Fermin ESPARZA ALFARO

DERIVADA

# INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA Y SUS APLICACIONES EN MATEMÁTICAS DE 1º BACHILLERATO NOCTURNO DE CIENCIAS

TFM 2020

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

**Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas**

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

# INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA Y SUS APLICACIONES EN MATEMÁTICAS DE 1º BACHILLERATO NOCTURNO DE CIENCIAS

Fermín Esparza Alfaro

**UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA**

*NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA*

# ÍNDICE


| | Página |
|---|---|
| **Introducción general** | **5** |
| **Parte I: Las Derivadas en el currículo vigente y en los libros de texto** | **7** |
| **1. Las derivadas en el currículo vigente** | **11** |
| 1.1.Derivadas en el currículo: ESO……..…………………………………... | 12 |
| 1.2.Derivadas en el currículo: Bachillerato ……………………......…... | 13 |
| **2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las derivadas en el currículo vigente** | **25** |
| 2.1.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato………….. | 25 |
| 2.2.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachillerato………….. | 32 |
| **3. Resultados** | **39** |
| 3.1. Ausencias y presencias y coherencia entre el currículo y los libros de texto……………………………………………………………….... | 39 |
| **Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las derivadas en 1º de bachillerato nocturno** | **41** |
| **4. Las derivadas en el libro de texto de referencia** | **45** |
| 4.1. Objetos matemáticos involucrados ………………………..……..... | 45 |
| 4.2. Análisis global de la unidad didáctica …….......................................... | 48 |
| **5. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica** | **57** |
| 5.1. Dificultades ………………………………………………………… | 57 |
| 5.2. Errores y su posible origen …………………………………………… | 58 |
| **6. El proceso de estudio** | **59** |
| 6.1. Distribución del tiempo de la clase …………………………………… | 59 |
| 6.2. Actividades adicionales planificadas …………………………………. | 63 |
| 6. 3. La tarea: actividad autónoma del alumnos prevista ………………….. | 63 |
| **7. Experimentación** | **67** |
| 7.1. Muestra y diseño de la experimentación …..………………………….. | 67 |
| 7.2. El cuestionario y comportamientos esperados ………………………... | 67 |
| 7.3. Resultados ……………………………………………………......... | 72 |
| 7.4. Discusión de los resultados …………………………………………… | 75 |

Página

**Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas** **77**

**Referencias** **79**

**Anexos** **81**

A. Unidad didáctica del libro de texto ………………………………………. 83

B. Contenidos del Currículo: Bloque 2: Números y Álgebra ....................... 105

C. Hojas de ejercicios adicionales resueltos ................................................ 121

## Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la introducción al concepto de derivada y sus aplicaciones en matemáticas de 1º de bachillerato nocturno.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto de ESO y Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre la introducción del concepto de derivada y sus aplicaciones que se ha puesto en marcha en un aula de matemáticas de 1º de Bachillerato nocturno del el IES Navarro Villoslada en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan tanto en la experiencia docente como en un cuestionario construido para evaluar la misma, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

# Parte I:

# Las derivadas en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las derivadas en el currículo y en los libros de texto en ESO y Bachillerato.

El análisis de divide en tres capítulos:

En el primero se analiza la progresión y se muestran en forma de tabla los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo vigente que hacen referencia a las derivadas en cada uno de los cursos.

En el segundo se presentan ejemplos de las actividades tipo (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) propuestas en libros de texto de 1º y 2º de Bachillerato.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el tercer capítulo. El objetivo es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

# Capítulo 1
# Derivadas en el currículo vigente

En este primer capítulo se analizan las derivadas en el currículo vigente de ESO [1] y Bachillerato [2] en la comunidad foral de Navarra. A partir de 3º de la ESO se amplía la oferta de matemáticas apareciendo las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas en 3º y 4º de la ESO y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en 1º y 2º de Bachillerato. En este estudio se han considerado todas ellas.

El currículo de matemáticas vigente se clasifica en tres ítems: contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, definidos [2] como:

- Los *contenidos* son el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos y a la adquisición de las competencias. Se ordenan en materias.
- Los *criterios de evaluación* son utilizados para graduar la adquisición de las competencias y el logro de los objetivos. Describen aquello que se quiere valorar y el alumnado debe lograr. Cada materia tiene sus propios criterios de evaluación y responden a lo que se quiere conseguir en la misma.
- Los *estándares de aprendizaje evaluables* se entienden como concreciones de los criterios de evaluación. Deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Así mismo contribuyen y facilitan el diseño de pruebas estandarizadas y comparables.

Dada la interrelación que existe entre los tres componentes del currículo se ha decidido presentarlos todos en un solo capítulo para que quede claro como están vinculados en un mismo contexto.

Aunque el concepto de derivada es introducido formalmente por primera vez en 1º de Bachillerato, ya se usa de manera implícita en otras materias desde cursos anteriores, como por ejemplo en Física y química de 2º de la ESO, cuando se trabaja con la velocidad instantánea y media, y la aceleración.

Los conocimientos previos necesarios para abordar las derivadas en 1º de bachillerato se pueden dividir en dos grandes grupos: Conceptuales y Operativos.

Los contenidos conceptuales están relacionados con “entender” las derivadas y para qué sirven, mientras que los operativos son necesarios para trabajar analíticamente con las derivadas. Dada la organización actual del currículo vigente, los contenidos conceptuales están presentes mayoritariamente dentro de los bloques análisis y funciones, mientras que los contenidos operativos están dentro de los bloques de números y álgebra, análisis y funciones.

Dentro del grupo Operativo, prácticamente la totalidad de los contenidos y sus criterios de evaluación y estándares de aprendizaje asociados del Bloque 2: Números y Álgebra entre 1º y 4º de la ESO son claves y necesarios para trabajar con las derivadas. Para que no interfieran con el resto del estudio, más ligado al grupo de contenidos conceptuales, se han trasladado al final de este documento (Anexo B).

Para estudiar la continuidad de los ítems a lo largo de los diferentes cursos se asocian a los siguientes descriptores:

**D1. Interpretación geométrica de la derivada**

Para la interpretación geométrica de la derivada hacen falta conceptos relacionados con la representación gráfica de funciones que trabajados principalmente en los cursos de 1º y 2º de la ESO. También son necesarios conceptos geométricos como el paralelismo y perpendicularidad que se introducen en 1º ESO y se trabajan de nuevo en 4º ESO de las enseñanzas académicas. Además, se necesitan muchos de los contenidos relacionados con el análisis de funciones y estudio de familias de funciones que se introducen ininterrumpidamente desde 1º ESO hasta 2º de Bachillerato.

**D2. Definición analítica de la derivada y criterios de derivabilidad**

La definición analítica de la derivada como el límite de la tasa de variación media cuando el tamaño del intervalo tiende a cero necesita del concepto de límite, que se introduce por primera vez en 1º de Bachillerato, generalmente antes del tema de derivadas, y en el que se sigue trabajando en 2º de Bachillerato.

El contenido de continuidad se trabaja en 1º, 2º y 4º ESO (Aplicadas) y en 1º y 2º de Bachillerato.

**D3. Cálculo de la función derivada mediante tablas y regla de la cadena**

Para el cálculo de la función derivada mediante tablas y la regla de la cadena hacen falta prácticamente la totalidad de los contenidos de los Bloques 2: Números y Álgebra y Bloque 4: Funciones de 1º a 4º de la ESO y del Bloque 3: Análisis de 1º y 2º de Bachillerato.

**D4. Aplicaciones de la derivada**

Dentro de las aplicaciones de la derivada se trabajan principalmente las siguientes: cálculo de máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, monotonía, curvatura y optimización. Algunos de estos contenidos ya se conocen y se utilizan desde 1º ESO, pero hasta 1º de Bachillerato no se estudian como aplicaciones de la derivada.

A continuación, se presentan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables clasificados por estos descriptores en la ESO y Bachillerato.

## 1.1. Derivadas en el currículo: ESO

Las siguientes tablas describen la progresión de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables asociadas a cada descriptor a lo largo de la ESO.

En 1º de ESO se introduce el concepto de función y su representación, además de comenzar con el análisis simple de funciones (máximos y mínimos relativos, continuidad, puntos de corte con los ejes, monotonía) e introducir el álgebra de funciones. En 2º de la ESO se profundiza en todo lo visto anteriormente pero además se presentan los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado con una incógnita. También se estudia en detalle la recta, y se fomenta el uso de medios tecnológicos para la construcción e interpretación de funciones.

En 3º de la ESO se profundiza en el álgebra de funciones (más aún en las enseñanzas académicas) y se incluye el estudio de las funciones cuadráticas. En 4º de la ESO se sigue indagando en el álgebra de funciones, además de estudiar las inecuaciones y la función logarítmica (en las enseñanzas académicas). Es muy importante también que se incorpora el concepto de tasa de variación media, uno de los conceptos previos a la derivada de más importancia.

Los criterios de evaluación están intrínsicamente relacionados con los contenidos del currículo, sin embargo, en 1º y 2º de la ESO se establecen criterios de evaluación relacionados con algebra, representación y análisis básicos de funciones de forma abstracta, mientras que en 3º y 4º de la ESO estos criterios de evaluación se enlazan en mayor medida con situaciones y problemas de la vida cotidiana. Esto es posible gracias a que en cursos superiores los adolescentes poseen una mayor capacidad de abstracción que hace posible encadenar los criterios de evaluación con el mundo real.

Los estándares de aprendizaje evaluables siguen la línea de los criterios de evaluación, como concreciones de estos que son. No obstante, en los primeros cursos de la ESO se refieren a reconocer, localizar o interpretar, mientras que conforme se avanza en los cursos se empieza a pedir a los alumnos que construyan, asocien, analicen, calculen y determinen, escalando así en los niveles de la taxonomía de Bloom [6]

## 1.2. Derivadas en el currículo: Bachillerato

1º de Bachillerato es el curso donde se presenta por primera vez el concepto de derivada, justo después de los límites, que son necesarios, junto con la tasa de variación media, para explicar las derivadas. Además, todo el trabajo previo de representación gráfica y análisis de funciones, junto con los contenidos relacionados con el estudio de familias de funciones posibilita que los estudiantes puedan asimilar de forma adecuada el concepto de derivada. En 2º de Bachillerato se sigue ampliando contenidos de aplicaciones de la derivada, y se sigue trabajando con límites y continuidad.

Dado que las derivadas se introducen en 1º de bachillerato, en estos dos cursos los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables están directamente relacionados con este contenido. En 1º de bachillerato los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables son más abstractos, ya que el contenido es introducido poco a poco. Sin embargo, en segundo de bachillerato se espera que el alumno sea capaz de aplicar la derivada en situaciones reales y sacar conclusiones por sí mismo.

| | D | CONTENIDO | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
|---|---|---|---|---|
| 1º ESO | D1 | Paralelismo y perpendicularidad (B3. Geometría)<br>Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). (B4. Funciones) | Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto. (B4. Funciones) | Reconoce la posición relativa de dos o más rectas en el plano y las propiedades que de dicha posición se derivan: paralelismo, ángulos, perpendicularidad en construcciones geométricas. (B3. Geometría)<br>Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto. Reconoce si una gráfica representa o no una función. (B4. Funciones) |
| | D2 | Continuidad y discontinuidad (B4. Funciones) | Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales. (B4. Funciones) | Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características. (B4. Funciones) |
| | D3 | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones |
| | D4 | Máximos y mínimos relativos, Crecimiento y decrecimiento (B4. Funciones) | Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales. (B4. Funciones) | Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características. (B4. Funciones) |

| | D | CONTENIDO | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
|---|---|---|---|---|
| 2º ESO | D1 | El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).<br>Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas (B4. Funciones) | Comprender el concepto de función. Utilizar las diferentes formas de presentación y reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales (B2. Números y funciones) | Reconoce si una gráfica representa o no una función. Reconoce y representa una función lineal o afín a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente<br>Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores<br>Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento. (B4. Funciones) |
| | D2 | Continuidad y discontinuidad (B4. Funciones) | | Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características. (B4. Funciones) |
| | D3 | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones |
| | D4 | Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas. (B4. Funciones) | | Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características. (B4. Funciones) |

| | D | CONTENIDO | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
|---|---|---|---|---|
| 3º ESO ACADEMICAS | D1 | Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Expresiones de la ecuación de la recta. (B4. Funciones). | Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. (B4. Funciones). | Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto. (B4. Funciones). |
| | D2 | | | |
| | D3 | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones |
| | D4 | | | |

| | D | CONTENIDO | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
|---|---|---|---|---|
| 3º ESO APLICADAS | D1 | Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Expresiones de la ecuación de la recta. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana. (B4. Funciones). | Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. (B4. Funciones). Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. (B4. Funciones) | Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto-pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente. (B4. Funciones). |
| | D2 | | | |
| | D3 | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones |
| | D4 | | | |

| | D | CONTENIDO | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
|---|---|---|---|---|
| 4º ESO ACADEMICAS | D1 | Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales. (B4. Funciones)<br>Análisis de resultados. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo (B4. Funciones) | Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. (B4. Funciones)<br>Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales. (B4. Funciones) | Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.<br>Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. (B4. Funciones)<br>Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos. (B4. Funciones) |
| | D2 | | | |
| | D3 | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones |
| | D4 | | | Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. (B4. Funciones) |

| | D | CONTENIDO | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
|---|---|---|---|---|
| 4º ESO APLICADAS | D1 | La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo (B4. Funciones) | Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. (B4. Funciones) | Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos. Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas (B4. Funciones) |
| | D2 | | | |
| | D3 | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones | B2. Números y Álgebra y B4. Funciones |
| | D4 | | Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales. (B4. Funciones) | Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad).<br>Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores. (B4. Funciones)<br>Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. (B4. Funciones) |

| | D | CONTENIDO | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
|---|---|---|---|---|
| 1º BACHILLERATO | D1 | Representación gráfica de funciones<br>Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal. (B.3. Análisis) | Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global. (G3. Análisis)<br>Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos. (G3. Análisis) | Selecciona de manera adecuada y razonada ejes, unidades, dominio y escalas, y reconoce e identifica los errores de interpretación derivados de una mala elección. (G3. Análisis)<br>Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis (G3. Análisis) |
| | D2 | Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales. Indeterminaciones. Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades. Derivada de una función en un punto. Función derivada (B.3. Análisis) | Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo. (G3. Análisis) | Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones. (G3. Análisis)<br>Determina la continuidad de la función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función, para extraer conclusiones en situaciones reales. (G3. Análisis)<br>Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. (G3. Análisis)<br>Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto. (G3. Análisis) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | D3. | B2. Números y Álgebra y B3. Funciones<br>Cálculo de derivadas. Regla de la cadena. (B.3. Análisis) | B2. Números y Álgebra y B3. Funciones<br>Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos. (G3. Análisis) | B2. Números y Álgebra y B3. Funciones<br>Reconoce analítica y gráficamente las funciones reales de variable real elementales. (G3. Análisis)<br>Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.<br>Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena. (G3. Análisis) |
| | D4 | | | Interpreta las propiedades globales y locales de las funciones, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados. (G3. Análisis)<br>Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones. (G3. Análisis) |

<table>
<tr><th></th><th>D</th><th>CONTENIDO</th><th>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</th><th>ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1º BACHILLERATO C.C.S.S.</td><td>D1</td><td>Tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales. (B.3. Análisis)<br>Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto.</td><td>Interpretar y representar gráficas de funciones reales teniendo en cuenta sus características y su relación con fenómenos sociales. Conocer e interpretar geométricamente la tasa de variación media en un intervalo y en un punto como aproximación al concepto de derivada (G3. Análisis)</td><td>Selecciona de manera adecuada y razonadamente ejes, unidades y escalas reconociendo e identificando los errores de interpretación derivados de una mala elección, para realizar representaciones gráficas de funciones. (G3. Análisis)<br>Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geométricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real.</td></tr>
<tr><td>D2</td><td>Idea intuitiva de límite de una función en un punto. Cálculo de límites sencillos. El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función. Aplicación al estudio de las asíntotas.<br>Función derivada. (B.3. Análisis)</td><td>Calcular límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias. Conocer el concepto de continuidad y estudiar la continuidad en un punto en funciones polinómicas, racionales, logarítmicas y exponenciales. (G3. Análisis)</td><td>Calcula límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias de una función.<br>Examina, analiza y determina la continuidad de la función en un punto para extraer conclusiones en situaciones reales. (G3. Análisis)</td></tr>
<tr><td>D3</td><td>B2. Números y Álgebra y B3. Funciones<br>Reglas de derivación de funciones elementales sencillas que sean suma, producto, cociente y composición de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas. (B.3. Análisis)</td><td>B2. Números y Álgebra y B3. Funciones<br>Utilizar las reglas de derivación para obtener la función derivada de funciones sencillas y de sus operaciones. (G3. Análisis)</td><td>B2. Números y Álgebra y B3. Funciones<br>Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función y obtener la recta tangente a una función en un punto dado. (G3. Análisis)</td></tr>
<tr><td>D4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

| | D | CONTENIDO | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
|---|---|---|---|---|
| 2º BACHILLERATO | D1 | | Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites y de optimización. (G3. Análisis) | |
| | D2 | Límite de una función en un punto y en el infinito. Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad. Teorema de Bolzano. Función derivada. Teoremas de Rolle y del valor medio. La regla de L'Hôpital. Aplicación al cálculo de límites. (B.3. Análisis) | Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello (G3. Análisis) | Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. (G3. Análisis) |
| | D3 | B2. Números y Álgebra y B3. Funciones | B2. Números y Álgebra y B3. Funciones | B2. Números y Álgebra y B3. Funciones |
| | D4 | Aplicaciones de la derivada: problemas de optimización. (B.3. Análisis) | | |

| | D | CONTENIDO | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
|---|---|---|---|---|
| 2º BACHILLERATO C.C.S.S. | D1 | | | |
| | D2 | Continuidad. Tipos de discontinuidad. Estudio de la continuidad en funciones elementales y definidas a trozos. (B.3. Análisis) | | Modeliza con ayuda de funciones problemas planteados en las ciencias sociales y los describe mediante el estudio de la continuidad, tendencias, ramas infinitas, corte con los ejes, etc.<br>Estudia la continuidad en un punto de una función elemental o definida a trozos utilizando el concepto de límite. (G3. Análisis) |
| | D3 | Aplicaciones de las derivadas al estudio de funciones polinómicas, racionales e irracionales sencillas, exponenciales y logarítimicas.<br>Problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía. (B.3. Análisis)<br>Estudio y representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas sencillas a partir de sus propiedades locales y globales (B.3. Análisis) | Utilizar el cálculo de derivadas para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función, para resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social y extraer conclusiones del fenómeno analizado. (G3. Análisis) | Representa funciones y obtiene la expresión algebraica a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales y extrae conclusiones en problemas derivados de situaciones reales (G3. Análisis)<br>Plantea problemas de optimización sobre fenómenos relacionados con las ciencias sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto. (G3. Análisis) |
| | D4 | | | |

# Capítulo 2

## Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las derivadas en el currículo vigente

En este capítulo se analizan los ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las derivadas en el currículo vigente de los cursos de 1º y 2º de Bachillerato. Típicamente se deberían de estudiar también los cursos de 3º y 4º de la ESO, pero dado que el contenido se introduce por primera vez en 1º de Bachillerato, tan solo se podrían presentar ejercicios, problemas y cuestiones tipo relacionados con conceptos previos necesarios para las derivadas, lo cual no tiene demasiado interés, y, dado que el número de contenidos necesarios, esto sería inabordable en un análisis concienzudo, perdiéndose la perspectiva y la funcionalidad de este. Por estas razones se ha decidido hacer un análisis exhaustivo tan solo de los cursos y unidades didácticas donde el contenido se trabaja de forma explícita.

## 2.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato

En el libro de 1º de Bachillerato analizado [5] los temas relacionados con las derivadas se encuentran en el Bloque III: Funciones. En esta sección se analizarán dos de ellos: Cálculo de derivadas y aplicaciones de las derivadas.

El Tema 10: Cálculo de derivadas del libro de texto está plagado de ejercicios de aplicación directa de los contenidos, pero hay muy pocos problemas contextualizados. Sin embargo, el Tema 11: Aplicaciones de las derivadas tiene muchos problemas contextualizados muy interesantes donde se ponen a prueba los conocimientos adquiridos en el Tema 10.

| 1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO | Cálculo Tasa Variación Media |
|---|---|
| **1** Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:<br>a) $f(x) = 2x - 3$ en $[1, 4]$<br>b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en $[2, 4]$<br>c) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+3}$ en $[1, 2]$<br>d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $[-1, 2]$ | |
| Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo | |

| 1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO | Cálculo Derivada de una función en un punto |
|---|---|
| **2** Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:<br>a) $f(x) = 3x - 2$ en $x = 1$<br>b) $f(x) = -2x + 1$ en $x = -3$<br>c) $f(x) = x^2 - 4$ en $x = -2$<br>d) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en $x = 1$ | |
| Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular la tasa de derivada de una función en un punto | |

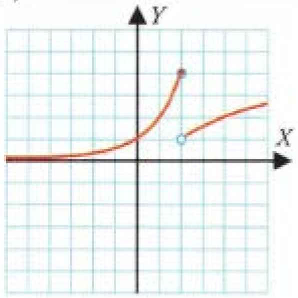
| 1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO | Cálculo de las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a una función en un punto |
|---|---|
| **4** Aplica la definición de derivada y calcula:<br>a) La derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $x = 3$<br>b) Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 3$<br>c) Representa la función $f(x)$ y las rectas. | |
| Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular las ecuaciones de las rectas normal y tangente a una función en un punto, además de la derivada en el punto y representar gráficamente la función | |

| 1º BACH- T10<br>PROBLEMA TIPO | Cálculo Tasa Variación Media en problema contextualizado |
|---|---|
| **5** El número de bacterias que hay en un cultivo se expresa mediante la fórmula $f(x) = 2^x$, donde $x$ representa el número de horas. Calcula el crecimiento medio por hora de las bacterias entre las 3 y las 5 horas. | |
| Problema donde se pide calcular la tasa de variación media dentro de un contexto sin decir explícitamente que esto es lo que se busca | |

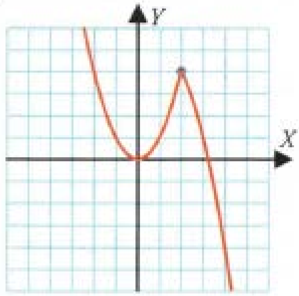
<table>
<tr><td>1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Determinar la derivabilidad de funciones en función de su representación gráfica</td></tr>
<tr><td colspan="2">

**6** Analiza si las funciones representadas admiten derivada en el punto de abscisa $x = 2$

a)




b)




</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio donde se pide determinar la derivabilidad de funciones en función de su representación gráfica</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de la función derivada</td></tr>
<tr><td colspan="2">

**7** Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = 4x - 3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular las la función derivada de varias funciones mediante aplicación de la definición</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de la derivada en varios puntos de una función usando la función derivada</td></tr>
<tr><td colspan="2">

**8** Calcula el valor de la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos de abscisa:

a) $x = 2$

b) $x = -1$

c) $x = 0$

d) $x = 1$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular la derivada en varios puntos de una función pidiendo de manera implícita que se calcule antes la función derivada.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1º BACH- T10<br>PROBLEMA TIPO</td><td>Cálculo del valor de x en el que la derivada de una función vale un valor</td></tr>
<tr><td colspan="2">9 Calcula el valor de la abscisa en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 + x$ vale 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema en el cual se pregunta lo mismo pero de forma diferente, de forma que el estudiante ha de pensar como resolverlo para encontrar la solución.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de función derivada aplicando las reglas de derivación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:<br>11 a) $y = 8$ b) $y = -3x + 1$<br>12 a) $y = x^2 + 4x - 5$ b) $y = x^4 - 3x^2 + 1$<br>13 a) $y = (x - 8)^2$ b) $y = (3x^2 + 1)^3$<br>14 a) $y = (x^2 + 4)^2$ b) $y = (x^4 - 1)^3$<br>15 a) $y = \sqrt{x^2 - 3}$ b) $y = \sqrt[4]{x^3 - 2x}$<br>16 a) $y = e^{3x-2}$ b) $y = 2^{x^2+5}$<br>17 a) $y = \ln(3x - 2)$ b) $y = \log(2x^3 + x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular las funciones derivadas mediante usando las reglas de derivación</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de parámetros para que una función sea derivable en un punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">22 Calcula el valor de los parámetros $a$ y $b$ para que la función:<br>$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$<br>sea derivable en $x = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular los parámetros para que una función sea derivable en un punto</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de máximos, mínimos relativos y monotonía de una función</td></tr>
<tr><td colspan="2">23 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular los máximos y mínimos relativos y monotonía de una función.</td></tr>
</table>

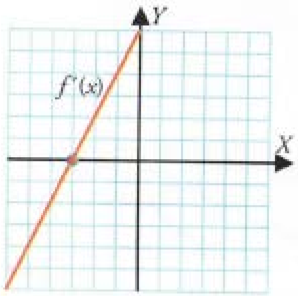
| 1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO | Cálculo de puntos de inflexión y curvatura de una función |
|---|---|
| **36** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \frac{x-1}{x^2}$ | |
| Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular los puntos de inflexión y curvatura de una función | |

| 1º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO | Clasificación de puntos singulares de una función |
|---|---|
| **17** Clasifica los puntos singulares de la función: $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ | |
| Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular los parámetros para que una función sea derivable en un punto | |

| 1º BACH- T10<br>PROBLEMA TIPO | Problema donde se han de usar las derivadas para calcular el máximo relativo de la función |
|---|---|
| **18** Los beneficios anuales en millones de euros de una empresa que fabrica *pendrive* vienen dados por el precio en euros de la unidad de producción, según la fórmula: $f(x) = -x^2 + 14x - 13$ ¿A qué precio se debe vender cada *pendrive* para obtener el máximo beneficio? Calcula también dicho beneficio máximo. | |
| Problema contextualizado donde hay que usar las derivadas para calcular el máximo relativo de una función. | |

| 1º BACH- T11<br>EJERCICIO TIPO | Ejercicio donde se han de calcular los parámetros para que la función tenga un máximo/mínimo/punto de inflexión en un punto |
|---|---|
| **10** Calcula el valor de los coeficientes $a$ y $b$ para que la función: $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(1, -4)$ | |
| Ejercicio tipo donde se han de calcular los parámetros para que una función cumpla una determinada característica.. | |

<table>
<tr><td>1º BACH- T11<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Representación gráfica de funciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">10 Representa gráficamente la función:<br>$$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio tipo donde hay que representar una función y ayudarse de las derivadas para hacerlo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1º BACH- T11<br>PROBLEMA TIPO</td><td>Problema donde ha de extraer información de f(x) mediante la gráfica de f’(x)</td></tr>
<tr><td colspan="2">13 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:<br><br><br>Resuelve los siguientes apartados:<br>a) Estudia la monotonía.<br>b) Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = -2$<br>c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.<br>d) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema muy interesante donde ha de extraer información de f(x) mediante la gráfica de f’(x)</td></tr>
</table>

| 1º BACH- T11 PROBLEMA TIPO | Problemas contextualizados donde hace falta usar las derivadas para resolverlos |
|---|---|

**14** Un movimiento está definido por la función:

$$e(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3$$

donde $t$ se mide en segundos, y $e$, en metros.

Calcula:

a) El espacio recorrido al cabo de 5 s

b) La velocidad.

c) La velocidad al cabo de 5 s

d) La aceleración.

e) La aceleración al cabo de 5 s

**15** La resistencia de una viga, en función del peso que soporta, viene dada por $R(x) = 3x - x^2$, donde $x$ se mide en toneladas.

Calcula el peso máximo que soporta.

**16** Los beneficios de una empresa, en función del número de piezas producidas, vienen dados por:

$$B(x) = -3x^4 + 28x^3 - 84x^2 + 96x - 25$$

donde $x$ se mide en miles de piezas. Calcula el número de piezas que tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

**17** La concentración en la sangre de un medicamento puesto mediante una inyección intravenosa viene dado por:

$$C(t) = 4 - \frac{t^2}{16}$$

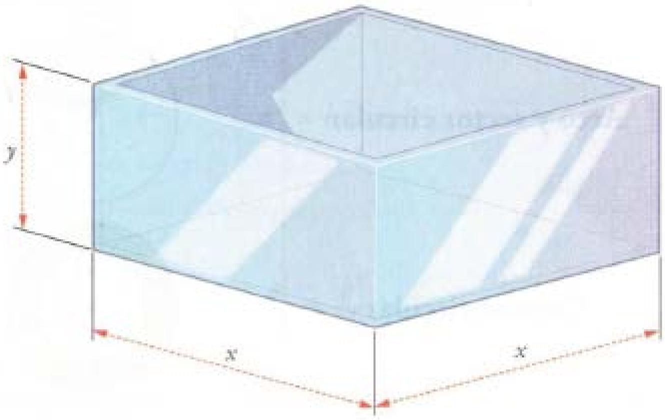
donde $t$ es el número de horas que transcurren desde que se inyecta el medicamento en la sangre.

Calcula la velocidad de la concentración.

Problemas contextualizado piden de forma implícita calcular derivadas, tasas de variación media, máximos, mínimos, etc.

| 1º BACH- T11 PROBLEMA TIPO | Problemas de optimización |
|---|---|

**20** Se quiere construir un recipiente en forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 24 m$^2$, ¿qué dimensiones debe tener la caja?




Problema contextualizado de optimización.

## 2.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de Bachillerato

En el libro de 2º de Bachillerato analizado [6] los temas relacionados con las derivadas se encuentran en el Bloque III: Análisis. En este bloque todos los temas tienen algo que ver con las derivadas. No obstante, nos centraremos en el T10: Cálculo de derivadas y T11: Aplicaciones de las derivadas, dejando de lado los límites.

En el T10: Cálculo de las derivadas se repiten prácticamente idénticos problemas / ejercicios tipo que en 1º de Bachillerato. Llama la atención que no haya ningún problema contextualizado, aunque los ejercicios y problemas son más complicados y exigentes que en 1º de Bachillerato. Como novedad, aparecen algunos nuevos tipos de ejercicios / problemas que necesitan de usar la regla de la cadena, o el cálculo de derivadas de funciones implícitas. Además, hay un problema muy interesante donde hay que relacionar las gráficas de funciones y sus derivadas.

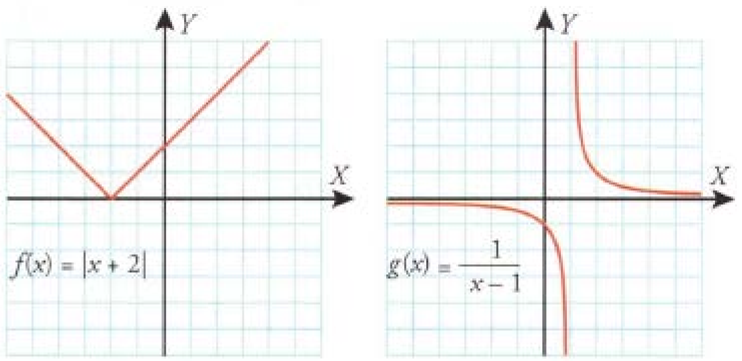
En el T11 vuelven a aparecer los problemas de cálculo de máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura, y los problemas de optimización contextualizados. Además, se añaden los nuevos contenidos del teorema de rolle, del valor medio y de cálculo de límites mediante la regla de L'Hopital.

<table>
<tr><td>2º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo Tasa Variación Media</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:<br>a) $f(x) = 2 - 3x$ en $[1, 2]$<br>b) $f(x) = x^2 - 4$ en $[2, 3]$<br>c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en $[2, 4]$<br>d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $[-1, 2]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH - T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo Derivada de una función en un punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los valores que se indican:<br>a) $f(x) = 5$ en $x = 2$<br>b) $f(x) = x$ en $x = 5$<br>c) $f(x) = 3x + 2$ en $x = 4$<br>d) $f(x) = 2x^2$ en $x = -1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular la tasa de derivada de una función en un punto</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a una función en un punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 Aplica la definición de derivada y calcula:<br>a) La derivada de $f(x) = x^2 - 4x$ en $x = 1$<br>b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$<br>Representa la gráfica de $f(x)$ y la recta tangente para $x = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular las ecuaciones de las rectas normal y tangente a una función en un punto, además de la derivada en el punto y representar gráficamente la función</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T10<br>PROBLEMA TIPO</td><td>Cálculo de valores de función y función derivada a partir de la recta tangente / normal</td></tr>
<tr><td colspan="2">5 La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $A(2, 1)$ pasa por el punto $B(6, -1)$. Calcula el valor de $f(2)$ y $f'(2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema donde se pide calcular valores de función y función derivada a partir de la recta tangente / normal</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Determinar la derivabilidad de funciones en función de su representación gráfica</td></tr>
<tr><td colspan="2">8 Dadas las gráficas de las funciones siguientes, analiza si dichas funciones son derivables en los puntos que se indican en cada caso:<br>a) $f(x) = |x + 2|$ en $x = -2$<br>b) $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $x = 1$<br>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio donde se pide determinar la derivabilidad de funciones en función de su representación gráfica</td></tr>
</table>

| 2º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO | Cálculo de función derivada aplicando las reglas de derivación |
|---|---|

**aplica la teoría**

[illegible] en función de $x$:

[illegible] $-2x+1$

[illegible] $(2x-1)^5$

[illegible] $3x$

[illegible] $\sqrt{7x+3}$

[illegible] sen $8x$

[illegible]

[illegible] $x$

**16** $y = \ln(x^2 + x)$

**17** $y = x^{\cos x}$

**18** $y = \operatorname{sen} x^3$

**19** $y = 3^{5x}$

**20** $y = \operatorname{arc\,tg} x^2$

**21** $y = \sqrt[4]{5x}$

**22** $y = \operatorname{tg}(x^2 + 1)$

**23** $y = \dfrac{2}{(3x-1)^4}$

**24** $y = \sec 5x$

**25** $y = x^x$

**26** $y = \arccos 3x^2$

**27** $y = \ln \dfrac{x^2 - 2}{2x - 1}$

**28** $y = 8 \operatorname{sen} 5x$

**29** $y = x^2 - \cos x$

**30** $y = \ln(x^2 - 4)^3$

**31** $y = \log(5x + 2)$

**32** $y = \operatorname{cosec} x^2$

**33** $y = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$

**34** $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$

**35** $x^2 + y^2 = 1$

**36** $x^2 - xy + y^2 = 4$

**37** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular las funciones derivadas mediante usando las reglas de derivación

| 2º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO | Cálculo de parámetros para que una función sea derivable en un punto |
|---|---|

**40** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

determina el valor de $k$ para que la función sea derivable en $x = 1$

Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular los parámetros para que una función sea derivable en un punto

| 2º BACH- T10<br>PROBLEMA TIPO | Regla de la cadena para resolución de problema |
|---|---|

**13** Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Enuncia la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

b) Dada la función:

$$h(x) = e^{\operatorname{sen}(f(x))}$$

calcula el valor de su derivada en $x = 0$, sabiendo que:

$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$

Problema donde hay que aplicar la regla de la cadena para resolverlo

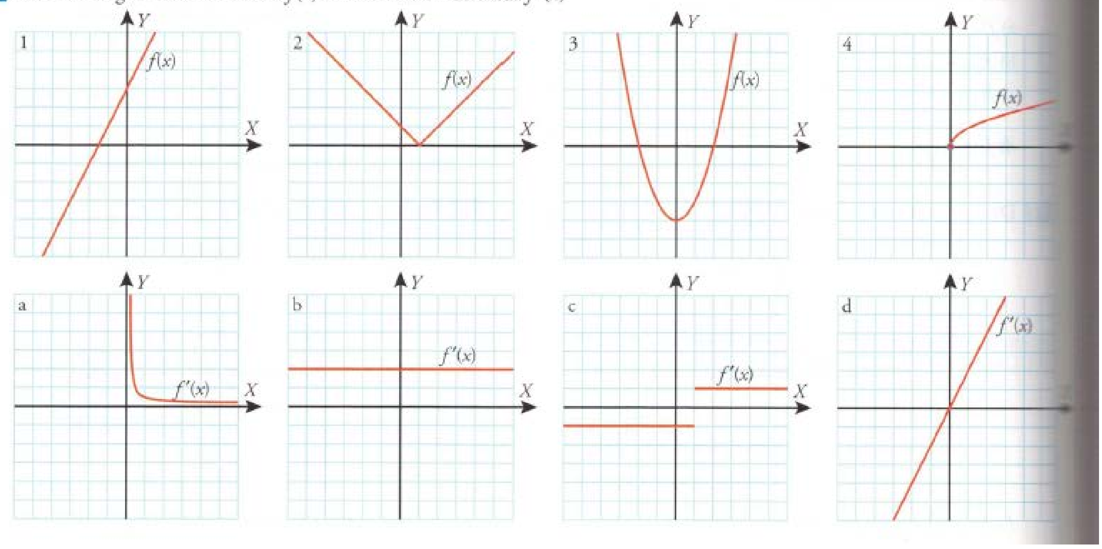
<table>
<tr><td>2º BACH- T10<br>PROBLEMA TIPO</td><td>Problema de rectas tangentes / normales con condiciones de puntos y / o pendientes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se considera la función:<br>$$f(x) = x^2 + m$$<br>donde $m > 0$ es una constante.<br>a) Para cada valor de $m$ halla el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.<br>b) Halla el valor de $m$ para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio tipo donde se han de calcular los parámetros para que una función cumpla una determinada característica.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Ejercicio tipo pero con respuesta tipo test</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 Halla la derivada de la función:<br>$$y = e^{\cos x}$$<br>☐ $y' = \operatorname{sen} x \, e^{\cos x}$<br>☐ $y' = -\cos x \, e^{\cos x}$<br>☐ $y' = \operatorname{sen} x \, e^{\operatorname{sen} x}$<br>☐ $y' = -\operatorname{sen} x \, e^{\cos x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio tipo como los vistos anterior / posterior – mente pero con respuesta tipo test</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T10<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de derivadas de funciones implícitas</td></tr>
<tr><td colspan="2">79 Halla la derivada de la función implícita $xy = 4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de cálculo de derivadas de funciones implícitas</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T10<br>CUESTIÓN TIPO</td><td>Asociación de gráficas de f(x) con f'(x)</td></tr>
<tr><td colspan="2">

**85** Asocia cada gráfica de la función $f(x)$ con su función derivada $f'(x)$




</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema muy interesante donde hay que asociar las gráficas de las funciones y sus derivadas, de forma que el alumno ha de calcular mentalmente o gráficamente la derivada de las funciones</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1º BACH- T10<br>PROBLEMA TIPO</td><td>Cálculo derivadas en problema contextualizado</td></tr>
<tr><td colspan="2">

**179** Una población de 400 bacterias de un cultivo se sabe que varía según la función

$$f(x) = 400\,\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

donde $x$ se mide en minutos. ¿Qué velocidad de crecimiento instantáneo tendrá la población en $t = 3$ minutos?

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema donde se pide calcular la derivada de una función dentro de un contexto sin decir explícitamente que esto es lo que se busca</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T11<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de máximos, mínimos relativos y monotonía de una función</td></tr>
<tr><td colspan="2">

**3** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función: $y = \sqrt{x^2 + 4}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular los máximos y mínimos relativos y monotonía de una función.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T11<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de puntos de inflexión y curvatura de una función</td></tr>
<tr><td colspan="2">8 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = xe^x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio de aplicación directa de la teoría donde se pide calcular los puntos de inflexión y curvatura de una función</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T11<br>PROBLEMA TIPO</td><td>Discutir si el teorema de rolle es aplicable</td></tr>
<tr><td colspan="2">12 Discute si es aplicable el teorema de Rolle a las siguientes funciones en los intervalos que se dan:<br>a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$<br>b) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}$ en $[-1, 1]$<br>c) $f(x) = x - \sqrt{x}$ en $[0, 1]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">El problema pregunta si es posible aplicar el teorema de rolle a unas funciones en un intervalo para comprobar si el estudiante ha entendido el teorema</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T11<br>PROBLEMA TIPO</td><td>Discutir si el teorema del valor medio es aplicable</td></tr>
<tr><td colspan="2">13 Discute si es aplicable el teorema del Valor Medio a las siguientes funciones en los intervalos $[a, b]$ que se dan, y en caso afirmativo calcula los valores de $c \in (a, b)$ tales que:<br>$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$<br>a) $f(x) = \sqrt{2 - x}$ en $[-2, 1]$   b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $[0, 1]$<br>c) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$   d) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ en $[1, 4]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">El problema pregunta si es posible aplicar el teorema del valor medio a unas funciones en un intervalo para comprobar si el estudiante ha entendido el teorema</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2º BACH- T11<br>EJERCICIO TIPO</td><td>Cálculo de límites mediante teorema de L’Hopital</td></tr>
<tr><td colspan="2">[illegible] los siguientes límites:<br>[illegible] $\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x}$   17 $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$   20 $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$   23 $\lim_{x\to 0} x^x$<br>[illegible] $\lim \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$   18 $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$   21 $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$   24 $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$<br>[illegible] $\lim x \ln x$   19 $\lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x - e^x + \operatorname{sen} 3x}{x^2}$   22 $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{3}{\ln x} - \frac{2}{x-1}\right)$   25 $\lim_{x\to +\infty} e^{-x}\sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">El problema presenta unos límites que han de ser resueltos usando el teorema de L’Hopital y por tanto, usando las derivadas.</td></tr>
</table>

| 2º BACH- T11<br>EJERCICIO TIPO | Cálculo de límites mediante teorema de L'Hopital |
|---|---|

Calcula los siguientes límites:

[illegible] $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$

[illegible] $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}$

[illegible] $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

17 $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

18 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x^3}$

19 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 2x - e^x + \text{sen } 3x}{x^2}$

20 $\lim\limits_{x \to 0} (\text{cotg } x)^{\text{sen } x}$

21 $\lim\limits_{x \to 0} x^{\text{sen } x}$

22 $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{3}{\ln x} - \dfrac{2}{x-1}\right)$

23 $\lim\limits_{x \to 0} x^x$

24 $\lim\limits_{x \to 0^+} (\text{sen } x)^x$

25 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}\sqrt{x}$

El problema presenta unos límites que han de ser resueltos usando el teorema de L'Hopital y por tanto, usando las derivadas.

| 2º BACH- T11<br>PROBLEMA TIPO | Problemas de optimización |
|---|---|

[illegible] Calcula dos números cuya suma sea 100 y su producto sea máximo.

[illegible] Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mida 64 m y su área sea máxima.

[illegible] Calcula el área del mayor triángulo isósceles inscrito en un círculo de radio 4 cm

29 Calcula la altura y el radio que debe tener un bote cilíndrico cuya área total, incluyendo las dos tapas, es de 150 $cm^2$, para que su volumen sea máximo.

30 Dada la siguiente función:

$$f(x) = x^2$$

encuentra el punto de su gráfica que está más cerca del punto $A(0, 2)$

Problemas donde el alumno ha de enunciar el problema de forma algebraica y resolver mediante cálculo de máximos relativos.

# Capítulo 3
# Resultados

En los dos capítulos anteriores se han analizado tanto el desarrollo de las derivadas en el currículo oficial como los ejercicios y problemas tipo que se pueden encontrar en los libros de texto. En este capítulo se presentan las ausencias, presencias, y, en definitiva, la coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

## 3.1. Ausencias, presencias y coherencia entre el currículo y los libros de texto

Como ya se ha dicho con anterioridad, las derivadas se introducen al alumno en 1º de Bachillerato. No obstante, desde 1º de la ESO se van presentando contenidos relacionados con las derivadas poco a poco. En los dos primeros cursos sin mucho rigor, principalmente como interpretaciones gráficas: paralelismo, perpendicularidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, continuidad, discontinuidad, etc. Estos conceptos son tremendamente útiles, sobre todo cuando se aborda la interpretación geométrica de la derivada y la tasa de variación media en 1º de Bachillerato.

En 3º y 4º de la ESO se trabaja mucho con los números y el álgebra, y se sigue profundizando en el análisis de funciones, y descripción cualitativa de gráficas, cada vez con más rigor matemático, introduciendo progresivamente diferentes familias de funciones, de forma que al llegar a 1º de Bachillerato los alumnos están preparados para empezar a trabajar con límites y derivadas.

Los contenidos realmente relacionados con las derivadas comienzan, al menos en todos los libros de texto de 1º de Bachillerato que he tenido ocasión de consultar, en el tema anterior a la unidad didáctica de derivadas, centrado en límites y continuidad. Con respecto a las derivadas, el currículo pasa por alto algo que esta presente en absolutamente todos los libros, que es la aplicación de las derivadas de cálculo de máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura y optimización, que si bien es cierto que podría estar incluido en el estándar de aprendizaje evaluable (tremendamente general) de: “Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.”

Otro punto para comentar es que en el currículo se pide específicamente como estándar de aprendizaje evaluable que se deriven funciones que son composición de funciones elementales mediante la regla de la cadena, contenido que está muy poco presente en los libros de texto que he tenido ocasión de consultar.

Los estándares de aprendizaje evaluables sobre cálculo de derivadas y determinación del valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto sí que son tratados con intensidad en los libros de texto.

También llama la atención que las integrales no están presentes en el currículo de 1º de bachillerato y sin embargo si en el libro de texto.

En segundo de bachillerato sí que aparece como contenido la aplicación de las derivadas al estudio de funciones y los problemas de optimización, cosa que se trata en los libros de texto de 1º y 2º de bachillerato con gran énfasis.

A mi parecer los libros de texto de 2º de bachillerato son mucho más ajustados a lo que dice el currículo, ya que probablemente el examen de acceso a la universidad está basado en el currículo oficial, y, al ser 2º de bachillerato un curso muy orientado a la realización de este examen, la necesidad de ajustarse al currículo es aún mayor que en otros cursos.

Como conclusión, se puede decir que los libros de texto están adecuados al currículo. Principalmente porque para cumplir la ley, así debe ser. No obstante, aunque todos los contenidos y estándares de aprendizaje del currículo están presentes en los libros, algunos contenidos son tratados de manera extremadamente fugaz (como la regla de la cadena). Asimismo, contenidos que no están presentes en el currículo oficial sí que se han añadido a los libros de texto (como el caso de las integrales en 1º de bachillerato).

# Parte II:

# Análisis de un proceso de estudio de las derivadas en 1º de Bachillerato nocturno

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio de las derivadas en 1º de Bachillerato nocturno, y se divide en cuatro capítulos.

En el capítulo 4 se hace un análisis del libro de texto de referencia con respecto al contenido objeto de estudio. En el capítulo 5 se indaga en las dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica. El Capítulo 6 presenta el proceso de estudio, y finalmente, en el capítulo 7 se documenta el proceso de experimentación.

Por último, se presenta una síntesis del trabajo y las cuestiones abiertas.

# Capítulo 4
# Derivadas en el libro de texto de referencia

En los capítulos anteriores se ha analizado cómo evolucionan el currículo y los libros de texto al respecto de las derivadas a lo largo de las etapas de la ESO y el Bachillerato. A partir de este capítulo el estudio se centra en el curso y unidad didáctica en el cual se realiza el proceso educativo y en el libro de texto de referencia. En este capítulo se analiza la unidad didáctica de derivadas del libro de texto de referencia [5].

Para analizar tanto la unidad didáctica del libro de texto como los objetos matemáticos involucrados se va a utilizar el enfoque onto-semiótico, desarrollado por Godino y colaboradores [8]

## 4.1. Objetos matemáticos involucrados

En [8] se utiliza el enfoque onto-semiótico para describir los objetos matemáticos involucrados en una unidad didáctica, siendo estos: lenguaje, conceptos, procedimiento, situaciones, procedimientos y argumentos.

### 4.1.1 Lenguaje

Según [8], el lenguaje se divide según su naturaleza en lenguaje verbal, gráfico o simbólico. La siguiente tabla muestra los contenidos de la unidad didáctica que se pueden catalogar de acuerdo con cada tipo de lenguaje.

| Tipo de lenguaje | Contenido |
|---|---|
| Verbal | Pendiente, recta, secante, media, tangente, derivada, función, tasa de variación media, punto, intervalo, cociente, variación, variable independiente, tasa de variación instantánea, derivada en un punto, función derivada, recta secante, continuidad, derivabilidad, valor absoluto, reglas de derivación, regla de la cadena, funciones con parámetros, funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, producto, cociente, suma, máximos y mínimos relativos, intervalos, monotonía, crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión, curvatura, puntos críticos. Demostraciones. |
| Gráfico | Interpretación geométrica de la derivada y de la tasa de variación media, recta tangente y normal a la función en un punto. Recta secante, pendiente de una recta, funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, producto, cociente, suma, máximos y mínimos relativos, intervalos, monotonía, crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión, curvatura, puntos críticos. |
| Simbólico | Expresiones algebraicas como Tasa Variación Media [a,b] = (f(b)-f(a))/(b-a)<br>Límites: $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ |

| | |
|---|---|
| | Función derivada y derivadas sucesivas f ’(x), f ’’ (x) … f $^{n}$’ (x)<br>Números reales, intervalos de la recta real abiertos (a,b), cerrados [a,b] y semiabiertos (a,b], [a,b).<br>Símbolos generales: $\mathbb{R}$, -∞, +∞, etc. |

### 4.1.2 Conceptos

Los conceptos se pueden catalogar en previos y emergentes, siendo los primeros los que los estudiantes ya deberían de haber adquirido al comenzar la unidad didáctica y los emergentes los que son nuevos y se estudiaran a lo largo de esta.

| Tipo de concepto | Contenido |
|---|---|
| Previos | Pendiente, recta, secante, media, tangente, función, tasa de variación media, punto, intervalo, cociente, variación, variable independiente, recta secante, continuidad, valor absoluto, funciones con parámetros, funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, producto, cociente, suma, máximos y mínimos relativos, intervalos, monotonía, crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión, curvatura, puntos críticos. Demostraciones. |
| Emergente | Función derivada y derivada en un punto. tasa de variación instantánea, cálculo de las ecuaciones de la recta secante y normal a una función en un punto mediante la derivada en el punto. Estudio de la derivabilidad en funciones con parámetros. Reglas de derivación, regla de la cadena, Cálculo de máximos y mínimos relativos, intervalos, monotonía, crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión, curvatura, puntos críticos usando la derivada. |

### 4.1.3 Procedimientos

Los procedimientos que se estudian en la unidad didáctica son:

- Cálculo de:

  - tasa de variación media.

  - derivada de la función en un punto y función derivada mediante límites, tabla de derivadas y regla de la cadena

  - ecuaciones de las rectas normal y tangente a la función en un punto.

  - máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión, curvatura y puntos críticos como aplicación de la derivada.

- Estudio de:

  - Derivabilidad de funciones con parámetros

### 4.1.4 Situaciones

Ejercicios / Problemas descontextualizados donde se pide calcular la tasa de variación media en un intervalo

Ejercicios / Problemas descontextualizados donde se pide aplicar la definición de derivada y calcular la derivada en un punto

Ejercicios / Problemas descontextualizados donde se pide aplicar la definición de derivada y calcular la función derivada

Ejercicios / Problemas descontextualizados donde se pide aplicar la definición de derivada y calcular la recta normal a la función en un punto

Ejercicios / Problemas descontextualizados donde se pide aplicar la definición de derivada y calcular la recta tangente a la función en un punto

Ejercicios / Problemas descontextualizados donde se pide representar una función y/o la recta tangente a un punto y/o la recta normal a un punto y/o la función derivada.

Problemas contextualizados donde se ha de usar la definición de derivada para llegar a la solución.

Ejercicios / Problemas descontextualizados donde hay que determinar si una función es derivable gráfica o analíticamente.

Ejercicios en los que hay que calcular la función derivada aplicando las reglas de derivación.

Ejercicios / Problemas descontextualizados donde se pide calcular los máximos y mínimos relativos y/o monotonía y/o puntos de inflexión y/o curvatura y/o puntos críticos de una función.

### 4.1.5 Propiedades y definiciones

La tasa de variación media de la función y=f(x) en el intervalo [a,b] es el cociente entre la variación de la función f(x) y la variación de la variable independiente, x, en el intervalo.

La derivada de una función y=f(x) en x=a es el límite de las tasas de variación media en el intervalo [a,a+h] cuando h tiende a cero.

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

La función derivada de una función f(x) es la que asocia a cada valor de la variable x el valor de la derivada en ese punto.

La derivada de una suma es igual a la suma de derivadas

La derivada de un producto es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar, más el primer factor por la derivada del segundo.

La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador por la derivada del denominador y partido por el denominador al cuadrado.

Un máximo relativo de una función es un punto en el que la función es mayor que en los puntos que están muy cercanos

Un mínimo relativo de una función es un punto en el que la función es menor que en los puntos que están muy cercanos.

Un punto de inflexión de una función es un punto en el que la función cambia de convexa a cóncava o viceversa.

Un punto crítico o singular es un punto en el que la primera derivada se anula.

## 4.2. Análisis global de la unidad didáctica

En esta sección se presenta un análisis de la unidad didáctica que se utiliza en el proceso de estudio del libro de referencia [5].

### 4.2.1. Descripción de la estructura y contenido del libro de texto

La unidad didáctica está presente dentro del Bloque III: Tema 10. Cálculo de derivadas, y está dividida en 5 secciones. Se puede consultar en su totalidad al final de este documento en el Anexo A. La estructura del tema sigue el siguiente esquema:

0.1 Introducción

0.2 Esquema de la unidad didáctica

1. La derivada
    - 1.1 Tasa de variación media e interpretación geométrica
    - 1.2 Derivada de una función en un punto
    - 1.3 Interpretación geométrica de la derivada y rectas normal y tangentes a una función en un punto
2. La función derivada
    - 2.1 Continuidad y derivabilidad
    - 2.2 Función derivada
3. Reglas de derivación
    - 3.1 Tabla de derivadas
    - 3.2 Regla de la cadena
    - 3.3 Estudio de la derivabilidad en funciones con parámetros
4. Máximos, mínimos relativos y monotonía
    - 4.1 Máximos y mínimos relativos
    - 4.2 Monotonía
5. Puntos de inflexión y curvatura
    - 5.1 Puntos de inflexión
    - 5.2 Curvatura
    - 5.3 Puntos críticos o singulares

| |
|---|
| 6. Profundización: Demostraciones |
| 7. Ejercicios y problemas resueltos |
| 8. Ejercicios y problemas propuestos |
| 9. Cálculo de derivadas mediante software. |

El capítulo comienza con una pequeña introducción donde se da visibilidad a lo que se va a ver en el tema y a las aplicaciones de las derivadas. Junto a esta introducción se presenta un esquema de la unidad didáctica que ayuda a los alumnos tener una visión global de la misma.

10 Cálculo de derivadas

Introducción

En muchas ocasiones se realizan cálculos de valores medios; por ejemplo, la velocidad media ha sido de 110 km/h, el consumo medio de agua ha sido de 50 L/día, etc. Los cálculos de valores medios son importantes, pero en algunos problemas es mucho más importante el valor instantáneo de una magnitud; por ejemplo, la velocidad que un coche lleva en un determinado instante durante una competición. Para resolver este problema es necesario el concepto de variación instantánea de una magnitud en función de otra, que es el concepto de derivada. Además de la velocidad, la derivada tiene una interpretación geométrica que se basa en la misma idea: el cálculo de una recta tangente a una curva en un punto.

En esta unidad se define el concepto de derivada de una función en un punto a partir de la tasa de variación media en un intervalo y se estudia su interpretación geométrica. A continuación se analiza la relación entre continuidad y derivabilidad y se calcula la función derivada.

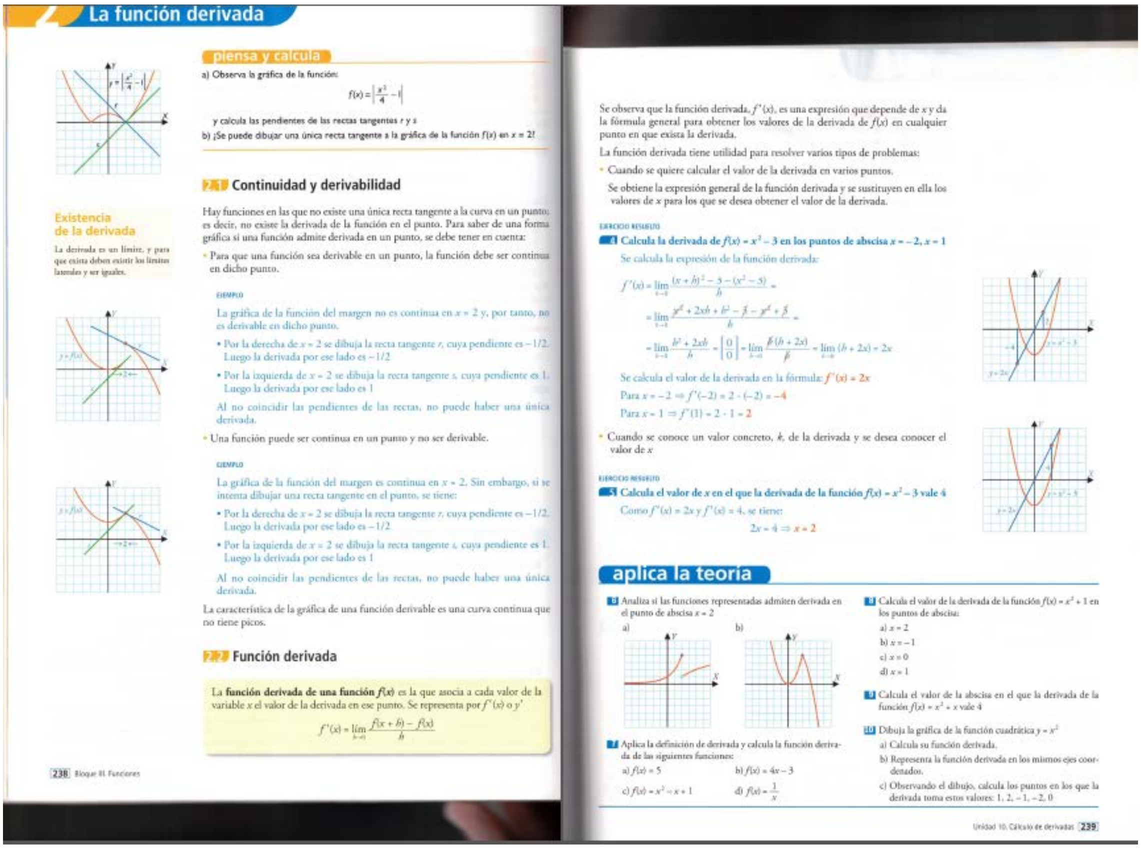
El estudio de las reglas de derivación permite automatizar el cálculo de derivadas de una forma sencilla. Dichas reglas se dan clasificadas para los distintos tipos de funciones.

El concepto de derivada se aplica en la resolución de problemas para calcular velocidades, determinar rectas tangentes a una curva en un punto y realizar el estudio analítico de una función; en concreto, la determinación de máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura.

Organiza tus ideas

La derivada
es la
tasa de variación instantánea
que mide
la velocidad de crecimiento de una funcion
se calcula con
reglas de derivación
se utiliza para
resolver problemas sobre:
- velocidades
- recta tangente y normal
- máximo y mínimo relativos
- monotonía
- puntos de inflexión
- curvatura
- puntos críticos o singulares

A continuación, le siguen las 5 secciones donde se desarrolla el contenido matemático. Todas las secciones siguen el mismo esquema. Primero, una sección llamada “piensa y calcula” donde se hace una pregunta relacionada con el contenido matemático que se va a trabajar a continuación y se pide al alumno que responda a unas cuestiones usando sus conocimientos previos e intuición. Después se presenta el contenido matemático, ilustrado con ejemplos resueltos al final de cada explicación. Por último, se aportan unos ejercicios que cubren todo el contenido matemático explicado con un nivel de dificultad básico.



2 La función derivada

piensa y calcula

a) Observa la gráfica de la función:

$f(x) = \left|\frac{x^2}{4} - 1\right|$

y calcula las pendientes de las rectas tangentes r y s

b) ¿Se puede dibujar una única recta tangente a la gráfica de la función f(x) en x = 2?

2.1 Continuidad y derivabilidad

Hay funciones en las que no existe una única recta tangente a la curva en un punto; es decir, no existe la derivada de la función en el punto. Para saber de una forma gráfica si una función admite derivada en un punto, se debe tener en cuenta:

- Para que una función sea derivable en un punto, la función debe ser continua en dicho punto.

EJEMPLO

La gráfica de la función del margen no es continua en x = 2 y, por tanto, no es derivable en dicho punto.

- Por la derecha de x = 2 se dibuja la recta tangente r, cuya pendiente es −1/2. Luego la derivada por ese lado es −1/2
- Por la izquierda de x = 2 se dibuja la recta tangente s, cuya pendiente es 1. Luego la derivada por ese lado es 1

Al no coincidir las pendientes de las rectas, no puede haber una única derivada.

- Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable.

EJEMPLO

La gráfica de la función del margen es continua en x = 2. Sin embargo, si se intenta dibujar una recta tangente en el punto, se tiene:

- Por la derecha de x = 2 se dibuja la recta tangente r, cuya pendiente es −1/2. Luego la derivada por ese lado es −1/2
- Por la izquierda de x = 2 se dibuja la recta tangente s, cuya pendiente es 1. Luego la derivada por ese lado es 1

Al no coincidir las pendientes de las rectas, no puede haber una única derivada.

La característica de la gráfica de una función derivable es una curva continua que no tiene picos.

Existencia de la derivada

La derivada es un límite, y para que exista deben existir los límites laterales y ser iguales.

2.2 Función derivada

La **función derivada de una función** $f(x)$ es la que asocia a cada valor de la variable x el valor de la derivada en ese punto. Se representa por $f'(x)$ o $y'$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

238 Bloque III. Funciones

Se observa que la función derivada, $f'(x)$, es una expresión que depende de x y da la fórmula general para obtener los valores de la derivada de f(x) en cualquier punto en que exista la derivada.

La función derivada tiene utilidad para resolver varios tipos de problemas:

- Cuando se quiere calcular el valor de la derivada en varios puntos.

Se obtiene la expresión general de la función derivada y se sustituyen en ella los valores de x para los que se desea obtener el valor de la derivada.

EJERCICIO RESUELTO

4 Calcula la derivada de $f(x) = x^2 - 3$ en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 1$

Se calcula la expresión de la función derivada:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3 - x^2 + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x$

Se calcula el valor de la derivada en la fórmula: $f'(x) = 2x$

Para $x = -2 \Rightarrow f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$

Para $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

- Cuando se conoce un valor concreto, k, de la derivada y se desea conocer el valor de x

EJERCICIO RESUELTO

5 Calcula el valor de x en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 - 3$ vale 4

Como $f'(x) = 2x$ y $f'(x) = 4$, se tiene:

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$

aplica la teoría

6 Analiza si las funciones representadas admiten derivada en el punto de abscisa x = 2

a) b)

7 Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = 4x - 3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

8 Calcula el valor de la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos de abscisa:

a) $x = 2$

b) $x = -1$

c) $x = 0$

d) $x = 1$

9 Calcula el valor de la abscisa en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 + x$ vale 4

10 Dibuja la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$

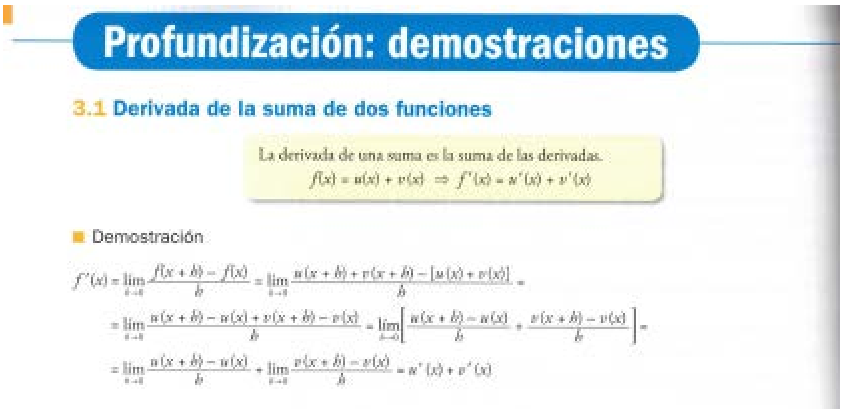
a) Calcula su función derivada.

b) Representa la función derivada en los mismos ejes coordenados.

c) Observando el dibujo, calcula los puntos en los que la derivada toma estos valores: 1, 2, −1, −2, 0

Unidad 10. Cálculo de derivadas 239

Después de presentar todos los contenidos se profundiza en la unidad didáctica con demostraciones de parte de los contenidos vistos, y, finalmente, se presentan varios ejercicios y problemas resueltos.



Profundización: demostraciones

3.1 Derivada de la suma de dos funciones

La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$$

# Ejercicios y problemas resueltos

## Ejercicios de derivadas

**12** Halla la primera derivada de:

$$f(x) = \frac{x+8}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - 1 \cdot (x+8)}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x} - 8}{(x+2)^2} = -\frac{6}{(x+2)^2}$$

**13** Halla las dos primeras derivadas de:

$$f(x) = \frac{4}{x^2-4}$$

$$f'(x) = -\frac{8x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{8(x^2-4)^2 - 4x\cancel{(x^2-4)}8x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} = -\frac{8(x^2-4) - 4x \cdot 8x}{(x^2-4)^3} =$$

$$= -\frac{8x^2 - 32 - 32x^2}{(x^2-4)^3} = -\frac{-24x^2-32}{(x^2-4)^3} = \frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$$

A continuación, se presenta una selección de ejercicios y problemas propuestos, catalogados como básicos y para ampliar o profundizar para que los estudiantes pongan en práctica lo aprendido.

# Ejercicios y problemas propuestos

## 1 La derivada

**39** Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = -3x + 5$ en $[-1, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 6x - 4$ en $[1, 3]$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ en $[-1, 3]$

d) $f(x) = \sqrt{x+4}$ en $[-3, 0]$

**40** Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 5x - 3$ en $x = -4$

b) $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$

c) $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = -1$

d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ en $x = 1$

**41** Aplica la definición de derivada y calcula:

a) La derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 1$ en $x = 1$

b) Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

**42** El número de llamadas que se reciben en una centralita es:

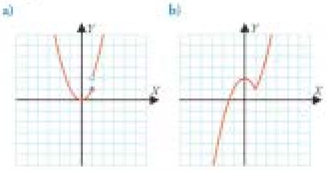
$$f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

donde $x$ se expresa en horas, y $f(x)$, en miles de llamadas. Calcula el número medio de llamadas que se reciben entre las 2 y las 4 horas; y entre las 4 y las 6 horas. ¿Cómo interpretas los resultados?

## 2 La función derivada

**43** Analiza si las funciones representadas admiten derivada en $x = 1$

a) b)




**44** Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = \frac{3}{x+2}$

**45** Aplicando la definición de derivada, halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Calcula:

a) El valor de la derivada en el punto de abscisa $x = 2$

b) El valor de la abscisa en el que la derivada vale 1/4

## 3 Reglas de derivación

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

**46** a) $y = 3x^2 + x - 7$ b) $y = -x^3 + x^2 - 6x$

**47** a) $y = 2x^3 + x^2 - 5$ b) $y = 3x^5 + 5x + 1$

**48** a) $y = (x^3 - 1)^2$ b) $y = (x^2 + 1)^4$

**49** a) $y = (2x^3 + x^2)^3$ b) $y = (2x^4 - 1)^3$

**50** a) $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ b) $y = \sqrt{x^3 - x}$

**51** a) $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$

**52** a) $y = e^{2x^3}$ b) $y = e^{3x}$

**53** a) $y = 7^{2x-1}$ b) $y = e^{-x^2+2}$

**54** a) $y = \ln(5x^3 - 3x)$ b) $y = \ln(x^4 - x^2)$

**55** a) $y = \log(2x^3 + 5)$ b) $y = \log(x^2 + 4x + 1)$

**56** a) $y = \operatorname{sen}(3x^2 - 4x)$ b) $y = \cos(4x^3 + x)$

**57** a) $y = \operatorname{sen}(x^2 + 2)$ b) $y = \operatorname{tg}(x^2 - 1)$

**58** a) $y = e^x + \cos x$ b) $y = x\,e^x$

**59** a) $y = \frac{2x+3}{x^2-2}$ b) $y = \frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

**60** Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^4 + 2x^2$ b) $y = \frac{x^3}{6} - 2x$

c) $y = \frac{x^2-1}{x}$ d) $y = \frac{x^2+4}{2x}$

**61** Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^3 + 3x$ b) $y = x^4 - 4x^2$

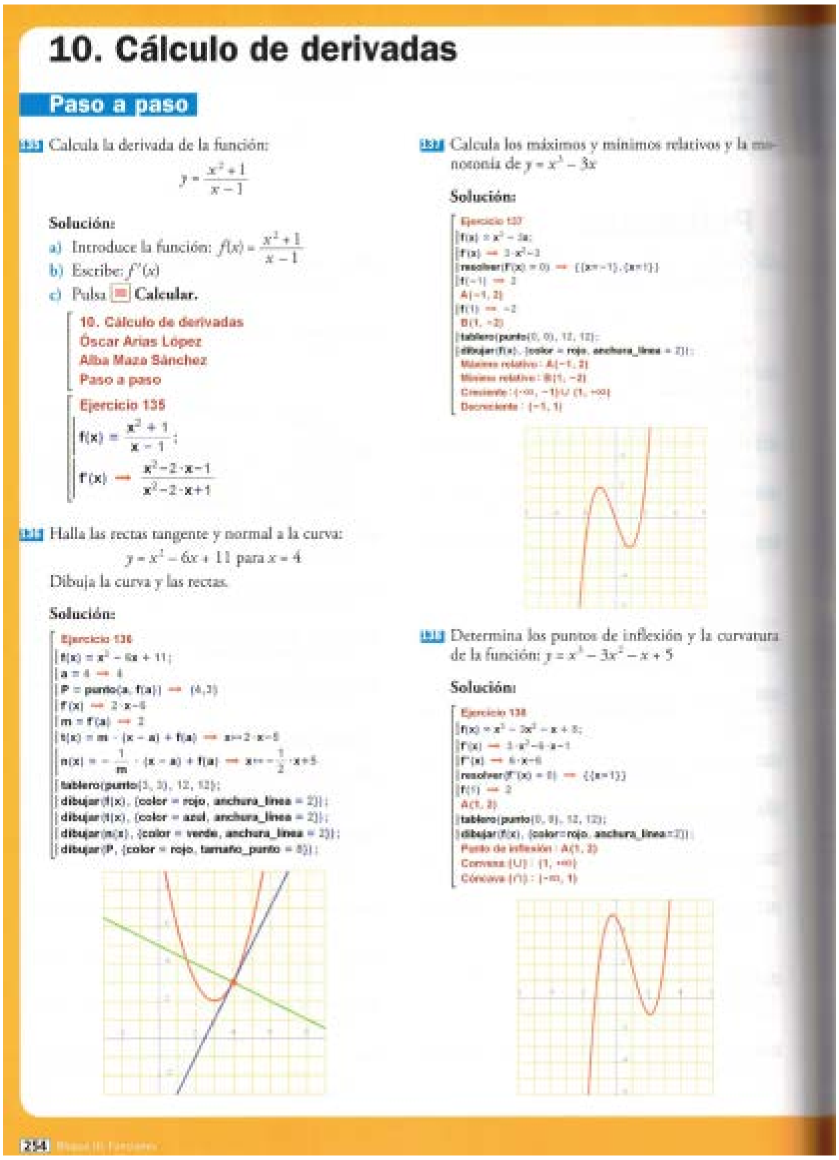
c) $y = \frac{6}{x^2+3}$ d) $y = \frac{x^2-x-2}{1-x}$

## 4 Máximos, mínimos relativos y monotonía

**62** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x$$

Por último, una sección que relaciona el contenido matemático con las TICs explica cómo usar el software que acompaña el libro de texto en un CD-ROM para calcular funciones derivadas y graficarlas usando un PC.



# 10. Cálculo de derivadas

**Paso a paso**

**135** Calcula la derivada de la función:

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}$$

**Solución:**

a) Introduce la función: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

b) Escribe: $f'(x)$

c) Pulsa **Calcular.**

10. Cálculo de derivadas
Óscar Arias López
Alba Maza Sánchez
Paso a paso

Ejercicio 135

$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1};$

$f'(x) \rightarrow \frac{x^2-2\cdot x-1}{x^2-2\cdot x+1}$

**136** Halla las rectas tangente y normal a la curva:

$$y = x^2 - 6x + 11 \text{ para } x = 4$$

Dibuja la curva y las rectas.

**Solución:**

**137** Calcula los máximos y mínimos relativos y la monotonía de $y = x^3 - 3x$

**Solución:**

**138** Determina los puntos de inflexión y la curvatura de la función: $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$

**Solución:**

254 Bloque III. Funciones

## 4.2.2. Reflexión sobre la estructura y contenido del libro de texto

Considero que tanto la estructura como el orden de los contenidos son correctos, aunque mejorables. Las 5 partes están bien diferenciadas, aunque es cierto que se pueden dividir en 3 grandes secciones.

Las primeras dos secciones, 1. La derivada y 2. La función derivada son muy conceptuales, ya que se centran tanto en la definición analítica de la derivada y la tasa de variación media como en sus interpretaciones geométricas, las rectas tangentes y normales a la curva en un punto y los criterios de derivabilidad. Estas secciones son la base conceptual de la unidad didáctica, y utilizan contenidos tan vitales como el cálculo de límites o la interpretación de gráficas de funciones.

Empezar por la tasa de variación media y su interpretación geométrica introduce magníficamente a la derivada en un punto, ya que se explica como el límite de la tasa de variación media cuando el intervalo tiende a cero. Junto con la derivada en un punto se introducen las fórmulas de las rectas tangente y normal a un punto.

A continuación, se explican los criterios de derivabilidad, seguidos de la definición formal de función derivada, aunque considero que es mejor explicar la función derivada antes de la derivada en un punto, como se desarrolla más adelante.

Una vez vista la base teórica y relativamente abstracta, se abordan las reglas de derivación mediante una tabla de derivadas poco interrelacionada, seguida de una explicación muy poco didáctica de la regla de la cadena y un caso práctico de estudio de derivabilidad en funciones con parámetros. Esta segunda parte está centrada en el análisis y la operatividad, dejando de lado todo concepto o contexto real. El alumno aprende a calcular la función derivada de forma mecánica.

Finalmente, la tercera parte está centrada en algunas aplicaciones de las derivadas, como son el cálculo de máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión, curvatura y puntos críticos, dando una receta en forma de tabla de cómo resolver ejercicios.

Esta tabla de receta podría ser mucho más clara, y, como se comenta más adelante, creo que se deberían de tratar los puntos críticos de forma integrada y no al final de la sección. También sería mejorable si se mostraran gráficas de la función y sus tres primeras derivadas para ejemplificar el porqué de las definiciones y propiedades que se enuncian, ya que tal como está planteada esta sección en la unidad didáctica no hay nada que entender, solo que aplicar las reglas que se aprenden.

Finalmente, la teoría de la unidad didáctica termina con la sección de demostraciones, donde se demuestran algunas de las operaciones con derivadas y las fórmulas de las derivadas de la exponencial y del seno. Aunque esto está bien, me gustaría que también hubiera demostraciones de cómo se pueden obtener la mayoría de las fórmulas de la tabla a partir de unas pocas.

Una vez terminada la teoría, se encuentran los ejercicios y problemas resueltos, que, aun siendo muy sencillos, cubren prácticamente todo lo visto en la unidad didáctica.

Al final de la unidad didáctica se presentan ejercicios y problemas tanto para resolver a mano como a ordenador. Los ejercicios para ordenador, como se comenta más adelante, son del todo inútiles. Sin embargo, la colección de problemas que se suministra para que los estudiantes practiquen lo aprendido es extensa, aunque echo en falta la presencia de problemas y ejercicios más contextualizados, algo fácil de hacer en una unidad didáctica de derivadas.

A continuación, se desarrollan algunos de los puntos comentados en esta sección.

#### 4.2.2.1 De lo particular a lo general.

El libro aborda ciertos contenidos pasando de lo particular a lo general, cuando yo creo que resulta más claro y didáctico el ir de lo general a lo particular.

Dos ejemplos de esto son el explicar la derivada en un punto antes que la función derivada, y también el no abordar como catalogar los puntos críticos hasta el final del tema.

En el primer caso, los alumnos que no manejan la teoría de funciones con soltura pueden tener ciertas dificultades para entender la diferencia entre ambos contenidos. En el segundo caso, les surge la duda de como catalogar estos puntos críticos al comienzo de la sección, y cuando se les da la solución se encuentra fuera de contexto.

#### 4.2.2.2 Ausencia del concepto de derivada lateral

Cuando se habla de derivabilidad, no se habla de derivadas laterales. Solo se les da la idea intuitiva de que la función no puede tener picos. Bien es cierto que esta intuición es útil, pero poco más costaría el introducir la definición formal de las derivadas laterales de forma que puedan trabajar con funciones analíticamente y entender mejor el concepto.

#### 4.2.2.4 Tabla de derivadas inconexa.

La mayor parte de las fórmulas que se presentan en la tabla de derivadas se pueden extraer de otras, de forma que los estudiantes no tienen por qué memorizar tantas fórmulas. Echo de menos una sección donde se explicite esto.

#### 4.2.2.4 La regla de la cadena

La regla de la cadena pasa totalmente desapercibida. Apenas se le dedica un párrafo y un ejemplo, cuando es la base para poder derivar función compuestas.

#### 4.2.2.5 Ausencia de problemas contextualizados

Debería haber más problemas contextualizados que den utilidad real a las derivadas. Es fácil generar problemas con texto donde se les dé contexto a las funciones que se plantean y se haga pensar a los alumnos más allá de la aplicación de una receta.

#### 4.2.2.6 TIC poco útiles

El libro utiliza un software que acompaña al libro en un CD-ROM. Sin embargo, sería mucho más conveniente para el alumno que se explicara como realizar esto mismo con aplicaciones mucho más extendidas y gratuitas como OCTAVE o GEOGEBRA, o plataformas web como MATHEMATICA de forma que estos conocimientos tengan una aplicación real a lo largo de su vida estudiantil o profesional.

### 4.2.3. Comparación con matemáticas orientadas a las ciencias sociales

Comparando la unidad didáctica del texto de referencia [5] con el que se utiliza en el centro para las matemáticas orientadas a las ciencias sociales [9] se comprueba que ambas unidades didácticas son exactamente iguales (palabra a palabra) salvo la sección del libro de referencia 3.3: Estudio de la derivabilidad de funciones con parámetros, que en el texto orientado a las ciencias sociales es sustituido por las secciones 3.3: Aplicación de las reglas de derivación y 3.4: Derivadas sucesivas.

Esto con toda probabilidad es debido a los estándares de aprendizaje evaluables del currículo [2], donde en el caso de las Matemáticas de 1º de Bachillerato existe un estándar de aprendizaje evaluable que dice: “Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto”. (G3. Análisis), mientras que en el caso del currículo de las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales no está presente.

# Capítulo 5

# Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

Este capítulo presenta las dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica. Entendemos la dificultad como una situación, circunstancia u obstáculo difícil de resolver o superar, y, error, como un fallo que se comete aun teniendo los conocimientos y medios para no cometerlo.

## 5.1. Dificultades

Las derivadas se introducen por primera vez al alumno en esta unidad didáctica, y, por lo tanto, hay dos tipos de dificultades, las asociadas al contenido previo y las asociadas al nuevo contenido.

En el terreno de las dificultades asociadas al contenido previo, hay que tener en cuenta que el nuevo necesita de prácticamente todo lo visto anteriormente en referencia a los bloques de funciones, análisis, números y álgebra. No solo para la parte operativa, sino también para la parte conceptual.

Dentro de las dificultades operativas esta todo lo relacionado con números y álgebra de funciones. Una base no asentada en este respecto puede crear muchas dificultades para aprender el nuevo contenido. Además, los contenidos relacionados con límites y continuidad han sido aprendidos (típicamente) en la unidad didáctica anterior, por lo que, aunque están "frescos" puede que los alumnos aún no los hayan asimilado.

En cuanto a las dificultades conceptuales, está claro que, sin una buena base de representación e interpretación de funciones, el adquirir los nuevos contenidos puede resultar complicado.

Al respecto del nuevo contenido, siguiendo la misma línea que con el contenido previo, podemos dividirlo en dificultades operativas y conceptuales. Las dificultades operativas más importantes pueden ser:

- Manipulación de expresiones algebraicas de la definición de Tasa Variación Media, derivada y rectas normal y tangente a un punto.
- Cálculo de la función derivada mediante límites
- Calculo de las funciones derivadas mediante las reglas de derivación
    - Memorizar reglas de derivación
    - Identificar que regla de derivación hay que aplicar a cada función
    - Aplicar reglas de derivación correctamente
- Aplicar regla de la cadena a funciones compuestas.
- Aplicar procedimiento para estudio derivabilidad en funciones con parámetros
- Memorizar procedimiento para estudio de máximos / mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura.

En resumen, la parte operativa necesita de memorizar, saber aplicar fórmulas y procedimientos, y aplicar todo lo aprendido con anterioridad para no cometer errores en las manipulaciones algebraicas de funciones y cálculos numéricos.

Relativo a los contenidos conceptuales, las dificultades más importantes que puede afrontar el alumno son:

- Entender las interpretaciones geométricas y conceptuales de la tasa de variación media y la derivada
- Entender porque la derivada en un punto es el límite cuando el intervalo tiene a cero de la tasa de variación media
- Entender porque la derivada se llama también tasa de variación instantánea
- Entender los criterios de derivabilidad y saber analizar la derivabilidad tanto a funciones analíticas con parámetros como a funciones representadas gráficamente
- Entender el procedimiento para estudio de máximos / mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura y el porque de las reglas asociadas a este procedimiento.

## 5.2. Errores y su posible origen

Al igual que con las dificultades, hay errores que pueden cometerse debido a la no correcta asimilación de los contenidos anteriores y también errores asociados al nuevo contenido.

Si la base de manipulación de funciones, cálculo numérico, cálculo de raíces, y demás conocimientos previos no es adecuada, se podrán dar numerosos errores operativos, ya que los nuevos contenidos necesitan de los anteriores. Además, si no se afianza la base conceptual de los nuevos contenidos, los alumnos difícilmente serán capaces de resolver problemas contextualizados.

Además de estos errores que tienen como base el mal aprendizaje o consolidación de los contenidos, también se pueden dar errores puntuales aun cuando la materia se domina en profundidad. Debido a una distracción, o a un error de escritura, una fórmula puede ser recordada/escrita/aplicada erróneamente, y un procedimiento bien aprendido puede ser alterado en una prueba escrita debido a una confusión momentánea. No obstante, una correcta asimilación de los contenidos conceptuales y un procedimiento sistemático siempre ayudara a prevenir este tipo de errores.

# Capítulo 6
# El proceso de estudio

En este capítulo se presenta la planificación que se llevó a cabo para el proceso de estudio, que se ha llevado a cabo en el IES Navarro Villoslada con alumnos de 1º de bachillerato nocturno entre el 4 de abril y el 10 de mayo de 2019 enmarcado en la asignatura de Prácticum II del MUPES de la UPNA.

Junto con la tutora del Prácticum II se pactó una planificación inicial del proceso de estudio de 10 días de la siguiente manera:

| Duración | Contenido |
|---|---|
| 2 días | Tasa Variación Media, derivada en un punto e interpretaciones geométricas. Continuidad y derivabilidad. |
| | Función derivada |
| 3 días | Cálculo de función derivada |
| 3 días | Máximos y mínimos relativos y monotonía |
| | Puntos de inflexión, curvatura y puntos críticos |
| 2 días | Margen de maniobra para imprevistos e intensificación de ejercicios |

Finalmente, se ajustó a la duración pactada de 10 sesiones añadiendo una sesión extra para la realización de la prueba escrita.

## 6.1. Distribución del tiempo de la clase

En el Bachillerato nocturno de Navarro Villoslada las sesiones tienen una duración de 45 minutos y una periodicidad de 4 días por semana. En esta sección se presenta la distribución del tiempo tal como se distribuyó durante las sesiones de trabajo.

| Sesión #01 | | 04/04/19 |
|---|---|---|
| Contenido | Duración | Comentarios |
| Introducción | 2’ | Se les pregunta a los alumnos si saben algo al respecto de las derivadas o la tasa de variación media. Se les explica por encima que se va a estudiar en esta unidad didáctica y para qué sirve. |
| Introducción de conceptos: Ejemplo Viaje el coche | 5’ | Se utiliza el ejemplo de un viaje en coche para introducir los conceptos de tasa de variación media y derivada en un punto como velocidad media e instantánea. Se dibuja la función |

| | | |
|---|---|---|
| | | espacio / tiempo en la pizarra para desarrollar la idea. |
| Tasa de variación media | 13’ | Se introduce la definición analítica de tasa de variación media y su interpretación geométrica. |
| Ejercicios Tasa Variación Media | 10’ | Se realizan los siguientes ejercicios del libro de texto en la pizarra resolviendo las dudas de los alumnos:<br>pp. 236 ej. 1; pp. 237 ej. 1a, 1c y 1d |
| Definición de derivada | 15’ | Se introduce la función derivada y la derivada en un punto tanto analíticamente como geométricamente como el límite de la Tasa Variación Media cuando el tamaño del intervalo tiende a 0. |

| Sesión #02 | | 05/04/19 |
|---|---|---|
| Contenido | Duración | Comentarios |
| Repaso de funciones | 10’ | Dadas las dificultades que se vieron en la clase anterior para trabajar con funciones se hace una introducción repasando los conceptos más importantes de las funciones. |
| Repaso clase anterior | 10’ | Se repasan todos los contenidos vistos en la clase anterior |
| Rectas normal y tangente | 5’ | Se introducen las fórmulas de las rectas normal y tangente |
| Ejercicios | 20’ | Se realizan los siguientes ejercicios del libro de texto en la pizarra resolviendo las dudas de los alumnos:<br>pp. 237 ej. 2a, 2d, 3, 4 y 5. |
| TAREA | - | pp. 237 ej. 4, 5 y 6.<br>pp. 250 ej. 42 y 43. |

| Sesión #03 | | 08/04/19 |
|---|---|---|
| Contenido | Duración | Comentarios |
| Repaso clases anteriores | 10’ | Se repasan todos los contenidos vistos en las clases anteriores |
| Tabla de derivadas | 35’ | Se presentan las reglas de derivación mediante tablas de derivadas para funciones polinómicas, racionales e irracionales y las operaciones haciendo ejemplos de cada tipo de función y relacionándolos todos con $y=u^n$ que |

| | | |
|---|---|---|
| | | es el caso general. |

| Sesión #04 | | 10/04/19 |
|---|---|---|
| Contenido | Duración | Comentarios |
| Repaso clases anteriores | 10’ | Se repasan todos los contenidos vistos en las clases anteriores. |
| Repaso tabla de derivadas | 15’ | Se repasan las reglas de derivación vistas en la clase anterior poniendo énfasis en las operaciones |
| Ejercicios | 20’ | Se hacen los ejercicios:<br>pp. 241. ej. 11, 12, 13, 14 y 15. |

| Sesión #05 | | 11/04/19 |
|---|---|---|
| Contenido | Duración | Comentarios |
| Repaso clases anteriores | 10’ | Se repasan todos los contenidos vistos en las clases anteriores. |
| Tabla de derivadas | 15’ | Se presentan las reglas de derivación mediante tablas de derivadas para funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. |
| Ejercicios | 20’ | Se hacen los ejercicios:<br>pp. 241. ej. 16, 17, 18, 19 y 20. |
| Tarea | - | Ejercicios:<br>pp. 250 ej. 46 - 61 |

| Sesión #06 | | 12/04/19 |
|---|---|---|
| Contenido | Duración | Comentarios |
| Repaso clases anteriores | 10’ | Se repasan todos los contenidos vistos en las clases anteriores. |
| Resolución de dudas | 10’ | Se presentan las reglas de derivación mediante tablas de derivadas para funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. |
| Ejercicios | 25’ | Ejercicios:<br>pp. 250 ej. 46 - 61 |
| TAREA | - | Se entrega la ficha de ejercicios con ejercicios del tema para que vayan solucionándolos |

| Sesión #07 | 15/04/19 |
|---|---|

| Contenido | Duración | Comentarios |
|---|---|---|
| Repaso clases anteriores | 10’ | Se repasan todos los contenidos vistos en las clases anteriores. |
| La regla de la cadena | 5’ | Se explica la regla de la cadena y se hace un ejercicio. |
| Derivabilidad | 5’ | Se explica cómo hacer ejercicios de estudio de derivabilidad a la vez que se hace un ejercicio |
| Máximos y mínimos relativos y monotonía. | 25’ | Se presentan los contenidos de máximos y mínimos relativos y monotonía mientras se resuelve un ejercicio. |
| TAREA | - | Ejercicios:<br>pp. 243 ej. 23-30 |

| Sesión #08 | | 02/05/19 |
|---|---|---|
| NOTA | - | En la sesión #7 solo hubo dos alumnos así que en esta clase se repite lo visto en la sesión anterior |
| Repaso clases anteriores | 10’ | Se repasan todos los contenidos vistos en las clases anteriores. |
| La regla de la cadena | 5’ | Se explica la regla de la cadena y se hace un ejercicio. |
| Derivabilidad | 5’ | Se explica cómo hacer ejercicios de estudio de derivabilidad a la vez que se hace un ejercicio |
| Máximos y mínimos relativos y monotonía. | 25’ | Se presentan los contenidos de máximos y mínimos relativos y monotonía mientras se resuelve un ejercicio. |
| TAREA | - | Ejercicios:<br>pp. 243 ej. 23-30 |

| Sesión #09 | | 03/05/19 |
|---|---|---|
| Contenido | Duración | Comentarios |
| Repaso clases anteriores | 10’ | Se repasan todos los contenidos vistos en las clases anteriores. |
| Puntos de inflexión, curvatura y puntos críticos. | 25’ | Se presentan los contenidos de máximos y mínimos relativos y monotonía a la vez que se hace un ejercicio. |
| Ejercicio | 10’ | Se hace el ejercicio<br>Hoja ejercicios: ej. 12c.<br>pp.243 ej 27. |

| Sesión #10 | | 06/04/19 |
|---|---|---|
| Contenido | Duración | Comentarios |
| Repaso del tema entero | 20’ | Se hace un repaso del tema entero |
| Ejercicios | 25’ | Se hacen ejercicios variados del tema donde los alumnos dicen tener dificultades. |

| Sesión #11 | | 10/04/19 |
|---|---|---|
| Contenido | Duración | Comentarios |
| Examen | 60’ | Prueba de evaluación del T10. |

## 6.2. Actividades adicionales planificadas

Como actividad adicional complementaria se les prepara una hoja de ejercicios con 12 ejercicios variados e interesantes que no forman parte del libro de texto que se trabaja en el aula. La entrega de los ejercicios resueltos se tiene en cuenta para la nota final de la asignatura. Además, se les entrega una copia de los ejercicios resueltos una semana antes del examen para que tengan ocasión de repasar con estos ejercicios resueltos la materia.

En las páginas siguientes se presentan tanto las hojas de ejercicios. La solución de los ejercicios se les entrega una semana antes del examen y se puede encontrar al final de este trabajo, en el Anexo C.

## 6.3. La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista

Al final de las sesiones se propone a los alumnos que, fuera del horario de la asignatura, realicen ejercicios básicos que hay en el libro al final de cada sección. Algunos de estos ejercicios se han especificado en la sección 6.1 al final de cada sesión. Estos son los ejercicios 1-38 de las páginas 236 a 245, que se van haciendo en clase y forman la base del aprendizaje. Lamentablemente, la mayor parte de los alumnos no realiza las tareas.

Además, se les hace entrega de una hoja de ejercicios variados e interesantes que se han visto en la sección anterior, y que también se espera de ellos que los hagan en horario fuera de clase.

Finalmente, también se les propone el que hagan ejercicios de cada bloque de los ejercicios y problemas propuestos del final del tema para practicar y profundizar. Pp. 250 – 253 ej. 39-134.

| IES NAVARRO VILLOSLADA | **MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO** | **Fecha: 12/10/2019** |
|---|---|---|
| **Ejercicios Tema 10** | | |
| **Nombre y Apellidos:** | | |
| □ **ciencias** | | |

1. El abecedario del infierno… Calcula las siguientes derivadas:
   a. $y = x^3 - 5x^2 + 6$
   b. $y = \frac{2x}{x-5x}$
   c. $y = \frac{x^2-1}{x+1}$
   d. $y = -\frac{1-x}{x-1}$
   e. $y = ln\frac{x-1}{x+1}$
   f. $y = 5x^3 + \sqrt[3]{x+1}$
   g. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
   h. $y = \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2$
   i. $y = e^{cosx}$
   j. $y = \sqrt{2x^2 + (x^2-1)^2}$
   k. $y = \frac{x^2-x}{e^x}$
   l. $y = \frac{2x^2+5x-3}{5x^2}$
   m. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$
   n. $y = e^{senx}$
   o. $y = \ln\left(\frac{e^x+2}{e^x-2}\right)$
   p. $y = 5\sqrt{x-1}$
   q. $y = log_3 x$
   r. $y = arc\ tg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
   s. $y = \frac{1}{e^x}$
   t. $y = e^{2x^3-3x^2-5} + \sqrt{x-4} - 7x + 20$
   u. $y = ln\frac{x-1}{x+1} + 2^{cosx}$
   v. $y = a^{x^2-3x-5} - 9sen^2x - 5$
   w. $y = 3arctg\sqrt{x} - 3cosx + x^{-3}$
   x. $y = 5ln\sqrt{senx} + \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}$
   y. $y = \frac{x+2}{lnx} - \cos(e^x) + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
   z. $y = ln\left(\frac{1-cosx}{1+cosx}\right)$

2. Una empresa ha comprobado que la demanda de artículos de un producto, en función del precio, viene dada por la expresión d(x) = 700 – $3x^2$

Calcula:

a. La variación de la demanda si el precio pasa de 5 a 10 euros por unidad, ¿es positiva o negativa?
b. La variación media correspondiente a los intervalos [5,10], [5,7], [5,5.1] y [5,5.01]
c. La variación instantánea en x=5

3. Calcula la derivada de y = 1/x utilizando la definición de derivada

4. Se sabe que la función f(x) es derivable en el intervalo (0,5) y verifica f(0) = f(5). ¿Cuánto valen a, b y c?

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & 0 \leq x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

5. Siendo f(x) = $(x+1)^2$ y g(x) = 3x, calcula la derivada de la función compuesta g(f(x))

6. Dada la función f(x) = $ax^2$ + bx + c, determina los coeficientes a, b y c sabiendo que la gráfica de f(x) pasa por los puntos (1,0) y (3,2) y que la recta tangente a la curva y=f(x) en x=1 tiene pendiente igual a -1.
7. Dada la función f(x)
   a. Determina a y b de modo que sea continua
   b. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ a + bx & 0 < x \leq 1 \\ 3 & 1 < x \end{cases}$$

8. Se considera la curva cuya ecuación es f(x) = $kx^3 + 6x^2$ -kx – 18
   a. ¿Cuánto debe valer k si las tangentes en los puntos A(1,f(1)) y B(-2,f(-2)) son paralelas?
   b. Determina las ecuaciones de ambas tangentes.

9. Responde a las siguientes cuestiones:
   a. Deriva $y = ln\left(\frac{senx}{cosx}\right) + e^{2x}$
   b. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{1}{1+x^2}$ en x=1

10. Calcula el valor de m para que la derivada de $f(x) = \frac{mx^2+1}{2x+m}$ en x=1/2 valga 1.

11. Calcula las tangentes a la curva dada por f(x) = $x^3$-2x, paralelas a la recta y=x.
12. Calcula los máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura de las siguientes funciones:
   a. $y = x^2 - 4x + 5$
   b. $y = x^5 + 3$
   c. $y = x^3 - 27x + 10$
   d. $y = x^2 - 4x^2 + 5x - 6$
   e. $y = \frac{x}{x^2-4}$

# Capítulo 7
# Experimentación

En este capítulo se presenta la experimentación llevada a cabo y sus conclusiones.

## 7.1. Muestra y diseño de la experimentación

La experimentación se lleva a cabo enmarcada en la asignatura de Prácticum II del MUPES de la UPNA en una clase de 1º de bachillerato nocturno del IES Navarro Villoslada nocturno.

Todos los alumnos de clase son mayores de edad, y la mayor parte trabaja al mismo tiempo que estudia. Quizás por estar en el Bachillerato nocturno, se aprecia que la mayor parte (si no todos) tienen problemas de una base matemática no consolidada y falta de hábito de estudio y trabajo en casa. No obstante, su actitud en clase es positiva y proactiva.

Aunque hay 25 alumnos matriculados en la clase, tan solo 10 acuden regularmente a clase, y solo 7 se presentan al examen.

La experimentación se realiza para evaluar la unidad didáctica de Derivadas, a la cual se han dedicado 10 sesiones completas de 45 minutos. Para la realización de la prueba escrita se ha dispuesto de una hora, usando además de la clase los 15 minutos del recreo.

## 7.2. El cuestionario y comportamientos esperados

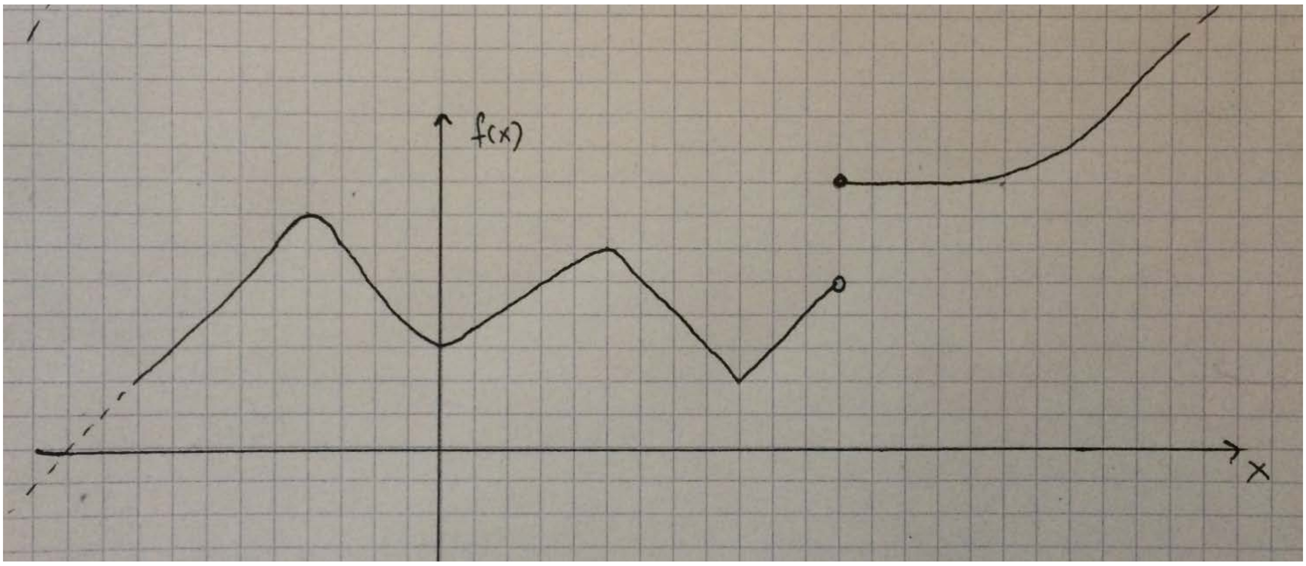
El cuestionario se ha realizado con el fin de evaluar el conocimiento de los alumnos de la unidad didáctica. Para ello se han tenido en cuenta el libro de texto, currículo [2], la visión como docente del autor y la experiencia docente previa de los profesores del departamento. Aunque hubiera sido más interesante el realizar una prueba con ejercicios contextualizados la experiencia previa con los estudiantes desaconsejaba el tomar este camino dada su dificultad para enfrentarse a este tipo de problemas.

| CURRICULO MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO [2]<br>Relacionado con la unidad didáctica de derivadas | | |
|---|---|---|
| CONTENIDOS | CRITERIOS EV. | ESTÁNDARES AP. EV. |
| Derivada de una función en un punto.<br>Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto.<br>Recta tangente y normal.<br>Función derivada.<br>Cálculo de derivadas.<br>Regla de la cadena. | Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos. | Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.<br>Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.<br>Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de |

| | | |
|---|---|---|
| | | continuidad y derivabilidad de una función en un punto. |

| | | |
|---|---|---|
| IES NAVARRO VILLOSLADA | **MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO** | **Fecha: 10/05/2019** |
| **Examen Tema 10** | | |
| **Nombre y Apellidos:** | | |
| ☐ **ciencias** | | |

1) La siguiente gráfica representa la función f(x). Considerando que cada cuadrícula tiene un lado igual a una unidad, responde a las siguientes preguntas: (2 puntos)




a) ¿Es f(x) derivable para todo valor de x? Si no lo es, escribe en qué punto o puntos no es derivable y porqué.
b) Estima la tasa de variación media en el intervalo [-3,3]
c) Estima la ecuación de la recta normal a f(x) en x=7
d) Estima la ecuación de la recta tangente a f(x) en x = -4
e) ¿En qué puntos tiene la función máximos y mínimos relativos? Especifica si son máximos o mínimos relativos.

2) Calcula las derivadas de las siguientes funciones: (4 puntos)

a) $f(x) = (x^2+3)^4$ b) $f(x) = 5x^3 + \sqrt[3]{x+1}$ c) $f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{5x^2}$

d) $f(x) = xe^{2x}$ e) $f(x) = ln(x^2+3)$ f) $f(x) = \frac{x}{senx}$

3) Dada la función $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$
a) Calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía. (2 puntos)
b) Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura. (2 puntos)

El cuestionario consta de tres preguntas, estando cada una de ellas diseñada para analizar si los estudiantes dominan diferentes contenidos.

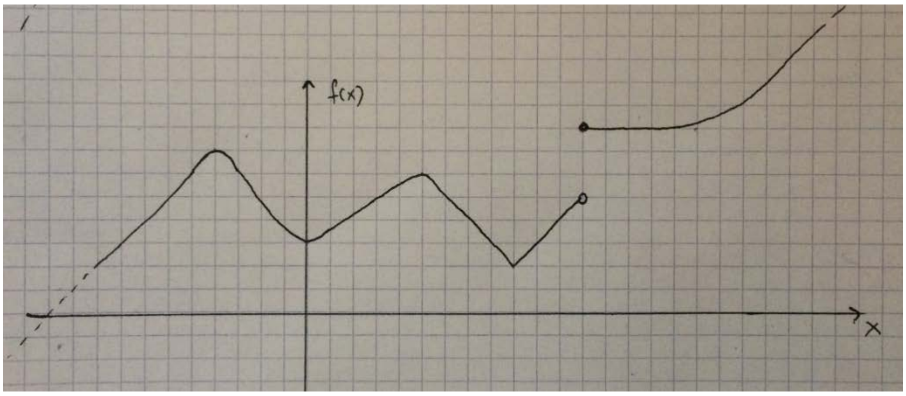
La primera está centrada en los conceptos e interpretación de gráficas, la segunda en la operativa de cálculo de la función derivada y la tercera en las aplicaciones de las derivadas.

A continuación, se estudia cada cuestión más en detalle.

### 7.2.1. Primera cuestión: El concepto es el concepto

En esta pregunta los alumnos han de poner en práctica la primera parte de la unidad didáctica.

1) La siguiente gráfica representa la función f(x). Considerando que cada cuadrícula tiene un lado igual a una unidad, responde a las siguientes preguntas: (2 puntos)




a) ¿Es f(x) derivable para todo valor de x? Si no lo es, escribe en qué punto o puntos no es derivable y porqué.
b) Estima la tasa de variación media en el intervalo [-3,3]
c) Estima la ecuación de la recta normal a f(x) en x=7
d) Estima la ecuación de la recta tangente a f(x) en x = -4
e) ¿En qué puntos tiene la función máximos y mínimos relativos? Especifica si son máximos o mínimos relativos.

Lo más importante de este ejercicio es que es diferente a lo que están acostumbrados. Han de interpretar la gráfica y extraer de esta lo que necesitan para resolver el problema de manera analítica o resolverlo de forma gráfica.
En el primer apartado han de evaluar que la función no es derivable según la gráfica y decir en que dos puntos la función no es derivable.
Los apartados b, c y d se pueden resolver de dos maneras. La que a priori puede ser más sencilla para ellos, por qué están más habituados a resolver problemas de esta manera, es de forma analítica. Escribiendo las definiciones aprendidas durante las sesiones de clase y extrayendo los datos que necesitan de la gráfica (valor de la función en determinados puntos, o la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto) para luego hacer los cálculos que necesitan. El segundo procedimiento consiste en resolver las cuestiones gráficamente.
El último apartado se basa en una interpretación de la gráfica para evaluar si conocen los conceptos de máximos y mínimos relativos.

Como ya se ha dicho, este ejercicio es diferente a los ejercicios hechos en clase, sin embargo, se ha puesto énfasis en la interpretación geométrica de la derivada y en el análisis gráfico de funciones.

| Comportamiento esperado – Posibles dificultades o errores | |
|---|---|
| 1. a) | - No conocer los criterios de derivabilidad<br>- No saber interpretar la gráfica<br>- No interpretar el punto x=9 como un punto donde las derivadas laterales no tienen el mismo valor.<br>- No interpretar las líneas discontinuas correctamente<br>- No interpretar el punto x=12 como un punto de discontinuidad. |
| 1. b) | - No conocer que es la tasa de variación media<br>- No ser capaces de encontrar el punto x=-3 o x=3.<br>- No saber la ecuación tasa de variación media<br>- No conocer la interpretación geométrica de la tasa de variación media<br>- No saber extraer los datos que necesitan de la gráfica para completar la ecuación de la recta normal: f(3), f(-3)<br>- Equivocarse al trabajar con la ecuación de la tasa de variación media |
| 1. c) | - No conocer que es la recta normal<br>- No ser capaces de encontrar el punto x=7<br>- No saber la ecuación de la recta normal<br>- No saber extraer los datos que necesitan de la gráfica para completar la ecuación de la recta normal: f(7), f'(7)<br>- Equivocarse al trabajar con la ecuación de la recta normal |
| 1. d) | - No saber que es la recta tangente<br>- No ser capaces de encontrar el punto x=-4<br>- No saber la ecuación de la recta tangente<br>- No saber extraer los datos que necesitan de la gráfica para completar la ecuación de la recta tangente: f(-4), f'(-4)<br>- Equivocarse al trabajar con la ecuación de la recta tangente |
| 1. e) | - Aunque es una pregunta muy fácil, por estar colocada al final del ejercicio puede ser que los alumnos no lleguen a leerla y por tanto no la respondan.<br>- No saber si el punto de no – continuidad es máximo o mínimo relativo o no es nada.<br>- Llamar "máximos/minimos absolutos" o "máximos/mínimos" a los "máximos / mínimos relativos". |

### 7.2.2. Segunda cuestión: No todo son conceptos.

La segunda cuestión evalúa si los estudiantes son capaces de calcular la función derivada.

2) Calcula las derivadas de las siguientes funciones: (4 puntos)

a) $f(x) = (x^2+3)^4$ b) $f(x) = 5x^3 + \sqrt[3]{x+1}$ c) $f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{5x^2}$

d) $f(x) = xe^{2x}$ e) $f(x) = ln(x^2+3)$ f) $f(x) = \frac{x}{senx}$

Se incluyen prácticamente la totalidad de las funciones y operaciones cubiertas por el libro de texto. Aunque son funciones sencillas, para resolverlas con éxito hace falta aplicar contenidos como la regla de la cadena o las tablas de derivadas de la forma correcta.

| Comportamiento esperado – Posibles dificultades o errores | |
|---|---|
| 2. a) | - No saber utilizar la regla de la cadena<br>- No conocer la derivada de $x^n$ o equivocarse al calcularla<br>- No conocer la derivada de $u^n$ o equivocarse al calcularla<br>- No saber que la derivada de la suma es la suma de derivadas.<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| 2. b) | - No saber utilizar la regla de la cadena<br>- No conocer la derivada de $x^n$<br>- No conocer la derivada de $u^n$<br>- No conocer la derivada de $\sqrt[n]{u}$<br>- No saber que la derivada de la suma es la suma de derivadas.<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| 2. c) | - No conocer la derivada de $x^n$ o equivocarse al calcularla<br>- No saber que la derivada de la suma es la suma de derivadas.<br>- No saber calcular la derivada de un cociente<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| 2. d) | - No saber utilizar la regla de la cadena<br>- No conocer la derivada de $x^n$ o equivocarse al calcularla<br>- No conocer la derivada de $e^u$ o equivocarse al calcularla<br>- No conocer la derivada de $e^x$ o equivocarse al calcularla<br>- No saber derivada del producto.<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| 2. e) | - No saber utilizar la regla de la cadena<br>- No conocer la derivada de $x^n$ o equivocarse al calcularla<br>- No conocer la derivada de logu o equivocarse al calcularla<br>- No conocer la derivada de logx o equivocarse al calcularla<br>- No saber que la derivada de la suma es la suma de derivadas.<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| 2. f) | - No conocer la derivada de $x^n$ o equivocarse al calcularla<br>- No conocer la derivada de senx o equivocarse al calcularla<br>- No saber calcular la derivada de un cociente<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |

### 7.2.3. Tercera cuestión: Los procedimientos también son importantes.

En esta cuestión se evalúa si los estudiantes dominan el procedimiento que se ha trabajado en clase para el cálculo de máximos y mínimos relativos, curvatura, monotonía y puntos de inflexión de funciones.

> 3) Dada la función $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$
>
> a) Calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía. (2 puntos)
> b) Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura. (2 puntos)

Se ha elegido una función polinómica sencilla con la idea de que los alumnos no tengan problemas con la operativa y demuestren si han estudiado

| Comportamiento esperado – Posibles dificultades o errores | |
|---|---|
| 3. a) | - No conocer el procedimiento de cálculo de max/min relativos y monotonía<br>- No saber que la derivada de la suma es la suma de derivadas.<br>- No conocer la derivada de $x^n$ o equivocarse al calcularla<br>- No saber calcular las dos raíces de f ’(x)<br>- No verificar si las raíces de f ’(x) son máximos o mínimos.<br>- No conocer los criterios de máximo / mínimo relativo (f ’’(x) > o < 0)<br>- No escribir que los posibles max/min relativos son $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$<br>- No saber que puntos usar para los intervalos en el estudio de la monotonía<br>- No escribir correctamente los intervalos de monotonía (abiertos)<br>- No usar el signo de f’(x) para estudiar la monotonía<br>- Usar un máximo o un mínimo relativo como punto para estudiar la monotonía<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| 3. b) | - No conocer el procedimiento de cálculo de puntos de inflexión y curvatura.<br>- No saber que la derivada de la suma es la suma de derivadas.<br>- No conocer la derivada de $x^n$ o equivocarse al calcularla<br>- No saber calcular la raíz de f ’’(x)<br>- No verificar si la raíz de f ’’(x) es un punto de inflexión.<br>- No conocer los criterios de punto de inflexión (f ’’’(x) != 0)<br>- No escribir que el posibles punto de inflexión es $(x_3,f(x_3))$<br>- No saber que punto usar para los intervalos en el estudio de la curvatura<br>- No escribir correctamente los intervalos de curvatura (abiertos), o hasta $\pm\infty$<br>- No usar el signo de f ’’(x) para estudiar la curvatura<br>- Usar el punto de inflexión como punto para estudiar la monotonía<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |

## 7.3. Resultados

En esta sección se analizan los resultados obtenidos en cada ejercicio.

| EJERCICIO 1A – ERRORES | |
|---|---|
| A1 | - Bien |
| A2 | - Error de concepto - considera que el punto (12,5) pertenece a la función |
| A3 | - No contesta |
| A4 | - No contesta |
| A5 | - Error de concepto - considera que el punto (12,5) pertenece a la función |
| A6 | - Confunde conceptos – Punto de no dominio con punto de no continuidad |
| A7 | - Error de concepto - considera que el punto (12,5) pertenece a la función |

| EJERCICIO 1B | |
|---|---|
| A1 | - No saber extraer los datos que necesitan de la gráfica para completar la ecuación de la recta normal: f(3), f(-3) |
| A2 | - Bien |
| A3 | - Bien |

| | |
|---|---|
| A4 | - No contesta, aunque pone la fórmula de Tasa Variación Media |
| A5 | - Bien |
| A6 | - Bien |
| A7 | - No saber extraer los datos que necesitan de la gráfica para completar la ecuación de la recta normal: f(3), f(-3) |

| EJERCICIO 1C | |
|---|---|
| A1 | - No saber la ecuación de la recta normal |
| A2 | - No contesta |
| A3 | - No contesta |
| A4 | - No contesta |
| A5 | - No contesta |
| A6 | - El procedimiento esta bien, pero se equivoca de punto con el 1d |
| A7 | - No contesta |

| EJERCICIO 1D | |
|---|---|
| A1 | - No saber la ecuación de la recta tangente |
| A2 | - No contesta |
| A3 | - No contesta |
| A4 | - No contesta |
| A5 | - No contesta |
| A6 | - El procedimiento esta bien, pero se equivoca de punto con el 1c |
| A7 | - No contesta |

| EJERCICIO 1E | |
|---|---|
| A1 | - No entiende la pregunta |
| A2 | - No contesta |
| A3 | - No contesta |
| A4 | - No contesta |
| A5 | - No contesta |
| A6 | - Bien |
| A7 | - Bien |

| EJERCICIO 2A | |
|---|---|
| A1 | - Bien |
| A2 | - No aplica bien la regla de la cadena y/o la derivada de $u^n$ o equivocarse al calcularla |
| A3 | - Bien |
| A4 | - No saber utilizar la regla de la cadena y/o la derivada de $u^n$ o equivocarse al calcularla |
| A5 | - Bien |
| A6 | - No aplica bien la regla de la cadena y/o la derivada de $u^n$ o equivocarse al calcularla |
| A7 | - No aplica bien la regla de la cadena y/o la derivada de $u^n$ o equivocarse al calcularla |

| EJERCICIO 2B |
|---|

| | |
|---|---|
| A1 | - Errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| A2 | - Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| A3 | - Olvida derivar uno de los sumandos |
| A4 | - No conocer la derivada de $\sqrt[n]{u}$<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| A5 | - Bien |
| A6 | - Bien |
| A7 | - Copia mal el enunciado<br>- No conocer la derivada de $\sqrt[n]{u}$<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |

| EJERCICIO 2C | |
|---|---|
| A1 | - Errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| A2 | - Bien |
| A3 | - No contesta |
| A4 | - Bien |
| A5 | - No sabe bien la derivada del cociente |
| A6 | - No sabe bien la derivada del cociente<br>- Errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| A7 | - Bien |

| EJERCICIO 2D | |
|---|---|
| A1 | - Errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| A2 | - No saber bien derivada del producto. |
| A3 | - No saber bien derivada del producto. |
| A4 | - No saber derivada del producto. |
| A5 | - No saber derivada del producto. |
| A6 | - No aplica bien la regla de la cadena o equivocarse al calcularla |
| A7 | - No saber derivada del producto.<br>- No aplica bien la regla de la cadena o equivocarse al calcularla<br>- Errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |

| EJERCICIO 2E | |
|---|---|
| A1 | - No conocer la derivada de logu o equivocarse al calcularla |
| A2 | - No sabe calcular la derivada del logaritmo |
| A3 | - No sabe calcular la derivada del logaritmo |
| A4 | - Bien |
| A5 | - No sabe calcular la derivada del logaritmo |
| A6 | - No sabe calcular la derivada del logaritmo |
| A7 | - No saber utilizar la regla de la cadena y/o la derivada de $u^n$ o equivocarse al calcularla |

| EJERCICIO 2F | |
|---|---|
| A1 | - Bien |
| A2 | - No saber calcular la derivada de un cociente |
| A3 | - No saber calcular la derivada de un cociente |
| A4 | - No saber calcular la derivada de un cociente |

| | |
|---|---|
| A5 | - No saber calcular la derivada de un cociente |
| A6 | - No saber calcular la derivada de un cociente |
| A7 | - Bien |

| EJERCICIO 3A | |
|---|---|
| A1 | - No saca una de las dos raíces de f ’(x) (x=0) |
| A2 | - Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema<br>- No saca una de las dos raíces de f ’(x) (x=0) |
| A3 | - Bien |
| A4 | - No aplica bien los criterios de máximo / mínimo relativo (f ’’(x) > o < 0)<br>- Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema |
| A5 | - Bien |
| A6 | - No usar el signo de f’(x) para estudiar la monotonía (usa f(x))<br>- Llamar max/min absolutos a los max/min relativos |
| A7 | - No conocer el procedimiento de análisis de monotonía. |

| EJERCICIO 3B | |
|---|---|
| A1 | - Bien |
| A2 | - No usar el signo de f ’’(x) para estudiar la curvatura<br>- Usar el punto de inflexión como punto para estudiar la monotonía |
| A3 | - No contesta |
| A4 | - Tener errores de manipulación algebraica en la resolución del problema<br>- - No conocer los criterios de punto de inflexión (f ’’’(x) != 0) |
| A5 | - Bien |
| A6 | - No usar el signo de f ’’(x) para estudiar la curvatura (usa f(x)) |
| A7 | - No conocer el procedimiento de análisis de curvatura. |

## 7.4. Discusión de los resultados

Los exámenes, salvado alguna excepción, son bastante malos, y hay varios puntos que merece la pena comentar al respecto. Como mi experiencia con alumnos de 1º de bachillerato es muy limitada, no puedo afirmar que estos comportamientos sean habituales en otras aulas. Así pues, estas reflexiones solo tienen alcance dentro de esta experimentación.

**El orden de ejecución importa**

Los alumnos han empezado a hacer el examen por los contenidos que más seguridad tienen, o más sencillo les parece a priori. La mayoría empezó el examen por el ejercicio 2, para luego pasar al 3 y por último al 1.

**No leer todo el examen con tranquilidad antes de empezar a hacerlo penaliza.**

En el ejercicio 1, el apartado e) es un regalo. 4 de los 7 estudiantes ni siquiera leyeron el enunciado porque no respondieron a la pregunta.

**Cuestión 1**

Antes de poner el examen, lo compartí con la tutora del Practicum II, la cual me dijo que no iban a hacer el ejercicio 1. No es un ejercicio difícil, pero es algo a lo que no están acostumbrados. Yo pensaba que al haber hecho tanto énfasis durante las clases a la representación gráfica de funciones ellos podrían hacerlo. Me equivocaba. La mayor parte de los alumnos por no decir todos, no entendió como resolver el problema. La mayor parte sabían las formulas para calcular analíticamente la tasa de variación media, o las rectas normales y tangentes a un punto, pero no eran capaces de extraer la información necesaria de la gráfica. Me atrevería a decir, que ni de interpretarla. Creo que algunos incluso no sabían que eje era el de abscisas y cual el de ordenadas, donde buscar el valor de la función. Pensaba que las mayores dificultades quizás estarían en los apartados c y d, donde tienen que estimar el valor de la derivada en un punto, pero no en calcular el valor de la función en un punto. Me gustaría saber si los alumnos de 1º de Bachillerato diurno pueden hacer este problema sin dificultades.

Otro error conceptual repetido por varios alumnos es decir que la función no es continua en los puntos (12,5) y (12,8). No se si esto es debido a que no entienden bien la gráfica, o que una función no puede tener dos valores diferentes para un mismo valor de x.

**Cuestión 2**

El ejercicio 2 demuestra que mis estudiantes habían estudiado poco para el examen. Las funciones que se pide derivar en el ejercicio son facilísimas. Es posible que parte de los malos resultados obtenidos en este ejercicio sean debidos a el parón que hubo por las vacaciones de semana santa, que coincidió con el final de las sesiones dedicadas a calcular la función derivada, y a la vuelta de la semana santa las sesiones se centraron en aplicaciones de las derivadas, donde las funciones que se derivan son mucho más sencillas, principalmente polinómicas. No obstante, los malos resultados evidencian que los estudiantes no pusieron demasiado esfuerzo ni dedicación al estudio, ya que, en caso de haber estudiado algo la tabla de derivadas, al menos podrían haber intentado algunos ejercicios como el 2e, donde se debe calcular la derivada de un logaritmo neperiano, directa aplicación de las reglas aprendidas.

Varios alumnos también cometieron errores de rigor matemático como igualar las funciones y sus derivadas.

**Cuestión 3**

Con respecto al ejercicio 3, si bien el procedimiento la mayor parte de los alumnos tenia idea de lo que estaba haciendo, 3 de los alumnos no fueron capaces de calcular la raíz x=0. Esto creo que es debido a la mala base que tienen en cuanto a algebra y números.

# Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

## Breve síntesis

En este trabajo fin de máster se ha estudiado la introducción al concepto de derivada y sus aplicaciones en matemáticas de 1º de bachillerato nocturno.

El trabajo, estructurado en dos partes, ha realizado un estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto con relación a las derivadas en la primera parte, y ha propuesto un proceso de estudio sobre la introducción del concepto de derivada que se ha puesto en marcha en un aula de matemáticas de 1º de Bachillerato nocturno del el IES Navarro Villoslada en el marco del Practicum II del Máster. Como parte final del proceso de estudio, se ha realizado una prueba a los alumnos que también ha sido fruto de análisis.

## Conclusiones generales del trabajo

En el estudio longitudinal del currículo se han observado que las derivadas, si bien son introducidas por primera vez en 1º de Bachillerato, hacen uso de prácticamente la totalidad de los contenidos vistos durante los cursos anteriores en referencia a análisis, funciones, algebra y números, de forma que una mala base de estos contenidos puede hacer tambalearse toda la unidad didáctica.

El estudio de los libros de texto y su coherencia con el currículo concluye que, aunque todos los contenidos del currículo están presentes en los libros, no todos los contenidos están presentes con la misma intensidad, y hay contenidos que no estando en el currículo las editoriales han venido a bien el introducirlos en los libros de texto.

En la segunda parte del trabajo, el análisis global del libro de texto [5] utilizado en clase donde ha concluido que, aunque el texto es aceptable, también es mejorable.

Previo al proceso de estudio, se ha hecho un análisis de las dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica, donde se ha visto que gran parte de las dificultades y errores previsibles de esta unidad didáctica pueden provienen de una base no consolidada de los conocimientos previos necesarios para el estudio de las derivadas, pero que el contenido de estudio en si mismo también puede generarlos si no se trabajan todos los contenidos con paso firme.

El proceso de estudio se ha llevado a cabo en una clase de 1º de Bachillerato nocturno de el IES Navarro Villoslada durante 10 sesiones de 45 minutos, y una sesión más de 60 minutos para la prueba de evaluación. Esta prueba evidenció que los alumnos tenían problemas de base no asentada con los conocimientos previos, y que en general, no habían estudiado lo suficiente para dominar los contenidos de la unidad didáctica.

## Cuestiones abiertas

¿Si se repitiera el proceso de estudio en una clase de 1º de Bachillerato diurno se obtendrían las mismas conclusiones?
Dado que este trabajo se ha centrado en una clase de 1º de Bachillerato nocturno, con estudiantes mayores de edad que trabajan a tiempo parcial / completo, y que abandonaron los estudios de la vía normal y decidieron volver más adelante para obtener su título de Bachillerato, sería muy interesante el repetir todo este proceso de estudio con un grupo de Bachillerato diurno y comparar los resultados de ambas experiencias.

# Referencias

[1] CURRÍCULO DE LAS ENSEÑANZAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA EN LA COMUNIDAD FORAL DE NAVARRA Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril Boletín Oficial de Navarra número 127, de 2 de julio de 2015.

[2] CURRÍCULO DE LAS ENSEÑANZAS DEL BACHILLERATO EN LA COMUNIDAD FORAL DE NAVARRA Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril Boletín Oficial de Navarra número 127, de 2 de julio de 2015.

[3] Matemáticas. Enseñanzas académicas. 3º ESO. Santillana Educación S.L. Madrid. 2015.

[4] Matemáticas. Enseñanzas académicas. 4º ESO. Santillana Educación S.L. Madrid. 2016.

[5] Matemáticas 1º Bachillerato. Grupo Editorial Bruño, Madrid. 2015.

[6] Matemáticas 2º Bachillerato. Grupo Editorial Bruño, Madrid. 2016.

[7] B. Bloom, "Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals", DAVID McKAY COMPANY, INC. Michigan, 1956.

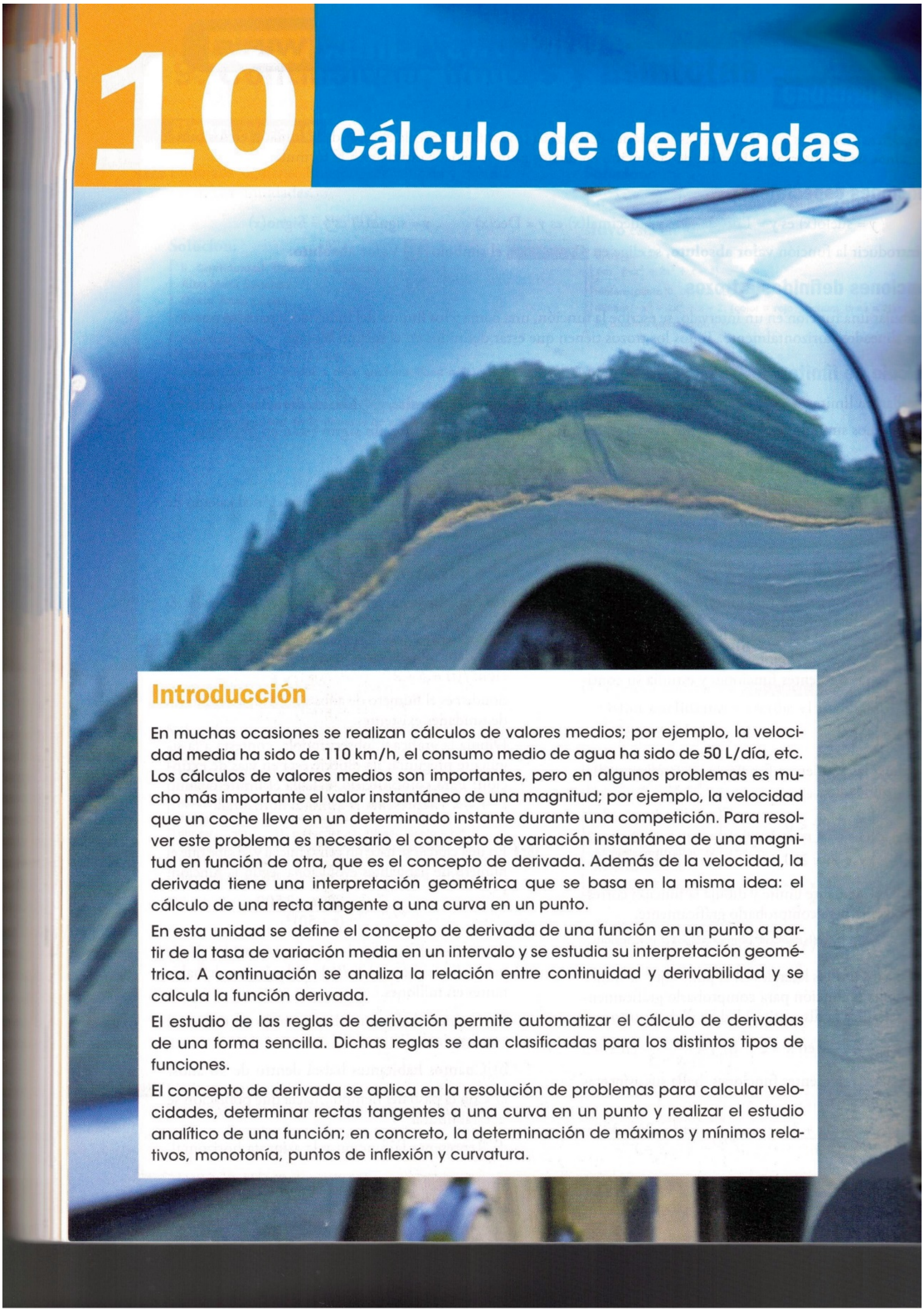
[8] J. D. Godino, V. Font y M.R Wilhelmi, "Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, pp. 131-155, 2006.

[9] Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, 1º Bachillerato. Grupo Editorial Bruño, Madrid. 2016.

# Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Contenidos del Currículo: Bloque 2: Números y Álgebra
C. Hojas de ejercicios adicionales resueltos

## A. Unidad didáctica del libro de texto



# 10 Cálculo de derivadas

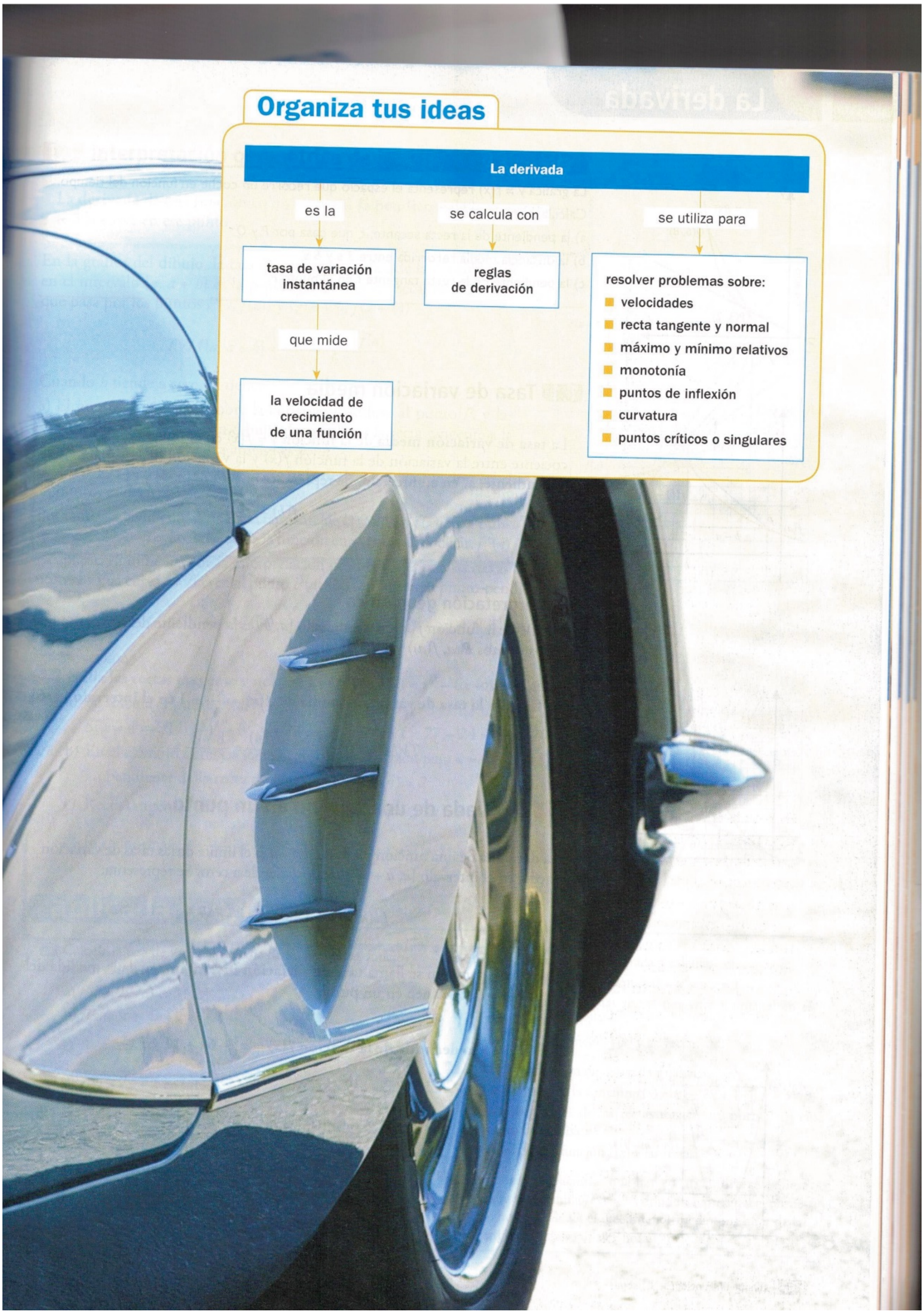
## Introducción

En muchas ocasiones se realizan cálculos de valores medios; por ejemplo, la velocidad media ha sido de 110 km/h, el consumo medio de agua ha sido de 50 L/día, etc. Los cálculos de valores medios son importantes, pero en algunos problemas es mucho más importante el valor instantáneo de una magnitud; por ejemplo, la velocidad que un coche lleva en un determinado instante durante una competición. Para resolver este problema es necesario el concepto de variación instantánea de una magnitud en función de otra, que es el concepto de derivada. Además de la velocidad, la derivada tiene una interpretación geométrica que se basa en la misma idea: el cálculo de una recta tangente a una curva en un punto.

En esta unidad se define el concepto de derivada de una función en un punto a partir de la tasa de variación media en un intervalo y se estudia su interpretación geométrica. A continuación se analiza la relación entre continuidad y derivabilidad y se calcula la función derivada.

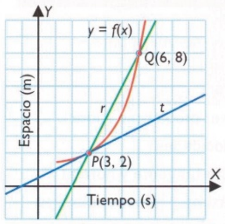
El estudio de las reglas de derivación permite automatizar el cálculo de derivadas de una forma sencilla. Dichas reglas se dan clasificadas para los distintos tipos de funciones.

El concepto de derivada se aplica en la resolución de problemas para calcular velocidades, determinar rectas tangentes a una curva en un punto y realizar el estudio analítico de una función; en concreto, la determinación de máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura.


Organiza tus ideas
La derivada
es la
tasa de variación instantánea
que mide
la velocidad de crecimiento de una función
se calcula con
reglas de derivación
se utiliza para
resolver problemas sobre:
velocidades
recta tangente y normal
máximo y mínimo relativos
monotonía
puntos de inflexión
curvatura
puntos críticos o singulares

# La derivada

## piensa y calcula



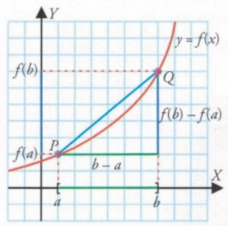

La gráfica $y = f(x)$ representa el espacio que recorre un coche en función del tiempo. Calcula mentalmente:

a) la pendiente de la recta secante, $r$, que pasa por $P$ y $Q$

b) la distancia media recorrida entre 3 s y 6 s

c) la pendiente de la recta tangente $t$ en el punto $P$

## 1.1 Tasa de variación media

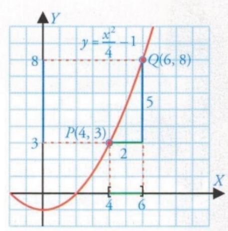



La **tasa de variación media** de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es el cociente entre la variación de la función $f(x)$ y la variación de la variable independiente, $x$, en el intervalo. Se representa por $TVM[a, b]$ y es:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### Interpretación geométrica

La $TVM$ de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es la pendiente del segmento que une los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$




EJERCICIO RESUELTO

**1 Calcula la tasa de variación media de $f(x) = \frac{x^2}{4} - 1$ en el intervalo $[4, 6]$**

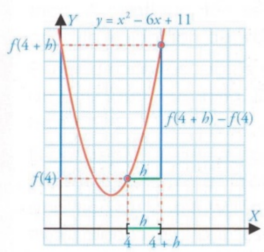
$$TVM[4, 6] = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{8 - 3}{6 - 4} = \frac{5}{2}$$

## 1.2 Derivada de una función en un punto

La **derivada** de una función $y = f(x)$ en $x = a$ es el límite de las tasas de variación media en el intervalo $[a, a + h]$ cuando $h$ tiende a cero. Se representa:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La **derivada** también se llama **tasa de variación instantánea** y da la medida del crecimiento instantáneo en un punto.




EJERCICIO RESUELTO

**2 Calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 - 6x + 11$ en $x = 4$**

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4 + h)^2 - 6(4 + h) + 11 - (4^2 - 6 \cdot 4 + 11)}{h} =$$

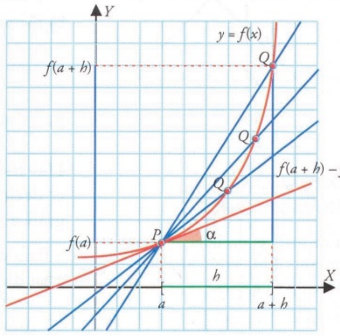
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{16} + 8h + h^2 - \cancel{24} - 6h + \cancel{11} - \cancel{(16 - 24 + 11)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h + 2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (h + 2) = 2$$

## 1.3 Interpretación geométrica de la derivada

La **derivada** de una función en un punto **es la pendiente** de la recta tangente a la curva en ese punto.

En la gráfica del dibujo, la tasa de variación media de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, a + h]$ es la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(a + h, f(a + h))$




$$TVM[a, a + h] = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Cuando $h$ tiende a cero, se tiene:

a) El punto $Q$ se desliza sobre la curva acercándose al punto $P$, y las rectas secantes que se van dibujando tienden a la recta tangente a la curva en el punto $P$, cuya abscisa es $x = a$

b) Las $TVM$ tienden, por definición, a la derivada de la función en el punto, es decir, hacia $f'(a)$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es la derivada de la función en ese punto, es decir, $f'(a)$

La aplicación inmediata de la interpretación geométrica es que las rectas tangente y normal a una curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ en su forma punto-pendiente son:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \qquad y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

**EJERCICIO RESUELTO**

**3 Halla las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = x^2 - 6x + 11$ para $x = 4$**

a) Se calcula el punto $P(a, f(a))$:

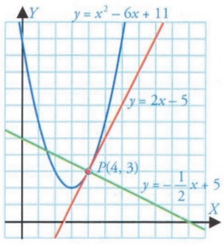
Si $x = 4 \Rightarrow f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 11 = 16 - 24 + 11 = 27 - 24 = 3 \Rightarrow P(4, 3)$

b) En el ejemplo anterior se ha visto que la derivada para $x = 4$ es: $f'(4) = 2$

La pendiente de la recta tangente es: $m = f'(4) = 2$

c) Recta tangente: $y = 2(x - 4) + 3 \Rightarrow y = 2x - 8 + 3 \Rightarrow y = 2x - 5$

d) Recta normal: $y = -\frac{1}{2}(x - 4) + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5$




## aplica la teoría

**1** Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = 2x - 3$ en $[1, 4]$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en $[2, 4]$

c) $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3}$ en $[1, 2]$

d) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ en $[-1, 2]$

**2** Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x - 2$ en $x = 1$

b) $f(x) = -2x + 1$ en $x = -3$

c) $f(x) = x^2 - 4$ en $x = -2$

d) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en $x = 1$

**3** Aplica la definición de derivada y calcula:

a) La derivada de la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$

b) Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

**4** Aplica la definición de derivada y calcula:

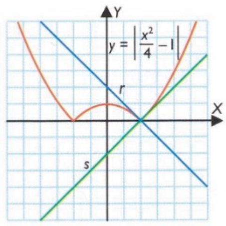
a) La derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $x = 3$

b) Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 3$

c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

**5** El número de bacterias que hay en un cultivo se expresa mediante la fórmula $f(x) = 2^x$, donde $x$ representa el número de horas. Calcula el crecimiento medio por hora de las bacterias entre las 3 y las 5 horas.

# 2 La función derivada




## piensa y calcula

a) Observa la gráfica de la función:

$$f(x) = \left|\frac{x^2}{4} - 1\right|$$

y calcula las pendientes de las rectas tangentes $r$ y $s$

b) ¿Se puede dibujar una única recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 2$?

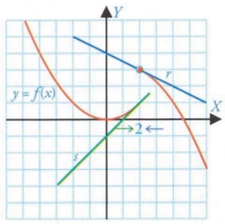
## 2.1 Continuidad y derivabilidad

**Existencia de la derivada**

La derivada es un límite, y para que exista deben existir los límites laterales y ser iguales.

Hay funciones en las que no existe una única recta tangente a la curva en un punto; es decir, no existe la derivada de la función en el punto. Para saber de una forma gráfica si una función admite derivada en un punto, se debe tener en cuenta:

- Para que una función sea derivable en un punto, la función debe ser continua en dicho punto.



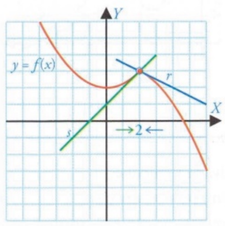

**EJEMPLO**

La gráfica de la función del margen no es continua en $x = 2$ y, por tanto, no es derivable en dicho punto.

- Por la derecha de $x = 2$ se dibuja la recta tangente $r$, cuya pendiente es $-1/2$. Luego la derivada por ese lado es $-1/2$
- Por la izquierda de $x = 2$ se dibuja la recta tangente $s$, cuya pendiente es 1. Luego la derivada por ese lado es 1

Al no coincidir las pendientes de las rectas, no puede haber una única derivada.

- Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable.




**EJEMPLO**

La gráfica de la función del margen es continua en $x = 2$. Sin embargo, si se intenta dibujar una recta tangente en el punto, se tiene:

- Por la derecha de $x = 2$ se dibuja la recta tangente $r$, cuya pendiente es $-1/2$. Luego la derivada por ese lado es $-1/2$
- Por la izquierda de $x = 2$ se dibuja la recta tangente $s$, cuya pendiente es 1. Luego la derivada por ese lado es 1

Al no coincidir las pendientes de las rectas, no puede haber una única derivada.

La característica de la gráfica de una función derivable es una curva continua que no tiene picos.

## 2.2 Función derivada

La **función derivada de una función $f(x)$** es la que asocia a cada valor de la variable $x$ el valor de la derivada en ese punto. Se representa por $f'(x)$ o $y'$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se observa que la función derivada, $f'(x)$, es una expresión que depende de $x$ y da la fórmula general para obtener los valores de la derivada de $f(x)$ en cualquier punto en que exista la derivada.

La función derivada tiene utilidad para resolver varios tipos de problemas:

- Cuando se quiere calcular el valor de la derivada en varios puntos.

  Se obtiene la expresión general de la función derivada y se sustituyen en ella los valores de $x$ para los que se desea obtener el valor de la derivada.

EJERCICIO RESUELTO

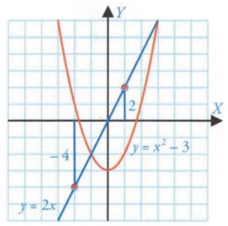
**4 Calcula la derivada de $f(x) = x^2 - 3$ en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 1$**

Se calcula la expresión de la función derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{3} - \cancel{x^2} + \cancel{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h + 2x)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x$$

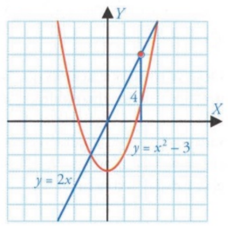



Se calcula el valor de la derivada en la fórmula: $f'(x) = 2x$

Para $x = -2 \Rightarrow f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$

Para $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

- Cuando se conoce un valor concreto, $k$, de la derivada y se desea conocer el valor de $x$




EJERCICIO RESUELTO

**5 Calcula el valor de $x$ en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 - 3$ vale 4**

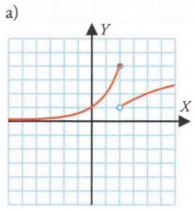
Como $f'(x) = 2x$ y $f'(x) = 4$, se tiene:

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

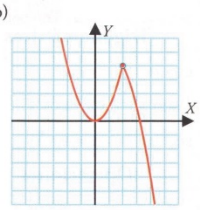
## aplica la teoría

**6** Analiza si las funciones representadas admiten derivada en el punto de abscisa $x = 2$

a)




b)




**7** Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = 4x - 3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

**8** Calcula el valor de la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos de abscisa:

a) $x = 2$

b) $x = -1$

c) $x = 0$

d) $x = 1$

**9** Calcula el valor de la abscisa en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 + x$ vale 4

**10** Dibuja la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$

a) Calcula su función derivada.

b) Representa la función derivada en los mismos ejes coordenados.

c) Observando el dibujo, calcula los puntos en los que la derivada toma estos valores: 1, 2, −1, −2, 0

# 3 Reglas de derivación

## piensa y calcula

Clasifica las siguientes funciones como polinómicas, irracionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas:

a) $y = 2^x$ b) $y = x^5$ c) $y = \text{sen } x$ d) $y = \sqrt{x}$ e) $y = \ln x$

## 3.1 Tabla de derivadas

### Funciones *u*, *v*, *w*

Las letras $u$, $v$ y $w$ representan funciones de $x$:

$y = u(x)$
$y = v(x)$
$y = w(x)$

| Funciones | Derivadas | Ejemplo | |
|---|---|---|---|
| **Polinómicas** | | | |
| **1.** $y = k$ | $y' = 0$ | $y = 7$ | $y' = 0$ |
| **2.** $y = x$ | $y' = 1$ | $y = x$ | $y' = 1$ |
| **3.** $y = x^n$ | $y' = nx^{n-1}$ | $y = x^5$ | $y' = 5x^4$ |
| **4.** $y = u^n$ | $y' = nu'u^{n-1}$ | $y = (7x-4)^6$ | $y' = 42(7x-4)^5$ |
| **Racionales** | | | |
| **5.** $y = \dfrac{1}{u^n}$ | $y' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$ | $y = \dfrac{1}{(2x+3)^5}$ | $y' = -\dfrac{10}{(2x+3)^6}$ |
| **Irracionales** | | | |
| **6.** $y = \sqrt{u}$ | $y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $y = \sqrt{7x}$ | $y' = \dfrac{7}{2\sqrt{7x}}$ |
| **7.** $y = \sqrt[n]{u}$ | $y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ | $y = \sqrt[3]{5x}$ | $y' = \dfrac{5}{3\sqrt[3]{(5x)^2}}$ |
| **Exponenciales** | | | |
| **8.** $y = e^x$ | $y' = e^x$ | $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| **9.** $y = e^u$ | $y' = u'e^u$ | $y = e^{7x-2}$ | $y' = 7e^{7x-2}$ |
| **10.** $y = a^u$ | $y' = u'a^u \ln a$ | $y = 3^{2x-7}$ | $y' = 2 \cdot 3^{2x-7} \ln 3$ |
| **Logarítmicas** | | | |
| **11.** $y = \ln u$ | $y' = \dfrac{u'}{u}$ | $y = \ln(3x+8)$ | $y' = \dfrac{3}{3x+8}$ |
| **12.** $y = \log_a u$ | $y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$ | $y = \log_2(7x+3)$ | $y' = \dfrac{7}{7x+3} \log_2 e$ |
| **Trigonométricas** | | | |
| **13.** $y = \text{sen } u$ | $y' = u' \cos u$ | $y = \text{sen } 5x$ | $y' = 5 \cos 5x$ |
| **14.** $y = \cos u$ | $y' = -u' \text{ sen } u$ | $y = \cos x^4$ | $y' = -4x^3 \text{ sen } x^4$ |
| **15.** $y = \text{tg } u$ | $y' = u' \sec^2 u$ | $y = \text{tg } 7x$ | $y' = 7 \sec^2 7x$ |
| **Operaciones** | | | |
| **16.** $y = ku$ | $y' = ku'$ | $y = 3 \cos x$ | $y' = -3 \text{ sen } x$ |
| **17.** $y = u + v - w$ | $y' = u' + v' - w'$ | $y = x^4 - 5x^2 + 7$ | $y' = 4x^3 - 10x$ |
| **18.** $y = uv$ | $y' = u'v + uv'$ | $y = x^5 \text{ sen } x$ | $y' = 5x^4 \text{ sen } x + x^5 \cos x$ |
| **19.** $y = \dfrac{u}{v}$ | $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ | $y = \dfrac{x^2}{\text{sen } x}$ | $y' = \dfrac{2x \text{ sen } x - x^2 \cos x}{\text{sen}^2 x}$ |

### Evitar errores

Observa en las operaciones que la derivada de una suma o diferencia es la suma o diferencia de las derivadas, pero en un producto o cociente no es el producto, ni el cociente de las derivadas.

### Derivada de un producto

La derivada de un producto es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar, más el primer factor por la derivada del segundo.

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

### Derivada de un cociente

La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador por la derivada del denominador y partido por el denominador al cuadrado.

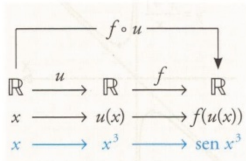
$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

240 Bloque III. Funciones

## 3.2 Regla de la cadena

La **regla de la cadena** permite calcular la derivada de la función compuesta, es decir, la derivada de una función que a su vez es función de otra función:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) f'(u(x))$$




EJERCICIO RESUELTO

**6 Halla la derivada de la función compuesta $y = \operatorname{sen} x^3$**

$$y' = 3x^2 \cos x^3$$

## 3.3 Estudio de la derivabilidad en funciones con parámetros

Son problemas en los que hay que calcular el valor de parámetros para que la función dada sea derivable en un valor $x = c$

EJERCICIO RESUELTO

**7 Calcula el valor de los parámetros $a$ y $b$ para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \le 1 \\ bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**sea derivable en $x = 1$**

a) Continuidad de la función.

Para que la función sea continua los límites laterales deben existir y ser iguales al valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + a) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} bx = b \end{array}\right\} \Rightarrow a + 1 = b \text{ (I)}$$

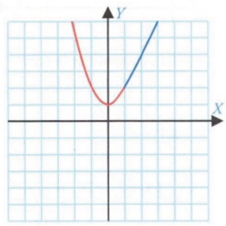
b) Derivabilidad calculando las derivadas laterales.

Para que exista la derivada, las derivadas laterales deben ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ b & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2x = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} b = b \end{array}\right\} \Rightarrow b = 2$$

Sustituyendo $b = 2$ en la fórmula (I) tenemos que $a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$

La función es derivable en $x = 1$ para $a = 1$, $b = 2$




## aplica la teoría

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

**11** a) $y = 8$ b) $y = -3x + 1$

**12** a) $y = x^2 + 4x - 5$ b) $y = x^4 - 3x^2 + 1$

**13** a) $y = (x - 8)^2$ b) $y = (3x^2 + 1)^3$

**14** a) $y = (x^2 + 4)^2$ b) $y = (x^4 - 1)^3$

**15** a) $y = \sqrt{x^2 - 3}$ b) $y = \sqrt[4]{x^3 - 2x}$

**16** a) $y = e^{3x - 2}$ b) $y = 2^{x^3 + 5}$

**17** a) $y = \ln(3x - 2)$ b) $y = \log(2x^3 + x)$

**18** a) $y = \operatorname{sen}(3x - 7)$ b) $y = \cos(x^2 + 4x)$

**19** a) $y = x^2 + \operatorname{tg} x$ b) $y = x \ln x$

**20** a) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ b) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$

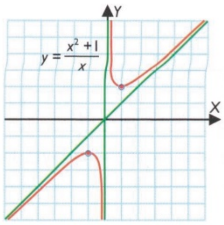
**21** Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$

**22** Calcula el valor de los parámetros $a$ y $b$ para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ -2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$

# 4 Máximos, mínimos relativos y monotonía




## piensa y calcula

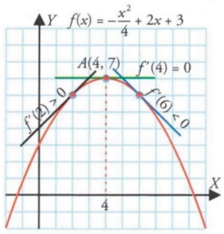
Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ y halla:

a) Los máximos y mínimos relativos.

b) La monotonía, es decir: los intervalos donde es creciente (↗) y los intervalos donde es decreciente (↘)

## 4.1 Máximos y mínimos relativos

Un **máximo relativo** de una función es un punto en el que la función es mayor que en los puntos que están muy cercanos; es decir, una función $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = a$ si existe un entorno del punto $a$, $E(a, r)$, en el que se cumple que $f(a) > f(x)$ para todo $x \neq a$ del entorno.

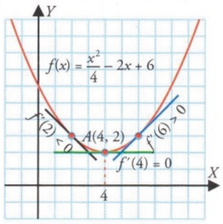



La pendiente de la recta tangente es $f'(x)$

### Caracterización del máximo relativo por la 1.ª y 2.ª derivadas

En la gráfica del margen se observa que la primera derivada cambia de positivo a negativo en $x = 4$. Pasa de ser creciente a decreciente y hay un máximo relativo en $(4, 7)$; por tanto la segunda derivada en $A(4, 7)$ es negativa.

Un **mínimo relativo** de una función es un punto en el que la función es menor que en los puntos que están muy cercanos; es decir, una función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = a$ si existe un entorno del punto $a$, $E(a, r)$, en el que se cumple que $f(a) < f(x)$ para todo $x \neq a$ del entorno.




La pendiente de la recta tangente es $f'(x)$

### Caracterización del mínimo relativo por la 1.ª y 2.ª derivadas

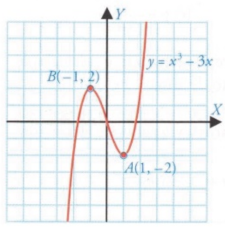
En la gráfica del margen se observa que la primera derivada cambia de negativo a positivo en $x = 4$. Pasa de ser decreciente a creciente y hay un mínimo relativo en $(4, 2)$; por tanto la segunda derivada en $A(4, 2)$ es positiva.

### Procedimiento para hallar los máximos y mínimos relativos

EJERCICIO RESUELTO

**8 Halla los máximos y mínimos relativos de $y = x^3 - 3x$**

| | |
|---|---|
| a) Se calcula la 1.ª derivada, $f'(x)$ | $y' = 3x^2 - 3$ |
| b) Se resuelve la ecuación, $f'(x) = 0$ | $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ |
| c) Se sustituyen las raíces de $f'(x) = 0$ en la función inicial $f(x)$ y se obtienen los posibles máximos y mínimos relativos. | $x = 1 \Rightarrow y = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow A(1, -2)$<br>$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow B(-1, 2)$ |
| d) Se halla la 2.ª derivada, $f''(x)$ | $y'' = 6x$ |
| e) Se sustituyen las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos en la 2.ª derivada, $f''(x)$<br>• si $f''(x) < 0 \Rightarrow$ máximo relativo<br>• si $f''(x) > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo | $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, -2)$ mínimo relativo.<br>$f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow B(-1, 2)$ máximo relativo. |



## 4.2 Monotonía

Estudiar la **monotonía de una función** consiste en estudiar en qué intervalos la función es creciente ( ↗ ) y en cuáles es decreciente ( ↘ ). Los intervalos de crecimiento están separados por las abscisas de los máximos y mínimos relativos y de las discontinuidades de $f'(x)$

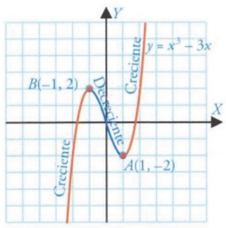
### Procedimiento para hallar la monotonía

Para estudiar la monotonía de una función se sigue este procedimiento:

EJERCICIO RESUELTO

**9** **Estudia la monotonía de $y = x^3 - 3x$**

| | |
|---|---|
| a) Se calculan los máximos y mínimos relativos. | $A(1, -2)$ Mínimo relativo.<br>$B(-1, 2)$ Máximo relativo. |
| b) Se hallan las discontinuidades de la primera derivada $f'(x)$ | No hay. |
| c) Se representan en la recta real $\mathbb{R}$ las abscisas de los máximos y mínimos relativos, y las discontinuidades de $f'(x)$ | $f'(x)$<br>$x$ $-1$ $0$ $1$ |
| d) Se prueba un punto de uno de los intervalos en la 1.ª derivada; solamente se considera el signo.<br>En intervalos consecutivos, $f'(x)$ cambia de signo si la multiplicidad de la raíz de $f'(x)$ o de su discontinuidad es impar. Si es par, no cambia. | $y' = 3x^2 - 3$<br>$f'(0) = -3 < 0$ (–)<br>$f'(x)$ + – +<br>$x$ $-1$ $0$ $1$ |
| e) Se escriben los intervalos de crecimiento ( ↗ ); son los correspondientes a $f'(x) > 0$ (+) | Creciente ( ↗ ): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ |
| f) Se escriben los intervalos de decrecimiento ( ↘ ); son los correspondientes a $f'(x) < 0$ (–) | Decreciente ( ↘ ): $(-1, 1)$ |




**Recuerda**

Los intervalos de monotonía son siempre abiertos.

## aplica la teoría

**23** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

**24** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función: $y = x^3 - 3x^2$

**25** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función: $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$

**26** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

**27** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

**28** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

**29** Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta:

$$y = -2x + 3$$

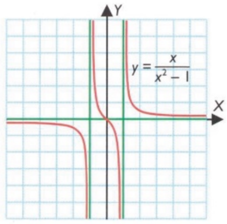
Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

**30** Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

# 5 Puntos de inflexión y curvatura

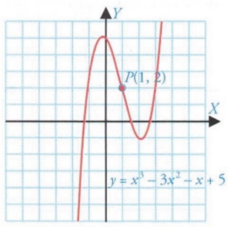



## piensa y calcula

Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ y halla visualmente el punto de inflexión y los intervalos donde es convexa (∪) y cóncava (∩)

## 5.1 Puntos de inflexión

Un **punto de inflexión** de una función es un punto en el que la función cambia de convexa (∪) a cóncava (∩) o viceversa.



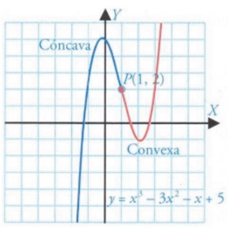

EJERCICIO RESUELTO

**10 Halla los puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$**

| | |
|---|---|
| a) Se calcula la 2.ª derivada, $f''(x)$ | $y' = 3x^2 - 6x - 1 \Rightarrow y'' = 6x - 6$ |
| b) Se resuelve la ecuación, $f''(x) = 0$ | $6x - 6 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ |
| c) Se sustituyen las raíces de $f''(x) = 0$ en la función inicial $f(x)$ y se obtienen los posibles puntos de inflexión. | $x = 1 \Rightarrow y = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 5 =$ $= 1 - 3 - 1 + 5 = 6 - 4 = 2 \Rightarrow P(1, 2)$ |
| d) Se halla la 3.ª derivada, $f'''(x)$ | $y''' = 6$ |
| e) Se sustituyen las abscisas de los posibles puntos de inflexión en la 3.ª derivada, $f'''(x)$<br>Si $f'''(x) \neq 0$, son puntos de inflexión. | $f'''(1) = 6 \neq 0$<br>$P(1, 2)$ es un punto de inflexión. |

## 5.2 Curvatura

Estudiar la **curvatura** de una función consiste en estudiar en qué intervalos es convexa (∪) y en cuáles es cóncava (∩). Los intervalos de curvatura están separados por las abscisas de los puntos de inflexión y de las discontinuidades de $f''(x)$




EJERCICIO RESUELTO

**11 Estudia la curvatura de la función $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$**

| | |
|---|---|
| a) Se calculan los puntos de inflexión. | $P(1, 2)$ |
| b) Se hallan las discontinuidades de $f''(x)$ | No hay. |
| c) Se representan en la recta real ℝ las abscisas de los puntos de inflexión y las discontinuidades de $f''(x)$ | $f''(x)$<br>$x$ 0 1 |
| d) Se prueba un punto de uno de los intervalos en la 2.ª derivada; solo se considera el signo. En intervalos consecutivos, $f''(x)$ cambia de signo si la multiplicidad de la raíz de $f''(x)$ o de su discontinuidad es impar. Si es par, no cambia. | $y'' = 6x - 6$<br>$f''(0) = -6 < 0$ (–)<br>$f''(x)$ – +<br>$x$ 0 1 |
| e) Se escriben los intervalos de convexidad (∪), que son los correspondientes a $f''(x) > 0$ (+) | Convexa (∪): $(1, +\infty)$ |
| f) Se escriben los intervalos de concavidad (∩), que son los correspondientes a $f''(x) < 0$ (–) | Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$ |

**Recuerda**

Los intervalos de curvatura son siempre abiertos.

## 5.3 Puntos críticos o singulares

En el estudio de los máximos y mínimos relativos, y en el de los puntos de inflexión, puede parecer que hay un «agujero negro». Corresponde a los máximos y mínimos relativos cuando la segunda derivada no es ni positiva, ni negativa, es decir, cero. Para resolver esta situación, se estudian los puntos críticos o singulares.

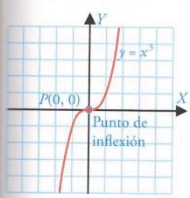
Un **punto crítico o singular** es un punto en el que la primera derivada se anula. Un punto crítico puede ser un máximo o un mínimo relativo o un punto de inflexión.

### Procedimiento para hallar y clasificar los puntos críticos

a) Se calcula la primera derivada, $f'(x)$
b) Se resuelve la ecuación, $f'(x) = 0$
c) Se sustituyen las raíces de $f'(x) = 0$ en la función inicial $f(x)$, y se obtienen los puntos críticos.
d) Para cada punto crítico se hallan las derivadas sucesivas hasta encontrar una que no se anule en dicho punto crítico.
e) Si la primera derivada que no se anula es de orden impar, es un punto de inflexión. Si es de orden par:
- es un máximo relativo si el valor obtenido es negativo.
- es un mínimo relativo si el valor obtenido es positivo.

EJEMPLO

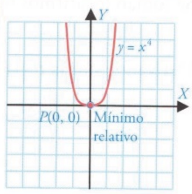
**$f(x) = x^3$**




a) $f'(x) = 3x^2$
b) $3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
c) $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0, 0)$
d) $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$
$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) \neq 0$
$P(0, 0)$ punto de inflexión.

**$f(x) = x^4$**

a) $f'(x) = 4x^3$
b) $4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$
c) $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0, 0)$
d) $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$
$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = 24 \Rightarrow f^{IV}(0) = 24 > 0$
$P(0, 0)$ mínimo relativo.




## aplica la teoría

31 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:
$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

32 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:
$$y = x^3 - 3x^2 + 4x$$

33 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:
$$y = (x-1)^3 + 1$$

34 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:
$$y = x^4 - 6x^2$$

35 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:
$$y = x^4 + 4x^3 + 2$$

36 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:
$$y = \frac{x-1}{x^2}$$

37 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:
$$y = \frac{x}{x^2-1}$$

38 Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones:
a) $y = x^5$  b) $y = x^6$

# Profundización: demostraciones

## 3.1 Derivada de la suma de dos funciones

La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

■ Demostración

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$$

## 3.1 Derivada del producto de dos funciones

La derivada de un producto es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar, más el primer factor por la derivada del segundo.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

■ Demostración

Se toman logaritmos neperianos:

$$\ln f(x) = \ln [u(x) \cdot v(x)] = \ln u(x) + \ln v(x)$$

Derivando por la regla de la cadena:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}\right) = u(x) \cdot v(x)\left(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}\right) =$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

## 3.1 Derivada de un cociente

La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador por la derivada del denominador, y todo ello dividido por el denominador al cuadrado.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ con } v(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

■ Demostración

Se toman logaritmos neperianos y se aplica la regla de la cadena:

$$\ln f(x) = \ln \frac{u(x)}{v(x)} = \ln u(x) - \ln v(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}\right) =$$

$$= \frac{u(x)}{v(x)}\left(\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}\right) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

## 3.1 Derivada de la función exponencial

$$f(x) = a^x \text{ con } a \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

### Demostración

Se toman logaritmos neperianos y se deriva en los dos miembros:

$$\ln f(x) = x \ln a \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a \Rightarrow f'(x) = f(x) \ln a = a^x \ln a$$

## 3.1 Derivada de la función seno

$$f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

### Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos \frac{x+h+x}{2} \cdot sen \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{2}}{h} =$$

$$\boxed{\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \text{ sen } \frac{A-B}{2}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \to 0} 2 \frac{\text{sen } \frac{h}{2}}{h} =$$

$$\boxed{\frac{2}{h} = \frac{1}{\frac{h}{2}}}$$

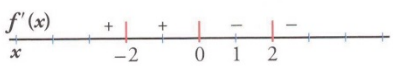
$$= \lim_{h \to 0} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1}$$

Unidad 10. Cálculo de derivadas 247

# Ejercicios y problemas resueltos

## Ejercicios de derivadas

| | |
|---|---|
| **12** Halla la primera derivada de: $f(x) = \dfrac{x+8}{x+2}$ | $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x+2) - 1 \cdot (x+8)}{(x+2)^2} = \dfrac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x} - 8}{(x+2)^2} = -\dfrac{6}{(x+2)^2}$ |
| **13** Halla las dos primeras derivadas de: $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$ | $f'(x) = -\dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$ <br> $f''(x) = -\dfrac{8(x^2-4)^{\cancel{2}} - 4x\cancel{(x^2-4)}8x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} = -\dfrac{8(x^2-4) - 4x \cdot 8x}{(x^2-4)^3} =$ <br> $= -\dfrac{8x^2 - 32 - 32x^2}{(x^2-4)^3} = -\dfrac{-24x^2 - 32}{(x^2-4)^3} = \dfrac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$ |
| **14** Halla las rectas tangente y normal a la hipérbola: $f(x) = \dfrac{x+8}{x+2}$ para $x = 1$ | $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow P(1, 3)$ <br> $f'(x) = -\dfrac{6}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(1) = -\dfrac{2}{3}$ <br> • Ecuación de la recta tangente: <br> $y = -\dfrac{2}{3}(x-1) + 3 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{3}$ <br> • Ecuación de la recta normal: <br> $y = \dfrac{3}{2}(x-1) + 3 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$ |
| **15** Halla los máximos y mínimos relativos de la siguiente función y determina su monotonía. $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$ | • Máximos y mínimos relativos: <br> $f'(x) = -\dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$ <br> $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0, -1)$ <br> $f''(x) = \dfrac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$ <br> $f''(0) = -\dfrac{1}{2} < 0\,(-) \Rightarrow$ **$A(0, -1)$ Máximo relativo.** <br> • Monotonía: <br> Abscisa del máximo relativo $x = 0$, en la primera derivada es de orden 1, impar $\Rightarrow$ en ella cambia el crecimiento. <br> • Discontinuidades: $x = 2$, $x = -2$, en la primera derivada son de orden 2, par $\Rightarrow$ en ellas no cambia el crecimiento. <br> $f'(1) = -\dfrac{8}{9} < 0\,(-)$ <br>   <br> Creciente ( ↗ ): $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ <br> Decreciente ( ↘ ): $(0, 2) \cup (2, +\infty)$ |

**16** Halla los puntos de inflexión de la siguiente función y determina la curvatura.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

- Puntos de inflexión:

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}; \quad f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$f'''(x) = -\frac{6x^4+36x^2-6}{(x^2-1)^4}$$

$f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ **$O(0, 0)$ Punto de inflexión.**

- Curvatura: Abscisa del punto de inflexión $x = 0$, en la 2.ª derivada es de orden 1, impar $\Rightarrow$ en ella cambia la curvatura.
- Discontinuidades: $x = 1$, $x = -1$, en la segunda derivada son de orden 3, impar $\Rightarrow$ en ellas cambia la curvatura.

$$f''(2) = \frac{28}{27} > 0\,(+)$$

| $f''(x)$ | − | + | − | + |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | | −1 | 0 | 1 |

**Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$**

**Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$**

**17** Clasifica los puntos singulares de la función:

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = -2 \Rightarrow A(1, -2)$

$x_3 = -1 \Rightarrow y_3 = 2 \Rightarrow B(-1, 2)$

$f''(x) = 60x^3 - 30x$

$f''(0) = 0$

$f'''(x) = 180x^2 - 30$

$f'''(0) = -30 \neq 0$ y de orden impar $\Rightarrow$ **$O(0, 0)$ Punto de inflexión.**

$f''(1) = 30 > 0\ (+)$ y de orden par $\Rightarrow$ **$A(1, -2)$ Mínimo relativo.**

$f''(-1) = -30 < 0\ (-)$ y de orden par $\Rightarrow$ **$B(-1, 2)$ Máximo relativo.**

## Problema de derivadas

**18** Los beneficios anuales en millones de euros de una empresa que fabrica *pendrive* vienen dados por el precio en euros de la unidad de producción, según la fórmula:

$$f(x) = -x^2 + 14x - 13$$

¿A qué precio se debe vender cada *pendrive* para obtener el máximo beneficio?

Calcula también dicho beneficio máximo.

**Entérate**

Función a maximizar: $f(x) = -x^2 + 14x - 13$

Pregunta: Valor de $x$ para que el beneficio sea máximo y el valor de este.

**Manos a la obra**

$f'(x) = -2x + 14$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 14 = 0 \Rightarrow x = 7$

$x = 7 \Rightarrow y = 36 \Rightarrow A(7, 36)$

**Solución**

Precio de venta de cada *pendrive:* **7 €**. Beneficio máximo: **36 millones de euros.**

# Ejercicios y problemas propuestos

## 1 La derivada

**39** Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

**a)** $f(x) = -3x + 5$ en $[-1, 2]$

**b)** $f(x) = x^2 - 6x - 4$ en $[1, 3]$

**c)** $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ en $[-1, 3]$

**d)** $f(x) = \sqrt{x+4}$ en $[-3, 0]$

**40** Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

**a)** $f(x) = 5x - 3$ en $x = -4$

**b)** $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$

**c)** $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = -1$

**d)** $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ en $x = 1$

**41** Aplica la definición de derivada y calcula:

**a)** La derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 1$ en $x = 1$

**b)** Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

**c)** Representa la función $f(x)$ y las rectas.

**42** El número de llamadas que se reciben en una centralita es:

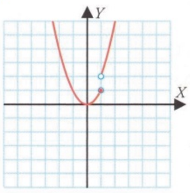
$$f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

donde $x$ se expresa en horas, y $f(x)$, en miles de llamadas. Calcula el número medio de llamadas que se reciben entre las 2 y las 4 horas; y entre las 4 y las 6 horas. ¿Cómo interpretas los resultados?

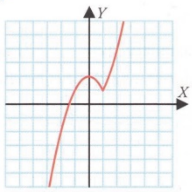
## 2 La función derivada

**43** Analiza si las funciones representadas admiten derivada en $x = 1$

**a)**




**b)**




**44** Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

**a)** $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

**45** Aplicando la definición de derivada, halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Calcula:

**a)** El valor de la derivada en el punto de abscisa $x = 2$

**b)** El valor de la abscisa en el que la derivada vale 1/4

## 3 Reglas de derivación

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

**46** **a)** $y = 3x^2 + x - 7$ **b)** $y = -x^4 + x^2 - 6x$

**47** **a)** $y = 2x^3 + x^2 - 5$ **b)** $y = 3x^4 + 5x + 1$

**48** **a)** $y = (x^3 - 1)^2$ **b)** $y = (x^3 + 1)^4$

**49** **a)** $y = (2x^3 + x^2)^3$ **b)** $y = (2x^4 - 1)^5$

**50** **a)** $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ **b)** $y = \sqrt{x^3 - x}$

**51** **a)** $y = \sqrt[5]{x^3 - x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$

**52** **a)** $y = e^{2x^3}$ **b)** $y = e^{7x}$

**53** **a)** $y = 7^{2x+3}$ **b)** $y = e^{-x^2+2}$

**54** **a)** $y = \ln(5x^3 - 3x)$ **b)** $y = \ln(x^4 - x^2)$

**55** **a)** $y = \log(2x^3 + 5)$ **b)** $y = \log(x^2 + 4x + 1)$

**56** **a)** $y = \operatorname{sen}(3x^2 - 4x)$ **b)** $y = \cos(4x^3 + x)$

**57** **a)** $y = \operatorname{sen}(x^3 + 2)$ **b)** $y = \operatorname{tg}(x^2 - 1)$

**58** **a)** $y = e^x + \cos x$ **b)** $y = x\, e^x$

**59** **a)** $y = \dfrac{2x+3}{x^2-2}$ **b)** $y = \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

**60** Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

**a)** $y = -x^4 + 2x^2$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{6} - 2x$

**c)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$

**61** Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

**a)** $y = -x^3 + 3x$ **b)** $y = x^4 - 4x^2$

**c)** $y = \dfrac{6}{x^2 + 3}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x}$

## 4 Máximos, mínimos relativos y monotonía

**62** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x$$

250 Bloque III. Funciones

**63** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x$$

**64** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = 2x^3 - 6x + 1$$

**65** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = -x^3 + 6x^2 + 15x - 1$$

**66** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

**67** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

**68** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

**69** Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta $y = 4x - 5$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

**70** Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = -2x^2 - 8x - 3$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

## 5 Puntos de inflexión y curvatura

**71** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 3x + 4$$

**72** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = -x^3 + 3x^2 + 1$$

**73** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = 2x^3 - 3x + 4$$

**74** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = 4x^3 - 3x^4$$

**75** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$$

**76** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

**77** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

**78** Calcula los puntos críticos de la función:

$$y = x^5 + 3$$

**79** Calcula los puntos críticos de la función:

$$y = x^6 - 2$$

# Para ampliar

**80** Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

**a)** $f(x) = -x + 1$ en $[-1, 2]$

**b)** $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ en $[2, 4]$

**81** Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

**a)** $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$ en $[3, 5]$

**b)** $f(x) = \sqrt{x + 6}$ en $[-2, 3]$

**82** Aplica la definición de derivada y calcula:

**a)** La derivada de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 1$

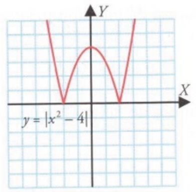
**b)** Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

**c)** Representa la función $f(x)$ y las rectas.

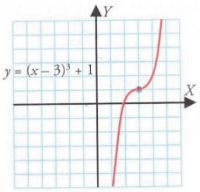
**83** El espacio que recorre una motocicleta viene dado por $f(t) = t^2 + t$, donde $t$ se expresa en segundos, y $f(t)$, en metros. Calcula la velocidad media en las dos primeras horas de movimiento.

# Ejercicios y problemas propuestos

**84** Analiza en qué puntos la función del gráfico no es derivable.




**85** Analiza si en $x = 3$ la función del gráfico es derivable. Dibuja la recta tangente en dicho punto.




**86** Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

**a)** $f(x) = x^3$

**b)** $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

**87** Aplicando la definición de derivada, halla la función derivada de:

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

Calcula:

**a)** El valor de la derivada en el punto de abscisa $x = 3$

**b)** El valor de la abscisa en el que la derivada es $-1/3$

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

**88** **a)** $y = (x^2 + 4)^3$ **b)** $y = (x^3 + 4)^2 \operatorname{sen} x$

**89** **a)** $y = \sqrt{x} + \dfrac{5}{x}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2}$

**90** **a)** $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 1}$

**91** **a)** $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $y = \sqrt{\ln(3x - 5)}$

**92** **a)** $y = e^{\operatorname{sen} x}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

**93** **a)** $y = e^{\sqrt{x+2}}$ **b)** $y = e^x \ln x$

**94** **a)** $y = e^{2x} \cos x$ **b)** $y = 2x + 3e^{-(x+2)}$

**95** **a)** $y = \ln \operatorname{tg} x$ **b)** $y = \ln 5x + e^{\sqrt{x}}$

**96** **a)** $y = \operatorname{tg} \sqrt{3x + 2}$ **b)** $y = \operatorname{sen} \sqrt{2x}$

**97** **a)** $y = \cos^2 x$ **b)** $y = \operatorname{tg}^2 x + 2^{\operatorname{sen} x}$

**98** **a)** $y = \dfrac{2x + 1}{\cos x}$ **b)** $y = x \operatorname{sen} x$

**99** Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes
nes y simplifica los resultados.

**a)** $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

**b)** $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$

**c)** $y = \dfrac{4}{x^2 - 1}$

**d)** $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

**100** Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes
nes y simplifica los resultados.

**a)** $y = x^4 + 2x^2$ **b)** $y = x^4 - x^3$

**c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

**101** Calcula los máximos y los mínimos relativos y deter
la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

**102** Calcula los máximos y los mínimos relativos y deter
la monotonía de la función:

$$y = \frac{4}{x^2 - 2x + 5}$$

**103** Calcula los máximos y los mínimos relativos y deter
la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$$

**104** Calcula los máximos y los mínimos relativos y deter
la monotonía de la función:

$$y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

**105** Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monoto
de la recta $y = -\dfrac{x}{2} + 3$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el re-
sultado.

**106** Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y
mínimos relativos y determina la monotonía de la para-
bola $y = \dfrac{x^2}{2} - x - 3$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el
resultado.

**107** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

**a)** $y = x^3 - 3x^2 + 2$

**b)** $y = x^4 - 6x^2 + 5x$

**108** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

**a)** $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ **b)** $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

## Problemas

**109** Aplicando la definición de derivada, calcula la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

en el punto de abscisa $x = -2$

**110** Halla los puntos en los que la función derivada de las siguientes funciones es igual a cero:

**a)** $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ **b)** $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

**111** Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 4x + 5$ en el punto de abscisa $x = 3$

**112** Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 5x + 4$ en el punto de abscisa $x = -2$

**113** Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva:

$$y = \frac{1}{x}$$

en el punto de abscisa $x = 1$

**114** Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 + 1$ cuya pendiente sea 4

**115** Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 9x + 1$ cuya pendiente sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?

**116** Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = -x^3 + 26x$ que sean paralelas a la recta $y = -x$

**117** Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - x^2$ que tengan una pendiente de 45°

**118** Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 4$ en los puntos de corte con el eje $X$

**119** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \operatorname{sen} x$$

**120** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \cos x$$

**121** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x - \operatorname{sen} x$$

**122** Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x + \cos x$$

**123** Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta:

$$y = \frac{x}{3} - 2$$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

**124** Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = -3x^2 + 6x + 2$. Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

**125** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \operatorname{sen} x$

**126** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \cos x$

**127** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x + \operatorname{sen} x$

**128** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x - \cos x$

### Para profundizar

**129** Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x^2 + 6x + 4$ en el punto de abscisa $x = -2$. Haz la representación gráfica.

**130** La ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es: $y - 4x + 11 = 0$

Calcula cuánto valen $f(3)$ y $f'(3)$

**131** Halla los puntos en los que las rectas tangentes a las curvas $y = x^2 + 3x - 2$ e $y = 2x^2 + x - 3$ son paralelas.

**132** Demuestra que la función $y = \ln x$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

**133** Determina los máximos, los mínimos relativos y la monotonía de la función $y = x^2 - 8 \ln x$

**134** Calcula la amplitud del ángulo con el que la recta tangente a la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ corta al eje $X$ en el punto de abscisa $x = 0$

# 10. Cálculo de derivadas

## Paso a paso

**135** Calcula la derivada de la función:

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}$$

**Solución:**

a) Introduce la función: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

b) Escribe: $f'(x)$

c) Pulsa $\boxed{=}$ **Calcular.**

10. Cálculo de derivadas
Óscar Arias López
Alba Maza Sánchez
Paso a paso

Ejercicio 135

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1};$

$f'(x) \rightarrow \dfrac{x^2-2\cdot x-1}{x^2-2\cdot x+1}$

**136** Halla las rectas tangente y normal a la curva:

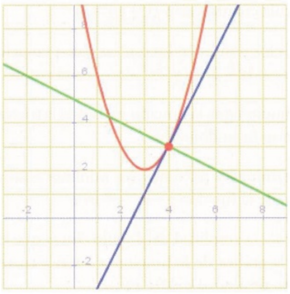
$$y = x^2 - 6x + 11 \text{ para } x = 4$$

Dibuja la curva y las rectas.

**Solución:**

Ejercicio 136

$f(x) = x^2 - 6x + 11;$
$a = 4 \rightarrow 4$
$P = \text{punto}(a, f(a)) \rightarrow (4,3)$
$f'(x) \rightarrow 2\cdot x-6$
$m = f'(a) \rightarrow 2$
$t(x) = m\cdot(x-a) + f(a) \rightarrow x \mapsto 2\cdot x-5$
$n(x) = -\dfrac{1}{m}\cdot(x-a) + f(a) \rightarrow x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cdot x+5$
tablero(punto(3, 3), 12, 12);
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2});
dibujar(t(x), {color = azul, anchura_línea = 2});
dibujar(n(x), {color = verde, anchura_línea = 2});
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8});

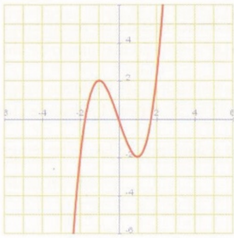


**137** Calcula los máximos y mínimos relativos y la monotonía de $y = x^3 - 3x$

**Solución:**

Ejercicio 137

$f(x) = x^3 - 3x;$
$f'(x) \rightarrow 3\cdot x^2-3$
$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{\{x=-1\}, \{x=1\}\}$
$f(-1) \rightarrow 2$
$A(-1, 2)$
$f(1) \rightarrow -2$
$B(1, -2)$
tablero(punto(0, 0), 12, 12);
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2});
Máximo relativo: $A(-1, 2)$
Mínimo relativo: $B(1, -2)$
Creciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
Decreciente: $(-1, 1)$

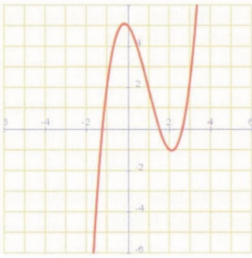


**138** Determina los puntos de inflexión y la curvatura de la función: $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$

**Solución:**

Ejercicio 138

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5;$
$f'(x) \rightarrow 3\cdot x^2-6\cdot x-1$
$f''(x) \rightarrow 6\cdot x-6$
$\text{resolver}(f''(x) = 0) \rightarrow \{\{x=1\}\}$
$f(1) \rightarrow 2$
$A(1, 2)$
tablero(punto(0, 0), 12, 12);
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2});
Punto de inflexión: $A(1, 2)$
Convexa $(\cup)$: $(1, +\infty)$
Cóncava $(\cap)$: $(-\infty, 1)$



# Windows/Linux WIRIS

## Así funciona

### Cálculo de derivadas

introduce la función como $f(x)$ y se escribe $f'(x)$. Para obtener la segunda derivada se escribe $f''(x)$, son dos primas, sirve el signo de comillas.

### Sustitución de variables

ra hallar el valor de $f(x)$ para $x = a$, se escribe $f(a)$
ra hallar el valor de $f'(x)$ para $x = a$, se escribe $f'(a)$
ra hallar el valor de $f''(x)$ para $x = a$, se escribe $f''(a)$

### Resolver ecuaciones

r ejemplo, para hallar las raíces de la primera derivada se escribe: **resolver ($f'(x) = 0$)**

## Practica

lcula la primera derivada de las siguientes funciones:

$y = \dfrac{e^x}{\text{sen } x}$ **140** $y = \sqrt{3x^2 - 5}$

$y = e^{\text{tg } x}$ **142** $y = e^x \ln x$

$y = e^{x^2} \cos x$ **144** $y = \ln \cos^3 x$

Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

**148** Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

**149** Calcula y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones:

**a)** $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

**b)** $y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 2$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

*Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:*

**150** Halla la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la siguiente función en el punto que se indica:

$$y = x^4 - 2x^3 \text{ en } x = 1$$

Representa la función, la recta tangente y la recta normal para comprobarlo.

**151** Calcula los máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión y determina la monotonía y la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

## B. CONTENIDOS DEL CURRICULO: BLOQUE 2, NÚMEROS Y ÁLGEBRA

| MATEMATICAS | | |
|---|---|---|
| 1 ESO | | |
| CONTENIDOS | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
| BLOQUE 2.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA | | |
| Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.<br>Números primos y compuestos.<br>Descomposición de un número en factores primos.<br>Múltiplos y divisores comunes a varios números.<br>Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales.<br>Números negativos. Significado y utilización en contextos reales.<br>Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones.<br>Operaciones con calculadora.<br>Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones.<br>Representación, ordenación y operaciones.<br>Números decimales. Representación, ordenación y operaciones.<br>Relación entre fracciones y decimales.<br>Conversión y operaciones.<br>Potencias de números naturales. Operaciones.<br>Potencias de base 10. Cuadrados perfectos. | Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.<br>Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.<br>Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental.<br>Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, | Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.<br>Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.<br>Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.<br>Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales.<br>Aplica los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11 para descomponer en factores primos números naturales y los emplea en ejercicios, actividades y problemas contextualizados.<br>Identifica y calcula el máximo común divisor y el |

| | | |
|---|---|---|
| Jerarquía de las operaciones.<br>Proporcionalidad directa y porcentajes: Cálculos en casos sencillos.<br>Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos.<br>Iniciación al lenguaje algebraico.<br>Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.<br>Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica. | utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas. | mínimo común múltiplo de dos o más números naturales mediante el algoritmo adecuado y lo aplica problemas contextualizados.<br>Realiza cálculos en los que intervienen potencias de exponente natural y aplica las reglas básicas de las operaciones con potencias.<br>Calcula e interpreta adecuadamente el opuesto y el valor absoluto de un número entero comprendiendo su significado y contextualizándolo en problemas de la vida real.<br>Realiza operaciones de redondeo y truncamiento de números decimales conociendo el grado de aproximación y lo aplica a casos concretos.<br>Realiza operaciones de conversión entre números decimales y fraccionarios, halla fracciones equivalentes y simplifica fracciones, para aplicarlo en la resolución de problemas.<br>Realiza operaciones combinadas entre números enteros, decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de las operaciones.<br>Desarrolla estrategias de cálculo mental para realizar cálculos exactos o aproximados valorando la precisión exigida en la operación o en el problema.<br>Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. |

| MATEMATICAS | | |
|---|---|---|
| 2º ESO | | |
| CONTENIDOS | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
| BLOQUE 2.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA | | |
| Significados y propiedades de los números en contextos diferentes al del cálculo: números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.<br>Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Operaciones.<br>Potencias de base 10. Utilización de la notación científica para representar números grandes.<br>Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas.<br>Estimación y obtención de raíces aproximadas.<br>Jerarquía de las operaciones.<br>Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora).<br>Aumentos y disminuciones porcentuales.<br>Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.<br>Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.<br>Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos. | Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.<br>Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.<br>Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental.<br>Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, | Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.<br>Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.<br>Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales.<br>Realiza cálculos en los que intervienen potencias de exponente natural y aplica las reglas básicas de las operaciones con potencias.<br>Utiliza la notación científica, valora su uso para simplificar cálculos y representar números muy grandes.<br>Realiza operaciones combinadas entre números enteros, decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de las operaciones.<br>Desarrolla estrategias de cálculo mental para realizar cálculos exactos o aproximados valorando la precisión |

| | | |
|---|---|---|
| Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.<br>El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.<br>Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.<br>Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.<br>Transformación y equivalencias. Identidades.<br>Operaciones con polinomios en casos sencillos.<br>Ecuaciones de primer grado con una incógnita<br>(métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico).<br>Resolución. Interpretación de las soluciones.<br>Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.<br>Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.<br>Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas. | decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.<br>Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.<br>Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.<br>Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos. | exigida en la operación o en el problema.<br>Realiza cálculos con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa.<br>Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.<br>Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales.<br>Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.<br>Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.<br>Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.<br>Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.<br>Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido. |

| MATEMATICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS | | |
|---|---|---|
| 3 ESO | | |
| BLOQUE 2.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA | | |
| CONTENIDOS | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
| Potencias de números racionales con exponente entero. Significado y uso.<br>Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños.<br>Operaciones con números expresados en notación científica.<br>Raíces cuadradas. Raíces no exactas.<br>Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones.<br>Jerarquía de operaciones.<br>Números decimales y racionales.<br>Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.<br>Operaciones con fracciones y decimales.<br>Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo.<br>Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.<br>Expresión usando lenguaje algebraico.<br>Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes<br>Progresiones aritméticas y geométricas.<br>Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. | Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida.<br>Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.<br>Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.<br>Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos | Reconoce los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales), indica el criterio utilizado para su distinción y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.<br>Distingue, al hallar el decimal equivalente a una fracción, entre decimales finitos y decimales infinitos periódicos, indicando en este caso, el grupo de decimales que se repiten o forman período.<br>Halla la fracción generatriz correspondiente a un decimal exacto o periódico.<br>Expresa números muy grandes y muy pequeños en notación científica, y opera con ellos, con y sin calculadora, y los utiliza en problemas contextualizados.<br>Factoriza expresiones numéricas sencillas que contengan raíces, opera con ellas simplificando los resultados.<br>Distingue y emplea técnicas adecuadas para realizar aproximaciones por defecto y por exceso de un número en problemas contextualizados, justificando sus procedimientos.<br>Aplica adecuadamente técnicas de truncamiento y redondeo en problemas contextualizados, reconociendo los errores de aproximación en cada caso para determinar el procedimiento más adecuado.<br>Expresa el resultado de un problema, utilizando la unidad de medida adecuada, en forma de número decimal, redondeándolo si es necesario con el margen de error o |

| | | |
|---|---|---|
| Resolución (método algebraico y gráfico).<br>Transformación de expresiones algebraicas.<br>Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.<br>Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.<br>Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. | incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos. | precisión requeridos, de acuerdo con la naturaleza de los datos.<br>Calcula el valor de expresiones numéricas de números enteros, decimales y fraccionarios mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente entero aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.<br>Emplea números racionales para resolver problemas de la vida cotidiana y analiza la coherencia de la solución.<br>Calcula términos de una sucesión numérica recurrente usando la ley de formación a partir de términos anteriores.<br>Obtiene una ley de formación o fórmula para el término general de una sucesión sencilla de números enteros o fraccionarios.<br>Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los “n” primeros términos, y las emplea para resolver problemas.<br>Valora e identifica la presencia recurrente de las sucesiones en la naturaleza y resuelve problemas asociados a las mismas.<br>Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana.<br>Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado.<br>Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común.<br>Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta criticamente el resultado obtenido. |

| MATEMATICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS APLICADAS | | |
|---|---|---|
| 3 ESO | | |
| BLOQUE 2.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA | | |
| CONTENIDOS | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
| Potencias de números naturales con exponente entero. Significado y uso.<br>Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños.<br>Operaciones con números expresados en notación científica.<br>Jerarquía de operaciones.<br>Números decimales y racionales.<br>Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos.<br>Operaciones con fracciones y decimales.<br>Cálculo aproximado y redondeo. Error cometido.<br>Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.<br>Expresión usando lenguaje algebraico.<br>Transformación de expresiones algebraicas con una indeterminada. Igualdades notables.<br>Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.<br>Resolución (método algebraico y gráfico).<br>Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. | Utilizar las propiedades de los números racionales y decimales para operarlos utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas, y presentando los resultados con la precisión requerida.<br>Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado extrayendo la información relevante y transformándola.<br>Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos y valorando y contrastando los resultados obtenidos. | Aplica las propiedades de las potencias para simplificar fracciones cuyos numeradores y denominadores son productos de potencias.<br>Distingue, al hallar el decimal equivalente a una fracción, entre decimales finitos y decimales infinitos periódicos, indicando en ese caso, el grupo de decimales que se repiten o forman período.<br>Expresa ciertos números muy grandes y muy pequeños en notación científica, y opera con ellos, con y sin calculadora, y los utiliza en problemas contextualizados.<br>Distingue y emplea técnicas adecuadas para realizar aproximaciones por defecto y por exceso de un número en problemas contextualizados y justifica sus procedimientos.<br>Aplica adecuadamente técnicas de truncamiento y redondeo en problemas contextualizados, reconociendo los errores de aproximación en cada caso para determinar el procedimiento más adecuado.<br>Expresa el resultado de un problema, utilizando la unidad de medida adecuada, en forma de número decimal, redondeándolo si es necesario con el margen de error o precisión requeridos, |

| | | |
|---|---|---|
| | | de acuerdo con la naturaleza de los datos.<br>Calcula el valor de expresiones numéricas de números enteros, decimales y fraccionarios mediante las operaciones elementales y las potencias de números naturales y exponente entero aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.<br>Emplea números racionales y decimales para resolver problemas de la vida cotidiana y analiza la coherencia de la solución.<br>Suma, resta y multiplica polinomios, expresando el resultado en forma de polinomio ordenado y aplicándolos a ejemplos de la vida cotidiana.<br>Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia y las aplica en un contexto adecuado.<br>Resuelve ecuaciones de segundo grado completas e incompletas mediante procedimientos algebraicos y gráficos.<br>Resuelve sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos o gráficos.<br>Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido. |

| MATEMATICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS | | |
|---|---|---|
| 4 ESO | | |
| BLOQUE 2.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA | | |
| CONTENIDOS | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
| Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales.<br>Representación de números en la recta real. Intervalos.<br>Potencias de exponente entero o fraccionario y radicales sencillos.<br>Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso.<br>Potencias de exponente racional. Operaciones y propiedades.<br>Jerarquía de operaciones.<br>Cálculo con porcentajes. Interés simple y compuesto.<br>Logaritmos. Definición y propiedades.<br>Manipulación de expresiones algebraicas.<br>Utilización de igualdades notables.<br>Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización.<br>Ecuaciones de grado superior a dos.<br>Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones.<br>Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante | Conocer los distintos tipos de números e interpretar el significado de algunas de sus propiedades más características: divisibilidad, paridad, infinitud, proximidad, etc.<br>Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.<br>Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.<br>Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales. | Reconoce los distintos tipos números (naturales, enteros, racionales e irracionales y reales), indicando el criterio seguido, y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.<br>Aplica propiedades características de los números al utilizarlos en contextos de resolución de problemas.<br>Opera con eficacia empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o programas informáticos, y utilizando la notación más adecuada.<br>Realiza estimaciones correctamente y juzga si los resultados obtenidos son razonables.<br>Establece las relaciones entre radicales y potencias, opera aplicando las propiedades necesarias y resuelve problemas contextualizados.<br>Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera.<br>Calcula logaritmos sencillos a partir de su definición o mediante la aplicación de sus propiedades y resuelve problemas sencillos. |

| | | |
|---|---|---|
| ecuaciones y sistemas.<br>Inecuaciones de primer y segundo grado.<br>Interpretación gráfica. Resolución de problemas. | | Compara, ordena, clasifica y representa distintos tipos de números sobre la recta numérica utilizando diferentes escalas.<br>Resuelve problemas que requieran conceptos y propiedades específicas de los números.<br>Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.<br>Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado.<br>Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas.<br>Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos.<br>Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos. |

| MATEMATICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS APLICADAS | | |
|---|---|---|
| 4 ESO | | |
| BLOQUE 2.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA | | |
| CONTENIDOS | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
| Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales.<br>Diferenciación de números racionales e irracionales.<br>Expresión decimal y representación en la recta real.<br>Jerarquía de las operaciones. Interpretación y utilización de los números reales y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso.<br>Utilización de la calculadora para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica.<br>Cálculos aproximados.<br>Intervalos. Significado y diferentes formas de expresión.<br>Proporcionalidad directa e inversa.<br>Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.<br>Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos.<br>Interés simple y compuesto. | Conocer y utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades y aproximaciones, para resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico recogiendo, transformando e intercambiando información.<br>Utilizar con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.<br>Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando ecuaciones de distintos tipos para resolver problemas. | Reconoce los distintos tipos números (naturales, enteros, racionales e irracionales), indica el criterio seguido para su identificación, y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.<br>Realiza los cálculos con eficacia, bien mediante cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel o calculadora, y utiliza la notación más adecuada para las operaciones de suma, resta, producto, división y potenciación.<br>Realiza estimaciones y juzga si los resultados obtenidos son razonables.<br>Utiliza la notación científica para representar y operar (productos y divisiones) con números muy grandes o muy pequeños.<br>Compara, ordena, clasifica y representa los distintos tipos de números reales, intervalos y semirrectas, sobre la recta numérica.<br>Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera.<br>Resuelve problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directa e |

| | | |
|---|---|---|
| Polinomios: raíces y factorización.<br>Utilización de identidades notables.<br>Resolución de ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.<br>Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas. | | inversamente proporcionales.<br>Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.<br>Realiza operaciones de suma, resta, producto y división de polinomios y utiliza identidades notables.<br>Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza, mediante la aplicación de la regla de Ruffini.<br>Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido. |

| MATEMATICAS | | |
|---|---|---|
| 1 BACHILLERATO | | |
| BLOQUE 2.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA | | |
| CONTENIDOS | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
| Números reales: necesidad de su estudio para la comprensión de la realidad. Valor absoluto. Desigualdades.<br><br>Distancias en la recta real. Intervalos y entornos.<br><br>Aproximación y errores. Notación científica.<br><br>El número e. Logaritmos decimales y neperianos. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.<br><br>Planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante ecuaciones e inecuaciones.<br><br>Interpretación gráfica. | Utilizar los números reales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información, estimando, valorando y representando los resultados en contextos de resolución de problemas.<br><br>Valorar las aplicaciones del número “e” y de los logaritmos utilizando sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.<br><br>Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando recursos algebraicos (ecuaciones, inecuaciones y sistemas) e interpretando críticamente los resultados. | Reconoce los distintos tipos números (reales y complejos) y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.<br><br>Realiza operaciones numéricas con eficacia, empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o herramientas informáticas.<br><br>Utiliza la notación numérica más adecuada a cada contexto y justifica su idoneidad.<br><br>Obtiene cotas de error y estimaciones en los cálculos aproximados que realiza valorando y justificando la necesidad de estrategias adecuadas para minimizarlas.<br><br>Conoce y aplica el concepto de valor absoluto para calcular distancias y manejar desigualdades. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Resuelve problemas en los que intervienen números reales y su representación e interpretación en la recta real.<br><br>Aplica correctamente las propiedades para calcular logaritmos sencillos en función de otros conocidos.<br><br>Resuelve problemas asociados a fenómenos físicos, biológicos o económicos mediante el uso de logaritmos y sus propiedades.<br><br>Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica un sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve, mediante el método de Gauss, en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.<br><br>Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones (algebraicas y no algebraicas) e inecuaciones (primer y segundo grado), e interpreta los resultados en el contexto del problema. |

| MATEMATICAS ORIENTADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES | | |
|---|---|---|
| 1 BACHILLERATO | | |
| BLOQUE 2.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA | | |
| CONTENIDOS | CRITERIOS DE EVALUACIÓN | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES |
| Números racionales e irracionales. El número real.<br><br>Representación en la recta real. Intervalos.<br><br>Aproximación decimal de un número real. Estimación, redondeo y errores.<br><br>Operaciones con números reales. Potencias y radicales. La notación científica.<br><br>Polinomios. Operaciones. Descomposición en factores.<br><br>Ecuaciones lineales, cuadráticas y reducibles a ellas, exponenciales y logarítmicas. Aplicaciones. Sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado con dos incógnitas. Clasificación. Aplicaciones. Interpretación geométrica. | Utilizar los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información, controlando y ajustando el margen de error exigible en cada situación, en situaciones de la vida real.<br><br>Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico situaciones relativas a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas y herramientas tecnológicas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas en contextos particulares. | Reconoce los distintos tipos números reales (racionales e irracionales) y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.<br><br>Representa correctamente información cuantitativa mediante intervalos de números reales.<br><br>Compara, ordena, clasifica y representa gráficamente, cualquier número real.<br><br>Realiza operaciones numéricas con eficacia, empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o programas informáticos, utilizando la notación más adecuada y controlando el error cuando aproxima.<br><br>Utiliza de manera eficaz el lenguaje algebraico para representar situaciones planteadas en contextos reales.<br><br>Resuelve problemas relativos a las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones.<br><br>Realiza una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos y los expone con claridad. |

# C. Hojas de ejercicios adicionales resueltos

| IES NAVARRO VILLOSLADA | MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO | Fecha: 12/10/2019 |
|---|---|---|
| Ejercicios Tema 10 | | |
| Nombre y Apellidos: | | |
| ☐ ciencias | | |

1. El abecedario del infierno… Calcula las siguientes derivadas:
   a. $y = x^3 - 5x^2 + 6$
   b. $y = \frac{2x}{x-5x}$
   c. $y = \frac{x^2-1}{x+1}$
   d. $y = -\frac{1-x}{x-1}$
   e. $y = ln\frac{x-1}{x+1}$
   f. $y = 5x^3 + \sqrt[3]{x+1}$
   g. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
   h. $y = \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2$
   i. $y = e^{cosx}$
   j. $y = \sqrt{2x^2 + (x^2-1)^2}$
   k. $y = \frac{x^2-x}{e^x}$
   l. $y = \frac{2x^2+5x-3}{5x^2}$
   m. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$
   n. $y = e^{senx}$
   o. $y = \ln\left(\frac{e^x+2}{e^x-2}\right)$
   p. $y = 5\sqrt{x-1}$
   q. $y = log_3 x$
   r. $y = arc\ tg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
   s. $y = \frac{1}{e^x}$
   t. $y = e^{2x^3-3x^2-5} + \sqrt{x-4} - 7x + 20$
   u. $y = ln\frac{x-1}{x+1} + 2^{cosx}$
   v. $y = a^{x^2-3x-5} - 9sen^2x - 5$
   w. $y = 3arctg\sqrt{x} - 3cosx + x^{-3}$
   x. $y = 5ln\sqrt{senx} + \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}$
   y. $y = \frac{x+2}{lnx} - \cos(e^x) + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
   z. $y = ln\left(\frac{1-cosx}{1+cosx}\right)$

2. Una empresa ha comprobado que la demanda de artículos de un producto, en función del precio, viene dada por la expresión $d(x) = 700 - 3x^2$

Calcula:

a. La variación de la demanda si el precio pasa de 5 a 10 euros por unidad, ¿es positiva o negativa?
b. La variación media correspondiente a los intervalos [5,10], [5,7], [5,5.1] y [5,5.01]
c. La variación instantánea en x=5

3. Calcula la derivada de y = 1/x utilizando la definición de derivada

4. Se sabe que la función f(x) es derivable en el intervalo (0,5) y verifica f(0) = f(5). ¿Cuánto valen a, b y c?

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & 0 \le x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

5. Siendo f(x) = $(x+1)^2$ y g(x) = 3x, calcula la derivada de la función compuesta g(f(x))

6. Dada la función f(x) = $ax^2$ + bx + c, determina los coeficientes a, b y c sabiendo que la gráfica de f(x) pasa por los puntos (1,0) y (3,2) y que la recta tangente a la curva y=f(x) en x=1 tiene pendiente igual a -1.
7. Dada la función f(x)
   a. Determina a y b de modo que sea continua
   b. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ a + bx & 0 < x \le 1 \\ 3 & 1 < x \end{cases}$$

8. Se considera la curva cuya ecuación es f(x) = $kx^3 + 6x^2$ -kx – 18
   a. ¿Cuánto debe valer k si las tangentes en los puntos A(1,f(1)) y B(-2,f(-2)) son paralelas?
   b. Determina las ecuaciones de ambas tangentes.

9. Responde a las siguientes cuestiones:
   a. Deriva $y = ln\left(\frac{senx}{cosx}\right) + e^{2x}$
   b. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{1}{1+x^2}$ en x=1

10. Calcula el valor de m para que la derivada de $f(x) = \frac{mx^2+1}{2x+m}$ en x=1/2 valga 1.

11. Calcula las tangentes a la curva dada por f(x) = $x^3$-2x, paralelas a la recta y=x.
12. Calcula los máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura de las siguientes funciones:
    a. $y = x^2 - 4x + 5$
    b. $y = x^5 + 3$
    c. $y = x^3 - 27x + 10$
    d. $y = x^2 - 4x^2 + 5x - 6$
    e. $y = \frac{x}{x^2-4}$

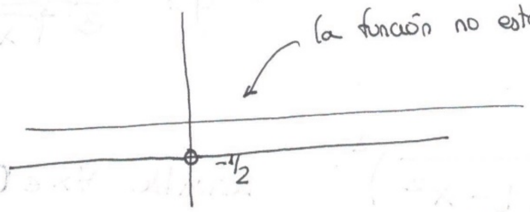
# Ejercicios T10

(1) (a) $y = x^3 - 5x^2 + 6 \qquad y' = 3x^2 - 10x \qquad$ Derivable $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) $y = \dfrac{2x}{x-5x} = \dfrac{2x}{-4x} = \dfrac{x}{-2x} \overset{\forall x \neq 0}{=} -\dfrac{1}{2} \qquad$ Derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = 0$ para todo $x \neq 0$.

la función no esta definida en $x = 0$.




$y = \dfrac{0}{0}.$

(c) $y = \dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} \overset{\text{para } x \neq -1}{=} (x-1)$

$y' = 1$ (para $x \neq -1$)

Derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

(d) $y = -\dfrac{1-x}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} \overset{\text{para } x \neq 1.}{=} 1$

$y' = 0 \qquad$ Derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

(e) $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \qquad y' = \dfrac{\dfrac{2}{(x+1)^2}}{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \dfrac{2}{x^2-1}$

erivable
$x \in (1, \infty)$

$* \quad y = \ln(u) \qquad y' = \dfrac{u'}{u}$

$u = \dfrac{x-1}{x+1} \qquad u' = \dfrac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

f) $y = 5x^3 + \sqrt[3]{x+1} = 5x^3 + (x+1)^{1/3}$

$y' = 15x^2 + \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} = 15x^2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Derivable $\forall x \in (-1, \infty)$

g) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-2/3}$ $\quad y' = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3}x^{-5/3}$

Derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} = \frac{-2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

h) $y = \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2$ Derivable $\forall x \in [-1, 1)$

$y = u^n$, $y' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

$y' = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x)\right)\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) = 2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) =$

$y' = 2\left(x - \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 2\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right) = 2\left(\frac{x^2-1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$y' = 2\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

i) $y = e^{\cos x}$ ($y = e^u$) $\quad y' = -\operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x}$ ($y' = u' e^u$)

Derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

j) $y = \sqrt{2x^2 + (x^2-1)^2}$ Derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(2x^2 + (x^2-1)^2\right)^{-1/2} \cdot \left(4x + 2(x^2-1) \cdot 2x\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4x + 4x(x^2-1)}{\sqrt{2x^2+(x^2-1)^2}} = \frac{4x}{2}\frac{1+x^2-1}{\sqrt{2x^2+(x^2-1)^2}} = \frac{2x^3}{\sqrt{2x^2+(x^2-1)^2}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+}}$

(j) cont) Más fácil.

$$y = \sqrt{2x^2 + (x^2-1)^2} = \sqrt{2x^2 + x^4 + 1 - 2x^2} = \sqrt{x^4 + 1}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$$

(k) $y = \dfrac{x^2 - x}{e^x}$ Derivable $\forall x \in \mathbb{R}$

$y = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{(2x-1)\cdot e^x - (x^2-x)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x-1-x^2+x)}{e^{2x}} = \frac{-x^2+3x-1}{e^x}$$

$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$y = \frac{u}{v}$

(l) $y = \dfrac{2x^2+5x-3}{5x^2}$ Derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$y' = \frac{(4x+5)5x^2 - (2x^2+5x-3)\cdot 10x}{25x^4} = \frac{(4x+5)\cdot x - (2x^2+5x-3)\cdot 2}{5x^3}$$

$$= \frac{4x^2+5x-4x^2-10x+6}{5x^3} = \frac{6-5x}{5x^3}$$

(m) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$ Derivable $\forall x \in (0, \infty)$

$x \in (0,\infty)$

$$y = x^3 \cdot x^{-1/2} = x^{3-\frac{1}{2}} = x^{5/2} \qquad y' = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2} \cdot x^{3/2} = \frac{5}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x}$$

(n) $y = e^{\operatorname{sen} x}$. Derivable $\forall x \in \mathbb{R}$

$y = e^u$

$y' = u' \cdot e^u$

$y' = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$

(o) $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 2}{e^x - 2}\right)$ Derivable $\forall x \in (\ln 2, \infty)$

$y = \ln u$ $\;\;\longrightarrow\;\; y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$y' = \dfrac{u'}{u}$

$$y' = \frac{u'}{\dfrac{e^x+2}{e^x-2}} = \frac{\dfrac{e^x(e^x-2) - (e^x+2)\cdot e^x}{(e^x-2)^2}}{\dfrac{e^x+2}{e^x-2}} = \frac{e^{2x} - 2e^x - e^{2x} - 2e^x}{(e^x+2)(e^x-2)}$$

$$= \frac{-4e^x}{(e^x+2)(e^x-2)} = \frac{-4e^x}{e^{2x} - 4}$$

(p) $y = u^n$

$y = 5 \cdot \sqrt{x-1}$ Derivable $\forall x \in (1, \infty)$

$y = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

$$y' = 5 \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2} = \frac{5}{2\sqrt{x-1}}$$

(q) $y = \log_3 x$. Derivable $\forall x \in (0, \infty)$

$y' = \dfrac{u'}{u} \cdot \log_a e$ $\;\; y = \log_a u$

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_3 e$$

(r) $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $\Longleftarrow$ NO ENTRA.

(s) $y = e^u$

$y = \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ Derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

$y' = u' e^u$

$y' = -e^{-x}$

(t) $y = e^{2x^3-3x^2-5} + \sqrt{x-4} - 7x + 20$ Derivable $\forall x \in (4, \infty)$

$y = u + v + w$

$y' = u' + v' + w'$

$$y' = (6x^2 - 6x)\cdot e^{2x^3-3x^2-5} + \frac{1}{2\sqrt{x-4}} - 7.$$

(u) $y = \ln\frac{x-1}{x+1} + 2^{\cos x}$ Derivable $\forall x \in (1, \infty)$

$y = \ln u + a^{v}$

$y' = \frac{u'}{u} + v'.a^{v}.\ln a$

$$y' = \underbrace{\frac{2}{x^2-1}} - \operatorname{sen} x.2^{\cos x}.\ln 2.$$

ver ej. 1.e)

(v) $y = a^{x^2-3x-5} - 9.\operatorname{sen}^2 x - 5$ Derivable $\forall x \in \mathbb{R}$

$y = a^{u} + v^{n} + k. \Rightarrow y' = u'.a^{u}.\ln a + n.v^{n-1}.v' + 0.$

$$y' = (2x-3).a^{x^2-3x+5}.\ln a - 18.\operatorname{sen} x.\cos x$$

(w) $y = 3\operatorname{arctg}\sqrt{x} - 3\cos x + x^{-3}$ ← NO ENTRA.

(x) $y = 5.\ln\sqrt{\operatorname{sen} x} + \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}$ Derivable $\forall x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{N}$. $[0, 1, 2, \ldots]$

$y = k\ln u + \frac{v}{w}$ $y' = k\frac{u'}{u} + \frac{v'.w - v.w'}{w^2}$

$$y' = 5.\frac{\frac{1\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{(x+1)^{1/3} - (x-1)\cdot\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{5}{2}.\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{(x+1)^{1/3}\left(1-\frac{1}{3}\frac{(x-1)}{(x+1)}\right)}{(x+1)^{2/3}}$$

$$= \frac{5}{2}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\frac{3x+3-x+1}{3(x+1)}}{(x+1)^{1/3}} = \frac{5}{2}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{2x+4}{3(x+1)^{4/3}}$$

9) $y = \dfrac{x+2}{\ln x} - \cos(e^x) + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ Derivable $\forall x \in (0, \infty)$

$y = \dfrac{u}{v} - \cos(w) + z^n \qquad y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} + w' \cdot \text{sen}(w) + n \cdot z' \cdot z^{n-1}$

$$y' = \frac{\ln x - (x+2)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} + e^x \cdot \text{sen}(e^x) - \frac{1}{2}(x+2)^{-3/2}$$

$$= \frac{x\cdot \ln x - x - 2}{x \ln^2 x} + e^x \,\text{sen}(e^x) - \frac{1}{2(x+2)^{3/2}}$$

Derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi\}$.

2) $y = \ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$

$y = \ln\left(\dfrac{u}{v}\right) \qquad y' = \dfrac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\frac{u}{v}} = \dfrac{\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}{\frac{u}{v}} = \dfrac{(u'v - u \cdot v')}{u \cdot v}$

$$y' = \frac{(\text{sen}\, x \cdot (1+\cos x) - (1-\cos x)\cdot(-\text{sen}\, x))}{(1+\cos x)\cdot(1-\cos x)}$$

$$= \frac{(\text{sen}\, x + \text{sen}\, x \cos x + \text{sen}\, x - \text{sen}\, x \cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{2\,\text{sen}\, x}{(1+\cos x)(1-\cos$$

(2) Demanda : $d(x) = 700 - 3x^2$ $d(x) \rightarrow$ demanda
$x \rightarrow$ precio.

(a) La demanda si el precio es 5€ : $d(5) = 700 - 3\cdot 5^2 = 625$

La demanda si el precio es 10€ : $d(10) = 700 - 3\cdot 10^2 = 400$.

Variación de la demanda si el precio pasa de 5€ a 10€ es

$d(10) - d(5) = 400 - 625 = -225$. $\Rightarrow$ Es negativa lo que significa que hay menos demanda si el producto vale 10€ que si vale 5€.

(b) Tasa de variación media para los intervalos $[5,10]$, $[5,7]$, $[5,5.1]$ y $[5,5.01]$

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

$$TVM[5,10] = \frac{d(10) - d(5)}{10-5} = \frac{-225}{5} = -45$$

$$TVM[5,7] = \frac{d(7) - d(5)}{7-5} = \frac{700 - 3\cdot 7^2 - 625}{2} = \frac{-72}{2} = -36$$

$$TVM[5,5.1] = \frac{d(5.1) - d(5)}{5.1 - 5} = \frac{700 - 3\cdot(5.1)^2 - 625}{0.1} = \frac{-3.03}{0.1} = -30.3$$

$$TVM[5,5.01] = \frac{d(5.01) - d(5)}{5.01 - 5} = \frac{700 - 3\cdot(5.01)^2 - 625}{0.01} = \frac{-0.3003}{0.01} = -30.0$$

(c) La tasa de variación instantanea: en $x = a = 5$.

$$\lim_{h\to 0} TVM[a,a+h] = \lim_{h\to 0} \frac{d(5+h) - d(5)}{5+h-5} = \lim_{h\to 0} \frac{700 - 3(5+h)^2 - 700 + 3\cdot 5^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3(25 + h^2 + 10h) + 75}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-75 - 3h^2 - 30h + 75}{h} = -30$$

(3) Calcula la derivada de $f(x)=y=\frac{1}{x}$ usando la definición.

Def:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-x-h}{h\cdot x\,(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\cdot x\,(x-}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

(4) f(x) derivable en el intervalo (0, 5). y $f(0) = f(5)$.

¿Cuanto valen a, b y c?

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & 0 \leq x < 2 \\ c+\sqrt{x-1} & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Condiciones: (C.1) $f(0)=f(5) \Rightarrow 0 = c+\sqrt{5-1} = c+2 \Rightarrow c=-2$

(C.2) f(x) derivable en $(0,5) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ continua en } (0,5) \\ f'(x^-)=f'(x^+)\ \forall x \in (0,5) \end{cases}$

$\Rightarrow$ hay que estudiar la función en $x=2$.

para que la función se acontinua en $x=2$.

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x).$$

$$f(2) = c+\sqrt{2-1} = c+1 = -2+1 = -1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ax+bx^2 = 2a+4b$$

$$2a+4b=-1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} c+\sqrt{x-1} = -1$$

4 (cont.) Para que la función sea derivable a $x=2$. $f'(2^+) = f'(2^-)$.

$f(x) = ax + bx^2 \Rightarrow f'(x) = a + 2bx.$ si $0 < x < 2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} a + 2bx = a + 4b \\ f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad a + 4b = \frac{1}{2}.$$

$f(x) = c + \sqrt{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ si $2 < x < 5$

Por tanto, para que la función sea continua y derivable en el intervalo tenemos que:

$c = -2$

$$\left.\begin{array}{l} 2a + 4b = -1 \\ a + 4b = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2} \qquad b = \frac{1}{2} \qquad c = -2}$$

5 $f(x) = (x+1)^2 \qquad g(x) = 3x. \qquad ¿\, g(f(x))'$ ?

por la regla de la cadena sabemos que $g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(f(x))$

$f'(x) = 2(x+1)$

$g'(f(x)) = 3.$

$g(f(x))' = 3 \cdot 2(x+1) = 6(x+1)$

Más fácil:

$g(f(x)) = 3(x+1)^2$

$g(f(x))' = 6(x+1).$

6) Dada $f(x) = ax^2 + bx + c$ determina a, b y c sabiendo que.

$f(x)$ pasa por $(1,0)$ y $(3,2)$. $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(3) = 2 \end{cases}$

La recta tangente a la curva a $x=1$ tiene una pendiente de $-1$ $\Rightarrow f'(1) = -1$

$f(1) = 0 = a + b + c \Rightarrow 0 = a - 1 - 2a + c \Rightarrow c = a + 1$

$f(3) = 2 = 9a + 3b + c \Rightarrow 2 = 9a - 3 - 6a + a + 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$f'(1) = -1 = 2a + b \Rightarrow b = -1 - 2a$

$\boxed{a = 1 \quad ; \quad b = -3 \quad ; \quad c = 2}$

7) Dada $f(x)$ determina a y b para que sea continua.

b) Estudia la derivabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ a + bx & 0 < x \leq 1 \\ 3 & 1 < x \end{cases}$$

Como es una función definida en $(-\infty, \infty)$ a trozos, por tres funciones polinómicas. Sabemos que es continua salvo en los puntos de la recta real 0 y 1. así que estudiamos la continuidad en estos puntos.

Para que $f(x)$ sea continua:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

$\lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0^+} a + bx \Rightarrow a = 0.$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = a + b = \lim_{x \to 1^+} 3 \Rightarrow a + b = 3$

$\boxed{\begin{matrix} a = 0 \\ b = 3 \end{matrix}}$ Para que $f(x)$ sea continua.

7 cont) Así pues tenemos $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 3x & 0 < x \leq 1 \\ 3 & 1 < x \end{cases}$

para que la funcion sea derivable en $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0.$$

$\neq \rightarrow$ No es derivable en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 3 = 3$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x).$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 = 3$$

$\neq \rightarrow$ la funcion no es derivable en $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 0 = 0.$$

Por tanto, la funcion $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$ si $\begin{cases} a=0 \\ b=3 \end{cases}$

pero en ese caso la funcion $f(x)$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}-\{0,1\}$

$\Rightarrow$ Es derivable para todo numero real diferente de 0 y 1.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

(8) $f(x) = k\cdot x^3 + 6x^2 - k\cdot x - 18$

(a) ¿Si las tangentes a la curva en $A(1, f(1))$, $B(-2, f(-2))$ son paralelas cuanto vale $k$?

Para que las rectas tangentes a dos puntos sean paralelas, han de tener la misma pendiente. $\Rightarrow f'(1) = f'(-2)$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = 3kx^2 + 12x - k$.

$f'(1) = f'(-2) \Rightarrow 3k + 12 - k = 12k - 24 - k$

$9k = 36 \Rightarrow \boxed{k = 4}$

(b) Por la teoría sabemos que la ecuación de la recta tangente a un punto a es: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$f'(x) = 3kx^2 + 12x - k \overset{k=4}{=} 12x^2 + 12x - 4 = 12x(x+1) - 4$

$f'(1) = 24 - 4 = 20$

$f(x) = k\cdot x^3 + 6x^2 - kx - 18 \overset{k=4}{=} 4x^3 + 6x^2 - 4x - 18$

$f(1) = 4 + 6 - 4 - 18 = -12$

$f(-2) = -4\cdot 8 + 6\cdot 4 + 4\cdot 2 - 18 = 46$

Así pues:

Eq. recta tangente a $f(x)$ con $k=4$ en $x=1 \Rightarrow y = 20(x-1) - 12$

Eq. recta tangente a $f(x)$ con $k=4$ en $x=-2 \Rightarrow y = 20(x+2) - 18$

(9) (a) Deriva $y = \ln \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + e^{2x}$.

Como $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ la derivada es directa.

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} + 2e^{2x} = \frac{1}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} + 2e^{2x}$$

(b) Halla la ec tangente a $y = \frac{1}{1+x^2}$ en $x = 1$.

Sabemos que la ecuación de la recta tangente a f(x) en 1 es $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Así que hallamos $f'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Sustituyendo : $f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{2^2} = -1/2$

Calculamos $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Así pues, la ec. de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$

es: $y = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{x}{2}$

(10) Calcula m para que $f'(1/2) = 1$ si $f(x) = \frac{mx^2+1}{2x+m}$

Calculamos $f'(x) = \frac{2mx(2x+m) - (mx^2+1)(2)}{(2x+m)^2} = \frac{4mx^2 + 2m^2x - 2mx^2 - 2}{(2x+m)^2}$

$y = \frac{u}{v}$ $y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\frac{2mx^2 + 2m^2x - 2}{(2x+m)^2}$ ; $f'\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\frac{2m}{4} + m^2 - 2}{(m+1)^2} = 1 \Rightarrow \frac{m}{2} + m^2 - 2 = (m+1)^2$

$\Rightarrow \frac{m}{2} + m^2 - 2 = m^2 + 1 + 2m \Rightarrow \frac{3}{2}m = -3 \Rightarrow m = \frac{-6}{3} = -2$

(11) Calcula las tangentes a la curva $f(x) = x^3 - 2x$ que son paralelas a la recta $y = x$.

Como $y = x$ tiene pendiente $= 1 = \frac{y}{x}$ hay que hallar los puntos de $f(x)$ cuya derivada sea igual a 1.

$$f'(x) = 3x^2 - 2.$$

$$f'(x) = 1 = 3x^2 - 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Para calcular las rectas tangentes necesitamos calcular.

$$f(1) = 1 - 2 = -1$$
$$f(-1) = -1 + 2 = 1.$$

Ahora si, tenemos que: hay 2 retas tangentes a $f(x)$ que son paralelas a $y = x$ que son:

$$y = 1(x-1) - 1 = x - 2$$
$$y = 1(x+1) + 1 = x + 2$$

(12) (a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$$f'(x) = 2x - 4$$
$$f''(x) = 2$$
$$f'''(x) = f^{IV}(x) = \dots = 0.$$

Posibles max/min $\rightarrow f'(x) = 0 = 2x - 4 \Rightarrow x_1 = 2$ ; $f(x_1) = 1$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow (2, 1)$ es un mínimo relativo.

12 a cont) Mínimo relativo en $(2,1)$.

Monotonía

$$\begin{array}{ccc} f'(x)<0 & & f'(x)>0 \\ \searrow & & \nearrow \\ \hline & 2 & \end{array}$$

$f(x)$ decrece $\searrow$ entre $(-\infty, 2)$

$f(x)$ creciente $\nearrow$ en $(2, \infty)$.

Puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \neq 2$ $\Rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

Curvatura: $f''(x) > 0$ para todo $x$ $\Rightarrow$ la función es convexa $\forall x$.

Resumen 12a)

Mínimo relativo en $(2,1)$

$f(x)$ decreciente $\searrow$ : $(-\infty, 2)$

$f(x)$ creciente $\nearrow$ : $(2, \infty)$

No tiene puntos de inflexión.

$f(x)$ convexa $(\cup)$ : $(-\infty, \infty)$

12 b)

$f(x) = x^5 + 3$

$f'(x) = 5x^4$

$f''(x) = 20x^3$

$f'''(x) = 60x^2$

$f^{IV}(x) = 120x$

$f^{V}(x) = 120$

¿Máximos/Mínimos:? $f'(x) = 0 = 5x^4$

$\Rightarrow x_1 = 0$.

Posible max/min relativo en $(0,3)$.

$f''(0) = 0 \rightarrow$ Buscamos la primera derivada sucesiva que no se anula en $x=0$.

$f^{V}(0) = 120 \Rightarrow$ la primera derivada que no se anula es la quinta $\Rightarrow$ impar.

$\Rightarrow$ punto de inflexión.

Así pues, ya sabemos que la función no tiene max/min relativos. ni discontinuidades, y $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ por lo tanto $f(x)$ es creciente $\nearrow$: $(-\infty, \infty)$.

Para estudiar la curvatura de la función vemos el signo de la segunda derivada

$f''(x) < 0$ concava $\cap$ | 0 | $f''(x) > 0$ convexa $\cup$

En resumen:

La función no tiene max/min relativos.
La funcion es siempre creciente: $\nearrow$ $(-\infty, \infty)$
La función tiene un punto de inflexion en $(0, 3)$
La función es concava $\cap$: $(-\infty, 0)$
La función es convexa $\cup$: $(0, \infty)$

**12c**

$f(x) = x^3 - 27x + 10$
$f'(x) = 3x^2 - 27$
$f''(x) = 6x$
$f'''(x) = 6$
$f^{IV}(x) = 0$

¿Max/Min? relativos: $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, \ x_2 = -3$

Posibles Max/min relativos: $(3, -44)$, $(-3, 64)$

$f''(3) > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo en $(3, -44)$
$f''(-3) < 0 \Rightarrow$ Maximo relativo en $(-3, 64)$.

Crecimiento / decrecimiento

$f'(x) > 0$ $\nearrow$ | $-3$ | $f'(x) < 0$ $\searrow$ | $3$ | $f'(x) > 0$ $\nearrow$

¿Puntos de inflexión?

$f''(x) = 0 = 6x \Rightarrow x_3 = 0$

Posible punto de inflexion en $(0, 10)$.

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$ Punto inflex en $(0, 10$

12c cont) Estudiamos la curvatura

$f''(x) < 0$ | $f''(x) > 0$

$\cap$ 0 $\cup$

Concava 0 convexa.

Resumen: $f(x)$ tiene un $\begin{cases} \text{máximo relativo en } (-3, 64) \\ \text{mínimo relativo en } (3, -44) \\ \text{punto de inflexion en } (0, 10) \end{cases}$

$f(x)$ es creciente $\nearrow$ en $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

$f(x)$ es decreciente $\searrow$ en $(-3, 3)$

$f(x)$ es concava $\cap$ en $(-\infty, 0)$

$f(x)$ es convexa $\cup$ en $(0, \infty)$

12d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6 =$ ¿Max/min? relativos.

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

$f''(x) = 6x - 8$

$f'''(x) = 6$

$f^{IV}(x) = 0.$

$f'(x) = 0 = 3x^2 - 8x + 5$

$\frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6}$ $\nearrow x_1 = \frac{10}{6}$, $\searrow x_2 = \frac{6}{6}$

posibles Max/min relativos en $\left(\frac{5}{3}, -4.15\right)$ $(1, -4)$

Monotonía

$f'(x) > 0$ $\nearrow$ | $f'(x) < 0$ $\searrow$ | $f'(x) > 0$ $\nearrow$

1 $\frac{5}{3}$

$f''\left(\frac{5}{3}\right) > 0 \Rightarrow$ mínimo.

$f''(1) < 0 \Rightarrow$ máximo.

Puntos de inflexión.

$f''(x) = 0 = 6x - 8. \Rightarrow x_3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$ posible punto de inflexion en $\left(\frac{4}{3}, -4.07\right)$

$f'''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ punto de inflexion en $\left(\frac{4}{3}, -4.07\right)$.

Curvatura $f''(x) < 0$ $\cap$ concava. | $f''(x) > 0$ $\cup$ convexa

$\frac{4}{3}$

Resumen: $f(x)$ tiene un
- máximo relativo en $(1,-4)$
- mínimo relativo en $(5/3,-4.15)$
- punto de inflexion en $(4/3,-4.07)$

$f(x)$ es
- creciente $\nearrow$ en: $(-\infty,1)\cup(\frac{5}{3},\infty)$
- decreciente $\searrow$ en: $(1,5/3)$
- concava $\cap$ en: $(-\infty,4/3)$
- convexa $\cup$ en: $(4/3,\infty)$

12 e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

$$f'(x)=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{6(-x^4-24x^2-16)}{(x^2-4)^4}$$

¿Max/Min relativos?

$f'(x)=0=\dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$

$\Rightarrow 0=x^2+4$

$\Rightarrow$ No tiene Max/Min relativos.

¿Puntos de inflexión?

$f''(x)=0.=\dfrac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$

$2x^3+24x=0.$

$x(2x^2+24)=0.$ $\nearrow x_1=0$

Posible punto de inflexión en $(0,0)$.

$f'''(0)\neq 0 \Rightarrow$ Es Punto de inflexi

Monotonía:

No hay max/min pero hay puntos de no dominio de $f(x)$ en $x_2=2$ y $x_3=-2$

$f'(x)<0$ $\searrow$ | $-2$ | $f'(x)<0$ $\searrow$ | $2$ | $f'(x)<0$ $\searrow$

Curvatura. punto inflexion.

$f''(x)<0$ $\cap$ concavo | $-2$ | $f''(x)>0$ $\cup$ convexo | $0$ | $f''(x)<0$ $\cap$ concavo | $2$ | $f''(x)>0$ $\cup$ convexo

discontinuidades de $f''(x)$

Resumen
- $f(x)$ no tiene min/max relativos
- $f(x)$ tiene un punto inflexion en $(0,0)$
- $f(x)$ es decreciente $\searrow$ en $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

$f(x)$ es
- concava $\cap$: $(-\infty,-2)\cup(0,2)$
- convexa $\cup$: $(-2,0)\cup(2,\infty)$

# EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
Esteban Indurain Eraso, Departamento de Matemáticas