela eta planteatutako problemari ongi egokitzen zaiola egiaztatzeko ohiturarik eta trebetasunik ba ote duen. Era berean, ebaluatu egin behar da ebazpenak bilatzeko jarraikitasuna, nork bere buruarengan soluzioa lortzeko konfiantza izatea, eta garatutako ideia eta prozesu pertsonalak hitz nahiko zehatzez transmititzeko gaitasuna, ikaskideek uler ditzaten. Erkatze jarduera hori egiteko jarrera positiboa izatea ere kontuan hartuko da.

DBH 3. ikasmailan berriro ere irizpide izanen dira **Zenbaki arrazionalak**, haien eragiketak eta haien propietateak erabiltzea informazioa bildu, eraldatu eta trukatzeko eta eguneroko bizitzarekin zerikusia duten arazoak ebazteko. Egiaztatu behar da ikasleak gai diren zenbakiak eta eragiketak identifikatu eta erabiltzeko, haien esanahiaz eta propietateez jabetzen diren, kalkulu modurik egokiena hautatzen duten (buruzkoa, idatzizkoa edo kalkulagailu bidezkoa) eta lortutako emaitzen koherentzia eta zehaztasuna kalkulatzeko gai diren. Halaber, garrantzitsua da, planteatutako egoera kontuan hartuta, **zenbakiak modu egokian adieraztea**: zenbaki hamartarra, zatikia edo notazio zientifikoa. Maila honetan planteatu behar diren problemetan oso garrantzitsua da notazio zientifikoa erabiltzea, baita emaitzak eskatutako zehaztasunera biribiltzea eta hori egitean izandako akatsa baloratzea ere.

Emandako propietate edo erlazio bat **hizkuntza aljebraikoaren bidez adieraztea**, eta erregulartasunak behatzea egiazko egoeretatik lortutako zenbaki sekuentzietan, eraketa-legea eta dagokion formula lortuz, kasu errazetan. Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ikasleek fenomeno batetik informazio garrantzitsua ateratzeko eta **adierazpen aljebraiko bihurtzeko gaitasuna** baduten. Zenbaki-pauten tratamenduari dagokionez, kontuan hartuko da ea ikasleak gai diren erregulartasunak aztertzeko eta adierazpen sinbolikoak lortzeko, iterazio-formak eta forma errepikariak barne direla.

Eguneroko bizitzako arazoak ebaztea, **lehen edo bigarren mailako ekuazioak** edo bi ezezagun dituzten **ekuazio linealen sistemak planteatu eta ebatzi** behar diren kasuetan. Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ikasleek badakiten letrazko adierazpideak manipulatzeko teknikak erabiltzen, ebatzi aurretik ekuazio eta sistemetara bihurtzen ahal diren problemak ebazteko. **Ebazpen aljebraikoa ez da planteatzen ebazpen metodo bakartzat; bestelako metodo numeriko eta grafikoekin konbinatzen da, baliabide teknologiko egokiak erabiliz.**

Planoko mugimenduen bidez irudi geometriko batetik beste batera eramaten duten eraldaketak ezagutzea, mugimendu horiek erabiltzea nork bere konposizioak sortzeko, eta eguneroko diseinuak, artelanak eta naturan dauden konfigurazioak aztertzea geometriaren ikuspegitik. Irizpide honen bidez baloratu behar da ea ikasleek planoko mugimenduak ulertzen dituzten, mugimendu horiek analisirako beste tresna bat gehiago baitira egitura naturaletan edo artelanetan. Mugimenduak hautemanez gero, haien elementu bereizgarriak identifika daitezke: **simetria** ardatzak, biraketaren zentroa eta anplitudea, etab. Era berean, leku geometrikoak beren propietateengatik ezagutuko dira, ez beren adierazpen aljebraikoagatik. Gainera, objektuak manipulatzeko eta mugimenduak eratzeko sormena eta gaitasuna ebaluatuko dira, ikasleak beren lanak sortzeko gai izan daitezen.

Eredu linealak erabiltzea, enuntziatu, taula, grafiko edo adierazpen aljebraiko baten bidez emanda dauden egiazko egoerak aztertzeko. Irizpide honen bidez baloratu behar da ea ikasleak gai diren funtzio linealen bitartez adierazten ahal diren fenomeno fisikoak, sozialak edo eguneroko bizitzakoak aztertzeko, balio-taula egiteko, ardatzetan eskala egokiak erabiliz grafikoa marrazteko eta erlazioaren adierazpen aljebraikoa lortzeko. Halaber, ebaluatu nahi da ea ikasleak gai diren baliabide teknikoak grafiko baten alderdi nagusien analisiari aplikatzeko eta hartara aztergai den fenomenoaren ezagutzan sakontzea ahalbidetuko duen informazioa ateratzeko.

Informazio estatistikoak landu eta interpretatzea, erabiltzen diren **taulen eta grafikoen egokitasuna** kontuan hartuta, eta parametroak zenbateraino diren adierazgarriak aztertzea. Baloratu nahi da ea ikasleak gai diren informazio estatistikoa maiztasun tauletan eta grafikoetan antolatzeko, alderdi tekniko, funtzional eta estetikoak aintzat harturik (informazioa ongien aurkeztuko duen taula edo grafikoa hautaturik), eta banaketa bateko balio zentralak (batez bestekoa, mediana eta moda) eta sakabanatze parametroak (ibiltartea eta desbideratze tipikoa) kalkulatzeko, kalkulagailua edo kalkulu orria erabiliz, behar izanez gero. Era berean, **taula eta grafiko eran emandako informazio estatistikoa interpretatzeko gaitasuna baloratuko da.** Azkenik, populazio batetik ondorio egokiak atera beharko dira, haren parametro adierazgarrienak jakinda.

Kasu errazetan iragarpenak egitea zerbait gertatzeko aukerari buruz, aldez aurretik enpirikoki lortutako informazioa edo aukeren zenbaketaren emaitza kontuan hartuta. Ikasleek ausazko saiakuntza sinple bateko oinarrizko gertaerak eta saiakuntza horri lotutako beste gertaera batzuk identifikatzeko duten gaitasuna neurtu nahi da. Halaber, kasu errazetan, saiakuntzatik edo kalkulutik (Laplaceren legea) abiatuta gertaera baten probabilitatea zehaztu eta interpretatzeko duten gaitasuna neurtu behar da. Horregatik, bereziki interesgarriak dira saiakuntzaren, simulazioaren edo zenbaketaren emaitzetatik abiatuta zentzuzko erabakiak hartzea eskatzen duten egoerak.

Problemak ebazteko estrategiak eta teknikak planifikatu eta erabiltzea, hala nola zenbaketa zehatza, indukzioa edo antzeko problemen bilaketa, eta egiaztatzea soluzioa bat datorrela planteatutako egoerarekin, eta ahoz nahiz idatziz adieraztea, zehaztasunez, arrazoibideak, erlazio kuantitatiboak eta elementu matematikoak dituzten informazioak, horretarako hizkuntza matematikoak eskaintzen duen erabilgarritasun eta sinpletasuna aintzat hartuz. Ebaluatu behar da ea ikasleak gai diren problema bat ebazteko bidea planifikatzeko eta ebazpenari begira estrategia konplexuagoetara jotzeko. Halaber kontuan hartuko dira soluzioak bilatzeko jarraikitasuna, soluzioen koherentzia eta ebatzi beharreko egoerarako egokitasuna, eta soluzioa lortzeko nork bere buruarengan erakusten duen konfiantza. Gainera, aintzat hartuko da kantitateak, neurriak, zenbakizko erlazioak edo erlazio espazialak dituzten mota guztietako informazioak adierazteko erabiltzen den hizkuntzaren zehaztasuna, baita problema ebazteko erabiltzen diren estrategiak eta arrazoibideak ere.

DBHko 4. ikasturtean eskatuko zaie mota guztietako zenbaki eta eragiketak eta haien propietateak erabiltzea informazioa bildu, eraldatu eta trukatzeko eta eguneroko bizitzarekin zerikusia duten arazoak ebazteko. Egiaztatu behar da ikasleak gai diren zenbakiak eta eragiketak identifikatu eta erabiltzeko, haien esanahiaz eta propietateez jabetzen diren, kalkulu modurik egokiena hautatzen duten (buruzkoa, idatzizkoa edo kalkulagailu bidezkoa) eta lortutako emaitzen koherentzia eta zehaztasuna kalkulatzeko gai diren. Maila honetan, bereziki, begiratu behar da ea ikasleak gai diren egunerokotasunetik hurbil dauden inguruneetan zenbakiak erabiltzeko eta ea zenbakien beste alderdi batzuk ikasi dituzten, neurketarekin eta zenbaki oso handi edo oso txikiekin zerikusia dutenak.

Ehunekoak eta tasak aplikatzea eguneroko problemak eta finantzen arlokoak ebazteko, eta kalkulu orria erabiltzeko aukera baloratzea, zenbakien kopuruaren eta konplexutasunaren arabera. Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ikasleak gai diren finantzen arloko ohiko egoerekin zerikusia duten problemei ehunekoak, tasak, gehikuntzak eta gutxipenak aplikatzeko. Halaber, behar izanez gero, informazioaren teknologiak erabili behar dituzte kalkuluak egiteko.

Eguneroko bizitzako arazoak ebaztea, **lehen edo bigarren mailako ekuazioak edo bi ezezagun dituzten ekuazio linealen sistemak planteatu eta ebatzi behar diren kasuetan**. Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ikasleek badakiten letrazko adierazpideak manipulatzeko teknikak erabiltzen, ebatzi aurretik ekuazio eta sistemetara bihurtzen ahal diren problemak ebazteko. **Ebazpen aljebraikoa ez da planteatzen ebazpen metodo bakartzat**; bestelako metodo numeriko eta grafikoekin konbinatzen da, informazioaren teknologien erabilera egokiaren bidez.

Egiazko egoeretan zuzeneko eta zeharkako neurriak lortzeko tresna, formula eta teknika egokiak erabiltzea. Egiaztatu nahi da ikasleek estrategia egokiak garatu dituzten magnitude ezagunetatik abiatuta magnitude ezezagunak kalkulatzeko, eskura dituzten neurketa tresnak erabiltzeko, formula egokiak aplikatzeko eta proposaturiko neurketari dagozkion teknika eta trebetasunak garatzeko.

Egoera jakin batean erlazio kuantitatiboak identifikatzea eta zein funtzio motaren bidez adierazten ahal diren zehaztea. Irizpide honen bidez ebaluatu nahi da ea ikasleak gai diren fenomeno jakin bati **dagokion eredua bereizteko, ikasitako ereduen artetik (lineala, koadratikoa, esponentziala),** eta zentzuzko ondorioak ateratzeko hari lotutako egoeratik; azterketa hori egiteko informazioaren teknologiak erabili behar dituzte, behar izanez gero.

Egiazko egoerei lotutako **funtzio-erlazioak adierazten dituzten taula eta grafikoak aztertzea, horien portaerari buruzko informazioa lortzeko.** Grafiko baten edo taula bateko zenbakizko balioen portaera ikusirik, aztergai den fenomenoari buruzko ondorioak ateratzeko gaitasuna baloratuko da. Horretarako, datu grafikoetatik edo zenbakietatik abiatuta, aldakuntza tasen interpretazioa eta hurbilketa egin beharko da.

Taula eta grafiko estatistikoak osatu eta interpretatzea, eta bai banaketa diskretu eta jarraituetan maizenik izaten diren parametro estatistikoak ere, eta erabilitako laginen adierazgarritasuna kualitatiboki baloratzea. Informazio estatistikoa tauletan eta grafikoetan antolatzeko gaitasuna eta kalkulagailuaren nahiz kalkulu orriaren laguntzaz parametro garrantzitsuenak kalkulatzeko gaitasuna baloratu behar dira. Maila honetan lortu nahi da ikasleek kontuan har ditzatela lagina hautatzeko prozeduraren adierazgarritasuna eta baliozkotasuna, eta ikerlanaren ondorioak populazio osoari aplikatzea egokia ote den azter dezatela.

Probabilitate-kalkuluaren kontzeptuak eta teknikak aplikatzea eguneroko bizitzako arazo eta egoerak ebazteko. Ikasleek gai izan behar dute lagin-espazioa identifikatzeko esperientzia bakunetan eta esperientzia konposatu xumeetan, eguneroko bizitzako ingurune jakinetan, eta Laplaceren legea, zuhaitz-diagramak edo kontingentzia taulak erabili behar dituzte probabilitateak kalkulatzeko. Gainera, lortutako emaitzak baliatu behar dituzte zentzuzko erabakiak hartzeko, planteatutako problemen testuinguruan.

Azkenik, eskatuko zaie A aukerakoei problemak ebazteko arrazoitze-prozesu eta estrategia anitz eta erabilgarriak planifikatu eta erabiltzea, eta arrazoibideak, erlazio kuantitatiboak eta elementu matematikoak dituzten informazioak ahoz nahiz idatziz adieraztea, zehaztasunez, horretarako hizkuntza matematikoak eskaintzen duen baliagarritasun eta sinpletasuna baloratuz. Ebaluatu nahi da ea ikasleak gai diren problema bat ebazteko bidea planifikatzeko, esku hartzen duten erlazio matematikoak ulertzeko eta aurreko kurtsoetan ikasitako estrategiak eta ebazpen teknikak aplikatzeko, beren gaitasunaz eta intuizioaz fidaturik. Gainera, aintzat hartuko da kantitateak, neurriak, zenbakizko erlazioak edo erlazio espazialak dituzten mota guztietako informazioak adierazteko erabiltzen den hizkuntzaren zehaztasuna, baita problema ebazteko erabiltzen diren estrategiak eta arrazoibideak ere.

DBHko 4. mailako B aukerakoei eskatuko zaie **mota guztietako zenbaki eta eragiketak eta haien propietateak erabiltzea informazioa bildu**, eraldatu eta trukatzeko eta eguneroko bizitzarekin eta eremu akademikoko beste gai batzuekin zerikusia duten arazoak ebazteko. Egiaztatu behar da ikasleak gai diren **zenbaki mota guztiak eta eragiketak identifikatu eta erabiltzeko, haien esanahiaz eta propietateez jabetzen diren**, kalkulu modurik egokiena hautatzen duten (buruzkoa, idatzizkoa edo kalkulagailu bidezkoa) eta lortutako emaitzen koherentzia eta zehaztasuna kalkulatzeko gai diren. Maila honetan bereziki garrantzitsua da begiratzea ea ikasleak gai ote diren soluzioa (zehatza edo hurbildua) probleman eskatzen zaien zehaztasunari egokitzeko, batez ere berretura, erro edo zatikiekin lan egiten dutenean.

Egoerak eta egitura matematikoak adierazi eta aztertzea, ikur eta metodo aljebraikoak erabiliz, problemak ebazteko. Irizpide honen bidez egiaztatu behar da ikasleak gai diren aljebra sinbolikoaren bidez erlazio matematikoak adierazi eta azaltzeko eta aljebra sinbolikoaren metodoak erabiltzeko **problemen ebazpenean, inekuazio, ekuazio eta sistemen bitartez.**

Egiazko egoeretan zuzeneko eta zeharkako neurriak lortzeko tresna, formula eta teknika egokiak erabiltzea. Egiaztatu nahi da ikasleek estrategia egokiak garatu ote dituzten magnitude ezagunetatik abiatuta magnitude ezezagunak kalkulatzeko, eskura dituzten neurketa tresnak erabiltzeko, formula egokiak aplikatzeko eta proposaturiko neurketari dagozkion teknika eta trebetasunak garatzeko.

Erlazio kuantitatiboak identifikatzea egoera jakin batean, horiek adieraz ditzakeen **funtzio mota zehaztea**, eta batez besteko aldakuntza tasa hurbildu eta **interpretatzea grafiko baten bidez**, zenbakizko datuen bidez edo **adierazpen aljebraikoko koefizienteen azterketaren bidez**. Irizpide honen bidez ebaluatu nahi da ea ikasleak gai diren fenomeno jakin bati dagokion eredua bereizteko, ikasitako **ereduen artetik (lineala, koadratikoa, alderantzizko proportzionaltasunekoa, esponentziala edo logaritmikoa)**, eta zentzuzko ondorioak ateratzeko hari lotutako egoeratik; azterketa hori egiteko informazioaren teknologiak erabili behar dituzte, behar izanez gero. Gainera, grafiko baten edo taula bateko zenbakizko balioen portaera ikusirik, aztergai den fenomenoari buruzko ondorioak ateratzeko gaitasuna baloratuko da. Horretarako, ikasleek batez besteko aldakuntza tasaren hurbilketa eta interpretazioa egin beharko dituzte, **datu grafikoak, zenbakizko datuak edo adierazpen aljebraikoaren balio jakinak oinarri hartuta.**

Taula eta grafiko estatistikoak osatu eta interpretatzea, eta bai dimentsio bakarreko banaketetan maizenik izaten diren parametro estatistikoak ere, eta erabilitako laginen adierazgarritasuna kualitatiboki baloratzea. Maila honetan esanahi berezia hartzen du datu eskuragarrien azterketa kualitatiboak, bai eta parametro estatistikoak batera erabilita atera daitezkeen ondorioek ere. Gainera, lortu nahi da ikasleek kontuan har ditzatela lagina hautatzeko prozeduraren adierazgarritasuna eta baliozkotasuna, eta ikerlanaren ondorioak populazio osoari aplikatzea egokia ote den azter dezatela.

Probabilitate-kalkuluaren kontzeptuak eta teknikak aplikatzea eguneroko bizitzako arazo eta egoerak ebazteko. Ikasleek gai izan behar dute lagin-espazioa identifikatzeko esperientzia bakunetan eta esperientzia konposatu xumeetan, eguneroko bizitzako ingurune jakinetan, eta Laplaceren legea, zuhaitz-diagramak edo kontingentzia taulak erabili behar dituzte probabilitateak kalkulatzeko. Gainera, lortutako emaitzak baliatu behar dituzte zentzuzko erabakiak hartzeko, planteatutako problemen testuinguruan.

Problemak ebazteko arrazoitze-prozesu eta estrategiak planifikatu eta erabiltzea (adibidez, hipotesiak eman eta justifikatzea, edo orokortzea), eta arrazoibideak, erlazio kuantitatiboak eta elementu matematikoak dituzten informazioak ahoz nahiz idatziz adieraztea, zehaztasun eta zorroztasunez, horretarako hizkuntza matematikoak eskaintzen duen baliagarritasun eta sinpletasuna baloratuz. Ebaluatu behar da ea ikasleak gai diren problema ebazteko bidea planifikatzeko, erlazio matematikoak ulertzeko eta hipotesiak osatu eta egiaztatzeko, beren gaitasunaz eta intuizioaz fidaturik. Gainera, aintzat hartuko da kantitateak, neurriak, zenbakizko erlazioak edo erlazio espazialak dituzten mota guztietako informazioak adierazteko erabiltzen den hizkuntzaren zehaztasuna eta zorroztasuna, baita problema ebazteko erabiltzen diren estrategiak eta arrazoibideak ere.

2.3-Batxilergoan

Oraingo honetan curriculumak (NG, 2015) ebaluazio irizpideak esleitzen dizkio eduki multzo bakoitzari; hortaz, banan bana aztertuko dira ebaluazio irizpide multzo hauek eta arestian egin bezala, lehen atalean aztertutako edukiekin bat egiten duten irizpideak belztuko dira.

Azken azpiatal honetan ere lehen azpiataleko (2.1- LH) estruktura bera erabili da. Ebaluazio irizpideak taulatu dira eta soberan zeudenak arbuiatu; hori dela eta, curriculumean agertzen diren hainbat ebaluazio irizpide falta dira.

MATEMATIKA I
ZENBAKIAK ETA ALJEBRA
1. **Zenbaki errealak, haien eragiketak eta propietateak erabiltzea, informazioa biltzeko, eraldatzeko eta trukatzeko**, emaitzak zenbatetsiz, baloratuz eta irudikatuz problemak ebazten diren testuinguruetan.
ANALISIAK
1. Funtzio elementalak, enuntziatu, taula edo adierazpen aljebraikoen bidez emanak, identifikatzea, egoera erreal bat deskribatzen dutenean, eta haien propietateak kualitatiboki eta kuantitatiboki analizatzea, horiek **modu grafikoan irudikatzeko** eta, nondik eratortzen diren, fenomeno horixe interpretatzen lagunduko duen informazio praktikoa ateratzeko. 2. **Funtzio baten limitearen eta jarraitutasunaren kontzeptuak erabiltzea** eta horiek aplikatzea limiteen **kalkulurako** eta funtzio batek puntu batean edo tarte batean duen **jarraitutasunaren azterketarako**. 3. Funtzio baten **puntu bateko deribatuaren kontzeptua, haren interpretazio geometrikoa eta deribatuen kalkulua aplikatzea** fenomeno natural, sozial edo teknologikoen azterketarako eta problema geometrikoen ebazpenerako. 4. **Funtzioak aztertzea eta modu grafikoan irudikatzea**, eta informazioa eskuratzea beren propietateetatik abiatuta eta informazioa ateratzea haien portaera lokal edo globalaren gainean.
GEOMETRIA
3. **Biderkadura eskalarraren** eragiketa eta haren ondorioak maneiatzea. Oinarri ortogonal eta ortonormalaren kontzeptuak ulertzea. Plano euklidearra eta plano metrikoa bereiztea eta bietan zehaztasunez moldatzea, bietan erabilirik haien tresna eta propietateak. 4. Geometria lau elementalaren zenbait egoera modu analitikoan interpretatzea, zuzenen ekuazioa eskuraturik, eta horiek erabiltzea intzidentziako eta **distantzien kalkuluko** problemak ebazteko. 5. **Planoko leku geometrikoaren kontzeptua maneiatzea.** Zenbait leku geometriko ohikori dagozkien formei antzematea, haien ekuazio murriztuak aztertzea eta haien propietate metrikoak aztertzea.

11. taula: Batxilergo akademikoko 1. urteko ebaluazio irizpideak

MATEMATIKA II
ANALISIAK
1. **Funtzio baten puntu bateko edo tarte bateko jarraitutasuna aztertzea, eta horren ondoriozko emaitzak aplikatzea**. 2. Funtzio baten **puntu bateko deribatuaren kontzeptua, haren interpretazio geometrikoa eta deribatuen kalkulua** aplikatzea fenomeno natural, sozial edo teknologikoak aztertzeko, eta problema geometrikoak, **limiteak kalkulatzeko problemak** eta optimizazio problemak ebazteko. 3. Funtzio errazen **integralak kalkulatzea,** jatorrizkoak kalkulatzeko oinarrizko teknikak aplikatuz. 4. **Integral definituen kalkulua erabiltzea**, zuzen eta kurba errazek mugaturiko eskualde lauetako azalerak neurtzeko, horiek erraz irudikatzen ahal direlarik, eta orokorrean, problemak ebazteko.
GEOMETRIA
1. Problema geometriko espazialak ebaztea, **bektoreak erabiliz**. 2. Zuzenen eta planoen arteko intzidentzia, paralelismo eta zutasun problemak ebaztea, **zuzenaren ekuazioa eta espazio planoaren ekuazioa erabiliz**. 3. **Bektoreen arteko biderkadurak erabiltzea** angeluak, distantziak, azalerak eta bolumenak kalkulatzeko, haien balioa kalkulatuz kontuan harturik haien esanahi geometrikoa.

12. taula: Batxilergo akademikoko 2. urteko ebaluazio irizpideak

GIZARTE ZIENTZIETARA APLIKATUTAKO MATEMATIKA I
ZENBAKIAK ETA ALJEBRA
3. **Hizkuntza aljebraikoa edo grafikora transkribatzea gizarte zientziei dagozkien egoerak** eta teknika matematiko eta tresna teknologiko egokiak erabiltzea problema errealek ebazteko, testuinguru partikularretan lortutako ebazpenen interpretazioa emanez.
ANALISIAK
1. **Funtzio errealen grafikoak interpretatzea eta irudikatzea,** kontuan harturik haien ezaugarriak eta gizarte fenomenoekin duten lotura. 2. Tauletatik abiatuta, funtzioen **balioak interpolatzea eta estrapolatzea,** eta erabilgarritasuna ezagutzea kasu errealetan. 4. Jarraitutasun kontzeptua ezagutzea eta puntu bateko **jarraitutasuna ikastea funtzio polinomiko, arrazional, logaritmiko eta esponentzialetan**. 5. Tarte bateko eta puntu bateko batez besteko bariazio tasa geometrikoki ezagutzea eta interpretatzea, **deribatu kontzeptuarekiko hurbilketa gisa,** eta **deribazio erregelak erabiltzea**, funtzio errazen eta haien eragiketen funtzio deribatua ateratzeko.
ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA
4. **Probabilitate binomialeko eta normaleko banaketen** bidez modelizatzen ahal diren fenomenoak identifikatzea, haien parametroak kalkulatuz eta elkar loturiko zenbait gertaeren probabilitatea zehaztuz.

13. taula: Gizate zientzietara aplikaturiko batxilergoko 1. urteko ebaluazio irizpideak

GIZARTE ZIENTZIETARA APLIKATUTAKO MATEMATIKA II
ZENBAKIAK ETA ALJEBRA
2. Ohiko hizkuntzan adierazten diren problemak **hizkuntza aljebraikora transkribatzea**, eta horiek ebaztea halako teknika aljebraiko batzuk erabiliz: matrizeak, ekuazio sistemak, inekuazioak eta programazio lineal dimentsio bikoa, modu kritikoan interpretatuz eskuratutako konponbideen esanahia.
ANALISIAK
2. **Deribatuen kalkulua erabiltzea** ondorioak ateratzeko funtzio baten portaeraren gainean, izaera ekonomiko edo sozialeko egoera errealetatik ateratako optimizazio problemak ebazteko eta aztertutako fenomenotik ondorioak ateratzeko. 3. **Integralen kalkulua erabiltzea**, zuzen eta **kurba errazek mugaturiko eskualde lauetako azalerak** neurtzeko, horiek erraz irudikatzen ahal direlarik berehalako **integraziorako teknikak erabiliz.**

14. taula: Gizate zientzietara aplikaturiko batxilergoko 2. urteko ebaluazio irizpideak

3 Kapitulua: Ariketen, problemen eta galderen ereduak testu-liburuetan eta funtzioekin duten lotura indarrean dagoen curriculumean

Hirugarren atal honetan LHtik Batxilergorako urteetan erabilitako testu-liburuen ariketen aurkezpena egitea du helburu. Helburu honekin, urtez urte banatu dira 3. atal honen azpiatalak eta 2. DBHtik goragoko zein beheragoko ikasmailak aukeratu dira: LHko 6., DBHko 1., 2., 3. eta 4. ikasmailak, alegia.

Atalaren luzera murriztearren 2 ariketa esanguratsuenak aukeratu dira ikasmaila bakoitzeko (laugarren mailan izan ezik); bost azpiatal izanik, osotara hamar ariketa izan beharko litzateke, baina laugarren mailakoak mamitsuagoak izanagatik gehiago aukeratu dira. Ariketa hauek guztiak, ariketa, problema, kuestio eta egoera lau mota ezberdinetan sailkatu dira.

Erabilitako eskuliburuak LHrako .... izan dira eta DBHrako Savia SM editorialeko aleak erabili dira ordea.

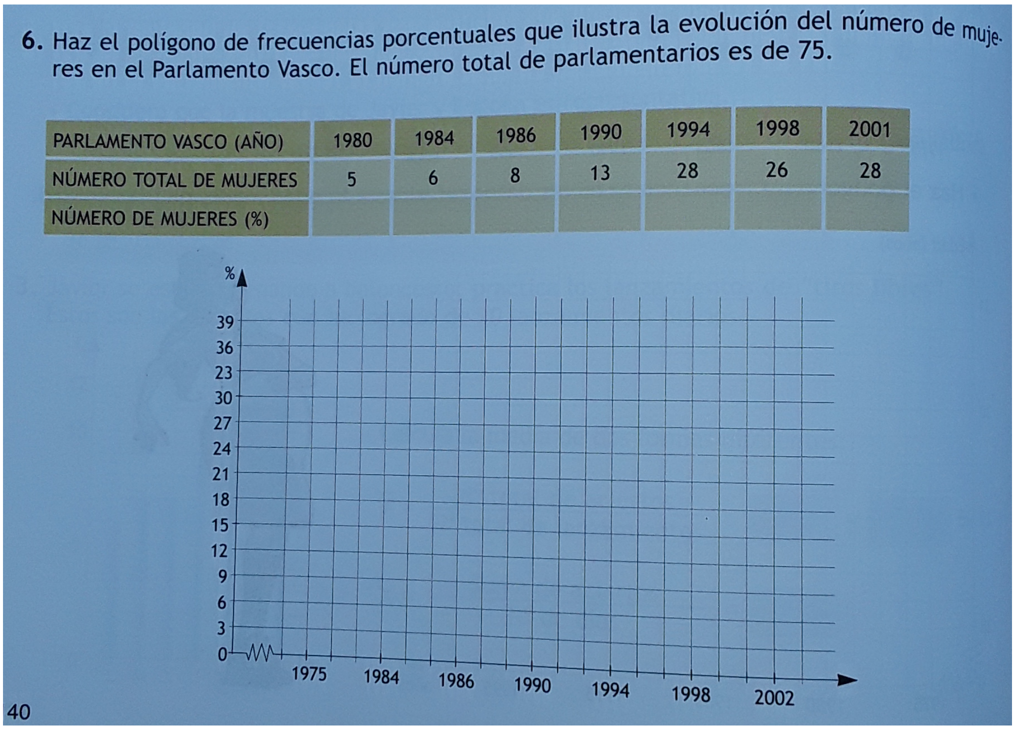
3.1- Ariketen, problemen eta galderen ereduak LHko 6. mailan

Sailkapena: Ariketa

Deskribapena:

Ikasleak emakume kopuruaren (*f(t)*) frekuentzia poligonoa marraztu behar du denboraren (aldagai askea = *t*) menpe. Poligono frekuentziak funtzioen grafoekin lehen kontaktua izanen da; sasifuntzioak, alegia.

Adibidea:


6. Haz el polígono de frecuencias porcentuales que ilustra la evolución del número de mujeres en el Parlamento Vasco. El número total de parlamentarios es de 75.

PARLAMENTO VASCO (AÑO)	1980	1984	1986	1990	1994	1998	2001
NÚMERO TOTAL DE MUJERES	5	6	8	13	28	26	28
NÚMERO DE MUJERES (%)							

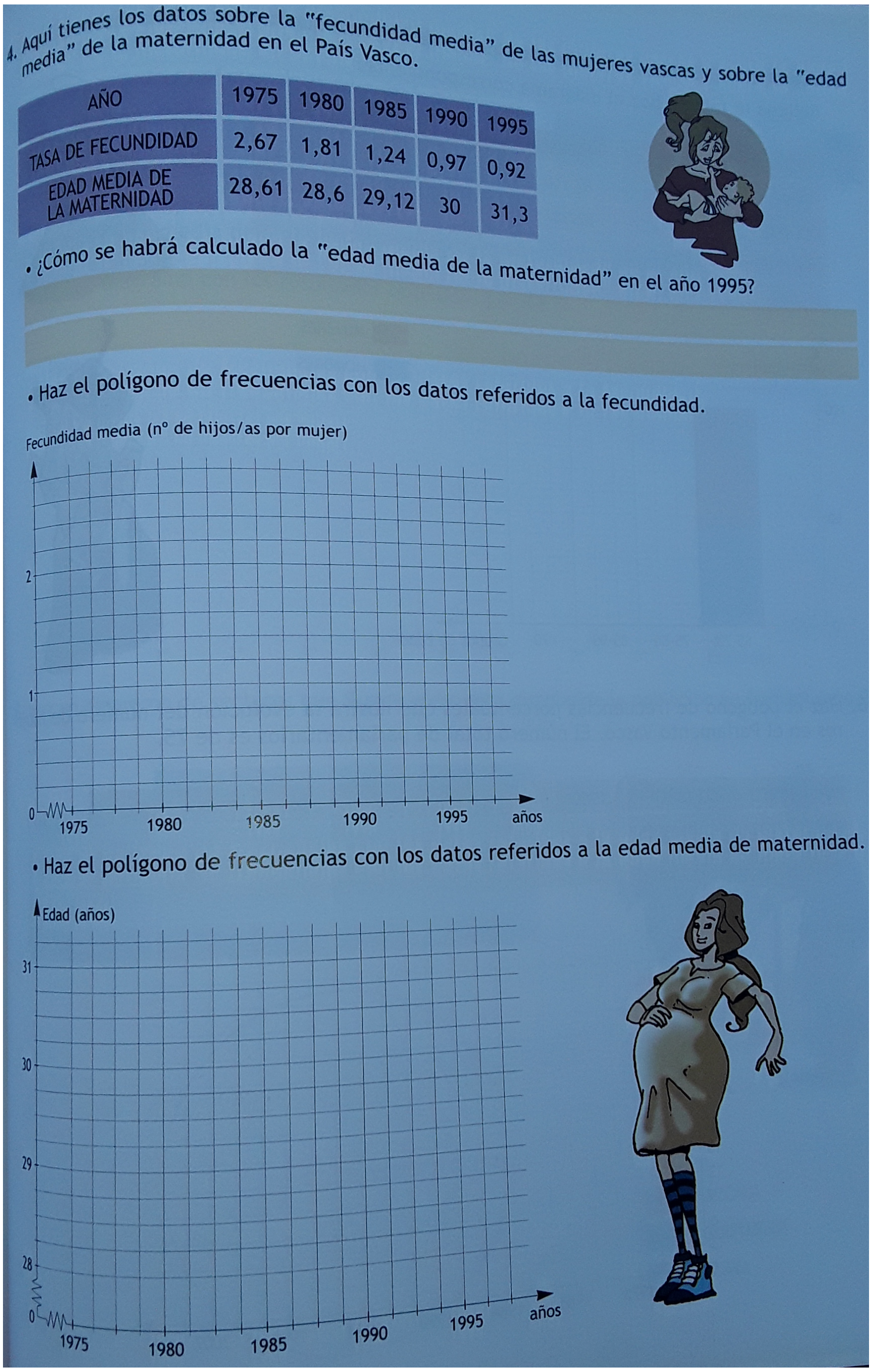
1. irudia: LH6ko estatiskiken ataletik ateratako ariketa.

Sailkapena: Ariketa

Deskribapena:

Ikasleak bi aldagai ezberdinen frekuentzia poligonoak marraztu behar ditu denboraren (aldagai askea = *t*) menpe; oraingoan bi sasifuntzio ditugu, *f(t)* eta *g(t)* alegia. Gerta liteke ikasleari hauen arteko erlaziorik dagoen ala ez baieztatzen eskatzea. Bestetik, estatistikako batezbesteko posizio aldagaiaren inguruan galdetzen da.

Adibidea:



4. Aquí tienes los datos sobre la "fecundidad media" de las mujeres vascas y sobre la "edad media" de la maternidad en el País Vasco.

AÑO	1975	1980	1985	1990	1995
TASA DE FECUNDIDAD	2,67	1,81	1,24	0,97	0,92
EDAD MEDIA DE LA MATERNIDAD	28,61	28,6	29,12	30	31,3

• ¿Cómo se habrá calculado la "edad media de la maternidad" en el año 1995?

• Haz el polígono de frecuencias con los datos referidos a la fecundidad.

• Haz el polígono de frecuencias con los datos referidos a la edad media de maternidad.

2. irudia: LH6ko estatiskiken ataletik ateratako ariketa.

3.2- Ariketen, problemen eta galderen ereduak DBHko 1. mailan

Sailkapena: Kuestioa

Deskribapena:

Ikasleak eragiketen jerarkiaren inguruan hausnartu behar du. Horretarako ikasleak liburuak emandako pautak jarraitu behar ditu.

Adibidea:

16.

Luis se confunde y hace las operaciones al revés: primero suma 5 y después multiplica por 3.

a) ¿Obtendrá el resultado que le pidió el mago?

b) Escribe las fórmulas que relacionan el número pensado con el resultado de las operaciones indicadas por el mago y con las que ha hecho Luis.

c) Completa la tabla en tu cuaderno y comprueba si los valores coinciden.

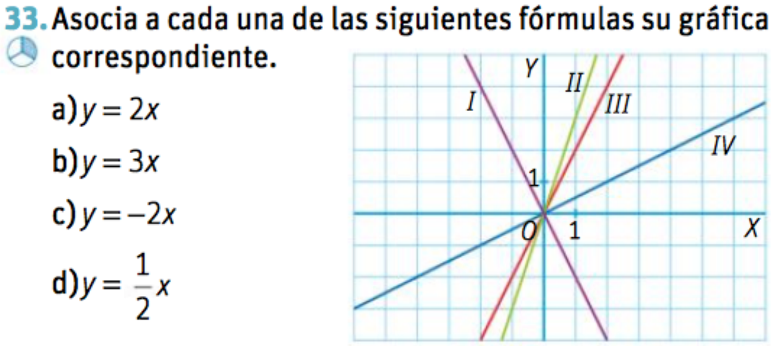
Número	1	3	5	10	20	100
Resultado del mago	●	●	●	●	●	●
Resultado de Luis	●	●	●	●	●	●

3. irudia: DBH 1. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

Sailkapena: Ariketa

Deskribapena: Ikasleak maldaren kontzeptu intuitiboarekin lan egin behar du.

Adibidea:



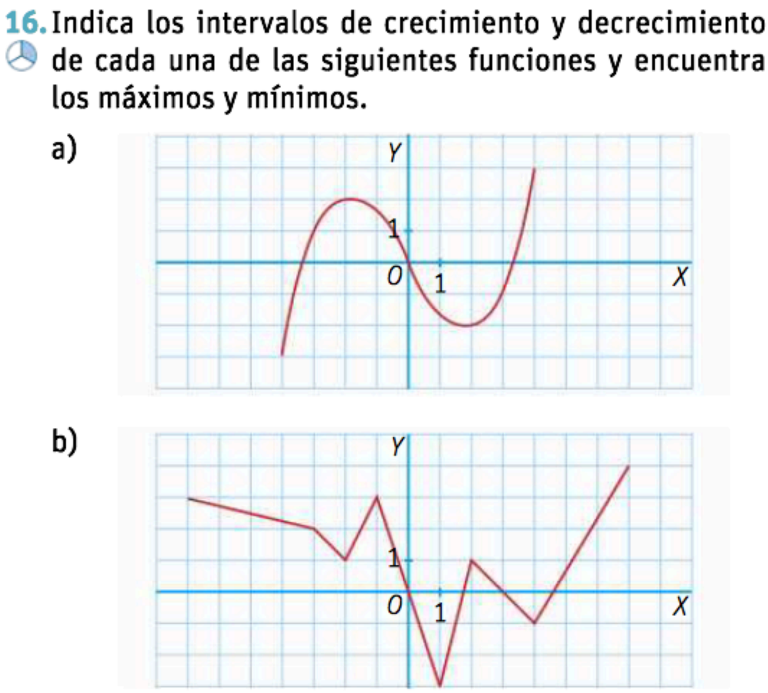
4. irudia: DBH 1. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

3.3- Ariketen, problemen eta galderen ereduak DBHko 2. mailan

Sailkapena: Ariketa

Deskribapena:
Ikasleari egun horretan ikasitako maximo eta minimo kontzeptuak baliatzeko eskatzen zaio esplizituki.

Adibidea:



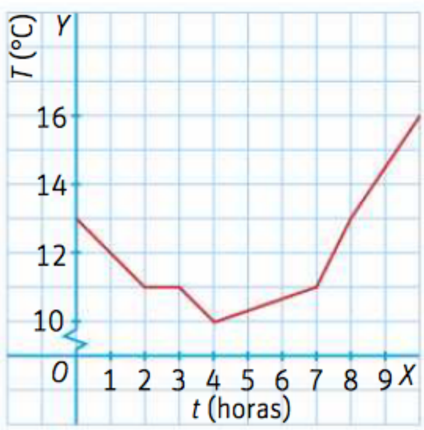
5. irudia: DBH 2. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

Sailkapena: Ariketa

Deskribapena: Ikasleari grafika bat deskribatzeko eskatzen zaio.

Adibidea:

45. **Santiago ha medido la temperatura en su jardín cada hora. Describe la evolución de la temperatura en el jardín a partir de la gráfica.**



6. irudia: DBH 2. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

3.4- Ariketen, problemen eta galderen ereduak DBHko 3. mailan

Sailkapena: Problema

Deskribapena:
Funtzio afinaren eta tarteka definitutako funtzioen problema. Bi aldagai ditu, x = masa eta f(x)=y=medikamentu gramoak. Ikasleak taula osatu, funtzioen tarteak identifikatu, grafikatu eta grafikaren deskribapena egin behar du.

Adibidea:

10. **La dosis de un medicamento es 0,3 g por cada 2 kg de masa del paciente hasta un máximo de 15 g.**

a) ¿Cuántos gramos tiene que tomar un niño que tiene una masa de 10 kg? ¿Y de 30 kg? ¿Y una persona de 70 kg?

b) ¿A partir de qué masa se toma la dosis máxima?

c) Realiza una tabla de valores y representa la gráfica de la dosis en función de la masa del paciente. ¿Cuál es el dominio? ¿Y el recorrido?

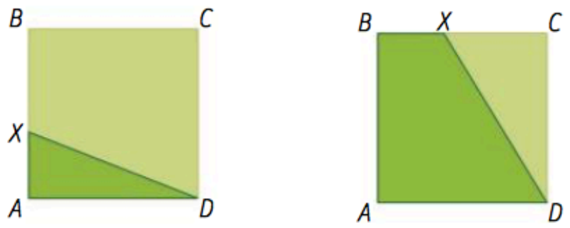
7. irudia: DBH 3. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

Sailkapena: Ariketa/Kuestioa

Deskribapena:
Tarteka definitutako funtzioen moduko ariketa zaila moduan hasten da baina ostean egindakoaren hausnarketa eskatzen dio ikasleari. Azaleren kalkulu konposatua egiten jakitea eskatzen du aurretik.

Adibidea:

51. **En el cuadrado *ABCD* de lado 4 cm, un punto *X* se desliza de *A* hacia *B* y cuando alcanza *B* luego continúa de *B* hasta *C*.**



A medida que el punto *X* se mueve, se van formando triángulos y luego trapecios (en verde oscuro), para terminar en un cuadrado.

a) Si x es la distancia que ha recorrido el punto *X* desde que sale de *A*, calcula la función $f(x)$ que define el área de las figuras verde oscuro que va originando el punto *X* en su trayecto desde *A* hasta *C*.

b) ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)$?

c) Dibuja la gráfica de la función $f(x)$. ¿Es continua?

8. irudia: DBH 3. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

3.5- Ariketen, problemen eta galderen ereduak DBHko 4. mailan

Sailkapena: Ariketa

Deskribapena: Funtzio ezberdinen grafikak egitea.

Adibidea:

6. **Representa las siguientes funciones cuadráticas.**

a) $f(x) = x^2 - 1$ **b)** $f(x) = (x - 3)^2$

7. **Estudia y representa de forma aproximada la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 1$.**

9. irudia: DBH 4. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

Sailkapena: Problema/Kuestioa

Deskribapena:

Ikasleak bigarren mailako ekuazioen soluzioen inguruko hausnarketa egin beharko du azaltzen zaion problema dela medio. Ez du erdiko pausorik.

Adibidea:

Encuentra el error

99. Antonio ha obtenido un 6 en el último examen de Matemáticas y quiere convencer a su profesor para que le ponga un notable en la evaluación.

Para ello, hace el siguiente razonamiento:

Mi nota ha sido $x = 6$, luego:

$$13x = 78 \text{ y } x^2 = 36$$

Como $36 = 78 - 42$ puedo escribir que:

$$x^2 = 78 - 42 = 13x - 42$$

Si resto $6x$ a ambos miembros de la igualdad obtengo:

$$x^2 - 6x = 7x - 42$$

Es decir, $x(x - 6) = 7(x - 6)$ y de aquí se obtiene que evidentemente x tiene que ser 7.

Muy bueno tu intento, le dice el profesor, pero algo has hecho mal para concluir que un 6 es igual que un 7.

¿Cuál es el error en el razonamiento de Antonio?

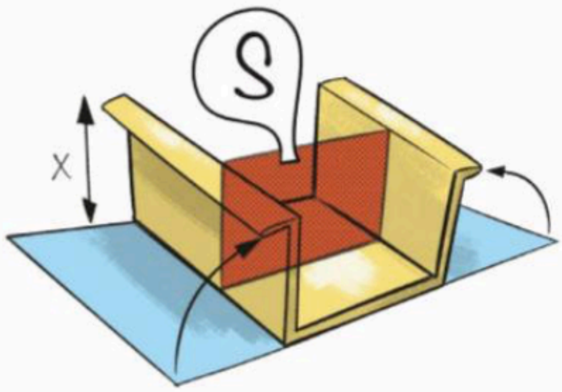
10. irudia: DBH 4. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

Sailkapena: Ariketa/Problema

Deskribapena:
Ikasleak problema egin aurretik ('c) atala'), beste bi aurreko pauso ematen zaizkio ariketa moduan. Deribatuen bidezko optimizazioa erabili beharko du problema ebazteko.

Adibidea:

79. **Un taller de planchas de aluminio tiene que fabricar canaletas para conducciones de agua. Las planchas de aluminio que va a utilizar son rectangulares de 40 cm de ancho y las doblan mediante una prensa.**



a) Determina la anchura de la canaleta en función de su altura, x.

b) Escribe una función que representa el área de la sección transversal, S, de la canaleta. ¿Cuál es su dominio?

c) Determina cómo se debe plegar la plancha de aluminio para que S tenga la mayor superficie.

11. irudia: DBH 4. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

Sailkapena: Ariketa

Deskribapena: 1^{∞} moduko limiteak ebatzi.

Adibidea:

51. **Resuelve los siguientes límites de sucesiones.**

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{n}$

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2n}{3+2n}\right)^{2n}$

c) $\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{2-n}{n+2}\right)^{n}$

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+n}{n}\right)^{n}$

e) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1+n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

f) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5+n}{3+n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$

12. irudia: DBH 4. ikasturteko testu-liburutik ateratako ariketaren irudia.

4. Kapitulua: Emaitzak

Behin curriculuma eta liburua aztertuta, laugarren atal honek bi helburu izanen ditu; batetik, curriculumeko gabeziak aztertu edukiei dagokionez, eta bigarrenik, testuliburuaren eta testu-liburuen arteko koherentzia eztabaidatzea.

Aurrekoa dela-eta, laugarren atal hurrengo bi azpiataletan banatu da: ausentziak eta presentziak curriculumean eta, testu-liburuaren eta curriculumaren arteko koherentzia.

4.1- Ausentziak eta presentziak curriculumean eta testu-liburuetan

Atal honetan, behin eduki eta ebaluazio irizpideen azterketa amaituta, analisi bat eginen da eduki eta ebaluazio irizpide horiek modu jarraituan eta etenik gabe agertzen diren curriculumean zehar, edota, aitzitik, saltorik egiten duten, akaso eduki jakin bat desagertu egiten delako luzerako progresio horretan e.a.

Lehenengo atalеko taulek laburki biltzen dute edukien noranzkoa, baina, lehenengo kapituluan edukien analisi zehatza laburtzeko balio izan duten taula horiek, orain, aldiz, oso aproposak izanen dira edukien nondik-norakoa, funtsa eta ordena aztertzeko. Modu berean, bigarren kapituluan belztutako ebaluazio irizpideek aztertu beharreko eduki horien haztapena edo, nolabait esatearren, 'garrantzia' beste ebaluazio irizpideen artean neurtuko du; alegia, ikus daiteke, azaletik irakurrita bada ere, zein proportzioan aurkitzen diren intereseko ebaluazio irizpideak beste irizpide guztien aurrean.

Aipatzekoa da, atal honen nahia curriculumak ezartzen dituen edukiak aztertzea dela, baina, ez edozein moduan baizik eta osotasun gisa aztertu nahi dira. Hasiera LHko azken zikloan ezarri da eta Unibertsitatea du mugarri; hortaz, LHko 5. eta 6. mailak, DBHko bi zikloak eta Batxilergoa aztertuko dira. Hala ere, ez da azpiataletan edota ziklotan banatu nahi analisi hau, aitzitik, arestian esan bezala, abiapuntu bat ezarri eta eduki-helmuga batera iristeko edukien ibilbidea aztertu nahi da.

Hortaz, lehenik eta behin hastapen-edukiak aztertu beharko dira. LHko hirugarren zikloa hasten den ikasle batek ezer gutxi daki aljebra, funtzioak eta abarreko kontzeptuen inguruan, beraz, zein norabide hartzen du matematikaren ikasketak funtzioen ildo espezifikoan?

LHko hirugarren zikloan dagoen ikasleak bi oinarrizko elementuekin aritzen da bere lehen urrats honetan: grafikoak eta operazioen automatizazioa. Edukiak matematikaren eta errealitatearen arteko erlazioa ulertarazten oinarritzen diren heinean, funtzioen gaiari heltzeko lehen bi helburuak grafikoen interpretazioa eta aljebraren hasiera izan behar dira. Azken helburu hauekin, ikasleek grafikoak esplizituki lantzen dute, baina, aljebra landu ahal izateko, ordea, ikasleek ez dute beharrezkoa zaien garapen neuronala; ondorioz, operazioen automatizazioaren inguruan dihardute edukiek.

Arestian, DBHko lehenengo zikloan, garapen kognitiboa sartzen da jokoan. Honen adierazle da DBHko bigarren mailan aljebra mailan ematen den aurrerakuntza, non ikasleek oinarrizko maila aritmetikoetatik ekuazio sistemak ebaztera pasatzen dira. Datuak tauletan sailkatzeko gai izan behar dira, eta hauetatik eraikitako grafikak interpretatzen ere, baina, aurrerakuntza honen ordainean ikasleek alde batera utziko dute LHn aurkeztutako plano cartesiarra urte batez.

Grafikak interpretatzeak ikasleari azalpen formalak ematera behartuko du. Honek grafiken deskripziorako ezaugarriak beharrezkoak izatera eramanen du curriculumak, azken finean, funtzioen analisirako aurrera-pausoa baita.

Aljebrizazio mailetan aurrera egiteak grafikak deskribatzeko ezaugarriekin batera eta operazioetarako trebetasuna edukitzeak naturalki eramanen du ikaslea funtzioen gaira, non, edukien ehuneko handi bat honetarako bideratu den.

Aipatzekoa da edukien hein handi bat ere zenbakien-zuzenarekin erlazionaturikoak direla. Zenbakien-zuzena ez da esplizituki ikasten, baina, zenbakiak ordenatzen ikasten da. Ordea, zenbakiak ordenatzen ikasten den bitartean, plano cartesiarra albo batera uzten da.

Eta espazio cartesiarrean datza curriculumen arteko bikoizketa; matematika akademikoak ikasi behar dutenen eta matematika aplikatuak ikasi behar dutenen arteko bikoizketa, alegia. Baina, jarraitu baino lehen, gustatuko litzaidake nabarmentzea Barragués et al. (2014) liburu akademikoan oinarritu naizela baloratzeko zeintzuk izango liratekeen unibertsitatera joan behar den ikasle akademikoak jakin beharreko edukiak, eta hortaz, atal honetan matematika aplikatuen edukien nondik-norakoa ez da aztertuko.

Ikasketa prozesu globalaren helmuga definitzeko unea heldu da orduan. Unibertsitatera joan behar den ikasle horrek funtzio aldagai anitzen eta konplexuen analisira bideratu behar ditu ezagutza matematikoak, ondorioz, honen inguruan izan behar dira edukiak laugarren mailan eta handik aurrera.

Laugarren mailan jada aljebraren eta grafikoen uztartzea ematen da funtzioen erabilerarekin baina batxilergoan zehar hauek deskribatzeko lanabesak definitu, erabili eta fintzen dute ikasleek.

Grafikak azaletik irakurrita ikus daitekeen moduan, ikasle akademikoek soilik sakontzen dute espazio cartesiarrean. Honen helburua funtzio aldagaianitzen, eta ondorioz, konplexuen eta bektorialena baita ere, oinarriak eraikitzea da eta, funtzioak deskribatzeko lanabesen artean lehena limitea da.

Limitea analisirako lehen lanabesa den arren, inplizituki, aurreko ikasturteetan segidak eta serieak ikasi dituzte, eta, zer esanik ez, etorkizunean limitea formalki definitzeko, segidak eta serieak oinarrizkoak dira. Behin limitea ezaguna dela, deribatua eta jatorrizko funtzioen inguruan jardungo dute edukiek.

Behin edukien oihana honetan barrena egon eta edukien nondik norakoa ikusita, paragrafo batean laburtzea litzateke onena. Matematika akademikoen bidaia honetan, ikasleak gutxinaka-gutxinaka grafikoak eta aljebra uztartuko ditu funtzioari bidea egiteko. Behin funtzioekin arituta, hauen deskribapenerako lanabesak ikastera bideratu dira edukiak, baina, beti ere, ez da modu formalean ezer ere definitu behar. Hala eta guztiz ere, etorkizunean definizio formalak eraikitzeko 'piezak' bidean ikasi dira, honen adibide dira serieak eta segidak.

Zer esanik ez, ebaluazio irizpideek ez dute zer ikusirik unibertsitateko ikasle bati eskatuko zaionarekin: matematika ikaskuntza formalarekin, alegia. DBH bitartean ebaluatzekoak izanen dira nerabe bati egokitu ahal zaizkion gaitasun matematikoak, baina, inondik inora formalismo matematikoa. Batxilerren abstrakzio maila handiagoa izanda ere, ikasleari definizioen ezagutzea eta aplikazioak jakitea eskatuko zaio bakarrik.

Hortaz, ikus daitekeen moduan, ebaluazio irizpide zein edukiak eboluzionatuko dira urtez urte azken helburu horri begira; analisi matematikoa, alegia. Lehen urteetan funtzioen gaia estatistika zein zenbakiekin loturiko gaia izanen da, baina, gutxinaka-gutxinaka bere lekua aurkituko du eduki multzo ezberdinen uztartzea izatetik, multzo bereizi bat izatera.

Aljebra, zenbakiak, geometria eta estatistika multzoekin loturiko edukiek osatuko dute funtzioen multzoa, aurrerantzean, batxilergo akademikoan analisiak multzoa bilakatuko den hori.

Baina, sortutako funtzioen multzo bereizi hori ez du etorkizunik izanen Gizarte Zientzietara Aplikaturiko Batxilergoan, azken finean, hau ez baitago analisi matematikora bideratuta.

Beraz, eta bukatzearren, bukaerako helburuekin nahiko koherentea den curriculuma da hemen aztertutakoa, baina, espazio cartesiarraren presentzia agian txikiegia da DBHko etapan.

4.2- Testu-liburuen eta curriculumaren arteko koherentzia

Azken azpiatal honek 1. atalean bildutako curriculumeko edukien eta aztertutako testuliburuen arteko koherentzia aztertzea du helburu. Aurreko atalean arrazoitu egin da (ikusi 3. kapituluaren sarrera) zergatik ikasmailako bi ariketa aukeratu diren. Ordea, azpiatal honetan eginen den analisia testu-liburuen ariketa mordoa aztertu ostean egin da.

Lehenik eta behin esan beharra dago ikasmaila bakoitzerako ariketen eta edukien koherentzia eza azpimarragarria dela. Gainera, ariketa berdinak errepikatzen dira ikasmaila ezberdinetan baina zailtasun adierazlea aldaturik (ikusi edozein aurreko irudiaren hirutan banatutako zirkulutxoa).

Baina, koherentzia falta honen atzean ez da kaosa aurkitzen; aitzitik, patroi bat aurkitzen da. Ariketak eta curriculuma alderatu ostean ikus daiteke nola liburuek hurrengo urteko edukiak aurreratzen dituztela, alegia, ikasmaila zehatz baterako ariketak hurrengo ikasmailan eman beharreko edukietan oinarriturik daudela. Hortaz, ariketak errepikatu egiten dira urtez urte, nolabait, urteari dagozkion eduki horiek sendotu ahal izateko.

II Atala:

Funtzioak ikasketa prozesu baten analisia DBHko 2. ikasmailan

Master Bukaerako Lanaren bigarren zati honetan, aztertu egiten da ikaslegoak eduki ditzaken erroreak, testu-liburuak nola heltzen dion funtzioen gaiari, esperimentazioa diseinua, eta azkenik, zeintzuk dira honen emaitzak eta hauen analisia.

Bigarren atal hau lau kapitulutan banatzen da. Laneko bosgarren kapituluan erreferentziazko testu-liburuan eta unitatean agertzen diren objektu matematikoen analisia egiten da.

Seigarrenean, berriz, unitatea lantzerakoan ikasleek eduki ditzaketen zailtasunak eta erroreak aztertu egiten dira, hauen kausa posibleen inguruan hausnartuz.

Zazpigarrenean, DBH 2. ikasmailako testu-liburuan azaltzen diren jardueren adibideak aurkezten dira (ariketak, problemak, galderak eta egoerak).

Behin aurrekoak azalduta, esperimentuaren emaitzak aurkeztu eta hauen analisia egiten da. Lanaren bukaerarako utziko da lan guztian zehar landutakoaren sintesia eta erantzun gabe geratu diren galderen formulazioa.

5. Kapitulua: Eduki matematikoak erreferentziazko testu-liburuan eta unitatean

Atal honetan DBHko 2. ikasmailari dagokion Savia SM editorialeko 8. unitatea aztertuko da; funtzioei dagokien unitatea, alegia. 3. atalean erabilitako testu-liburu bera da.

5.1-Objektu matematikoak

Lehenengo atal honetan objektu matematikoen zerrendatzea egingo da ikuspuntu ontosemiotikoa erabiliz. Hau dela-eta erreferentziazko liburuan agertzen diren objektu matematikoak ondorengo modura sailkatuko dira eta sei ataltxotan bilduko dira objektuaren izaeraren arabera:

1. Elementu linguistikoak: terminoak/espresioak, notazioak eta grafikoak.
2. Egoera-problemak: matematikaz haraindiko aplikazioak, zereginak, ariketak.
3. Kontzeptu-definizioak: definizioen edota deskribapenen bidez sartzen direnak[†].
4. Proposizioak-teoremak: kontzeptuen gaineko enuntziatuak.
5. Prozedurak: algoritmoak, eragiketak, kalkulurako teknikak…
6. Argudioak: proposizioak eta prozedurak balioztatzeko edo azaltzeko erabiltzen dira; oro har, deduktiboak edo induktiboak izan daitezke.

1 - ELEMENTU LINGUISTIKOAK

Terminoak/Espresioak	Erlazioa, grafikoa, zuzena, -ren funtzio, ezaugarri, posizioa, aldagai askea/independentea, aldagai dependentea, domeinua, irudia, funtzio lineala, malda, konstantea, espresio aljebraikoa, koordenatuak, puntua, balioa, ebakidura puntua, paraleloak, ebakitzaileak, maximo, minimo, maximo erlatibo, minimo erlatibo, ekuazio, identitate, ekuazio sistema, berdintza, ezberdintza, jarraitasuna, etena, abszisa, ordenatua, soluzioa, parametroa, -ren menpe, gorakorra, beherakorra
Notazioak	+ , - , · , / , (, { , x , y , f(x) , m , n , a , A , b , B , c , C , = , '(x, y)' , > , < , ? , ≠
Grafikoak	Bi dimentsioko plano cartesiarrean egindako grafikak

[†] Esan beharrekoa da definizio guztiak ez direla jarriko. Unitatean agertzen diren eta ikasleendako berriak diren horiek jarriko dira soilik.

2 - EGOERAK–PROBLEMAK

Kontestualizatuak	Grafiko bat emanda, hau interpretatzea; informazio jakina ikusita, honekin erlazionaturiko grafikoa eraiki.
Kontestu gabekoak	Lehen mailako ekuazioak ebatzi, bi ezezaguneko ekuazio sistemak ebatzi, funtzioak deskribatu hiztegi egokiaz.

3 - KONTZEPTU-DEFINIZIO BERRIAK

Funtzioa, menpekotasuna, independentzia, domeinua, irudia, malda (aljebraikoa), adierazpen aljebraiko linealaren eta grafikoaren arteko lotura.

4 - PROPOSIZIOAK–TEOREMAK

Ikasmaila honetan funtzioen analisirako proposiziorik zein teoremarik ez da egiten. Esate baterako 'Bolzanoren teorema' litzateke bat, baina, batxilergoko edota unibertsitateko emaitza bat da eta ez dagokio ikasmaila honi.

5 - PROZEDURAK

- Grafika lehen mailako ekuazioa bezala ulertu *et viceversa.*
- Funtzio baten grafika lortu *et viceversa.*
- Lehen mailako ekuazio bat betetzen duten puntuak lortu.
- Funtzio baten domeinua eta irudia identifikatu.
- Malda gorakorraren eta beherakorraren arteko ezberdintasun aljebraikoa identifikatu, ulertu eta desberdintzen jakitea.
- Funtzio baten maximoak eta minimoak identifikatu.
- Bi zuzenen ebakidura puntua ekuazio linealen sistema soluzio gisa identifikatu.

6 - ARGUDIOAK

- Egoera partikularren konprobaketa (bisuala): ekuazio bat betetzen duten puntuak irudikatu eta zuzena marratu.
- Grafikoki gertatutakoa aljebraikoki konprobatu kasu partikularretan, alegia, parametroak erabili gabe edota parametro gutxi erabilita (ez-aljebraikoki).

5.2-Unitate didaktikoaren analisi orokorra

Unitate didaktikoa hiru aldibereko unitatetxoetan banatu da 8. Esperimentazioa atalean argituko diren arrazoiak direla eta. Klasea osatzen duten ikasleak hiru taldetan banatuko dira, A , B eta C taldeetan, alegia, eta unitatearen lehen atala hiru modu ezberdinetan planteatu da taldearen arabera. Bosgarren atal honek hiru atalak aztertuko ditu eta baita A, B eta C taldeak bateratu osteko unitate bukaera ere.

A TALDEA: GeoGebra Liburua‡

A taldeak landutako unitatetxoa esperimentaziorako *ad hoc* prestatutako GeoGebra liburua da eta, GeoGebra erabiltzen ikasten den bitartean, lehen mailako ekuazioetatik funtzio linealetarako jauzia ematea du helburu. Unitateak ez du inolako kontesturik baliatzen gaira sartzeko. Sarrerarik ez duen liburua da eta hiru azpiataletan banatu da liburua: 'PUNTOS EN LA ECUACIÓN', 'LA RECTA Y EL ÁLGEBRA' eta 'FUNCIONES LINEALES'. Hiru atalok ariketa interaktiboen eta edukien teoria tartekatu egiten ditu: teoria eta applet. Kuestioak.

B TALDEA: Testu Liburua

B taldeak unitatea lantzeko DBH 2. mailako testu liburua erabiliko du, SM Savia editoriala, 158-181 orrialdetako 8. unitatea, funtzioena, alegia. Ikusteko aukera dago A eranskinean.

Unitatea 5 azpiataletan banatuta dago:

- Sarrera (158-159)
- Edukien garapen teorikoa + ariketa praktikoak (160-173)
- Laburpena (174)
- Ariketa sorta (175-179)
- Autoebaluazio ariketak (180-181)

Sarrera unitateko lehen bi orriak dira eta ikasi beharreko gaiaren, funtzioak, alegia, kontestuan jartzen du.

-Unitaterako aurkezpenerako irudia piano baten barneko sokak dira, nonbait, funtzio harmonikoei erreferentzia eginez?

-

-Ezker orriko behealdean galdera erretorikoak

C TALDEA: Apunte grafikoak

C taldeak eredu grafikoetan oinarritutako apunteekin landuko du unitatea. Bi zatitan banatu da unitatea. Apunte grafikoak B eranskinean atxiki dira.

Lehen zatian funtzio pare bat agertzen dira irudikaturik eta orriko atzealdean funtzio hauen analisia (ikur matematikorik gabe, hizkera naturalean). Ikasleek ostean funtzio ezberdinak deskribatu beharko dituzte emandako eredu hori baliaturik.

Bigarren zatian, aurreko funtzio parea deskribatu da, baina, oraingoan deskribapena baliabide matematikoak ({ }, >, ≤, ≥, <, x, y ...) soilik erabilita egin da. Ikasleek arestian egindako beste funtzioen deskribapena matematikoki egin beharko dute.

‡ Esteka: https://ggbm.at/C83MmhGQ

6. Kapitulua: Unitate didaktikoa lantzerakoan agertu daitezkeen zailtasunak eta aurreikusi daitezkeen erroreak

Seigarren atal honetan DBH 2. ikasmailako ikasleek funtzioen unitatea lantzeko prozesuan zehar eduki ditzaketen zailtasunak bildu dira. Modu berean, unitate didaktikoa lantzerakoan egon daitezkeen erroreak eta hauen jatorri posiblea ere aztertu egiten dira atal honetan.

6.1- Zailtasunak

Ikasleek herrengo kontzeptuak ulertzeko edota lanean aritzeko zailtasunak eduki ditzakete:

a) Aldagai askea vs. menpekoa

b) $y = f(x)$ grafoaren definizio inplizitua.

c) Zatiki, frakzio zein hamartarrekin lan egitean.

d) Maximo eta minimo erlatibo nahasgarriak.

e) Domeinua eta irudia.

f) Maldaren definizio formala ulertzea. Hau negatiboa bada, malda beherakorra *et viceversa.*

g) Ekuazio sistemak aljebraikoki ebaztean: gehien bat laburtze metodoa.

h) Ekuazio bat betetzen duen puntuak aurkitzea.

i) Ondorio aljebraikoen eta grafikoen arteko lotura. Sistemaren soluzio eza; ekuazio bateraezinak = zuzen paraleloak. Soluzio bakarra; ekuazio bateragarriak = zuzen ebakitzaileak. Infinitu soluzio; ekuazio baliokideak = zuzen bera.

j) Ikasitako termino berriak erabiltzeko zailtasuna argudioak azaltzerakoan.

k) Plano cartesiarreko puntu baten irakurketa egitea. (batez ere osagaiak zenbaki naturalak ez badira.)

l) $ax + by + c = 0$ eta $y = mx + n$ biek ala biek ekuazio linealak direla, eta ondorioz, grafika zuzen bat dela.

6.2- Erroreak eta horien jatorri posiblea

Ikasleek hurrengo erroreak egin dezakete unitatean zehar:

a) Puntuak kokatzerakoan x eta y ardatzak nahastu.

b) Zuzenak irudikatu zuzenkiak irudikatu ordez.

c) Zuzen bat irudikatzeko bi puntu baino gehiago erabili.

d) Grafikak baliatu soluzioa ondorioztatzeko aljebraikoki konprobatu gabe.

e) Minus ‘ – ‘ zeinua ahanztea edota beste edozein zenbakiren bat.

f) Ekuazio sistema gaizki ebaztea.

g) Identitateak soluzio gabeko ekuazio moduan sailkatu.

h) Infinitu soluzioko sistema eta soluzio gabeko sistemak nahastu.

Errore hauen artean, batzuen kausa, urtean zehar ematen diren eduki multzoaren unitateen bidezko banantzea izan daiteke; alegia, elkarrekin oso antzekoak diren unitateak, unitate ezberdinak izanagatik, bananduak geratuko lirateke, eta ondorioz, ikasleek bi unitateen artean egon zitekeen erlazioak arbuiatzera joko dute.

Bestetik, ikasleen hein handi batek kalkuluak eta prozedurak modu mekanikoan egiten dituzte. Hau dela eta, ezin dute lortutako emaitzaren inguruan hausnartu eta ezin dezakete deduzitu kalkuluak ongi edota gaizki egin dituzten. Hortaz, ‘despiste’ moduko erroreak prozesuak eta metodoak ez ulertzeari egotzi ahal dizkiogu.

7. Kapitulua: Ikasketa prozesua

Zazpigarren atal honetan ikasleek eramandako ikasketa prozesua deskribatuko da. Klasea hainbat lantaldetan banatu da lehenengo 7.1 azpiatalean arrazoituko den moduan, eta zer esanik ez, lantalde bakoitzak ikasketa prozesu ezberdin bat jarraituko du.

Ikasketa prozesuak berdinak ez diren arren, ordea, klasearen denbora banaketa bera eduki dute lantalde guztiek eta 7.2 azpiatalak azalduko du nolakoa izan den klasean egin den unitaterako denbora banaketa. Behin egunak eta plangintza azalduta, ikasleek egindako jardueren aurkezpena eginen da, bai klasean egindakoa, eta baita klasetik kanpoko jarduerak ere.

7.1- Metodologia

Ikasketa prozesuaren atalarekin hasteko, erabilitako metodologia azaldu behar da aitzin. metodologia *puzzle* edo jigsaw metodologia izan da (Aronson, 1971).

Puzzle metodoa, oinarrian, arrazakeria liskarrak apaltzeko diseinatua izan zen [hedatu apur bat testuinguru hori, interesgarria izan daiteke: helburua aipatu duzu, arrazakeria apaltzea, baina esan ezazu baita ere non erabili zen, nork erabili zuen, eta zein emaitza eman zituen]. Bistan denez, klasean ez dago horrelako gatazkarik, baina, ostean azalduko diren arrazoiengatik metodo kooperatibo hau aukeratu egin da esperimentaziorako.

Metodologiaren dinamika hurrengo hau da. Klaseko kideak hainbat aditu-taldetan banatzen dira eta edukiak ere banatu egiten dira eduki multzotan. Hortaz, aditu-talde haina eduki-multzo egon behar dira eta aditu-talde bakoitzari eduki-multzo bat esleitzen zaio. Lehenengo eta behin, talde bakoitzak hari dagokion edukia lantzen du, eta, ondoren, adituak berrantolatu egiten dira, halako moduz, non talde berrian dauden eduki bakoitzeko aditu bana. Honela, eduki batean aditu denak beste edukietan aditu direnei azaldu behar die eduki hori. Nolabait, bakoitzak hari dagokiona ikasi eta landu beharko du, beste aditu-taldeko kideekin batera.

Beraz, ohiko-taldeak egiten dira adituen-taldekide bana egokituz ohiko-talde bakoitzari. Ohiko-taldeko kideek, alegia, aditu ezberdinek, elkarrekin kooperatu beharko dute ikasitako edukiak bilbatzeko eta eduki-multzoen arteko loturak aurkitzeko. Parekotasun gisa esan daiteke eduki-multzoak puzzle baten piezak direla eta hauekin puzzlea osatu behar dutela ikasleek edukien osotasuna lantzeko.

Ohiko puzzle metodologian ikasleak aldizka elkartzen dira adituekin eta ohiko-taldearekin gutxika-gutxika puzzlea eraikitzeko. Adituen ikasle taldeak elkartzen diren aldi bakoitzari *periodo* esaten zaio. Honakoan, berriz, aditu-taldeari periodo bakarra utzi zaio, eta, ostean, ohiko-taldeetan lan egin dute. Erabaki hori hartzeko arrazoiak zerikusia du esperimentazioan aztertu nahi den faktore batekin, hau da, ikasitako edukien jatorriarekiko ikasleek izan dezaketen lehentasuna.

Nahiz eta aditu talde bakoitzak eduki jakin bat ikasi duen, behin ohiko taldean elkarturik, jakin nahi da ikasleak jatorri jakin bateko edukiak lehenetsiko dituen; hots, eraginik al du funtzioekin lehen kontaktua interaktiboa izatea? Eragina izanen du grafikoki gaiari heltzea? Eta aljebraikoki? Aditu-talde batean hasi zenak metodoz aldatu al du ostean problemak ebaztean?

Esperimentaziorako hiru aditu-talde osatu dira:

- *GeoGebra taldea*. Talde hau software dinamikoaren erabileran izango da aditua, eta horretarako GeoGebra softwarea erabiliko dute.

- *Talde tradizionala*. Talde honek ohiko matematika liburua erabiliko du.

- *Talde funtzionala*. Azkenik, hirugarren talde honek gaiari helduko dio grafikoen bitartez.

Zer esanik ez, ohiko-talde bakoitzak aditu-talde bakoitzeko kide bat eduki behar du gutxienez, baina, ohiko-taldeak sortzerakoan kontuan eduki dira ikasleen arteko erlazioak. Kurtso hasieratik laginaren klasearekin lan egin dut, hortaz, ikasleen arteko erlazioak ezagunak izan ditut. Bestetik, irakasle titularra aldi berean haien tutorea izanagatik, are gehiago ezagutzen ditu ikasleak. Biok elkarrekin adostu dugu zein izango zatekeen talde banaketarik onena lan-giroa probesteko.

7.2- Klasean egin den denboraren banaketa

Unitate honen edukiak jorratzeko egin den ariketa eta jardueren plangintzarako hurrengo puntuak izan dira kontuan. Lehenik eta behin irakasle titularraren egutegia errespetatu. Irakasle titularrak ekuazio sistemen atala eman ondoren eta Aste Santura bitarteko egunetan egiteko proposatu zidan. Bi aste bete eta hiru klase ziren berak eskainitakoa eta biok baloratuta egokia zela ikusi genuen.

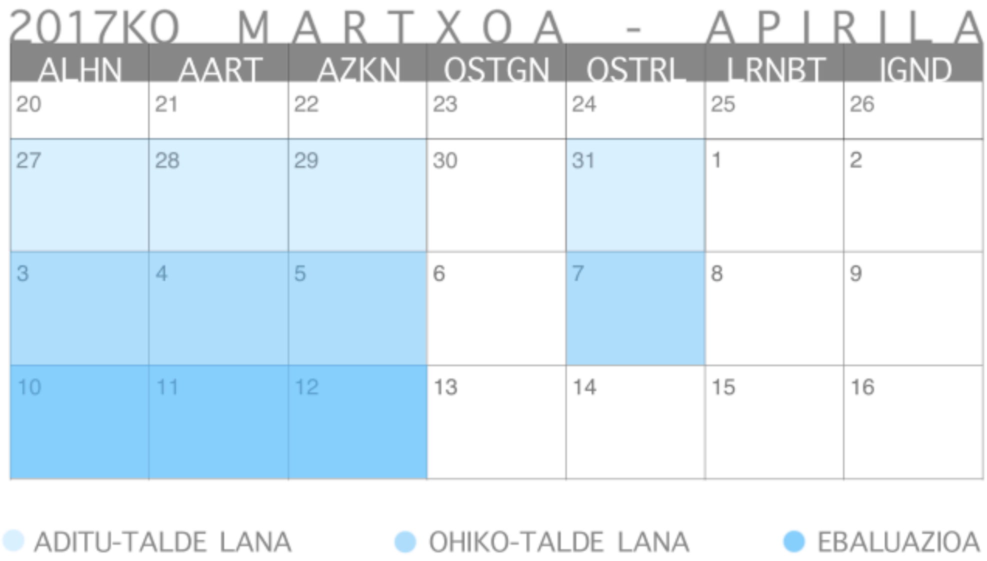
Bigarrenik, puzzle metodologia dela-eta, ikasleek hiru etapa ezberdin igaro behar zuten: aditu-taldeko etapa, ohiko-talde etapa eta ebaluazioa. Hirugarrenik, hurrengo atalean arrazoitzen den bezala, lan honetan aztertzen den egoerarako komenigarria zatekeen adituen taldeko etapa behin bakarrik ematea, ohiko Puzzle metodologian ez bezala, ebaluazioko emaitzak aztertzean aditu taldearekin erlazionatu ahal izateko ondorio bana.

Hortaz, hauek guztiak kontuan edukita horrelaxe geratu da hiru etapen banaketa: lehenengo aste osoa aditu-talde lana, bigarren aste osoa ohiko-talde lanerako eta azken asteko hiru egunak ebaluaziorako.

Aipatu beharrekoa da lehen eguna klase dinamika berria eta ebaluazio irizpideak azaltzeko zein taldeak osatzeko utzi nuela. (Ikusi 13. irudia)

Klase bakoitzak 55 minutu dirau. Bi lehenengo etapen banaketa guztiz berdina izan da; lehenengo 5 minutuak klasea eta materiala prestatzeko (altzariak mugitu, ordenagailuak piztu, fitxak banatu...), 45 minutuz taldean lan egin eta azken 5 minututan fitxak edota idatziriko hausnarketak bildu eta klasea zegoen bezala utzi.

Ebaluazio hiru saioak elkarren artean ezberdinak izan ziren. Lehena talde ebaluazioa zen beste biak indibidualak ziren bitartean eta hirugarrena gainera, bigarrena ez bezala, ordenagailuarekin. Alabaina, azterketa dinamika berdin-berdina izan zen hiruretan; 5 minutu altzariak behar bezala kokatzeko, lehenengoan taldeka eta besteetan indibidualki, eta beste 50 minutuak azterketa egiteko.



13. irudia: Unitatearen egutegia. Lehenengo astean ikasleak aditu-taldeetan banatuko dira, bigarrenean, aditu-taldeak nahastu eta ikasleek ohiko taldeetan lan eginen dute eta azken hiru egunak ebaluaziorako utzi dira.

7.3- Planifikatu diren jarduerak

Hiru aditu-talde ezberdinek hiru galdetegi ezberdin egin behar izan dute prozesuan zehar. Alde batetik, A taldekoek, GeoGebra taldekoek alegia, GeoGebra liburu batekin aritu dira klasean, bestetik, B taldekoek (liburuko taldea edo talde tradizionala), liburuko hainbat ariketa egin dituzte eta hirugarren taldeak, ordea, pare bat fitxa bete dute.

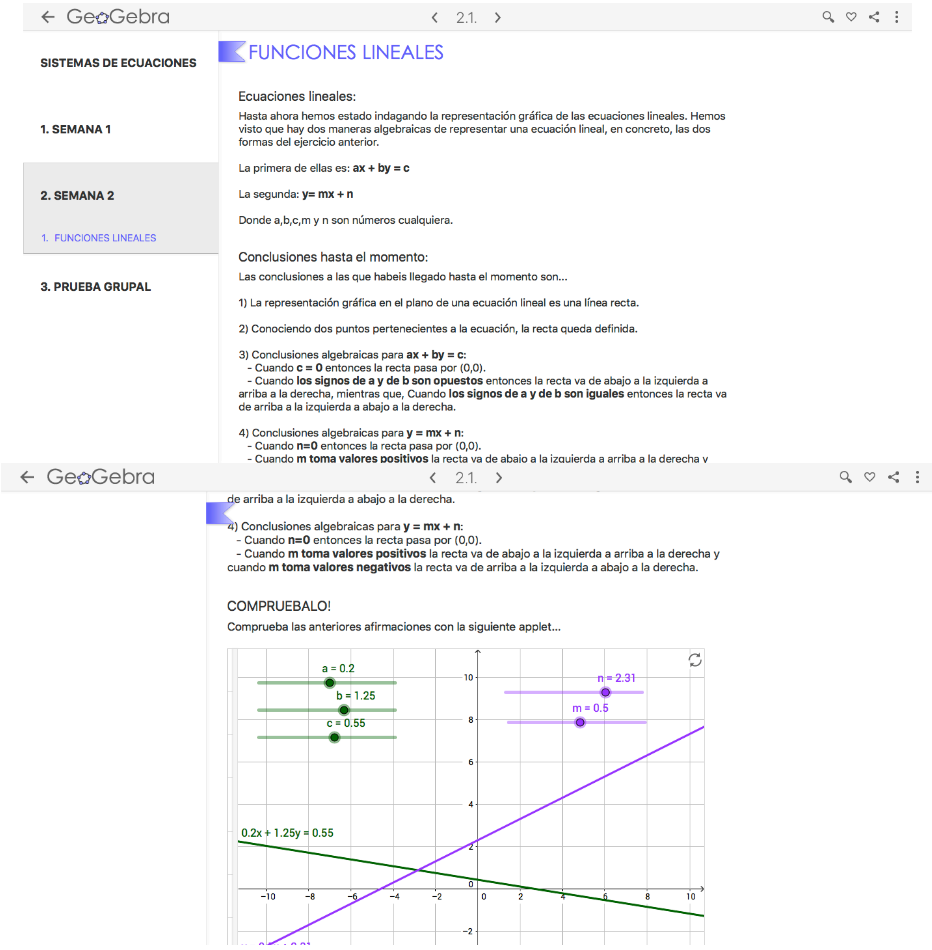
Hona hemen A taldeari egindako GeoGebra liburuko irudi bat (ikusi 14. irudia). A taldearendako prestatu den GeoGebra liburuak hiru horri ditu: 'Puntos en la ecuación', 'La recta y el álgebra' eta 'Funciones lineales', gainera, liburuari bi orri atxiki zaizkio ohiko-taldeak ebaluatzeko, baina, bi orri horiek 8. atalean aurkeztuko dira atalean aztertuko dira.

B taldeari dagokionez hauek izan dira egin dituzten ariketak: liburuko 160. orritik 167.erako 1, 2, 3, 4, 5 6, 11, 15, 16, 19, 20, eta 21 ariketak. Liburuko unitate didaktikoa A eranskinean atxiki da. Zer esanik ez, ariketak egin ahal izateko haien kabuz landu behar izan dute ariketei dagokien teoria.

C taldeari proposatutako ariketa hurrengo grafikoetatik ondorioak ateratzea izan da. B eranskinean ikus daitekeen moduan bi funtzio ageri dira. Aldi berean, orriaren atzeko aurpegian erantzunak atxiki zaizkie ikasleei (ikusi B eranskina). Haiek bere kabuz eta elkarrekin aztertu dituzte funtzioak eta emaitzak. Ostean, antzeko funtzioak banatu zaizkie eta domeinua, irudia, jarraitasuna, malda, maximoak eta minimoak aztertzeko eskatu zaie.

Lehen urrats gisa hurrengo irudian agertzen den bezala eman zaizkie erantzunak (ikusi B eranskina). Bigarren urrats moduan erantzunak B eranskineko azken orrian bezala emateko eskatu zaie ikasleei.

Behin aditu-taldeen periodoa amaituta ohiko taldeetan hurrengo ariketak egin dituzte:



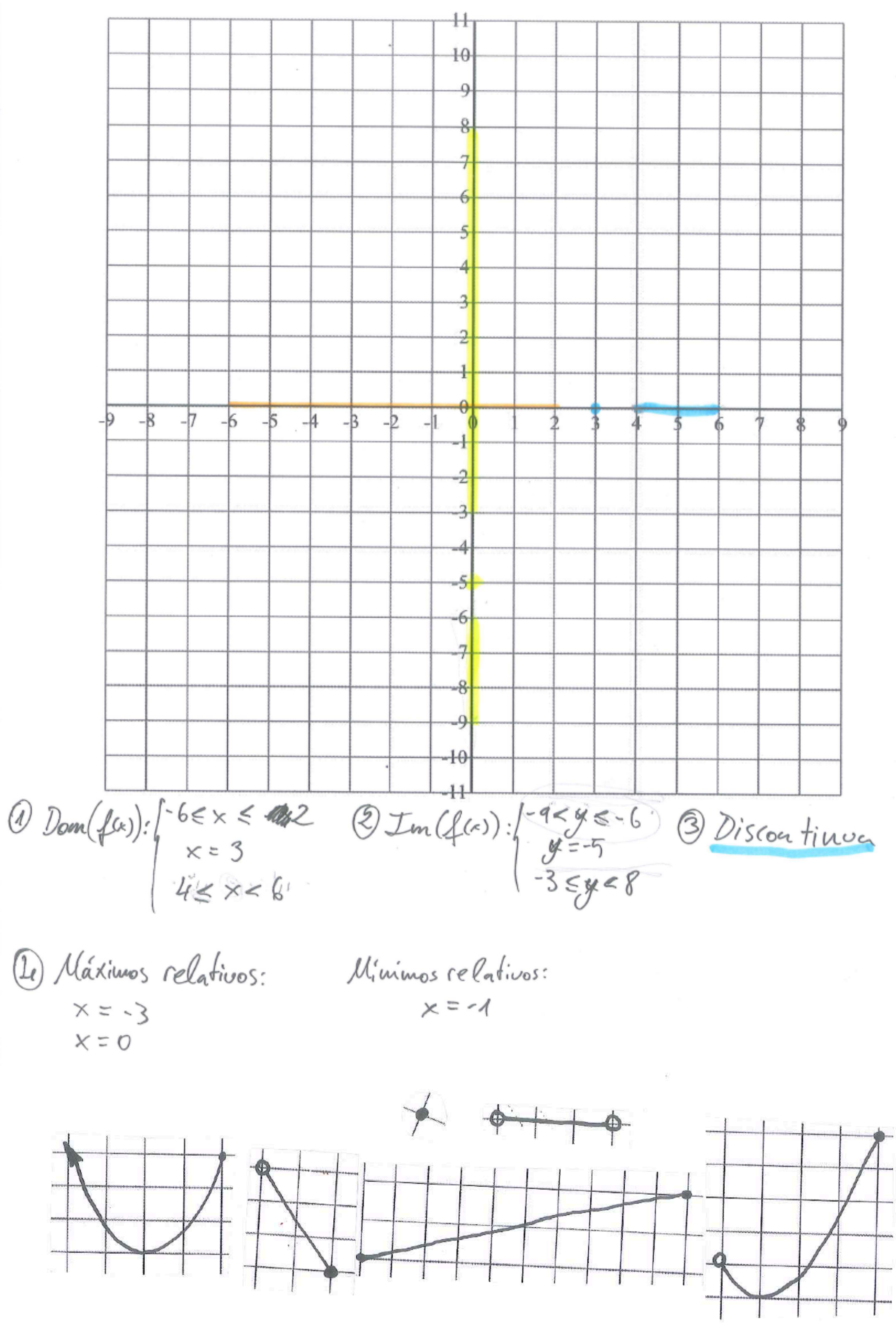
14. irudia: GeoGebra liburuka. Eduki guztiak ikusi ahal izateko sakatu hemen[§].

1. Funtzio-puzzle jokoa: 15. irudian ikus daitekeen moduan lauki-sare bat eman zaie eta bertan puzzle piezak jarri behar izan dituzte funtzio bat sortzeko. Eraikitako funtzio horrek eskatutako ezaugarriak (jarraitasuna, domeinua, maximoak...) bete behar ditu.

2. GeoGebrarekin ekuazio sistemen ariketa: Hurrengo orriotan atxikitako galdetegiari erantzun behar zaio GeoGebraren laguntzarekin. Ikusi 16. irudia.

3. Ekuazioak eta Ekuazio sistemak: Aurreko unitatean (Ekuazio eta ekuazio sistemen unitatea, alegia) landutako ariketa berak berregin GeoGebraren laguntzarekin. Ekuazio sistemen soluzioa nahi bezala aurkitu behar zuten, baina gakoa hurrengoan zetzan; bi ekuazioak, ekuazio sistemaren soluzio puntua, ekuazio bana betetzen zuten bi puntu eta ekuaziorik betetzen ez zuen puntu bat irudikatu behar zuten. 4 puntu eta 2 zuzen totalean.

§ https://ggbm.at/C83MmhGQ



15. irudia: Hona funtzio-puzzlea. Pieza sorta baliatuz eskatzen zaien baldintzak bete beharko duen funtzioa eraikitzea eskatzen zaie ikasleei. Plano cartesiarra ez da karratua piezek orientazioa izan dezaten. Koloreztatutako domeinua eta ikasleek autonomoki egindako kontua da.

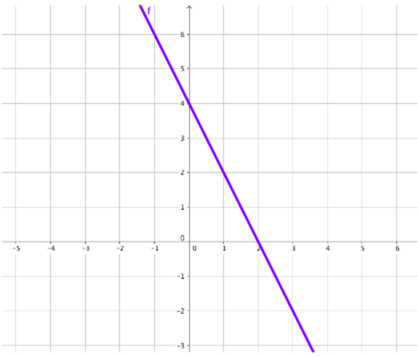


Figure 1: Funcion lineal $f(x)$

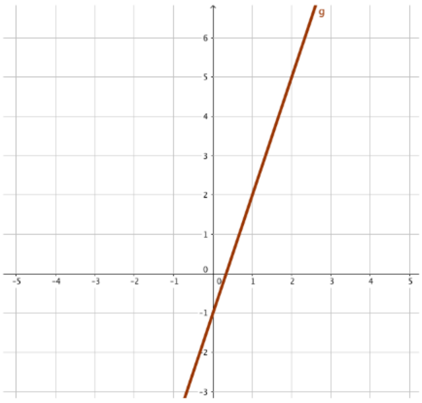


Figure 2: Funcion lineal $f(x)$

1

Con la ayuda de GeoGebra grafica las dos funciones lineales $f(x)$ y $g(x)$.

2

Con la vista algebraica del GeoGebra obten la expresion algebraica de las dos ecuaciones lineales.

Anotalas aqui:

3

Resuelve el sistema de ecuaciones con el metodo que prefieras (sustitucion, igualacion o reduccion)

4

Grafica un punto en el geogebra anterior con la solucion obtenida. Por ejemplo, si la solucion del sistema de ecuaciones es $x = 8$ e $y = 2$ tienes que graficar el punto $(8, 2)$.

5

¿Qué ha sucedido?¿Crees que lo que ha sucedido es casualidad?Explicad con vuestras palabras que creeis que ha sucedido. Repetid el proceso cambiando de funciones lineales si creeis necesitar mas resultados para poder estar seguros de que no es casualidad,

16. irudia: Ohiko-taldeei proposatutako 2. ariketa.

7.4- Zereginak: aurreikusitako ikaslearen jarduera autonomoa

Egutegiko egun bakoitzari esleitutako jarduera egiteko denbora zehatza dute ikasleek: 45min gutxi gora-behera. Eguneko jarduera egiteko denbora aski dute ikasleek, baina, horrela ez bada gertatzen, eta jarduera bukatu gabe uzten badu ikasleak, honek etxera eraman beharko du jarduera bukatzeko falta zaion lana.

8. Kapitulua: Esperimentazioa

Kapitulu honetan, ahal izan den heinean, esperimentazioaren inguruko informazio gehiena bildu da. Esperimentuaren helburuak ezarri, hau gauzatzerakoan pentsatutako diseinua azaldu, eta burutu osteko emaitzak aurkeztuko dira atal honetan zehar.

Bost azpiatal bereizi dira kapitulu honetan; lehena, lagina eta esperimentazioaren diseinua azaltzen duena, ostean, galdetegia atxiki eta hirugarrenik hipotesiak planteatzen dira. Laugarren puntuan emaitzak aurkeztuko dira eta azkenik hauen inguruko eztabaida idatzi da kapitulua ixteko.

8.1- Lagina eta esperimentazioaren diseinua

Lagina aztertu ahal izateko, lehenik eta behin, laginaren ikastetxea kokatu beharko da; ikastetxearen ezaugarriak, (batez ere, sozioekonomiko eta kulturalak) tamaina, ikasle kopurua, ikastetxearen kokapena…

Esperimentazioa hirigune handi bateko aldirietan kokaturik dagoen ikastetxe batean egin da, non elkartzen diren, baita ere, inguruko herrietatik datozen ikasleak. Ikastetxea ikastetxe publikoetan handienetarikoa da 10 ikaslerekin. Bertara ikastera, metropoliko herri baten gazteriaren gehiengoaz gain, inguruko herrietatik etortzen dira ikasleak eta hiru hezkuntza-eredu inplementaturik daude gaur egun, A, D eta G ereduak hain zuzen ere, hirurak ala hirurak DBH zein Batxilergoan eskuragai.

Ikastetxearen ikasle kopurua dela-eta aniztasuna nabaria da. Landa eremutik etorritako ikasleak daude hiriko gazteekin ikasgela partekatzen. Aldi berean, etorkinen seme-alabak ere daude, landan zein hirian bizi direnak. Aniztasuna areagotzearren, ekonomikoki gabeziak dituzten familien eta ekonomikoki abantaila duten familien seme-alabak nahastu dira bertan. Bi hitzetan esanda, ikastetxea oso anitza da bai kulturan eta baita esparru ekonomikoan ere.

Ikastetxearen klaseak batez beste 25 ikasle inguruk osatzen dute. Ikasgelen tamaina ez da berdina gela guztietan, baina, orokorrean aski da bertan egiten diren jarduerak gauzatzeko.

Lan honen kasu zehatzean, klasean 24 ikasle dira zeinetatik 4 ez dira kontuan hartuko. Hauek baztertzeko arrazoia lehenengo maila gaindituta ez izatea izan da kasu batzuetan edota jarrera falta besteetan. Lagina 20 ikaslek osatuko dute eta 1etik 24 bitarteko zenbakiekin identifikatuko dira hemendik aurrera: hots, azterketa-laginetik baztertutakoak zenbakia izaten jarraitzen dute.

Esperimentuaren diseinuarekin hasi aurretik, esan beharrekoa da aditu-taldeen osaera estokastikoa baliatu den bitartean, ohiko-taldeak irakasle titularrak eta biok osatutako taldeak direla, ikasleen arteko erlazioak, gaitasunak eta jakintza maila direla eta.

Laginetik jarrera kontuak direla-eta baztertutako laurak errepikatzaileak dira, eta ondorioz, kontuan hartuko den laginaren adina 13-14 urte bitartekoa da. Bestetik, lagineko hogei ikasle multzotik 6 mutilak dira eta beste 14ak neskak. 17. irudian ikus daiteke ikasleen banaketa aditu-taldeetan eta ohiko-taldeetan.

Behin lagina aztertuta esperimentuaren diseinua dugu hizpide. Esperimentua, arestian esan bezala, gai bat (honako kasuan, funtzioak), ikuspuntu ezberdinetatik abordatzea da, ondoren ikusi ahal izateko nolakoa izan den eduki ezberdinen asimilazioa ikuspuntuaren arabera. Gaia abordatzeko hiru modu aztertu dira: GeoGebra, matematika liburua eta eredu-apunteak.

17. irudia: Klasearen banaketa bi lantalde moten arabera. Goialdean aditu-taldeak eta behaldean ohiko-taldeak. 4, 5, 17 eta 20 ikasleak laginetik kanpo geratuko dira.

GeoGebra adierazpen grafiko interaktiboak eta algebra uztartzen dituen abiapuntua da. Honetarako GeoGebra plataforma erabili eta GeoGebra-liburu bat prestatu eta esleitu zaio A taldeari. A taldea GeoGebra taldea deritzo.

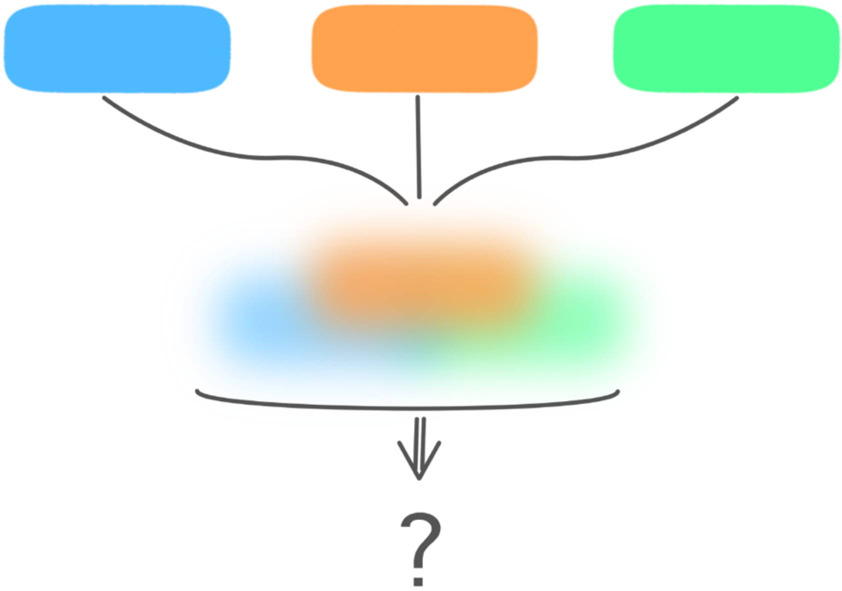
Matematika liburuko taldeak matematika klaseetarako kurtsoan zehar erabili den liburua jarraituko du, bertako teoria irakurri eta ariketak eginez, liburuz kanpoko inolako fitxa edo apunterik baliatu gabe. B taldeari egokitu zaio liburuarekin lan egitea. B taldea talde tradizionala deritzo.

Hirugarren taldea, eredu-apunteena alegia, grafikoetan oinarrituriko apunteak izanen du abiapuntu, baina, honako kasuan, haiek teoria deduzitu beharko dute eredu eta adibide ezberdinen bitartez. C taldeari esleitu diogu gaiari heltzeko ikuspuntu hau eta talde funtzionala deritzo.

Bestetik, ohiko-taldeei dagokionez, alpha, beta, gamma eta delta taldeak izendatu dira. Lau talde hauek 5 kidez osatu dira, zeinak aditu-talde ezberdinetan egon diren (ikusi 17. Irudiko kolore banaketa).

Aurreko paragrafoak izan dira esperimentuaren diseinua azaltzeko, baina, zertarako diseinu hau? Begi bistakoa da erantzuna. Esperimenturen nahia zera da; funtzioen gaia ikuspuntu ezberdinetik helarazi nahi zaie ikasleei, hots, hauen lehen kontaktua funtzioekin guztiz ezberdina izateko; batzuk grafikoki, beste batzuk aljebraikoki edo dena delakoa. Ostean, taldeak nahastu nahi dira funtzioen ikuspuntu ezberdinak parteka dezaten eta esperimentuaren helburua izanen da identifikatzea hipotesi posibleen[**] artean zein gertatu den. Esperimentuaren nahia azaltzen duen eskematxoa ikus daiteke hurrengo orriko 18. Irudian.

[**] Hipotesiak 8.2 Galdetegia azpiatala azaldu ostean aurkeztuko dira 8.3 azpiatalean.



18. Irudia: Esperimentuaren funtsa adierazten duen eskematxoa. Hasiera batean taldeak banandurik eginen dute lan. Ostean nahastuko dira eta ideiak partekatuko dituzte. Bukaeran zer gertatuko ote?

8.2- Galdetegia

Behin ikasleek funtzioen gaia ikusita eta ekuazio linealen sistemekin erlazionaturik 3 klase ordu erabili dira ebaluaziorako, hiru atal ezberdin osatzen baitute galdetegia: talde-azterketa, azterketa indibiduala eta GeoGebra azterketa. Hirurak X. Irudiko egutegian ikus daitekeen moduan 2017ko aste santua aurretiko hiru egunetan gauzatu ziren hurrenez hurren.

Esan beharra dago ebaluazioak aurreko unitateko edukiak ere ebaluatzeko erabili izan dela, hortaz, ekuazio linealen eta ekuazio sistemen presentzia handia da. Hirurak egitean 50min utzi zaie ikasleei azterketa burutzeko.

TALDE-AZTERKETA

Lehen azterketa honen funtsa ohiko taldeen independentzia maila baloratzea da. Bi ariketa osatzen dute azterketa: lehena egiteko ekuazio sistemen esangura grafikoa ulertu behar da, bigarrena egiteko, ordea, funtzioen analisirako definizioak jakin behar dira. Biak ala biak egiteko GeoGebra erabiltzen jakin behar da, beraz, hiru aditu-taldeko kideen inplikazioa beharrezkoa da ariketa kanpo-laguntzarik gabe egiteko.

Talde azterketa osatzen duten ariketak GeoGebra liburuan aurki daitezke ‘1º Ejercicio’ eta ‘2º Ejercicio’ izenekin hurrenez hurren[††] eta biek berdin puntuatzen dute: 5 puntu 10etik.

[††] https://www.geogebra.org/m/C83MmhGQ - material/stKE4Z3Y
https://www.geogebra.org/m/C83MmhGQ - material/Fjrv66T7

AZTERKETA INDIBIDUALA

Bigarren azterketa honetan ekuazio (linealak eta koadratikoak) eta ekuazio-sistemen inguruko ariketak ebatzi behar dira kalkulagailu grafikorik erabili gabe; arkatzez eta paperean, alegia. Irakasle titularrak prestatutako azterketa da eta huek izan dira egin beharreko ariketak

1. Ariketa:

   *Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución **(2p, 0,5 cada una)***

   a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

   b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

   c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

   d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

2. Ariketa:

   *Resuelve: **(1,5 puntos)***

   a) $\frac{3x}{5} + 7 = 2x$ ***(0,5 puntos)***

   b) $\frac{x-9}{8} - \frac{2x-7}{10} = \frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

3. Ariketa:

   *Resuelve las ecuaciones siguientes: **(1,5 puntos)***

   a) $-x^2 + 8x + 20 = 0$

   b) $x^2 + x + 3 = 0$

4. Ariketa:

   *Resuelve: **(1,5 puntos)***

   a) $3x^2 - 147 = 0$

   b) $2x^2 - 10x = 0$

5. Ariketa:

*Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (**3 puntos** – 1 cada apartado)*

a) *Resueve por sustitución:* $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

b) *Resuelve por reducción:* $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$

c) *Resuelve por igualación:* $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases}$

6. Ariketa:

*El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta (**0,5 puntos**)*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 5x + y = 10 \end{cases}$$

GeoGebra AZTERKETA

Azken azterketa ikasleak GeoGebrarekin duen trebetasuna ebaluatzeko azterketa dela, edota, GeoGebra ezinbestekoa dela azterketa gainditzeko ez dira egia; aitzitik, azterketa aise erraz gainditu daiteke GeoGebra erabili gabe.

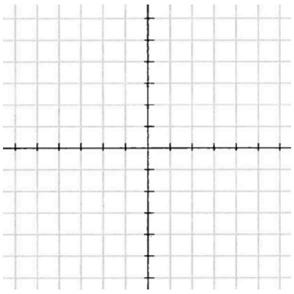
Azterketaren dinamika hurrengoa da; ikasleak hiru ekuazio sistemen soluzioa aurkitu beharko du, ez du zertan soluzioa aljebraikoki aurkitu behar, baina, grafikoki soluzioa aurkitzeko eskatzen zaio. Bestetik, erantzunaren zergatia arrazoitzeko eskatzen zaio ikasleari eta hau izanen da aztergai, arrazoi aljebraikoak ematen dituen edo ez.

Azterketa osatzen duten hiru ekuazio sistemen soluzioak, bakarra, ezinezkoa eta infinituak dira hurrenez hurren. Hona hemen azterketaren enuntziatua eta ebatzi beharreko ekuazio sistemak (ekuazio sistema bakoitzaren ondoan plano cartesiarreko kuadrikula txiki bat atxiki da bertan funtzio linealen adierazpen grafikoa kopiatzeko eta espazio zuria utzi zaie kalkuluak egiteko edota argudiatzeko).

Resuelve los siguientes sistemas graficamente:

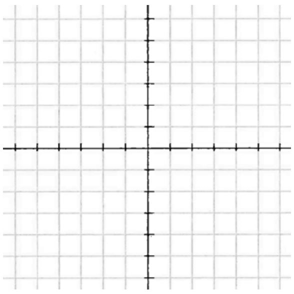
Copia en esta hoja la representación gráfica que obtienes con GeoGebra y a continuación indica la solución del sistema explicando porqué sabes que es esa.

A)



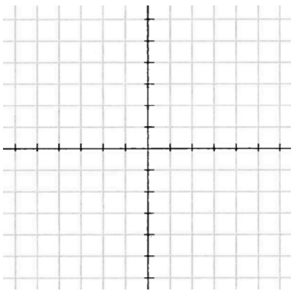
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

B)



$$\begin{cases} -x + y = 5 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$$

C)



$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

OHARRA: Azken bi azterketen benetako eredua ikusi nahi bada jo C eranskinera.

8.3- Hipotesiak eta aurreikusitako portaerak

Azpi atal honetan aztertu nahi da aditu-talde batean lan egindako ikasle batek, bere ikaskideekin ohiko-taldean ideiak partekatu ostean, zer nolako estrategiak baliabidetuko dituen ekuazio sistema edota funtzioekin zerikusia duten ariketak eta problemak ebaztean.

Ikasleen aurreikusitako portaerak aztertu baino lehen ikasleak har ditzakeen bideen hipotesiak planteatu behar dira lehenik eta behin. X. irudiko eskemari jarraiki hauxe dira gerta daitezkeen aukerak edo hipotesiak:

H1 – Jatorriko koloretik, jatorriko kolorera:
Ikasleak ikasitako lehen estrategiak (bere aditu-taldearenak, alegia) erabiltzen jarraituko du.

H2 – Jatorriko koloretik, kolore nahasiak:
Ikasleak beste estrategia batzuk ikasi eta lehen ikasitakoekin batera baliatuko ditu.

H3 – Jatorriko koloretik, beste kolore batera:
Ikasleak estrategia berriak ikasi eta hauek erabiliko ditu, aurretik ikasitakoak alde batera utziz.

H4 – Jatorriko koloretik, beste kolore zehatz batera:
Ikasle guztiek aditu-talde zehatz batetatik ikasitako estrategiak erabiliko ditu osterantzean.

Hipotesi hauek guztiak ikusita eta aditu-taldeak direnak direla, bi estrategia multzo nagusi egonen dira: estrategia-multzo aljebraikoak eta estrategia-multzo grafikoak. Hortaz, bi estrategiak independenteki erabilita ebatzi daitezkeen ariketak aztertuz posible izango litzateke ikasleen joerak aztertu eta hipotesiren bat ontzat aukeratu.

Oro har, gerta daiteke ikasleek aljebrarekiko prebalentzia bat izatea, azken batez, kontratu didaktikoaren arabera haiek badakitelako aspektu hori dela irakasleak ebaluatzen duena, nagusiki. Ikasleek ez dute energiarik galdu nahi izaten ebaluatuko ez zaien zerbait ikasten; hortaz, aurreko arrazoia dela-eta, ez da posible izan ikasleak 'askatasunean' ebaluatzea aljebraikoki zein grafikoki egin zitezkeen ariketak ebazten (8.5 emaitzen eztabaida azpiatalean berreskuratuko da gaia).

Ondorioz, hurrengo ariketa hipotetikoa ebatzi da bi estrategia-multzo ezberdinak baliaturik, ikasleek egingo luketen moduan, honela, azaldu zitezkeen erroreak aztertu ahal izateko.

Hurrengo ekuazio sistema ebatzi: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$

ESTRATEGIA ALJEBRAIKOAK

Estrategia aljebraikoak erabiliko dituen ikaslearekiko espero den portaera ekuazio sistemak ebazteko hiru metodoetatik bat aukeratzea izanen da; ordezkapena, berdinketa edo laburtzea erabiliko du.

Orokorrean, ikaslearen aljebrizazio maila txikixeagoa bada ere, ordezkapen metodoa edota berdinketa metodoak erabiltzea espero da, bi hauek oso sistematikoak baitira: metodoa aplikatuz emaitza lortzen da nahiz eta metodoa ez ulertu. Laburtze metodoa erabiltzea ekuazio sistemen esangura ulertzea inplikatzen du eta horrexegatik espero da abstrakzio maila altuxeagoan dauden ikasleek hauxe erabiltzea, behin ulertuta besteak baino laburragoa baita.

Ordea, hirugarren erantzun bat espero daiteke, exigitzen zaion aljebra mailan jantzia den ikasle batek emango lukeena. Bi ekuazioak baliokideak direla argudiatzea, bata bestearen multiploa baita.

ADB – 1: *Aurreko sistemaren ebazpena maila aljebraiko ezberdinetan gerta daitekeen erroreekin.*

1) MAILA: Ordezkapena edota berdinketa erabiliz

$y = 3 - 2x$ *beraz,* $4x + 2(3 - 2x) = 6$

$4x + 6 - 4x = 6$

2) MAILA: Laburtze metodoa erabiliz

$$\begin{cases} (2x + y = 3) \cdot (-2) \\ 4x + 2y = 6 \end{cases} +$$

$$\overline{\qquad 0x = 0 \qquad}$$

Hemendik aurrera gerta daiteke ikasleak identitatea identifikatzea edota ez identifikatzea jakintza mailaren arabera. Ikusi nola metodoaren arabera identitatea errezago identifikatzen den.

ORDEZKAPENA	BERDINKETA	LABURTZEA
$4x + 6 - 4x = 6$	$2x + y = 2x + y$	$0x = 0$
$0(x)=0$	$2x + y = 2x + y$	$0x=0$

3) MAILA: Argudio aljebraikoa

Bi ekuazioak baliokideak dira, bata bestearen multiploa baita. Ondorioz, sistemak infinitu soluzio ditu.

Aurreko adibidean aljebra erabiltzen duen ikasle batek har ditzakeen bideak bildu dira. Hala ere, ez dira beste unitateetan ikasleari gerta dakizkiokeen akatsak bildu, hala nola, plus eta minus zeinuak ahanztea, enuntziatuak gaizki kopiatzea e.a.

ESTRATEGIA GRAFIKOAK

Ikasle batek estrategia grafikoak erabiliko balitu, hurrengo pausoak eman beharko ditu sistema ebazteko: ekuazio bakoitzetik bi puntu lortu, zuzenak irudikatu eta ebakidura puntua neurtu.

GeoGebra moduko kalkulagailu grafikoa eskura baldin badauka ikasleak, lehenengo pausoa ez du zertan egin behar eta bakarrik azkeneko biak egin beharko luke, honela, hanka sartzeko aukerak murriztuz.

ADB – 1: *Aurreko sistemaren ebazpena estrategia aljebraikoak erabiliz*

1) PAUSOA: Zuzen bakoitzeko bina puntu lortu

$2x + y = 3$ ekuaziorako (1,1) puntuak balio du, eta baita (2, –1) puntua ere.

Gerta daiteke (eta gertatzen da) ikasleak baliabide aljebraiko bat erabiltzea puntuak identifikatzeko:

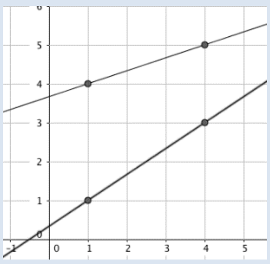
$2x + y = 3$ hortaz, $\boldsymbol{y = 3 - 2x}$ *eta $x = 1$ denean, $y = 1$, eta $x = 2$ denean, $y = -1$*

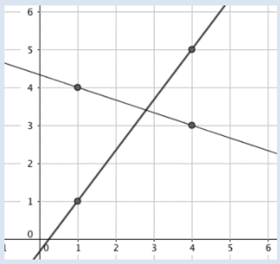
Beraz, (1,1) puntuak balio du, eta baita (2, –1) puntua ere.

Prozesua modu batean edo bestean errepikatuko du beste zuzenaren kasurako. Ikaslea konturatu daiteke lehen bi puntu horiek bigarren zuzenerako balio dutela eta hortaz zuzenean esan zuzen berdina direla eta, ondorioz, infinitu soluzio dituela sistemak.

2) PAUSOA: Puntuak plano cartesiarrean kokatu eta zuzenak marraztu.

Pauso honetan puntuak kokatzean sar dezake hanka ikasleak edota zuzenak eraikitzean puntuak elkar gurutzatu.





Hona nola lau puntu berek bi ekuazio sistema ezberdin osatzen duten.

3) PAUSOA: Ebakidura puntua identifikatu

Ikasleak egin dezaken akats bakarra puntua gaizki irakurtzea da, baina, hirugarren pausora heltzeak puntuak identifikatzean zein adieraztean hanka sartzeko probabilitatea txikia dela esan nahi du.

8.4- Emaitzak

Azpiatal honetan ebaluatutako jardueren analisia eginen da. Hiru azterketak ez ezik, klasean gertaturiko egoerak e.a. azalduko dira, ager daitezkeen erroreak eta ebazpen metodoek kuntifikatuz. Honetarako azpiatala hiru zatitan banatu egin da: emaitzen eta erantzunen analisi kualitatiboa, emaitzen estatistika orokorrak eta aldagai ezberdinen erlazioak (analisi aldagaianitza).

Lehenengo atalaren funtsa unitatean zehar (gehien bat ez ebaluatutako atalean) gertatutako errore eta egoeren analisia egitea da. Intentzioa ez da estatistika egitea baizik eta analisi kualitatibo edo orokor bat egitea.

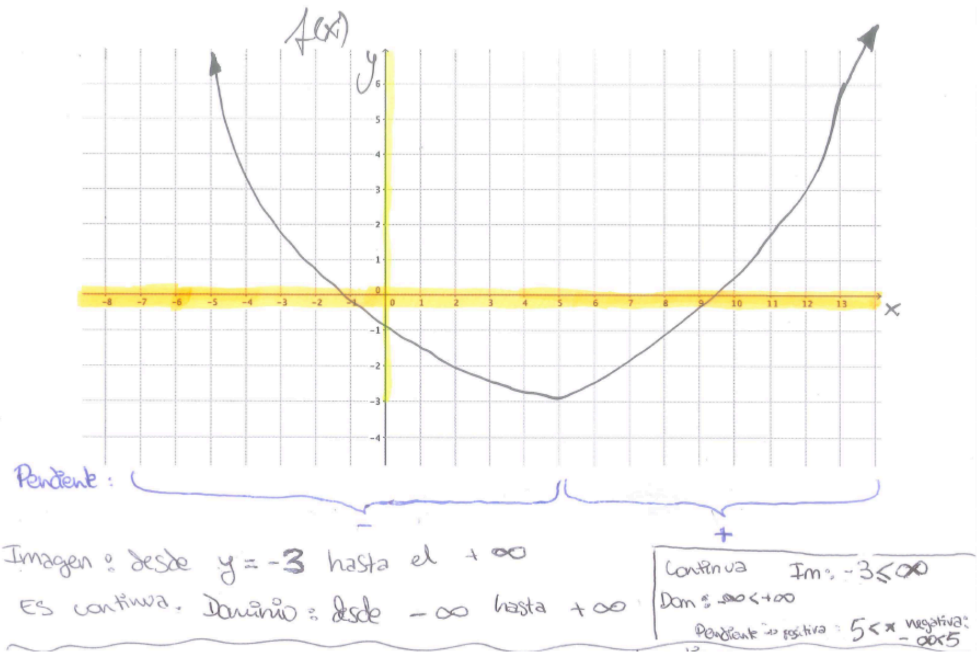
Bigarrenean, berriz, analisi estatistiko orokorrak eginen dira; zenbatek egin du errore mota bat, zein ehunekok erabili duen metodo zehatzen bat... Hauek kuantifikatu eta bildu.

Hirugarren atalaren funtsa, aldiz, errore eta metodo ezberdinen, alegia, aldagaien arteko erlazioak aztertzea da. Azken ataltxo hau gauzatu ahal izateko analisi aldagaianitzarako metodoak erabili dira CHIC programa baliatuz.

1 – ANALISI KUALITATIBOA

Klasearen produkzioa ona izan dela esan daiteke. Ikasle gutxik eraman behar izan dituzte klasean programatutako jarduerak etxerako lan gisa, hortaz, klase orduak probetxuzkoak izan dira ikasleendako.

Talde funtzionalari, hasiera batean, kostatu zaio egin beharreko ariketa ulertzea eta lanean hastea, baina, behin irakasleon laguntza pixka batekin eta domeinua eta irudia ulertu, ariketan murgildu eta orokorrean ongi egin dute lan. Haien etaparen bigarren fasean; hizkuntza naturalean emandako deskripzioak matematikoki egin, alegia, berriro ere blokeatu dira, baina, behin “≥” eta “≤” zeinuak ulertuta ez dute akats handirik egin.



18. irudia: Talde funtzionaleko kide baten lana. Ikus daitekeen akatsetako bat *“Im: -3 ≤ y < ∞”* ordez *“y”* jan du berak: *“Im: -3 ≤ ∞”*. Beste akats batzuen artean.

Talde honek egindako akats ohikoenak idazkera matematikoan aurki daitezke. Taldeko kideek funtzioen deskribapena hizkuntza naturalean ongi egiten zuten arren, idazkera matematikoan akatsak egiten zituzten (ikusi 18. irudia).

Talde tradizionalari dagokionez ez da daturik bildu. Hauen ikasketa prozesua ikasturtean zehar eramandakoaren oso antzekoa izan da, kurtsoan zehar erabilitako liburu bera erabili baitute. Aldaketa berri bakarra haiek haien buruen ikasketa prozesuaren kudeatzaileak izatea izan da. Ariketa sorta bat eskatu zaie egitea (irakurri 7.3 atala) baina beste ariketa batzuk egiteko askatasuna izan dute.

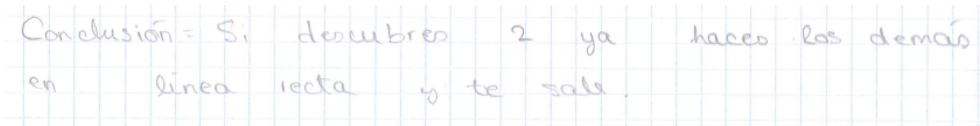
Esan beharra dago hasiera batean taldeko kideek edozer gauza galdetzen zutela, baina, irakasleon erantzun hutsalak ikusita irakasleoi galdetzeari utzi zioten.

GeoGebra taldea anitza izan da. Kide batzuk hasiera batean galdurik ikusi dute euren burua, hau dela eta bikoteka egin dute lan. Bikoteka lan egin ostean emaitza hobeak aztertu dira haien produkzioan.

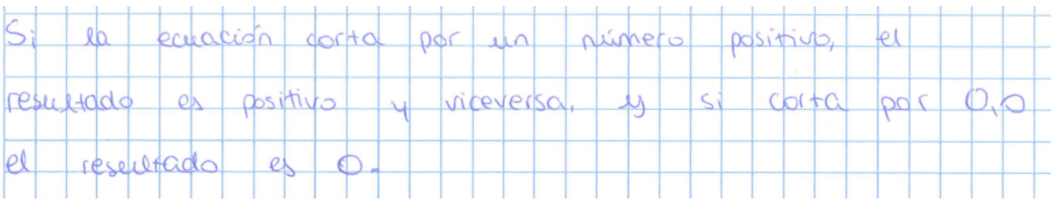
Behin klaseen dinamikan murgilduta, GeoGebra taldeko ikasleek aurrerapauso handiak eman dituzte. GeoGebra liburuko ariketek proposatutako hausnarketak egitean nahiko produkzio ona eduki du taldeak orokorrean.

Hona hurrengo irudiotan taldekide ezberdinek lortutako hausnarketak:

19. irudia: *"Porque tiene infinitas soluciones, pero si va en línea recta."* Ikasle batek adierazi nahi du lehen mailako ekuazio baten bi soluzio-puntu arteko zuzena osatzen duten infinitu puntu horiek ere soluzio direla.



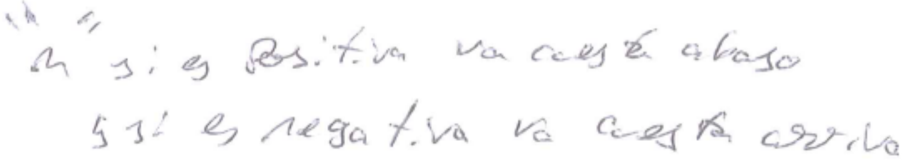
20. irudia: *"Conclusión: Si descubres dos (puntos) ya haces los demás en línea recta y te sale."* Beste honek ondorioztatu du bi soluzio-puntu aurkituta ez dela aljebraikoki ezer gehiago egin behar, beste soluzio guztiak estrapola daitezkeelako.



21. irudia: *"Si la ecuación corta por un número positivo, el resultado es positivo y viceversa. Y si corta por 0,0 el resultado es 0."* Ikasle hau $y = mx + n$ ekuazioaren n parametroari buruz eta y ardatzarekin ebakidurari buruz ari da.

22. irudia: *"... da lo mismo porque todo es multiplicado por 2, osea, que es proporcional."* Ikasle honek ekuazio baliokideen inguruan dioena.

Baina, ikasle hauen artean ere akatsak agertu dira. Ikusi hurrengo bi irudiak. Bertan bi akats ezberdin agertzen dira, biek jatorri ezberdinekoak:



23. irudia: *"si n es positiva,(la función) va cuesta abajo. Si es negativa va cuesta arriba"* Ikasle batek alderanztutako konklusioa.

Akats honek bi jatorri izan ditzake. Lehena, eta probableena, idazterakoan egindako akats puntual horietako bat izatea: alegia, zerbait idatzi nahi, eta nahi gabe aurkakoa idazten den horietarikoa.

Bigarren jatorria, nonbait, definizioa gaizki ulertzea. Hau da; definizio matematikoak definizioak dira, adibidez, gorakorra edo beherakorra izateak ez du zentzurik aurretik noranzko bat definitu ez bada. Alegia, jada definituriko definizio matematikoek hurrengo definizio matematikoak ezarriko dituzte. Hortaz, bigarren akats honek erlatibotasunean du erroa, definizioen arteko lotura haustura horrek erlatibotasunera baitarama.

24. irudia: *"Va en una linea recta uniforme"* Aurrekoen ondorio bera baina kontratu didaktikoaren kutsuarekin.

Beste akats honek kontratu didaktikoa du oinarri. Erantzun egokiena "va en una linea recta" litzateke, ordea, ikasleak "uniforme" gehitu dio. Azaletik ikusita ez dirudi kontratu didaktikoaren kontua denik, aldiz, ni haien Fisikako irakaslea izanda zentzua hartzen du aurrekoa. Fisika irakasgaian zuela gutxi "Movimiento Rectilíneo Uniforme" delako atala eman nien, non grafika linealak e.a. aztertzen genituen; hortaz "uniformea" gehitzerena.

Ikasgaien arteko lotura den heinean, argi eta garbi dago kontratu didaktikoak eragindako akatsa dela aurrean daukaguna: ni izan bainaiz bi irakasgaietan irakasle. Aipatzekoa da, apunteetan ez beste, unitatean zehar beste anitzetan ere entzun izan dudala hainbat ikasleengandik "uniforme" hitza kontratu didaktikoa dela eta.

2 – ESTATISTIKA OROKORRA

Azpiatal honetan ebaluatutako aldagaien azalpena, eta ostean, estatistika eginen da. Lehenik eta behin aipatu behar da bi motako aldagaiak daudela: ebaluazio-aldagaiak eta kanpo-aldagaiak, baina, biak ala biak binarioak, 0 eta 1 baloreak har ditzaketenak. Lehenengoak "aldagaiak" izendatu dira eta "*AN*" nomenklatura hartuko dute, "*N*-garren ebaluazio-aldagaia" adierazteko. Bigarrenek kanpo-aldagaiak edo aldagai "externoak" dute izena. Hauek, ordea, "*ExtN*" nomenklatura hartuko dute.

Aldagai externo hauei dagokienez, sexua, errepikatzailea den edo ez e.a. moduko aldagaiak izanen dira, langinaren ingurukoak, alegia, eta hauen artean garrantzitsuenak; ohiko eta aditu-taldeen pertenentziak.

AN nomenklatura hartzen duten ebaluazio-aldagaiek, hots, aldagaiak, ikasleek egindako errore edota komentario jakin bat kuantifikatuko dute eta ezberdinak izan dira ebaluaturiko hiru probetan.

Hurrengo taulan bildu dira aldagai guztien (bai ebaluazio-aldagaiak eta baita kanpo-aldagaiak ere) esangura:

	KANPO-ALDAGAIAK		TALDE AZTEKETA	EK. SISTEMEN AZTER.	GeoGebra AZTERKETA
Ext1	Neska vs. Mutila	**A1**	Konprobazio aljebraikoa vs. Konprobazio aljebra. EZ	1. Ariketa egin BAI vs. EZ egin	"ENTRADA" erabili vs. Puntuak irudikatu
Ext2	-	**A2**	-	2. Ariketa egin BAI vs. EZ egin	Argudio GRAFIKOA vs. Argudio ALJEBRAIKOA
Ext3	-	**A3**	-	3. Ariketa egin BAI vs. EZ egin	ZUZENAK irudikatu vs. ZUZENKIAK irudikatu
Ext4	EZ errepikatzaile vs. errepikatzaile BAI	**A4**	-	4. Ariketa egin BAI vs. EZ egin	-
Ext5	GeoGebra taldean BAI vs. Beste talde batean	**A5**	-	5. Ariketa egin BAI vs. EZ egin	-
Ext6	Talde tradizionalan BAI vs. Beste talde batean	**A6**	-	6. Ariketa egin BAI vs. EZ egin	-
Ext7	Talde Funtzionalean BAI vs. Beste talde batean	**A7**	-	"+,-" hanka sartu BAI vs. Zeinuekin hanka sartu EZ	-
Ext8	α-Taldean BAI vs. Beste talde batean	**A8**	-	Zatikiekin nahastu BAI vs. EZ nahastu	-
Ext9	β-Taldean BAI vs. Beste talde batean	**A9**	-	Zerbait ahaztu. "jan" vs. EZ "jan"	-
Ext10	γ-Taldean BAI vs. Beste talde batean	**A10**	-	Parametroak nahastu ditu vs. EZ ditu nahasi	-
Ext11	δ-Taldean BAI vs. Beste talde batean	**A11**	-	Formula[‡‡] BAI badaki vs. EZ daki ondo	-
		A12	-	Formula esplizituki BAI vs. esplizituki EZ	-
		A13	-	Metodo guztiak erabili vs. guztiak EZ baliabidetu	-
		A14	-	Identitateak identifikatu vs. EZ identifikatu	-

15. taula: Aldagai guztien esangura biltzen duen taula.

15. taula interpretatzeko ulertu behar da 1 vs. 0 modura transkribatu direla datuak, eta hortaz, hurrengo atalerako, aldagaien arteko korrelazioak negatiboak badira, adibidez, GeoGebra azterketaren A2 eta EXT9ren artean negatiboa bada korrelazioa, honek esan nahi du aurkakoak (goikoa behekoarekin edota behekoa goikoarekin) erlazionaturik daudela; kasu zehatz honetarako, edo Beta taldekoak ez direnek argudio grafikoak erabili dituzte, edota Beta taldekoek argudio aljebraikoak erabili dituzte. Zer esanik ez korrelazioa positiboa bada zuzenki erlazionaturik geratuko dira aldagaiak (goikoa goikoarekin edota behekoa behekoarekin).

Dena den, oraintxe azaldutako hau hurrengo ataleko informazioa aurreratzea da. Baina, hala ere, hurrengo taula interpretatzeko beharrezkoa da jakitea aurreko

‡‡ $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

	KANPO-ALDAGAIAK		TALDE AZTEKETA	EK. SISTEMEN AZTER.	GeoGebra AZTERKETA
Ext1	%70	**A1**	%50	%100	%60
Ext2	-	**A2**	-	%90	%80
Ext3	-	**A3**	-	%80	%75
Ext4	%100	**A4**	-	%80	-
Ext5	%35	**A5**	-	%90	-
Ext6	%35	**A6**	-	%65	-
Ext7	%30	**A7**	-	%55	-
Ext8	%25	**A8**	-	%30	-
Ext9	%25	**A9**	-	%30	-
Ext10	%25	**A10**	-	%30	-
Ext11	%25	**A11**	-	%70	-
		A12	-	%45	-
		A13	-	%70	-
		A14	-	%40	-

16. taula: Aldagai guztien frekuentzia erlatiboak (ehunekotan) biltzen dituen taula.

paragrafoan azaldutakoa, zeren eta, bertan agertzen da 1 vs. 0 frakzioaren ehunekoa; alegia, zenbat 1 diren 0en aurrean (frekuentzia erlatiboa).

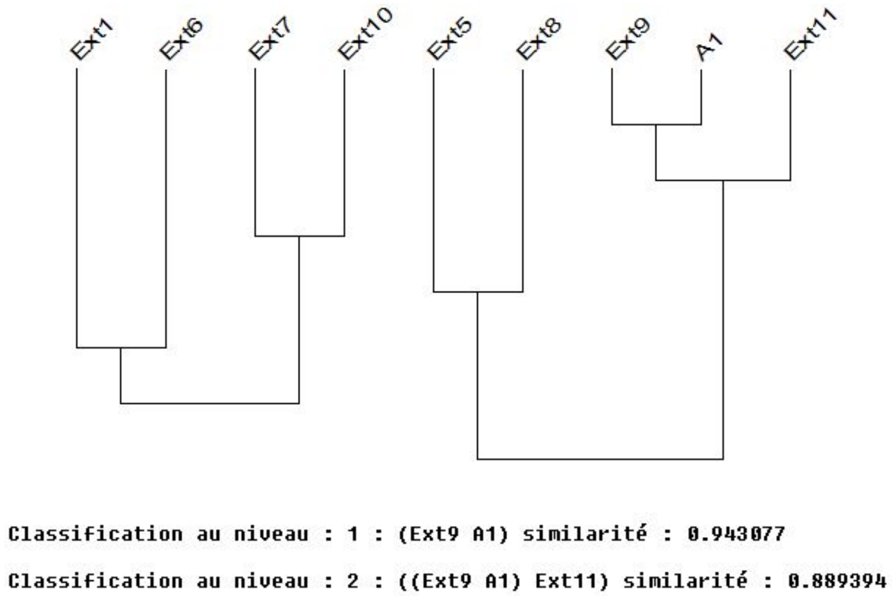
3 – ALDAGAI-ARTEKO ERLAZIOAK

Esperimentuaren helburuetako bat definitutako aldagaien artean erlaziorik dagoen aurkitzea da. Lanaren helburu nagusiak beste batzuk diren arren, esperimentuan lortutako emaitzak haien artean erlazionatzea interesgarria izanen da lana borobiltzeko. Arestian aipatutako esperimentuaren helburua laburtzen duen eskemaren (ikusi 18. irudia) galdera ikurrari erantzunik aurkituko al zaio?

Aurreko galderaren esangura zera da: aldagai-arteko analisia erabili ostean deduzitu daiteke 8.3 atalean egindako hipotesiren baten prebalentzia?

Hurrengo moduan antolatu da analisia: hiru azterketa ezberdinetarako egin da aldagai-arteko analisia CHIC programa erabiliz, hirurak independenteki, eta lortutakoa zuhaitz-diagrama baten eskeman bildu da.

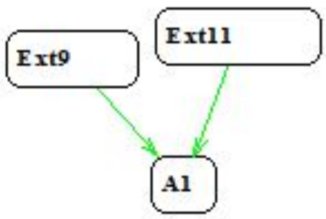
Talde azterketari dagokionez hurrengo zuhaitz-diagrama lortu da, “similarité” balioak hurrengoak direlarik (ikusi 25. irudia).



25. irudia: Talde azterketarako zuhaitz-diagrama eta “similarité” koefizienteak.

Jakin beharrekoa da “similarité” koefiziente horiek ez direla korrelazio koefizienteak, hauek positiboak diren bitartean, besteak positiboak zein negatiboak izan daitezkelako (aldagai arteko erlazioaren arabera). Lanerako konprobatu egin da zein den aldagai-arteko erlazio esanguratsuenen korrelazio koefizienteen zeinua eta guztiak positiboak suertatu dira; hortaz, erlazio guztiak zuzenak izanen dira, eta ez alderantzizkoak, arestian beste paragrafo batean proposatu den antzera (irakurri 15. taula azpiko paragrafoa).

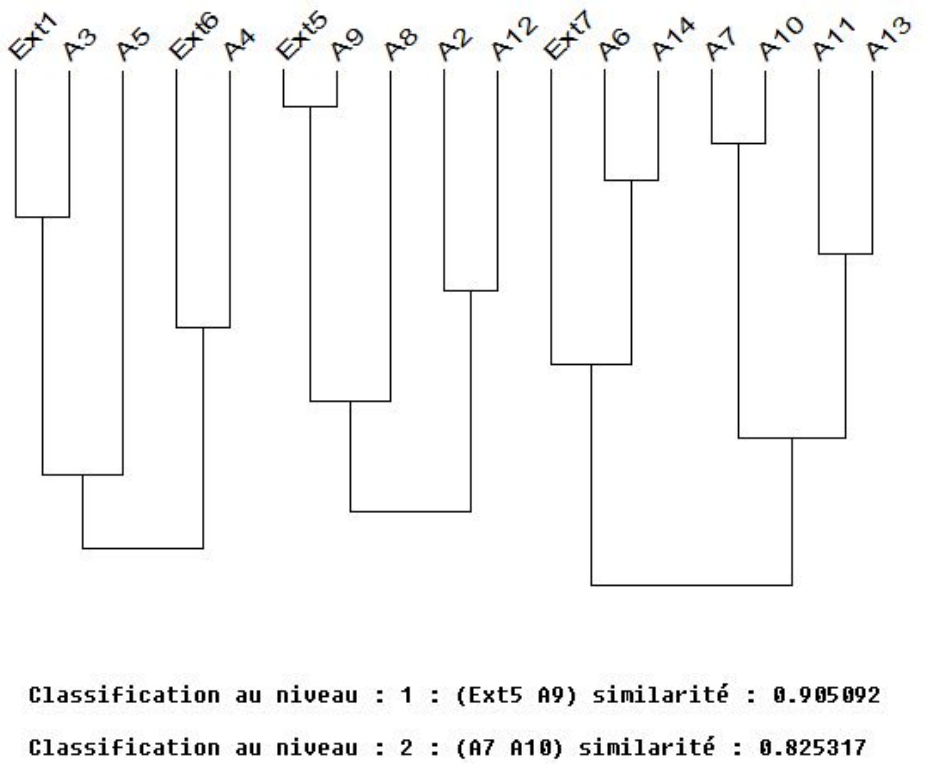
Orduan, oraintxe azaldutakoa alde batera utzita, zer esan nahi du 25. irudia? Bertan ikus daitekeena da, bai Ext9 eta baita Ext11 aldagaiak ere A1 aldagaiarekin hertsiki loturik daudela. Grafo inplikatiboa ikusita (ikusi 26. irudia), argi dago bi kanpo-aldagaien proportzio handi batek egin duela A1, hortaz, 15. taula baliatuz aurreko esaldia honela interpreta daiteke: *Beta eta Alfa taldeek konprobaketa aljebraikoa erabili dute “1º EJERCICIO” egitean* (ikusi 67. orriko TALDE AZTERKETA).



26. irudia: Talde azterketaren grafo inplikatiboa.

Azterketa indibidualari dagokionez, hurrengo 27. irudian bildu dira lortutako emaitzak. Orain emaitzak konplexuagoak direla, ongi legoke zuhaitz-diagramaren dinamika azaltzea.

Zuhaitz-diagramak aldagaiak adarretan erlazionatzen ditu. Zenbat eta adar motzagoak izan, hainbat eta erlazio estuagoa dute aldagaiek. Baina, tentuz ibili behar da interpretazioan, zeren eta, diagraman geroz eta beherago jo, errorea handituz doa, nolabait aldagaien arteko benetako erlazioa aienatuz.



27. irudia: Azterketa indibidualaren zuhaitz-diagrama eta "similarité" koefizienteak.

27. irudian ikus daitekeen moduan, hertsiki loturiko aldagaiak izanen dira Ext5 eta A9, eta A7 eta A10. Arestian esan bezala hauen korrelazio koefizienteak positiboak direnez, honela interpreta daiteke lortutako diagrama 15. taula baliatuz: *GeoGebra taldekoek zerbait (konstante, parametro, zenbaki edota zeinuren bat) "jan" dute arkatza eta papera baliaturiko moduko ariketak egiteko prozesuan. Bestetik zeinuekin arazoak izan dituzten horiek parametroekin ere nahastu egin dira.*

Alde batetik logikoa da aurrekoa sinestea. GeoGebran aritu diren ikasleek arkatza eta papera moduko ariketak egiten trebezia galtzeko arriskua baitzuten. Baina, modu berean, zergatik hau ez du eraginik izan talde funtzionalean?

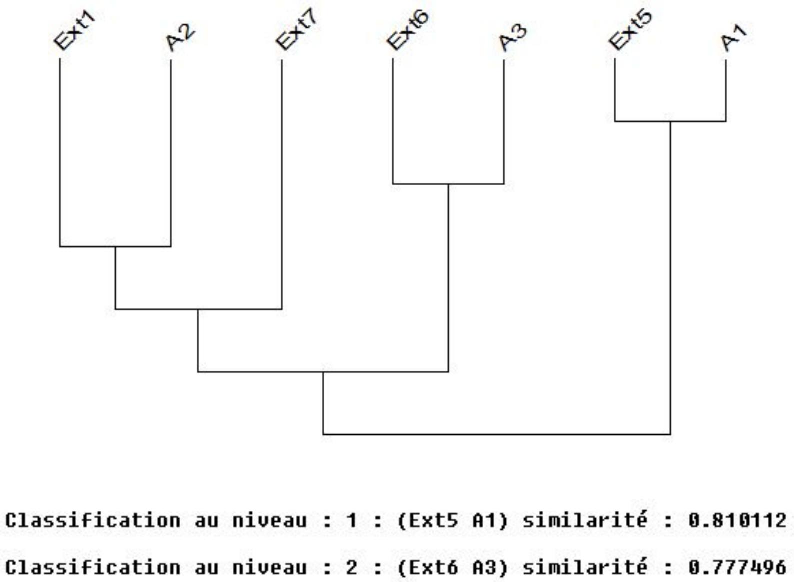
Bestetik, parametroen interpretazio ezegokia egitea eta hauei balioak ematean hanka sartzea biek ala biek sartzen dira "parametroak nahastu ditu" multzoan, ordea, kontzeptu ezberdinak dira. A7 eta A10 loturik egotea gerta daiteke parametroen nahasketa "despisteak" direla eta balioen esleipena gaizki egin delako. Hala ere hain datu gutxirekin ezin da ondorio zehatzik atera.

Aipatu bezala, hein batetik aurrera interpretazioak egitea arriskutsua litzateke, hortaz, bakarrik lehenengo bi aldagai-erlazio horiek aztertu dira azterketa indibidualaren kasu honetarako.

Azkenik, eta GeoGebra azterketari dagokionez 28. irudian bildu dira lurtutako datuak. Aurreko kasutan bezala aldagai-erlazio nagusietarako interpretazioa egin da 15. taula baliaturik.

Interpreta daitekeena hurrengo da: *GeoGebra taldean aritu direnek GeoGebra programako "ENTRADA" funtzioa erabili dute zuzenean ekuazioak sartzeko ekuaziotik aljebraikoki puntuak lortu eta irudikatu ordez.*

Lortutako azken emaitza hau logikoa dirudi GeoGebra taldekoek aritu baitira denbora gehiago programarekin lanean. "Similarité" koefizientea dela eta ez dira emaitza gehiago ondorioztatuko azterketa honetan.



28. irudia: GeoGebra azterketaren zuhaitz-diagrama eta “similarité” koefizienteak.

8.5- Emaitzen eztabaida

Azken kapituluaren azpiatal honetan, lorturiko emaitzak hizpide, hurrengo lerrootan hauen inguruko eztabaida eginen da. Lehenik eta behin, aipatzekoa da, aztertu izan den lagina, lagin oso txikia dela, eta gainera, ez dela zorizkoa: ikastalde jakin bati dagokio. Hala ere, Master Bukaerako Lan (MBL) batentzat aski da honelako lagin batekin, lanaren asmoa ez baita didaktikako ikerketa bat egitea. Aldiz, asmo profesionala duen lana da, irakasle lanbidean sartzeko esperientzia bat.

Bigarrenik, eta unitateari dagokionez, unitatea eta honi loturiko irakaskuntza periodoa motzak izan direla gaitasunak sakontasunean ebaluatzeko esan daiteke. Gainera, egia da, oro har ezin dela hartu erreferentzia gisa unitate soil bat, aldiz, ikasturte guztian zehar egindako garapena ebaluatu beharko litzatekela. Hau ez da posible izan Practicum IIa dirauen aste kopurua dela-eta, eta bestetik, hurrengo paragrafotan azalduko den moduan, ikasturte osoan zehar ebaluazio irizpide egokiak erabili behar liratekelako emaitza esanguratsuak lortzeko.

Ikasmailan guztian zeharreko eboluzioaren azterketaren ildotik, honela, esate baterako, eragiketa aritmetikoen zuzentasunaren kasua aztertuko da. Ikasle batek irailean egiten dituen akats aritmetiko-aljebraikoak zeintzuk diren hartu beharko litzateke erreferentzia gisa, eta ostean, konparatu akats horiek ekainean egiten dituenekin: hobekuntza edo garapen bat ikusten bada, ikasle horrek aurreratu egin duela esan liteke; aldiz, errepikatu egiten baditu akats berdinak irailean zein ekainean, ikasle horrek ez du aurrera egin. Beraz, MBL honetan egindako esperimentuaren ebaluazioa, eta ondorioz, lortutako emaitzak, ez dira errealitate honen adierazle izanen. Jar dezagun bada adibide zehatz gisa kalkulurako teknikak.

Kalkulurako teknikak progresiboki ikasten dira, eta ezin da pentsatu egun batetik bestera ikasleek ongi egingo dutenik: adibidez, nahiz eta ikasle bati azaldu zenbaki negatiboek biderketarekiko duten portaera, ikasle horrek akatsak egingo ditu praktikan, nahiz eta azalpen teorikoa ulertu duen, eta eragiketak egin ahala, denborarekin geroz eta akats gutxiago egingo ditu. Baina, akats horiek ez dira zertan guztiz desagertu, tarteka azaleratu egingo dira, oztopo epistemologiko baten presentzia azaleratzen dutelako

(Brousseau, 1998). Hortaz, ikaslearen nondik-norakoa matematikaren ikaskuntzan baldintzatuko ditu momentu zehatz batean egindako ebaluazioaren lortutako emaitzak.

Hortaz, aurreko paragrafoan aipatutakoagatik, ikaslearen inguruneak ere baldintza dezake esperimentua. Adibidez, ikasle baten senideren bat gaixo balego, ikaslearen produkzioan eragina izanen du, eta ondorioz, berriro ere, laginaren baliagarritasuna auzitan jarriko duen faktore bat da esku artean dugun hau.

Esperimentuaren periodoaren egokitasuna alde batera utzita, pasa gaitezen taldeen osaerara. Ausak betidanik baldintzatu ditu laginak. Aztergai den kasu partikular honetan, taldeen banaketan, bi ‘ikasle on’[§§] egokitu zaizkio talde tradizionalari. Baina, ba al da esanguratsua?

Pentsa liteke ikasle hoberenak zeudela talde tradizionalean, edota pentsa liteke ikasle horiek, tradizionalek, alegia, “abantaila” zutela, talde bakoitzak gaitasun ezberdinak landu dituen arren, eurek landutako gaitasun horiek ebaluatu dituelako irakasleak. Irakaskuntza-ereduaren “inertziak” talde honen alde jokatu du.

Baina taldeen ausazko osaera dela eta ez dela, emaitzak aztertzean kontuan hartu beharreko gakoetako bat, eta 1. blokearekin lotura egiten duena, edukien eta erabilitako ebaluazio irizpideen arteko lotura da.

Lehen zikloko edukien artean ditugu (ikusi 15. orriko 2. taula): Grafikoki aurkeztutako fenomenoen deskripzio lokala eta orokorra; azterketa grafikoen ekarpenak egoera bat aztertzeko. Eduki horien aurrean, badira beste batzuk beti gailentzen direnak, eta gailentze horren justifikazioa tradizioan soilik oinarritzen da, nagusiki: Lehen mailako ekuazioak ebaztea.

Ebaluazio irizpideen artean, berriz, honelakoak ager daitezke: zenbaki oso, zatiki, hamartar eta ehuneko errazak erabiltzea, baita haien eragiketak eta propietateak ere, informazioa bildu, eraldatu, trukatzeko eta eguneroko bizitzarekin zerikusia duten arazoak ebazteko. Ikusi 28 orrialdeko DBH2ko irizpideei harrera ematen dion paragrafoa.

Baina, horien aurrean, hobetsi egiten dira, soilik gaitasun aritmetiko-aljebraiko abstraktuak ebaluatzen dituzten ebaluazio irizpideak, nahiz eta ebaluazio irizpide horiek esaten dutena ez den bere horretan interpretatzen. Honen adibidea; zenbaki oso, zatiki, hamartar eta ehuneko errazak erabiltzea, baita haien eragiketak eta propietateak ere, “**informazioa bildu, eraldatu, trukatzeko eta eguneroko bizitzarekin zerikusia duten arazoak ebazteko”**. Belztutako pasartea ebaluaziorako irizpide gisa erabiltzea ez da ohikoa irakaskuntza tradizionaleko azterketetan.

Hots, proposaturiko ariketetan, ebaluazio irizpideek aipatzen duten testuinguru guztia desagertu da, eta honela, testuingururik gabe, gaitasun aritmetiko-aljebraiko abstraktuak bakarrik ebaluatzen dira, tradizioak honela agintzen duelako, eta hau disfuntzio gisa interpreta daiteke.

Hurrengo taulan bildu dira aditu-talde ezberdinei berezkoak zaien edukiak eta gaitasunak, eta baita hauek ebaluatzeko irizpideak ere (ikusi 17. taula).

Horiek horrela izanagatik ere, soilik gailentzen da “eragiketen zuzentasuna” ebaluatzeko irizpidea, eta, beraz, ezin dugu jakin, ez delako ebaluazioan neurtu, ikasleek fenomenoen interpretazioan eta softwarearen erabileran izan dituzten ikaskuntzak.

Azken finean, bukaeran lortutako emaitzak eta curriculumetik eskuratutako informazioa dira objetiboki azter daitezkeen bakarrak. Talde funtzionala eta GeoGebra taldeak ebaluatzeke geratu dira curriculumak ezarritako inertzia tradizionalagatik edota beste kausak direla eta, baina, lorturiko emaitzak izan direnak izan dira, eta hauetatik harantzagoko suposizioak edota usteak atal honetatik at geratu dira.

[§§] Bata espediente akademiko bikainarekin eta besta “altas capacidades” etiketa duelarik.

	Landuriko **edukiak** eta **gaitasunak**	Erabili beharreko **irizpideak**
Testu liburua	Teknika aljebraikoak	**Eragiketak**
Ikusmolde funtzionala	Fenomenoen deskripzioa	Fenomenoak interpretatzea
GeoGebra	Gaitasun digitalak	Softwarearen erabilera

17. taula: Aditu-talde ezberdinean eduki, gaitasun eta ebaluatzean erabili beharreko irizpideak biltzen duen taula.

Sintesia, ondorioak eta erantzun gabeko galderak

Lan honen sistesi gisa hurrengo atala idatzi da, eta hurrengo hitzok laburtzen dute lanean aztertutakoa. Edukiak lantzeko modua aldatzen baldin bada, aldatu behar da edukiak ebaluatzeko modua baita ere, bestela, badirudi ikasleek okerrago egiten dutela. Baina, aurrekoa, 'ilusio' bat izan daiteke bakarrik, beraiek landu ez duten zerbait ebaluatu zaielako. Hau izan da lan honetan azaleratu den aspektu nagusia, eta badu bere interesa, "zer ebaluatu" galdera guztiz loturik dagoelako "zer irakatsi" galderarekin.

Curriculuma eskuen artean, irakasleak erabaki behar du "zer" irakatsi, "nola" irakatsi eta baita "noiz" irakatsi ere. Hala ere, ez badira hiru galdera horiek estuki lotzen "zer ebaluatzen da" galderari, disfuntzioak gerta daitezke.

Begien bistan gelditu da saiakerak egiten direla matematikaren aspektu aljebraiko eta funtzionalak txertatzeko edukien eta gaitasunen ikuspegitik, baina hori egin ondoren, ezin dira soilik ebaluatu aspektu aljebraikoak, ebaluatu behar dira curriculumak aipatzen dituen beste aspektu horiek ere.

Aurrera begirako galderei dagokienez, pentsa litezke galdera batzuk lerro horretan aurrera egiteko: "nola antolatu daitezke curriculumeko ebaluazio irizpideak gaitasun funtzionalak ebaluatzeko, ikuspegi aljebraiko soila gaindituz?", "jakinik gaitasun aritmetiko-aljebraikoetan ematen diren hobekuntzak epe luzera bakarrik egiazta daitezkeela, nola antola daiteke gaitasun horen ebaluazio bat ikasmaila osoa hartuz erreferentzia gisa?"

Erreferentziak

1. *Curriculumak: Lehen Hezkuntza, DBH eta Batxilergoa*

   a. Nafarroako Gobernua. (2015). *25/2015 FORU DEKRETUA, apirilaren 22koa, Nafarroako Foru Komunitatean Batxilergoko irakaskuntzen curriculuma ezartzen duena*.

   b. Nafarroako Gobernua. (2014). *60/2014 FORU DEKRETUA, uztailaren 16koa, Nafarroako Foru Komunitatean Lehen Hezkuntzako curriculuma ezartzen duena*.

   c. Nafarroako Gobernua. (2007). *25/2007 FORU DEKRETUA, martxoaren 19koa, Nafarroako Foru Komunitateko Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzarako curriculuma ezartzen duena.*

2. *Testu-liburuak*

   a. Pereda L. (2002). *Matemáticas 6.* Erein.
   ISBN: 8497460901

   b. Nieto M.; Moreno A.; Maestre N. A.; Pérez A.; Díaz A.; Rocafort J.A. (2015). *Matemáticas 1 ESO.* Savia. SD Profesor.
   ISBN: 9788467581447

   c. Alcaide F.; Nieto M.; Maestre N.A.; Pérez A.; Rocafort J.A.; Pelorroto. (2015) *Matemáticas 2 ESO.* (2000). Savia. SD Profesor.
   ISBN: 9788467588477

   d. SD Profesor.. Savia. Alcaide F.; Hernandez J.; Serrano E.; Rocafort J.A. (2015) *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3 ESO*. Savia. SD Profesor.
   ISBN: 9788467581454

   e. Alcaide F.; Hernandez J.; Moreno M.; Serrano E.; Maestre N. A.; Pérez A.;Rocafort J. A.; García D. (2015). *Matemáticas orientadas a las ciencias aplicadas 3 ESO.* Savia. SD Profesor.
   ISBN: 9788467581270

f. Alcaide F.; Pérez J. L.; Hernandez J.; Moreno M.; Serrano E.; Donaire J. J.; Maestre N. A.; Pérez A.; Arranz J. M.; Losada R.; Moira J.A.; Sada M.; Rocafort J. A.; García D. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4 ESO.* Savia. SD Profesor.
ISBN: 9788467588583

g. Alcaide F.; Hernandez J.; Moreno M.; Serrano E.; Donaire J. J.; Pérez A.; Rocafort J.A.; García D. (2015). *Matemáticas orientadas a las ciencias aplicadas. 4 ESO*. Savia. SD Profesor.
ISBN: 9788467588576

3. *Matematika liburu akademikoak*

a. Barragués J.I.; Arrieta I.; Manterola J. (2014). *Analisi matematikoa.* 2. argitalpena. Pearson Education.
ISBN: 978-1-78134-973-1

Eranskinak

A. Testu-liburuko Unitate Didaktikoa
B. Aditu-talde funtzionalaren apunteak
C. Galdetegiko azterketa indibiduala eta GeoGebra azterketak

A. Testu-liburuko Unitate Didaktikoa

8 **Funciones**

- ¿Cómo localizas una posición en un tablero de ajedrez? ¿Y en un plano?
- ¿En función de qué varía el volumen de agua de una piscina?
- ¿Qué propiedades tiene la gráfica de la variación de la temperatura en un día?
- ¿Todas las funciones son del mismo tipo?

Piensa y relaciona

José afirma que las funciones son una llave para relacionar gran parte de las matemáticas.

¿Crees que es cierto? Piensa sobre los contenidos que has estudiado hasta el momento e indica si ya has trabajado con funciones en otras asignaturas.

Observa y reflexiona

Si "más vale maña que fuerza", ¿qué te parece la forma en que transporta Obélix el menhir?

¿Crees que Obélix tendría que hacer menos fuerza si lo empujase o lo hiciese rodar?

Lee y comprende

La reunión de la comunidad

—Bill: La verdad es que a mí me gusta mucho la presentación con gráficas y tablas. Me parece imprescindible para poder entender cualquier cosa de forma clara.

—José: Es cierto. Siempre insistes en hacer una tabla con cualquier tema que estemos tratando.

—Bill: ¿Te extraña? Todo está en función de algo. Por eso es bueno relacionar cada cosa con aquello con que está relacionada. Por ejemplo, el tono de una nota musical emitida por una cuerda vibrante está en función de la longitud de esta, de su peso y de la tensión a la que está sometida.

—José: En efecto. Todo está en función de algo. El movimiento que sigue una piedra empujada por una persona a lo largo de un camino estará relacionado con el peso y forma de la piedra, la fuerza del ser humano, y la inclinación y rugosidad del terreno.

—Bill: No olvides la destreza de la persona. Ya sabes que más vale maña que fuerza.

—José: Que un joven estudie una tarde de un día normal dependerá de si tiene otras posibilidades para pasar la tarde, del gusto por la materia y de la proximidad de la fecha de examen de la misma.

—Bill: El dinero que hay que pagar a un banco por la hipoteca es proporcional a la cantidad de dinero prestada y al tiempo por el que te la deja. Y depende del interés fijado. [...]

—José: Claro. Las funciones son una llave para relacionar gran parte de las matemáticas: números, longitudes, áreas, volúmenes, distancias, ecuaciones de figuras, representaciones gráficas que desembocan en el estudio de figuras geométricas, expresiones algebraicas...

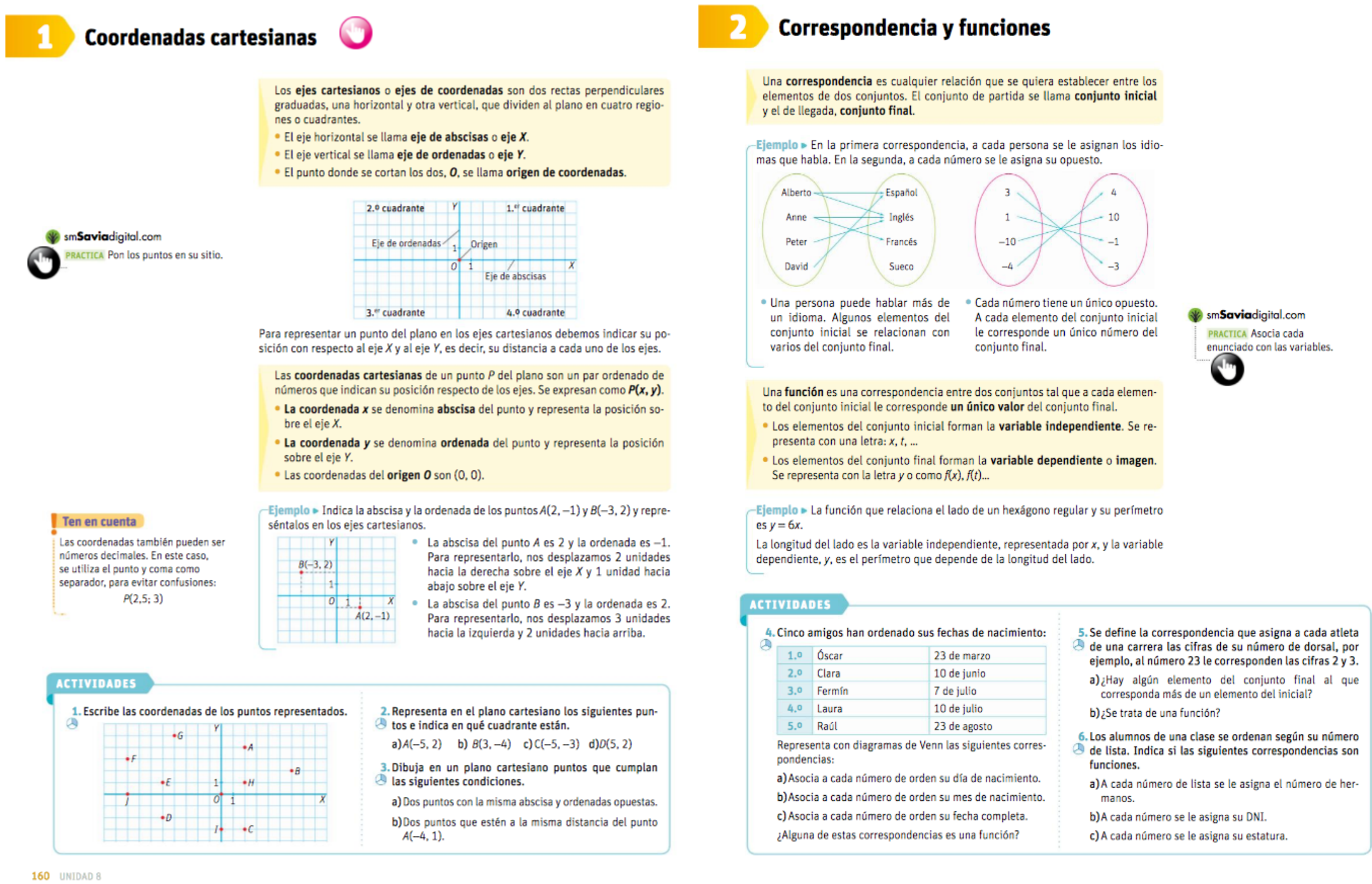
JOSÉ CHAMOSO, WILLIAM RAWSON
Matemáticas en una tarde de paseo
Nivola, 2003

Y tú, ¿qué opinas?

El agua es un recurso muy preciado que debemos cuidar y sin embargo, en muchas ocasiones no se consume de forma responsable.

Bill afirma que "todo está en función de algo", ¿de qué depende el consumo de agua en un hogar? ¿Qué medidas se pueden tomar para que este consumo decrezca?

159



1 Coordenadas cartesianas

Los **ejes cartesianos** o **ejes de coordenadas** son dos rectas perpendiculares graduadas, una horizontal y otra vertical, que dividen al plano en cuatro regiones o cuadrantes.

- El eje horizontal se llama **eje de abscisas** o **eje *X***.
- El eje vertical se llama **eje de ordenadas** o **eje *Y***.
- El punto donde se cortan los dos, ***O***, se llama **origen de coordenadas**.

smSaviadigital.com
PRACTICA Pon los puntos en su sitio.

Para representar un punto del plano en los ejes cartesianos debemos indicar su posición con respecto al eje *X* y al eje *Y*, es decir, su distancia a cada uno de los ejes.

Las **coordenadas cartesianas** de un punto *P* del plano son un par ordenado de números que indican su posición respecto de los ejes. Se expresan como ***P*(*x*, *y*)**.

- **La coordenada *x*** se denomina **abscisa** del punto y representa la posición sobre el eje *X*.
- **La coordenada *y*** se denomina **ordenada** del punto y representa la posición sobre el eje *Y*.
- Las coordenadas del **origen *O*** son (0, 0).

Ten en cuenta
Las coordenadas también pueden ser números decimales. En este caso, se utiliza el punto y coma como separador, para evitar confusiones:
$P(2{,}5; 3)$

Ejemplo ▸ Indica la abscisa y la ordenada de los puntos $A(2, -1)$ y $B(-3, 2)$ y represéntalos en los ejes cartesianos.

- La abscisa del punto *A* es 2 y la ordenada es −1. Para representarlo, nos desplazamos 2 unidades hacia la derecha sobre el eje *X* y 1 unidad hacia abajo sobre el eje *Y*.
- La abscisa del punto *B* es −3 y la ordenada es 2. Para representarlo, nos desplazamos 3 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba.

ACTIVIDADES

1. Escribe las coordenadas de los puntos representados.

2. Representa en el plano cartesiano los siguientes puntos e indica en qué cuadrante están.
a) $A(-5, 2)$ b) $B(3, -4)$ c) $C(-5, -3)$ d) $D(5, 2)$

3. Dibuja en un plano cartesiano puntos que cumplan las siguientes condiciones.
a) Dos puntos con la misma abscisa y ordenadas opuestas.
b) Dos puntos que estén a la misma distancia del punto $A(-4, 1)$.

160 UNIDAD 8

2 Correspondencia y funciones

Una **correspondencia** es cualquier relación que se quiera establecer entre los elementos de dos conjuntos. El conjunto de partida se llama **conjunto inicial** y el de llegada, **conjunto final**.

Ejemplo ▸ En la primera correspondencia, a cada persona se le asignan los idiomas que habla. En la segunda, a cada número se le asigna su opuesto.

- Una persona puede hablar más de un idioma. Algunos elementos del conjunto inicial se relacionan con varios del conjunto final.
- Cada número tiene un único opuesto. A cada elemento del conjunto inicial le corresponde un único número del conjunto final.

smSaviadigital.com
PRACTICA Asocia cada enunciado con las variables.

Una **función** es una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde **un único valor** del conjunto final.

- Los elementos del conjunto inicial forman la **variable independiente**. Se representa con una letra: *x*, *t*, ...
- Los elementos del conjunto final forman la **variable dependiente** o **imagen**. Se representa con la letra *y* o como $f(x)$, $f(t)$...

Ejemplo ▸ La función que relaciona el lado de un hexágono regular y su perímetro es $y = 6x$.

La longitud del lado es la variable independiente, representada por *x*, y la variable dependiente, *y*, es el perímetro que depende de la longitud del lado.

ACTIVIDADES

4. Cinco amigos han ordenado sus fechas de nacimiento:

1.º	Óscar	23 de marzo
2.º	Clara	10 de junio
3.º	Fermín	7 de julio
4.º	Laura	10 de julio
5.º	Raúl	23 de agosto

Representa con diagramas de Venn las siguientes correspondencias:
a) Asocia a cada número de orden su día de nacimiento.
b) Asocia a cada número de orden su mes de nacimiento.
c) Asocia a cada número de orden su fecha completa.
¿Alguna de estas correspondencias es una función?

5. Se define la correspondencia que asigna a cada atleta de una carrera las cifras de su número de dorsal, por ejemplo, al número 23 le corresponden las cifras 2 y 3.
a) ¿Hay algún elemento del conjunto final al que corresponda más de un elemento del inicial?
b) ¿Se trata de una función?

6. Los alumnos de una clase se ordenan según su número de lista. Indica si las siguientes correspondencias son funciones.
a) A cada número de lista se le asigna el número de hermanos.
b) A cada número se le asigna su DNI.
c) A cada número se le asigna su estatura.

161

3 Fórmulas, tablas y gráficas

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y trabaja con tablas, gráficas y fórmulas.

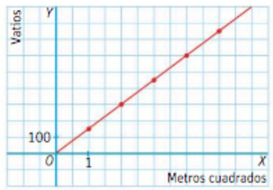
Para expresar la relación entre dos magnitudes, se utilizan **fórmulas, tablas y gráficas.**

Ejemplo ▸ Una placa fotovoltaica genera una media de 150 vatios (W) por cada metro cuadrado de superficie. Podemos expresar la relación entre los vatios y los metros cuadrados de las siguientes maneras:

- Mediante una fórmula: $y = 150x$
- Mediante una tabla: a cada valor de la superficie se le asocian los vatios correspondientes.

Metros cuadrados (x)	1	2	3	4	5	...	10
Vatios (y)	150	300	450	600	750	...	1500

- Con una gráfica: se obtiene representando los valores de la tabla en unos ejes cartesianos.



Ten en cuenta
Solo se pueden unir los puntos representados si la función puede tomar los valores intermedios.

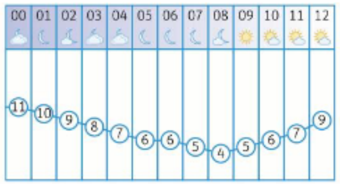
ACTIVIDADES

7. Dos magnitudes están relacionadas mediante la fórmula $y = 2x - 3$.

a) Construye la tabla de valores correspondiente.

b) Representa la gráfica.

8. Xiomara está consultando las temperaturas previstas en su ciudad en la web de la Agencia Estatal de Meteorología (AEMET).



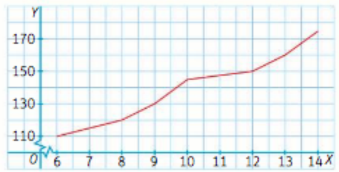
a) Construye una tabla de valores con los datos de la imagen.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿Qué temperatura había a las 6 de la mañana?

d) ¿A qué hora la temperatura bajó de 10 °C?

9. En la siguiente gráfica se recogen los datos de la estatura de Sergio entre los 6 y los 14 años. Observa y contesta:



a) ¿Cuánto medía cuando tenía 6 años? ¿Y cuando tenía 10 años?

b) ¿A qué edad superó los 1,5 m de altura?

c) ¿En algún momento su estatura permanece constante?

d) Construye la tabla de valores asociada.

10. La base de un rectángulo mide 2 cm más que su altura.

a) Si x es la altura del rectángulo, ¿cuánto mide su base?

b) Si y es el perímetro del rectángulo, escribe la fórmula que permite obtener el perímetro a partir de la altura.

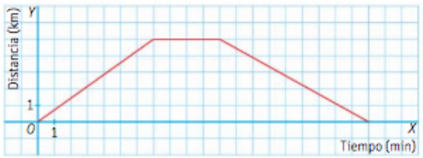
c) Representa en unos ejes de coordenadas la relación entre el perímetro y la altura de esos rectángulos.

4 Dominio y recorrido

- El **dominio** de una función f es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. Se suele escribir como $D(f)$.
- El **recorrido** de una función f es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente. Se suele escribir como $R(f)$.

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y trabaja el dominio y recorrido de funciones.

Ejemplo ▸ La siguiente gráfica representa un trayecto en bici.



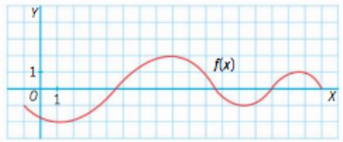
La gráfica representa una función en la que la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente es la distancia recorrida.

- El dominio de la función son los números del intervalo [0, 20].
- El recorrido son los números del intervalo [0, 5].

smSaviadigital.com
PRACTICA Estudia el dominio y recorrido de funciones.

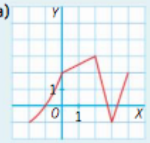
ACTIVIDADES

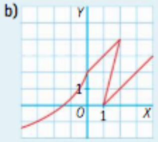
11. Indica el dominio y el recorrido de la función $f(x)$.



ACTIVIDAD RESUELTA

12. Indica si las siguientes gráficas representan una función. En caso afirmativo indica su dominio y recorrido.

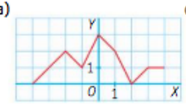
a) 

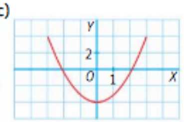
b) 

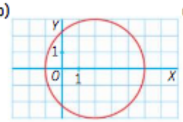
a) Es una función, ya que a cada valor de x le corresponde un único valor de y. El dominio son los números del intervalo [−2, 4] y el recorrido, [−1, 3].

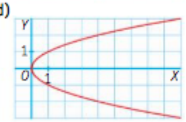
b) No es una función, ya que a algunos valores de x les corresponde más de un valor de y. Por ejemplo, a $x = 2$ le corresponden $y = 1$ e $y = 4$.

13. Indica si las siguientes gráficas representan una función. En caso afirmativo indica su dominio y recorrido.

a) 

c) 

b) 

d) 

14. Un comerciante tiene una tabla que le ayuda a calcular el precio de los kilogramos de manzanas que vende.

Manzanas (kg)	1	2	3	5	6
Precio (€)	2,5	5	7,5	12,5	15

a) ¿La relación entre la cantidad de fruta vendida y el beneficio obtenido es una función?

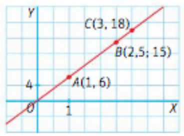
b) Representa gráficamente los datos de la tabla e indica su dominio y recorrido si el máximo valor que toma la variable independiente es 6.

5 Estudio gráfico de funciones

A partir de la expresión algebraica de una función se puede construir la tabla y su gráfica.

Ejemplo ▸ La tabla y la gráfica que representan la función $y = 6x$ son:

Lado (x)	Perímetro ($y = 6x$)	(x, $f(x)$)
1	$y = 6 \cdot 1 = 6$	(1, 6)
2,5	$y = 6 \cdot 2{,}5 = 15$	(2,5; 15)
3	$y = 6 \cdot 3 = 18$	(3, 18)



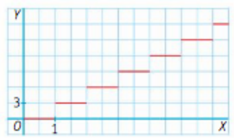
La **gráfica de una función** es la representación en los ejes de coordenadas de los puntos de la forma **(x, y)**, donde **$y = f(x)$**.

Continuidad

Ejemplo ▸ En un aparcamiento se cobra de forma proporcional al tiempo de estancia, a razón de 2 € por hora. En otro aparcamiento no cobran la primera hora, y a partir de ese momento el precio es de 3 € por hora o fracción.

Las gráficas de las funciones que relacionan el tiempo y el coste son las siguientes.

No presenta cortes ni saltos y se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Es una función **continua** en su dominio.



La función no es continua, ya que presenta saltos y no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Es una función **discontinua**.

- Una **función es continua** en un intervalo si su gráfica no presenta saltos.
- Una **función es discontinua** si presenta saltos para algún valor de la variable independiente. Los puntos en los que una función presenta saltos se llaman **discontinuidades**.

Puntos de corte con los ejes

Para conocer y representar mejor la gráfica de una función, resulta muy útil hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

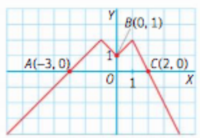
- Los **puntos de corte con el eje X** tienen la coordenada y igual a cero: **(x, 0)**.
- Los **puntos de corte con el eje Y** tienen la coordenada x igual a cero: **(0, y)**.

Ejemplo ▸ Indica los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la izquierda.

- Puntos de corte con el eje X: $A(-3, 0)$ y $C(2, 0)$
- Puntos de corte con el eje Y: $B(0, 1)$

Ten en cuenta

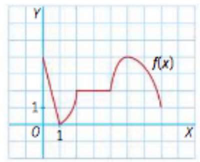
Las gráficas se estudian de izquierda a derecha, en el sentido creciente de la variable independiente.



Crecimiento y decrecimiento

- Una **función es creciente** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente aumenta el valor de la variable dependiente.
- Una **función es decreciente** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la variable dependiente.
- Una **función es constante** en un intervalo si al aumentar la variable independiente el valor de la variable dependiente toma siempre el mismo valor.

Ejemplo ▸ Observa la gráfica de esta función $f(x)$.



- Desde $x = 0$ a $x = 1$ la función es decreciente.
- Desde $x = 1$ a $x = 2$ la función es creciente.
- Desde $x = 2$ a $x = 4$ la función es constante.
- Desde $x = 4$ a $x = 5$ la función es creciente.
- Desde $x = 5$ a $x = 7$ la función es decreciente.

smSaviadigital.com
PRACTICA Asocia a cada función sus propiedades.

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y estudia gráficamente varias funciones.

Máximos y mínimos

- Una función continua presenta un **máximo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función crece y a la derecha decrece.
- Una función continua presenta un **mínimo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función decrece y a la derecha crece.

Ejemplo ▸ Los máximos y mínimos de la función $f(x)$ son:

- Máximo: $P(5, 4)$
- Mínimo: $P(1, 0)$

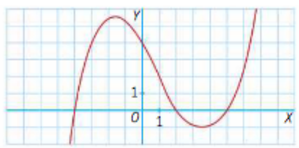
Ten en cuenta

- Si una función tiene más de un máximo, llamamos **máximo absoluto** a aquel que tiene mayor ordenada y **máximos relativos**, al resto.
- Si una función tiene más de un mínimo, llamamos **mínimo absoluto** a aquel que tiene menor ordenada y **mínimos relativos**, al resto.

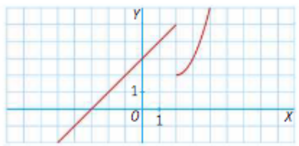
ACTIVIDADES

15. Indica si las funciones son continuas o discontinuas e indica, en su caso, los puntos de discontinuidad. Halla los puntos de corte con los ejes de cada función.

a)

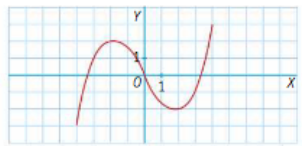


b)

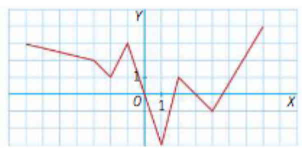


16. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de las siguientes funciones y encuentra los máximos y mínimos.

a)



b)



6 Funciones lineales. Pendiente y ordenada en el origen

Una **función lineal** es de la forma $y = mx + n$, donde m y n son números cualesquiera.

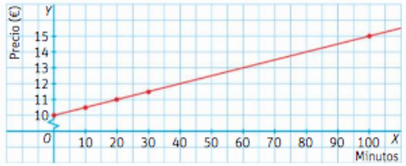
- La gráfica de una función lineal es una **línea recta**.
- m es la **pendiente** de la recta e indica su inclinación.
- n es la **ordenada en el origen** e indica el punto de corte con el eje Y.

Ejemplo ▸ Javier ha contratado una oferta de teléfono pagando una cuota fija de 10 € y una cuota por minuto de llamada de 0,05 €.

La fórmula que relaciona los minutos hablados y el total a pagar es $y = 10 + 0{,}05x$.

Minutos (x)	0	10	20	30	...	100
Precio (y)	10	10,5	11	11,5	...	15

Al representar los puntos de la tabla, se observa que están alineados.

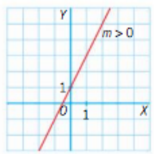


- El coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta, $m = 0{,}05$.
- La ordenada en el origen es $n = 10$, que coincide con la ordenada del punto de corte de la función con el eje Y, (0, 10).

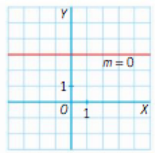
MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y trabaja las funciones lineales.

Pendiente de una recta

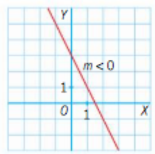
La pendiente mide la inclinación de la recta. Dependiendo del signo de m, se pueden dar tres situaciones.



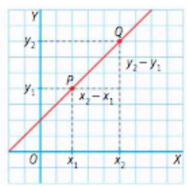
La pendiente es positiva.
La recta es creciente.



La pendiente es 0.
La recta es constante.



La pendiente es negativa.
La recta es decreciente.



Dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, se define la **pendiente de la recta** que pasa por P y Q como: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ejemplo ▸ Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B.

$A(2, 1)$ y $B(5, -5)$: $m = \dfrac{-5-1}{5-2} = \dfrac{-6}{3} = -2 < 0 \Rightarrow$ La recta es decreciente.

Función de proporcionalidad directa

Si la ordenada en el origen es nula, $n = 0$, la función es $y = mx$.

smSaviadigital.com
PRACTICA Relaciona cada pregunta con lo que corresponda.

Las funciones $y = mx$ se llaman funciones de **proporcionalidad directa**.

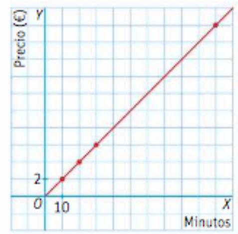
- La pendiente $m \neq 0$ se llama **constante de proporcionalidad**.
- Su gráfica es una recta que pasa por el origen.

Ejemplo ▸ Tamara tiene otra oferta telefónica en la que paga 0,20 € por cada minuto de llamada sin tener que pagar una cuota fija.

La relación que indica el precio a pagar cada mes, en función de los minutos hablados, es $y = 0{,}20x$.

Minutos (x)	0	10	20	30	...	100
Precio (y)	0	2	4	6	...	20

- Son magnitudes directamente proporcionales. El coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta y constante de proporcionalidad, $m = 0{,}20$.
- La gráfica de la función es una recta que pasa por el origen (0, 0).



ACTIVIDADES

17. Representa las funciones a partir de las tablas y comprueba si se trata de una función lineal.

a)

x	−2	−1	0	1	2	3
y	4	3	2	1	0	−1

b)

x	−2	−1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4	9

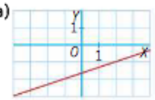
18. Representa en unos ejes de coordenadas la función $y = 3x - 5$ y comprueba que es una función lineal.

19. Sin representarlas, indica si las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes.

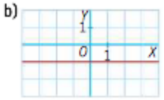
a) $f(x) = 10x - 43$
b) $f(x) = x + 13$
c) $f(x) = -43$
d) $f(x) = -8x + 15$
e) $f(x) = 0$
f) $f(x) = 15 - 8x$

20. Indica el signo de la pendiente y de la ordenada en el origen en cada gráfica.

a)



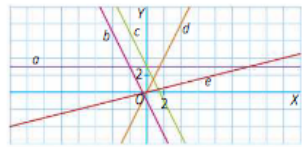
b)



21. Calcula, en cada caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos indicados.

a) $A(5, 1)$ y $B(7, -7)$
b) $A(-1,3)$ y $B(4, 23)$
c) $A(1, 1)$ y $B(-3,9)$
d) $A(0,4)$ y $B(4, -32)$

22. Asocia cada una de las rectas con la ecuación correspondiente.



A. $y = -2x + 3$
B. $y = 3$
C. $y = 2x$
D. $y = \dfrac{1}{4}x$
E. $y = -2x - 1$

23. Dibuja una recta en cada caso que cumpla las condiciones pedidas.

a) Recta creciente, ordenada en el origen positiva.
b) Función de proporcionalidad directa, decreciente.
c) Función constante que pasa por $A(0, 3)$.
d) Función lineal creciente que pasa por $A(0, 4)$.

7 Ecuación de la recta. Rectas paralelas y secantes

Ten en cuenta

Utilizamos consonantes minúsculas para nombrar las rectas:

$r: y = 2x$ $s: y = -2x$

Una recta de la forma $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n es la ordenada en el origen está expresada en **forma explícita**.

Si se conocen m y n, se tiene la ecuación de la recta. Si no, es necesario calcularlos a partir de los datos disponibles.

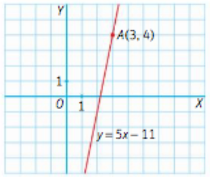
Ejemplo ▸ Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 4)$ y cuya pendiente es $m = 5$.

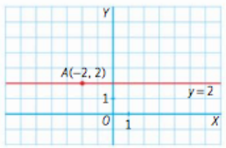
Como la pendiente es $m = 5$, la ecuación de la recta será $y = 5x + n$.

Como pasa por el punto $A(3, 4)$, la ecuación debe cumplirse para $x = 3$ e $y = 4$. Sustituimos estos valores en la ecuación de la recta y se despeja n:

$$4 = 5 \cdot 3 + n \Rightarrow 4 = 15 + n \Rightarrow n = 4 - 15 = -11$$

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = 5x - 11$.





Ejemplo ▸ Calcula la ecuación de una recta que pasa por $A(-2, 2)$ y cuya ordenada en el origen es $n = 2$.

En este caso, $n = 2$. La ecuación de la recta será $y = mx + 2$.

Como pasa por $A(-2, 2)$, hallamos m sustituyendo el punto en la ecuación:

$$y = mx + 2 \Rightarrow 2 = -2m + 2 \Rightarrow m = 0$$

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = 2$, que es horizontal.

Ejemplo ▸ Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-4, 3)$ y $B(5, 10)$.

Como se conocen dos puntos de la recta, podemos encontrar su ecuación de dos maneras:

- A partir de la expresión de la pendiente y sustituyendo en la ecuación explícita:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 3}{5 - (-4)} = \frac{7}{9} \Rightarrow y = \frac{7}{9}x + n$$

Calculamos n sustituyendo uno de los puntos, por ejemplo, $B(5, 10)$:

$$y = \frac{7}{9}x + n \Rightarrow 10 = \frac{7}{9} \cdot 5 + n \Rightarrow 10 - \frac{35}{9} = n \Rightarrow n = \frac{55}{9}$$

Por tanto, la ecuación de la recta es:

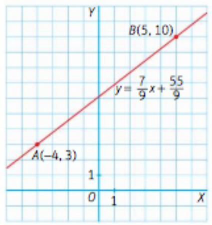
$$y = \frac{7}{9}x + \frac{55}{9}$$

- Sustituyendo cada punto en la ecuación $y = mx + n$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= m \cdot (-4) + n \\ 10 &= m \cdot (5) + n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 &= -4m + n \\ 10 &= 5m + n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 4m = 10 - 5m \Rightarrow m = \frac{7}{9} \text{ y } n = \frac{55}{9}$$

La ecuación es $y = \frac{7}{9}x + \frac{55}{9}$.



MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y analiza la ecuación de la recta.

Rectas paralelas y secantes

- Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma inclinación, es decir, la **misma pendiente**. No tienen ningún punto en común.
- Dos rectas son **coincidentes** si tienen la **misma pendiente** y la **misma ordenada en el origen**. Todos sus puntos son comunes.
- Dos rectas son **secantes**, si tienen **distinta pendiente**. Tienen un único punto en común.

Ten en cuenta

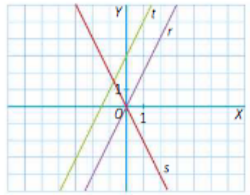
- Una recta del tipo $y = 2$ es paralela al eje X y representa una función.
- Una recta de ecuación $x = 2$ es paralela al eje Y, pero no representa una función.

Ejemplo ▸ Estudia las posiciones relativas de las siguientes rectas y comprueba los resultados obtenidos gráficamente:

$r: y = 2x$ $s: y = -2x$ $t: y = 2x + 3$

- Las rectas r y t son paralelas, ya que tienen la misma pendiente, $m = 2$.
- Las rectas s y t son secantes pues sus pendientes son distintas.
- Las rectas s y r son secantes pues sus pendientes son distintas.

Para comprobarlo, representamos las rectas en los mismos ejes coordenados.



smSaviadigital.com

PRACTICA Comprueba lo que has aprendido sobre funciones lineales y rectas.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD RESUELTA

24. **Estudia si los puntos $A(3, 11)$ y $B(-4, -27)$ pertenecen a la recta $y = 3x - 15$.**

Un punto pertenece a una recta si verifica su ecuación. Sustituimos las coordenadas de los puntos en la ecuación:

$11 \neq 3 \cdot 3 - 15 \Rightarrow A(3, 11)$ no pertenece a la recta.

$-27 = 3 \cdot (-4) - 15 \Rightarrow B(-4, -27)$ pertenece a la recta.

25. Estudia si los puntos $A(2, 7)$ y $B(11, -10)$ pertenecen a la recta $y = 4x - 1$.

26. Calcula la ecuación de cada recta a partir de los siguientes datos.

a) Pasa por $A(1, 4)$ y $B(5, -4)$.

b) Su pendiente es 6 y pasa por $(2, -5)$.

c) Pasa por $(-1, -4)$ y su ordenada en el origen es $\frac{2}{3}$.

27. Sabemos que una recta tiene por pendiente $\frac{1}{3}$ y su ordenada en el origen es $\frac{-5}{4}$. ¿De qué recta se trata?

28. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas.

a) $\begin{cases} r: y = 3x - 2 \\ s: y = -3x - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: y = \frac{6}{9}x + 6 \\ s: y = \frac{26}{39}x + \frac{3}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: y = 7x - 2 \\ s: y = 7x + 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} r: y = \frac{10}{15}x + 6 \\ s: y = \frac{-24}{36}x + \frac{30}{5} \end{cases}$

ACTIVIDAD RESUELTA

29. **Halla la ecuación de la recta s paralela a $y = 2x - 5$ que pasa por $A(4, 0)$.**

Si son paralelas, tendrán la misma pendiente, $m = 2$.

La ecuación será $y = 2x + n$, y el valor de n lo hallamos sustituyendo A.

$$0 = 2 \cdot 4 + n \Rightarrow n = -8 \Rightarrow y = 2x - 8$$

30. Halla la ecuación de la recta en cada caso.

a) Paralela a $y = -7x + 11$ por $A(-3, 15)$

b) Paralela a $y = 3x - 6$ por $A\left(\frac{2}{3}, -1\right)$

8 Otros tipos de funciones

Función de proporcionalidad inversa

Las funciones que relacionan dos magnitudes inversamente proporcionales se llaman **funciones de proporcionalidad inversa**.

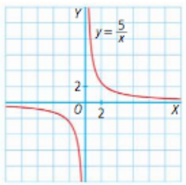
$y = \frac{k}{x}$, donde k es la **constante de proporcionalidad inversa** y $x \neq 0$.

Las gráficas de las funciones de proporcionalidad inversa se denominan **hipérbolas**. Todas las hipérbolas tienen unas características comunes:

- Para valores de x positivos y cada vez mayores, la gráfica se va acercando al eje X, sin llegar a cortarlo. Lo mismo ocurre para valores de x negativos y cada vez menores.
- Si x toma valores cercanos a 0, la función se acerca al eje Y sin llegar a cortarlo.
- No tiene puntos de corte con el eje Y ni con el eje X.
- La función es creciente o decreciente dependiendo del signo de la constante de proporcionalidad inversa.
  - Si $k > 0$, la función es decreciente.
  - Si $k < 0$, la función es creciente.

smSaviadigital.com

PRACTICA Diferencia las funciones de proporcionalidad inversa.



Ejemplo ▸ Analiza las características de la función $y = \frac{5}{x}$ a partir de su gráfica.

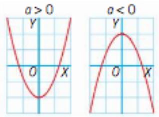
- La gráfica de la función es una hipérbola.
- No corta al eje X ni al eje Y, pero se va aproximando a estos sin llegar a cortarlos.
- Es decreciente en todo su dominio porque $k = 5 > 0$.

Función cuadrática

La ecuación de una **función cuadrática** es $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números cualesquiera y $a \neq 0$.

Las gráficas de las funciones cuadráticas se denominan **parábolas**. Todas las parábolas tienen unas características comunes:

- Tienen un máximo o mínimo absoluto, que se llama vértice de la parábola.
- Tienen un eje de simetría vertical, que pasa por el **vértice**.
- La abertura de sus ramas depende del signo de a:
  - Si $a > 0$, las ramas se abren hacia arriba.
  - Si $a < 0$, las ramas se abren hacia abajo.
- Tienen un punto de corte con el eje Y, y pueden tener dos, uno o ningún punto de corte con el eje X.

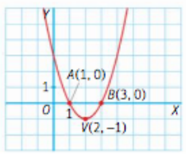


MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y estudia funciones de proporcionalidad inversa y cuadráticas.

Ejemplo ▸ Analiza las características de la función cuadráticas $y = x^2 - 4x + 3$.

- La gráfica de la función tiene un mínimo en $V(2, -1)$.
- Como $a > 0$, las ramas de la parábola se abren hacia arriba.
- Es simétrica respecto a la recta vertical que pasa por el mínimo.
- La función corta al eje de abscisas en los puntos $A(1, 0)$ y $B(3,0)$ y al eje de ordenadas en el punto $C(0, 3)$.



ACTIVIDADES

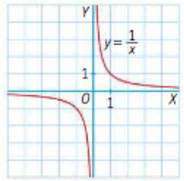
31. Dos magnitudes x e y son inversamente proporcionales, y el valor de su constante k de proporcionalidad inversa es 2.

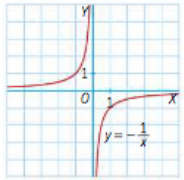
a) Escribe la ecuación de la función.

b) Construye una tabla de valores, dando a x cinco valores positivos y cinco valores negativos.

c) A partir de los datos de la tabla esboza la gráfica de la función.

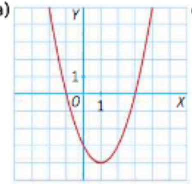
32. Elabora una tabla de valores para la función $y = \frac{1}{x}$ y otra para la función $y = \frac{-1}{x}$, dando a la variable independiente valores positivos y negativos, y observa sus gráficas.

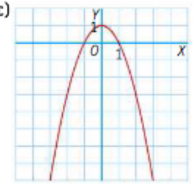


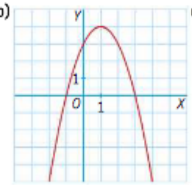


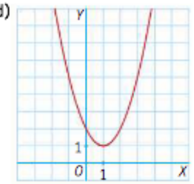
¿Qué relación observas entre las dos funciones?

33. Escribe las coordenadas del vértice y de los puntos de corte con los ejes de cada parábola.

a)


c)


b)


d)


34. Indica hacia dónde se abren las ramas de las siguientes parábolas, sin representarlas.

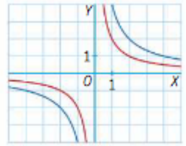
a) $y = 3x^2 - 5x$

b) $y = -2x^2 + 7x + 1$

c) $y = 3x - 5x^2 + 2$

d) $y = 6 - x - x^2$

35. En la gráfica aparecen representadas las funciones $y = \frac{2}{x}$ e $y = \frac{4}{x}$.



a) Identifica qué gráfica corresponde a cada una de las funciones. Para ello, busca un punto de cada una de ellas y comprueba qué ecuación verifica.

b) A la vista de las gráficas, cuando el valor de la constante de proporcionalidad inversa es mayor, ¿la hipérbola está más separada o más cerca de los ejes?

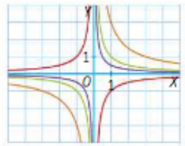
36. Asigna a cada ecuación su gráfica.

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = \frac{3}{x}$

C. $y = \frac{-1}{x}$

D. $y = \frac{0,5}{x}$



ACTIVIDAD RESUELTA

37. Halla los puntos de corte con los ejes de la parábola de ecuación $y = x^2 - 9$.

La parábola corta al eje Y cuando $x = 0$.

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 9 = -9 \Rightarrow \text{Punto } (0, -9)$$

Cortará al eje X si para algún valor de x el valor de y es 0, es decir, si $0 = x^2 - 9$ tiene solución.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte con el eje X, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$.

38. Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 - 5x + 4$

b) $y = x^2 - 4x + 4$

c) $y = x^2 + 4$

d) $y = -2x^2 + 5x - 3$

39. Haz una tabla de valores de la función $y = x^2 - 2x - 3$, desde $x = -4$ hasta $x = 4$. A la vista de la tabla, ¿puedes indicar los puntos de corte y el vértice de la parábola? Dibuja su gráfica de forma aproximada.

9 Situaciones reales y gráficas

PON EN VALOR

El agua es un recurso natural valioso que debemos cuidar. Por ello se desarrollan de manera habitual campañas de sensibilización y concienciación para promover su uso adecuado y evitar que se convierta en un bien escaso.

Entra en smSaviadigital.com y elabora un mural que recoja medidas de ahorro y conservación del agua.

Ejemplo ▸ El lavavajillas de casa de Juan, que pone en funcionamiento una vez al día, consume 22 L de agua por cada lavado. En casa de Marta friegan los platos a mano dos veces al día habitualmente y tienen un grifo de bajo consumo que vierte una media de 10 L de agua por cada lavado.

La expresión de las funciones que indica el consumo de agua (y) por día (x) al fregar en cada casa son:

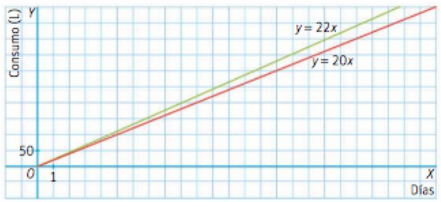
$y = 22x$ $\qquad$ $y = 2 \cdot 10x = 20x$

A partir de las funciones podemos construir la tabla de datos:

Días	1	7	14	...
Consumo (L)	22	154	308	...

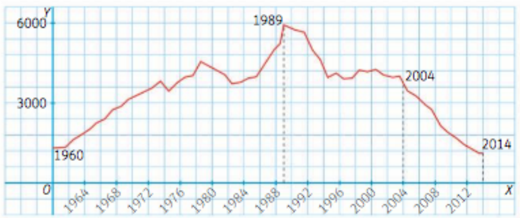
Días	1	7	14	...
Consumo (L)	20	140	280	...

Con esos datos, podemos construir las gráficas de las dos funciones sobre los mismos ejes y así poder comparar el consumo de agua que hay en cada hogar y lo que supone utilizar un lavavajillas en comparación con un grifo, por ejemplo, a lo largo de un mes.



En otros casos, no resulta sencillo determinar la función a partir de la gráfica. A pesar de esto, se puede obtener bastante información analizándola.

Ejemplo ▸ Los accidentes de tráfico son una de las tres mayores causas de mortalidad en nuestro país. En la siguiente gráfica aparece el número de víctimas mortales en accidentes de tráfico en España durante varios años.



La gráfica no representa una función lineal, de proporcionalidad inversa ni cuadrática, pero permite extraer algunos datos:

- Entre 1960 y 1989, se observa un aumento del número de víctimas, hasta llegar a un máximo. Podría estar relacionado con el aumento del número de vehículos.
- A partir de 1989, comienza a bajar el número de víctimas, posiblemente debido a campañas de concienciación y cambios normativos (más controles, sanciones...).

172 UNIDAD 8

ACTIVIDADES

40. **En un concurso se obtienen 100 € si se pasa la primera fase y 150 € por cada pregunta acertada en la segunda fase.**

a) Realiza una tabla en la que se relacione el número de aciertos en la segunda fase con la cantidad total obtenida. Calcula al menos 6 valores.

b) Representa gráficamente los datos de la tabla anterior. Utiliza en el eje Y una escala que vaya de 50 € en 50 €.

c) ¿Qué tipo de función corresponde a esa gráfica?

d) Obtén la ecuación de la función. ¿Cuál fue el número de aciertos de un concursante que se llevó un premio de 2650 €?

41. **Unos obreros están colocando postes a lo largo de una carretera, con una separación de 5 m entre cada poste y el siguiente.**

a) Construye una tabla de valores en la que aparezca el número de postes que hay que colocar dependiendo de la longitud de la carretera.

b) Representa gráficamente los valores de la tabla. ¿Qué tipo de función se obtiene?

c) Escribe la ecuación de la función.

42. **Si se abre un grifo de forma que salgan 6 L de agua por minuto, tarda 35 minutos en llenar una bañera.**

a) Calcula cuánto tardaría en llenarse si se abre el grifo para que vierta 10 L por minuto.

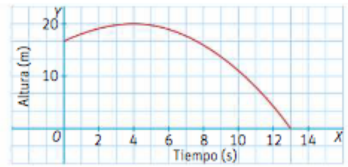
b) Completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

Caudal (L/min)	1	2	3	6	10	12
Tiempo (min)	●	●	●	●	●	●

c) ¿Qué tipo de función es?

d) Esboza en la gráfica con los datos, colocando el tiempo en el eje X.

43. **Una flecha sigue una trayectoria parabólica. La gráfica que describe la altura de la flecha en función del tiempo es la siguiente.**



a) ¿Cuál es la altura desde la que se lanza la flecha?

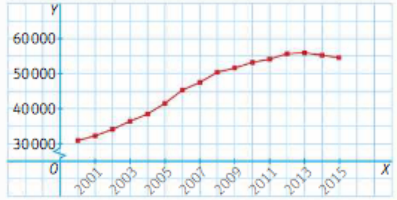
b) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

d) ¿Hay algún momento en el que esté exactamente a 10 m de altura?

e) ¿Cuánto tiempo está subiendo?

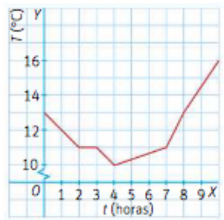
44. **En la siguiente gráfica aparece la evolución de la población de Arganda del Rey entre los años 2000 y 2015.**



a) Explica brevemente la evolución de la población de Arganda del Rey entre esas fechas.

b) En 1998 había solo 325 extranjeros censados en Arganda. En 2015 había, según los datos del Ayuntamiento, un 22,26 % de población inmigrante. A partir de la gráfica, ¿cuántos inmigrantes vivían en Arganda del Rey en 2015, aproximadamente?

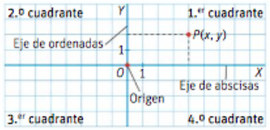
45. **Santiago ha medido la temperatura en su jardín cada hora. Describe la evolución de la temperatura en el jardín a partir de la gráfica.**



173

Organiza tus ideas

EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS



Coordenadas cartesianas de un punto: (x, y)

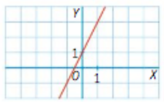
- x representa la posición sobre el eje horizontal y se denomina **abscisa** del punto.
- y representa la posición sobre el eje vertical y se denomina **ordenada** del punto.
- Las coordenadas del **origen** O son $(0, 0)$.

FÓRMULAS, TABLAS Y GRÁFICAS

Tabla

x	-3	-2	0	1	2
y	-5	-3	1	3	5

Gráfica



Fórmula

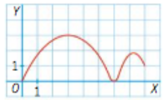
$y = 2x + 1$

CORRESPONDENCIAS Y FUNCIONES

Función

Una **función** es una **correspondencia** entre dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un único valor del conjunto final.

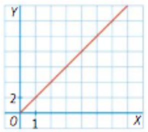
- Los elementos del conjunto inicial forman la **variable independiente**.
- Los elementos del conjunto final forman la **variable dependiente**.



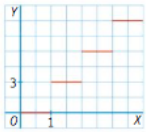
Dominio: $[0, 8]$; Recorrido: $[0, 3]$

ESTUDIO GRÁFICO DE FUNCIONES

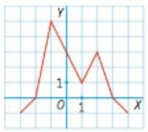
Continua



Discontinua



Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos



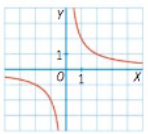
Creciente en $(-3, -1)$ y $(1, 2)$
Decreciente en $(-1, 1)$ y $(2, 4)$
Máximo relativo en $x = 2$
Máximo absoluto en $x = -1$
Mínimo relativo en $x = 1$
Cortes con los ejes: $(-2, 0)$ y $(3, 0)$ con el eje X y $(0, 3)$ con el eje Y

FUNCIONES LINEALES

Una **función lineal** es de la forma $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen.
Si $n = 0$ la **función** es **de proporcionalidad directa**: $y = mx$.

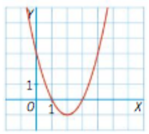
FUNCIÓN INVERSA Y FUNCIÓN CUADRÁTICA

Función inversa



$x \cdot y = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$

Función cuadrática



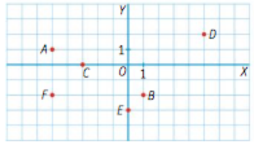
$y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números cualesquiera y $a \neq 0$.

Actividades

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Coordenadas cartesianas. Fórmulas, tablas y gráficas

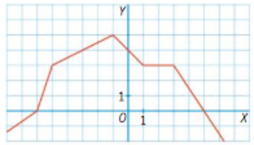
46. Escribe las coordenadas de los puntos representados en la gráfica.



47. Representa los siguientes puntos e indica en qué cuadrante se encuentra cada uno de ellos.

a) $A(-2, 5)$
b) $B(3, -1)$
c) $C(-3, -4)$
d) $D(4, 0)$
e) $E(0, -2)$
f) $F(4, 1)$

48. Escribe las coordenadas de cinco puntos que pertenezcan a la gráfica.



49. La fórmula de una función es $y = x^3 - 1$.

a) Completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

x	-2	-1	0	1	2
y	●	●	●	●	●

b) Dibuja los puntos de la tabla. ¿Están alineados?

50. Obtén la fórmula que permite obtener el perímetro de un cuadrado a partir de la longitud del lado.

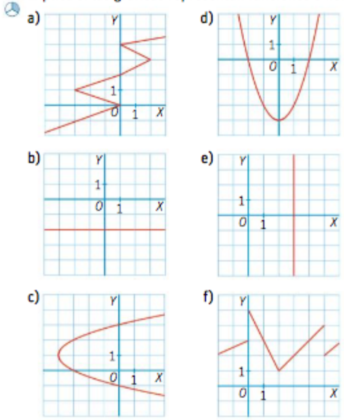
a) Construye una tabla de valores. ¿Tiene sentido dar valores negativos? ¿Y fraccionarios?
b) Representa la gráfica.

Correspondencias. Funciones

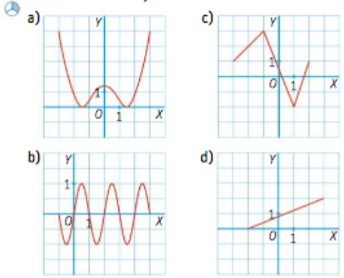
51. Justifica en tu cuaderno si las siguientes correspondencias son funciones.

a) A cada número natural se le asigna la suma de sus cifras.
b) A cada número natural se le asignan sus divisores.
c) Al DNI de cada persona se le asigna su número de móvil.
d) A la edad de cada persona se le asigna su peso.

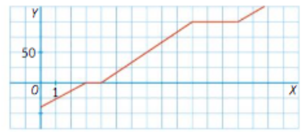
52. Explica si las gráficas representan funciones o no.



53. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones.



54. Se ha elaborado una gráfica con los datos que se han recogido al aplicar calor a un bloque de hielo hasta que se evapora completamente.

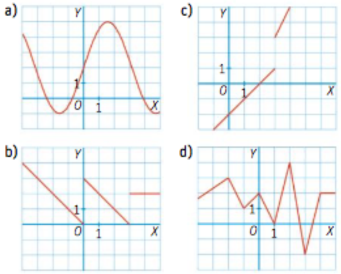


a) Indica en qué eje se representa la temperatura (°C) y el tiempo (minutos). ¿Cuál es la variable dependiente?
b) Antes de cambiar completamente de estado, permanece un tiempo constante. ¿Cuándo se producen dichas fases?

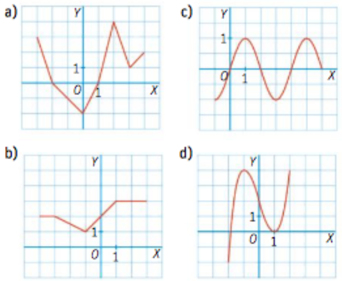
Actividades

Estudio gráfico de funciones

55. Explica si las siguientes funciones son continuas. En las que no lo sean, indica los puntos de discontinuidad.



56. Indica los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de cada una de las siguientes funciones.



57. Dibuja una función cuyo dominio sea $(-2, 4)$ y que tenga una discontinuidad.

Funciones lineales. Ecuación de la recta

58. Estudia si el punto $A(5, -8)$ y el punto $B(-3, -7)$ pertenecen a cada una de las siguientes rectas.

a) $y = 2x - 2$ c) $y = 2 - 2x$

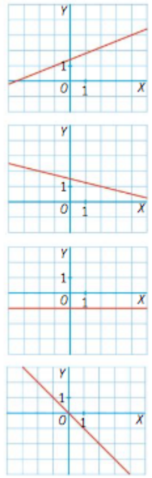
b) $y = 2x - 1$ d) $y = \frac{-59}{8} - \frac{x}{8}$

59. Indica la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de estas funciones y represéntalas.

a) $y = 2x - 5$ c) $y = 4 - 3x$

b) $y = -2x - 3$ d) $y = \frac{1}{2}x - 1$

60. Asocia cada gráfica con la opción correspondiente.



$m = 0$ y $n < 0$

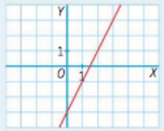
$m < 0$ y $n > 0$

$m > 0$ y $n > 0$

$m < 0$ y $n = 0$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

61. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de la función a partir de la gráfica.

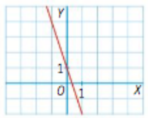


La ordenada en el origen es el valor de la ordenada del punto de corte de la recta con el eje Y: $n = -3$.

Como la recta pasa por $(0, -3)$ y $(2, 1)$, calculamos su pendiente a partir de ellos.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

62. Calcula la pendiente y la ordenada de la función a partir de la gráfica.



63. Calcula la función a partir de los datos indicados.

a) Su pendiente es 3 y su ordenada en el origen es -8.

b) Su pendiente es -1 y pasa por el punto $(0, 1)$.

c) Su pendiente es 4 y pasa por $(-6, 12)$.

d) Pasa por los puntos $(-5, 3)$ y $(0, -7)$.

e) Pasa por los puntos $(1, -3)$ y $(4, 18)$.

64. Halla la ecuación de la función de proporcionalidad directa cuya gráfica es paralela a $y = -3x + 5$.

65. Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 5 - 3x$ que cumpla la condición pedida en cada caso.

a) Su ordenada en el origen es -3.

b) Pasa por el punto $(0, 7)$.

c) Pasa por el punto $(7, -4)$.

d) Tiene la misma ordenada en el origen que $y = 6 - 4x$.

ACTIVIDAD **RESUELTA**

66. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 5)$ y $(7, 20)$ utilizando un sistema de ecuaciones para encontrarla.

La ecuación de la recta es:

$$y = mx + n$$

Sustituimos las coordenadas de ambos puntos obteniendo el sistema:

$$\begin{cases} 5 = m \cdot 2 + n \\ 20 = m \cdot 7 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 5 \\ 7m + n = 20 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de reducción, por ejemplo:

$$\begin{cases} 2m + n = 5 \\ 7m + n = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2m - n = -5 \\ 7m + n = 20 \end{cases} \Rightarrow 5m = 15 \Rightarrow m = 3$$

$$2 \cdot 3 + n = 5 \Rightarrow n = 5 - 6 = -1$$

La ecuación es $y = 3x - 1$.

Se comprueba que se verifica para ambos puntos.

$$3 \cdot 2 - 1 = 5 \Rightarrow \text{Se cumple}$$
$$3 \cdot 7 - 1 = 20 \Rightarrow \text{Se cumple}$$

67. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados, de dos maneras distintas.

a) $(-2, 2)$ y $(2, 14)$ c) $(0, 4)$ y $(5, -6)$

b) $(3, -7)$ y $(7, 40)$ d) $(1, 3)$ y $(3, 12)$

68. Dibuja una función que cumpla las condiciones pedidas en cada caso.

a) Es una función creciente y de proporcionalidad directa.

b) Es una función lineal y decreciente.

c) Es una función lineal, creciente y pasa por $A(1, -7)$.

69. Dibuja en los mismos ejes cartesianos las rectas $y = 4x$ e $y = \frac{1}{4}x$. A continuación, dibuja la recta $y = x$. ¿Cómo son las dos primeras rectas respecto de la tercera?

ACTIVIDAD **RESUELTA**

70. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas sin representarlas.

$$r: 2x - 3y = 4 \qquad s: y + 1 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

Para estudiar su posición relativa, operamos en las dos ecuaciones y despejamos y, para escribirlas en forma explícita:

$$2x - 4 = 3y \Rightarrow \frac{2x-4}{3} = y \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$y = -1 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

Las dos rectas tienen la misma pendiente, $\frac{2}{3}$, por lo que son paralelas.

71. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas sin representarlas gráficamente sobre un mismo plano cartesiano.

a) $\begin{cases} r: y - 4 = -8(x+2) \\ s: \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-16} \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: y = 3(x+2) - 5x \\ s: y - 1 = \frac{9x-7}{3} \end{cases}$

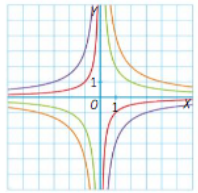
Función inversa y función cuadrática

72. Indica cuáles de las siguientes funciones son inversas.

a) $y = \frac{1}{x}$ c) $10y = x$

b) $y = \frac{x}{2}$ d) $y = -\frac{1}{5}x$

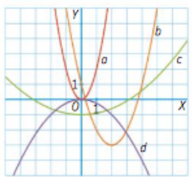
73. Relaciona cada ecuación con la gráfica del plano cartesiano correspondiente.



A. $y = \frac{2}{x}$ B. $y = \frac{-1}{x}$ C. $y = \frac{4}{x}$ D. $y = \frac{-3}{x}$

Actividades

74. **Asocia cada función con su gráfica, teniendo en cuenta su forma y los puntos de corte con los ejes.**



A. $y=0{,}1x^2-1$ C. $y=x^2-4x+1$

B. $y=2x^2$ D. $y=-\frac{1}{4}x^2$

Actividades de síntesis

75. **¿Una función lineal es continua? ¿Y una función cuadrática? ¿Y una función de proporcionalidad inversa? Explica el porqué en cada caso.**

76. **Al calcular la ecuación de la recta que pasa por (2, 3) y (5, 18), se toman los puntos en ese orden. ¿Se obtendrá la misma ecuación de la recta si se toman los puntos en el orden contrario?**

77. **Calcula la ecuación de cada recta a partir de los datos indicados.**

a) La ordenada en el origen es 4 y pasa por (1, 2).

b) Pasa por $A(2,-3)$ y $B(4,-11)$.

c) Es paralela a $y=-2x-5$ por $A(4, 1)$.

78. **Estudia si los puntos $A(2, 5)$, $B(4, 13)$ y $C(74{,}293)$ están alineados, hallando la ecuación de la recta que pasa por A y B y comprobando si C pertenece a la misma.**

79. **El producto de dos números es 12.**

a) Calcula la función que permite obtener un número a partir del otro.

b) ¿De qué tipo es la función? Esboza su gráfica.

80. **Una parábola tiene el vértice en (2, 5) y corta al eje X en (3, 0).**

a) Representa ambos puntos. ¿Qué forma tiene la parábola?

b) Halla el otro punto de corte con el eje X.

81. **Halla la ecuación de la recta paralela a $y=-3x+6$ y con ordenada en el origen igual a la de la recta $y=-x-2$.**

82. **Si se conocen dos puntos de una parábola que tengan la misma ordenada, se puede calcular la abscisa de su vértice, ya que es la media de las de esos dos puntos. La parábola $y=x^2-6x+5$ corta al eje X en (1, 0) y en (5, 0). ¿Cuáles serán las coordenadas de su vértice?**

PROBLEMAS PARA RESOLVER

83. **Julia realiza un cuestionario a sus alumnos en clase y por cada respuesta correcta les suma 0,1 puntos, hasta un máximo de 2 puntos.**

a) Construye la tabla de valores y calcula la fórmula de la función que relaciona las respuestas correctas con la puntuación obtenida.

b) ¿Cuál es el número máximo de respuestas que se pueden dar, si no se pueden sacar más de 2 puntos?

84. **Alquilar un coche cuesta 30 €, a lo que hay que sumarle 10 € por cada 100 km recorridos.**

a) Escribe la función que permite calcular el coste del alquiler en función de los kilómetros recorridos.

b) Representa la gráfica de la función.

85. **Un comercial cobra un sueldo fijo mensual de 600 €, más el 10 % de las ventas que realice.**

a) Escribe la función que permite calcular el salario mensual en relación con el dinero que han supuesto sus ventas.

b) ¿De qué tipo de función se trata?

c) Si el vendedor quiere ganar al menos 1000 €, ¿cuáles tienen que ser sus ventas?

d) El mes pasado ganó 1700 €. ¿Cuál fue el importe de sus ventas?

86. **Daniel tira una pelota a su primo Jesús por encima de una valla.**

a) ¿Desde qué altura lanzó la pelota?

b) ¿Jesús pudo cogerla antes de que cayera?

c) ¿A qué distancia estaban los dos?

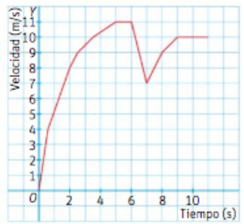
87. **Un biólogo tiene varios cultivos en su laboratorio. El aire acondicionado se estropeó, y el termómetro de la sala ha recogido los datos que aparecen en la gráfica.**

a) Describe los cambios de temperatura entre las 12 y las 21 horas.

b) ¿Cuál fue la temperatura máxima? ¿Y la mínima?

c) La alarma del laboratorio suena si la temperatura supera los 23 °C. ¿Cuánto tiempo estuvo sonando, aproximadamente?

88. **Después de cada entrenamiento, el entrenador de un corredor de 100 m lisos le muestra unas gráficas en las que se refleja su velocidad durante la carrera.**



a) ¿Qué ocurre en los primeros segundos de carrera?

b) ¿Cuánto tarda en alcanzar su velocidad máxima? ¿Cuál es esa velocidad?

c) Explica la gráfica a partir de los 6 s. ¿Qué crees que puede haber ocurrido?

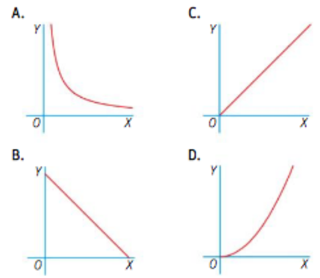
d) ¿Cuánto ha tardado en recorrer los 100 m?

89. **Varios amigos alquilan una casa rural por 300 €.**

Encuentra la función que relaciona el número de amigos y la cantidad que tendrá que pagar cada uno.

ACTIVIDADES PARA PENSAR MÁS

90. **¿Qué gráfica representa las dimensiones de un rectángulo de área igual a 12 cm²?**



91. **El punto de corte de la recta $y=3x-5$ y la recta $y=-4x+2$ es:**

A. $(-1, 2)$ B. $(-1,-2)$ C. $(1, 2)$ D. $(1,-2)$

92. **Si el punto $(x,-4)$ está en la recta que pasa por los puntos (0, 8) y $(-4, 0)$, el valor de x es:**

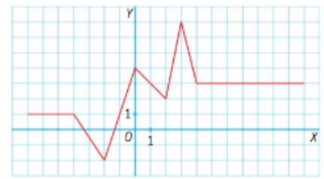
A. -2 B. 2 C. -8 D. -6

93. **Las rectas $y=4x-4a$ e $y=0{,}25x+b$ se cortan en el punto (1, 2). ¿Cuál es el valor de $a+b$?**

A. 0,5 B. 1,75 C. 2,25 D. 2,5

Encuentra el error

94. **Pablo está describiendo una función a partir de su gráfica, pero ha cometido algunos errores. Encuentra los errores en la descripción y corrígelos.**



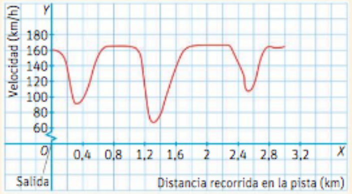
- El dominio va de -6 a 7.
- El recorrido es $[-2, 7]$.
- Corta a los ejes en tres puntos.
- Decrece de -4 a -2 y crece de -2 a 4.
- Tiene dos extremos absolutos y dos extremos relativos.
- Tiene un máximo absoluto en 7.
- El mínimo absoluto es $(-2,-2)$.

Ponte a prueba

PROBLEMA RESUELTO

Velocidad de un coche de carreras

El siguiente gráfico muestra cómo varía la velocidad de un coche de carreras a lo largo de un circuito llano durante su segunda vuelta.



1. ¿Cuál es la distancia aproximada desde la línea de salida hasta el comienzo del tramo recto más largo que hay en la pista?
   A. 0,7 B. 1,1 C. 1,8 D. 2 E. 2,9
2. ¿Dónde alcanzó el coche la velocidad más baja durante esta segunda vuelta?
3. ¿Qué se puede decir sobre la velocidad del coche entre los kilómetros 2,6 y 2,8?
4. ¿En qué pista tuvo lugar la carrera para que el coche produjera el gráfico de velocidad mostrado?

A. B. C. D. E.

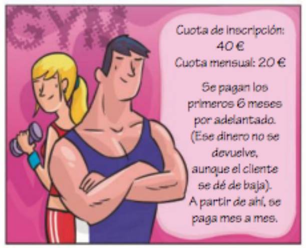
SOLUCIÓN

1. La distancia aproximada entre la línea de salida y el comienzo del tramo recto más largo es 1,8. Respuesta C.
2. El coche alcanzó la velocidad más baja aproximadamente en el kilómetro 1,3.
3. La velocidad del coche entre los kilómetros 2,6 y 2,8 es creciente.
4. La carrera tuvo lugar en el circuito B, pues el coche reduce la velocidad en tres ocasiones debido a que la pista tiene tres curvas. Esto también ocurre en C y D pero los tramos rectos no se corresponden con los descritos en la gráfica.

El gimnasio

José tiene cerca de su casa dos gimnasios con distintas ofertas y no sabe a cuál de los dos acudir para ejercitarse.

Gimnasio A



Gimnasio B

1. ¿Cuánto pagará, como mínimo, si se apunta al primer gimnasio? ¿Y si se apunta al segundo?
2. ¿Cuál de las dos ofertas le resulta más rentable si piensa ir durante todo el año?
3. José no sabe cuántos meses terminará yendo al gimnasio este año. Estudia qué oferta le resulta más económica en función del número de meses que vaya, hasta un máximo de doce meses.

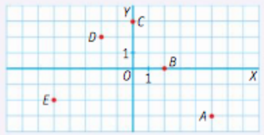
La bolsa

En la gráfica aparece el precio de las acciones de una compañía en la bolsa a lo largo de un mes.

1. ¿Es la gráfica de una función? Identifica las variables dependiente e independiente.
2. Describe la evolución del precio de las acciones.
3. Mónica compró 1000 acciones el día 6 y las vendió el día 19. ¿Cuánto dinero ganó o perdió?
4. Ángel compró 1250 acciones el día 13, y vendió 750 el día 24 y el resto el día 26. ¿Cuánto dinero ganó o perdió?
5. ¿Cuál es el mayor beneficio que se podía haber sacado negociando con 2000 acciones?

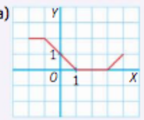
AUTOEVALUACIÓN

1. Escribe las coordenadas de los puntos representados.

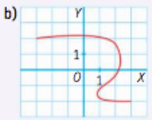


2. ¿Representan funciones las gráficas siguientes? Indica el dominio y recorrido en caso afirmativo.

a)

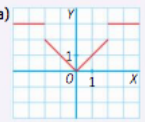


b)

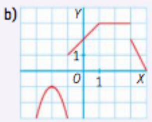


3. Dos magnitudes están relacionadas mediante la siguiente fórmula: $y = 3x - 1$
   a) Construye la tabla de valores correspondiente.
   b) Representa la gráfica.
4. Estudia puntos de discontinuidad de estas funciones.

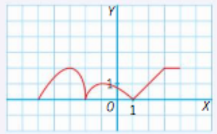
a)



b)



5. Estudia el dominio, el crecimiento, el decrecimiento y los extremos de la siguiente función.

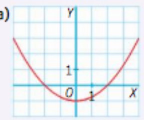


6. Indica la posición relativa de las siguientes rectas, escribiéndolas en forma explícita.

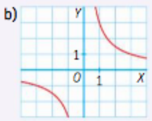
a) $\begin{cases} r: 3x - y + 7 = 0 \\ s: y = \frac{-1}{3}x + 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 9 = 0 \\ s: \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{5} \end{cases}$

7. Estudia las características de las siguientes funciones.

a)



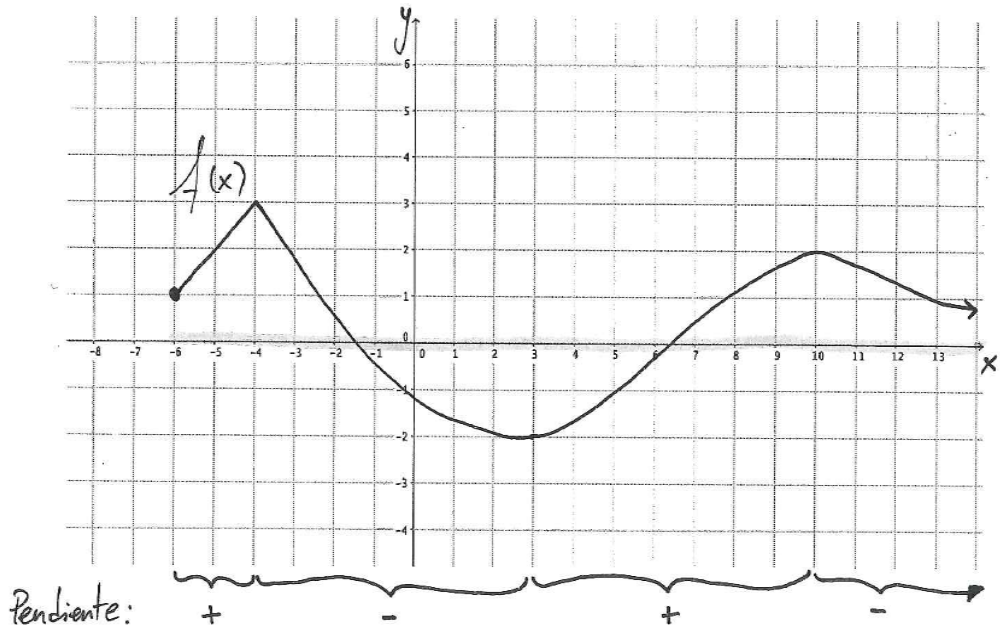
b)

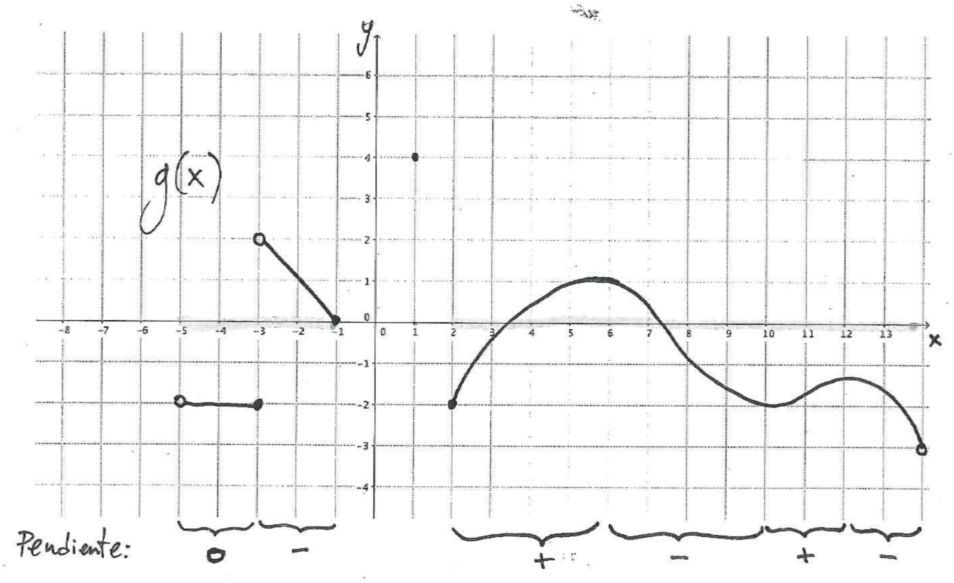


8. Un lápiz de memoria tiene una velocidad de transferencia de datos de 10 MB/s. Al empezar a copiar datos, el dispositivo tenía ya 150 MB de datos. Construye una tabla de valores relacionando el tiempo transcurrido y el tamaño almacenado, en las unidades adecuadas. ¿Qué función relaciona ambas variables?

smSaviadigital.com VALORA LO APRENDIDO > Autoevaluación.

B. Aditu-talde funtzionalaren apunteak





$f(x)$

- El DOMINIO (Dom(f(x))) de f(x) son todos los números desde el $-6=x$ (-6 incluido) hasta el infinito.
- La IMAGEN o RECORRIDO (Im(f(x))) de f(x) son todos los números de entre $y=-2$ a $y=3$
- La función f(x) es CONTINUA.
- Lo PENDIENTE es positiva cuando x va de -6 a -4 y de 3 a 10. La PENDIENTE es negativa de -4 a 3 y de 10 a ∞.
- MÁXIMOS y MÍNIMOS: Tiene un Máximo Absoluto cuando $x=-4$ y un Máximo Relativo en $x=10$. Tiene un Mínimo absoluto en $x=3$.

$g(x)$

- El DOMINIO (Dom(g(x))) de g(x) lo componen todos los números de entre $x=-5$ a $x=-1$ y de entre $x=2$ a $x=14$ PERO, sin embargo, $x=-5$ y $x=14$ QUEDAN FUERA del Dominio de g(x), Mientras que $x=1$ Tambien forma parte del Dom(g(x)).
- Im(g(x)) son todos los números de entre $y=-3$ a $y=2$ PERO $y=-3$ y $y=2$ quedan FUERA de Im(g(x)). Por el contrario $y=4$ queda dentro de Im(g(x)).
- La función g(x) es DISCONTINUA (o NO-CONTINUA).
- La PENDIENTE es NULA entre $x=-5$ a $x=-3$. (Pendientes negativas y positivas ver la gráfica abajo).
- La fungión g(x) tiene un MÁXIMO ABSOLUTO en $x=1$ y dos MÁXIMOS RELATIVOS en $x=6$ y $x=12$. g(x) tiene un MÍNIMO ABSOLUTO cuando x es casi 14 ($x \to 14$) y un MÍNIMO RELATIVO en $x=10$, $x=-1$ y $x=2$.

$f(x)$

- Dominio de $f(x)$: $Dom(f(x))\left\{ -6 \leq x \right.$

- Imagen de $f(x)$: $Im(f(x))\left\{ -2 \leq y \leq 3 \right.$

- Continuidad: CONTINUA

- PENDIENTE: Positiva $\begin{cases} -6<x<-4 \\ 3<x<10 \end{cases}$, Negativa $\begin{cases} -4<x<3 \\ 10<x \end{cases}$

- MAX. ABSOLUTO $x=-4$: MIN. ABSOLUTO $x=3$
  MAX. Relativo $x=10$: MIN. Relativo → No tiene.

$g(x)$

- Dominio de $g(x)$: $Dom(g(x))\begin{cases} -5<x\leq -1 \\ x=1 \\ 2\leq x<14 \end{cases}$

- Imagen de $g(x)$: $Im(g(x))\begin{cases} -3<y<2 \\ y=4 \end{cases}$

- Continuidad: DISCONTINUA

- PENDIENTE:
  POSITIVA $\begin{cases} 2\leq x<6 \\ 10<x<12 \end{cases}$, NEGATIVA $\begin{cases} -3<x\leq -1 \\ 6<x<10 \\ 12<x<14 \end{cases}$, NULA $\left\{ -5<x\leq -3 \right.$

- MAX. ABS. $x=1$ MIN.ABS. $x\to 14$
  MAX. REL. $\begin{cases} x=6 \\ x=12 \end{cases}$ MIN. REL. $\begin{cases} x=10 \\ x=-1 \\ x=2 \end{cases}$

C. Lagineko ikasleek egindako azterketak

1. Resuelve las siguientes ecuaciones escribiendo todos los pasos necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$-3x - 1 = -1 - 3x$

$-3x + 3x = -1 + 1$

$0 = 0$

Es una igualdad.

0'5

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$3x + 8 = 6 - 2x$

$3x + 2x + 8 = 6$

$5x = 6 - 8$

$5x = -2$

$\boxed{x = \frac{-2}{5}}$

0'5

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$-x + 1 = 2$

$-x = 2 - 1$

$-x = 1$

$x = -1$

0'5

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$5x - 12 = 5x - 5$

$-12 = -5$

No tiene solución

0'5

2. **Resuelve: (1,5 puntos)**

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$5\cdot\left(\frac{3x}{5}+7\right)=2x\cdot 5$

$3x+35=10x$

$35=7x$

$x=\frac{35}{7}$

$x=5$ ✓

0'5

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

$40\left(\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}\right)=\left(\frac{x-2}{2}\right)\cdot 40$

$5(x-9)-4(2x-7)=20(x-2)$

$5x-45-8x+28=20x-40$

$-3x-17=20x-40$

$-3x+23=20x$

$23=23x \Rightarrow x=\frac{23}{23}=1$ ✓

1

3. Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)

$\cancel{\frac{-b\pm\sqrt{b-4a\cdot c}}{2a}}$

No te sabes la fórmula!!

0'2

a) $-x^2+8x+20=0$

$\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(-1)\cdot 20}}{2\cdot -1}$

$\cancel{\frac{-8\pm\sqrt{28}}{-2}} \Rightarrow \frac{-8\pm 5{,}291}{-2}$

$\nearrow \frac{-8+5{,}291}{-2}=1{,}3542$

$\searrow \frac{-8-5{,}291}{-2}=6{,}6457$

b) $x^2+x+3=0$

$\cancel{\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 3}}{2\cdot 1}}$

$\cancel{\frac{-1\pm\sqrt{-2}}{2}}$ No tiene solución ✓

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

0'3

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$

$3x^2 = 147$

$x^2 = 49$

$x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

$x_1 = +7$

$x_2 = -7$

b) $2x^2 - 10x = 0$

~~$10 \pm \sqrt{-10 - 2 \cdot (0)}$~~

~~No tiene solución~~

0

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$3x - 2y = -4$

$y = 2 - 2x$

$3x - 2(2 - 2x) = -4$

$3x - 4 + 4x = -4$

$7x - 4 = -4$

$7x = 0$

$x = 0$

$3 \cdot 0 - 2y = -4$

$y = \frac{-4}{-2} = 2$

$x = 0$ ✓

$y = 2$ ✓

1

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 6 - 2x$

$y = \dfrac{14 - 4x}{3}$

$6 - 2x = \dfrac{14 - 4x}{3}$

$3(6 - 2x) = 14 - 4x$

$18 - 6x = 14 - 4x$

$-2x = -4$

$x = 2$

$2 \cdot 2 + y = 6$

$y = 6 - 4$

$y = 2$

$x = 2$
$y = 2$

✓

1

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cdot 2 \Rightarrow 8x - 2y = 6$

$\Rightarrow \cdot 1 \Rightarrow 3x + 2y = -6$

$11x = 0$

$x = 0$

$4 \cdot 0 - y = 3$

$-y = 3$

$y = -3$

$x = 0$
$y = -3$

✓

1

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x + y = 10 \end{cases}$$

$* \; 3 \cdot 3 - 2 \cdot -1 = 11$

$9 + 2 = 11$

$* \; 5 \cdot 3 + (-1) = 10$

$15 - 1 = 10$

$14 \neq 10$

No, porque no resuelve las dos.

✓

0'5

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

2'35

NOMBRE Y APELLIDOS [redacted]

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$x - 4x + 3x = 5 - 6 + 1$

$0x = 0$ Infinites soluciones

$\cancel{x = \frac{0}{0}}$ ~~No hay solución~~

0'35

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$x + 2x + 2x = 6 - 8$

$5x = -2$

$x = \frac{-2}{5} = -2$

0'4

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$7x - 4x - 4x = 2 + 7 - 8$

$-x = 1$ / $x = \frac{1}{-1} = -1$

0'5

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$6x - x + 5x = 5 + 12$ Estaba bien.

$0x = 17$

$\cancel{x = \frac{17}{-12}}$

0'3

2. ***Resuelve:* (1,5 puntos)**

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$$\cancel{3x-5+7=2x}$$
$$\cancel{-5+7=2x-3x}$$
$$\cancel{2=-x}$$
$$\cancel{x=\frac{2}{-1}=-2}$$

0/

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

0'15

$$\frac{5x-45}{40}-\frac{8x-28}{40}=\frac{20x-40}{40}$$

$$\frac{5x-45-8x+28=20x-40}{40}=\frac{5x-8x-20x=-40+45+28}{40}=$$

$$\frac{-23x=32}{40}=\frac{x=\frac{32}{-23}}{40}=\frac{\frac{32}{-23}}{\cancel{40}}$$

3. Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)

a) $-x^2+8x+20=0$

0/

b) $x^2+x+3=0$

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$

$9x^2 = 0 + 147$

$9x^2 = 147$

$x^2 = \frac{147}{9} = 16,\widehat{3}$

0

b) $2x^2 - 10x = 0$

$4x^2 = 10 + 0$

$x^2 = \frac{10}{4} = 2,5$

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$3x - 2y = 4$

$y = 2 - 2x$

$2 - 2x + 3x - 2 = -4$

$-2x + 3x = 4 + 2 - 2$

$x = 4$

$x = \frac{-4}{1} = -4$

$3 \cdot -4 - 2 \cdot y = -4$

$3x + 8 = -4$

$3 \cdot -4 + 8 = -4$

$-12 + 8 = -4$

$3 \cdot (-4) - 2 \cdot y = -4$

$-12 - 2y = -4$

$-12 - 2 \cdot 4 = -4$

$-12 + 8 = -4$

$\boxed{\begin{matrix} x = -4 \\ y = 4 \end{matrix}}$

R

0,25

b) Resuelve por ~~reducción~~ sustitucion:

$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ 4x+3y=14 \end{cases}$$

$y = 6 - 2x$

$4x + 3y = 14$

$6 - 2x + 4x + 3 = 14$

$-2x + 4x = 14 - 6 + 3$

$-2x = -5$

$y = \frac{-2}{-5} = 0{,}4$

$4 \cdot x + 3 \cdot 0{,}4 = 14$

$4 \cdot x + 1{,}2$

0

Tienes que resolverlo por el método que te mando.

c) Resuelve por ~~igualación~~ sustitucion:

$$\begin{cases} 4x-y=3 \\ 3x+2y=-6 \end{cases}$$

$-y = 3 - 4x$

$3x + 2y = -6$

$3 - 4x + 3x + 2 = -6$

$-4x + 3x = -6 + 3 + 2$

$-x = -5$

$y = \frac{-5}{-1} = 5$

$\boxed{\begin{matrix} y = 5 \\ x = -6 \end{matrix}}$

$3 \cdot 5 + 2 \cdot y = -6$

$15 + 2 \cdot 4{,}5 = -6$

$15 - 9 = 6$

$3 \cdot x - 2 \cdot 5 = -6$

$3x - 15 = 6$

$3 \cdot 3 - 15 = 6$

$9 - 15 = -6$

0

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 5x+y=10 \end{cases}$$

$3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 11 \;/\; 9 + 2 = 11$

$5 \cdot 3 + (-1) = 10 \;/\; 15 - 1 = 14$

0'4

- No, no es solucion, para el de arriba si pero para el de abajo no, porque al sustituir, el segundo no da

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

NOMBRE Y APELLIDOS [redacted]

8'95

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$-3x - 1 = -1 - 3x$

$-3x + 3x = -1 + 1$

~~No hay solución~~

0'35

$0x = 0 \leftarrow$ Es una identidad

Tiene infinitas soluciones

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$3x + 8 = 6 - 2x$

$3x + 2x = 6 - 8$

$5x = -2$

$\boxed{x = \frac{-2}{5}}$

0'5

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$-x + 1 = 2$

$-x = 2 - 1$

$\boxed{-x = 1} \rightarrow \boxed{x = -1}$

0'4

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$5x - 12 = 5x - 5$

$5x - 5x = -5 + 12$

No tiene solución

0'5

2. ***Resuelve:* *(1,5 puntos)***

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$5\left(\frac{3x}{5}+7\right)=2x\cdot 5$

$1(3x+35)=10x$

$3x+35=10x$

$3x-10=-7$

$-7x=-7$

$\boxed{x=1}$

0'4

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

m.c.m $(8,10,2)=40$

$40\left(\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}\right)=\left(\frac{x-2}{2}\right)\cdot 40$

$5(x-9)-4(2x-7)=(x-2)\cdot 20$

$5x-45-8x+28=20x-40$

$-3x-17=20x-40$

$-3x-20x=-40+17$

$-23x=-23$

$x=\frac{-23}{-23}$

0'9

3. ***Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)***

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

a) $-x^2+8x+20=0$

$\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-1)\cdot 20}}{2\cdot(-1)}=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{144}}{-2}=\frac{-8\pm 12}{-2}$

$\to x_1=\frac{-8+12}{-2}=\frac{4}{-2}=-2$

$\to x_2=\frac{-8-12}{-2}=\frac{-20}{-2}=10$

$\boxed{x_1=-2 \quad x_2=10}$

1'5

b) $x^2+x+3=0$

$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$

No hay solución, porque no hay raíz de un número negativo

$\boxed{a^2+b+c=0}$

4. *Resuelve: (1,5 puntos)*

147 | 3
27   49
0

a) $3x^2 - 147 = 0$

$3x^2 = 147$

$x^2 = \frac{147}{3}$

$x^2 = 49$

$\boxed{x = \pm 7}$ ✓

1'5

b) $2x^2 - 10x = 0$

$x(2x - 10) = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$ ✓

$2x - 10 = 0$

$2x = 10$

$\boxed{x = 5}$ ✓

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \longrightarrow y = \boxed{2 - 2x}$$

$3x - 2(2 - 2x) = -4$

$3x - 4 + 4x = -4$

$x - 4 = -4$

$x = -4 + 4$

$\boxed{x = 0}$ ✓ ¿ y = ?

0'75

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases}2x+y=6 \xrightarrow{\cdot(-3)} -6x-3y=-18\\ 4x+3y=14 \xrightarrow{\cdot 1} +\ 4x+3y=14\end{cases}$$

$-2x=-4$

$x=\frac{-4}{-2}$

$\boxed{x=2}$

$\boxed{x=2 \quad y=\frac{3}{2}}$

0'9

$2\cdot 2+y=6$

$4+y=6$

$\cancel{y=\frac{6}{4}}$ $y=6-4$

$\boxed{\cancel{y=\frac{3}{2}}}$ $\boxed{y=2}$

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases}4x-y=3 \longrightarrow -y=3-4x \rightarrow y=-3+4x\\ 3x+2y=-6 \longrightarrow 2y=-6-3x\end{cases} \rightarrow -3+4x=\frac{-6-3x}{2}$$

$\boxed{x=\frac{12}{5} \quad y=\frac{33}{5}}$

0'75

$-3+4x=\frac{-6-3x}{2}$

$2(3-4x)=2\left(\frac{-6-3x}{2}\right)$

$2(3-4x=1(-6-3x)$

$6-8x=-6-3x$

$6+6=-3+8x$

$12=5x$

$x=\frac{12}{5}$

$4\left(\frac{12}{5}\right)-y=3$

$\frac{48}{5}-y=3$

$\frac{48}{5}-3=y \Longrightarrow \boxed{\frac{48}{5}-\frac{15}{5}=\frac{33}{5}}$

$\frac{33}{5}=y$

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases}3x-2y=11\\ 5x+y=10\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}3\cdot 3-2\cdot(-1)=11\\ 5\cdot 3+(-1)=10\end{array}\right\}$$

Este par no es solución de este sistema porque sólo es solución en una ecuación y tiene que serlo en las dos

0'5

$3\cdot 3-2\cdot(-1)=11$

$9+2=11$

$\boxed{11=11}$

$5\cdot 3+(-1)=10$

$15-1=10$

$\boxed{14\neq 10}$

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

4'65

NOMBRE Y APELLIDO [redacted]

1. **Resuelve** las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$-3x - 1 = -1 - 3x$

~~$-1 = -1 + 2x$~~

~~$0 = 2x$~~

~~$x = \frac{2}{0} = 0$~~ ~~$x = 0$~~

Estaria bien.

0'4

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$3x + 8 = 6 - 2x$

$3x = -2 - 2x$

~~$5x + 8 = 6$~~

~~$5x = -$~~

$5x = -2$

~~$x = \frac{8}{-2}$~~

$\boxed{x = \frac{-2}{5}}$

0'25

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$-x + 1 = 2$

$1 = 2 + x$ $x = -1$ ✓

$-1 = x$

0'5

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$5x - 12 = 5x - 5$

$5x - 6 = 5x$

$0x = -6$ No hay solución

0'35

2. ***Resuelve:* (1,5 puntos)**

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$\frac{3x}{5}+\frac{35}{5}=\frac{10x}{5}$

$3x+35=10x$

$35=7x$

$x=\frac{35}{7}=5$

0'5

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

$\frac{5x-45}{40}-\frac{8x-28}{40}=\frac{20x-40}{40}$

$5x-45-8x+28=20x-40$

$-3x-17=20x-40$

$-23x=20x+23$

$-23x=-23$

$x=\frac{-23}{-23}=1$

$\frac{5x-45}{40}-\frac{8x-7}{40}=\frac{20x-40}{40}$

$5x-45-8x+7=20x-40$

$-3x-38=20x-40$

$-23x-38=-40$

$-23x=-2$

$x=\frac{-23x}{-2}=11,5$

0'75

3. *Resuelve las ecuaciones siguientes:* (1,5 puntos)

a) $-x^2+8x+20=0$

$ax^2+bx+c=0$

0

b) $x^2+x+3=0$

0

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$

$ax^2 - c = 0$

$x^2 = 7$

Hay que buscar un número que restado por 147 de 0.

b) $2x^2 - 10x = 0$

$x^2 = 5$

$x = 5$

Hay que buscar un número que restado de 10 . 5 de 0.

0

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$3x = 2y - 4$

$2x + y = 2$

$x = \dfrac{2y - 4}{3}$

$2x + y = 2$

$2 + y \left(\dfrac{2y - 4}{3}\right) = 2$

$\dfrac{6y}{3} \; \dfrac{2y - 4}{3} = \dfrac{6}{3}$

$6y + 2y - 4 = 6$

$8y - 4 = 6$

0'5

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 & \xrightarrow{\cdot 3} \\ 4x + 3y = 14 & \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{cases}$$

$6x + 3y = 18$

$-4x - 3y = -14$

$2x = 4$

$\boxed{x = 2}$ ✓

$\boxed{y = 2}$ ✓

1

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases}$$

~~$-y = -4x + 3$ $\quad y = 4x - 3$~~

~~$2y = -3x - 6$ $\quad 2y = -3x - 6$~~

$\dfrac{4x-3}{4}$ $\quad y = \dfrac{-3x-6}{2}$

~~$\dfrac{4x-3}{4} = \dfrac{-3x-6}{2}$~~

0'75

$4x = y + 3$ $\qquad x = \dfrac{y+3}{4}$ ✓ $\qquad \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{-2y-6}{3}$

$3x = -2y - 6$ $\qquad x = \dfrac{-2y-6}{3}$ ✓ $\qquad \dfrac{3y+9}{12} = \dfrac{-8y-24}{12}$

$3y + 9 = -8y - 24$

$9 = 5y - 24$

~~$33 = 5y$~~

~~$y = \dfrac{33}{5} = 6{,}6$~~

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x + y = 10 \end{cases}$$

0

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

8'45

NOMBRE Y APELLID[redacted]

1. Resuelve *las siguientes ecuaciones* **escribiendo todos los pasos necesarios** *para encontrar la solución:* **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$-3x - 1 = -3x - 1$ ⟶ Es una identidad Tiene infinitas soluciones.

0'35

~~No se puede resolver porque no hay resultado al final~~

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$3x + 8 = 6 - 2x$

$5x = -2$

$\boxed{\cancel{x = \frac{5}{-2}}}$

$\boxed{x = \frac{-2}{5}}$

0'25

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$-x + 1 = 2$

$-1 = +x$

$\boxed{-1 = x}$ ✓

0'5

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$5x - 12 = 5x - 5$ —

~~No se puede resolver porque no hay resultado al final.~~

$-12 = -5$ ← IMPOSIBLE

No hay solución

0'35

2. ***Resuelve:* (1,5 puntos)**

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$\frac{3x}{5}+\frac{35}{5}=\frac{10x}{5}$

$3x+35=10x$

$35=7x$

$\frac{35}{7}=x \quad \boxed{5=x}$

1'5

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

$\frac{5x-45}{40}-\left(\frac{8x-28}{40}\right)=\frac{20x-40}{40} \rightarrow 5x-45-8x+28=20x-40 \rightarrow$

$-3x-17=20x-40 \rightarrow 23=23x \rightarrow \frac{23}{23}=x \rightarrow \boxed{x=1}$

3. *Resuelve las ecuaciones siguientes:* (1,5 puntos)

a) $-x^2+8x+20=0$

$\frac{-(+8)\pm\sqrt{(8)^2-(4\cdot-1\cdot+20)}}{2\cdot-1} \rightarrow \frac{-8\pm\sqrt{64-(-80)}}{-2} \rightarrow \frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{-2} \rightarrow$

$\frac{-8\pm\sqrt{144}}{-2} \rightarrow \frac{-8\pm 12}{-2} \rightarrow$

$\frac{-8+12}{-2}=\frac{4}{-2}=\boxed{-2} \quad \boxed{x'=-2}$

$\frac{-8-12}{-2}=\frac{-20}{-2}=\boxed{+10} \quad \boxed{x^2=+10}$

1'4

b) $x^2+x+3=0$

$\frac{-(+1)\pm\sqrt{(1)^2-(4\cdot+1\cdot+3)}}{2\cdot 1} \rightarrow \frac{-1\pm\sqrt{1-(+12)}}{2} \rightarrow \frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2} \rightarrow \frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$

No se puede hacer

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$

$3x^2 = 147$

$x^2 = \frac{147}{3} = 49 \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

$\cancel{\boxed{x = 7}}$

$\cancel{\boxed{x = 0}}$

1

b) $2x^2 - 10x = 0$

$x \cdot (2x - 10) = 0 \quad - \quad \boxed{x_1 = 0}$

$2x - 10 = 0$

$2x = 10$

$x = \frac{10}{2}$

$\boxed{x_2 = 5}$

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ y = 2 - 2x \end{cases}$ ✓

$3x - 2 \cdot (2 \cdot -2x) = -4$

$3x - 4 + 4x = -4$

$7x = 0$!!

$\cancel{\boxed{x = -7}}$

$x = 0$

$y = 2 - 2 \cdot (-7)$

$y = 2 + 14$

$\boxed{y = 16}$

$y = 2$

0'75

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases} 2x+y=6 \xrightarrow{-2} -4x-2y=-12 \\ 4x+3y=14 \xrightarrow{1} 4x+3y=14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -4x-2y=-12 \\ + \quad 4x+3y=14 \\ \hline \boxed{y=2} \end{array}$$

$2x+2=6$

$2x=4$

$x=\frac{4}{2}$

$\boxed{x=2}$

A

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} 4x-y=3 \\ 3x+2y=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x=+y+3 \\ 3x=-2y-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{+y+3}{4} \\ x=\frac{-2y-6}{3} \end{cases}$$

0'85

$$\frac{+y+3}{4}=\frac{-2y-6}{3} \rightarrow \frac{+3y+9}{12}=\frac{-8y-24}{12} \rightarrow +3y+9=-8y-24 \rightarrow$$

$$\rightarrow +5y=-33 \rightarrow \boxed{y=\frac{-33}{5}}$$

$y=-3$

$$4x=\frac{-33}{5}+3 \rightarrow \frac{20x}{5}=\frac{-33}{5}\ \frac{+15}{5} \rightarrow$$

$$20x=-33+15 \rightarrow 20x=-18 \rightarrow x=\frac{18}{20} \rightarrow$$

$$\boxed{x=\frac{9}{10}}$$

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 5x+y=10 \end{cases}$$

$(3.3)-(2.(-1))=9-(-2)=9+2=11$

$(5.3)+(-1)=15+(-1)=15-1=14$

0'5

No es solución de este sistema, porque al sustituir los números con las letras la primera ecuación tiene el mismo resultado, pero en cambio en la segunda el resultado es diferente.

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

NOMBRE Y APELLIDOS [redacted]

9'5

1. Resuelve las siguientes ecuaciones escribiendo todos los pasos necesarios para encontrar la solución: (2 puntos, 0,5 cada una)

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

Es una identidad

$-3x - 1 = -1 - 3x$

$+3x$ $-1 = -1$

$+1$ $0 = 0$

0'5.

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$3x + 8 = 6 - 2x$

-8 $3x = -2 - 2x$

$+2x$ $5x = -2$

$:5$ $x = \frac{-2}{5}$

0'5

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

-1 $-x + 1 = 2$

$:-1$ $-x = 1$

$x = \frac{1}{-1} = -1$

0'5.

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$5x - 12 = 5x - 5$

$+12$ $5x = 5x + 7$

$-5x$ $0 = +7 \implies$ No tiene solución

0'35

2. **Resuelve: (1,5 puntos)**

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$\cdot 5$ $3x+35=10x$

-35 $3x=10x-35$

$-10x$ $-7x=-35$

$:-7$ $x=\frac{-35}{-7}=5$

0'5

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

m.c.m. $(8,10,2)=40$

$5.(x-9)-4.(2x-7)=20.(x-2)$

$5x-45-8x+28=20x-40$

$-3x-17=20x-40$

$-3x=20x-23$

$-23x=-23$

$x=\frac{-23}{-23}=+1$

1

3. Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)

a) $\overset{a}{-x^2}+\overset{b}{8x}+\overset{c}{20}=0$

$x=\frac{-8\pm\sqrt{(8)^2-4.-1.20}}{2.-1}=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{144}}{-2}=$

$\frac{-8\pm 12}{-2}=$ $x1=\frac{4}{-2}=-2$; $x2=\frac{-20}{-2}=10$

1'5

b) $\overset{a}{x^2}+\overset{b}{x}+\overset{c}{3}=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4.1.+3}}{2.1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$ No se puede $\sqrt{-12}$ no existe;

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$

$3x^2 = 147$

$x^2 = \frac{147}{3} = 49$

$x = \pm\sqrt{49}$

$x = \pm 7$ $x_1 = 7$ $x_2 = -7$

$1'4$

b) $2x^2 - 10x = 0$

$2x \cdot (x - 5) = 0$

$x1 = 0$

$x - 5 = 0$

$x_2 = 5$

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\left.\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}\right\}$$

$3x - 2y = -4$

$y = 2 - 2x$

$3x - 2 \cdot (2 - 2x) = -4$

$3x - 4 + 4x = -4$

$7x = 0$

$x = \frac{0}{7}$

$3 \cdot 0 - 2y = -4$

$0 - 2y = -4$

$y = \frac{-4}{-2} = 2$

$\boxed{x = 0}$

$\boxed{y = 2}$

✓

1

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases}2x+y=6 \xrightarrow{\cdot -2} -4x-2y=-12\\ 4x+3y=14 \xrightarrow{\cdot 1} 4x+3y=14\end{cases}$$

$y = 2$

$\boxed{y=2}$

$\boxed{x=2}$

$2x+2=6$

$2x=4$

$x=\frac{4}{2}=2$

1

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases}4x-y=3\\ 3x+2y=-6\end{cases}$$

$4x=3+y \quad x=\frac{3+y}{4}$

$3x=-6-2y \quad x=\frac{-6-2y}{3}$

$\boxed{y=-3}$

$\boxed{x=0}$

1

$\frac{3+y}{4}=\frac{-6-2y}{3}$

$m.c.m(4,3)=12$

$3.(3+y)=4.(-6-2y)$

$9+3y=-24-8y$

$3y=-33-8y$

$11y=-33$

$y=\frac{-33}{11}$

$y=-3$

$\frac{-6-2.-3}{3}=$

$\frac{-6+6}{3}=$

$\frac{0}{3}$

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases}3x-2y=11 \xrightarrow{\cdot 1} 3x-2y=11\\ 5x+y=10 \xrightarrow{\cdot 2} 10x+2y=20\end{cases}$$

$13x=31$

$\boxed{x=\frac{31}{13}}$

$3x-2y=11 \xrightarrow{\cdot -5} -15+10y=-55$

$5x+y=10 \xrightarrow{\cdot 3} 15+3y=30$

$\boxed{13y=-25}$

No es

0'25

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

0'5

NO[redacted]

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$x - 4x + 3x = +1 + 5 - 6 =$

$6x = 0 - 1$

$\cancel{x = \frac{6}{-1} = -6}$

0'15

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$x + 2x + 2x = -8 + 6$

$5x = -2$

$\cancel{x = \frac{5}{2} = 2}$

0'25

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$\cancel{7 - 4x - 4 = 2}$

$\cancel{-4x = -7 + 4 + 2}$

$\cancel{-4x = -1}$

$\cancel{x = \frac{4}{1} = 4}$

0

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$\cancel{6x - x = 5 - x}$

$\cancel{6x - x + x = 5}$

$\cancel{6x = 5}$

$\cancel{6 - x = 5}$

$\cancel{x = -5 - 6}$

$\cancel{x = -1}$

0

2. **Resuelve: (1,5 puntos)**

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$$\frac{3x}{5}+7=2x$$
$$\frac{3x}{5}-2x=+7$$
$$\frac{x}{5}=+7$$
$$x=+7\cdot 5$$
$$x=35$$

$$\frac{3x}{5}+\frac{7}{5}=\frac{2x}{5}$$
$$\frac{3x-2x}{5}=\frac{+7}{5}$$
$$\frac{x}{5}=7$$
$$1x=1$$
$$x=\frac{1}{1}$$

0

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

$8=2\cdot 2\cdot 2$
$10=2\cdot 5$
$2=2\cdot 1$

$$\frac{x-9}{2}-\frac{2x-7}{2}=\frac{x-2}{2}$$
$$\frac{x-2x+x}{2}=\frac{+9+7-2}{2}=$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{14}{2}$$
$$4x=3$$
$$x=\frac{4}{3}$$

0

3. Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)

a) $-x^2+8x+20=0$

$$x=\frac{-b^2\pm\sqrt{4a\cdot b}}{2ab}$$

No te sabes la fórmula!!

$$x=\frac{-8x^2\pm\sqrt{4\cdot x\cdot 20}}{2\cdot x^2\cdot 8}=\frac{-8x^2\pm\sqrt{-16}}{16}=$$
$$\frac{8x^2\pm -16}{16}=7$$

0

b) $x^2+x+3=0$

$$x=\frac{x^2\pm\sqrt{4\cdot x^2\cdot 3}}{2\cdot x^2\cdot x}=\frac{x^2\pm\sqrt{24}}{4}=\frac{x^2\pm 4}{4}$$

$$\frac{x^2+4}{4}=\frac{8}{4}=2$$

$$\frac{x^2-4}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

4. Resuelve: (1,5 puntos) Nose hacerlo

a) $3x^2 - 147 = 0$

0/

b) $2x^2 - 10x = 0$

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

X

$3x = + 2y - 4$

$3x = -2y$

$x = \_\_\_$

0/

b) Resuelve por reducción: No se hacerlo

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$$

0

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases}$$

0'1

$4x = +y + 3$ $3x = -2y - 6$

$4x = 3y$

$x = \frac{4}{43} = 2{,}1$

$x = 2{,}1$

$+2y = -3 \cdot (2{,}1) - 6$

$+2y = -3 - 6$

$+2y = 9$

$x = \frac{2}{9} = 0$

$y = 0$

El resultado está mal.

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x + y = 10 \end{cases}$$

0

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

7'6

NOMBRE Y A[redacted]

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$x - 4x$: $-1 - 3x = -1 - 3x$; $5 - 6$

$+1$: $-3x = -3x$; $+1$

$:3$: $x = x$; $:3$

0'35

Infinitas soluciones

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$3x + 8 = 6 - 2x$

$+2x$: $5x + 8 = 6$; $+2x$

-8: $5x = -2$; -8

$x = \frac{-2}{5}$ ✓

0'5

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$3x + 1 - 4x = 2$

$-1x = 1$

$x = -1$ ✓

0'5

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$5x - 12 = 5x - 5$

$0x = 7$

0'35

No tiene solución

2. ***Resuelve:* *(1,5 puntos)***

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$3x+35=10x$

$35=7x$

$\boxed{5=x}$

0'5

0/

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

3. *Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)*

a) $-x^2+8x+20=0$

$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-1)\cdot 20}}{2\cdot(-1)}$ $\quad x=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{-2}$ $\quad x=\frac{-8\pm\sqrt{144}}{-2}$

$x=\frac{-8\pm 12}{-2}$ $\begin{cases} x=\frac{4}{-2} & \boxed{x=-2} \\ x=\frac{-20}{-2}=+10 & \boxed{x=10} \end{cases}$

0'9

b) $x^2+x+3=0$

$x=\cancel{\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 3}}$ a $\quad x=\cancel{\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}}$ $\quad x=\cancel{\frac{1\pm\sqrt{11}}{}}$

4. *Resuelve: (1,5 puntos)*

a) $3x^2 - 147 = 0$

$x = \frac{\pm\sqrt{-4\cdot 3\cdot(-147)}}{2\cdot 3}$ $\quad x = \frac{\pm\sqrt{1764}}{6}$ $\quad x = \frac{\pm 42}{6}$ $\quad \boxed{x = -7}$ ✓ $\quad \boxed{x = 7}$ ✓

1'5

b) $2x^2 - 10x = 0$

$x = \frac{+10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 2\cdot 0}}{2\cdot 2}$ $\quad x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 0}}{4}$ $\quad x = \frac{10 \pm \sqrt{100}}{4}$

$x = \frac{10 \pm 10}{4}$ $\quad x = \frac{20}{4}$ $\boxed{x = 5}$ ✓ $\quad x = \frac{0}{4}$ $\boxed{x = 0}$ ✓

5. *Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)*

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \longrightarrow y = 2 - 2x \end{cases}$$

$3x - 2\cdot(2 - 2x) = -4$

$3x - 4 + 4x = -4$

$7x = 0$

$\boxed{x = 0}$

$\boxed{y = 2}$ ✓

1

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases} 2x+y=6 \xrightarrow{\cdot 2} & 4x+2y=12 \\ 4x+3y=14 \xrightarrow{\cdot(-1)} & -4x-3y=-14 \end{cases}$$

$$1y=-2$$

$$\boxed{y=2}$$

$$\boxed{x=2}$$

1

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} 4x-y=3 \\ 3x+2y=-6 \end{cases}$$

$$x=\frac{3+y}{4}$$

$$x=\frac{-6-2y}{3}$$

$$\frac{3+y}{4}=\frac{-6-2y}{3} \rightarrow 9+3y=-24-8y$$

$$11y=-33$$

$$\boxed{y=-3}$$

$$\boxed{x=0}$$

1

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 5x+y=10 \end{cases}$$

0

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

4'8

NOMBRE Y APEL[redacted]

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$+1x - 4x = 5 - 3x - 6$

$+1x - 4x + 3x = 5 - 6 + 1$

$\cancel{-8x = -1}$

$\cancel{x = \frac{-1}{-8} = 1}$

0'1

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$\cancel{8x} + 2x = 6 - 2x$

$\cancel{8x} + 2x + 2x = 6$

$\cancel{12x = 6}$

$\cancel{x = \frac{6}{12} = \frac{3}{6}}$

0'1

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$7x - 4x - 4x = 2 + 7 - 8$

$-1x = +1$

$x = \frac{+1}{-1} = -1$

0'5

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$6x - x - 5x = -5 + 12$

$0x = +7$

$0x = \frac{7}{1} = 7$

No hay solución

0'4

2. **Resuelve: (1,5 puntos)**

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$\frac{3x}{5}+\frac{7}{1}=\frac{2x}{1}$

$\frac{5(3x)}{5}+\frac{5(7)}{1}=\frac{5(2x)}{1}$

$1(3x)+5(7)=5(2x)$

$1(3x)+5(7)=5(2x)$

$3x+35=10x$

$3x-10x=-35$

$-7x=-35$

$x=\frac{-35}{-7}=+5$

0'4

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

$\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$

$\frac{40(x-9)}{8}-\frac{40(2x-7)}{10}=\frac{40(x-2)}{2}$

$5(x-9)-4(2x-7)=20(x-2)$

$5x-45-8x+28=20x-40$

$5x-8x-20x=-40+45-28$

$5x-8x-20x=-40+45+28$

$-7x=+33$

$x=\frac{33}{-7}$

0'65

3. **Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)**

$a=-1$

a) $-x^2+8x+20=0$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$

$\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-1)\cdot 20}}{2\cdot(-1)}\rightarrow\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{4}\rightarrow$

$\frac{-8\pm\sqrt{96}}{4}\rightarrow\frac{-8\pm\sqrt{9{,}79}}{4}$

$\frac{8+\sqrt{9{,}79}}{4}=\frac{17{,}79}{4}$

$\frac{8-\sqrt{9{,}79}}{4}=\frac{-1{,}79}{4}$

b) $x^2+x+3=0$

$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}$

$\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}\rightarrow$

$\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$

$\frac{-1-11}{2}\rightarrow\frac{-12}{2}=\frac{-6}{1}$

$\frac{-1+11}{2}\rightarrow\frac{10}{2}$

0'75

$\sqrt{-11}$ No se puede hacer, por tanto la ecuación no tiene solución

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$

$3x^2 - 147 = 0$

$9x^2 = +147$

$x = \frac{147}{9}$

0/

b) $2x^2 - 10x = 0$

$5x(3x - 5) = 0$

$15x^2 - 5 = 0$

$225x - 5 = 0$

$225x = +5$

$x = \frac{+5}{225} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$

0/

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow 3x = -4 + 2y \quad x = \frac{-4+2y}{3}$$

$\frac{2}{1}\left(\frac{-4+2y}{3}\right) + \frac{y}{1} = \frac{2}{1}$

$\frac{-8+4y}{3} + \frac{y}{1} = \frac{2}{1}$

$\frac{1(-8+4y)}{3} + \frac{3(1y)}{1} = \frac{3(2)}{1}$

$1(-8+4y) + 3(1y) = 3(2)$

$-8 + 4y + 3y = 6$

$+4y + 3y = 6 + 8$

$+7y = 14$

$y = \frac{14}{7} = 14 \quad 2$

$\frac{2x}{1} + \frac{(14)}{1} = \frac{2}{1}$

$\frac{2x}{1} + \frac{14}{1} = \frac{2}{1}$

$x = ?$

0'75

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases}2x+y=6 & \cdot 2 \quad 4x+2y=12\\ 4x+3y=14 & \cdot(-1) \quad 4x+3y=14\end{cases}$$

$$\cancel{} - 1y = \cancel{26}\ -2$$

$y=-2$

0'4

$4x - 1y = 14$

$4y = 14$

$x = \frac{14}{4} \neq \frac{7}{2}$

c) Resuelve por igualación:

0'75

$$\begin{cases}4x-y=3 & 4x = 3+y \to x=\frac{3+y}{4}\\ 3x+2y=-6 & 3x = -6-2y \to x=\frac{-6-2y}{3}\end{cases}$$

$$\frac{3+y}{4} = \frac{-6-2y}{3}$$

$$\frac{12(3+y)}{4} = \frac{12(-6+2y)}{3}$$

$$3(3+y) = 4(-6+2y)$$

$9y = -24 + 8y$

$9y - 8y = -24$

$\cancel{y} + 1y = -24$

$\to y = \frac{-24}{1} = -24$

$3x + 2(-24) = -6$

$3x - 48 = -6$

$3x = -6 + 48$

$3x = +42$

$x = \frac{42}{3} = ?$

6. *¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta.* (0,5 puntos)

$$\begin{cases}3x-2y=11\\ 5x+y=10\end{cases}$$

No, porque la ~~solución~~ de la x y la y da en ~~fracción~~

?

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

NOMBRE Y APEL[redacted]

5'45

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$x - 4x + 3x = 5 - 6 + 1$

$0x = 0$ Infinitas Soluciones 0'35

$\cancel{x = \frac{0}{0} = 0}$

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$x + 2x + 2x = 6 - 8$

$5x = -2$

$x = \frac{-2}{5}$ ✓ 0'5

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$7x - 4x - 4x = 2 + 7 - 8$

$-1x = +1$

$x = \frac{+1}{-1} = -1$ ✓ 0'5

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$6x - x - 5x = -5 + 12$

$0x = +7$

$x = \frac{7}{0} = \cancel{7}$ ✓ No hay solución 0'5

2. ***Resuelve:*** ***(1,5 puntos)***

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

0

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

0

3. *Resuelve las ecuaciones siguientes:* *(1,5 puntos)*

a) $-x^2 + 8x + 20 = 0$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{8^2-4(-1)20}}{2(-1)} = \frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{2} = \frac{-8\pm\sqrt{-84}}{2} = \nexists$$

R

1'25

b) $x^2+ x + 3 = 0$

$$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1} = \frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2} = \nexists$$

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$

$\cancel{3(x^2-144)=0}$

$\cancel{x_1 = 0}$

$\cancel{x_2 = x - 144 = 0}$

$\cancel{x = 0+144}$

$\cancel{x = +144}$

b) $2x^2 - 10x = 0$

$2x(x-5)=0$

$x_1 = 0$

$x_2 = \cancel{x = 0 + 5}$

$x = 5$

0'25

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$\rightarrow 3x = -4 + 2y \rightarrow x = \frac{-4+2y}{3}$ ✓

0'6

$\frac{2(-4+2y)}{3} + \frac{y}{1} = \frac{2}{1}$

$\frac{-8+4y}{3} + \frac{y}{1} = \frac{2}{1}$

$3\left(\frac{-8+4y}{3}\right) + 3(1) = 3(2)$

$-24 + 12y + 3 = 6$

$\cancel{+12y = 6 + 24 - 3}$

$\cancel{+12y = +27}$

$\cancel{y = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}}$

$3\left(\frac{9}{4}\right) - 2y = -4$

$\frac{27}{4} - \frac{2y}{1} = -\frac{4}{1}$

$4(27) - 4(2y) = 4(-4)$

$108 - 8y = -16$

$-8y = -16 - 108$

$y = -\frac{124}{-8} = +\frac{62}{4} = \frac{31}{2}$

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$$

$\rightarrow 4x + 2y = 12$
$\rightarrow 4x + 3y = 14$

$/ \; -1y = -2$

$y = \frac{-2}{-1} = +2$ ✓

$2x + 2(+2) = 12$

$2x + 6 = 12$

$2x = 12 - 6$

$2x = +6$

$x = \frac{6}{2} = 3$

0'75

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases}$$

$\rightarrow 4x = 3 + y \Rightarrow x = \frac{3+y}{4}$

$\rightarrow 3x = -6 - 2y \rightarrow x = \frac{-6-2y}{3}$

$\frac{3+y}{4} = \frac{-6-2y}{3} \rightarrow \frac{12(3+y)}{4} = \frac{12(-6-2y)}{3} \rightarrow 3(3+y) = 4(-6-2y) \Rightarrow 9 + 3y = -24 - 8y \rightarrow$

$+3y + 8y = -24 - 9$

$+11y = -33$

$y = \frac{-33}{11} = -3$

$4x - y(33) = 3$

$4x + 33 = 3$

$4x = 3 + 33$

$x = \frac{36}{3} = 12$

0'75

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x + y = 10 \end{cases}$$

0

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

8'15

NOMBRE Y A[redacted]

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$x - 4x + 3x = +1 + 5 - 6$

$-3x + 3x = +6 - 6$

$0 = 0 \rightarrow$ INFINITAS SOLUCIONES (Identidad)

0'35

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

~~x + 2x = 6~~

$x + 2x + 2x = -8 + 6$

$3x + 2x = -2$

$5x = -2$

$x = \frac{-2}{5}$ ✓

0'5

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$7x - 4x - 4x = +7 - 8 + 2$

$3x - 4x = 9 - 8$

$-x = 1 \rightarrow \boxed{x = -1}$

0'4

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$6x - x - 5x = +12 - 5$

$5x - 5x = +7$

$0 = +7 \leftarrow$ IMPOSIBLE $\Rightarrow$ La ecuación no tiene solución

0'35

2. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

$\frac{3x}{5}+\frac{7}{5}=\frac{2x}{5}$

$\frac{3x}{5}+\frac{35}{5}=\frac{10x}{5}$

$3x+35=10x$

$3x-10x=-35$

$-7x=-35$

$x=\frac{-35}{-7}=5$

$x=5$

1'5

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

$\frac{x-9}{80}-\frac{2x-7}{80}=\frac{x-2}{80}$

$\frac{10x-90}{80}-\frac{16x-56}{80}=\frac{40x-80}{80}$

$10x-90-16x+56=40x-80$

$10x-16x-40x=+90-56-80$

$-6x-40x=\cancel{46}\ 10-56$

$-46x=-46$

$x=\frac{-46}{-46}=1$

$x=1$

3. Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)

a) $-x^2+8x+20=0$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a=-1$

$\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(-1)(20)}}{2(-1)}\rightarrow\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{2}\rightarrow\frac{-8\pm\sqrt{\cancel{16}}}{2}\rightarrow\frac{-8\pm4}{2}$

$x_1=\frac{-8-4}{2}=\frac{-12}{2}=6$

$x_2=\frac{-8+4}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

0'65

b) $x^2+x+3=0$

$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(3)}}{2(1)}\rightarrow\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}\rightarrow\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$

NO tiene solucion

$\sqrt{-}$ no existe

0'75

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) ***$3x^2 - 147 = 0$***

$3x^2 - 147 = 0$

$3x^2 = +147$

$x^2 = \frac{+147}{3} = 49$

$\boxed{x^2 = 49} \rightarrow x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

b) ***$2x^2 - 10x = 0$***

1

$x(2x - 10) = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$ ✓

$2x - 10 = 0$

$2x = +10$

$x = \frac{10}{2} = 5$

$\boxed{x_2 = 5}$ ✓

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

0,75

$y = 2$

~~$x =$ No tiene solucion~~

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \rightarrow 3x = +2y - 4 \rightarrow x = \frac{+2y - 4}{3}$$

$2\left(\frac{2y-4}{3}\right) + y = 2$

$\frac{4y - 8}{3} + y = 2$

$\frac{4y-8}{3} + y = 2$

$\frac{4y-8}{3} + \frac{3y}{3} = \frac{6}{3}$ ✓

$4y - 8 + 3y = 6$

$4y + 3y = +8 + 6$

$7y = 14$

$y = \frac{14}{7} = 2$

$\boxed{y = 2}$

?

~~$-6x^2 - 8x = 4 \rightarrow -6x^2 - 8x - 4$~~

~~$\frac{+8 \pm \sqrt{-8^2 - 4(-6)(-4)}}{2(-6)} \rightarrow \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 96}}{-12}$~~

~~$\frac{+8 \pm \sqrt{-32}}{12}$ No existe~~

~~No tiene solucion~~

~~$3x - 2y = -4 \rightarrow -2y = -3x - 4 \rightarrow \frac{-3x-4}{-2}$~~

~~$2x + y = 2 \rightarrow$~~

~~$2x\left(\frac{-3x-4}{2}\right) = 2$~~

~~$\frac{-6x^2 - 8x}{2} = 2 \qquad \frac{-6x^2 - 8x}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow \frac{-6x^2 - 8x}{2} = \frac{4}{2}$~~

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases}2x+y=6 \to -4 \to -8x-4y=-24\\4x+3y=14 \to +2 \to 8x+6y=+28\end{cases}$$

$$+2y=+4$$

$$y=\frac{+4}{2}=2$$

$$\boxed{y=2}$$ ✓

$$2x+y=6 \to (-3) \to -6x-3y=-18$$

$$4x+3y=14 \to (+1) \to 4x+3y=14$$

$$-2x=-4$$

$$x=\frac{-4}{-2}=+2$$

$$\boxed{x=+2}$$ ✓

1

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases}4x-y=3 \to 4x=+y+3 \to \frac{y+3}{4}\\3x+2y=-6 \to 3x=-2y-6 \to \frac{-2y-6}{3}\end{cases}$$

$$\frac{y+3}{4}=\frac{-2y-6}{3}$$

$$(y+3)3=4(-2y-6)$$

$$3y+9=-8y-24$$

$$3y+8y=-9-24$$

$$+11y=-33$$

$$y=\frac{-33}{+11}=-3$$

$$\boxed{y=-3}$$ ✓

$$4x-(3)=3 \to 4x+3=3$$

$$4x=+3+3$$

$$4x=6$$

$$x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\boxed{x=\cancel{\tfrac{3}{2}}}$$

$x=0$

0'9

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases}3x-2y=11 \to 3x=+2y+11 \to \frac{+2y+11}{3}\\5x+y=10 \to 5x=-y+10 \to \frac{-y+10}{5}\end{cases}$$

~~3x-2y=11 → -2y=-3x+11~~

~~5x+y=10~~

$$\frac{2y+11}{3}=\frac{-y+10}{5}$$

$$(2y+11)5=(-y+10)3$$

$$10y+55=-3y+30$$

$$10y+3y=-55+30$$

$$+13y=-25$$

$$\boxed{y=\frac{-25}{13}}$$

$$3x-2y=11 \to -2y=-3x+11$$

$$5x+y=10 \to y=-5x+10$$

$$\frac{-3x+11}{-2}=\frac{-5x+10}{y}$$

$$(-3x+11)=-2(-5x+10)$$

~~3y+11y=+10x+20~~

$$-3x+11=+10x+10$$

$$-3x-10x=-11+10$$

$$-13x=-1$$

$$\boxed{x=\frac{-1}{-13}}$$

No te pregunto la solución

¿Cuál es tu respuesta?

0

	MATEMÁTICAS 2º DE ESO **Abril 2017**

NOMBRE Y A[redacted]

7'4

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

1. Pasamos ~~las~~ las x a un lado y los números al otro lado.
2. Calculamos.

$x - 4x + 3x = 5 - 6 + 1$

$4x - 4x = +6 - 6$

$0x = 0$

$\cancel{x = 0}$

Infinitas soluciones.

0'4

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$x + 2x + 2x = 6 - 8$

$5x = -2$

$x = \frac{-2}{5}$

0'5

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

~~1. Quitamos paréntesis~~

$7x - 4x - 4x = 2 - 8 + 7$

$7x - 8x = 9 - 8$

$-x = 1$

$x = -1$

0'5

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$6x - x - 5x = -5 + 12$

$6x - 6x = +7$

$0x = +7$ ← No tiene solución

0'35

$\cancel{x = \frac{7}{0} = 0}$

$\cancel{x = 0}$

~~ue~~

2. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)***

0'5

$5\left(\frac{3x}{5}+7\right)=(2x)\cdot 5$

$5\left(\frac{3x}{5}\right)+5\cdot(7)=10x$

$1(3x)+35=10x$

$3x+35=10x$

$3x-10x=-35$

$-7x=-35$

$x=\frac{-35}{-7}=+5$

$x=+5$ ✓

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)***

$40\left(\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}\right)=\left(\frac{x-2}{2}\right)\cdot 40$

$\frac{40(x-9)}{8}-\frac{40(2x-7)}{10}=\left(\frac{x-2}{2}\right)\cdot 40$

$5(x-9)-4(2x-7)=\left(\frac{x-2}{2}\right)\cdot 40$

$5x-45-8x+28=20x-40$

$5x-8x-20x=-40+45-28$

$-28x+5x=-68+45$

$-23x=-23$

$x=\frac{-23}{-23}=1$

0'9

3. Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)

a) $-x^2+8x+20=0$

a b c

$\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-1)\cdot 20}}{2\cdot(-1)}=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{144}}{-2}=\frac{-8\pm 12}{-2}=$

$x_1=\frac{-8+12}{-2}=\frac{4}{-2}=-2$ ✓

$x_2=\frac{-8-12}{-2}=\frac{-20}{-2}=+10$ ✓

1'25

b) $x^2+x+3=0$

a b c

$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}=$

NO ~~HAY EXACTA~~ (3'31)

?

No hay solución porque $\sqrt{-11}$ no se puede calcular.

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$

$3x^2 - 147 = 0$

$3x^2 = +147$

$x^2 = \frac{147}{3} = 49$

$x^2 = 49 \longrightarrow x_1 = 7$

$x_2 = -7$

0,5

b) $2x^2 - 10x = 0$

$2x^2 = +10x$

$x^2 = 10x - 2$

$-10x = -2 = +5$

$x^2 = 5$

$x = 1$

0

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

0

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad 3x - 2y = -4 \quad y = 2 - 2x$$

$3x - 2(2 - 2x) = -4$

$3x - 4 + 4x = -4$

$3x + 4x = -4 + 4$

$7x = 0$

$x = 7$

$3 \cdot (7) - 2y = -4$

$21 - 2y = -4$

$21 + 4 = -2y$

$25 = -2y$

$y = -2 - 25$

$y = -27$

$y = 46$

0,33

REDUCCION

$3x - 2y = -4 \xrightarrow{-2} -6x + 4y = +8$

$2x + y = 2 \xrightarrow{3} 6x + 3y = 6$

$7y = 14$

$y = \frac{14}{7} = 2 \quad y = 2$

$3x - 2 \cdot (7) = -4$

$3x - 14 = -4$

$3x = -4 + 14$

$3x = 10$

$x = \frac{10}{3}$

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases}2x+y=6 \xrightarrow{-2} -4x-2y=-12\\ 4x+3y=14 \xrightarrow{1} 4x+3y=14\end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -4x-2y=-12\\ 4x+3y=14\\ \hline +y=+2\end{array}$$

$\boxed{y=2}$ ✓

$2x+2=6$

$2x=6-2$

$2x=4$

$x=\frac{4}{2}=2$

$\boxed{x=2}$ ✓

1

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases}4x-y=3\\ 3x+2y=-6\end{cases}$$

$\frac{3-4x}{-1}$ $\frac{-6-3x}{+2}$

$\frac{3-4x}{-1}=\frac{-6-3x}{2} \rightarrow \frac{-6+8x}{2}=\frac{-6-3x}{2} \rightarrow -6+8x=-6-3x$

$-6+6=-3x-8x$

$0=-11x$

$-x=-11$

$\boxed{x=11}$

$y=\frac{-6-3(11)}{2}=\frac{-6-33}{2}=\frac{-39}{2}=$

0'75

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases}3x-2y=11\\ 5x+y=10\end{cases}$$

$3\cdot3-2\cdot(-1)=11$ $\quad 9+2=11$ ✗ $\quad 9+2=12$ (sic)

$5\cdot3+(-1)=10$ $\quad 15-1=10$ ✗ $\quad 15-1=14$

Si sustituimos por los datos no nos da ni 11 ni 10.

0'5 ✓

$x=\frac{3+\left(-\frac{1}{3}\right)}{4}=\frac{3-\frac{1}{3}}{4}=\frac{\frac{9-1}{3}}{4}=\frac{\frac{8}{3}}{4}=\cancel{6}$ $\quad x=6$ $\quad y=-3$

$y=\frac{-11}{33}=-\frac{1}{3}$

$4x-y=3$

$3x+2y=-6$

$\frac{3+y}{4}$ $\quad \frac{-6-2y}{3}$

$\frac{3+y}{4}=\frac{-6-2y}{3} \rightarrow \frac{9+3y}{12}=\frac{-24-8y}{12}=$

$9+3y=-24-8y$

$9+24=-8y-3y$

$33=-11y$

$y=\ldots$

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

NOMBRE [redacted]

6'85

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$ $\longrightarrow$ $x - 4x + 3x = +1 + 5 - 6$

$-3x + 3x = 6 - 6$

$0 = 0$

$\boxed{\text{~~No tiene solución.~~}}$

0'35

Infinitas soluciones

Es una identidad

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$ $\longrightarrow$ $x + 2x + 2x = -8 + 6$

$5x = -2$

$x = \frac{-2}{5} \rightarrow \cancel{-0'4}$

0'5

$\boxed{x = \frac{-2}{5} \cancel{= -0'4}}$

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$ $\longrightarrow$ $7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$7x - 4x - 4x = 7 - 8 + 2$

$-1x = 1$

$x = \frac{1}{-1} = -1$

$\boxed{x = -1}$

0'5

d) $6(x - 2) - x = 5\ (x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$6x - x - 5x = -12 - 5$

$\boxed{0 = -17}$

0'5

$\boxed{\text{No tiene solución}}$

2. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)*** $\rightarrow \frac{3x}{5}+\frac{35}{5}=2x \rightarrow \frac{3x}{5}-2x=\frac{-35}{5} \rightarrow \frac{3x}{5}-\frac{10x}{5}=\frac{-35}{5}$

$\frac{-7x}{\cancel{5}}=\frac{-35}{\cancel{5}}=-7x=-35 \rightarrow x=\frac{-35}{-7} \rightarrow \boxed{x=+5}$

0'4

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)*** $\rightarrow \frac{2x-18}{10}$? $-\frac{2x-7}{10}=\frac{5x-10}{10} \rightarrow \frac{-11}{\cancel{10}}=\frac{5x-10}{\cancel{10}}$

$-11=5x-10 \rightarrow -5x=+11-10$

$-5x=1$

$\boxed{x=\frac{1}{-5}}$

0

3. Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)

$\boxed{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

a) ***$-x^2+8x+20=0$*** A = -1 B = 8 C = 20

$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-1)\cdot 20}}{2\cdot(-1)}=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{144}}{-2}=\frac{-8\pm 12}{-2}$

$\frac{-8+12}{-2}=4:-2=-2$

$\frac{-8-12}{-2}=\frac{-20}{-2}=10$

$\boxed{X_1=-2 \quad X_2=10}$

b) ***$x^2+x+3=0$*** A = 1 B = 1 C = 3

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$ No tiene solución

Porque $\sqrt{-}$ no existe.

1'5

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$ ~~$\rightarrow x(3x-147) \rightarrow 3x-147 \rightarrow 3x=147 \rightarrow x=\frac{147}{3} \quad x=49$~~ ~~$x_1=0$~~ ~~$x_2=49$~~

$3x^2 = 147 \rightarrow x^2 = \frac{147}{3} \rightarrow x = \sqrt{\frac{147}{3}} \rightarrow x = \pm\sqrt{49} \rightarrow x = 7.$

$\boxed{x = \pm 7}$ $\quad x_1 = 7$

$x_2 = -7$

0'6

b) $2x^2 - 10x = 0$ $\rightarrow x(2x-10)=0 \rightarrow 2x-10=0 \rightarrow 2x=10 \rightarrow x=\frac{10}{2} \rightarrow x=5$

$\boxed{x_1=0}$

$\boxed{x_2=5}$

0'75

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$\rightarrow 3x - 2y = -4$

$\rightarrow y = -2x + 2$

$3x - 2(-2x+2) = -4$

$3x + 4x - 4 = -4$

$3x + 4x = -4 + 4$

$7x = 0$

$x = 0$

0'4

b) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases} 2x+y=6 \rightarrow y=-2x+6 \rightarrow \frac{-2x+6}{1} \\ 4x+3y=14 \rightarrow 3y=-4x+14 \rightarrow \frac{-4x+14}{3} \end{cases}$$

$3\cdot(-2x+\cancel{16})=1\cdot(-4x+14)$

$-6x+\cancel{48}\ 18=-4x+14$

$-6x+4x=-\cancel{48}\ 18+14$

$-2x=-\cancel{34}\ 4$

$x=\frac{-34}{-2} \rightarrow \boxed{x=\cancel{17}\ 2}$

0'5

¡¡ $34+y=6 \rightarrow \boxed{y=40}$!! ?

¿ ¿$34+40=6$?

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} 4x-y=3 \xrightarrow{\cdot 3} 12x-3y=9 \\ 3x+2y=-6 \xrightarrow{\cdot(-4)} -12x-8y=24 \end{cases}$$

$0 \quad -11y=33 \rightarrow -11y=33 \rightarrow y=\frac{33}{-11} \rightarrow \boxed{y=-3}$

0'85

~~$3x+3y=6$~~

$4x+3=3$

$4x=3\cancel{+}3$

$4x=6$

$x=\cancel{\frac{6}{4}=1'5}$

$\boxed{x=\cancel{1'5}}$

$x=0$

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \rightarrow -2y=11-3x \rightarrow \frac{11-3x}{-2} \\ 5x+y=10 \rightarrow y=10-5x \rightarrow \frac{10-5x}{1} \end{cases}$$

$-2(10-5x)=1(11-3x)$

$-20+10x=11-3x$

$10x+3x=20+11$

$13x=31$

$\boxed{x=\frac{31}{13}}$

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \xrightarrow{\cdot 5} 15x-10y=55 \\ 5x+y=10 \xrightarrow{\cdot(-3)} -15x-3y=-30 \end{cases}$$

$0 \quad -13y=15$

$\boxed{y=\frac{15}{-13}}$

0

No te pide que lo resuelves.

¿Cuál es tu respuesta?

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

4'2

NOMBRE [redacted]

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **escribiendo todos los pasos** necesarios para encontrar la solución: **(2 puntos, 0,5 cada una)**

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$ ~~No hay solución~~

$-3x - 1 = 5 - 3x - 6 \rightarrow -3x - 1 = -1 - 3x$

0'35

$0 - 1 = -1$

$\boxed{0 = 0}$ Infinitas soluciones, es una identidad.

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$3x + 8 = 6 - 2x$

0'45

$5x + 8 = 6$

$5x = -2$, $x = \frac{-2}{5}$

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

0'4

$-x - 15 = 2$

$-15 = 2 + x$

$\cancel{-17 = x}$

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

0'25

$5x - 12 = 5x - 5$

$0x - 12 = -5$ → No tiene solución

$\cancel{0x = 7}$

2. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $\frac{3x}{5}+7=2x$ ***(0,5 puntos)*** mcm(5)

$(5)\frac{3x}{5}+(5)7=(5)2x = \frac{15x}{5}+35=10x$

$3x+35=10x$

$35=7x$ $x=\frac{35}{7}=5$ $x=5$

0'4

b) $\frac{x-9}{8}-\frac{2x-7}{10}=\frac{x-2}{2}$ ***(1 punto)*** mcm (40)

$\frac{(40)x-9}{8}-\frac{(40)2x-7}{10}=\frac{(40)x-2}{2}$

$\frac{40x-360}{8}-\frac{80x-280}{10}=\frac{40-80}{2}$

0'15

3. Resuelve las ecuaciones siguientes: (1,5 puntos)

a) ***$-x^2+8x+20=0$*** ~~a = -x²~~ ~~b = 8x~~ ~~c = 20~~ a = -1 b = 8 c = 20

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\frac{-8x\pm\sqrt{8x^2-4\cdot(-1)\cdot 20}}{2\cdot(-1)} = \frac{-8x\pm\sqrt{8x^2+40x}}{-2x} = \frac{-8x\pm\sqrt{64x+40x}}{-2x} = \frac{-8x\pm\sqrt{104x}}{-2x}$

$\frac{-8x\pm\sqrt{104x}}{-2x}$ $x_1=\frac{-8x+}{-2x}=$ $x_2=\frac{-8x-}{-2x}=$

0'1

b) ***$x^2+x+3=0$***

4. Resuelve: (1,5 puntos)

a) $3x^2 - 147 = 0$

$3x^2 = 147$

$x^2 = \sqrt{147}$

0

b) $2x^2 - 10x = 0$

$\cancel{x(2^2 - 10)}$

$x(x^2 - 10) = 0$

$x^2 - 10 = 0$

$x^2 = 10$

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que te indica: (3 puntos – 1 cada apartado)

a) Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

0'6

$3x - 2y = -4$

$y = 2 - 2x$

$3x - 2(2-2x) = -4 \rightarrow 3x - 4 + 4x = -4 \rightarrow 7x - 4 = -4 \rightarrow 7x = -8 \quad \frac{-8}{7} = -1' = x$

$\cancel{y = 2 \cdot 1 + y = 2 \rightarrow 2 + y = 2}$

$y = 3 \cdot 1 - 2y = -4 \rightarrow 3 - 2y = -4 \rightarrow 7 - 2y = 0 \rightarrow 7 = 2y \quad \frac{7}{2} = 3'\ldots$

$x = 1'\ldots$

$y = 3'\ldots$

b) Resuelve por reducción:

(mcm 3)

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \xrightarrow{\cdot 3} 6x + 3y = 18 \\ 4x + 3y = 14 \xrightarrow{\cdot -1} -4x - 3y = -14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 6x + 3y = 18 \\ + \; -4x + 3y = -14 \\ \hline 2x \quad 0 = 4 \end{array} \qquad \frac{4}{2} = 2 \qquad \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}}$$

$2 \cdot 2 + y = 6$

$4 + y = 6$

$y = 2$

1

c) Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 4x = 3 + y \\ 3x = -6 - 2y \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{3+y}{4} \\ x = \dfrac{-6-2y}{3} \end{array}$$

$\dfrac{3+y}{5} = \dfrac{-6-2y}{3} \rightarrow \cancel{\dfrac{3(3+y)}{15} = \dfrac{5(-6-2y)}{15}} \rightarrow \cancel{9 + 3y = -30 - 10y \rightarrow 39 + 3y = -10y} \rightarrow$

$\cancel{39 = -13y \quad \dfrac{39}{13} = 3y}$

$39 \; \underline{|13}$
$00 \quad 3$

0,5

$3 = y$

$\dfrac{3 + y \cdot 3}{5} = \dfrac{3+3}{5} = \dfrac{6}{5} = x$

$\dfrac{6}{5} = x$

6. ¿El par (3, -1) es solución de este sistema? Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x + y = 10 \end{cases}$$

0

MATEMÁTICAS 2º DE ESO

Abril 2017

NOMBRE Y APELLID[redacted] D

6'9

1. Resuelve las siguientes ecuaciones escribiendo todos los pasos necesarios para encontrar la solución: (2 puntos, 0,5 cada una)

a) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$

$x - 4x + 3x = 5 - 6 + 1$

$0 = 0$

Infinitas soluciones ✓

0'5

b) $x + 8 + 2x = 6 - 2x$

$x + 2x + 2x = 6 - 8$

$5x = -2$

$x = \frac{-2}{5}$ ✓

0'5

c) $7(x - 1) - 4x - 4(x - 2) = 2$

$7x - 7 - 4x - 4x + 8 = 2$

$7x - 4x - 4x = 2 + 7 - 8$

$-x = 1$

$\boxed{x = -1}$

0'4

d) $6(x - 2) - x = 5(x - 1)$

$6x - 12 - x = 5x - 5$

$6x - x - 5x = -5 + 12$

$5x - 5x = 7$

$0x = 7$ ← IMPOSIBLE ⟹ la ecuación no tiene solución.

~~$x = \frac{7}{0}$~~

~~$x = 0$~~

0'35

DERRIGORREZKO BIGARREN HEZKUNTZA

Zuzendaria:
Aitzol Lasa, Matematika Departamentua