CRESCERE CON LA MATEMATICA

OFFICINE ESPERIENZIALI DI MATEMATICA PER LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI DELLA SCUOLA DELL'INFANZIA E PRIMARIA

GUIDA DIDATTICA PER DOCENTI E FORMATORI

Gruppo europeo ANFoMAM

Universidad Pública de Navarra

CRESCERE CON LA MATEMATICA

OFFICINE ESPERIENZIALI DI MATEMATICA PER LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI DELLA SCUOLA DELL'INFANZIA E PRIMARIA

GUIDA DIDATTICA PER DOCENTI E FORMATORI

Gruppo europeo ANFoMAM

Universidad Pública de Navarra

Pamplona 2022

Questo libro è stato prodotto nell'ambito del progetto Erasmus + 2018
n° 2018-1-ES01-KA203-050986 ANFoMAM *Aprender de los niños para formar a los maestros en el área de Matemáticas*, cofinanziato dalla Unione Europea.
Il contenuto del libro è di esclusiva responsabilità degli autori delle istituzioni partner sotto elencate e né la Commissione Europea, né SEPIE (Servicio Español para la Internacionalización de la Educación) sono responsabili dell'uso che possa essere fatto delle informazioni presenti in esso.

Gruppo europeo ANFoMAM
Coordinatrice Inmaculada Lizasoain
https://www.unavarra.es/anfomam

Ana Millán Gasca (responsabile)
Paola Magrone
Federica Arlotti
Gilberto Scaramuzzo
Fulvia Subania

Luigi Regoliosi (responsabile)
Francesca Calabrese
Anna Mazzitelli
Maria Cristina Migliucci
Francesca Neri Macchiaverna
Emanuela Spagnoletti Zeuli

Valentina Celi

Inmaculada Lizasoain (responsabile)
Raquel García Catalan
Jaione Abaurrea

José Ignacio Cogolludo (responsabile)
Elena Gil Clemente
Almudena Agudo Carnicer
Ana Cristina Gil Clemente
Chaime Marcuello Servós
Rebeca Paricio Abadías

Con la collaborazioni di:

Impaginazione: Jaione Abaurrea Larrayoz

In copertina: Attività durante le giornate "Talleres de matemáticas para estudiantes de los grados en maestro", a Saragozza, 10-14 settembre 2019 (foto di Elena Gil Clemente)

ISBN: 978-84-9769-381-3

Indice

Officina ANFoMAM 4: Calcolo mentale e calcolatrice

« […] je crédite le monde primitif de deux inventions fondamentales pour notre monde civilisé, à savoir le nombre et le calcul […] » (Keller, 2000)

4.1. Presentazione dell'officina

Nato da necessità economiche, prima delle civiltà della parola scritta, il calcolo - dal latino calculus, che significa pietra - era inizialmente concreto, poiché veniva effettuato con strumenti come le mani, tacche su bastoni, pietre, gettoni o abachi. Fu grazie all'invenzione dei numeri arabi, del principio di posizione e del concetto di zero che il calcolo scritto (algoritmi di calcolo, su sabbia o con una penna) si sviluppò e divenne più democratico, indipendentemente dalla manipolazione degli strumenti (Ifrah, 1985).

Presente nei programmi di matematica delle scuole primarie di diversi paesi europei, l'insegnamento del calcolo assume attualmente diverse forme che devono essere adeguatamente articolate per permettere agli alunni di acquisire e consolidare competenze numeriche (procedure di calcolo, fenomeni numerici, ecc.) utili durante tutto il loro percorso scolastico:

> En la Educación Primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito. Para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, es necesario actuar con seguridad ante los números y las cantidades, utilizarlos siempre que sea necesario e identificar las relaciones básicas que se dan entre ellos (*Currículo de las enseñanzas de educación primaria en la comunidad foral de Navarra*, B.O.N. número 174, de 5 de septiembre de 2014).

> L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere alla calcolatrice […] Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo […] Eseguire le quattro operazioni con sicurezza, valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale, scritto o con la calcolatrice a seconda delle situazioni (*Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, settembre 2012).

> La pratique quotidienne du calcul mental conforte la maîtrise des nombres et des opérations et permet l'acquisition d'automatismes procéduraux et la mémorisation progressive de résultats comme ceux des compléments à 10, des tables d'addition et de multiplication […] Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu […] L'appropriation de stratégies de calcul adaptées aux nombres et aux opérations en jeu. Ces stratégies s'appuient sur la connaissance de faits numériques mémorisés (répertoires additif et multiplicatif, connaissance des unités de numération et de leurs relations, etc.) et sur celle des propriétés des opérations et de la numération […] Le cycle 3 vise à approfondir des notions mathématiques abordées au cycle 2, à en étendre le domaine d'étude, à consolider l'automatisation des techniques écrites de calcul introduites précédemment (addition, soustraction et multiplication) ainsi que les résultats et procédures de calcul mental du cycle 2, mais aussi à construire de nouvelles techniques de calcul écrites (division) et mentales […] Le calcul mental ou en ligne, le calcul posé et le calcul instrumenté sont à construire en interaction. Ainsi, le calcul mental est mobilisé dans le calcul posé et il peut être utilisé pour fournir un ordre de grandeur avant un calcul instrumenté. Réciproquement, le calcul instrumenté peut permettre de vérifier un résultat obtenu par le calcul mental ou par le calcul posé. Le calcul, dans toutes ses modalités, contribue à la connaissance des nombres. Ainsi, même si le calcul mental permet de produire des résultats utiles dans différents contextes de la vie quotidienne, son enseignement vise néanmoins prioritairement l'exploration des nombres et des propriétés des opérations. Il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en adoptant la procédure la plus efficace en fonction de leurs connaissances et des nombres en jeu. Pour cela, il est indispensable que les élèves puissent s'appuyer sur suffisamment de faits numériques mémorisés et sur des procédures automatisées de calcul élémentaires. De même, si la maîtrise des techniques opératoires écrites permet à l'élève d'obtenir un résultat de calcul, la construction de ces techniques est l'occasion de retravailler les propriétés de la numération et de rencontrer des exemples d'algorithmes complexes (*Programmes des cycles 2 et 3*, 2020).

Destabilizzato dall'evoluzione degli strumenti tecnologici che sono ormai alla portata di tutti nella vita quotidiana, così come dall'evoluzione delle concezioni sull'apprendimento, il calcolo è troppo spesso associato a un'attività meccanica, automatizzata, senza intelligenza, e il suo apprendimento si riduce a un allenamento puramente ripetitivo (Artigue, 2004). Nelle sue varie sfaccettature, il calcolo è tuttavia un'importante opportunità per gli studenti di fare matematica: studiare i fenomeni numerici; sviluppare capacità di ragionamento, di iniziativa e di adattamento per elaborare diverse procedure, a seconda della natura e del valore dei numeri; comprendere le proprietà dei numeri e delle operazioni; capire, spiegare e giustificare gli algoritmi di calcolo, memorizzarli meglio, adattarli a casi particolari e saperli generalizzare (Artigue, ib.; Charnay, 2004).

Nelle pagine che seguono, ci concentriamo sul calcolo mentale e sul calcolo strumentale. Il contenuto trattato nella sessione 1 è un'occasione per rendersi conto che le analisi matematiche e didattiche dei problemi per gli alunni sono essenziali nella preparazione della classe, al fine di minimizzare il più possibile le lacune che possono esistere tra gli obiettivi dell'insegnante e le conoscenze degli alunni.
Nell'insegnamento della matematica, ci sono molti strumenti pedagogici che possono essere messi a disposizione degli studenti. Nelle sessioni 2 e 3, l'esempio della Tavola dei numeri mostra l'importanza di conoscere il suo potenziale per usarlo in modo appropriato, a seconda di ciò che si vuole insegnare.
Secondo le convinzioni condivise, la calcolatrice è utilizzata principalmente per eseguire o controllare i calcoli, per risolvere problemi che richiedono molte prove o per concentrarsi sulla procedura di risoluzione senza preoccuparsi dei calcoli da eseguire. Un obiettivo della sessione 4 è quindi quello di portare i partecipanti a considerare la calcolatrice anche come uno strumento per studiare i fenomeni numerici e proporre problemi legati al calcolo mentale.

Questa officina è stata progettata all'École Supérieure de Professorat et d'Éducation (ESPE) in Aquitania, parte dell'Università di Bordeaux. Le diverse sessioni di cui si compone sono state realizzate dalla professoressa Valentina Celi con gli studenti ESPE del Master in insegnamento, educazione e formazione (MEEF), che prepara gli studenti a diventare insegnante di scuola aziendale, insegnante universitario, insegnante di scuola secondaria, consulente di orientamento o ispettore del dipartimento nazionale di educazione ESPE. Inoltre, alcune sessioni sono state realizzate, in formato online, con studenti dell'Università Pubblica di Navarra e dell'Università di Navarra, in Spagna, e con insegnanti in servizio che frequentano corsi organizzati dall'Associazione ToKalon, in Italia. I video delle registrazioni di questi recenti corsi possono essere visti ai seguenti link: (https://www.youtube.com/watch?v=-ZHvuHvdO3c)
(<https://www.youtube.com/watch?v=-ZHvuHvdO3c>)

Obiettivo globale

Rendere i partecipanti consapevoli della necessità di analizzare più a fondo un problema di calcolo mentale prima di proporlo ai loro alunni; renderli consapevoli delle potenzialità degli strumenti che stanno mettendo nelle mani degli studenti e integrare la calcolatrice nelle attività di calcolo mentale.

4.2. Contributo nella formazione degli insegnanti della scuola inclusiva

Gli argomenti trattati in questo laboratorio possono essere adattati in modo appropriato per tenere conto delle particolarità e dei bisogni educativi speciali di ogni studente. In particolare, le sessioni 2, 3 e 4 (la Tavola dei numeri; la calcolatrice) forniranno contenuti che possono essere adattati a questo contesto.

4.3. Come usare l'Officina nella formazione degli insegnanti in servizio

Le varie sessioni offerte qui sono adatte sia alla formazione iniziale che a quella continua. Per gli insegnanti in servizio, l'intera serie di sessioni può essere inclusa nel programma di formazione.

Per gli insegnanti di scuola primaria in servizio, i contenuti delle sessioni da 1 a 3 possono essere offerti come parte di un corso di formazione sul calcolo e i suoi possibili strumenti.

4.4. Video di Sesdown

Questi sono problemi creati a partire dal contenuto delle sessioni 2, 3 e 4: con la tavola dei numeri o con la calcolatrice. In questi video, alcuni esempi:

- Indovina: https://youtu.be/YY6JB-AHViI
- Colla e forbicis: https://youtu.be/NaN7vIvE3yo
- Tavola 0-99: https://youtu.be/pRwirlovDxQ
- Numeri amici: https://youtu.be/d-QDxsykFFw

Altri esempi di problemi e esercizi sono proposti in Allegato 4.0.

4.5. Impatto previsto dell'Officina sull'insegnamento dei partecipanti

Si spera che i vari aspetti indicati in termini di obiettivi matematici e didattici siano integrati nelle riflessioni dei partecipanti e di conseguenza nelle loro pratiche di insegnamento.

4.6. Tavola dei percorsi dell'officina

Sessione 1	*« N + 9 = N + 10 – 1 ? »*
Sessione 2	*La tavola dei numeri (parte 1)*
Sessione 3	*La tavola dei numeri (parte 2)*
Sessione 4	*Calcolatrice e calcolo mentale*
Sessione 5	*Valutazione individuale dei partecipanti*

4.7. Descrizione dettagliata delle sessione

Sessione 1: «¿n + 9 = n + 10 – 1?»

Scopo della sessione

Proponendo questa sessione, vogliamo rendere i partecipanti consapevoli che una sessione di calcolo mentale deve essere preparata come qualsiasi altra sessione di matematica: è quindi necessaria un'analisi matematica approfondita dei calcoli da proporre, al fine di individuare le conoscenze coinvolte ed evitare un divario troppo grande tra gli obiettivi dell'insegnante e le conoscenze e le competenze di cui dispongono gli alunni a cui vengono proposti.

Il lavoro qui proposto si concentra su "N + 9", un calcolo apparentemente semplice che permette di cogliere tutta la ricchezza che si può trovare in una sessione di calcolo mentale. Le riflessioni su questo caso possono essere trasposte ad altri calcoli e ad altre operazioni.

Metodologia pedagogica

A seconda delle attività proposte, i partecipanti svolgeranno a volte il ruolo di alunni, impegnandosi nella risoluzione di problemi, e a volte il ruolo di insegnanti, riflettendo sulla didattica e la pedagogia; il lavoro proposto sarà svolto individualmente, in piccoli gruppi o collettivamente. Gli strumenti pedagogici utilizzati sono questionari, problemi (orali o scritti), trascrizioni di scambi avvenuti durante delle lezioni sul calcolo mentale, in classi di scuola elementare.

Materiali

Fogli di carta, penna, fogli di lavoro (questionario; trascrizione delle discussioni avvenute durante delle lezioni sul calcolo mentale).

Organizzazione del laboratorio

Preambolo	Un questionario	Da proporre prima della sessione 1
Attività 1.1	Calcolo mentale, calcolo in colonna o calcolo strumentale ?	30 minuti
Attività 1.2	*« Aggiungi 9 a partire da … »*	30 minuti
Attività 1.3	*« Calcola N + 9 »*. Analisi di un problema di calcolo mentale da tre punti di vista: l'insegnante, gli alunni, le conoscenze in gioco	75 minuti
Conclusioni	Cosa possiamo imparare da questo lavoro?	15 minuti

Preambolo – Un questionario (30 minuti)

Per raccogliere dati sulle credenze degli studenti sull'aritmetica mentale nella scuola primaria, verrà loro proposto un questionario[8] (vedi Allegato 4.1.1). Questo questionario può essere presentato su carta o tramite uno strumento di sondaggio *online*[9] disponibile sulla piattaforma dell'università o

[8] Le domande sono estratte dal questionario 4, proposto nella prima parte di questa ricerca agli insegnanti in formazione in Spagna, Francia e Italia. Il testo completo e l'analisi dei risultati possono essere trovati in *Perché la matematica nella scuola dell'infanzia e nella scuola primaria. Insegnanti in formazione iniziale e in servizio di fronte all'universo matematico* https://hdl.handle.net/2454/42411.

[9] In questo caso, chiedere ai partecipanti di stampare il questionario completato in modo da poterne conservare traccia durante la sessione.

accessibile in rete in self-service (ad esempio Google Form). Sarà proposto prima della sessione 1 e la sintesi delle risposte sarà utilizzata per chiudere la sessione.

Attività 1.1 - Calcolo mentale, calcolo in colonna o calcolatrice? (30 minuti)

Ai partecipanti viene detto che verranno mostrati quattro calcoli[10] per un massimo di trenta secondi (sulla lavagna, scritti in anticipo, nascosti e mostrati a tempo debito; o su una diapositiva proiettata a tempo debito). I partecipanti dovrebbero pensare individualmente.

Per ogni calcolo, dovrebbero decidere quale dei seguenti metodi sceglierebbero di usare: aritmetica mentale, aritmetica da tavolo o una calcolatrice.

Calcolo mentale? Calcolo in colonna? O calcolatrice?			
$657 + 95 + 48$	$3456 - 897$	12×19	$10008 \div 9$

Seguirà un momento di discussione collettiva affinché i partecipanti possano esprimere le ragioni delle loro scelte. Questa discussione porterà a evidenziare il potenziale del calcolo mentale per lavorare sulle proprietà dei numeri e delle operazioni che, se necessario, saranno ricordate.

I risultati raccolti finora mostrano che, nella maggior parte dei casi, l'addizione e la moltiplicazione vengono effettuate con il calcolo mentale. È importante qui chiedersi quali strategie verrebbero applicate, poiché si tratta spesso di un calcolo "di testa" e non di una vera strategia di calcolo mentale.

Per la sottrazione, le risposte rivelano spesso un ricorso al calcolo in colonna o alla calcolatrice; è importante qui far emergere la strategia di calcolo mentale basata sulla seguente proprietà: $a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$.

La calcolatrice è il mezzo più usato per la divisione, che nasconde la mancanza di conoscenza di un algoritmo affidabile per eseguire questa operazione.

In generale, questo esercizio mette in evidenza la difficoltà di utilizzare la scomposizione dei numeri in gioco, per ricorrere al calcolo mentale.

Attività 1.2 - "Aggiungi 9 a partire da ..." (30 minuti)

L'obiettivo è quello di affrontare un problema prima come studente e poi analizzare i suoi aspetti matematici, didattici e pedagogici. Sono previste diverse fasi.

1) Si chiede ai partecipanti di sommare 9 a partire da 9 (o zero), ognuno a turno dice un numero. L'esercizio viene ripetuto, iniziando con 8, poi con 6.
2) Ai partecipanti viene chiesto di scrivere i primi numeri delle tre serie ottenute oralmente. In particolare :
   9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, **90**, 99, …
   8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, **80**, …

[10] Questa è la domanda 7 del questionario 4, proposto nella prima parte di questa ricerca (https://www.unavarra.es/anfomam). Il testo completo e l'analisi dei risultati possono essere trovati in *Perché la matematica nella scuola dell'infanzia e nella scuola primaria. Insegnanti in formazione iniziale e in servizio di fronte all'universo matematico* https://hdl.handle.net/2454/42411).

6, 15, 24, 33, 42, 51, **60**, 69, …

3) "Quale strategia avete usato verbalmente?

Chiedere ad ogni partecipante di scrivere la strategia che pensa di aver usato. Poi, discutere collettivamente le varie strategie, invitando ciascuno a leggere ad alta voce ciò che ha scritto. Le strategie proposte sono spesso formulate come segue:

(S1) aggiungere 1 a sinistra e togliere 1 a destra
(S2) aggiungere una decina, togliere un'unità
(S3) aggiungere 10 e sottrarre 1

Molto raramente troviamo la decomposizione additiva di 9, con adattamento all'altro termine (S4). Per esempio: se l'ultimo numero detto finisce in 5, 9 si scompone in 5 + 4 ecc.
Discutere la validità delle due strategie: sono equivalenti? sono ancora valide?
Rendere i partecipanti consapevoli che (S1) non può essere generalizzato perché, quando un numero termina con lo zero, si devono aggiungere 9 unità. La strategia (S3) rimane ambigua: formulata in questo modo, può essere interpretata e utilizzata sia come (S1) che come (S3).
Concludere questa fase proponendo di aggiungere 9 da 4.

L'attività si conclude evidenziando gli aspetti pedagogici, cioè che le diverse fasi vissute possono essere proposte in classe e ognuna ha la sua importanza: attività orale e poi scritta; scrivere la strategia adottata e poi leggerla ad alta voce; discussione collettiva sulla validità delle strategie adottate; un esempio finale per applicare una strategia in modo più consapevole.

L'analisi matematica effettuata qui sarà utile quando si lavorerà sul calcolo N + 9 (attività 1.3).

Attività 1.3 - "Calcola N + 9". Analisi di un problema di aritmetica mentale da tre punti di vista: l'insegnante, gli alunni, le conoscenze in gioco (75 minuti)

Qui si tratta di analizzare le scelte di un'insegnante riguardo ad alcune lezioni sul calcolo mentale che concepisce e realizza nella sua classe, composta da alunni di 6 e 7 anni. Le domande riguarderanno dunque le sue scelte, il comportamento degli alunni e le conoscenze in gioco attraverso l'analisi di alcuni momenti di questa sequenza che mira a lavorare sul calcolo N + 9.

Prima di calcolare N + 9

Ai partecipanti vengono dati estratti dalla trascrizione dei dialoghi che hanno avuto luogo durante la prima parte di una prima lezione di calcolo mentale (vedi Allegato 4.1.2), specificando solo che questa era una lezione scelta dall'insegnante prima di proporre il calcolo N + 9.

Dopo una prima lettura individuale, ai partecipanti viene chiesto di lavorare in piccoli gruppi. Per aiutarli ad analizzare la trascrizione e prevedere il seguito della lezione, si possono suggerire loro alcune domande:

- C'è coerenza nella scelta dei calcoli proposti agli alunni?
- Quali sono le strategie utilizzate dagli alunni? Come verbalizzano le strategie? Qual è la conoscenza matematica sottostante al loro discorso?
- Quale strategia l'insegnante enfatizza durante la sessione? A quali conoscenze matematiche attinge?

A questo proposito, agli studenti può essere chiesto di riflettere su: la pertinenza di questa strategia (dato il contesto in cui viene utilizzata); altre possibili strategie.

- L'insegnante vuole introdurre la strategia "Aggiungo 10 e sottraggo 1". Cosa pensate che farà dopo? Cosa dovrebbe fare dopo?

In questa sessione, alcuni alunni usano le dita. Sulla base della trascrizione di uno scambio (Allegato 4.1.3) tra l'insegnante e un'alunna, Caroline, si potrebbe discutere con i partecipanti di questa strategia: la reazione dell'insegnante è rilevante? Come aiutare Caroline a abbandonare questa strategia ?

Calcolare N + 9 (1)

La lettura del resto delle trascrizioni (vedi Appendice 4.1.4) evidenzia le strategie dei due alunni interrogati (in particolare, il modo in cui le strategie di uno dei due alunni si adattano ai numeri in gioco) e quindi mette in discussione gli obiettivi dell'insegnante e le strategie emerse durante l'attività 1.2.

La fase successiva, in cui si propone l'analisi matematica del compito "N + 9", dovrebbe permettere ai partecipanti di prendere coscienza dell'importanza di condurre un'analisi sufficientemente esaustiva per identificare meglio le conoscenze e le competenze che gli alunni devono avere per padroneggiare adeguatamente le varie strategie possibili.

Analisi matematica del calcolo « N + 9 »

Si suggerisce di far lavorare I partecipanti in piccoli gruppi, per poi discutere collettivamente.

L'obiettivo è identificare e scrivere diverse strategie per calcolare N+9, a seconda del valore di N.

Questa analisi matematica dovrebbe permettere ai partecipanti di identificare, a seconda del caso, le conoscenze in gioco e di rendersi conto che l'efficacia di una strategia e la rapidità con cui può essere attuata dipende dalla disponibilità o meno di queste conoscenze.

Decomposizione additiva di 9, visto come il predecessore di 10:
N + 9 = N + (10 – 1) = (N + 10) – 1 = …
Decomposizione additiva di N, per calcolare M + 10 dove M è il predecessore di N:
N + 9 = (N – 1 + 1) + 9 = (N – 1) + (1 + 9) = (N – 1) + 10 = …
Decomposizione additiva di 9, a secondo del numero di unità di N
Per esempio:
Se N finisce in 3, allora N + (7 + 2) = (N + 7) + 2 = …
Se il numero finisce con 0, calcolo diretto
Se il numero finisce con 1, calcolo diretto
Se il numero finisce con 1, 2, 3, 4
Per esempio, 11: 10 + 1 + 9 = 10 + 9 + 1 = 19 + 1 (aggiungere 1 a 19 contando)
Per esempio, 12: 10 + 2 + 9 = 10 + 9 + 2 = 19 + 2 (aggiungere 2 a 19 contando)
Per esempio, 13: 10 + 3 + 9 = 10 + 9 + 3 = 19 + 3 (aggiungere 3 a 19 contando)
Per esempio, 14: 10 + 4 + 9 = 10 + 9 + 4 = 19 + 4 (aggiungere 4 a 19 contando)
Se il numero finisce in 4, 5, ..., 9
Per esempio, 14: 10 + 4 + 9 = 10 + 9 + 4 = 19 + 1 + 3 = ...
Per esempio, 15: 10 + 5 + 9 = 10 + 9 + 5 = 19 + 1 + 4 = ...
Oppure, si ritorna a uno dei casi precedenti.

Calcolare N + 9 (2)

Supponendo che si voglia insegnare agli alunni la strategia N + 9 = N + 10 - 1, come introdurla?[11] Oltre alla discussione che avrà avuto luogo durante l'Attività 1.2, l'estratto della discussione dell'insegnante con i suoi alunni nella seconda lezione (vedi Allegato 4.1.5) servirà come punto di partenza per la discussione di questa domanda.

---

[11] La tavola dei numeri può essere un possibile supporto per introdurre la strategia in questione (vedi sessione 3), a condizione che le caratteristiche della strategia siano state apprese prima (vedi sessione 2).

Conclusioni - Cosa possiamo imparare da questo lavoro? (15 minuti)

In base all'analisi degli estratti delle lezioni di calcolo mentale, i partecipanti dovrebbero essere consapevoli che potrebbe esserci un divario tra gli obiettivi dell'insegnante e le conoscenze degli alunni. Così, è importante realizzare un'analisi matematica degli esercizi di calcolo mentale da proporre agli alunni per identificare le conoscenze e le competenze necessarie per applicare le varie strategie. Una lezione di calcolo mentale non può essere improvvisata ma deve essere preparata come qualsiasi altra lezione di matematica.

Questa è un'occasione per sottolineare l'importanza dello scomporre e ricomporre piccoli numeri per aprire la strada al calcolo e, in particolare, al calcolo mentale.

Sessione 2: La tavola dei numeri (parte 1)

Ci sono molti strumenti didattici per lavorare sulla forma scritta dei numeri e le sue regolarità: linea dei numeri, calendario, spirale di numeri, rotolo di numeri, ecc. Questa sessione e nella prossima sono dedicate alla tavola dei numeri e i suoi possibili usi nelle prime classi della scuola elementare[12].

Con questo strumento, che consiste in un quadrato 10×10 numerato da 0 a 99[13], possiamo studiare la struttura della sequenza di numeri a due cifre ed evidenziare le regolarità della loro forma scritta.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Figura 4.2.1 Tavola dei numeri

Sulla stessa riga della Tavola, si trovano i numeri della stessa "famiglia": tutti i numeri hanno la stessa cifra delle decine ("iniziano con la stessa cifra"; "la cifra a sinistra è la stessa"); si aggiunge (sottrae) 1 da sinistra (destra) a destra (sinistra). Nella stessa colonna, i numeri hanno la stessa cifra delle unità ("finiscono con la stessa cifra"; "la cifra a destra è la stessa"); aggiungere (togliere) 10 dall'alto (in basso) al basso (in alto). Sulla diagonale principale 9-90, passando da una casella all'altra, si aggiunge (sottrae) 9; lo stesso per le diagonali parallele a questa. Sull'altra diagonale principale 0-99, passando da un quadrato all'altro, si aggiunge (toglie) 11; lo stesso per le diagonali parallele a questa. Le due diagonali di cui sopra corrispondono a due assi di simmetria della Tavola quadrata. Altre proprietà possono essere dimostrate quando si considerano gli altri due assi di simmetria (Pasternack, 2003), e su queste torneremo nella prossima sessione, dedicata ai calcoli con la Tavola dei numeri.

Quando questo strumento viene proposto per la prima volta agli alunni, non è ancora essenziale che essi conoscano il significato delle varie unità di numerazione o i termini associati, in questo caso unità e decine. Per gli alunni, il lavoro con questo strumento sarà utile prima di tutto per studiare l'aspetto algoritmico della sequenza dei numeri; per collegare le forme scritte e orali dei numeri e come pretesto per imparare la forma orale dei numeri che non conoscono ancora. Per un numero che non sanno nominare, possono esprimersi all'inizio come segue: per esempio, per il numero 68, è accettabile che si esprimano così: "c'è un 6 e un 8"; "inizia con 6 e finisce con 8"; "a sinistra c'è un 6 e a destra un 8", ecc.

Lo scopo della sessione è prendere coscienza del potenziale dei materiali didattici per lavorare sulla forma dei numeri interi inferiori a 100.

[12] Il contenuto di questa sessione prende spunto da ERMEL (1991), Clavié et al. (2005a), Argaud et al. (2016), Peltier et al. (2011), Peltier et al. (2018).

[13] In seguito, proponiamo un'analisi comparativa con la Tavola dei numeri da 1 a 100.

Metodologia pedagogica

La prima e la terza fase della sessione saranno affrontate collettivamente. Per la seconda fase, i partecipanti saranno organizzati in gruppi di tre e sarà chiesto loro di analizzare i problemi sulla base del materiale e delle indicazioni fornite.

Materiali

Una grande Tavola di numeri o una Tavola proiettata da una diapositiva o su una LIM. Inoltre, diversi esemplari della stessa Tavola dei numeri (vedi allegato 4.2.1); diversi esemplari di una Tavola dei numeri vuota di dimensioni leggermente più grandi della Tavola dei numeri completata (vedi allegato 4.2.2); materiali forniti negli allegati 4.2.3, 4.2.4 e 4.2.5; pennarelli; matita; gomma; forbici; righello; diversi esemplari di una Tavola di numeri da 1 a 100, dall'alto in basso, e di una Tavola di numeri da 0 a 99, dal basso in alto (Allegato 4.2.6).

Organisation della sessione

Preambolo	Presentazione della Tavola dei numeri	15 minuti
Attività 2.1	La designazione scritta dei numeri	60 minuti
Attività 2.2	Altre tabelle di numeri	15 minuti

Preambolo - Presentazione della Tavola dei numeri (15 minuti)

Viene visualizzata una Tavola di numeri, con alcune caselle nascoste in precedenza (vedi immagine qui sotto). Verranno proposte ai partecipanti tre domande per far emergere le caratteristiche principali della Tavola in questione; allo stesso tempo, viene data un'idea di come potrebbe essere introdotta in classe.

0	1	2		4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	
	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31		33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45		47	48	49
50	51	52	53	54		56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66		68	69
70	71	72	73	74	75	76	77		79
80		82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93		95	96	97	98	99

Figura 4.2.2 Tavola dei numeri con numeri nascosti

Fase 1
« Un insegnante chiede ai suoi alunni di 6-7 anni di dire quali sono i numeri nascosti. Come possono procedere? »
Grazie alle risposte dei partecipanti, saranno evidenziate le prime caratteristiche di questa Tavola (vedi introduzione).

Fase 2
« L'insegnante nasconde una serie di numeri e chiede agli alunni di scrivere il più grande e/o il più piccolo dei numeri nascosti. Per quale scopo? »

Attraverso queste domande, gli alunni diventano consapevoli della disposizione dei numeri e delle loro posizioni relative, dall'alto verso il basso, il che può anche portare a un lavoro sul confronto dei numeri.

Fase 3

« L'insegnante sceglie poi uno dei numeri nascosti e chiede agli alunni di indovinarlo con un gioco di domande sì/no; il nome del numero può essere annunciato solo quando pensano di avere abbastanza informazioni per indovinarlo. Qual è l'interesse di un tale problema? »

I partecipanti saranno portati a insistere sull'importanza dei momenti di verbalizzazione che permetteranno, tra l'altro, di collegare le forme scritte e orali dei numeri.

Attività 2.1 - Scrivere i numeri (60 minuti)

Una varietà di materiali, creati a partire dalla tavola dei numeri, sarà distribuita, ma non più di un materiale sarà condiviso da due gruppi. Qui di seguito, alcuni esempi.

1) Tavola dei numeri da completare integralmente o in parte (vedi esempi nell'allegato 4.2.3).
   a. Una Tavola dei numeri in cui solo la prima riga in alto e la prima colonna a sinistra sono riempite.
   b. Una Tavola dei numeri in cui solo la prima riga in alto e la prima colonna a sinistra sono riempite: solo le caselle colorate devono essere riempite.
   c. Una Tavola dei numeri in cui solo la prima riga o colonna a sinistra è riempita: deve essere riempita completamente o solo le caselle colorate devono essere riempite.

2) Pezzi della Tavola dei numeri da completare, da correggere (vedi allegato 4.2.4).

3) Puzzle (vedi esempi nell'allegato 4.2.5).
   a. Pezzi di Tavola in forma di strisce (ritagliate lungo le linee)
   b. Pezzi di Tavola in forma di strisce (tagliati secondo le colonne)
   c. Pezzi di Tavola in varie forme.

L'obiettivo è quello di effettuare un'analisi didattica di questi materiali: qual è lo scopo di usarli in classe? quali conoscenze e competenze sono coinvolte? in quale ordine devono essere presentati i vari problemi?

Ogni gruppo analizza i materiali ricevuti (20-30 minuti). In una fase collettiva, ogni gruppo presenta i materiali ricevuti e presenta la sua analisi. Dopo queste presentazioni, si terrà una discussione collettiva per considerare in quale ordine questi problemi potrebbero essere proposti in classe, compresi i problemi proposti nel preambolo. Ecco un esempio.

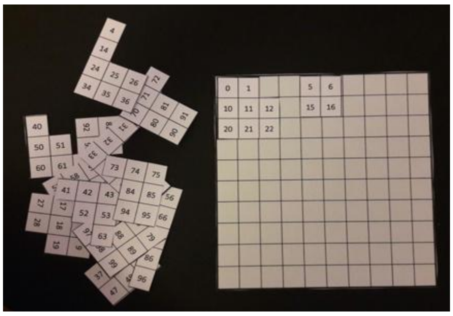
La Tavola dei numeri può essere introdotta proponendo che sia fatta collettivamente da strisce che costituiranno le sue righe e poi da strisce che costituiranno le sue colonne.

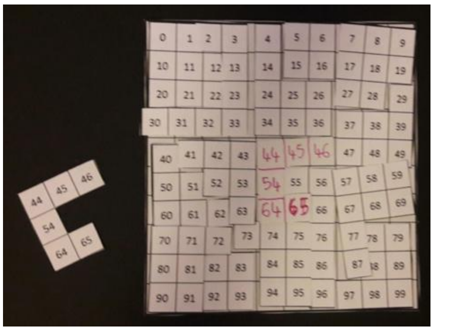
Il problema che consiste nell'indovinare i numeri nascosti - proposto ai partecipanti all'inizio della sessione - potrebbe essere proposto poco prima per permettere agli alunni di cominciare a identificare le caratteristiche di questo materiale e di identificare un lessico adeguato.

Questo potrebbe essere seguito da problemi alternati che riguardano il completamento di una Tavola o la sua ricostruzione (alcuni esempi sono forniti negli allegati 4.2.3, 4.2.4 e 4.2.5).

I partecipanti possono essere incoraggiati a considerare altri problemi, per esempio :

Il puzzle incompleto. *« Ho perso un pezzo di questo puzzle. Potresti aiutarmi a ricostruirlo? »*





L'insegnante mostra una Tavola con pochi numeri. Gli alunni devono dire o scrivere i numeri che circondano ognuno di questi numeri o solo quelli che li precedono o seguono.

							7		
		12							
					25				
								48	
			53						
	71								
				84					
						96			

Figura 4.2.3 Materiali per l'attività 2.1

Attività 2.2 - Altre tabelle di numeri (15 minuti)

Durante le discussioni, i partecipanti possono essersi interrogati sulla presenza dello 0 all'inizio della Tavola e sulla disposizione dei numeri, cioè che aumentano (diminuiscono) man mano che si scende (si sale). Si potrebbe quindi proporre una discussione per confrontare, in termini di vantaggi e svantaggi per l'apprendimento, le tre tabelle seguenti (allegati 4.2.1 e 4.2.6):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Tavola dei numeri, da 0 a 99, dall'alto verso il basso (T 0-99-HB)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	42	44	45	46	47	48	49	50
51	52	52	54	55	56	57	58	59	60
61	62	62	64	65	66	67	68	69	70
71	72	72	74	75	76	77	78	79	80
81	82	82	84	85	86	87	88'	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tavola dei numeri da 1 a 100, dall'alto verso il basso (T 1-100-HB)

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tavola dei numeri, da 0 a 99, dal basso verso l'alto (T 0-99-BH)

Figura 4.2.4 Varietà di tabelle numeriche

In tutte e tre le tabelle, le unità dei numeri in ogni colonna sono le stesse. Tuttavia, nell'ennesima colonna ($1<n<9$) della Tavola T 1-100-HB, la cifra delle unità è uguale a n. Ma nelle altre due tabelle, c'è un inconveniente perché c'è uno spostamento: la cifra delle unità dei numeri che costituiscono la colonna n è uguale a ($n – 1$).

Nelle tabelle T 0-99-HB e T 0-99 BH, ogni riga ha le stesse cifre delle decine, il che non è il caso dell'altra Tavola. In un contesto in cui l'obiettivo è imparare l'aspetto algoritmico (designazione scritta) dei numeri, la scelta della Tavola rimane importante.

Nelle tabelle T 0-99-HB e T 1-100-HB, man mano che i numeri vanno giù (su), il valore dei numeri aumenta (diminuisce), il che può essere fonte di difficoltà per alcuni alunni. I bambini a cui viene proposto questo materiale per la prima volta stanno anche cominciando a imparare a leggere e scrivere: l'ultima Tavola, dove il valore dei numeri aumenta (diminuisce) man mano che salgono (scendono), va tuttavia contro le regole della lettura e della scrittura: è quindi importante soppesare l'importanza di questi due aspetti quando si sceglie una Tavola o l'altra.

Altri elementi di confronto (Paternack, 2003) possono essere ripresi nella sezione seguente, dedicata all'uso della Tavola in relazione al calcolo.

Durante queste analisi, se non è emerso prima, si può attirare l'attenzione sul fatto che qui gli alunni stanno anche consolidando le conoscenze spaziali e il vocabolario associato (destra, sinistra, sopra, sotto, ecc.).

Sessione 3: la tavola dei (parte 2)

Scopo della sessione

Lo scopo della sessione è prendere coscienza del potenziale di un materiale per lavorare sui primi calcoli additivi con numeri inferiori a 100.

Metodologia pedagogica

La prima e la terza fase della sessione saranno proposte collettivamente. Per la seconda fase, i partecipanti saranno organizzati in gruppi di tre e gli sarà chiesto di progettare problemi basati sul materiale e sulle indicazioni fornite.

Materiale

Una grande Tavola di numeri o una Tavola proiettata da una diapositiva o su una LIM.

In gruppi, diversi esemplari della Tavola dei numeri (vedi allegato 4.2.1); diversi esemplari della Tavola vuota leggermente più grande della tavola dei numeri completata (vedi allegato 4.2.2); pennarelli; matita; gomma; forbici; righello.

Organisation de la séance

Preambolo	Uno sguardo su altre caratteristiche della Tavola dei numeri	20 minuti
Attività 3.1	La Tavola dei numeri, un primo strumento di calcolo	60 minuti
Conclusione	Cosa possiamo imparare da questo lavoro?	10 minuti

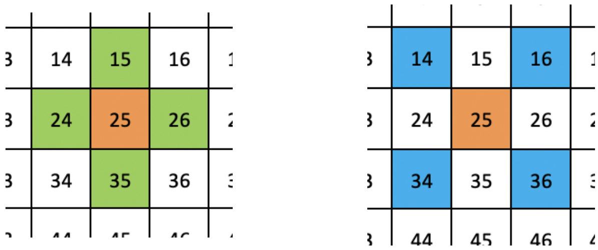
Preambolo. Uno sguardo su altre caratteristiche della Tavola dei numeri (20 minuti)

Per cominciare, e per evidenziare (o ricordare) alcune delle caratteristiche di questo materiale, ai partecipanti viene proposto un problema.

~~0~~	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	12	13	14	15	16	17	18	~~19~~
~~20~~	21	22	23	24	25	26	27	28	~~29~~
~~30~~	31	32	33	34	35	36	37	38	~~39~~
~~40~~	41	42	43	44	45	46	47	48	~~49~~
~~50~~	51	52	53	54	55	56	57	58	~~59~~
~~60~~	61	62	63	64	65	66	67	68	~~69~~
~~70~~	71	72	73	74	75	76	77	78	~~79~~
~~80~~	81	82	83	84	85	86	87	88	~~89~~
~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~

Figura 4.3.1 Tavola dei numeri

Escludendo le caselle sul bordo della Tavola, scegliamo un numero e consideriamo i numeri nelle caselle che hanno un lato in comune con la sua casella (configurazione +); poi i numeri nelle caselle che hanno un vertice in comune con la sua casella (configurazione ×). Per esempio, se scegliamo 25, otteniamo due configurazioni:



Configurazione en +   Configurazione en ×

Figura 4.3.2 Configurazione della Tavola dei numeri

Ai partecipanti vengono poi poste le seguenti domande:

- Nell'esempio scelto, calcolare la somma di tutti i numeri inclusi in ciascuna delle due configurazioni: cosa si trova?
- Scegliere un altro numero, che non si trova in una casella sul bordo della tavola, e identificare le due configurazioni in + e in ×: in entrambi i casi, si può prevedere qual è la somma dei numeri in questione?
- Si può dimostrarlo per qualsiasi numero?

Il trattamento di questo problema permetterà di evidenziare e visualizzare alcune caratteristiche della Tavola dei numeri relative al calcolo, nel passaggio da una casella all'altra. In particolare: + 1 e - 1, nelle righe; + 10 e - 10, nelle colonne; + 9, - 9, + 11 e - 11, in diagonale.

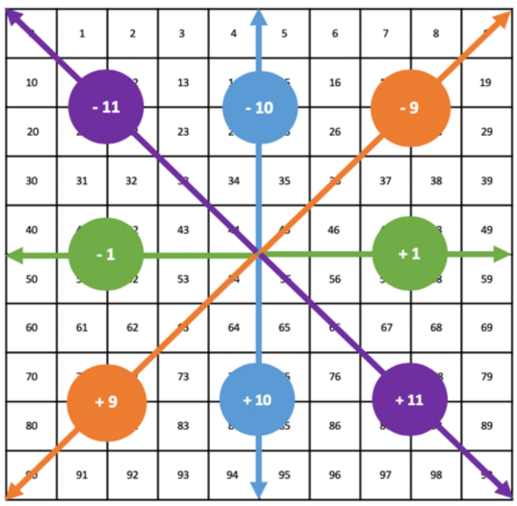


Figura 4.3.3 Configurazione della Tavola dei numeri

È importante notare che, poiché ± 1 è valido per tutte le righe e ± 10 è valido per tutte le colonne, anche ± 9 e ± 11 sono validi per tutte le diagonali parallele alle diagonali principali.

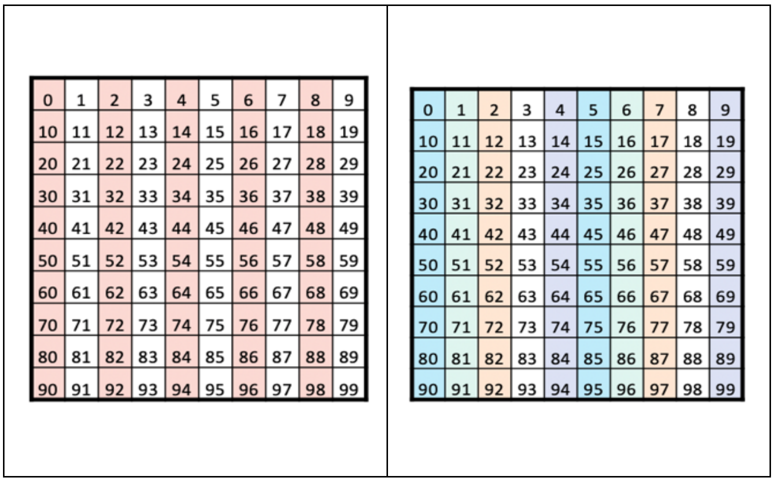
Si potrebbe chiedere ai partecipanti di guardare la tastiera di una calcolatrice (o di un telefono cellulare): che dire delle configurazioni + e × intorno al tasto "5"? Quali differenze e analogie con ciò che hanno appena studiato sulla Tavola dei numeri?

Figura 4.3.4 Tastiera di una calcolatrice

Attività 3.1 - La Tavola dei numeri, un primo strumento di calcolo (60 minuti)

Organizzati in piccoli gruppi, con diverse copie di tabelle numeriche piene e vuote (allegati 4.2.1 e 4.2.2), i partecipanti devono identificare quanti più problemi possibili per lavorare con il calcolo additivo, dal più semplice al più complesso. i vari problemi saranno analizzati durante la condivisione. Di seguito una lista dei principali problemi.

- N + 1, N – 1 e il collegamento con il conteggio da 1 a 1, in avanti e indietro, con i numeri che precedono o seguono N.
- N + 10 e collegamento al conteggio da 10 a 10, in avanti e indietro (colorando le caselle). Collegamento al contenuto della sessione 1.
- N + 2 e collegamento con il conteggio da 2 a 2, da un numero pari o un numero dispari (colorando le caselle).



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Figura 4.3.5 Calcoli additivi

- N + 5 e collegamento con il conteggio da 5 a 5, iniziando con un numero che termina con 0 o 5, 1 o 6, 2 o 7, 3 o 8, 4 o 9 (colorandole caselle).
- Visualizzare, sulla diagonale 9-90 ma non solo, N + 9 = N + 10 – 1[14] e N – 9 = N – 10+ 1
- Visualizzate, sulla diagonale 0-99 ma non solo, N + 11 = N + 10 + 1 e N – 11 = N – 10 –1
- Visualizzare N + 8 = N + 10 – 2 e N + 7 = N + 10 – 3.
- Aggiungere e sottrarre, senza riporto, con numeri a una cifra e/o a due cifre; relazione inversa tra le due operazioni.
- Uso di alcune proprietà, come la proprietà commutativa e quella associativa dell'addizione.

[14] Mettere in relazione con il contenuto della sessione 1.

32 + 24 = ? e 24 + 32 = ?

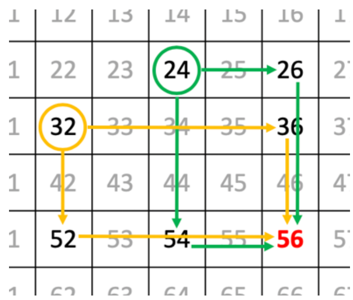


Figura 4.3.6 Esempio di applicazione delle proprietà di addizione

> Usando la Tavola dei numeri, varie proprietà dei numeri e l'addizione sono implicitamente applicate nel trattamento di questi calcoli:
> 32 + 24 = 32 + (20 + 4) = (32 + 20) + 4 = 24 + (30 + 2) = (24 + 2) + 30 = 56

Le caratteristiche di questa Tavola permettono di visualizzare e lavorare sulle diverse scomposizioni di uno stesso numero. Per esempio, come mostrato qui sotto, intorno alla casella del 15, la somma dei numeri nelle caselle dello stesso colore è uguale a 30 (4 + 26 ; 5 + 25 ; 6 + 24 ; etc.).

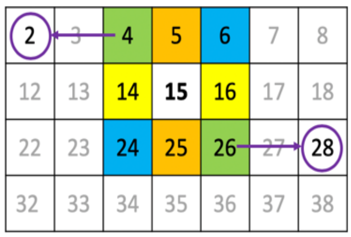


Figura 4.3.7 Esempio di scomposizioni numeriche

Questo di per sé crea un problema aperto per gli alunni quando si chiede loro perché trovano lo stesso numero, in questo caso 30. Per esempio, poiché 4 + 26 = 30, partendo dalla casella 26 e spostandosi di due caselle a destra, si aggiunge 2; partendo dalla casella 4, sarà necessario spostarsi di due caselle a sinistra per trovare l'altro termine che, aggiunto a 28, darà 30. Gli alunni possono essere incoraggiati a trovare altre decomposizioni, che coinvolgano sia l'addizione sia la sottrazione.

Conclusioni (10 minuti)

Alla fine del lavoro sulla Tavola dei numeri, svolto durante le sessioni 2 e 3 del laboratorio 4, si tratterà di riassumere gli aspetti matematici su cui la Tavola dei numeri permette di lavorare e, più in generale, l'importanza di studiare attentamente le potenzialità dei materiali che si intende mettere nelle mani dei propri alunni.

Sessione 4: Calcolatrice vs calcolo mentale? Calcolatrice & calcolo mentale?

Scopo della sessione

È inteso che i partecipanti diventino consapevoli del fatto che la calcolatrice serve solo per eseguire o controllare i calcoli, ma può essere una fonte di esercizi e problemi, permettendo loro di mobilitare strategie di calcolo mentale e di usare le proprietà dei numeri e delle operazioni[15].

Metodologia pedagogica

Dopo aver proposto un questionario, i partecipanti giocheranno il ruolo di alunni. Saranno poi nella posizione di insegnanti.

Alla fine della sessione, le risposte date al questionario saranno riviste per valutare collettivamente fino a che punto i partecipanti hanno cambiato idea.

Materiale

Calcolatrice, fogli di carta, penna, fogli di lavoro (questionari, problemi), promemoria di alcune proprietà dei numeri e delle operazioni.

Organizzazione della sessione 4

Preambolo	Un questionario	10 minuti
Attività 4.1	Esercizi e problemi con la calcolatrice	50 minuti
Attività 4.2	Domande didattiche su attività di calcolo mentale che implicano l'uso di una calcolatrice	45 minuti
Conclusione	Cosa possiamo imparare da questo lavoro?	15 minuti

Preambolo – Un questionario (10 minuti)

Per raccogliere dati sulle convinzioni degli studenti riguardo l'uso della calcolatrice nelle scuole primarie, sarà proposto loro un questionario[16] (vedi allegato 4.4.1). Questo questionario può essere presentato su carta o attraverso uno strumento di sondaggio *on line*[17] disponibile sulla piattaforma dell'università o gratuitamente su Internet (per esempio, Google Form).

Può essere proposto all'inizio della sessione 4 (10 minuti) o prima che questa abbia luogo.

---

[15] Per il contenuto di questa sessione, siamo stati particolarmente ispirati da MEN (2003), Charnay (2004), Clavié et al. (2005b), Del Notaro & Floris (2005), Weiss (2005), Charnay & Treffort (2014).

[16] Le domande qui proposte sono estratte dal questionario 4 proposto nella prima parte di questa ricerca nell'ambito del progetto ANFoMAM (https://www.unavarra.es/anfomam). Il testo completo e l'analisi dei risultati possono essere trovati in *Perché la matematica nella scuola dell'infanzia e nella scuola primaria. Insegnanti in formazione iniziale e in servizio di fronte all'universo matematico* (https://hdl.handle.net/2454/42411).

[17] In questo caso, chiedete ai partecipanti di stampare il questionario compilato in modo da poterne conservare traccia durante la sessione.

Réponse	Moyenne
Elle est un outil de calcul.	57%
Elle est un outil pour vérifier les résultat d'un calcul.	93%
Elle est un outil pour effectuer des calculs avec des grands nombres ou avec beaucoup de nombres, autrement difficiles à effectuer par les calculs mental ou posé.	64%
Elle est un outil pour résoudre des problèmes sans se soucier de calculs à effectuer.	50%
Elle est un outil pour explorer les nombres.	36%
Elle est une source de problèmes et exercices.	21%
Total des réponses à la question	100%

Figura 4.4.1 Una domanda nel questionario ei risultati ottenuti

Può essere proposta come una domanda aperta, senza proporre le varie voci, come nella versione proposta nell'allegato 4.4.1.

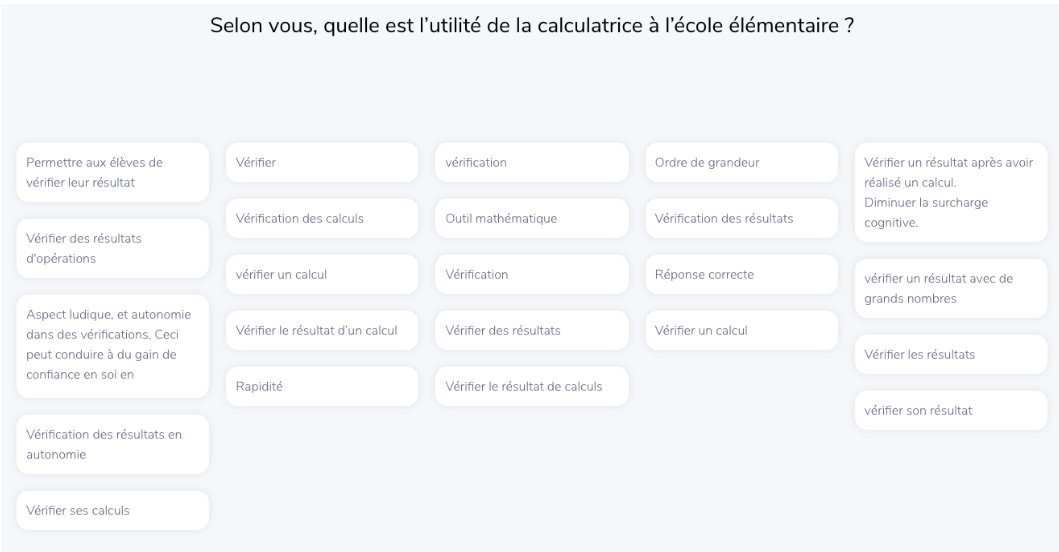


Figura 4.4.2 Approccio della domanda del questionario come domanda aperta

I risultati del questionario saranno ripresi nell'attività 4.2.

Attività 4.1 Esercizi e problemi con la calcolatrice (50 minuti)

Ai partecipanti viene chiesto di svolgere una serie di esercizi e problemi, utilizzando la calcolatrice.

Prima fase

Si propone per cominciare un *dettato dei numeri*[18]. Per esempio:

[18] Nella lingua francese, questo esercizio può anche essere proposto dettando la designazione orale di numeri tra 70 e 99 o di numeri superiori che includono nella loro designazione orale il nome di numeri all'interno di questo intervallo, ad esempio 1083.

Sullo schermo della vostra calcolatrice, visualizzate il numero :

- Quattromiladuecentoquattro
- Ottantaquattro
- Ottocentoquattro
- 3 centinaia, 2 decine e 7 unità
- 2 unità e 5 decimi
- 7 unità, 5 centesimi, 3 decine
- 7 unità e 2 centinaia
- 4 decine e 27 unità
- 24 decine, 3 centinaia
- 5 decimi e 4 unità
- …

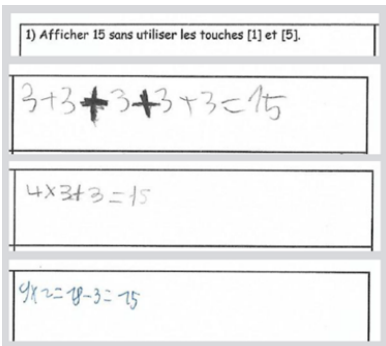
Dopo aver letto un numero, lasciare 15 secondi e poi chiedere a un partecipante di dare la designazione numerica orale e scritta del numero in questione, specificando come è arrivato a questo risultato; se le risposte sono corrette, l'esercizio viene continuato, altrimenti viene discusso collettivamente.

Si terrà una discussione collettiva sull'interesse di un tale esercizio, confrontandolo con un dettato fatto con carta e matita.

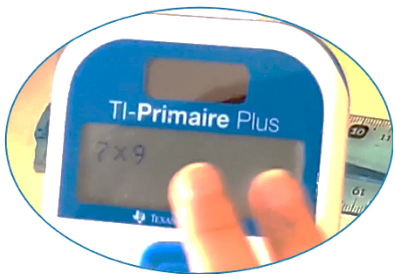
Seconda fase

Ai partecipanti verrà chiesto di lavorare su una lista di enunciati di problemi (vedi esempi nell'allegato 4.4.2).

A una metà del gruppo di partecipanti può essere chiesto di usare la calcolatrice, all'altra metà può essere chiesto di farlo senza, tenendo però conto dei vincoli imposti dall'uso della calcolatrice.



« Fais apparaître 63 sans utiliser la touche 3 »



Legenda: Visualizzare 15 senza utilizzare i tasti 1 e 5.   Far apparire 63 senza utilizzare il tasto 3

Figura 4.4.3 Materiale per la seconda fase

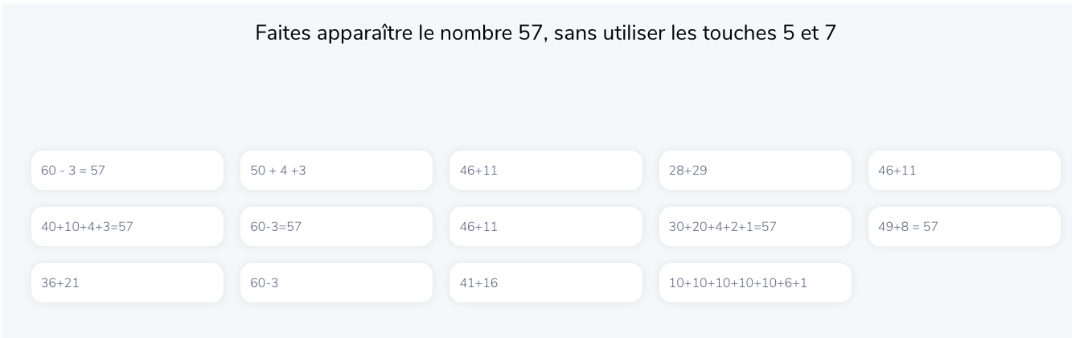
Ci sono vari modi di usare la lista dei problemi.

a. In gruppi di due, i partecipanti svolgono i vari tipi di problemi; in questo caso, vengono scelti uno o due esempi per tipo.
b. A coppie, i partecipanti svolgono due tipi di problemi ed esercizi, i gruppi avranno al massimo un tipo in comune; in questo caso, si possono proporre diversi esempi per tipo.
c. Un problema alla volta, tra quelli precedentemente selezionati, viene svolto individualmente o in coppia, in un tempo limitato.

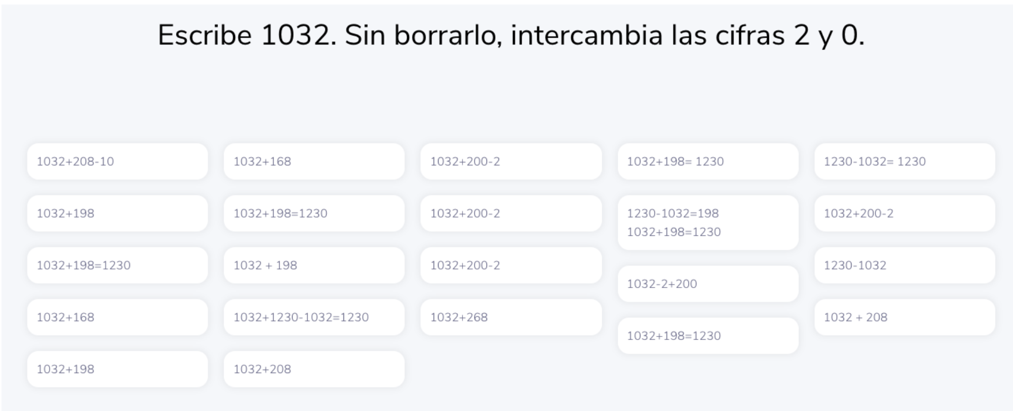
In uno dei primi due casi, la fase si concluderà con una discussione collettiva sulle procedure adottate riprendendo i problemi proposti uno per uno.

Nel terzo caso, gli studenti avranno ciascuno una lavagna dove segneranno la risposta alla domanda e la mostreranno alla fine del tempo limite (uso della lavagnetta individuale). Una discussione di gruppo avrà luogo dopo ogni problema.

Sarà anche possibile utilizzare una piattaforma interattiva come Wooclap o Mentimeter: collegati, gli studenti potranno inviare le loro risposte, che saranno visibili in tempo reale a tutti e saranno discusse collettivamente.



Legenda: Fate apparire il numero 57, senza utilizzare i tasti 5 e 7.



Legenda: far comparire 1032. Senza cancellarlo, scambia le cifra 2 e 0.

Figura 4.4.4 Attività proposte in questa seconda fase

Le proprietà dei numeri e le operazioni dovrebbero essere trattate il prima possibile; il foglio nell'appendice 4.4.3 può essere distribuito prima, durante o alla fine della sessione.

Per ogni problema o esercizio proposto, verrà considerato il suo interesse didattico, il livello scolastico in cui potrebbe essere proposto o come potrebbe essere adattato a seconda del livello.

Attività 4.2 - Domande didattiche sulle attività di calcolo mentale che implicano l'uso di una calcolatrice (45 minuti)

Organizzati in gruppi di tre, i partecipanti devono progettare esercizi e problemi che utilizzino la calcolatrice e il calcolo mentale, rispettando alcune condizioni, cioè il livello scolastico e le proprietà da utilizzare per risolverli. Queste condizioni possono essere imposte all'inizio, diverse per ogni gruppo; oppure il gruppo può sceglierle e renderle esplicite.

Il lavoro di ogni gruppo sarà presentato collettivamente.

Tutto il lavoro svolto, dopo eventuali miglioramenti, sarà messo a disposizione di tutti i partecipanti. Se il contesto lo permette, alcuni partecipanti possono provare questi problemi ed esercizi nelle loro classi; il feedback può essere dato in una sessione successiva.

Come esempio, ecco alcuni problemi che potrebbero essere proposti, secondo diversi obiettivi.

Intorno alla designazione scritta dei numeri (in relazione a ciò su cui si è trattato durante le sessioni 2 e 3):

- Digita n + 1: cosa noti?
- Digita n + 10: cosa noti?
- Digita n + 1 (essendo n un numero la cui cifra unitaria è 9): cosa noti?
- …

Intorno alla scomposizione additiva di piccoli numeri (tra 1 e 20):

- Digita 12 senza usare il tasto 2.
- Digita 21 senza usare il tasto 2.
- Digita n+m e annuncia il risultato prima di premere il tasto =.
- Digita 8. Cosa bisogna aggiungere (sottrarre) per far apparire 10 (5)?
- Digita 17. Cosa bisogna aggiungere (sottrarre) per far apparire 20 (15)?
- …

In relazione alle proprietà dei numeri evidenziate lavorando con la Tavola dei numeri (vedi sessioni 2 e 3):

- Se faccio 2 + 2 + 2 + … arrivo a 10 ? a 20 ?
- Se faccio 1 + 2 + 2 + … arrivo a 10 ? a 20 ?
- Se faccio 3 + 3 + 3 + … fino a 30, per quali numeri *passo*? per quali numeri *non passo*?
- …

Per scoprire alcune proprietà delle operazioni:

- Digita n, poi + 0 (sono proposti diversi valori di n). Cosa notate?
- Digita n, quindi - 0 (sono proposti diversi valori di n). Cosa notate?
- Digita n, poi - n (sono proposti diversi valori di n). Cosa notate?
- Digita n, poi 1 (sono proposti diversi valori di n). Cosa notate?
- Digita n, poi 0 (sono proposti diversi valori di n). Cosa notate?
- Digita n, poi 1 (sono proposti diversi valori di n). Cosa notate?
- Digita n, poi n (sono proposti diversi valori di n). Cosa notate?

Per lavorare sulle caratteristiche del sistema di numerazione decimale:

- Digita 12905. Senza cancellare, come si fa a far apparire il 12825?
- Digita 1032. Come si fa a scambiare il 2 con lo 0?
- Digita 4.602. Senza cancellare, come si fa a far apparire 4,69?

Per sviluppare gradualmente una visione critica dei risultati della calcolatrice:

Eloise sostiene che ha digitato la sequenza a sinistra del segno "=" e che ha ottenuto come risultato il numero a destra del segno "=". Cosa pensate sia successo? ▪ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 24$ ▪ $4000 + 500 = 900$ ▪ $4 \cdot 7 = 49$ ▪ $3{,}5 \cdot 100 = 0{,}035$ ▪ …

Conclusioni (15 minuti)

La sessione si concluderà con una ripresa del questionario; le risposte fornite dai partecipanti permetteranno una discussione collettiva e una conclusione sugli aspetti positivi di un uso "alternativo" della calcolatrice nelle scuole primarie.

Sessione 5: Valutazione dei partecipanti

Alla fine di ogni sessione, i partecipanti potranno esprimersi per iscritto per confrontare la loro visione dei temi trattati prima e dopo le sessioni.

In relazione a una sessione di calcolo mentale, si sono resi conto che è importante effettuare un'analisi matematica approfondita dei calcoli da proporre, al fine di individuare le conoscenze coinvolte e le conoscenze e competenze degli alunni a cui vengono proposti? Sono consapevoli dell'importanza di insegnare il calcolo mentale piuttosto che le procedure di calcolo sistematizzate?

Per il lavoro sui numeri e le loro proprietà, l'uso di strumenti didattici come la Tavola dei numeri può essere costruttivo, a condizione che si conosca il potenziale di questi strumenti. Le sessioni sul tabellone dei numeri hanno reso i partecipanti consapevoli di questo?

Per quanto riguarda un'introduzione "alternativa" della calcolatrice, sarà interessante chiedere quale sia la loro posizione dopo la sessione su questo argomento. In particolare, si potrebbero porre le seguenti domande:

> *"Dopo le due sessioni sulla calcolatrice, quali conclusioni trarre sul suo uso alla scuola elementare? Avete cambiato idea sul suo utilizzo per l'apprendimento dei numeri e del calcolo?*

Qui di seguito, alcuni esempi di risposte che mostrano che l'insegnamento che articola il calcolo mentale e strumentale non è facilmente accettato dai futuri insegnanti, poiché certe credenze condivise sono difficili da sradicare:

> "Non vedevo proprio l'utilità di usare la calcolatrice per lavorare su questo tipo di esercizi. Tuttavia, mi sembra innegabile che sia uno strumento di cui gli studenti vanno "pazzi". L'interesse per me sarebbe quello di fargli perdere il suo status di giocattolo e dargli il suo vero valore come strumento matematico. Forse, in questo modo, gli alunni potrebbero smettere di considerare la calcolatrice come un gioco!"

> "Questa sessione sulla calcolatrice mi ha permesso di cambiare il mio punto di vista sullo strumento e di prendere coscienza dei suoi diversi interessi didattici al di là della semplice verifica del risultato di un calcolo (esplorazione dei numeri, fonte di problemi ed esercizi). Tuttavia, continuo a pensare che questo strumento abbia un grande difetto: è come un giocattolo per gli alunni, che spesso li distrae dall'esercizio in questione, rendendolo difficile da usare in classe."

> "La calcolatrice è uno strumento interessante nell'ambito della ricerca sui numeri e sull'uso di procedure diverse da quelle utilizzate regolarmente da alcuni alunni, grazie ai vincoli che si possono imporre in termini di utilizzo dei tasti (limitando la manipolazione di alcuni numeri o operazioni). Quando i problemi cercano di mobilitare diverse strategie e il risultato non è la dimensione più importante, la calcolatrice può sostenere la ricerca, alleggerendo gli alunni del carico mentale di realizzare le operazioni."

In altri casi, le opinioni cambiano quando i partecipanti scoprono e accettano la possibilità di offrire un modo "alternativo" di usare la calcolatrice in classe:

> "Sì, abbiamo cambiato idea perché non stavamo guardando la calcolatrice da tutte queste angolazioni. Quindi, per noi, questo strumento era limitato al suo uso nella risoluzione dei problemi. Ma ora vediamo che ci sono molte attività interessanti che possono essere fatte con questo strumento in classe."

“Ho scoperto diversi modi di usarla e introdurla. Può partecipare ed essere un vero aiuto all'apprendimento e non solo un modo per controllare i risultati o evitare un calcolo.”

“Non ho cambiato idea sulla calcolatrice. In effetti, sapevo che non doveva essere usato in nessun momento e non bisognava abusarne. Tuttavia, il corso su questo argomento mi ha dato una prospettiva più ampia sul suo utilizzo, sia per lo studente che per l'insegnante. Per esempio, non avrei mai pensato di usarlo come punto di partenza per un esercizio, perché si usa sempre per risolvere un problema e non nella sua formulazione!”

“L'uso della calcolatrice è necessario nella scuola primaria. Oltre a essere uno strumento affidabile per controllare i risultati, permette agli studenti di esplorare i numeri in modo diverso, di creare nuovi tipi di esercizi e problemi e di rivedere i concetti su cui si è lavorato in modo divertente e motivante. Gli alunni sono portati a pensare in modo diverso e possono andare più lontano nello studio dei numeri di quanto siano in grado di fare nel calcolo su carta o nella loro testa. Sono d'accordo che la mia visione della calcolatrice era riduttiva, la vedevo solo come uno strumento di calcolo o di controllo del risultato. Ho scoperto che può anche essere una fonte per creare esercizi o problemi con tutti i livelli della scuola primaria, e che favorisce la stimolazione intellettuale e la riflessione degli alunni.”

“Prima del laboratorio, pensavo che la calcolatrice fosse solo uno strumento di calcolo o per controllare il risultato di un'operazione. Ora penso di usarla più come fonte di problemi e per esplorare diversi concetti come le proprietà delle operazioni e il sistema di numerazione decimale.”

“Inizialmente, ho pensato alla calcolatrice come uno strumento di controllo dei risultati e non proprio come uno strumento di calcolo a sé stante. Inoltre, ho pensato che dovrebbe essere usato molto poco nelle scuole elementari, e ancora meno in prima elementare. Infine, mi sono reso conto del suo interesse didattico e dell'importanza di usarla presto affinché gli alunni possano familiarizzare con questo strumento. Il fatto di proporre problemi legati alla calcolatrice permette di favorire certe procedure di risoluzione, ma anche di lavorare su numerose conoscenze matematiche.”

“La mia visione dell'uso della calcolatrice è cambiata durante la sessione. Infatti, immaginavo la calcolatrice come un semplice strumento di controllo dei risultati, ma qui ho scoperto che poteva essere una fonte di apprendimento. In effetti, utilizzando la calcolatrice, se l'insegnante aggiunge dei vincoli definiti in anticipo con precisione, può portare gli alunni a dare un senso a nozioni che a volte sono difficili da capire per loro (come la metà di un numero, come visto in precedenza): siamo dunque lontani da una semplice verifica automatica!.”

Officina ANFoMAM 5: Storia della matematica e il suo insegnamento

5.1. Presentazione dell'officina

Intento e basi nella ricerca

L'*intento* dell'Officina è avvicinare i partecipanti ad alcuni momenti della storia della matematica come chiave per:

(a) aprire una breccia in una visione monolitica della matematica a scuola imperniata sulla pura alfabetizzazione numerica (contenuti, metodi, traguardi) attraverso elementi volti a elaborare una visione della matematica come patrimonio culturale e antropologico (anche tradizioni orali)

(b) contribuire a risolvere i conflitti personali con la matematica, derivati dalla propria esperienza scolastica pregressa, grazie alla scoperta di aspetti sconosciuti dell'universo matematico

(c) offrire materiali e idee-guida per introdurre in modo episodico o sistematico la storia della matematica a scuola.

L'officina si ispira alle parole di Mary Everest Boole nella sua opera *Lectures on the logic of arithmetic* (1903, p. 7):

> «But then, the main reason why [Arithmetic] seems [so eminently un-heavenly and dull to many persons] is that their teachers failed to put them in possession of that "Recovered Past", the bearing of which on the Present forms the great clue to that knowledge of subtle forces which gives its possessor the key of the Future»

L'Officina è progettata sulla base di ricerche condotte nell'Università Roma Tre (si veda Allegato 5.1); in particolare si veda Millán Gasca et al 2017; Millán Gasca, Vale 2021 e i riferimenti che si trovano di seguito.

Obiettivi

Gli *obiettivi* si distribuiscono su tre piani:

1) per la formazione matematica dei partecipanti

   – entrare in contatto con la storiografia della matematica e della scienza, in modo leggero ma suscitando curiosità e consapevolezza: le fonti, i metodi di ricerca, alcune grandi tappe dell'evoluzione della matematica dall'Antichità ai tempi nostri (Cartocci 2007, Dahan Dalmedico, Pfeiffer 1986/2009, Gerdes 2011, Keller 1998, 2016a, 2016b, Kline 1972/1991; Kula 1970/86, Millán Gasca 2004, 2016)

   – favorire una visione flessibile delle varie forme di vita matematica del passato (colta e "popolare"), usando esempi semplici e alla portata anche dei bambini, ed esplorare il valore di queste conoscenze per comprendere il ruolo sociale e culturale della matematica oggi

   – "svelare" l'evoluzione di *pratiche*, presenti fin dall'antichità e attraverso le culture, che sono alla base delle notazioni numeriche, dei sistemi di misura e delle regolarità geometriche (congruenza, simmetria)

2) per la prassi docente con i bambini (si veda anche sotto § 5.5 Impatto dell'Officina nella prassi docente futura dei partecipanti)

   – offrire strumenti per adottare un modo di insegnare narrativo (Egan 1989, 2014, Donaldson 1978) rivolto ai bambini

– riflettere sulla creazione di un ritmo in classe, fatto di componenti diverse quali racconti, officine con materiali, officine di esercizi

– favorire l'introduzione di aspetti di storia della matematica in classe con i bambini, a partire da studi e fonti affidabili (Millán Gasca 2011, Millán Gasca et al 2017, Moyon, Tournès (a cura di) 2018).

– conoscere, valutare e usare in classe alcuni albi illustrati o libri di narrativa per bambini (Barsotti, Cantatore 2016, Lewis 2001) di argomento storico.

3) per l'atteggiamento rispetto alla matematica e l'elaborazione della propria biografia matematica

– favorire l'espressione di sé, anche attraverso la condivisione di impressioni e ricordi relativi alla propria esperienza scolastica con la matematica.

– incoraggiare l'esplicitazione di convincimenti e curiosità sulla matematica.

Foglio di presentazione

Un foglio di presentazione che include un breve testo, bibliografia, immagini sarà distribuito ai partecipanti prima dell'inizio dell'officina.

Questo laboratorio è dedicato alla storia della matematica nella scuola primaria. Il suo scopo è doppio: 1) avvicinarsi allo stato delle conoscenze storiche sulla matematica e riflettere sulle implicazioni nella didattica della matematica con i bambini 2) allenarsi a introdurre la storia nelle lezioni di matematica con bambini usando racconti, immagini e materiali, sia per l'interesse che conoscere la storia ha di per sé per i piccoli alunni, sia per contribuire a comprendere i concetti della matematica elementare. Sono scopi collegati fra di loro: nella misura in cui si conosce la storia della matematica e si impara a cercare fonti affidabili (libri, siti, articoli), si possono affrontare temi storici, sotto forma di racconto con i bambini più piccoli e con un approccio storico-filosofico con i più grandi.

Tavola 5.1 Esempio di testo di presentazione dell'officina[19]

Metodologia didattica[20]

La Sessione 1 si incentra su un racconto per immagini per scoprire ai partecipanti l'"esistenza" (che si può vedere e quasi toccare) di un passato di ciò che la matematica è oggi (attività di tipo TMc). Inoltre, sono previsti segmenti con brevi riepiloghi dal parte del docente sui temi di storia della matematica soggiacenti agli albi e alle attività per bambini proposte in ognuna delle sessioni (attività di tipo TMc).

Il ritmo delle sessioni 2 a 6 è strutturato in modo parallelo, e implica attività del tipo descritto come TMb, relative alla lettura di albi illustrati. Nel seguito si descrive la metodologia specifica. Inoltre, si realizzano attività di tipo TMe, ossia di ideazione schematica di attività rivolte ai bambini. Le attività prendono spunto dalla storia o dai temi matematici dell'albo illustrato.

[19] Un esempio di foglio completo di presentazione si trova nell'Allegato 5.1.
[20] Si fa riferimenti alla tipologia di sessioni di Officina in Celi et al 2021; si veda l'introduzione generale a questo Manuale

Infine, l'Officina è accompagnata da un'attività individuale parallela da realizzare in un diverso tempo: la stesura dello zibaldone, e, collegata a esso, la stesura di un testo che sarà anche la prova di valutazione.

Albi illustrati nell'Officina

Le sessioni 2 a 6 si avvalgono di *libri di narrativa per ragazzi ispirati alla storia della matematica* (si veda Tav. 5.2). Ogni albo illustrato è una piccola grande opera artistica. Nelle sessioni, si cerca di rispettare e godere la loro bellezza plastica e letteraria, e coinvolgere i partecipazioni nell'immedesimazione con i personaggi e nella trepidazione degli avvenimenti, degli intoppi, dello scioglimento dell'intrigo.

Sessione 2: GIUSTI Enrico 2011 *Awa insegna a contare* (illustrazioni di Simone Frasca), Firenze, Il Giardino di Archimede, edizione inglese 2019 *Awa teaches numbers*, Adverbage. **Sessione 3**: VALE Pamela, GRAVEN Mellony et al 2019 *Mama Khanyi and the Pots. A mathematical story and activity book*, Grahamstown, Rhodes University (illustrazioni di Carment Ford); edizione italiana 2021 *Mamma Khanyi e i vasi. Una storia matematica e un quaderno di piccoli esercizi*, Roma, Tokalon https://associazionetokalon.com/i-vasi-di-mamma-khanyi/) **Sessione 4**: PETTI Raffaella 2008 *Uri il piccolo sumero* (illustrazioni di Simone Frasca), Firenze, Il Giardino di Archimede; si veda anche Schmandt-Besserat, Danielle 1999, *The history of counting*, Morrow Junior Books, New York. **Sessione 5**: FANDEL Jennifer 2006 *The metryic system*, Creative Education, Italian edition *Milli-centi-deca-chilo*, Milano, Motta Junior, 2006 **Sessione 6**: CERASOLI Anna 2013, *La geometria del faraone*, San Dorligo della Valle Emme Edizioni,; nuova edizione 2019; si veda anche CANTATORE Paola 2016, *L'avventura dei geroglifici*, Torino, Franco Cosimo Panini Editore/Museo Egizio.

Tavola 5.2 Elenco dei libri per ragazzi adoperati nelle singole sessioni dell'Officina.

Nelle sessioni si cerca di lavorare l'armonizzazione della letteratura per ragazzi (fantasia, poesia, scherzo e divertimento) e la ricerca storica[21]. Il godimento estetico, il plot narrativo insieme alla sorpresa che desta l'associazione (inconsueta a scuola) fra libri per ragazzi e matematica, spingono volta per volta anche la curiosità di conoscere le basi storiche della storia di fantasia o del racconto divulgativo.

La lettura dell'albo, esso risveglia la mimesi, l'immedesimazione corporea (dita, argilla, mano e così via, movimento e voce). Inoltre, si esplora il ruolo del racconto a cavallo fra forme di comprensione "mitica" (opposizioni binarie) e "romantica" (immedesimazione nei personaggi) e la comprensione "filosofica" razionalizzatrice che cerca spiegazioni e argomentazioni (si vedaEgan 2014/1988).

Si parte dalla lettura drammatizzata di ogni albo, combinata con la proiezione delle pagine del libro sullo schermo, oppure proiettando direttamente le pagine sfogliate con l'aiuto di un visualizzatore. A ogni singolo partecipante è richiesto (seguendo l'impostazione delle attività di tipo TMb):

– da una parte, di partecipare a modo dei bambini;
– e dall'altra, nella posizione di insegnante, di annotare, durante l'ascolto, impressioni e osservazioni che la lettura lascia (contenuto matematico, aspetti artistici, potenzialità didattiche) seppure senza pregiudicare il godimento della storia.

[21] Fra gli albi della Tavola 5.1, due autori sono specialisti che hanno anche scritto libri infantili, come l'archeologa Denise Schmandt Besserat e lo storico della matematica Enrico Giusti; altri libri liberamente sono scritti da matematici ispirati alla ricerca, come Anna Cerasoli, Raffaella Petti, Pamela Vale e Mellony Graven.

Segue la condivisione nel gruppo, realizzata dalla prospettiva dell'insegnante, ma condividendo anche l'eco personale dell'ascolto.

Zibaldone e valutazione

Uno strumento personale che accompagna lo sviluppo delle sessioni è lo zibaldone[22]. Si tratta di un quaderno personale (fisico o digitale) del singolo partecipante, che raccoglierà parole, brevi testi, disegni o altro che esprimono l'eco interiore individuale delle attività e delle proposte che il gruppo vivrà insieme nell'Officina. Lo zibaldone è presentato ai partecipanti nella Sessione 1.
A partire dallo zibaldone ogni singolo partecipante preparerà l'elaborato finale dell'Officina. Esso consisterà in un estratto delle annotazioni del proprio zibaldone, corredato da commenti finali (ca. 3000-5000 caratteri).

Si sottolinea che l'adozione dello zibaldone può contrassegnare agli occhi dei partecipanti la distanza fra gli obiettivi dell'Officina (fiducia, capacità di ideazione ecc) e i normali corsi teorici e pratici universitari.

5.2. Contributo dell'officina alla formazione degli insegnanti per un'educazione inclusiva

Le ricerche moderne di storia della matematica contribuiscono oggi a forgiare una visione antropologico-culturale della matematica. Tale visione rende possibile collegare la matematica a esperienze primordiali corporee, linguistiche e di rapporto con il mondo circostante (ripetizione e ritmo, disegno e modellazione, uguaglianza e confronto).

Nell'Officina, i partecipanti entrano in contatto con questa visione appoggiata sulla storia, e lo fanno in modo esperienziale: ciò permette loro di intravede la matematica come parte della nostra umanità, legata anche al gioco, alle esperienze estetiche ed espressive.

I destinatari di questa Officina sono i partecipanti adulti, i quali si rendono conto del valore educativo della matematica che viene messo in risalto dalla prospettiva storica: attività con numeri e forme contribuiscono a sviluppare capacità cognitive (confronti, trasformazioni ed equivalenze, scomposizioni), di mimesi, linguistiche. Questa prospettiva contribuisce a far immaginare un valore educativo della matematica per tutti, e a superare la visione della matematica scolastica come opportunità formativa riservata a coloro fra gli alunni e alunne che hanno capacità cognitive considerate come pre-requisito, e fruibile completamente soltanto da parte di coloro che hanno una predisposizione e un gusto personale per la matematica.

La possibilità di estendere a tutti i bambini la conoscenza di alcuni aspetti della storia della matematica è una questione aperta, legata alla percezione del tempo storico: dal "c'era una volta" del racconto, è possibile aprirsi alle tappe della storia, alla concezione di un tempo passato?

Alcune attività manuali proposte nelle sessioni sono adattabili anche a condizioni di disabilità (concetti geometrici primordiali ispirate alla agrimensura, alla ceramica e altre tecniche plastiche).

[22] Zibaldone è il titolo di un'opera del poeta e studioso di scienze italiano Giacomo Leopardi (1798-1837), nel quale egli propone pensieri e brevi annotazioni, un diario non narrativo, ma composito, fatto di piccole folgorazioni espressive senza cercare una rielaborazione, poetico. Questo strumento didattico è stato sviluppato da Francesca Neri in corsi pratici nell'Università Roma Tre, proprio per configurare un nuovo di tipo di officina esperienziale che è lo scopo del progetto ANFoMAM; si veda Millán Gasca, Neri 2019, Neri 2014, 2016.

5.3. Come usare l'Officina nella formazione in servizio dei docenti

Questa Officina è stata progettato per insegnanti in formazione[23].

Per adattare l'Officina sono importanti i seguenti tre suggerimenti che permettono di mettere in gioco le esperienze scolastiche e le conoscenze storiche pregresse dei partecipanti:

a) dare spazio alle eventuali esperienze dei singoli partecipanti, insegnanti in servizio, che hanno effettivamente introdotto la storia della matematica in classe
b) dare spazio alla condivisione di conoscenze di storia della matematica precedenti (frutto di letture, visione di documentari o altro) e nel contempo offrire una bibliografia specifica volta a orientare le future letture e a far distinguere saggi e articoli di ricerca storica dalla divulgazione di vario livello.
c) favorire un dibattito e far emergere le perplessità derivate soprattutto dalla "mancanza di tempo", eventualmente introducendo una sessione sulla presenza/assenza della storia della matematica fra i temi proposti ai bambini oggi: il materiale di partenza sarà formato da frammenti delle indicazioni nazionali oppure alcuni esempi di pagine di libro o materiali online attuali per la scuola primaria.

5.4. I video di Sesdown

Le attività sui concetti geometrici primordiali ispirate alla agrimensura, alla ceramica, alla costruzione e altre tecniche plastiche e alla misura realizzate possono essere proposte nei *talleres Sesdown*.

I video realizzati nei Sesdown possono essere usati nelle sessioni nelle quali si presentano le antiche testimonianze sui concetti geometrici primordiali risalenti alla fine del Paleolitico e del Neolitico.

5.5. Impatto dell'officina nella prassi docente futura dei partecipanti

Di fronte alle sessioni dell'Officina, la reazione può oscillare fra l'entusiasmo e lo scetticismo. La docente che guida l'Officina cerca di convogliare gli interventi su temi quali:

- le paure di fronte a un insegnamento dinamico in classe, che implica la dimensione corporea e il racconto; dove vi è una componente di drammaturgia istantanea che non può essere prevista
- le opportunità che i partecipanti intuiscono, poiché l'Officina cerca più di suscitare un sentimento che non una formazione sistematica; e ciò anche in relazione alla propria esperienza scolastica dei singoli partecipanti, oppure alle supplenze o altre attività professionali a scuola.

L'impatto che si cerca è il seguente:

- maggiore autonomia rispetto ai contenuti specifici del curriculum nella scuola primaria, nel discernimento su ciò che è cruciale e ciò che è accessorio. Per esempio, le classificazioni – intese in un senso puramente discriminatorio e mnemonico (degli angoli, dei triangoli, dei quadrilateri, delle frazioni in apparenti, proprie e improprie) – dovrebbe perdere ogni

[23] La platea di studenti del corso di laurea in Scienze della formazione dell'Università Roma Tre include molti insegnanti in servizio, e l'accoglienza di questi temi nei corsi teorici e pratici è stata particolarmente positiva fra loro. Inoltre, alla realizzazione sperimentale nel gennaio 2019 hanno partecipato (come formazione in servizio) insegnanti di ruolo di istituti comprensivi di Roma, con ottimo riscontro. Si veda Allegato 5.1

centralità nella visione complessiva dei partecipanti; la dimensione esperienziale dei concetti e il ruolo di confronti e di uguaglianza dovrebbe invece balzare a un posto centrale.
- alla paura di sbagliare o all'astio rispetto alla responsabilità di insegnare matematica subentra la fiducia, lo spirito di iniziativa, il piacere di insegnare e anche entusiasmo per le opportunità formative che essa offre.
- effettiva introduzione nella proprie lezioni di specifici elementi storici adeguati all'età dei bambini: le numerazioni scritte e orali nella storia, grandi personaggi della matematica, il calcolo e la misura nella vita degli uomini del passato.
- sfruttamento della storia della matematica come chiave per costruire trame narrativi nella organizzazione degli argomenti di matematica in classe.

5.6. Tavola dei percorsi dell'officina

La sessione 1 si configura come un doppio invito:
- a immergersi nella proposta formativa dell'Officina
- a volgere un primo sguardo al passato di ciò che la matematica è oggi. La sessione 1 costituirà nel seguito un riferimento che permetterà di "tenere insieme" le Sessioni 2-6 dell'Officina, che hanno un ritmo serrato che risulta sì coinvolgente, ma rischia di offrire soltanto "piccoli scampoli", "piccoli assaggi" di storia della matematica.

Le Sessioni 2-4 e 6 sono ambientate nel mondo antico e la sessione 5 nel mondo moderno. Ovviamente non vi alcuna pretesa di esaustività rispetto ai numerosi temi di storia della matematica che possono essere proposti ai bambini.

Le Sessioni 2 e 3 esplorano la matematica senza scrittura, rispettivamente il conteggio e la misura, in un contesto culturale orale africano, in corrispondenza con le ricerche recenti paleoantropologiche sul Sapiens e agli studi di etnomatematiche (Gerdes 2011); i riferimenti alla storia si combinano con riferimenti etnografici e interculturali. Le Sessioni 4 e 6 esplorano la numerazione e la geometria nel Vicino Oriente Antico.

La sessione 5 riprende il tema della misura dalla sessione 3 e si riferisce ai sistemi tradizionali di misura e l'invenzione e affermazione del sistema metrico decimale fra la fine del Settecento e il Novecento.

Sessione 1	*Un invito personale alla storia della matematica*
Sessione 2	*Matematica senza scrittura*
Sessione 3	*I vasi di Mama Khanyi: le nostre mani e il nostro modo di vivere e la misura*
Sessione 4	*Scrivere i numeri con Uri: le grandi invenzioni del calcolo e della scrittura*
Sessione 5	*L'avventura del sistema metrico decimale*
Sessione 6	*La geometria del faraone*

5.7. Descrizione dettagliata delle sessione

Sessione 1: Un invito personale alla storia della matematica

Scopo della sessione

Questa sessione di apertura dell'Officina propone alcune immagini (manufatti, dipinti, essere umani in azione) volte immergere il gruppo dei partecipanti nella dimensione del passato. Il docente che guida l'Officina presenta schematicamente alcune tappe nello sviluppo della matematica (Attività 1.2).

Sullo sfondo si colloca, implicitamente, il valore dell'approccio storico come chiave per coinvolgere i bambini nel mondo della matematica, poiché esso svela le intenzioni umane che ci sono dietro i concetti matematici elementari.

Inoltre, la sessione introduce i partecipanti al percorso complessivo dell'Officina (Attività 1.1 e 1.3). I partecipanti hanno ricevuto un foglio di presentazione dell'Officina, e l'hanno scelta anche sulla base di tale presentazione. È un argomento poco consueto, è necessario che abbiano una minima aspettativa sulla proposta formativa.

Durante la sessione si invitano i partecipanti a cercare un'eco interiore delle attività e proposte che il gruppo vivrà insieme nell'Officina, raccogliendo parole, brevi testi, disegni o altro in un quaderno personale, lo *zibaldone.*

La Sessione 1 dovrebbe mostrare volta per volta, nelle sessioni susseguenti, la sua utilità per ricucire un percorso complessivo dell'Officina. Infatti, le cinque sessioni hanno un ritmo serrato che risulta sì coinvolgente, ma rischia di offrire soltanto "piccoli scampoli", "piccoli assaggi" di storia della matematica.

Metodologia didattica

Le immagini (il visibile e tangibile) sono destinate a suscitare curiosità, a stabilire connessioni con le pregresse conoscenze storiche dei partecipanti: la matematica era assente nel quadro storico che la maggior parte di loro hanno ricevuto, e le immagini fanno intuire una presenza nascosta della matematica (si veda Fig. 5.1.1).

Inoltre, si lavora su creare un'attesa nei singoli partecipanti, costruendo la presentazione come un racconto per immagini (che evoca il modo in cui si potrebbe presentare tutto questo ai bambini in classe).

"Creare un'attesa" significa:

– sorprendere con la storia della matematica: iniziare a scardinare un approccio alla matematica come sempre uguale a sé stessa, simile a un baule contente definizioni, classificazioni e procedure

– incuriosire sull'esistenza di una storia della matematica, altri scenari culturali, di vita quotidiana dove vi erano calcoli, misure, forme

Si lascia ampio spazio a domande e interventi dei partecipanti, cercando di suscitarle attraverso le immagini e la leggerezza del racconto.

Si invitano i partecipanti ad annotare impressioni, ricordi, curiosità, domande che l'ascolto solleva. Si sottolinea che, naturalmente, si può scegliere anche di condividere nell'immediato con il gruppo, prendendo la parola in qualsiasi momento.

Le tre parole e l'apertura dello zibaldone rinforzano l'apertura a un proprio itinerario di scoperta individuale all'interno del gruppo, poiché l'Officina non è concepita tanto come un deposito di conoscenze (non è un corso di storia della matematica) quanto un invito ad approfondire la storia e a riflettere su una trasformazione della prospettiva sulla matematica scolastica.

Materiali

Presentazione digitale con le immagini (Fig. 5.1.1)

Tavola del percorso

Attività 1.1	Tre parole sulla matematica. Come seguire le sessioni dell'Officina	20 minuti
Attività 1.2	Conoscete la storia della matematica? Breve racconto per immagini	80 minuti
Attività 1.3	Apertura dello zibaldone del Laboratorio	20 minuti

Attività 1.1 Tre parole sulla matematica. Come seguire le sessioni dell'officina (20 minuti)

Si chiede ai partecipanti di annotare tre parole sulla matematica, le prime tre parole che saltano alla mente pensando alla matematica (valgono sostantivi, verbi, aggettivi, avverbi ...)

Risposta attesa dai partecipanti

L'attività è molto veloce. Non si lascia o quasi il tempo di reagire ai partecipanti. Tuttavia, l'esplorazione interiore che richiede raramente lascia indifferente. I partecipanti custodiscono le loro tre parole senza condividerle, capiranno un loro ruolo nella terza e ultima attività (prima annotazione dello zibaldone).

Attività 1.2 Una passeggiata nella storia della matematica per immagini (80 minuti)

La presentazione digitale per immagini (Fig. 5.1.1) è accompagnata dal racconto del docente. Il tono è quello raccontato, leggero, ricreativo di un documentario. Il docente adatterà questa sessione al contenuto delle restanti sessioni dell'Officina. Si può scegliere, in alternativa, di porre l'accento meno sulla linea cronologica e più sulla matematica attraverso le culture (etnomatematica), imperniando le immagini sui contesti cinese, indiano, centroamericano, del Vicino Oriente, greco antico e così via.

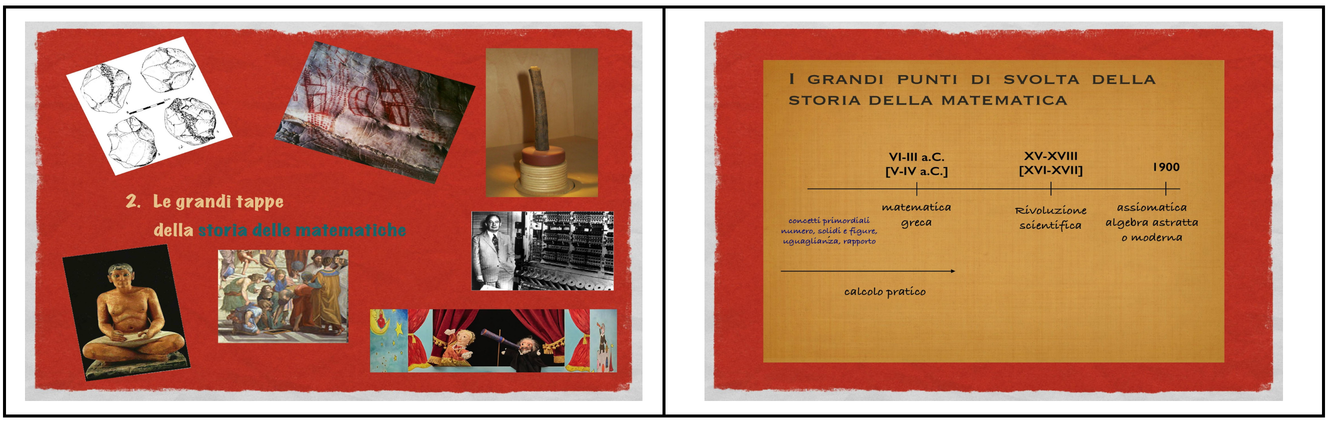


Figura 5.1.1 Officina di storia della matematica – Sessione 1: Breve passeggiata per la storia della matematica. Due diapositive della presentazione per immagini (Millán Gasca 2004).

I docente che guida la sessione presta attenzione a:

- collegare la matematica con il contesto storico generale
- far intravedere che la matematica ha avuto un ruolo nella storia dell'umanità dall'antichità ai tempi nostri
- coinvolgere i partecipanti attraverso domande, curiosità e commenti
- creare un'atmosfera ricettiva ai racconti per bambini delle restanti sessioni.

I punti centrali da sottolineare sono:

a) l'esistenza di un campo di studio sulla storia della matematica, con metodologie specifiche, esemplificato da qualche studioso o studiosa.

b) lo svelamento di una presenza della matematica attraverso la storia, fin da tempi remoti, con tappe distinte, sottolineando momenti di svolta che separano tali tappe, soprattutto: la matematica greca e la matematica nella Rivoluzione scientifica nell'Europa moderna.

Il punto a) fa da cornice alla discussione sulla aderenza dei fatti storici allo stato delle ricerche correnti dei libri per ragazzi che saranno letti, e anche alla storia come racconto e la storia da un punto di vista scientifico attraverso la maturazione dei bambini dai 5 agli 11 anni.

Il punto b) permette di collocare cronologicamente e culturalmente le sessioni 2, 3, 4 e 6 (prima della matematica greca del VI secolo; in culture orali dell'Africa, dell'Australia e dell'America) e 5 (in Europa dopo la Rivoluzione scientifica)

Risposta attesa dai partecipanti

1. Le immagini creano una rottura con le concezioni interiori dei partecipanti: di colpo la matematica è immersa a grandi pennellate nella storia. Si stabiliscono alcuni primi legami con il proprio bagaglio storico generale. Sorprende il richiamo a epoche o a contesti culturali senza scrittura: il Paleolitico superiore, la Rivoluzione neolitica, le civiltà orali.

Alcune persone reagiscono con silenzio meditativo, ma non per questo la partecipazione è meno coinvolgente: interiormente si pongono delle domande in una dimensione personale, per lo più assente quando si segue un corso di matematica, persino quando si segue un corso di didattica della matematica.

Altre persone chiedono chiarimenti, poiché la presentazione è necessariamente a grandi pennellate: si cerca di creare l'idea di un ampio percorso e del radicamento nella vita dell'essere umano. Il docente si deve impegnare per soddisfare qualche curiosità senza perdere di vista lo scopo principale.

2. Potrebbero sorgere fin da subito domande sull'opportunità e sui metodi per proporre queste conoscenze ai bambini, sulla difficoltà di amalgamarle con il “programma” e sulla mancanza di tempo. Ma questa discussione si pospone alle sessioni seguenti.

Attività 1.3 Apertura dello zibaldone (20 minuti)

In questa attività si illustra ai partecipanti cosa è uno zibaldone e come predisporlo, in formato digitale o cartaceo; si spiega che da tali annotazioni se ne estrarranno alcune da essere presentate come elaborato finale per la valutazione individuale del rendimento dei partecipanti. Si propongono esempi e si risponde a domande, perplessità e osservazioni, anche legate alla valutazione finale del rendimento individuale nell'Officina. Non si tratta di una performance letteraria; lo stile e la chiave personale nel proprio zibaldone si trovano strada facendo.

Nella tavola si propone una traccia della presentazione agli studenti.

Lo zibaldone personale per accompagnare l'Officina
A ognuno dei partecipanti è chiesto di seguire il percorso elaborando un proprio Zibaldone, con parole, pensieri, riflessioni e annotazioni (ognuna corredata dalla data), relative alla matematica elementare con i bambini. Si tratta di far risuonare interiormente l'esperienza vissuta nelle singole attività dell'Officina, collegandole a
– i corsi teorici e le esercitazioni di matematica e di didattica della matematica già frequentati o che si stanno frequentando all'Università
– la propria esperienza infantile, scolastica e nel tempo libero
– le proprie eventuali esperienze nelle supplenze, ripetizioni, cura o attività informali realizzate con bambini, professionali o di volontariato.

Apertura dello zibaldone
Prepara il tuo zibaldone:
– se scritto a mano, usa fogli sciolti oppure un piccolo quaderno
– se scritto alla tastiera, predisponi un file
Lo Zibaldone è un tuo documento personale: scriverlo è un esercizio fondamentale di questo Laboratorio proprio perché esso si svolge a distanza, e il filo individuale come risonanza delle attività del Laboratorio che sono uguali per ogni partecipante.
Alla fine dell'Officina, sceglierai alcune delle tue annotazioni inserendole in un testo scritto di ca. 3000 caratteri che servirà per la valutazione formativa.

zibaldóne s. m. [prob. voce onomatopeica, per alteraz. da *zabaione*]. – 1. ant. a. Vivanda composta di molti e svariati ingredienti. b. estens. Mescolanza di cose diverse; mucchio confuso di persone: *uno zibaldone Di cancellieri e di bidelli in toga Gli fa ghirlanda intorno al seggiolone* (Giusti). 2. a. ant. Scartafaccio in cui si annotano, senza ordine e man mano che capitano, notizie, appunti, riflessioni, estratti di letture, schemi, abbozzi, ecc.: *non ha lasciato opere compiute*, *ma solo alcuni z.*; *l'evoluzione del pensiero del Leopardi si può ricostruire dagli appunti del suo Zibaldone*.
Dal Vocabolario della Lingua Italiana Treccani

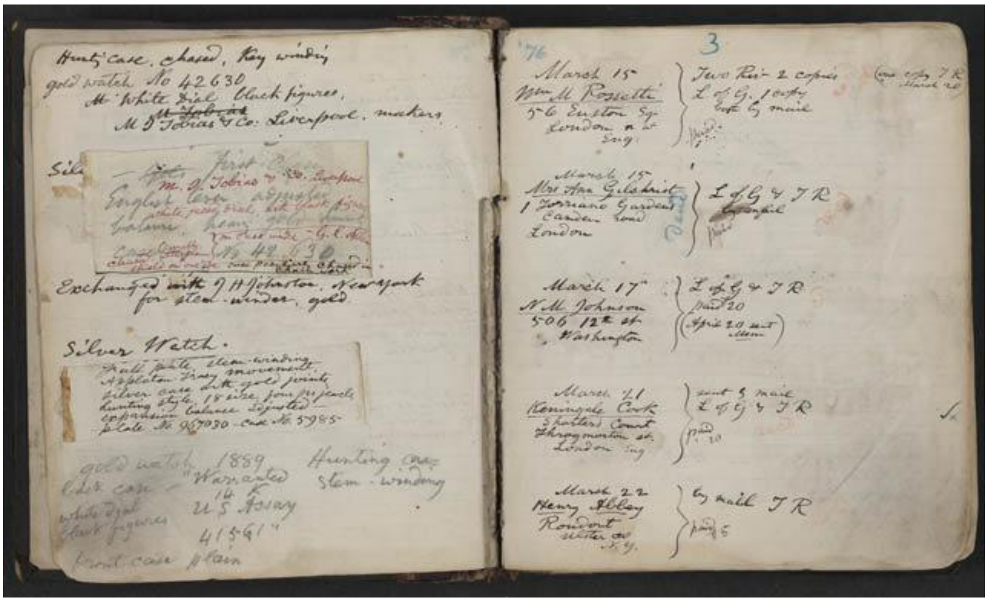


Figura. 5.1.2 Immagine del notebook di Walt Whiltman che può essere usata per presentare lo zibaldone ai partecipanti. Si veda Giaimo 2016. È possibile menzionare agli studenti anche i quaderni dei mercanti medievali che riportavano itinerari, conti e anche enigmi e indovinelli numerici ricreativi.

Risposta attesa dai partecipanti

Cosa si intende con lo zibaldone non risulta chiaro di primo acchito, è necessario distinguerlo da un diario dettagliato o da un sunto; si comprende meglio quando la sessione riesce a smuovere interiormente, indurre nei singoli partecipanti l'idea che "la matematica mi riguarda personalmente", che porta a considerare desiderabile l'opportunità di creare lo zibaldone.

Le tre parole iniziali servono anche come esempio di singola annotazione dello zibaldone. Molti partecipanti si riferiscono a queste tre parole nel testo scritto finale che consegnano per la valutazione.

Sessione 2: Matematica senza scrittura con Awa

Le sessioni 2 e 3 sono incentrate sull'oralità nella matematica, sotto tre punti di vista:

- scoprire la presenza del contare e misurare come pratiche orali, nella vita dell'essere umano prima dell'invenzione della scrittura oppure in culture umane senza scrittura, e ancora oggi
- abbracciare nello sguardo (nelle loro intime connessione ma senza confonderli): da una parte, i sistemi di numerazione orale o gestuale che si usano, come parole dette, nei conteggi (numeri naturali) e nella misurazione (numeri razionali); dall'altra, i sistemi di numerazione scritta, vale a dire le notazioni simboliche sistematiche su varie superficie di scrittura.
- svegliare la consapevolezza riguardo all'oralità e alla corporeità nell'esperienza numerica e nell'apprendimento del numero del bambino: vocaboli numerali e gesti del contare e del misurare.

La Sessione 2 propone il primo tema storico specifico: le origini remote della numerazione orale. Si concentra sui numeri naturali e sul conteggio, portando all'attenzione dei partecipanti la lingua orale, l'esperienza corporea e l'immersione dell'essere umano nell'ambiente circondante.

La sessione propone l'albo illustrato *Awa insegna a contare* (Fig. 5.2.1). Seguiamo i personaggi infantili del nella loro esigenza di quantificare contando (frutti o radici raccolti) oltre la capacità di tipo geometrico di determinare dove ce n'è di più (in un mucchio o in una ciotola). A questo scopo inventa alcune parole (collegate alcune al corpo umano) e un sistema di parole composte basate sulla ripetizione che indica una addizione. Nel libro quindi non compare alcun simbolo scritto, e la storia si può semplicemente ascoltare (senza leggere) mentre si guardano le immagini.

Questa sessione serve anche da introduzione alle sessioni susseguenti, impostando uno stile di partecipazione alla lettura ad alta voce e di vita di gruppo dei partecipanti.

Metodologia didattica

Questa sessione è imperniata su una lettura ad alta voce di un albo infantile (si vedano le osservazioni sopra, fig. 5.2.1). L'aspetto artistico-espressivo è sfumato già durante la lettura e ancor di piùdalla conseguente costruzione condivisa dell'intero gruppo di un'analisi di un'opera per l'infanzia. Il secondo perno è l'ideazione simulata a grandi linee di una attività, in piccolo gruppo.

Il lavoro collettivo e il lavoro in piccolo gruppo sono integrati per ottenere partecipazione e coinvolgimento.

Materiali

- Albo illustrato Giusti (2011), si veda tavola 5.2
- File con le sole pagine del libro contenenti le illustrazioni (Fig. 5.2.1)
- Diapositive di riepilogo "La numerazione orale" (Fig. 5.2.2)
- Tre schede di lavoro con i bambini

Tavola del percorso

Attività 2.1	Chi ha inventato i numeri? Lettura ad alta voce	30 minuti
Attività 2.2	Condivisione in gruppo grande	30 minuti
Attività 2.3	Breve pausa di numerazione orale in italiano	5 minuti
Attività 2.4	Breve riepilogo sulla numerazione orale e i racconti matematici	25 minuti
Attività 2.5	Mettiamoci alla prova dell'insegnare: ideazione di una attività in gruppi.	30 minuti

Attività 2.1 Chi ha inventato i numeri? (30 minuti)

Questa prima attività è suddivisa in quattro tappe, di cui la seconda è la più lunga e principale.

1. Si mostra il libro *Awa insegna a contare* di Enrico Giusti; si presentano autore, illustratore, editore (Il Giardino di Archimede) italiani. Si tratta di un racconto per bambini sull'origine della numerazione orale, nel quale le combinazioni e invenzioni di parole (suoni) si collegano all'esperienza corporea. Tuttavia del tema non si parla ai partecipanti prima di intraprendere la lettura, creando un po' di suspense ed evitando gli “spoiler”.

Figura 5.2.1 Illustrazioni tratte da Giusti 2011, opera di Simone Frasca.

2. Prima di iniziare la lettura, si richiede a ogni singolo partecipante di annotare, durante l'ascolto, impressioni e osservazioni che la lettura lascia – all'impronta, senza pretese di esaustività – cercando di identificare:

- idee matematiche che appaiono nel libro “nascoste” sotto la forma narrativa
- caratteristiche che si riconoscono dal punto di vista della letteratura per l'infanzia.

3. Lettura ad alta voce accompagnata dalla proiezione delle immagini sullo schermo o delle pagine del libro con l'aiuto di un visualizzatore.

4. Alla fine della lettura, breve pausa di silenzio, durante la quale si chiede di scrivere note all'impronta sul possibile valore didattico del libro nella scuola primaria, nelle ore di matematica oppure in altri momenti.

Risposta attesa dai partecipanti

La letteratura per l'infanzia a sfondo matematico spesso sorprende, poiché raramente si è avuto contatto con essa, tranne forse per un'opera ormai classica, *Il mago dei numeri* di Hans Magnus Enzelsberger.

La lettura è coinvolgente, crea un attento ascolto nel gruppo, ancora di più se realizzata da alcuni fra i partecipanti con cura e un po' di esercizio di preparazione.

Si richiede ai partecipanti, non di "prendere appunti" come a lezione, bensì di raccogliere in modo sparso osservazioni, ricordi, desideri e perplessità, lasciandosi toccare personalmente, facendosi un po' bambina/o, esprimendosi con una certa libertà ma sforzandosi comunque di scavare, non accontentandosi di annotazioni superficiali.

Vi è quindi parecchia disparità degli partecipanti, eppure – per immedesimazione – durante il dibattito susseguente (Attività 2.2) si può approfondire il livello di analisi realizzato individualmente.

Attività 2.2 Condivisione di gruppo (30 minuti)

Il docente anima una condivisione delle impressioni e osservazioni sparse e cerca di riordinarle con parole o brevi frasi alla lavagna o usando dei post-it grandi (30-40 minuti). Si consiglia di procedere nel seguente ordine (i partecipanti devono ricercare fra le annotazioni quelle pertinenti a ognuno degli aspetti).

1. dal punto di vista della letteratura per l'infanzia
2. genere, stampa (formato, materiale, rilegatura, carattere, colore), impaginazione, testo (stile letterario, struttura narrativa, personaggi), illustrazioni.
3. oggetti e relazioni matematiche che si trovano in filigrana nel racconto
4. dal punto di vista dell'impatto sui bambini: possibili reazioni e commenti, intervento dell'immedesimazione e della corporeità.

Risposta attesa dai partecipanti

Vi è disparità fra i partecipanti per desiderio e coraggio di intervenire e livello di originalità, sincerità, generosità e coinvolgimento dell'intervento. Il ruolo del docente è cruciale per animare la discussione, evitando che tutto si riduca a una espressione di apprezzamento per l'albo illustrato. Comunque gioca in suo favore un effetto di trascinamento fra gli studenti: un intervento chiama l'altro, incentivando l'espressione.

Attività 2.3 Formazione dei gruppi di 3/5 persone numerando (5 minuti)

La docente che guida la sessione calcola il numero n di gruppi di 3/5 persone che si possono formare con i partecipanti e chiedere agli studenti di numerarsi ad alta voce usando numeri da 1 a n ripetutamente senza altre spiegazioni.

Risuonano con diverse voci i vocaboli numerali cardinali italiani della conta, con alcune parole in cui si percepisce un gruppo di 10; è una numerazione di pura recitazione dei vocaboli, il significato cardinale è nascosto (il numero di gruppi che vanno formati).

Questi 5 minuti servono anche da breve pausa.

Risposta attesa dai partecipanti

Divertimento, curiosità, soprattutto una volta che lo schema è stato capito per imitazione. I gruppi si formano riunendo persone che hanno detto lo stesso numero, come per magia (sotto c'è una semplice divisione).

Attività 2.4 Breve riepilogo per immagini (25 minuti)

La docente si rivolge al gruppo attraverso una presentazione (Fig. 5.2.2) in cui riepiloga e offre elementi per rispondere alle molte domande suscitate dalle attività 2.1 e 2.2. Si mantiene un tono leggero e ricreativo, con esempi e immagini. Si tratta di offrire qualche chiave interpretativa e far intravedere un filone di studi, come anticipato nella Sessione 1, di destare curiosità e voglia di approfondire. È un momento per offrire qualche spunto bibliografico.

Figura 5.2.2 Officina di storia della matematica – Sessione 2. Riepilogo per immagini. L'illustrazione è tratta da Schmandt Besserat 1999 che propone un esempio della ricerca etnografica su una numerazione senza parole né simboli scritti, ma che usa parti del corpo

I punti da considerare sono i seguenti:

a La recente ricerca sui numeri (storica, linguistica, antropologica): attraverso questo albo illustrato, l'autore ci parla dell'origine remota dei numeri per contare, con la numerazione orale

b I numeri si compongono e scompongono e ciò ci aiuta a nominarli e ad annotarli (per esempio *dudu* è composto da due parole, in modo analogo a quando scriviamo 4 = 2 + 2).

c I racconti matematici ci ispirano nel proporre un “Grande Racconto della Matematica”, costruendo un plot narrativo avvincente.

d Con i bambini, è cruciale collegare le *parole* che ascoltano agli “scarabocchi” (*simboli in cifre* che vedono scritti) ed entrambi i tipi di simboli ai conteggi, come quelli di Awa (di radici, alberi, antilopi, frutti).

Nelle pagine finali dell'albo (pp. 42-44) del libro, l'autore ricorda quattro esempi di numerazione orale in altre tante lingue e sottolinea le tracce che esse si offrono sull'origine remota dei numeri, che risale alla preistoria (poiché nei più antichi documenti scritti si trovano delle quantità o misure annotate) e a proposito del quale “non sappiamo niente di certo”[24].

[24] Altra bibliografia di rifermento Keller (2016a, 2016b), dove si esplora la contraddizione fra l'uno e il molteplice, che potrebbe affiorare nella discussione.

Risposta attesa dai partecipanti

Il lavoro condotto precedentemente (nella Sessione 1 e nella precedente attività di questa sessione), così come la breve pausa numerativa predispongono all'ascolto. Molto è nelle mani del docente, della sua capacità di convogliare i vari temi e di collegare questo esempio a idee guida didattiche di portata più generale, oltre che perplessità, aneddoti e altro.

Attività 2.5 Mettiamoci alla prova dell'insegnare (In gruppi 3/5 studenti) (30 minuti)

L'attività è divisa in due tappe:
1. Ideare/Progettare una attività/sessione per la scuola dell'infanzia o la scuola primaria ispirata al libro, oppure che includa la lettura ad alta voce del libro in tutto o in parate, mettendo a disposizione le schede della Fig. 5.2.3 (15 minuti). Si tratta di un'ideazione simulata, a grandi linee, e comunque si chiede ai partecipanti di stabilire

- età degli alunni; scopo, intento o intenti perseguiti
- in quale modo verrà usato il libro? (prima, dopo, lettura ad alta voce, riassunto, immagini, drammatizzazione)
- durata e materiali
- tipo di attività: individuale, in coppia o piccolo gruppo, di classe; scritta (quaderni, schede), orale, di drammatizzazione, da officina matematica (movimento, materiali, immagini e filmati)
- descrivere il ruolo eventuale della mimesi corporea o altre forme di comprensione.

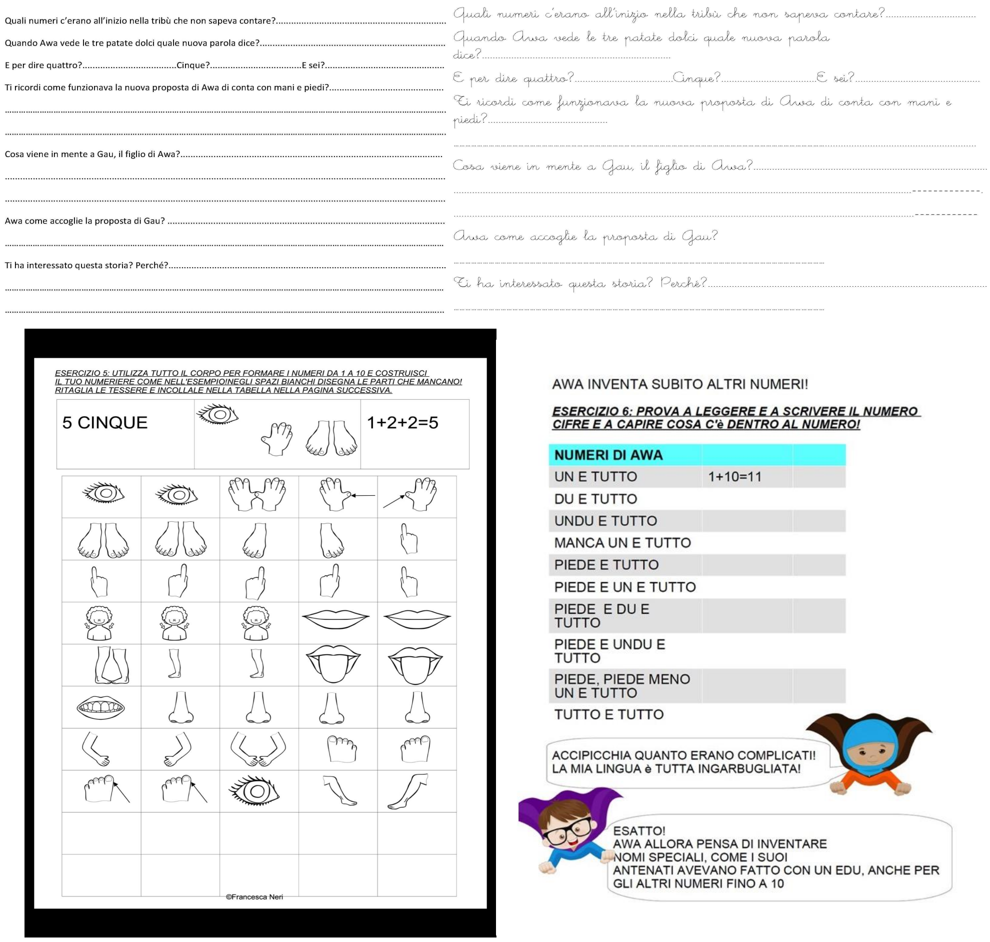


Fig. 5. 5 Officina di storia della matematica – Sessione 2. Schede sperimentate in classe con bambini: in alto (Emanuela Spagnoletti Zeuli), *in basso* (Francesca Neri)

2. Condivisione succinta dell'idea portante dell'attività ideata, scegliendo un portavoce di ogni gruppo (15 minuti).

Risposta attesa dai partecipanti

Si tratta di un'esercitazione di ideazione che non pretende entrare nel livello di dettaglio della realizzazione effettiva. I gruppi devono trovare l'accordo su una singola idea fra quelle proposte, da sviluppare poi insieme.

Alcuni studenti potrebbero cercare troppo dettaglio (il tempo non basta) oppure farsi bastare una idea vaga e poco meditata, irrealistica

La docente passa per i gruppi e ascolta, suggerisce, incoraggia, chiede.

Sessione 3: I vasi di mama Khanyi: Le nostre mani e il nostro modo di vivere e la misura

Le sessioni 2 e 3 sono incentrate sull'oralità nella matematica, sotto tre punti di vista:

- scoprire la presenza del contare e misurare come pratiche orali, nella vita dell'essere umano prima dell'invenzione della scrittura oppure in culture umane senza scrittura, e ancora oggi

- abbracciare nello sguardo (nelle loro intime connessione ma senza confonderli): da una parte, i sistemi di numerazione orale o gestuale che si usano, come parole dette, nei conteggi (numeri naturali) e nella misurazione (numeri razionali); dall'altra, i sistemi di numerazione scritta, vale a dire le notazioni simboliche sistematiche su varie superficie di scrittura.

- svegliare la consapevolezza riguardo all'oralità e alla corporeità nell'esperienza numerica e nell'apprendimento del numero del bambino: vocaboli numerali e gesti del contare e del misurare.

La Sessione 3 è incentrata sulla misura, attraverso un racconto, *I vasi di Mamma Khanyi* di Pam Vale con Mellony Graven e Jana Viš□ovská, ambientato nella cultura orale e materiale di un villaggio, nella cui trama interviene la misura della profondità o altezza di vasi di ceramica manufatti (allegato 5.3). Dal punto di vista della matematica sotto traccia, il racconto ha come perno il concetto matematico di rapporto (rapporti fra segmenti: la profondità di un vaso, il palmo della figlia, il palmo della madre); inoltre esso è anche un'implicita introduzione ai numeri razionali (i “piccini”).

Come nella Sessione 2, nelle attività non si usano simboli scritti relativi ai numeri. Il racconto permette di immergersi nell'attività umana (la produzione di vasi di ceramica e la loro decorazione; il commercio; il villaggio e la famiglia). La trama narrativa e le immagini pongono in primo piano l'esperienza corporea, in particolare le mani (il palmo) e la “grandezza” del corpo umano dalla fanciullezza alla maturità.

Metodologia didattica

Questa sessione è imperniata di nuovo sulla lettura ad alta voce di un albo illustrato. In tal modo si rinforza l'immedesimazione dei partecipanti con le forme di comprensione di natura orale/somatica dei bambini, quando essi ascoltano un racconto.

Come nella Sessione 2, l'aspetto artistico-espressivo del leggere e guardare un albo illustrato è sfumato dalla conseguente costruzione dell'analisi di un’opera per l'infanzia, costruzione condivisa dell'intero gruppo dei partecipanti.

Il secondo perno è l'ideazione simulata a grandi linee di una attività, in piccolo gruppo.Si osservi lavoro collettivo e il lavoro in piccolo gruppo sono integrati per ottenere partecipazione e coinvolgimento.
È previsto un breve riepilogo da parte del docente sulla antropologia della misura, come parte della “cultura matematica popolare”.

Materiali

- Libro elettronico (ebook) Vale, Graven,Viš□ovská (2018), si veda allegato 5.4 https://associazionetokalon.com/i-vasi-di-mamma-khanyi/

- Diapostive per il riepilogo “L'umanità e la misura” (Fig. 5.3.2)
- Proiettore e schermo

Tavola del percorso

Attività 3.1	Lettura drammatizzata di Mamma Khanyi e i vasi, un racconto per bambini sull'origine della misura	30 minuti
Attività 3.2	L'umanità e la misura	30 minuti
Attività 3.3	Inventa una lezione (In gruppi 3/5 studenti) (attività in piccoli gruppi)	20 minuti
Attività 3.4	Presentazione e discussione delle attività.	40 minuti

Attività 3.1 Lettura drammatizzata di *I vasi di Mamma Khanyi* (30 minuti)

Questa prima attività è suddivisa in tre tappe:

1. Si proietta la copertina dell'e-book *I vasi di Mamma Khanyi* (oppure si distribuisce il libro stampato in fogli in più copie. Allegato 5.4). Si presentano autrici, illustratrice, e le origini della concezione del testo in Sudafrica, nell'ambito di un progetto sull'alfabetizzazione numerica. Si tratta di un racconto per bambini sull'origine della misura, e quindi anche sul concetto di rapporto e sui numeri razionali, ma di questo non si parla ai partecipanti, creando un po' di suspense.

2. Prima di iniziare la lettura, si ricorda a ogni singolo partecipante che è richiesto di annotare, durante l'ascolto, impressioni e osservazioni che la lettura lascia (contenuto matematico, aspetti artistici) seppure senza pregiudicare il godimento della storia, come è stato fatto nella Sessione 2.

3. Lettura ad alta voce dell'albo, eventualmente drammatizzata, combinata con la proiezione delle pagine del libro sullo schermo. Le domande in verde rivolte ai bambini sono rivolte ai partecipanti, che intervengono fingendosi bambini oppure riflettendo su di esse (fig. 5.3.1).

Fig. 5. 3.1 Una pagina di I vasi di Mamma Khanyi. In nero il testo del racconto; in verde una domanda rivolta al piccolo lettore

Risposta attesa dai partecipanti

I partecipanti hanno già provato nella Sessione 2 un ascolto in cui si chiede di “rappresentare” o “fingere” le attività matematiche in classe (“The participants place themselves simultaneously in two worlds, as if they were children and feeling like children, while at the same time taking the perspective of a teacher"). Quindi sarà più naturale combinare l'ascolto con l'annotazione.

L'albo, in formato elettronico, ha un forte impatto estetico e sentimentale, visivo e letterario sui partecipanti. Entusiasma, sorprende. Il testo rivolto direttamente al piccolo lettore favorisce l'immedesimazione dei partecipanti nella postura e le forme di comprensione e godimento di un bambino o bambina. Le domande verdi potranno far scattare reazioni da futura insegnante (errori dei bambini, ad esempio) oppure forme di rappresentazione scenica (voce e atteggiamenti di alunni impersonati).

Il racconto si sviluppa su vari piani, e implica vari contenuti matematici, che all'inizio potrebbero risultare sovrapposti per molti partecipanti. L'attività 3.3, cui si dedicherà la maggior parte del tempo, permetterà di districarli e chiarirli.

Attività 3.2 L'umanità e la misura (30 minuti)

La attività prevede due passi, che il docente è chiamato ad armonizzare.

1. Condivisione di gruppo di sentimenti di fronte alla lettura e alle domande verdi, di commenti e analisi sulla storia.

2. In collegamento alle questioni emerse, il docente illustra alcuni aspetti della storia della misura. Il racconto *I vasi di Mamma Khanyi* favorisce l'introduzione, seppur breve, di alcuni elementi che permettano di capire la misurazione come "cultura matematica popolare" (Kula 1986, v. Fig. 5.3.2), il suo ruolo nella vita sociale (giustizia, equilibrio, frode), anche in collegamento con i prezzi (costo per unità di misura).

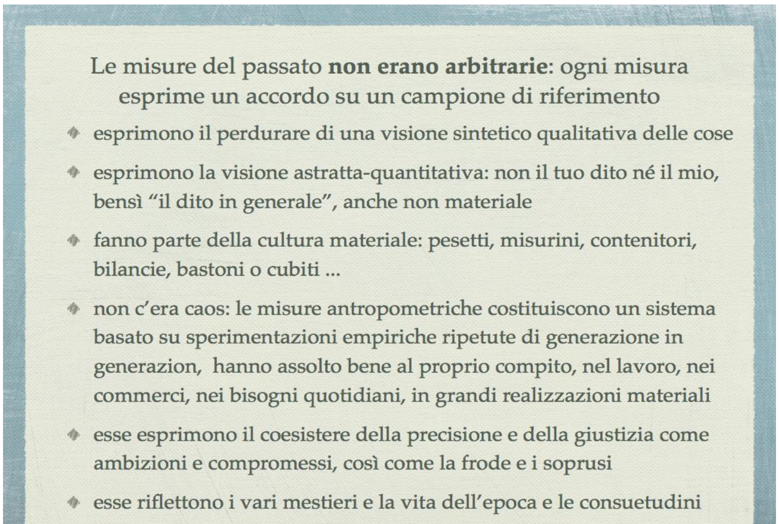


Figura 5. 3.2 Officina di storia della matematica – Sessione 3 Alcuni elementi sulla storia sulle misure tratti da Kula (1986)

Risposta attesa dai partecipanti

I ricordi personali sull'apprendimento della misura sono spesso nei toni grigi, di noia e difficoltà, come in un'intollerabile gara a ostacoli fatti da conversioni di misure e memorizzazione di parole ostiche con prefissi complicati. La misura appare fredda, razionale, oppure un mero dispositivo pratico.

Inoltre, vi sono alcuni pregiudizi che non trovano alcun sostegno nella ricerca storica. Uno di essi è il preteso contrasto fra misure "arbitrarie" (antiche, riferite a parti del corpo) e convenzionali (moderne, del sistema metrico decimale). Infatti. in molti paesi dell'Europa continentale non si conoscono in modo consapevole le unità di misura oggi in uso in paesi anglosassoni o altrove.

Il dibattito si anima con esempi proposti dai partecipanti, ed in particolare sul concetto geometrico di rapporto soggiacente ad ogni misurazione. Iil docente però deve trattenerlo per dare spazio all'attività finale, sapendo che verrà ripreso nella Sessione 5, che amplia il panorama verso il mondo moderno (nascita del sistema metrico decimale).

Attività 3.3 Mettiamoci alla prova dell'insegnare (In gruppi 3/5 studenti) (20 minuti)

Seguire la metodologia esposta nell'Attività 2.5. I materiali a disposizione in questo caso sono: cordicelle, legnetti, tessere di cartone, tessere di plastica, penne, vasetti o misurini.

Risposta attesa dai partecipanti

I partecipanti, nonostante abbiano realizzato già un'analoga attività durante la Sessione 2, potrebbero avere un forte freno all'ideazione, dovuto alla rigidità delle attività di misura nella prassi consueta della scuola primaria. Potrebbero non considerare possibile attività di misura nella scuola dell'infanzia. Per la scuola primaria, potrebbero pensare solo a equivalenze e a formule di aree e perimetri.

Il docente cerca di attivare la creatività con interventi discreti: piccoli esercizi di misurazione, di risoluzione di problemi (compra vendita, edilizia, ecc), conversione di unità di misura in un contesto che abbia significato. Oltre alla lunghezza, è possibile considerare altre grandezze; oltre il Sistema Metrico Decimale, è possibile usare altre unità oggi in uso, del passato, o di mondi immaginari.

Le attività possono anche riguardare l'idea di rapporto fra due grandezze, oppure anche i numeri "rotti", anche indipendentemente dalla misurazione.

Si tratta di un'esercitazione di ideazione che non pretende entrare nel livello di dettaglio della realizzazione effettiva. Alcuni studenti potrebbero cercare troppo dettaglio (il tempo non basta) oppure farsi bastare una idea vaga e poco meditata, irrealistica. La docente passa per i gruppi e ascolta, suggerisce, incoraggia, chiede.

Attività 3.4 Presentazione e discussione delle attività (40 minuti)

Un portavoce di ogni gruppo condivide l'idea portante dell'attività ideata e illustra l'uso dei materiali scelti. Condivide eventuali esitazioni e difficoltà operative nell'ideazione e nella progettazione. Ogni singola attività è commentata e discussa dalla docente e dai partecipanti che desiderano intervenire. Si dà spazio alla gradualità dell'approccio, in corrispondenza con l'età dei bambini.

Risposta attesa dai partecipanti

Non sempre i gruppi riusciranno a spiegare in modo chiaro in cosa consiste l'attività, a esprimere nettamente l'intento o il bersaglio dal punto di vista dei contenuti matematici, il docente deve aggiungere domande se non vengono dagli altri partecipanti.

Il docente può anche contribuire a stabilire confronti e collegamenti fra temi, approcci e metodologie di attività diverse. La misura potrebbe emergere come un crocevia fra numeri e geometria, fra numeri naturali e numeri razionali, tra delicate questioni concettuali (il concetto di rapporto) e scenari di vita quotidiana. C'è anche il parallelismo fra vari sistemi di unità di misura, fra cui il Sistema Metrico Decimale (di cui si parlerà nella Sessione 5).

Ci possono essere entusiasmi da una parte, scetticismo dall'altra. La misura è un tema nella scuola primaria che risente fortemente delle consuetudini e della mancanza di una prospettiva storico-antropologica e matematica.

Sessione 4: Scrivere i numeri con gli antichi sumeri: le grandi invenzioni del calcolo e della scrittura

Questa sessione completa e chiude il discorso sull'origine del numero della Sessione 2. Nel contempo, la sessione abbandona la dimensione dell'oralità pura delle Sessioni 2 e 3 per entrare nelle notazioni numeriche e il calcolo nei suoi legami con la scrittura. Tuttavia lo scenario, l'atmosfera è quella del Vicino Oriente antico di film e ricordi scolari.

Vi è quindi un implicito nesso con l'alfabetizzazione numerica scolastica (le dieci cifre indiane e il sistema di numerazione decimale posizionale).

Metodologia didattica

La sessione si basa sulla lettura ad alta voce di un albo illustrato, *Uri il piccolo sumero* (Petti 2008), oppure con l'albo illustrato *The History of number* (Schmandt Besserat 1999).

La lettura si combina con un'attività laboratoriale (cui è dedicata più della metà del tempo a disposizione) nella quale si chiede ai partecipanti di immedesimarsi con i bambini in classe, che costruiscono contrassegni e tavolette d'argilla ed eseguono esercizi di conversione fra il sistema numerico attuale che apprendono a scuola e quello degli antichi Sumeri.

Si veda il video *Officina di storia della matematica e il suo ruolo nella didattica con i bambini: l'origine dei numeri* (2019) di Fulvia Subania, nel canale YouTube ANFoMAM, nel link https://www.youtube.com/watch?v=yqbMdYks8wI&t=523s

Materiali
- Albo illustrato
- Diapositive "Calcolo e scrittura nelle civiltà antiche" con le immagini o le pagine dell'albo (Fig. 5.4.1, 5.4.2)
- Das di colore marrone
- Tovagliette umide
- Bastoncini per incidere il das
- Schede (Emanuela Spagnoletti Zeuli), penne

Tavola del percorso

Attività 4.1	Lettura ad alta voce di un libro infantile sull'origine della numerazione scritta	25 minuti
Attività 4.2	Calcolo e scrittura nelle civiltà antiche	25 minuti
Attività 4.3	Laboratorio di Uri	70 minuti

Attività 4.1 Lettura ad alta voce di un libro infantile sull'origine della numerazione scritta (25 minuti)

Questa prima attività è suddivisa in due tappe:

1. Si mostra l'albo illustrato; si presentano autrice, illustratore, editore. Si tratta in un caso di un racconto di fantasia, nell'altro di un libro divulgativo per bambini sull'origine della numerazione scritta in Mesopotamia. Tuttavia non si parla ai partecipanti del tema prima di intraprendere la lettura, creando un po' di suspense ed evitando gli "spoiler".

Prima di iniziare la lettura si ricorda ad ogni singolo partecipante che è richiesto di annotare, durante l'ascolto, impressioni e osservazioni che la lettura lascia (contenuto matematico, aspetti artistici) seppure senza pregiudicare il godimento della storia, come è stato fatto nelle sessioni 2 e 3.

2. Lettura ad alta voce, eventualmente drammatizzata, combinata con la proiezione delle pagine oppure delle illustrazioni del libro sullo schermo.

Figura 5.4.1 Officina di storia della matematica – Sessione 4. Il racconto di Uri e i reperti archeologici sumeri: contrassegni, bullae, tavolette impresse.

Risposta attesa dai partecipanti

È richiesta un'attenzione sostenuta per comprendere le varie fasi dell'invenzione del sistema di contrassegni e bullae dei Sumeri, e poi l'ipotesi del passaggio ai segni scritti.

Nel libro Uri, la presenza dei personaggi è centrale, mentre il libro *The history of number* è un racconto divulgativo.

Emergeranno nei partecipanti ricordi di conoscenze più o meno consolidate sulle antiche città-stato dei Sumeri e in generale sulla storia della Mesopotamia, su cui si tornerà esplicitamente nella prossima attività 4.2.

Attività 4.2 Calcolo e scrittura nelle civiltà antiche (per immagini) (25 minuti)

Il o la docente si rivolge al gruppo riepilogando e offrendo elementi per rispondere alle molte domande suscitate dalla lettura 4.1.

Attraverso una raccolta di immagini, illustra alcuni elementi delle avvincenti ricerche archeologiche sulle origini delle numerazioni scritte.

I punti da considerare sono i seguenti:

- La recente ricerca archeologica e storica sui simboli grafici numerici attraverso le culture

- Per i bambini, i simboli in cifre che vedono scritti sulla carta, sugli schermi, sulle facciate dei palazzi, sono “scarabocchi” su cui si fanno idee come le fanno sulle lettere dell'alfabeto (è opportuno un collegamento con il caso delle lettere dell'alfabeto studiato in Ferreiro, Teberosky 1979, Ferreiro 2003)
- I numeri si compongono e scompongono e ciò ci aiuta a nominarli e ad annotarli: i sistemi di numerazione additivi per contrasto con quello corrente che è posizionale (vi sono cose che non si vedono!)
- Il mondo sessagesimale della Mesopotamia, una base diversa da quella decimale
- I racconti matematici ci ispirano nel proporre un “Grande Racconto della Matematica”, costruendo un plot narrativo avvincente.

Figura. 5.4.2 Tra storia e racconto. Illustrazioni tratte da Schmandt Besserat (1999)

Risposta attesa dai partecipanti

Non si tratta in alcun modo di realizzare un'esposizione storica esaustiva, bensì di riunire il racconto divulgativo o di fantasia con le ricerche archeologiche e storiche, e sollecitare nei partecipanti l'interesse per le implicazioni che queste ricerche hanno per comprendere ciò che è in gioco nell'alfabetizzazione numerica, fra simboli ed esperienza corporea, fra parole e segni.

Le immagini sono una chiave per l'attenzione, così come la localizzazione geografica e cronologica.

Attività 4.3 Il laboratorio di Uri (70 minuti)

Si offre ai partecipanti il materiale di colore possibilmente marrone chiaro per modellare contrassegni di “argilla” in un certo numero, copiando i modelli inventati da Uri: coni grandi e piccoli e sfere grandi e piccole.

Si distribuiscono due schede (Fig. 5.4.3) con disegni e domande, riferite ai contrassegni modellati dai singoli partecipanti.

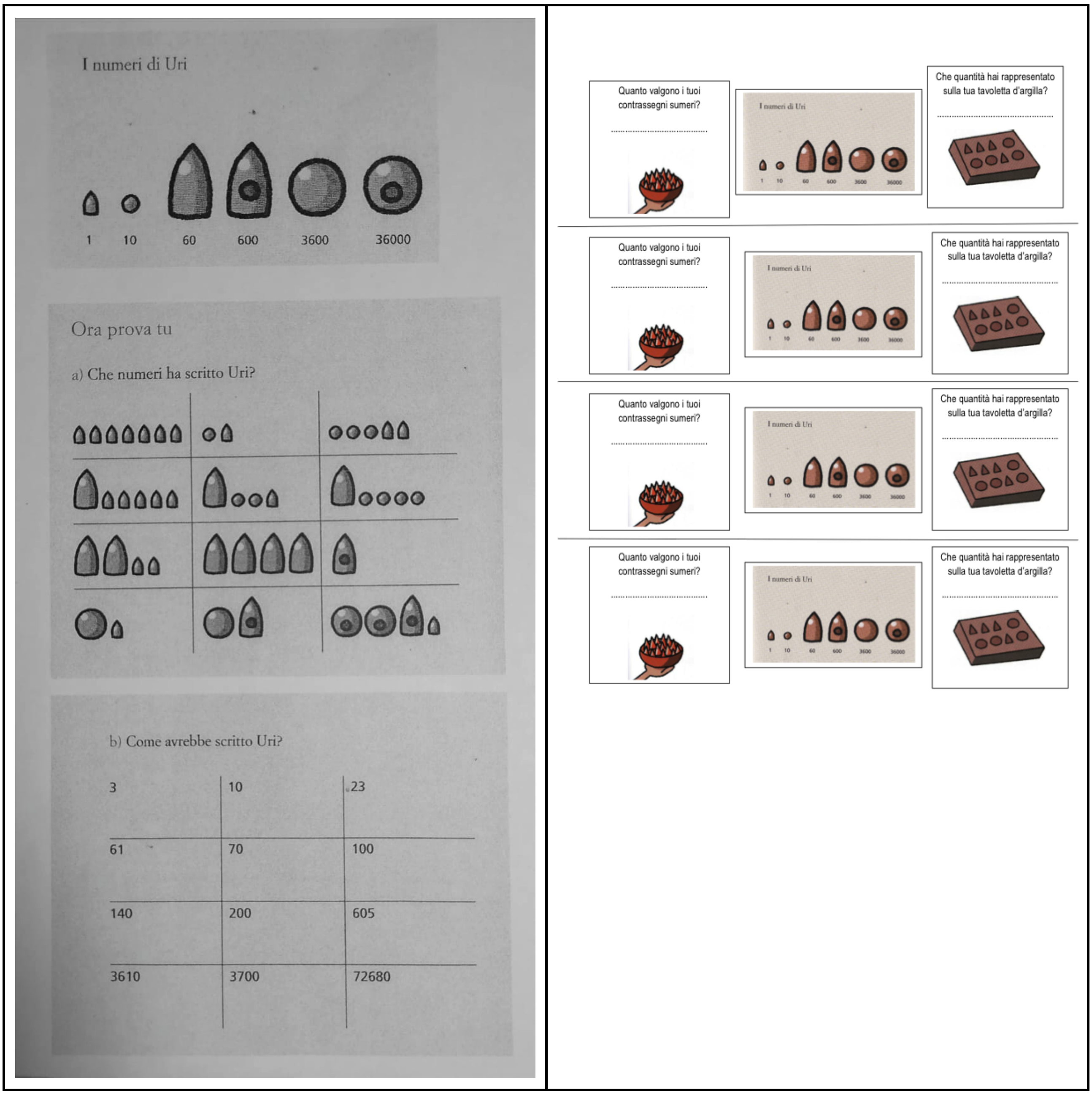


Figura. 5.4.3 Officina di storia della matematica – Sessione 4. Schede di esercizi sulla numerazione, liberamente tratte da Uri, il piccolo sumero di Raffaella Petti.

Risposta attesa dai partecipanti

L'attività manuale combinata con gli esercizi, nell'atmosfera creata dalla lettura e dalle spiegazioni, portano un grande coinvolgimento, un ambiente sereno e allegro e il desiderio di mettersi alla prova, mettendosi nei panni di Uri e nei panni dei piccoli alunni.

Sessione 5: L'avventura del sistema metrico decimale

Questa sessione si riferisce allo "scontro" fra:
- il Sistema Metrico Decimale puramente convenzionale forgiato nella Commissione di Pesi e Misure dell'Assemblea Nazionale francese dopo la Rivoluzione francese
- e le antiche consuetudini della misura, fondate sul corpo e sul lavoro degli esseri umani, tramandate fino all'Europa dell'Ottocento (che avevano radici risalenti al Neolitico).

Sullo sfondo si colloca l'apprendimento della misurazione e dei sistemi correnti di unità di misura nella scuola primaria. I partecipanti comprenderanno che il suo ruolo così centrale ancora oggi nell'"immaginario scolastico" deriva dall'esigenza degli stati europei ottocenteschi di far accettare a tutta la popolazione un sistema di unità di misura concepito da scienziati e in rottura con le consuetudini. Indirettamente, i partecipanti rifletteranno sulle radici culturali delle difficoltà dei bambini in questo ambito, e sulle vie di soluzione. I partecipanti evocano quindi la Sessione 6, e in generale il ruolo dei numeri, calcoli e misure nella storia dell'umanità, vedendo elementi di continuità e di rottura fra l'antichità e i nostri tempi.

Metodologia didattica

La sessione si basa sulla lettura ad alta voce dell'albo illustrato *Milli-centi-deca-chilo* di Jennifer Fandel, corredato da una lettura breve, precedente, su "Illuminismo, scienza e società" (Millán Gasca 2008). L'attività principale è un dibattito fra sostenitori e detrattori del sistema metrico decimale, il quale però è stato già preparato da una lettura nella quale il docente ha sottolineato l'opposizione binaria fra innovazione e tradizione, fra un sistema antropometrico e frutto di prassi ancestrali e un sistema basato esclusivamente su convenzioni di tipo scientifico costruito a tavolino (sulle opposizioni binarie per costruire un insegnamento narrativo nella scuola primaria, si veda Egan 1989).

Le attività si possono replicare in classe con bambini di quarta/quinta primaria, quindi la sessione si svolge a cavallo fra la consapevolezza storica adulta dei partecipanti (strettamente legata alla presenza odierna della misura nel nostro mondo a più livelli) e la misurazione come argomento delle lezioni di matematica nella scuola primaria (TMb).

Inoltre, all'inizio della sessione si propone la lettura di un frammento di un libro di storia della scienza, seppure divulgativo. Si entra così, con tocco leggero, in contatto con la disciplina di cui si è parlato nella Sessione 1 e che era presente nei brevi riepiloghi del docente delle Sessioni 2 a 4.

Materiali
- Albo illustrato
- Diapositive con le immagini o le pagine dell'albo, oppure visualizzatore per scorrere in video e leggere le pagine.
- Pagina stampata con il testo dell'attività 5.1 (una per ogni partecipante).
- Strisce di carta bianca, penne

Tavola del percorso

Attività 5.1	Una frase che risuona in me	20 minuti
Attività 5.2	Racconto per immagini delle origini del sistema metrico decimale	45 minuti
Attività 5.3	Un dibattito in classe a favore e contro il SMD: presentazione (10 m.) lavoro in gruppi (20 m) dibattito (25 m)	55 minuti

Una breve pausa è auspicabile fra le prime due attività e l'ultima.

Attività 5.1 Una frase che risuona in me (20 minuti)

1. Si distribuisce ad ogni partecipanti una pagina stampata con il frammento “Illuminismo, scienza e società” (vedi sotto) e una striscia di carta bianca.
2. Si chiede di leggere individualmente e di scegliere e trascrivere in un foglietto di carta una frase che ha causato sorpresa, che ha offerto una chiave nuova, o semplicemente che è piaciuta.
3. Di seguito, si chiede ai partecipanti di condividere la frase preferita, leggendola prima ed eventualmente aggiungendo un commento sulle ragioni della scelta.

MATEMATICA, SCIENZA E PROGRESSO NELL'ILLUMINISMO

L’opera di Newton ebbe un grande influsso sugli illuministi francesi, poiché la sua grandiosa esposizione del sistema del mondo fu considerata la migliore dimostrazione della forza degli argomenti razionali e della potenza della conoscenza scientifica. Una scienza nuova per una nuova società: la scienza divenne fonte d'ispirazione degli ideali di riforma delle strutture sociali e politiche del Vecchio Regime, e l’ingegnere studioso di scienza il modello di uomo colto, capace di guidare questo processo di rinnovamento. Uno dei più convinti sostenitori di questa visione riformatrice fu Jean-Baptiste le Rond d’Alembert (1717-1783), anch'egli matematico di valore, che ebbe un ruolo di primo piano nella compilazione dell'opera che è il simbolo del Secolo dei Lumi, l'*Enciclopedia*. Si trattava di un’esposizione sistematica e ragionata dei progressi delle arti, delle scienze, delle tecniche e dei mestieri, nell’ambito della quale D'Alembert scrisse molte voci sulle conoscenze matematiche. Nella nuova società di cui si propugnava l'avvento, la scienza avrebbe garantito il progresso materiale e sarebbe stata alla base del governo degli affari sociali ed economici. La matematica era il fondamento sicuro di questo sviluppo. Anche Napoleone, che, come ufficiale di artiglieria, conosceva e amava la matematica, considerava che il progresso e il perfezionamento della matematica erano intimamente legati alla prosperità dello Stato.
Alla vigilia della Rivoluzione del 1789, la Francia contava su un’*élite*, un gruppo scelto di matematici e scienziati, capaci di assumere grandi responsabilità. La matematica ebbe uno spettacolare sviluppo in Francia in quel periodo, e anche nei primi decenni dell’Ottocento. Gli studiosi francesi, fra cui Pierre Simon de Laplace (1749-1827) e il matematico di Torino Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Gaspard Monge (1746-1818), il marchese de Condorcet (1743-1794) e Lazare Carnot (1753-1823), contribuirono a ripensare nel nuovo quadro della disciplina il rapporto fra i molti aspetti dell’attività matematica: applicazioni pratiche, sviluppi teorici, insegnamento, applicazioni alla fisica e in generale alla scienza, applicazioni allo sviluppo tecnico e all’industria. Molti furono anche ingegneri, politici, uomini di azione. Condorcet, Monge e Carnot accolsero con entusiasmo la Rivoluzione; il primo fu una delle sue vittime, mentre gli altri due ebbero un ruolo di primo piano anche accanto a Napoleone. Il loro ruolo era quello di *savant*, ad esempio nel Comitato di Pesi e Misure dell’Accademia delle Scienze di Parigi, che si occupò di riformare le varie unità di misura e introdusse il sistema metrico decimale. Per definire il metro, il Comitato decise di usare le misure disponibili (grazie allo sviluppo della geodesia) della lunghezza del meridiano terrestre, e definì il metro come la diecimilionesima parte della distanza dall'Equatore al Polo. Ma gli scienziati si occuparono anche della fabbricazione dei cannoni e dell'organizzazione militare per la difesa della rivoluzione.
Forse la realizzazione di più duratura influenza degli scienziati francesi del periodo rivoluzionario fu l'organizzazione dell'insegnamento scientifico moderno, attraverso la creazione di istituzioni come la Scuola Politecnica di Parigi o la Scuola Normale. In queste Scuole superiori si formavano i futuri ingegneri militari e civili, nonché i futuri insegnanti di scienze, e l'educazione si basava sullo studio approfondito della matematica e delle scienze: le materie matematiche erano un banco di prova delle capacità dei giovani allievi, e dovevano inoltre fornire loro le conoscenze e i metodi di base per affrontare i problemi scientifici e tecnici. Se, fino a quel momento, chi voleva conoscere la matematica aveva dovuto studiare da solo o affidarsi a lezioni private, ora la matematica poteva essere studiata in centri di insegnamento appropriati. Nell'Ottocento furono creati centri del genere in molte città di Europa, e anche le università, che avevano sempre relegato le scienze in una posizione di scarsa importanza, crearono delle Facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali. Inoltre, se gli studiosi di matematica erano stati fino a quel momento degli appassionati che si dedicavano ad essa nel tempo lasciato libero da altre attività più redditizie, o dipendevano dal “capriccio” di mecenati e re, erano state ormai poste le basi affinché l'attività del matematico diventasse anche una professione socialmente riconosciuta.

Tratto da Ana MILLÁN GASCA, *All'inizio fu lo scriba. Piccola storia della matematica come strumento di conoscenza*, cap. 6, I grandi successi della matematica fra Settecento e Ottocento, Milano, Mimesis, 2009, pp. 69-70.

Risposta attesa dai partecipanti

La scelta di una frase pone l'accento sulla soggettività nel leggere un testo di storia della scienza.

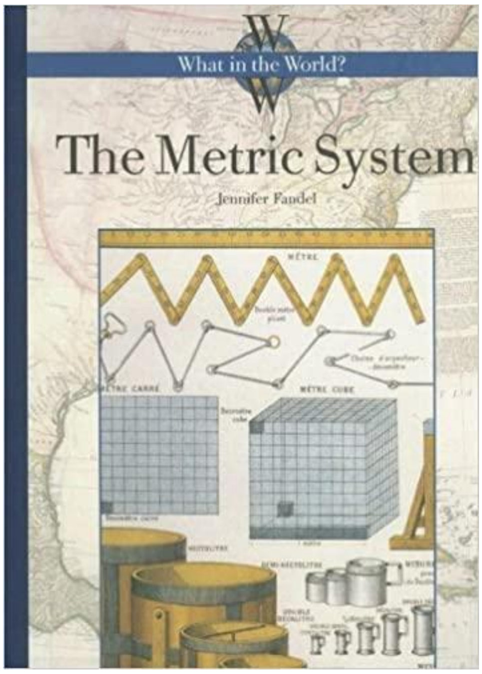
Le reazioni individuali dipendono anche dalle conoscenze pregresse di storia contemporanea. Difficilmente i partecipanti hanno qualche conoscenza di storia della scienza, quindi per lo più saranno sorpresi nel guardare l'Illuminismo e la Rivoluzione francese anche nei loro risvolti dal punto di vista scientifico. D'altra parte, è immediato percepire che la forte presenza della scienza e della tecnologia nel mondo attuale ha radici nel passato.

Questa costatazione e l'invito a scegliere una frase spingono la curiosità e il desiderio di condividere, creando un'attesa per le attività susseguenti della sessione.

Attività 5.2 Racconto per immagini delle origini del sistema metrico decimale (45 minuti)

Il libro di Jennifer Fandel è corredato da un gran numero di immagini che immergono il lettore in un'epoca e nel suo dinamismo storico, ricco di cambiamenti. Non è un racconto di fantasia ispirato alle ricerche storiche, come nelle sessioni precedenti, bensì una narrazione diretta di avvenimenti e di sviluppi del periodo.

La lettura ad alta voce da parte del docente è corredata dai suoi commenti sulle vicende narrate e sulle immagini (v. Fig. 5.5.1) e facendo riferimento al testo letto nell'attività 5.1. Questa lettura "aperta", inclusa la risposta a eventuali domande dei partecipanti, è il perno dell'attività.



L'autrice cattura il lettore con le vicende "romantiche" di due studiosi francesi coetanei (nati nel 1740) Pierre Méchain e Jean-Baptiste Delambre, per la determinazione della lunghezza della distanza fra l'Equatore e il Polo Nord grazie a misurazioni topografiche, fra il 1792 e il 1799. Sullo sfondo, la Rivoluzione francese, e in particolare l'attività dei celebri scienziati della Commissione dei Pesi e Misure fondata nel 1790, ma anche le vicende del mondo oltre le frontiere francesi e dell'Europa.
Il docente completa la lettura del libro con elementi tratti da Witold Kula (1981), in particolare i capitoli 20-22, dove si illustra meglio il significato dell'espressione "Un re, una legge, un peso, una misura" (citata da Fandel a p. 22); oppure anche con elementi riguardanti singoli paesi, ad esempio, durante le invasioni napoleoniche (per l'Italia, Borgato 2006).
Si osservi che Fandel sceglie un esempio che esprime il legame e il conflitto tra il vecchio e il nuovo, quello del metro e l'auna. Il metro, misura di lunghezza che rappresenta per eccellenza il sistema metrico decimale, fu scelto anche facendo in modo che si avvicinasse alla misura di lunghezza per eccellenza della tradizione, il cubito o avambraccio; l'auna usata allora in molti luoghi della Francia per la misura delle stoffe (la parola deriva da un termine germanico per avambraccio):

> "scegliendo un'unità legata alle consuetudini, i membri della Commissione speravano di rendere meno drammatica l'introduzione, e poi l'apprendimento, del nuovo sistema di misura". (p. 34)

Figura 5.5.1 Copertina di Fandel (2006) nella collana «What in the world?» dell'editore statunitense The Creative Company (Mankato, MN).

Il docente può proporre strada facendo alcuni esempi di misure precedenti il sistema metrico decimale, oltre l'auna citata da Fandel. Sottolinea che alcune di queste misure sono ancora in uso ufficialmente in alcuni paesi del mondo, come il piede, il pollice, libbre e once e altre sono usate in modo informale (cassette, mazzetti ecc).

La lettura progressivamente “scalda i motori” in vista del dibattito fra due tesi contrapposte che chiuderà la sessione. Inoltre, il docente cerca di incoraggiare il collegamento con la Sessione 3 relativamente alle origini remote della misura.

Risposta attesa dai partecipanti

I partecipanti sanno, anche per propria esperienza, che le misure del sistema metrico decimale sono una parte importante delle lezioni di matematica nella scuola primaria. Nel loro immaginario però vi saranno principalmente numeri, abbreviazioni ed equivalenze sul quaderno (Fig. 5.5.2).

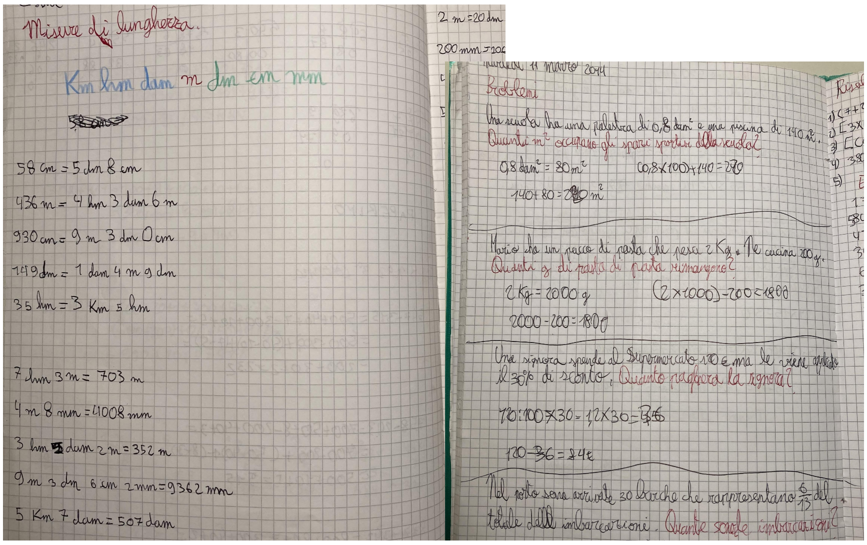


Figura 5.5.2 Due pagine di quaderno di un alunno di scuola primaria (2012) in Italia con esercizi riguardanti la misurazione.

Ora il sistema metrico decimale si colora (anche grazie alle immagini) e acquista vita, attraverso motivazioni e intenzioni umane. Ricordi confusi si organizzano ripercorrendo le vicende storiche che portarono alla creazione del sistema metrico decimale in Europa, in Francia, oggi usato prevalentemente in tutto il mondo. Degli esseri umani e delle intenzioni anche politiche erano dietro a quella innovazione tecnica, economica e organizzativa. I partecipanti potrebbero menzionare esempi di misura di ieri e oggi diverse da quelle del sistema metrico decimale o sistema internazionale. Il collegamento con quanto vissuto nella Sessione 3 potrebbe essere richiamato dai partecipanti stessi.

Questa attività si svolge a cavallo fra adulti-partecipanti e le classi di bambini-alunni a cui potrebbe essere rivolto un tale racconto, rendendo possibile la costruzione di un Grande Racconto della misura, per insegnarla.

Attività 5.3 Un dibattito in classe - A favore e contro il SMD (55 minuti)

Questa attività si svolge in tre tappe.

1. Si formano due gruppi per preparare un dibattito e si sceglie un moderatore, preferibilmente scelto fra i partecipanti oppure il docente stesso.

La divisione può essere su base volontaria oppure a caso, cercando di mantenere un equilibrio sulla consistenza dei gruppi. I partecipanti sono invitati ad accogliere la logica del dibattito: discutere per comprendere meglio, facendosi, per un tempo circoscritto, portavoce delle ragioni di una parte delle questioni in gioco. Comprendere ma anche sentire quelle ragioni per meglio esprimerle in una discussione, e in tal modo ampliare la propria prospettiva nel contraddittorio.

2. I gruppi lavorano ad affilare le proprie armi argomentative con ragioni e con esempi convincenti.
Il docente ascolta entrambi i gruppi e fornisce eventuali materiali di sostegno. I gruppi possono ricorrere a informazioni ricavate dal web, sotto la supervisione del docente.

Si tratta anche di calarsi nella parte dei francesi della fine del Settecento o degli europei i cui paesi erano invasi dalle truppe di Napoleone, che vedevano soppresse consuetudini che, anche se il sospetto di frode era omnipresente, esprimevano in qualche modo un ragionevole compromesso tra precisione e giustizia, fra guadagno e onestà.

3. Si svolge il dibattito. Il moderatore deve equilibrare i turni di parola, invitare ognuno dei gruppi a introdurre progressivamente nuove sfaccettature, regolare il tempo di replica per i singoli argomenti portati avanti. Un segretario può annotare su due colonne i punti di vista in contraddizione

Risposta attesa dai partecipanti

Anche in questo caso l'attività svolta fra adulti evoca una possibile analoga attività con gli alunni. Il dibattito incoraggia il coinvolgimento su un tema che inizialmente risultava freddo e privo d'anima. I partecipanti contribuiscono in modi diversi, chi nella fase preparatoria (reperendo ulteriori informazioni sul web, elencando analiticamente argomenti), chi esponendoli effettivamente nel dibattito finale.

Sessione 6: La geometria del faraone

Questa sessione introduce la geometria nell'Officina e ritorna nel tempo alle atmosfere del mondo antico (come la Sessione 4), incentrandosi sull'Egitto e le sue misteriose credenze e saperi, evocati in film e documentari. Si parla di agrimensura egizia, e quindi vi è anche un collegamento con le precedenti sessioni dedicate alla misura (sessioni 3 e 5), anche se qui non vi sono numeri, bensì la consapevolezza delle "forme limite" immaginarie, regolari, frutto della ricerca di precisione e dell'attività tecnica.

Metodologia didattica

La sessione si basa sulla lettura ad alta voce di un albo illustrato, *La geometria del faraone* di Anna Cerasoli (fig. 5.6.1), ispirato al celebre racconto di Erodoto e alle ricerche di storia della scienza egizia. In alternativa è possibile raccontare oralmente le pagine autore greco Erodoto (V secolo a.C.) (*Storie*, libro I, 68-69; vedi sotto, fig. 5.6.2).

La lettura si combina con un'attività manuale in gruppi (cui è dedicata più della metà del tempo a disposizione) nella quale si chiede ai partecipanti di immedesimarsi con i bambini in classe, che costruiscono quadrati e cerchi. Una scheda chiede a ogni gruppo di esprimere l'esperienza vissuta. Immagini e video di bambini intenti alla stessa attività completano l'esperienza della sessione.

Materiali
- Albo illustrato
- Diapositive con alcune immagini o pagine dell'albo (Fig. 5.6.1)
- Diapositive con immagini di bambini all'opera (Fig. 5.6.3)
- Cannucce, cordicelle di vari colori e materiali
- Bottoni o sassolini
- Pongo

Tavola del percorso

Attività 6.1	Come nacque la geometria	40 minuti
Attività 6.2	Costruire un quadrato	20 minuti
Attività 6.3	Fra bambini e adulti	30 minuti
Attività 6.4	Conclusione dell'Officina	30 minuti

Attività 6.1 Come nacque la geometria (40 minuti)

L'attività si svolge in tre tappe.

1. Si mostra l'albo illustrato; si presentano autrice, illustratore, editore. Si tratta di un racconto di fantasia con personaggi bambini (Ames e i suoi fratelli) che si immedesimano nelle attività dei tenditori di corde o arpedonapti. Vi sono delle ricerche storiche soggiacenti, ma di questo non si parla ai partecipanti prima di intraprendere la lettura, creando un po' di suspense ed evitando gli "spoiler".

2. Lettura drammatizzata del libro, oppure di alcune pagine selezionate, combinata con la proiezione sullo schermo delle pagine oppure delle illustrazioni del libro. Durante la lettura, come già stabilito nelle precedenti letture di albi infantili nelle Sessioni 2, 3 e 4, i partecipanti annotano impressioni e

osservazioni che la lettura lascia (contenuto matematico, aspetti artistico-letterari) seppure senza pregiudicare il godimento della storia.

Figura 5.6.1 Illustrazioni di Desideria Guicciardini per l'albo illustrato La geometria del faraone di Anna Cerasoli

In alternativa, il docente costruisce un racconto orale sulla base del racconto di Erodoto (Fig. 5.6.2)

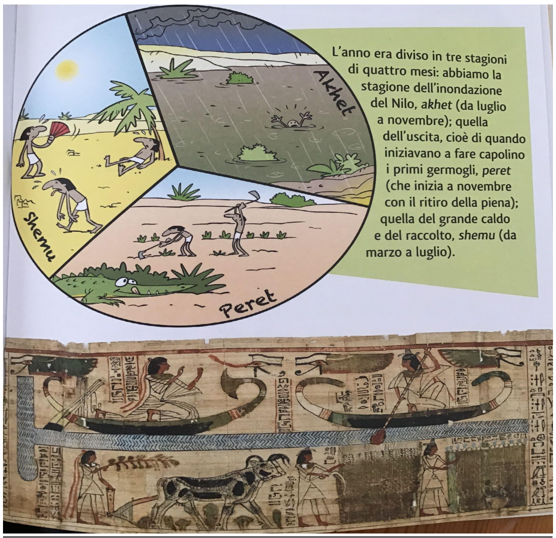


Figura 5.6.2 La divisione dell'anno in tre stagioni, di cui Akhet, la stagione dell'inondazione del Nilo, da luglio a novembre, nel libro per ragazzi L'avventura dei geroglifici. L'illustrazione è di Roberto Lauciello.

«Da quel tempo, infatti, il paese, pur essendo tutto pianeggiante, è divenuto impraticabile per cavalli e carri, a causa dei canali che vi sono, numerosi e rivolti in tutte le direzioni.
Il re [Sesostri], d'altra parte, aveva questa ragione per farne scavare in tutto il paese: tutti gli Egiziani che avevano le città non nei pressi del fiume, ma piuttosto all'interno, ogni volta che il Nilo si ritirava, venendo a scarseggiare l'acqua, dovevano servirsi di acque salmastre, che attingevano dai pozzi: è per questo che l'Egitto fu solcato da canali.
Raccontavano, poi, che questo re di Egitto] aveva distribuito la terra fra tutti gli Egiziani, assegnando a ciascuno, in misura uguale, una porzione di terreno in forma quadrangolare; e si era procurato in questo modo delle entrate, con lo stabilire un tributo che dovevano pagargli ogni anno.
Se il fiume asportava una parte qualsivoglia della porzione assegnata ad uno, questi andava di volta in volta dal re a segnalargli l'accaduto; e il re mandava degli addetti a fare sopraluoghi e a misurare di quanto risultasse ridotto l'appezzamento, affinché, per l'avvenire, il cittadino riducesse proporzionalmente il contributo stabilito.
Di qui, secondo me, ha avuto origine la scoperta della geometria che, poi, fu introdotta in Grecia; poiché l'orologio solare, la meridiana e la divisione del giorno in dodici parti i Greci la ricevettero dai Babilonesi.»

Erodoto, Storie, libro I, 68-69

3. Dialogo, moderato dal docente, con domande, commenti e reazioni dei partecipanti. Si dà spazio sia alle basi storiografiche del racconto di fantasia, sia all'uso didattico di un particolare albo illustrato.

Per le basi storiografiche, il docente si fa riferimento al panorama che è stato tracciato nella Sessione 1, e riconduce l'esempio dell'agrimensura ai legami fra la geometria greca e i saperi delle civiltà del Vicino

Oriente Antico. Al docente è richiesto un ruolo di traghettatore verso letture come Cartocci 2007 oppure i contributi sulla matematica egizia della *Storia della Scienza* (vol.1) Treccani (reperibili online).

Risposta attesa dai partecipanti

La geometria rappresenta spesso una sorpresa, soprattutto una geometria dove non ci sono numeri o equazioni. I commenti dei partecipanti – in questa ultima sessione di una officina dove sono stati letti molti libri per ragazzi – sono ora più numerosi, più vivaci e più centrati, poiché si percepisce l'albo illustrato come oggetto di godimento estetico (il testo, le illustrazioni, il formato, i colori, il tipo di carta) e se ne colgono gli aspetti matematici soggiacenti. Si parlerà di linea e di linea retta, di punto e di estremi di un segmento, di figure piane, del rapporto fra geometria e pratiche di stampo tecnico come l'agrimensura o l'edilizia.

La Sessione 1 dovrebbe mostrare qui la sua utilità per collegare le sessioni fra di loro e, ora, per chiudere il percorso. Si veda il video *Officina di storia della matematica e il suo ruolo nella didattica con i bambini: l'origine della geometria* (2019) di Fulvia Subania, nel canale YouTube ANFoMAM, https://youtu.be/026KpJcFMLE

Attività 6.2 Costruire un quadrato (20 minuti)

1. I partecipanti sono divisi i gruppi di 4 persone ca. Ogni gruppo riceve dei materiali per realizzare dei quadrati.
2. Lavoro dei gruppi, come in un piccolo laboratorio artigianale. Attraverso il lavoro manuale, si esperisce la regolarità (le simmetrie) del quadrato: uguaglianza dei lati; angolo retto (inclinazione fra due rette quando esse formano quattro angoli congruenti). Le corde permettono di esperire il tendere corde ottenere linee rette ("quelle che si distendono ugualmente fra i suoi punti ", Euclide, Libro I, def. 4).
3. Alla fine dell'attività, ogni gruppo riceve una scheda: in comune si compila, riflettendo su quanto vissuto.

La sfida del quadrato

Gruppo numero:
Componenti gruppo:

Materiali scelti:

Le fasi del nostro lavoro:

	1-
	2-
	3-

ecc.
Siete riusciti a costruire un quadrato?

Quali sono state le difficoltà?

Quali difficoltà potrebbero avere i bambini?

Riflessioni libere sull'attività.

Risposta attesa dai partecipanti

Può esserci un'iniziale ritrosia a mettersi in piedi e muoversi in aula. Il gruppo è il sostegno protettore, in tal senso.

L'atmosfera dell'Officina ritorna alla Sessione 3: si lavora con materiali, si collabora in gruppo. La varietà dei materiali porterà a incontrare ostacoli di natura diversa. Tuttavia, altrettanto importante quanto la riflessione sulle regolarità del quadrato è l'immedesimazione con i gesti dell'agrimensore o del tecnico sul terreno, che evoca il nome stesso geo-metria: dopo aver ascoltato un racconto, esso diventa vivo, esperienza vissuta. Di conseguenza si evoca la possibilità di proporre l'attività ai bambini, e la loro reazione eventuale, diversa da quella forse un po' impacciata degli adulti.

Atmosfera allegra, distesa, ma concentrata sulla sfida posta.

Attività 6.3 Tra adulti e bambini (30 minuti)

Proiettando immagini di attività con bambini (dalla scuola dell'infanzia alla quinta classe) il docente guida un dialogo imperniato su:

– la condivisione di quanto raccolto dai singoli gruppi nella scheda (ogni gruppo ha scelto o ricevuto materiali diversi)
– i racconti sulle attività in classe del docente o dei partecipanti
– i commenti, domande, perplessità, riflessioni al riguardo dei partecipanti.

Figura 5.6.3 Officina di storia della matematica – Sessione 5. Attività in classe sulle figure piane e solide con le corde (foto di Francesca Neri)

Il docente cerca di far emergere anche gli ostacoli per realizzare queste attività in movimento o con materiali (la mancanza, inagibilità, poca disponibilità di palestre o cortili, il disordine o rumore del gruppo classe) e la necessità di confrontarsi con le perplessità di altri colleghi:.

Risposta attesa dai partecipanti

Il desiderio di esporre la propria esperienza laboratoriale si accompagna alla curiosità per le opere realizzate da altri gruppi e per le difficoltà che hanno incontrato.

Le foto e video di alunni in classe destano sempre stupore, coinvolgimento, "impazienza" di fare allo stesso modo e ricavare l'entusiasmo e l'apprendimento da parte dei bambini. Potrebbero alle volte predominare atteggiamenti di perplessità o di smarrimento.

Si avvicina la fine dell'Officina, e quindi possono emergere commenti riepilogativi, sguardi indietro che abbracciano l'intero percorso. Eventualmente, la consapevolezza del fatto che non si può trattare di altro che di un nuovo tassello, in un cammino di rinnovamento della propria azione didattica, di ampliamento dei propri orizzonti culturali.

Figura 5.6.4 Officina di storia della matematica (Sessione 6) e Officina di geometria (Sessione 2). I quadrati con insegnanti in servizio (foto di Emanuela Spagnoletti Zeuli)

Attività 6.4 Conclusione dell'Officina (30 minuti)

Gli ultimi minuti dell'officina sono dedicati a una condivisione della stesura dello zibaldone come esperienza formativa individuale in parallelo alle sessioni in aula dell'Officina. Il docente ricorda le modalità del lavoro individuale richiesto in conclusione dell'Officina (vedi sopra), che richiede ora di ritrovare alcuni frammenti dello zibaldone (in corrispondenza con momenti specifici del percorso, oppure indipendentemente da un momento specifico), e sceglierli in modo tale che abbiano una coerenza ed esprimano una riflessione conclusiva: si riuniscono in un testo, eventualmente "cucendoli" insieme con spiegazioni scritte in questo momento, per far capire ciò che la annotazione esprime e rappresenta.

Questo quarto e ultimo segmento dell'ultima sessione dell'Officina richiede un suo tempo, evitando di saltarlo o ridurlo a una spiegazione puramente pratica. Da una parte si cerca la chiarezza affinché i partecipanti sappiano cosa è richiesto come elaborato finale, dall'altra si dà un piccolo spazio per condividere una parte dell'Officina che era il dietro le quinte individuale. Si tratta di giungere a una riflessione sul valore formativo della scrittura in ambito educativo, che si rende ancora più necessaria poiché i partecipanti hanno preso parte a un'Officina attiva più che contemplativa, a un'esperienza più sentimentale che dotta, più esistenziale che teorica o metodologica.

Risposta attesa dai partecipanti

Ai partecipanti è richiesto un ultimo impegno, nell'ultima attività dell'ultima sessione del Laboratorio. Potrebbero essere spinti a voler concludere, o potrebbero invece accogliere il momento proprio perché dello zibaldone non si è più parlato, se non in modo privato o episodico, fino a questo ultimo incontro collettivo.

Poiché lo zibaldone è personale, davvero si spinge sull'esperienza del singolo, sull'espressione di sé e il lavoro su se stesso di un insegnante. Il percorso dell'Officina dovrebbe aver permesso di giungere alla capacità e al desiderio di mettersi in gioco, anche ora. Comunque ci possono essere partecipanti che non condividono.

Infine, poiché il lavoro finale si configura come una prova di valutazione (anche se solo in alcuni casi essa lo è effettivamente per ottenere crediti formativi o diplomi), ci può essere un'inquietudine nel cercare di capire la richiesta. Anche questa inquietudine è però parte della formazione.

Nelle realizzazioni sperimentali, sia gli elaborati finali sia gli interi zibaldoni sono stati analizzati e hanno portato a livelli rilevanti di impegno, di sincerità, di riflessione personale, di espressione letteraria o grafica.

Officina ANFoMAM 6: Geometria

6.1. Presentazione dell'officina

L'*intento* dell'Officina è creare occasioni di esperienza geometrica intuitiva come chiave per scardinare una visione della matematica a scuola limitata alla alfabetizzazione numerica e agli esercizi scritti. I partecipanti possono vivere la geometria euclidea (piana e solida) attraverso il corpo, nello spazio rappresentativo visivo-tattile-motorio, usando anche materiali fisici, assimilando il valore formativo dello sguardo geometrico (scomposizioni, confronti, misura).

Presupposto fondamentale alla costruzione delle sessioni di questa Officina è la convinzione che il valore educativo della matematica debba emergere più chiaramente sia nell'educazione di bambini e ragazzi, sia nella formazione degli insegnanti in servizio e non.

Si vuole fornire un approccio alla didattica della geometria che sia inclusivo, che parta da oggetti concreti per arrivare all'astrazione e che superi la tendenza classica (che trova la sua àncora nei libri di testo) a considerare la geometria solo dal punto di vista delle descrizioni, classificazioni e denominazioni, delle formule e della nomenclatura: si vuole proporre ai bambini la forza del senso della scoperta attraverso l'osservazione, la costruzione, il movimento nello spazio e la sua reinterpretazione nel piano. Viene messo al centro del discorso educativo il ragionare, non solo attraverso passaggi logici, bensì anche per intuizione, con piccole svolte improvvise, attraverso il corpo che si muove nello spazio e "pensa" matematicamente, attraverso lo spostare, piegare, far rotolare, spezzare un oggetto (che siano parti di un gioco o materiale di qualunque tipo).

Tutte le sessioni proposte partono dall'idea che per realizzare un'efficace attività in classe con i bambini, l'insegnante stesso deve avere familiarità con tale attività, avendola già sperimentata lui stesso in prima persona. Il *modus operandi* alla base delle sessioni, quindi, è il coinvolgimento dei partecipanti, ai quali non viene solamente proposta una scaletta di cose da riproporre, bensì sono coinvolti essi stessi in attività che potranno essere proposte ai bambini. Naturalmente, l'insegnante realizzerà tali attività con una profondità e una comprensione di un altro livello rispetto a quanto poi proporrà in classe, e la sua capacità di immedesimazione e il suo coinvolgimento saranno un punto fondamentale per la buona riuscita dell'Officina.

Gli *obiettivi* si distribuiscono su tre piani:

1) per la formazione matematica dei partecipanti

– assimilare e fare spazio alla geometria nella propria visione della matematica elementare, accanto al calcolo (numeri, operazioni e problemi aritmetici)

– superare una visione degradata della geometria elementare (riconoscimento/discriminazione di figure, classificazione di configurazioni e figure, geometria pratica - misurazione)

– esperire gli aspetti concettuali primordiali della geometria euclidea piana e solida:

- somma e scomposizione
- concetti primitivi di connessione (retta fra due punti, ecc) e ordine (essere fra)

- congruenza ed equivalenza geometrica (angoli, segmenti, figure)
- confronto (maggiore, minore, uguale)
- rapporto

– risolvere problemi di geometria euclidea sintetica elementare (inclusi quelli di disegno geometrico come geometria intuitiva piana)
– mettere assieme i problemi aritmetici classici con i problemi geometrici per arrivare a una concezione di ampio respiro (Polya) del problema matematico elementare e delle sue potenzialità formative

2) per la prassi docente con i bambini

- offrire strumenti per adottare un modo di insegnare narrativo (comprensione mitica e romantica, Egan 1989) e per creare di conseguenza un ritmo in classe
- esperire l'espressione, la mimesi corporea, la bellezza e il gioco come dimensioni umane che la matematica elementare può attivare, con particolare riguardo per la geometria
- avvicinare i partecipanti alle strategie di geometria intuitiva (uso di materiali 3D quali mattoncini e fili, piegature della carta, tessere, gioco, mimesi)
- incoraggiare i partecipanti a riconoscere l'importanza di momenti dedicati alla geometria fin dalla scuola dell'infanzia

3) per l'atteggiamento rispetto alla matematica e l'elaborazione della propria biografia matematica

- favorire l'espressione di convincimenti e curiosità sulla matematica – in particolare sulla geometria – insieme a ricordi e impressioni relativi alla propria esperienza scolastica con la matematica
- destare l'attenzione verso la geometria come porta del pensiero scientifico e mettere in evidenza la sua presenza nelle arti plastiche e grafiche, nell'architettura e nella tecnica
- sviluppare la fiducia nelle potenzialità proprie e degli allievi, in legame stretto con le potenzialità pedagogiche della geometria
- favorire la capacità di ideazione autonoma e di conduzione delle attività matematiche in classe

Origini dell'ideazione dell'Officina e sperimentazioni condotte

L'idea di officina nasce dalla proposta di corsi brevi pratici (laboratori, ca. 16 ore) sull'aula di matematica nella scuola primaria e dell'infanzia che si svolgono dal 2010 presso il Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università degli studi Roma Tre, sotto la guida della Prof. Ana Millán Gasca. Questa proposta è stata adattata alla formazione di insegnanti in servizio a partire dal 2013 dall'Associazione ToKalon, formata da docenti di scuole di ogni ordine e grado. Le sessioni dei corsi di formazione ToKalon prendono spunto dal lavoro in classe, perché sono proposte da insegnanti per insegnanti: tutto quello che viene proposto ai docenti è già stato sperimentato molte volte con i bambini, affinato e modellato in relazione alle risposte ottenute. Inoltre i proponenti hanno sviluppato alcune delle attività presentate in collegamento al lavoro nel sostegno (Migliucci, Regoliosi 2017, Neri Macchiaverna 2018, Spagnoletti Zeuli 2018) e alla formazione di insegnanti di sostegno nell'area matematica, in sessioni realizzate nel corso di abilitazione al sostegno dell'Università Roma Tre, con insegnanti di ogni ordine e grado. A partire dal 2015 l'Associazione ToKalon collabora poi con CreativaMente, un'azienda produttrice di giochi da tavolo educativi, e ha introdotto alcuni giochi studiati appositamente nella didattica in classe con allievi e nei corsi di formazione per insegnanti. Dal 2018-19 ToKalon organizza il Con-corso Matematica per Tutti, un concorso nazionale di matematica basato sul gioco e sulla forza della sua ricaduta nella didattica. Nel 2019, infine, tutta l'attività del Laboratorio di Matematica, dell'Associazione ToKalon e del Con-corso, è confluita nel presente progetto Erasmus e nella costruzione di questa Officina progettata per insegnanti in servizio.

Nella prima fase di progettazione delle Officine ci si è avvalsi delle risposte che i docenti e gli studenti hanno dato a un questionario predisposto e somministrato loro per raccogliere informazioni sulle aspettative e sui punti più critici che avevano bisogno di essere trattati, cosicché le Officine rispondessero pienamente alle esigenze dei partecipanti.

L'Officina 6 è stata realizzata in modo sperimentale:

– nel novembre-dicembre 2018 presso il corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università Roma Tre (tre sessioni di quattro ore, corrispondenti alla sessione qui proposta su geometria, scrittura e espressione; si veda la presentazione http://www.nerimacchiaverna.com/2018/10/laboratorio-geometria-scrittura.html);

– nel novembre 2019 presso il corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università Roma Tre: due sessioni di due ore, corrispondenti alle sessioni qui proposte sulle tassellazioni con i polimini (sessione 5) e sulle coniche (sessione 2), rispettivamente il 26 novembre con Luigi Regoliosi e il 28 novembre con Paola Magrone);

– nel febbraio 2020 in due giornate con 26 insegnanti della scuola primaria di un centro scolastico di Roma (4 sessioni di 2 ore raggruppate in macrosessioni di 4 ore associazionetokalon.com/corso/officina-di-geometria/);

– nella primavera del 2021 in versione online una sessione di 2 ore con la partecipazione della docente di scuola primaria Ilaria Zannoni (https://www.youtube.com/watch?v=3vFE2V9bjAU).

Le realizzazioni hanno permesso di mettere alla prova singole sessioni per arrivare alla formulazione della presente proposta. In ognuno dei casi si è registrata una reazione di coinvolgimento e intensa partecipazione, sia da parte di insegnanti in servizio sia da parte di futuri insegnanti. La proposta di attività nelle quali si deve ragionare e cooperare alla ricerca di soluzioni e strategie, in un ambiente protetto e rilassato in cui poter sperimentare qualcosa di nuovo, ha spinto a "mettersi in gioco", in senso letterale (nelle sessioni con giochi da tavolo) e come atteggiamento e dinamismo di comprensione ed espressione; è stata l'occasione di superare quel timore e quella insicurezza spesso riportati dai docenti stessi riguardo l'insegnamento della matematica. Dalle dichiarazioni dei partecipanti durante e dopo le sessioni si desume che è stato fondamentale anche poter mettere a fuoco idee da portare in classe in modo immediato, quindi la proiezione e immaginazione del possibile lavoro in classe ha accompagnato la partecipazione alla Officina. Infine, l'esperienza di gruppo ha mostrato di avere un ruolo cruciale nel destare entusiasmo, nell'apertura all'innovazione (con la componente di rischio che implica l'allontanarsi da prassi consolidate) e al piacere della matematica; anche nella realizzazione online l'uso della chat ha testimoniato che i partecipanti hanno vissuto la dimensione collettiva di incontro e di impegno per un rinnovamento condotto in comune.6.2. Contributo dell'Officina alla formazione docente all'educazione inclusiva.

La geometria è presente nella educazione speciale fin dalle sue origini, con il lavoro di Édouard Séguin (1812-1880) che assegna un ruolo cruciale nella comprensione e nell'azione al lavoro di composizione, scomposizione e confronto con mattoni e aste di legno, agli incastri delle forme per la configurazione e all'idea di piano (Gil Clemente, Millán Gasca, forthcoming). Come riferito nella sezione 6.1, molte delle sessioni di questa Officina hanno origine da lavori condotti in relazione al sostegno in aule scolastiche italiane: la scelta di porre all'attenzione degli insegnanti in servizio la geometria e l'accento posto sull'espressione e sull'uso di giochi derivano anche da queste esperienze di educazione inclusiva.

Si vuole superare una visione della matematica come offerta formativa riservata a coloro fra gli alunni e le alunne che hanno le capacità cognitive considerate necessarie come prerequisito, oppure semplicemente godono di una predisposizione e gusto personale per la matematica. Le esperienze che abbiamo riportato nelle nostre sessioni sono state sperimentate con bambini e ragazzi di diverse età e con storie e difficoltà diverse. Ciò su cui ci siamo concentrati non ha tanto a che vedere con il raggiungimento di un "obiettivo di apprendimento" o "competenza", quanto con la costruzione di una consapevolezza intorno al ragionare e a lavorare su e con concetti matematici.

6.2. Come usare l'Officina nella formazione di futuri insegnanti

Questa Officina è stata progettata per insegnanti in servizio, ma risulta valida anche per gruppi di studenti del corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria. Negli anni 2018-2019 è stata sperimentata con successo con studenti del corso di Laurea in Scienze della Formazione primaria dell'Università Roma Tre in Italia.

Le sessioni di questa Officina si muovono su un terreno intermedio fra adulti e bambini: i partecipanti sono coinvolti in attività che potrebbero essere rivolte a bambini anche molto piccoli. Di conseguenza, gli insegnanti in servizio sono proiettati nelle loro classi, che essi evocano spesso in interventi e riflessioni, mentre i futuri insegnanti tendono a combinare ricordi della loro esperienza scolastica con propositi per il loro futuro ruolo a scuola.

Verifica formativa

L'attività di verifica finale è volta, a livello individuale, a fare entrare in gioco la libera iniziativa dell'insegnante, a mettere a confronto i contenuti del corso con la prassi in classe e a incoraggiare la personale riflessione sul corso. Come attività di verifica si propongono due alternative:

a) lo Zibaldone

b) l'ideazione (ed eventuale realizzazione) di un'attività matematica in classe

a) *Zibaldone*[25]

[25] *Zibaldone* è il titolo di un'opera del poeta e studioso di scienze italiano Giacomo Leopardi (1798-1837), nel quale egli propone pensieri e brevi annotazioni, un diario non narrativo, ma composito, fatto di piccole folgorazioni espressive senza cercare una rielaborazione, poetico. Questo strumento didattico è stato sviluppato da Francesca Neri in corsi pratici nell'Università Roma Tre, proprio per configurare un nuovo di tipo di officina esperienziale che è lo scopo del progetto ANFoMAM; si veda Neri (2015, 2019).

Si tratta di un quaderno personale del singolo partecipante, che raccoglierà parole, brevi testi, disegni o altro che esprimono l'eco interiore personale delle attività e delle proposte che il gruppo vivrà insieme nell'Officina. Sottolineiamo che l'uso dello Zibaldone può contraddistinguere agli occhi del partecipante la differenza fra gli obiettivi dell'Officina (fiducia, capacità di ideazione, lavoro su se stessi) e quelli dei normali corsi teorici e pratici universitari.

Nella tabella 6.1 si propone una traccia della presentazione da proporre nella sessione 6.1. Tale traccia può servire al docente che desidera adoperare questo strumento didattico in una Officina.

Lo Zibaldone personale per accompagnare l'Officina.
A ognuno dei partecipanti è chiesto di seguire il percorso elaborando un proprio Zibaldone, con parole, pensieri, riflessioni e annotazioni (ognuna corredata dalla data), collegate alla matematica elementare con i bambini riguardanti:
– le attività dell'Officina
– i materiali e i contenuti matematici proposti
– la propria esperienza infantile, scolastica e nel tempo libero
– le proprie eventuali esperienze in classe, ripetizioni, cure o attività informali, professionali o di volontariato, realizzate con bambini

Apertura dello zibaldone
Prepara il tuo Zibaldone:
– se scritto a mano, usa fogli sciolti oppure un piccolo quaderno
– se scritto alla tastiera, predisponi un file
Lo Zibaldone è un tuo documento totalmente personale, non esiste uno Zibaldone "di riferimento".

zibaldone s. m. [prob. voce onomatopeica, per alteraz. da *zabaione*]. – 1. ant. a. Vivanda composta di molti e svariati ingredienti. b. estens. Mescolanza di cose diverse; mucchio confuso di persone: *uno zibaldone Di cancellieri e di bidelli in toga Gli fa ghirlanda intorno al seggiolone* (Giusti). 2. a. ant. Scartafaccio in cui si annotano, senza ordine e man mano che capitano, notizie, appunti, riflessioni, estratti di letture, schemi, abbozzi, ecc.: *non ha lasciato opere compiute*, *ma solo alcuni z.*; *l'evoluzione del pensiero del Leopardi si può ricostruire dagli appunti del suo Zibaldone*.
Dal Vocabolario della Lingua Italiana Treccani

Tabella 6.1 - Traccia per la presentazione orale dello zibaldone durante la sessione 1

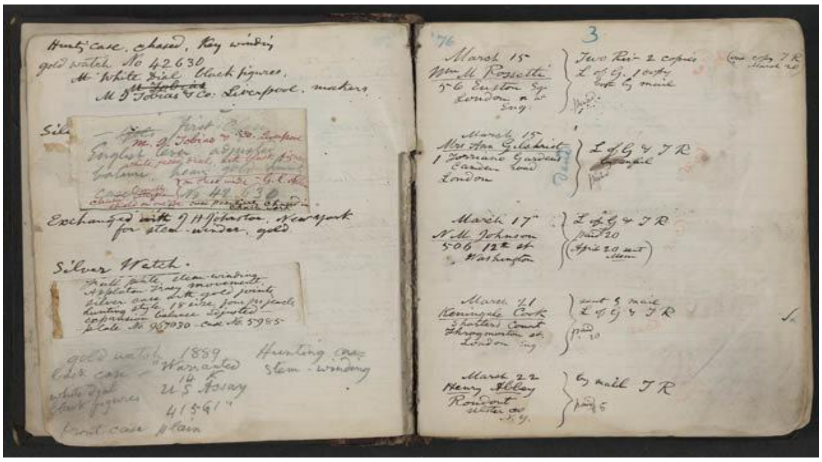


Figura 6.0.1 - Immagine del notebook di Walt Whiltman che può essere usata per presentare lo Zibaldone ai partecipanti. Si veda Giaimo 2016. È possibile menzionare agli studenti anche i quaderni dei mercanti medievali che riportavano itinerari, conti e anche enigmi e indovinelli numerici ricreativi.

A partire dallo Zibaldone ogni singolo partecipante potrà scegliere di redigere l'elaborato finale dell'Officina. Esso consisterà in un estratto delle annotazioni del proprio Zibaldone, corredato da commenti finali (ca. 3000-5000 caratteri).

b) *La lezione di matematica (ideazione ed eventuale realizzazione)*

Si tratta di ideare ed eventualmente realizzare una **lezione di matematica** con la propria classe (2 ore max), per mettere alla prova in aula alcuni dei contenuti matematici e idee-guida didattiche dell'Officina, corredata da **una breve relazione scritta** che raccolga le osservazioni e la riflessione personale su quanto potrebbe accadere [o è accaduto] **in forma narrativa** con foto, schede e/o materiali prodotti (la tabella 6.2 presenta le indicazioni da fornire ai partecipanti per la stesura della relazione).

a) Spunti per ideare la lezione Si suggerisce di dare libera espressione a un'idea concreta o a un punto critico emersi durante la realizzazione dell'Officina.
b) Come scrivere la relazione conclusiva Si invitano gli insegnanti a raccontare il proprio progetto e ciò che potrebbe avvenire [o è avvenuto] in classe, puntando alla autenticità che rende possibile la narrazione; possono essere inclusi stralci di dialogo avvenuto in classe (la "famosa conversazione matematica"), qualche foto, eventuali difficoltà, momenti di interesse e di sorpresa.
Intestazione
Titolo *Scegliere un titolo, anche evocativo, che descriva in modo sintetico la lezione.* Nome e cognome Classe
1. Le finalità della proposta *Come si colloca la sessione nel mio lavoro in classe, e a quali aspetti trattati o emersi nell'Officina si collega?*
2. La clase *Breve descrizione del contesto di classe in cui si pensa di svolgere o si è svolta la sessione scelta dell'Officina, senza dimenticare il rapporto degli alunni con la matematica.*
3. La sessione *In cosa consiste la sessione? Descrivere:* *– il tema matematico,* *– il metodo di lavoro (individuale, in gruppo o in gruppo classe), scritto, orale* *– i materiali utilizzati* *– le fasi di svolgimento ideate*
4. In aula *Raccontare come si vorrebbe svolgere [o si è svolta] la sessione: come è stata accolta dagli alunni e il modo in cui hanno agito, pensato, collaborato, risolto, eventualmente inserendo immagini o altro materiale.*
5. Conclusioni *Valutare la sessione e l'esperienza della sua ideazione [e realizzazione] ed esprimere la propria riflessione conclusiva in relazione all'Officina di geometria a cui si è partecipato.*

Tabella 6.2 - Indicazioni ai partecipanti per la traccia dell'ideazione (e realizzazione) di una lezione

2. I video di Sesdown

Tutte le attività proposte nelle varie sessioni dell'Officina possono essere svolte dai bambini con trisomia 21, con alcune facilitazioni. Nella tabella seguente sono riportate le semplificazioni da apportare alle varie sessioni dell'Officina, qualora si volessero realizzare con alunni diversamente abili.

1	All'interno di questa sessione tutte le attività possono essere svolte da ogni persona: come già descritto nella sessione sarà compito dell'insegnante dare spazio a ciascun segmento a seconda del clima della classe e dei bisogni dei bambini. Nell'esperienza diretta in classe si è potuto osservare che in particolare le attività di esplorazione dello spazio e della rappresentazione del movimento tridimensionale sul foglio sono molto utili a permettere ai bambini di sviluppare una loro idea di geometria: una geometria che vivono prima di tutto con il loro corpo. Questo lavoro nasce non solo come esigenza espressiva ma come vero e proprio laboratorio di ricerca volto ad aiutare i bambini tutti a conoscere la relazione tra scrittura e geometria: gli esercizi pensati sono stati inventati e realizzati proprio di fronte alle difficoltà dei bambini nella scrittura. Ai laboratori hanno partecipato bambini con tante e diverse difficoltà in questo senso.
2	L'attività della seconda sessione che è certamente adatta agli studenti con disabilità è quella del tracciamento dell'ellisse con il filo (*il metodo del giardiniere*). Dopo un primo tracciamento si possono variare la lunghezza del filo e la distanza tra i fuochi, e osservare che la forma delle curve cambia. Se gli studenti hanno già disegnato una circonferenza con un filo, si può osservare insieme a loro che unendo i fuochi, l'ellisse diventa una circonferenza.
3	Il percorso è inclusivo e affrontabile anche per bambini con disabilità, opportunamente guidati dai loro insegnanti e sostenuti dai loro compagni. Si tratta di attività creative e manipolative in cui conta molto lo spirito di gruppo e la capacità di partecipazione e inclusione.
4	Si può condurre senza problemi l'attività 4.2, che richiede la realizzazione del disegno in due dimensioni della costruzione tridimensionale. L'attività successiva, invece, la 4.3, che richiede la costruzione del solido a partire dalla sua visione piana, rispetto ai diversi punti di vista (frontale, posteriore, laterale, dall'alto) potrebbe presentare più difficoltà. Si consiglia di lasciar giocare gli studenti e manipolare i pezzi, di farli posizionare loro sulla plancia di gioco per costruire solidi a piacere. Quando l'esperienza e il gioco avranno reso loro familiare il concetto della profondità, sarà possibile anche la realizzazione delle attività 4.3 e 4.4.
5	La sessione 5 presenta attività realizzabili da tutti e non sono necessarie semplificazioni.
6	Le semplificazioni necessarie per la sessione 6 nel caso in cui venga proposta ad alunni con disabilità riguardano la riduzione delle richieste per ciascuna attività. Nell'attività 6.1 si richiede la costruzione di quadrati e di rettangoli: si valuti l'opportunità di chiedere agli studenti la realizzazione di figure geometriche determinate da una certa superficie. Per semplificare si potrebbe chiedere di realizzare un quadrato o un rettangolo con un certo numero di polimini, anziché considerare la superficie della forma richiesta. Nell'attività 6.2 si consiglia di concentrarsi solo su una variabile, la misura della superficie oppure quella del perimetro, e non richiedere figure di cui si deve tener conto di entrambe le variabili allo stesso tempo.
7	La sessione 7 è incentrata sulla simmetria. Le semplificazioni richieste nell'attività 7.1 riguardano la presenza di più condizioni da soddisfare contemporaneamente. Ci si concentrerà sulla capacità di discriminare le figure simmetriche da quelle non simmetriche, evitando di parlare di assi di simmetria o di simmetria per rotazione. Quindi si potrà chiedere di costruire semplici figure simmetriche senza specificare rispetto a quanti assi.

Tabella 6.3 – Eventuali semplificazioni per bambini con trisomia 21, distinte per sessione

6.3. Impatto previsto del laboratorio sul futuro insegnamento dei partecipanti

Negli oggetti geometrici e nelle relazioni geometriche sono contenute le esperienze corporee primordiali: tra queste la relazione dell'essere umano con il mondo fisico circostante e la capacità di creare manufatti, di costruire e intervenire sull'ambiente circostante dandogli forma e misura, di esprimere armonia e bellezza. L'Officina fa leva su queste possibilità per far immaginare ai partecipanti un valore educativo della matematica per tutti, che contribuisce a sviluppare capacità cognitive (confronti, trasformazioni ed equivalenze, scomposizioni), di mimesi, linguistiche.

Si spera che l'Officina riesca a trasmettere ai partecipanti l'urgenza di offrire la matematica a tutti. Accolta tale urgenza, il docente in servizio (o il futuro insegnante) potrà riproporre queste o altre attività geometriche in classe, avendo la cura di adattare le attività che sembrano troppo complesse, dividendole in più parti o guidandole in modo più presente. È infatti importante prendere per mano ogni persona che entra in contatto con la geometria e camminare insieme attraverso scoperte e illuminazioni, focalizzando l'attenzione più sul nutrire la propria esperienza di vita che non sul raggiungere un punto di arrivo. Ciò vale sia per i bambini e gli studenti che sperimenteranno queste proposte, sia per gli insegnanti formatori che si troveranno a lavorare con insegnanti in servizio e futuri tali.

Adottando questa prospettiva si lavora sulla formazione della persona, sul suo relazionarsi con gli altri e, sottotraccia, si lavora anche sull'acquisizione di quei concetti e di quelle esperienze che davvero permettono di "capire meglio" la matematica.

Di seguito si elencano alcuni aspetti che sono emersi nelle realizzazioni e nelle sperimentazioni dell'Officina:

– un atteggiamento di maggiore autonomia rispetto ai contenuti specifici del curriculum nella scuola primaria, nel discernimento su ciò che è cruciale e ciò che è accessorio. Per esempio, hanno perso la centralità nella visione complessiva della geometria:

- le classificazioni (degli angoli, dei triangoli, dei quadrilateri, persino delle rette!)
- il riconoscimento e la discriminazione di figure (come triangolo, rettangolo, quadrato e cerchio nella scuola dell'infanzia e in classe prima)
- le formule di aree, perimetri e volumi

– il coraggio di osare, quindi, affrontando anche argomenti poco usuali per la scuola primaria, come le curve coniche, proponendone solo alcuni elementi, opportunamente distillati, come il tracciamento con fili e matite.

– alla paura di sbagliare o all'astio verso la disciplina è subentrato un insegnamento della matematica con fiducia e spirito di iniziativa, con il piacere di insegnarla e con l'entusiasmo per le opportunità formative che essa offre

– la scoperta della geometria come chiave per allacciare la matematica a esperienze corporee e al mondo circostante.

6.4. Struttura dell'officina[26]

La sessione 1 ha un ruolo introduttivo, introduce l'espressione come tema di fondo dell'officina e la consapevolezza del ruolo nel corpo nell'universo della geometria elementare. È l'unica sessione che ha una durata di 3 ore (anziché 2), poiché la sua natura richiede un tempo e uno spazio maggiore delle altre sessioni. In essa viene presentato lo Zibaldone che può essere utilizzato come strumento per accompagnare la partecipazione alle sessioni e come strumento di verifica finale.

La sessione 4 ha come tema la geometria solida, in un percorso che è centrato principalmente sulla geometria piana, in linea con la consuetudine nei curricula della scuola primaria e dell'infanzia. Le sessioni da 1 a 3 utilizzano materiali fisici, mentre le sessioni da 4 a 7 utilizzano due giochi da tavolo prodotti in Italia, La Boca (sessione 4) e Polyminix (sessioni 5-7), acquistabile contattando emanuele@creativamente.eu

Sessione 1	*Movimento, espressione e geometria*
Sessione 2	*Costruire i quadrati… con quel che capita!*
Sessione 3	*Tendere corde per disegnare curve*
Sessione 4	*Tu come la vedi? Dal solido al piano e viceversa*
Sessione 5	*Tassellare e misurare con i polimini*
Sessione 6	*Costruire figure con i polimini*
Sessione 7	La meraviglia della simmetria e la sfida dei problemi

6.7. Descrizione dettagliata delle sessione

[26] Nel momento dell'adesione all'Officina si riceverà il link per compilare il questionario conoscitivo Q6, progettato e distribuito agli insegnanti in formazione in Spagna, Francia e Italia nell'ambito del progetto ANFoMAM (https://www.unavarra.es/anfomam). Il testo completo e l'analisi dei risultati possono essere trovati in *Perché la matematica nella scuola dell'infanzia e nella scuola primaria. Insegnanti in formazione iniziale e in servizio di fronte all'universo matematico* https://hdl.handle.net/2454/42411. Il formatore di ogni singola sessione terrà conto delle risposte che emergeranno come punto di partenza per impostare il dialogo con i partecipanti.

Sessione 1: movimento, espressione e geometria

Questa sessione prevede principalmente attività in movimento nello spazio. L'aspetto di esplorazione geometrica è fortemente connesso all'aspetto espressivo. È dunque possibile collegare questo lavoro ad altri campi di studio (lingua, arte, educazione motoria). L'attività proposta è stata sperimentata con:

- studenti del CDL "Scienze della Formazione Primaria"
- insegnanti in servizio
- studenti di scuola primaria e secondaria di primo grado.

La proposta di questa sequenza operativa nasce da un lavoro di ricerca iniziato nel 2012 all'interno del CDL "Scienze della Formazione Primaria" dell'Università di Roma Tre e portato avanti dalla prof.ssa Ana Maria Millán Gasca e dalla dott.ssa Francesca Neri Macchiaverna, oggi docente di scuola primaria. Il lavoro di ricerca - presentato e condiviso in diverse occasioni e tutt'ora attivo - riguarda due ambiti:

- la presenza scenica dell'insegnante e il lavoro su se stesso[27]
- l'insegnamento della matematica attraverso la danza, la musica e il racconto[28].

Il lavoro qui presentato fa quindi parte di un lavoro di ricerca più ampio e riguarda qui principalmente gli aspetti geometrici.Connettere la geometria alla propria esperienza di vita più fondante, ovvero il muoversi nello spazio, relazionandosi, confrontandosi con gli elementi in esso contenuti è un'avventura a cui ognuno dovrebbe essere avviato fin da bambino.

Il movimento è espressione ma anche immaginazione: attraverso questo lavoro è possibile lavorare su ciò che molto spesso rileviamo come problematico nelle classi, ossia la capacità di ragionare, manipolare, muovere elementi geometrici.

In questa proposta è essenziale il ruolo degli enti geometrici fondamentali come "motori" per la costruzione della geometria: sia nella scrittura sia nel disegno è importante far emergere questo ruolo motore.

Scopo della sessione

Lo scopo della sessione è incorporare concetti geometrici (in particolare gli enti geometrici fondamentali) e saggiare la loro connessione con l'apprendimento della letto-scrittura.

---

27 Si veda *La presenza scenica nel lavoro dell'insegnante della scuola primaria e dell'infanzia. Una proposta operativa* (2014) Neri_Presenza scenica_testo finale (uniroma3.it)

Insegnanti: 12 ore in sala teatro Gesto voce drammaturgia racconto di un'esperienza (2016) Microsoft Word - Neri Machiaverna_21.11.16.doc (uniroma3.it)

28 Si veda *Storia e racconto nella Matematica della scuola primaria: basi didattiche e sequenza operativa* (2017) Annali online della Didattica e della Formazione Docente (unife.it)

Si veda "La matematica in mostra" in "Memoria, inclusione e fruizione del patrimonio culturale" Memoria, inclusione e fruizione del patrimonio culturale (edizioniesi.it)

Si veda Neri Macchiaverna - La storia nell'incontro dei bambini con la matematica (laboratorio) all'interno del Convegno "Matematica e Storia" nel Liceo Matematico Ferrara, 10-11 dicembre 2020

15. Neri Macchiaverna - La storia nell'incontro dei bambini con la matematica (laboratorio) - YouTube

Metodologia didattica

La sessione sarà articolata attraverso attività in movimento, attività sul foglio e attività di condivisione ed elaborazione collettiva. Il docente prediligerà i momenti di discussione e conversazione, ponendo domande, riformulando gli interventi ascoltati che utilizzerà come perno per guidare la conversazione e per porre l'attenzione su determinati aspetti.

Materiali

Per il docente:

- flauto dolce o tastiera (necessari solo per suonare note singole a differenti altezze, non è necessaria una conoscenza musicale approfondita)
- musica[29]

Per i partecipanti:

- fogli A4 e A3
- fogli di ampia metratura
- pennelli di diversa grandezza, pennarelli, colori a cera, tempera

Tabella dettagliata della sessione

Attività 1.1	Il corpo nello spazio	1 ora
Attività 1.2	Dallo spazio al foglio	1 ora
Attività 1.3	Discussione	20 minuti
Attività 1.4	Dallo spazio, al foglio...alla scrittura	30 minuti
Attività 1.5	Discussione finale	10 minuti

NB: Per il particolare contenuto della sessione si prevedono 3 ore anziché 2 come per le altre sessioni.

Attività 1.1: Il corpo nello spazio (1 ora)

Questa attività prevede una serie di diversi esercizi. Il fine primo di questa sessione è quello di far entrare in comunicazione il corpo con lo spazio, creare un buon livello di attenzione concentrazione nel gruppo e far si che questa esperienza si configuri come autentica e profonda: in poche parole la *conditio sine qua non* per l'avvio dell'attività è l'essere "qui e ora" dei partecipanti. Senza questo stato sarà difficile per ognuno sperimentare l'esperienza estetica della geometria. Per questo motivo non c'è da stupirsi se molto spazio viene dato al riscaldamento: ciò è necessario proprio per far entrare i partecipanti in un territorio sconosciuto, dove è importante fidarsi e lasciarsi guidare.

29 Per le diverse sezioni si è utilizzata questa musica:
Air-Moon Safari La femme d'argent - Air - Deezer
Beach House- Bloom Myth - Beach House - Deezer
Nature sounds-Rain on Leaves - Tranquil Journeys - Deezer
Rokia Traorè- Wanita Kanan neni - Rokia Traoré - Deezer
Ravel- Bolero

A. Riscaldamento (30 minuti)

In un ambiente sonoro rilassante il docente accoglie i partecipanti che si dispongono in cerchio. Si spiega che si inizierà subito con un lavoro corporeo e si chiede ai partecipanti di utilizzare una postura comoda: piedi leggermente separati e corrispondenti alla larghezza delle spalle, ginocchia leggermente piegate, spalle rilassate, mani distese sotto l'ombelico.
Mentre piano piano, il volume della musica si abbassa, il docente guida l'esercizio di respirazione.

1 - respirazione (15 minuti)

- chiudere gli occhi
- respirare sentendo la pancia che si gonfia e si sgonfia
- immaginare che l'aria immessa faccia diversi percorsi nel corpo: scenda attraverso la spina dorsale arrivando fino ai piedi, vada nella testa, arrivi fino alle dita della mano, ecc
- iniziare a ispirare con il naso ed espirare con la bocca, espirare sgonfiando tutta la pancia
- dopo dieci respirazioni chiedere di emettere il suono "a" nell'espirazione
- dopo dieci espirazioni con il suono "a" rialzare leggermente il volume della musica e chiedere ai partecipanti di aprire lentamente gli occhi

2 - riscaldamento energetico (5 minuti)

Il docente chiede ai partecipanti di osservare i suoi movimenti e di copiarli:

- muovere i muscoli facciali
- picchiettare con i polpastrelli la sommità del capo, il collo e le spalle
- dare dei piccoli pugni a polso morbido su: braccia, spalle, torace
- massaggiare la zona dell'ombelico e parte sottostante
- dare dei piccoli pugni a polso morbido su: zona lombare, fianchi, gambe, piedi.

3 - riscaldamento espressivo (10 minuti)

Il docente chiede di immaginare di avere una piuma che disegna qualcosa nell'aria. La piuma viene passata di partecipante in partecipante seguendo il perimetro della circonferenza. Nella seconda fase si chiede, seguendo l'idea della piuma, di pronunciare il proprio nome creando movimenti semplici che ogni partecipante ha poi il compito di "passare" al partecipante che si trova accanto senza utilizzare le parole.

B. Esplorando lo spazio (30 minuti)

Nella prima fase il docente chiede di uscire dal cerchio e di iniziare a camminare nello spazio facendo attenzione ad articolare bene il piede sul pavimento. Ogni partecipante dovrà camminare occupando tutto lo spazio a disposizione in modo da non lasciare spazio vuoto. Quando incontrerà un altro partecipante dovrà agganciare il suo sguardo. Ogni tanto ogni partecipante può fermarsi in un punto, chiudere gli occhi e "ascoltare lo spazio". Verrà fornita l'immagine del piano su cui tracciare linee e punti.

Nella seconda fase si pone maggiore attenzione al tracciare. L'input a muovere tutto il corpo è dato dallo sguardo: prima gli occhi tracciano un percorso lineare e poi tutto il corpo segue questo percorso. Lo sguardo traccia linee rette, ogni volta che il corpo e lo sguardo si fermano si cambia direzione. Lo stesso principio si adotta con input di diverso tipo: il corpo si muove su linee rette seguendo l'impulso di testa, braccia, gomiti, bacino.

In questo esercizio, oltre all'attenzione al tracciare e all'immaginarsi "scivolare" su un piano, è molto importante l'aspetto della condivisione dello spazio. L'attenzione, infatti, è anche attivata in una "sfera" intorno ad ogni partecipante che deve gestire lo spazio e la possibilità di muoversi concordandola, senza parlare, con gli altri partecipanti.

Risposta attesa dai partecipanti

La proposta di questa sequenza operativa trae origine da anni di insegnamento nel campo espressivo con adulti. Nella pratica si è toccata con mano la necessità di guidare passo passo i partecipanti a lasciar andare le proprie resistenze e a spostare il focus attentivo dal solo pensiero alla percezione del mondo fenomenico attraverso il corpo. L'obiettivo è quello di riscoprire la dimensione esplorativa e darle valore in quanto tale, sganciata da qualsiasi traguardo o finalità: dare spazio all'espressione del sé dalla quale può nascere la consapevolezza matematica. L'esperienza estetica matematica può nascere solo dal piacere della scoperta in questo senso. Gli studenti e gli insegnanti in servizio rilevano essi stessi questo passaggio come fondamentale e lo valorizzano anche come esperienza intima necessaria e fondamentale come emerso dal racconto di una studentessa CDL Formazione Primaria (Laboratorio di Matematica e Didattica della Matematica 2018-19):

> *"Proprio per questo ho apprezzato tantissimo il lavoro del primo incontro: quello che la Professoressa ha chiamato il "calarsi dentro".*
> *Cos'è il calarsi dentro?*
> *Più a facile a farsi che non a dirsi.*
> *Ci siamo fermati. Abbiamo chiuso gli occhi e riconciliato il ritmo del nostro respiro con il silenzio. E poi è iniziato, piano, piano, poi sempre più forte, all'esterno e poi dentro di noi: il Bolero di Ravel si è impossessato di noi, sotto la forma di un vento immaginario, che io almeno ho immaginato caldo, che entrava nel nostro corpo e lo agitava. Il vento, come la voce della Professoressa ci spiegava, doveva entrare dentro di noi scendere lungo il nostro corpo e in un certo senso impossessarsi di quella parte, farla vivere per alcuni lunghi istanti quasi indipendentemente dal resto. Poi quel vento doveva posizionarsi in un punto specifico del nostro corpo. Nel mio caso il vento stava esattamente tra il diaframma e l'ombelico. A questo punto il vento doveva muovere quella parte del corpo: è stato piuttosto divertente muovere tipo serpente solo l'addome e quasi sentire il diaframma muoversi sopra e sotto; e indubbiamente è stato rasserenante prendersi questa lunga pausa da tutto il resto del mondo. I primi istanti, nel silenzio, quando il Bolero era appena iniziato mi sono chiesta cosa stessimo facendo e ho tentato anche di dare delle risposte: matematica e musica, la bellezza del ritmo, la ripetizione costante del respiro e del ritmo del Bolero. Cercavo di vedere i nessi tra la matematica e la musica; qualcosa che mi era già capitato di fare quando avevo dato l'esame con Pozzi. Piano piano, comunque, tutte le riflessioni e i pensieri sono strati sopraffatti dal vento e da Ravel.*
> *Ero dentro di me: un viaggio accompagnato dalla musica all'interno del corpo, all'interno di un organismo "creato" con una certa perfezione dalla natura.*
> *Ascoltare il nostro ritmo, il nostro cuore, il nostro respiro, sentire ogni singola parte del corpo e muoverla, manovrarla, fino quasi a possederla interamente, o immaginare di poterla possedere e manovrare oltre quelle che sono le reali possibilità fisiologiche di poter fare tutto questo.*
> *Questo è quello che ho provato, una sensazione strana, non del tutto nuova; mi ha ricordato delle lezioni di posturale fatte qualche anno fa.*
> *Ma cosa c'entra tutto questo con la matematica? Alla fine dell'esperienza è arrivata la spiegazione della Professoressa: il calarsi dentro.*

Vediamo di riassumere cosa vuol dire.
In sintesi è un modo per entrare nel contesto che si sta vivendo, per vivere a fondo un'esperienza; è un invito a vivere con tutto il proprio corpo l'attività che si sta compiendo, a prendere consapevolezza del proprio corpo.
Il corpo è uno dei due temi fondamentali del laboratorio che punta proprio ad una matematica "embodied". Il primo a dover incorporare la matematica e a renderla corporea è chi la insegna: ecco quindi la centralità del calarsi dentro. Dentro la matematica e dentro il proprio corpo.
Non a caso la prima parte del laboratorio è stato un riscaldamento di quel corpo, che ci sarebbe servito per la seconda parte del laboratorio per tirare fuori la matematica dai gesti. In un certo senso il percorso che abbiamo fatto durante il primo incontro è stato proprio entrare nel proprio corpo per portare in un secondo tempo fuori dal corpo la matematica".

Figura 6.1.1 - Esercizio di respirazione, corso di formazione con insegnanti in servizio IC Don Andrea Santoro - Prverno, a.s. 2017-2018

Figura 6.1.2 - Esercizio per lo sguardo, corso di formazione con insegnanti in servizio IC Don Andrea Santoro - Priverno, a.s. 2017-2018

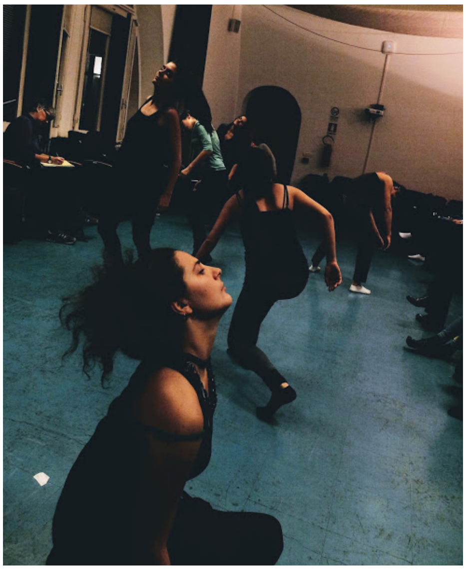


Figura 6.1.3 - Esercizio sulla testa come motore del movimento, Master Pedagogia dell'Espressione a.a. 2017-2018, Università Roma Tre

Esperienza con i bambini

Questa fase "preparatoria" ha molta importanza anche nel lavoro con i bambini. A seconda delle fasce di età il lavoro ha delle valenze diverse: per i bambini più piccoli, solitamente, è più semplice avere un atteggiamento esplorativo e aperto ma è più difficile rimanere centrati sulle richieste e, in un certo senso, farsi guidare; i bambini più grandi e i ragazzi potrebbero avere esigenze simili a quelle degli adulti. In entrambi i casi un lavoro approfondito di connessione con il respiro e con il corpo è la chiave per guidare i bambini in questa esperienza.

Il lavoro è stato svolto con bambini-ragazzi della fascia di età 3-14 anni ed è stato accolto sempre con curiosità, a seconda delle difficoltà anche emotive dei singoli è stato necessario più o meno tempo per entrare a pieno nell'attività: una indicazione sicuramente da tenere ben a mente consiste nel modulare i tempi affinché ognuno abbia la possibilità di entrare nell'attività nel rispetto delle proprie necessità. Essendo un lavoro che coinvolge molto le persone a livello esistenziale ciò è molto importante.

Un altro elemento fondamentale che emerge più chiaramente nel lavoro con i bambini-ragazzi ma presente anche nel lavoro con gli adulti è l'aspetto gioioso ed energetico. Dopo questo riscaldamento, i visi si fanno più distesi e gli sguardi più pronti a relazionarsi.

rogenea,

Figura 6.1.4 - Tracciare linee con diverse parti del corpo, classe prima,

IC Via Cutigliano a.s. 2017-2018

Questo aspetto si coglie con una semplice osservazione del viso e della postura.

Attività 1.2: Dallo spazio al foglio (1 ora)

A. Rappresentare il movimento: dalla tridimensione alla bidimensione (20 minuti)

1 – Il docente pone un grande foglio bianco a terra, abbastanza grande da ricoprire tutto il pavimento. I partecipanti, muniti di pennarelli a punta grossa o di colori a cera, dovranno muoversi sul pavimento ricostruendo i movimenti che ricordano di aver effettuato.

2 - Il docente distribuisce fogli A3 ad ogni partecipante e chiede di concentrarsi sulle sequenze di movimento effettuate "linea retta-punto-cambio di direzione" e di rappresentarle sul foglio.

B. Dettato sonoro (20 minuti)

Il docente suona il flauto (o la tastiera) e chiede di muovere tutto il corpo seguendo queste indicazioni:

- silenzio = stasi
- suono = movimento,
- con i suoni acuti il movimento è verso l'alto, con i suoni gravi il movimento è verso il basso.

Vengono distribuiti fogli A3 e pennarelli ai partecipanti e si chiede loro di tracciare linee sul foglio:

- silenzio = stasi, tracciare un punto
- suono = movimento, tracciare una linea

Il docente chiede di tracciare linee sul foglio:

- silenzio=stasi, tracciare un punto
- suono=movimento, tracciare una linea

Ogni volta che c'è un silenzio il docente cambierà l'altezza del suono, alternando suoni acuti a suoni gravi. La conseguenza sarà che anche graficamente si cambierà direzione come nella foto che segue.

Risposta attesa dai partecipanti

Anche queste attività sono state sperimentate sia con adulti che con i bambini. Per quanto riguarda gli adulti è necessario tenere sempre vivo il fuoco sull'esplorazione in più possibile libera dall'auto giudizio: man mano che gli esercizi si fanno meno esplorativi ma più strutturati c'è il rischio che la persona perda facilmente il piacere estetico-esplorativo e si concentri più sul "compito" . Questa è una cosa da evitare perché ci discosterebbe dal nostro intento e cioè quello di offrire la possibilità di fare un'esperienza estetica matematica. In questo senso è possibile chiedere di svolgere gli esercizi ad occhi chiusi oppure riprendere qualche esercizio più esplorativo, rassicurare i partecipanti e invitarli al non giudizio. Fondamentale è chiedere ai partecipanti di immaginarsi bambini e di cercare di vivere l'esperienza "come se" fossero piccoli.

Un aspetto da mettere a fuoco è quello relativo all'esperienza della matematica incorporata non come "opzione" ma come presupposto fondamentale alla conoscenza come mette ben in luce questa studentessa (CDL Formazione Primaria Laboratorio di Matematica e Didattica della Matematica 2018-19):

> *Nel cercare di mettere insieme la geometria e il movimento, insito nell'uomo, un espediente comune è la musica. Fonte di inesauribili emozioni, accompagna con i suoi alti e bassi suoni, lenti e veloci ritmi il movimento. Nel trascrivere, nel disegnare o meglio nel tradurre il suono nel movimento, il corpo tutto si fa strumento. Esso si sospende in balia del suono e del movimento.*
> *Il ritmo genera movimento che genera segni.*
>
> *Ma i segni che ognuno di noi ha generato sono stati tutti uguali? No, ma identici nella loro struttura. La musica infatti suscita emozioni con intensità diversa e movimenti pari all'emozione che ognuno prova. È impossibile non provare l'emozione seppur con intensità differente.*
> *Il movimento è segno che è la manifestazione dell'emozione.*
> *Il movimento cambia seguendo la musica : si ferma, si incurva, va avanti, torna indietro, si alza e si abbassa, linee, forme. Non è forse geometria? Non è forse matematica?*
> *È la matematica e la geometria non "imparata" ma "acquisita", "costruita" attraverso l'esperienza vissuta e semplificata nel concetto, nell'idea e nella rappresentazione. Si impara facendo e sperimentando e non assimilando nozioni e concetti.*

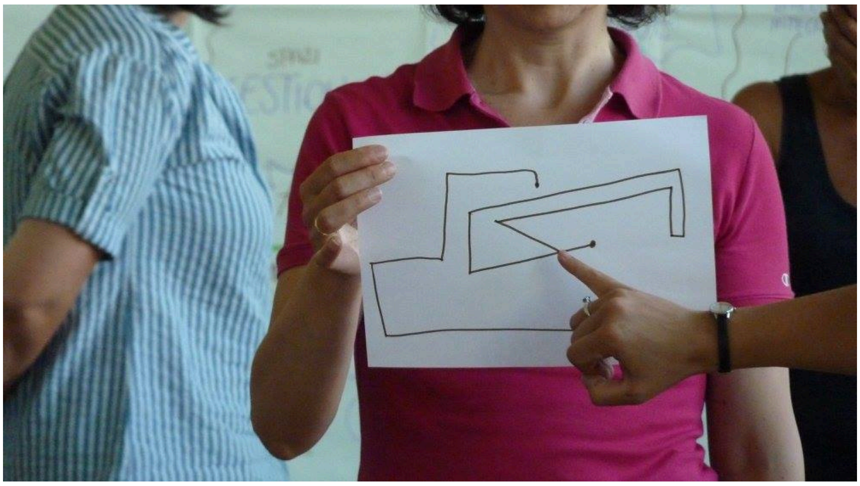


Figura 6.1.6 Dalla tridimensione alla bidimensione, una insegnante rappresenta il proprio percorso, corso di formazione per insegnanti in servizio, IC Don Andrea Santoro - Priverno, a.s. 2017-2018

Figura 6.1.7 Dalla tridimensione alla bidimensione, corso di formazione per insegnanti in servizio, IC Don Andrea Santoro, Priverno, a.s. 2017-2018

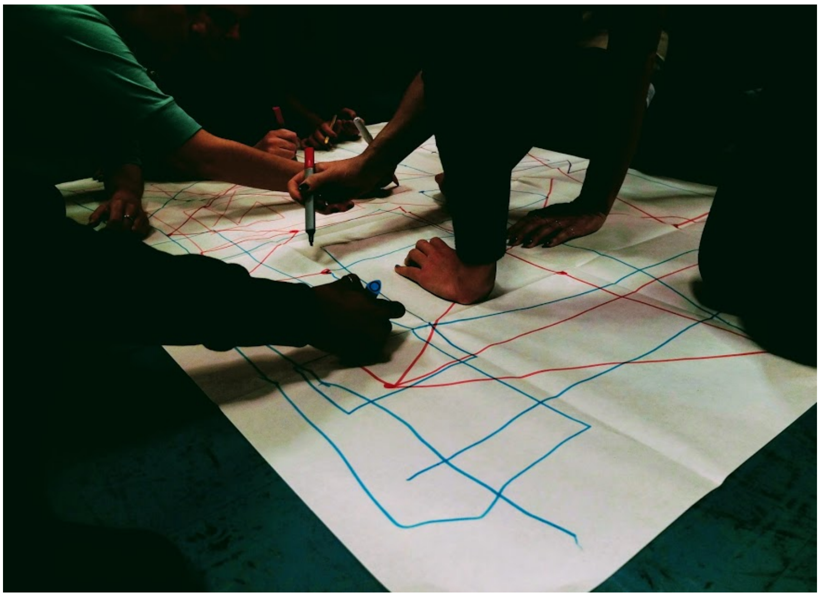


Figura 6.1.7 Dalla tridimensione alla bidimensione: rappresentazione collettiva dei percorsi, Master Pedagogia dell'Espressione, Università Roma Tre, a.a. 2018-19

Esperienza con i bambini

Queste attività sono state anche proposte e portate avanti con bambini dai tre ai quattordici anni. Le attività sono molto strutturate: c'è quindi meno il rischio che l'attenzione si disperda. Solitamente alcuni bambini necessitano di maggior tempo per comprendere la richiesta e la guida, in questi casi è necessario dare loro il tempo necessario per entrare nell'esercizio, cosa che riescono a fare anche condividendo, guardando gli altri e prendendo i suggerimenti e gli incoraggiamenti degli insegnanti. É importante mantenere un atteggiamento di non giudizio e lasciare il tempo e lo spazio necessari a trovare la propria strada.

Figura 6.1.8 Dettato sonoro: stasi-movimento (silenzio-suono) IC Via Ceneda, a.s. 2018-2019

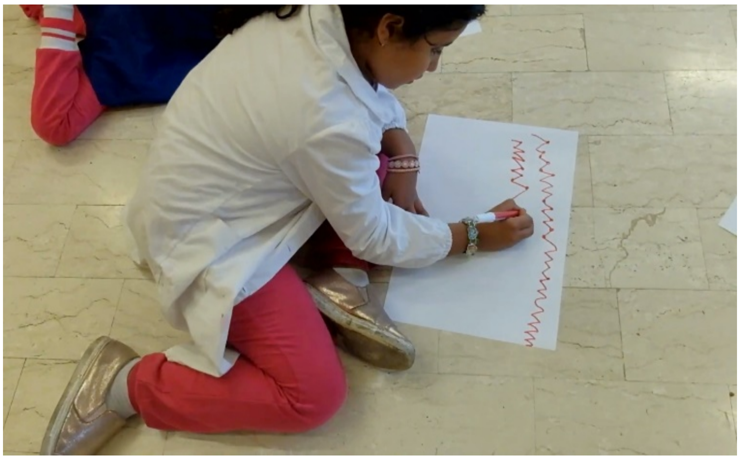


Figura 6.1.9 Una bambina effettua il dettato sonoro, IC Via Cutigliano a.s. 2017-2018

Attività 1.3: Discussione (20 minuti)

Il docente chiede ai partecipanti di individuare gli elementi geometrici rappresentati e di farne una lista condivisa, anche mettendo a fuoco:

– le proprie sensazioni fisiche ed emozionali relative agli esercizi svolti
– i possibili scenari e implicazioni didattiche di questo lavoro in classe

Si commenta e si cerca di individuare le connessioni tra gli elementi riportati.

Risposta attesa dai partecipanti

Nelle esperienze con insegnanti in servizio e con studenti del CDL Scienze della Formazione Primaria è stato utile chiedere la scrittura dello "Zibaldone"[30], questo diario libero in cui annotare pensieri, riflessioni, connessioni. L'utilizzo di questo strumento è stato molto importante per dare origine alla discussione ma, soprattutto, per lasciare traccia dell'esperienza. Nella figura 6.1.11 è riportata la descrizione dell'esperienza nello spazio di una studentessa del CDL di Formazione Primaria.

Figura 6.1.10 - Una studentessa del CDL Scienze della Formazione Primaria rielabora nel suo zibaldone la sua esperienza nello spazio. Il pallino rosso indica la posizione dell'insegnante, a.a.2018-2019

Esperienza con i bambini

Anche ai bambini è stata proposta la scrittura di uno zibaldone, generalmente chiamato "diario di bordo". In questo ambito è ancora più importante per fissare delle intuizioni o delle idee che possono essere poi scritte alla lavagna o su un grande foglio in modo da potere visualizzare e poter ragionare mettendo soprattutto in luce, le emozioni, i diversi punti di vista e le connessioni.

Figura 6.1.11 - Una bambina rielabora il suo percorso rappresentato nel diario di bordo,

IC Via Cutigliano, a.s. 2017-2018

30 Si è parlato ampiamente dello Zibaldone nella presentazione di questa Officina (par. 3).

Attività 1.4: Dallo spazio, al foglio...alla scrittura (30 minuti)

A. Riga rossa, riga blu

Il docente divide i partecipanti in coppie, chiede a ciascuna coppia di porre uno accanto all'altro due fogli A3 e distribuisce due pennelli, due bicchieri di tempera blu e rossa a ciascuna coppia. Si chiede di tracciare estemporaneamente sul foglio ciò che il docente andrà a leggere a breve, ovvero il testo "Riga rossa, riga blu" [31].

Alla fine della lettura ogni coppia mostra il proprio lavoro agli altri.
Il docente chiede di analizzare i dipinti creati e di individuare tutti gli elementi geometrici emersi.

B. Scrivere è disegnare

1 – Il docente distribuisce altri fogli A4, chiede di ricavarne un quadrato e di dividerlo in sedici parti uguali.
Utilizzando il dettato sonoro chiede di tracciare linee rette sulle piegature formatesi.
Attraverso il dettato vengono scritte le seguenti lettere: I, M.
Il docente allora chiede di eseguire lo stesso esercizio ma su altri due fogli:

- uno in cui si sono disegnati punti nell'intersezione tra le rette perpendicolari (una sorta di geopiano)
- uno in cui si siano tracciate linee rette nelle piegature della carta.

Si chiede di eseguire lo stesso esercizio su un foglio bianco e successivamente di eseguirlo solo con la mano non dominante.

2 - Dopo questa esperienza il docente illustra la possibilità di lavorare sui versi di scrittura e sui punti di ancoraggio e sottolinea l'importanza di far emergere "consapevolezza geometrica" attraverso il tracciare.

Risposta attesa dai partecipanti

Queste due attività si configurano come un'attività di esplorazione (A) e di analisi (B). Entrambi i lavori sono necessari per comprendere la connessione del gesto con la scrittura e la geometria. Questa connessione è qualcosa che va compresa non solo razionalmente ma anche attraverso il proprio sentire estetico per poter comprenderla fino in fondo.

Si riporta il commento di una studentessa del CDL "Scienze della formazione Primaria" che mette in evidenza il suo coinvolgimento nell'attività:

31 La storia è visionabile a questo link: RIGA ROSSA, RIGA BLU - YouTube

"Divisi in coppie, con due fogli uno davanti all'altro, munite di pennelli e tempere iniziamo il viaggio. Chi dipinge con il blu, immagina e registra i movimenti della linea blu e chi ha il pennello nel rosso quelli della linea rossa. Ahimè, mi finisce il colore! È difficile reperire del rosso senza disturbare la narrazione e l'atmosfera splendida che si è creata. Non basta il foglio, mi verrebbe da disegnare sul pavimento, vorrei incontrare la linea blu sul foglio attiguo, faccio capolino e ci viaggio parallela al fianco. Poi, chiedendo il permesso con lo sguardo, oltrepasso il bordo del mio foglio e mi interseco con la retta blu. Presto, me ne torno a segmentare sul mio piccolo mezzo foglio, col pennello nuovamente asciutto, il pavimento che non posso violare e la voglia di una retta che solo in brevi istanti ha provato l'ebrezza di essere tale! Ci ho messo un po' a sciogliermi, ma alla fine non ho resistito più alla voglia di esprimermi"

Figura 6.1.12 - Due studentesse del CDL Scienze della Formazione Primaria lavorano a coppia su "Riga rossa riga blu", a.a.2018-2019

L'attività B permette di analizzare il processo e di mettersi davvero nei panni dei bambini per poterne comprendere le difficoltà ma anche le scoperte.
A tal proposito si riportano qui due interessanti commenti di studentesse del CDL "Scienze della formazione Primaria" su questa ultima proposta:

"è difficile tenere il pennello con la mano sinistra, sfugge e il tratto è impreciso, tremolante, è stato così difficile imparare a scrivere? Difficile no, ma sicuramente non è semplice...all'inizio e le sensazioni negative sono tante quando pensi di star facendo bene e sul foglio ti ritrovi dei segnacci, è giusto che l'insegnante faccia emergere una sensibilità pedagogica, quella che permetterà al bambino di imparare a scrivere, anche faticando, ma senza mai pensare di non potercela fare".

"Dopo aver lavorato sul foglio contrassegnato da linee e rispettivi punti di ancoraggio, la mano ha riprodotto fluidamente il movimento sul foglio bianco. Non meno interessante è stato lavorare sul geopiano che avevamo creato, ho notato come una costellazione di punti possa richiamare in ognuno combinazioni di linee differenti. Alla fine, la complessità della geometria sembra redimersi nella densità concentrata dei punti che generano linee, che intersecandosi danno vita a figure, che più sono irregolari, più incuriosiscono! Insomma, al principio scrivere cifre e lettere non è poi una cosa così scontata! Il tema della direzione del segno lo ha dimostrato chiaramente. Per i destrimani, come me, simularsi mancini è un agire

faticoso, unica certezza è che gli occhi non devono mai essere ostacolati nella visione del segno nascente. Scrivere partendo da sopra, da sotto, da destra da sinistra, mi ha un po' confuso le idee… eppure, è importante osservare le traiettorie dei segni: se prendesse le strade sbagliate, potrebbero metterci un bel po' prima di arrivare!"

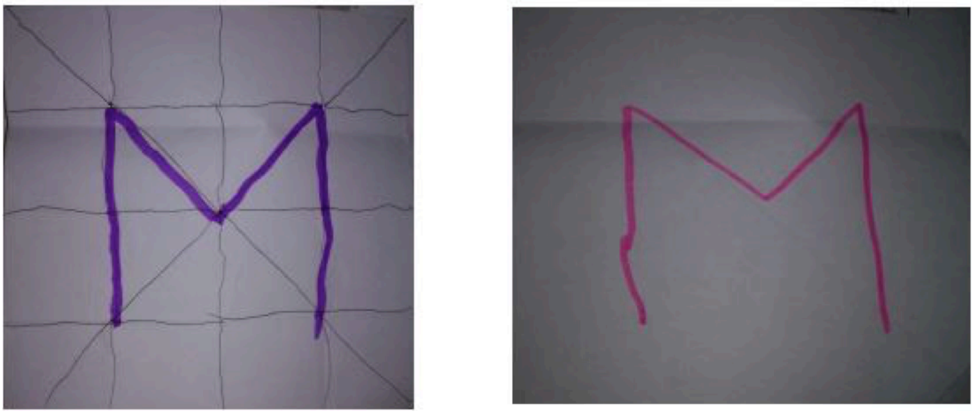


Figura 6.1.13 Punti di ancoraggio, griglie e scrittura, CDL Formazione Primaria a.a. 2018-2019

Esperienza (eventuale) con i bambini

Il testo "Riga rossa, riga blu" è molto amato dai bambini. Si possono scegliere diverse modalità di lavoro a seconda delle esperienze che si stanno facendo in classe. Negli anni è stato molto utile, ad esempio, proporre lavoro individuale leggendo il testo due volte: la prima volta il bambino si immedesimava in riga blu seguendo il testo e dipingendo estemporaneamente sul foglio; la seconda volta si compieva lo stesso processo ma seguendo il "personaggio" riga rossa.

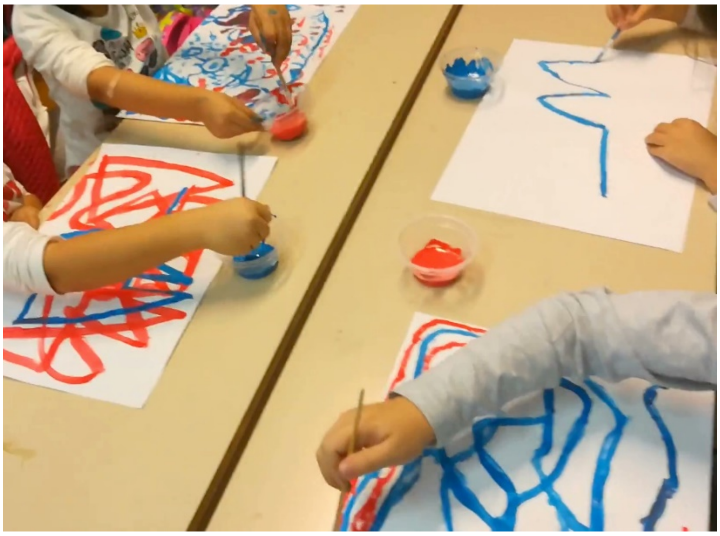


Figura 6.1.14 Un gruppo di bambini lavora su "Riga rossa, riga blu", IC Via Ceneda, a.s. 2018-2019

Anche le attività di analisi sono molto utili specialmente nell'avvio della scrittura e riguardo, in particolare, ai versi di scrittura. Il lavoro precedente che ho definito "grafica motoria" oltre a creare consapevolezza nel gesto, vuole coltivare il piacere estetico e geometrico nel riprodurre rette, punti, curve.

Attività 5: Discussione finale (10 minuti)

Il docente chiede ai partecipanti di mettere a fuoco:

- le proprie riflessioni relative agli esercizi svolti
- i possibili scenari e implicazioni didattiche dei diversi esercizi proposti, in classe.

Il docente commenta e individua le connessioni tra gli elementi riportati.

Risposta attesa dai partecipanti

Il momento finale è sempre un passaggio da tenere in forte considerazione. È importante per fare un resoconto, mettere a fuoco, condividere e arricchirsi per portare le esperienze vissute nella vita di classe. Oltre a verbalizzare le proprie esperienze, negli anni, ho sviluppato alcuni esercizi che volevo fungessero come una sorta di rituale per chiudere questo cammino svolto insieme.

Di seguito, ad esempio, riporto il racconto di uno studente dell'esperienza svolta presso il CDL Scienze della Formazione Primaria che riguarda la lettura condivisa e anonima di stralci di zibaldoni:

> *"La Professoressa apre la lezione dicendoci che alla fine della giornata leggeremo, in forma anonima, parte degli Zibaldoni delle prime due lezioni scritti da noi. Si complimenta con la nostra mano, dicendoci che è una delle prime volte che ha letto Zibaldoni scritti così bene. Questa è una cosa bellissima, l'ho detto che sentivo un rapporto particolare con i colleghi anche se non ci conoscevamo. Apriamo le danze parlando di ritmo connesso alla geometria e vediamo un video molto particolare, il ritmo che porta avanti e scandisce la vita di tutti i giorni. È stata una lezione diversa dalle altre, avevamo voglia di parlare, di confrontarci, volevamo che la giornata non passasse troppo in fretta, sapevamo che era l'ultimo incontro di una lezione senza banchi e sedie in una Università dove tutte le lezioni sono frontali! Ma tutto ha una fine. Il momento più bello è stato il circle time di lettura degli Zibaldoni, luci soffuse, pensieri rivolti ai nostri scritti. È interessante capire cosa pensano gli altri su una cosa condivisa, soprattutto quando i loro pensieri non possono essere interrotti e devi ascoltarli e basta. Purtroppo nelle conversazioni, spesso, non si lasciano finire i discorsi altrui. Ho ascoltato le parole di tutti, abbiamo letto in circolo e abbiamo fatto il giro più volte, nessuno voleva fermarsi perché il momento era molto particolare. Alla fine, su delle parole molto profonde, il circle è stato chiuso e abbiamo applaudito tutti, è stata una cosa molto toccante".*

Esperienza con i bambini

Quanto detto per gli adulti (l'importanza di chiudere il percorso), vale anche per i bambini e per realizzare ciò ci sono tante modalità diverse (giornalino, tema, disegno, rielaborazione in piccoli gruppi, realizzazione di una piccola performance...ecc), la cosa più importante e anche la più difficile sarà trovare la modalità più consona all'atmosfera della classe e alle esperienze dei singoli e del gruppo.

Sessione 2: Tendere corde per disegnare curve

Scopo della sessione

Avvicinare i bambini alla geometria attraverso le curve coniche, esponendoli a concetti matematici avanzati, come quello di luogo geometrico e di sezione conica. Alcuni dei contenuti matematici non vengono esplicitati, rimangono però in filigrana, in questo modo si prepara il terreno per il futuro studio, attivo e cosciente, "artificiale" degli stessi concetti matematici. Alla scuola primaria i bambini conoscono la circonferenza e spesso la loro esperienza con le curve finisce lì. Le curve coniche si possono proporre, come in questo *taller*, in modo visuale, esperienziale.

Metodologia didattica

Dopo una "conversazione matematica" iniziale, in cui si fa un esercizio di immaginazione, provando ad immaginare e visualizzare le sezioni coniche, si passa a disegnare circonferenza ed ellisse usando un filo. Nel caso della circonferenza il filo funziona come un compasso, nel caso dell'ellisse si costruisce un ellissografo e si traccia la curva con il metodo "del giardiniere".

L'attività si presta ad essere svolta anche direttamente dai bambini, che disegneranno e osserveranno le curve, sperimentandone alcune proprietà geometriche. Naturalmente studenti di Scienze della Formazione e insegnanti in servizio approcceranno riflessioni più profonde e dettagliate.

Dopo aver tracciato l'ellisse, si propone un problema di geometria pratica, ovvero, si chiede di dedurre le dimensioni della curva tracciata, usando come unità di misura la lunghezza del filo stesso.

Materiali

- scotch di carta
- lavagna con gesso
- proiettore e schermo
- filo di lana, o filo da cucito in cotone egiziano (n. 8)
- Forbici, righello, matite, compasso, fogli

Tabella dettagliata della sessione

Attività 2.1	Immaginiamo le coniche (conversazione matematica)	30 min
Attività 2.2	Proiezione dei video sulla generazione spaziale delle coniche	5 min
Attività 2.3	La circonferenza come luogo geometrico	20 min
Attività 2.4	L'ellisse come luogo geometrico e il suo tracciamento con il metodo del giardiniere. Un problema di geometria pratica	45 min
Attività 2.5	Conversazione conclusiva	20 min

Attività 2.1: Immaginiamo le coniche (conversazione matematica) (30 minuti)

Parleremo di sezioni coniche. Un argomento che non viene trattato alla scuola primaria, ma che può essere presentato attraverso attività laboratoriali che incarnano i contenuti matematici soggiacenti. Questo primo paragrafo è una traccia che può essere usata come guida per una conversazione matematica volta ad immaginare e visualizzare le sezioni coniche. Questa conversazione matematica si appoggia sull'intuizione e l'immaginazione delle forme geometriche, e può essere quindi riproposta ai bambini, eventualmente modificandola e adattandola. Il testo è corredato da immagini che possono essere di ausilio a chi si prepara a condurre questo *taller*, e che non devono essere mostrate ai partecipanti in prima battuta, è importante che tutti facciano dei tentativi di visualizzazione; alla fine verranno invece mostrate delle immagini o animazioni e le curve coniche verranno svelate. Ciascuno farà quindi un lavoro di ricomposizione mentale, mettendo insieme in modo coerente le curve immaginate con quelle rappresentate nelle immagini o nelle animazioni.

Le sezioni coniche sono, appunto, sezioni del cono. Cos'è un cono? Probabilmente immaginate il cono fatto di carta, il cono del gelato, il cappello di Pinocchio.

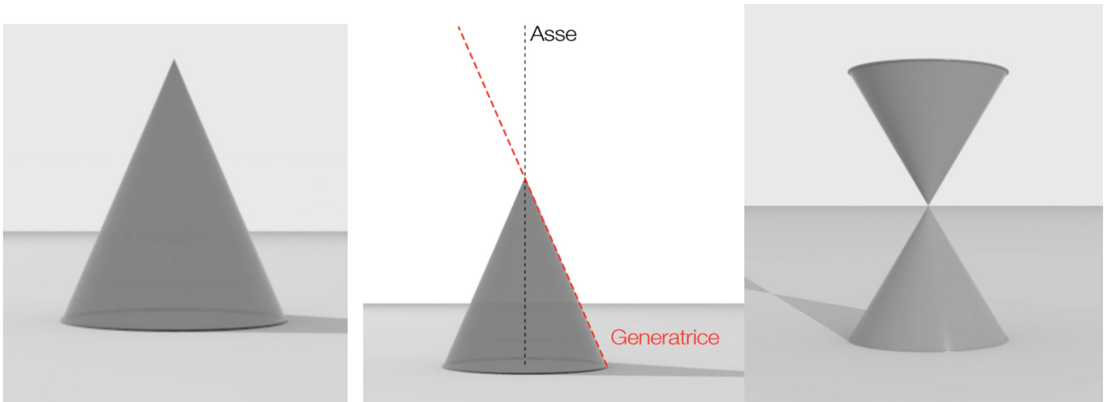


Figura 6.2.1 Sinistra: un cono a una falda; centro: un cono a una falda, con evidenziati asse e generatrice; destra: un cono a due falde

Per riuscire a visualizzare le sezioni coniche, dobbiamo da subito fare uno sforzo di immaginazione e vedere il cono come superficie a due falde, illimitata. Che vuol dire? Immaginate una retta verticale, che sarà l'asse del cono. Immaginate ora un'altra retta incidente alla prima (potete visualizzare queste due rette con due penne): questa seconda retta si chiama generatrice del cono. Adesso immaginate la seconda retta che ruota attorno all'asse…cosa si genera? Si genera un cono. Quella che avete compiuto nella vostra immaginazione è proprio la generazione del cono come superficie di rotazione. È importante coltivare, nutrire ed esercitare la nostra immaginazione geometrica, come insegnanti, per poter poi aiutare i bambini a sviluppare la loro.

Ora che "vediamo" il cono, cominciamo a sezionarlo con un piano. Il cono è una superficie, cioè, al suo interno è vuoto. Pensatelo fatto di carta: dentro non c'è nulla.

Tagliamolo con un piano perpendicolare all'asse verticale. Che figura si genera? (una circonferenza)

E se il piano passasse per il vertice? (un punto. Si chiama conica degenere)

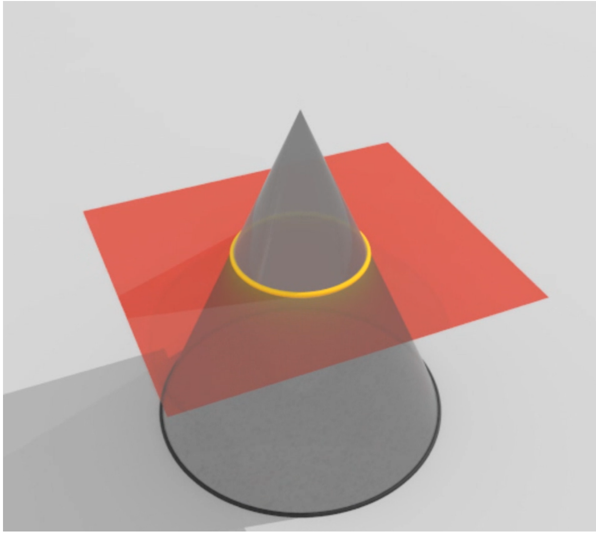


Figura 6.2.2 - Sezionando un cono con un piano ortogonale al suo asse, si ottiene una circonferenza

Incliniamo un po' il piano: che figura vediamo? (una ellisse)

Se continuiamo ad inclinare il piano, cosa succede all'ellisse? Come cambia la sua forma? (l'ellisse si allunga, diventa più "schiacciata").

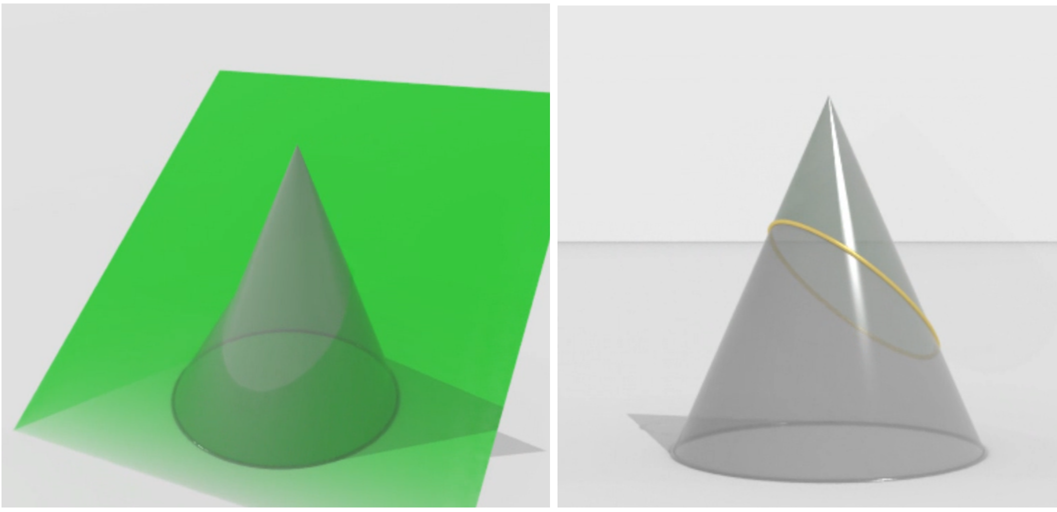


Figura 6.2.3 Incliniamo il piano rispetto all'asse del cono. La sezione ottenuta è una ellisse

Continuiamo ad inclinare il piano nello stesso verso: cosa succede alla sezione? C'è un momento in cui la curva di sezione cambia radicalmente? (non è più una curva chiusa, si apre e diventa una parabola). Esattamente che posizione ha il piano rispetto alla retta generatrice? Come possiamo indicare con precisione che inclinazione dobbiamo dargli affinché si ottenga una curva aperta? (deve essere parallelo alla generatrice). Se il piano passa per il vertice, che figura si ottiene? (Una retta. Ecco un'altra conica degenere)

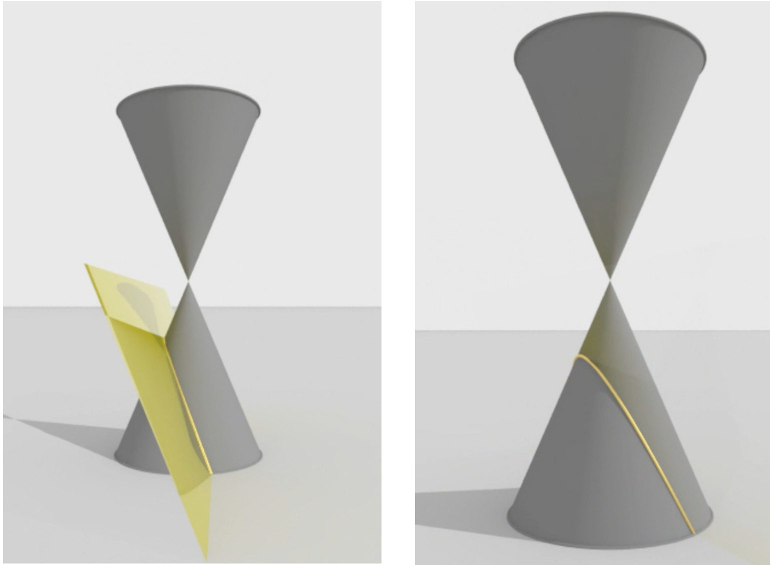


Figura 6.2.4 - Quando il piano di sezione è parallelo alla generatrice del cono, esso incontra solo una delle due falde e la curva ottenuta è una parabola

Proseguiamo con l'azione di inclinare il piano: cosa succede? (il piano incontra la seconda falda del cono: si genera una iperbole). L'iperbole ha due rami. L'unico modo per ottenerla è che il cono abbia due falde! Ci sono altre inclinazioni possibili con cui otteniamo delle iperboli? (sì, molte: quella comprese tra la posizione con cui otteniamo una parabola, e la posizione parallela all'asse del cono).

Se sezioniamo un cono con un piano che passa per il vertice e intercetta entrambe le falde del cono, che figura si ottiene? (due rette)

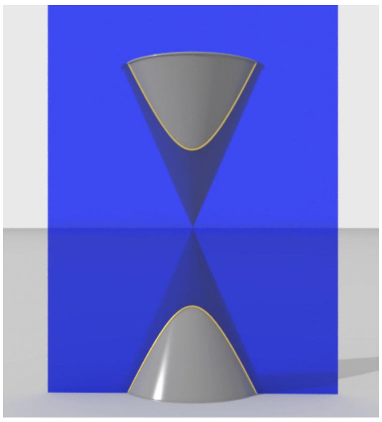


Figura 6.2.5 Quando il piano di sezione incontra entrambe le falde del cono, si genera una iperbole

Attività 2.2: Visione del video sulla generazione spaziale delle coniche (5 minuti)

Dopo averle immaginate, ora le possiamo vedere con gli occhi coscienti. Verrà fornito un link ad un video sul canale YouTube di Anomia: https://youtu.be/P4CcYdXGXEY

Attività 2.3: La circonferenza come luogo geometrico (20 minuti)

Delle quattro curve coniche che abbiamo visualizzato, ne approfondiremo due: circonferenza ed ellisse. Le quattro sezioni coniche hanno anche una definizione come luoghi geometrici (insiemi di punti che godono tutti della stessa proprietà): ovvero per ciascuna di esse esiste una definizione che ha a che fare con la misura di distanze.

La circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un unico punto detto centro.

Quindi, dati un punto, il centro, e data una distanza fissa, il raggio, è definita una circonferenza. Useremo una macchina matematica per disegnare una circonferenza. È una macchina matematica con cui avete a che fare fin dalla scuola primaria: il compasso.

Una macchina matematica è un oggetto che obbliga un punto a muoversi nel piano o nello spazio seguendo con esattezza una legge geometrica [1 pp. xi]

Userò uno spago per tracciare una circonferenza sulla lavagna. Lo spago fa lo stesso lavoro di un compasso e incarna il luogo geometrico con cui è definita una circonferenza. Inoltre, lo spago permette di vedere il raggio, mentre nel compasso il raggio non c'è… non si vede. Il compasso realizza il luogo geometrico, perché mantiene fissa una distanza prestabilita, ma lo fa in modo meno evidente rispetto all'utilizzo di uno spago. (a questo punto tracciamo una circonferenza sulla lavagna)

A questo punto, possiamo provare a ricavare l'equazione cartesiana di una circonferenza: il conto che faremo si basa sul teorema di Pitagora, vale la pena farlo perché è una delle poche equazioni in cui il luogo geometrico si vede, il trattamento algebrico e quello geometrico si parlano. Introduciamo un sistema di assi cartesiani con l'origine nel centro della circonferenza. Prendiamola di raggio dato, per esempio, 5. Segniamo un punto di coordinate $P(x,y)$ sulla circonferenza. Vogliamo scrivere una relazione che descriva in termini analitici che il punto sta sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 5. Proiettiamo P sugli assi, ottenendo i due punti H e K.

Se P deve stare su quella circonferenza, che proprietà deve soddisfare? Usiamo il Teorema di Pitagora

$$OK^2 + OH^2 = 5^2 \qquad (1)$$

Il segmento OH non è altro che la coordinata y di P, e OK è la coordinata x. Quindi la (1) diventa

$$x^2 + y^2 = 5^2 \qquad (2)$$

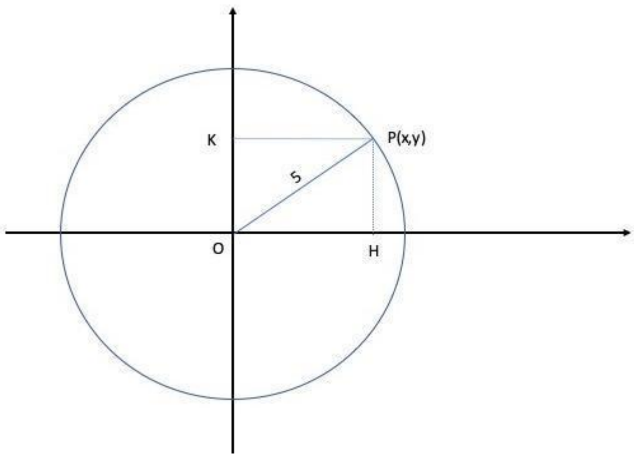


Figura 6.2.6 - Circonferenza di centro l'origine e raggio 5, il punto P(x,y) appartiene alla circonferenza

La (2) è l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio 5. Si può facilmente dedurre che se il raggio è generico, R, l'equazione diventa

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (3)$$

Infine, cambiando posizione al centro, e spostandolo in un punto qualunque $C(x_c, y_c)$, l'equazione diventerà (Fig. 6.2.7)

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \qquad (4)$$

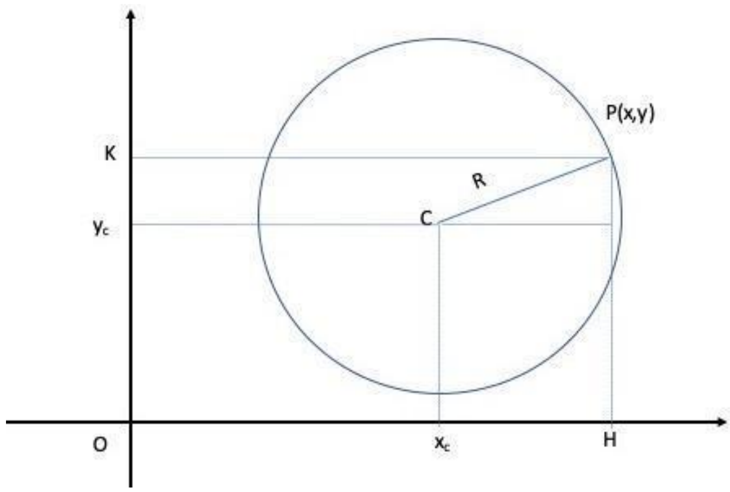


Figura 6.2.7 - Circonferenza di centro C generico e raggio R, il punto P(x,y) appartiene alla circonferenza.

Attività 2.4: L'ellisse come luogo geometrico e il suo tracciamento con il metodo del giardiniere (45 minuti)

Chi ricorda la definizione di ellisse come luogo geometrico?

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per cui la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante

Quindi per poter tracciare un'ellisse abbiamo bisogno di due punti e di una distanza che venga mantenuta fissa. Uno spago avrà il ruolo di mantenere fissa la somma delle distanze. Segniamo due punti sulla lavagna, fissiamo a questi due punti gli estremi dello spago con lo scotch di carta.

N.B. Lo spago deve essere più lungo della distanza tra i due fuochi.

Tracciamo una ellisse, osservando che anche questo insieme di oggetti, il filo lo scotch, sono una macchina matematica (in particolare, un ellissografo a filo) e realizzano il luogo geometrico appena descritto.

Ogni partecipante ha a disposizione scotch e filo e deve tracciare un'ellisse sul proprio quaderno o su un foglio. Può essere utile fissare momentaneamente il foglio al tavolo con lo scotch di carta.

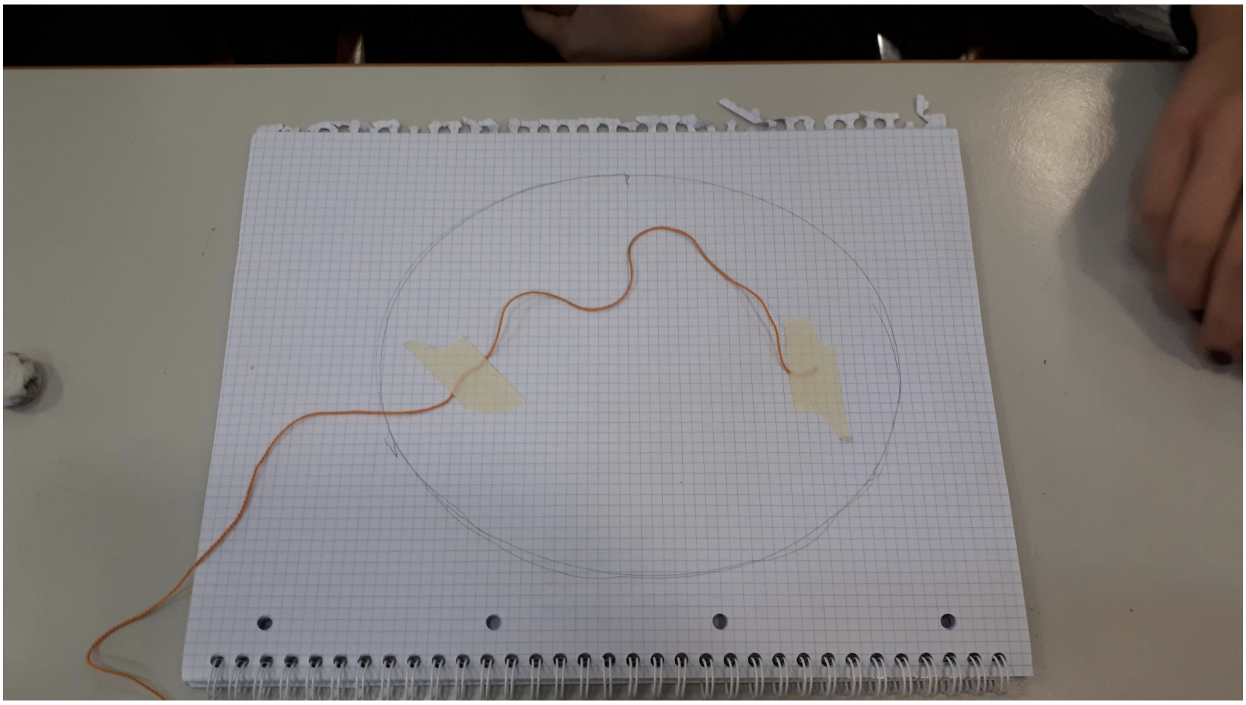


Figura 6.2.8 Tracciamento dell'ellisse con metodo del giardiniere, laboratorio svolto con gli studenti del corso Matematica e Didattica della Matematica, Prof. Ana Millán Gasca, Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria, AA 2017-18.

Attenzione: l'ellisse deve entrare nel vostro foglio. Quindi fate qualche prova e cercate di rendervi conto di quanto verrà larga e alta. Non scegliete un filo troppo lungo, non mettete i fuochi troppo vicini al bordo del foglio.

Questo modo di tracciare un'ellisse si chiama *metodo del giardiniere*: immaginate di voler disegnare una aiuola ellittica. Non dovete far altro che procurarvi due paletti di legno e una corda. Piantate i paletti nel terreno, annodate gli estremi della corda ai paletti, tracciate la vostra ellisse.

Ora però viene il problema. Vogliamo disegnare una aiuola ellittica, di dimensioni prestabilite: per esempio, una ellisse che si possa inscrivere dentro un rettangolo 12 metri x 5 metri.

<u>Quanto deve essere lunga la corda? A che distanza reciproca dovranno essere fissati i paletti?</u>

Per rispondere alla prima domanda (Farroni, Magrone 2014), posizioniamo la matita dentro la corda, nella posizione di estrema destra sull'asse focale, tenendo la corda tesa. La corda arriva in un punto A (Fig. 6.2.9). La lunghezza della corda copre la distanza tra i due fuochi, poi arriva fino ad A, e torna indietro per un pezzetto. Il tratto F_2A viene percorso due volte. Posizionando la matita con la corda tesa nel punto B alla estrema sinistra, si osserva la stessa cosa. Quindi immaginando di stendere la corda da F_1 ad A, tagliare la corda, e usare il pezzo rimanente per coprire la distanza tra F_1 e B, ci si rende conto che la massima estensione dell'ellisse in larghezza, è pari alla lunghezza della corda!

Quindi il giardiniere ha risolto metà del suo problema. Dovendo tracciare un'aiuola larga 12 metri, porterà una corda lunga 12 metri (più un piccolo avanzo per fare i nodi ovviamente).

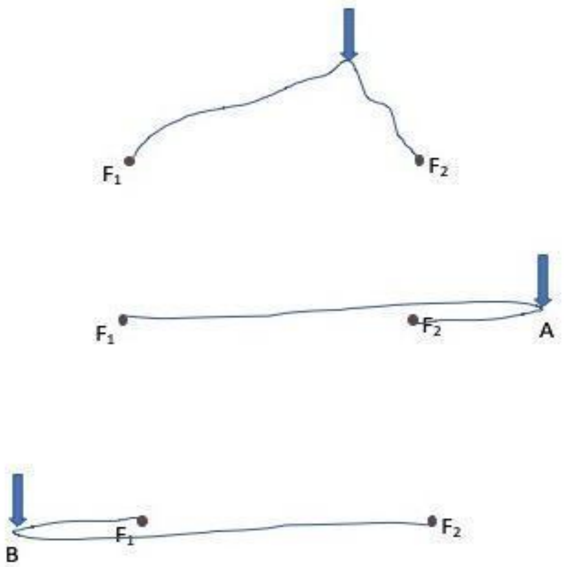


Figura 6.2.9 - Ellisse con il metodo del giardiniere, in figura si vedono i due fuochi e la corda. I punti A e B indicano due posizioni della matita, da cui si deduce la elazione tra asse maggiore e lunghezza della corda.

Ora che abbiamo capito come ricondurre la larghezza dell'ellisse alla lunghezza della corda, dobbiamo pensare all'altra dimensione, quella che si sviluppa lungo l'asse ortogonale all'asse focale.

Disegniamo un rettangolo che abbia le dimensioni dell'ellisse da tracciare, e dividiamolo in 4 parti uguali usando gli assi mediani (Fig. 6.2.10 e 6.2.11). Tenendo presenti le simmetrie di queste figure, i due assi dell'ellisse maggiore e minore (ossia rispettivamente i due lati maggiore e minore del rettangolo) li chiameremo *2a* e *2b*.

Sia D il punto indicato nella Figura 6.2.10 (il punto medio del lato maggiore). Prendiamo la corda della lunghezza giusta, ovvero, della lunghezza pari alla larghezza dell'ellisse da tracciare. Pieghiamola a metà, usiamola come un compasso: un estremo della metà corda deve essere "puntato" sul punto D. I punti (simmetrici) dove l'altro estremo tocca l'asse AB sono i due fuochi.

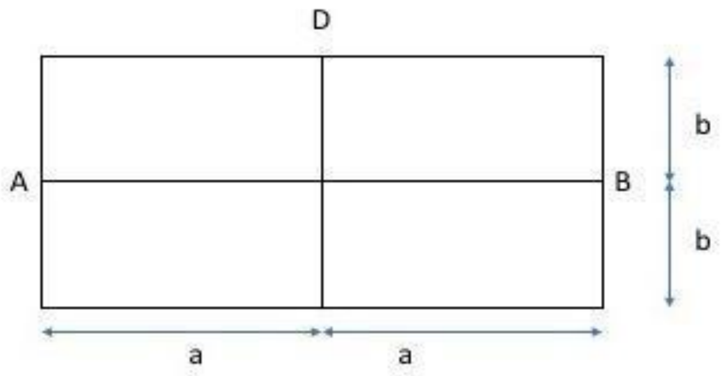


Figura 6.2.10

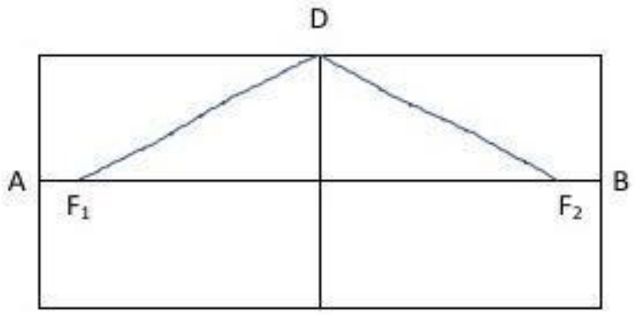


Figura 6.2.11

Attività 2.5: Conversazione conclusiva (20 minuti)

Può essere interessante avviare una conversazione conclusiva, agevolandola ponendo qualche domanda ai partecipanti; di seguito ne suggeriamo alcune, ma è una fase da gestire a braccio, anche considerando le reazioni manifestate dai partecipanti durante l'officina:

> Avevate mai disegnato una ellisse in questo modo? Pensate che i bambini si incuriosirebbero? Potreste annunciarla ai bambini dicendo che stanno per disegnare un ovale, usando uno strumento simile al compasso, con qualche piccola differenza. Abbiamo iniziato l'officina esplicitando il fatto che l'ellisse non fa parte degli usuali argomenti di geometria trattati alla scuola primaria; dopo il lavoro che abbiamo fatto insieme, pensate che potrebbe essere un argomento da trattare? Avevate mai provato a fare uno sforzo di immaginazione per visualizzare degli oggetti geometrici tridimensionali come abbiamo fatto oggi?

Risposta attesa dai partecipanti

È possibile che i partecipanti siano perplessi dalla proposta di una attività da realizzare alla scuola primaria che riguardi le curve coniche (le coniche non fanno parte del "programma" della scuola primaria). Uno degli obiettivi del progetto ANFoMAM è di lavorare sulla percezione che gli insegnanti (presenti e futuri) hanno riguardo alla propria competenza matematica: pertanto affrontare un pezzo di matematica "superiore", che ha a che fare con concetti che normalmente si affrontano in seguito, può avere delle ricadute positive. Se l'insegnante rafforza le sue conoscenze e la sua comprensione, può arrivare a distillare alcuni concetti e proporli ai bambini della scuola primaria. Le chiavi di lettura di questo laboratorio sono diverse e possono essere riproposte in modo stratificato. Il livello di profondità e lo spazio che si deciderà di dare alle curve (che non siano la circonferenza), farà parte delle scelte didattiche dell'insegnante. E non va dimenticata la bellezza di queste curve e del procedimento di tracciamento, la cui osservazione lascia incantati e può essere compiuto dai bambini con facilità.

Crediti delle illustrazioni 6.2.1-6.2.5: Le immagini provengono dal video sulla genesi spaziale delle coniche, prodotto dall'Arch. Enrico Mele - Architetto Progettista, per il corso opzionale Macchine per Disegnare, il disegno storico rivisitato parametricamente, Laura Farroni e Paola Magrone, dipartimento di Architettura – Università Roma Tre

Sessione 3: Costruire i quadrati… con quel che capita!

Scopo della sessione

La sessione gravita attorno alla "scoperta" delle caratteristiche di una figura regolare, il quadrato: si tratta di far emergere di volta in volta, grazie alla costruzione attraverso materiali e strumenti diversi, le varie proprietà che contraddistinguono questa figura dal punto di vista geometrico, destando meraviglia e nel contempo affinando la comprensione.

Le peculiarità (flessibilità o difficoltà) di ogni singolo materiale portano a interrogarsi su "come fare" e dunque a impegnarsi nel trovare nuove originali possibilità e soluzioni di fronte alle singole richieste, mettendo in atto di volta in volta forme di ragionamento creative e fantasiose. Le difficoltà e le soluzioni trovate si collegano all'idea di precisione, uguaglianza e misura, e quindi hanno come concetti geometrici soggiacenti: retta, segmento, intersezione, punto, angolo, congruenza, perpendicolarità, parallelismo, simmetria, area, perimetro, ecc.

Al quadrato può essere sostituita un'altra figura, e quindi esso è usato qui come esemplificazione di un approccio.

Attorno alla singola figura si crea un percorso esperienziale sfaccettato, che risulta avvincente e divertente per la pluralità dei materiali e risulta significativo perché àncora le proprietà a una rete concettuale e perché lascia spazio alla creatività, all'espressione di sé. La realizzazione di vere e proprie "opere" implica un sentimento di pienezza e mette in gioco anche la dimensione del bello. I partecipanti riescono a superare una visione delle proprietà di figure elementari non come elenco disincarnato (riprodotto spesso nei libri di testo degli alunni), bensì come una delle esperienze e scoperte intellettuali del bambino. I partecipanti "si fanno bambini" e risultano tanto più coinvolti quanto possono immediatamente proiettarsi in una effettiva realizzazione in classe con bambini dai 6 ai 10 anni.

L'esperienza condivisa è cruciale. Ognuna delle quattro attività porta alla creazione di manufatti che possono essere fotografati o "messi in mostra" di fronte agli altri partecipanti: guardare, esaminare, confrontare, ammirare. I quadrati realizzati ci appartengono, esprimono qualcosa di noi. Questa esposizione è la piattaforma che attiva la riflessione condivisa conclusiva.

Metodologia didattica

Questa sessione prevede quattro attività brevi da svolgere in coppie o piccoli gruppi, con una quinta attività di condivisione collettiva: "esposizione" delle opere e discussione conclusiva di tutti i partecipanti.
Si propongono delle durate indicative, ma è possibile allungare i tempi, cercando comunque di sfruttare un ritmo vivace che metta in evidenza la varietà degli approcci. Tutti i gruppi lavorano in contemporanea e c'è la possibilità al termine di un certo tempo (20 minuti) di concludere il lavoro passando a costruire nuovamente quadrati con altri materiali.

Ogni attività prevede dei materiali da adoperare sui "banchi da officina", combinando l'esperienza tattile, visiva e motoria con l'attivazione dell'immaginazione e la liberazione della creatività grazie anche ai colori, la consistenza, le forme.Volta per volta si presentano sfide scherzose e insolite, rispetto alla comune costruzione o disegno di quadrati con fogli o carta quadrettata che già di per sé presenta delle regolarità.

Lo scambio tra pari (discussione) nei gruppi o coppie durante ognuna delle quattro attività esalta la capacità di osservazione e il ragionamento, mentre i materiali si combinano, si spostano, si compongono e scompongono. Il docente prediligerà i momenti di discussione e conversazione, ponendo domande, riformulando gli interventi ascoltati, che utilizzerà come perno per guidare la conversazione e per porre l'attenzione su determinati aspetti.

È possibile, di conseguenza, proporre una riflessione/discussione collettiva già dopo il primo "giro" di costruzione di quadrati. Sarà fra l'altro naturale che i vari gruppi esaminino a vicenda le proprie opere ad ogni singola attività. Il docente sarà libero di svolgere tutta la parte esperienziale prima e rimandare la discussione alla fine, come si propone qui, oppure di approfittare di ogni "cambio gruppo" per far notare qualcosa relativamente ai lavori svolti ad ogni giro.

Materiali

- carta 80 gr, carta velina, cartoncini (200 gr)
- matite, pennarelli
- forbici
- corde, fili, nastrini, cordoncini…
- asticine, listarelle, bastoncini, stuzzicadenti, cannucce…
- ceci, lenticchie, perle, bottoni…

Tabella dettagliata della sessione

Attività 3.1	Ce la fai a creare un quadrato? Doppia sfida	25 minuti
Attività 3.2	I tenditori delle corde	25 minuti
Attività 3.3	Armeggiando con bastoncini e asticine	25 minuti
Attività 3.4	I quadrati dei pitagorici	25 minuti
Attività 3.5	I nostri quadrati in mostra. Cosa abbiamo scoperto?	20 minuti

Attività 3.1: Ce la fai a creare un quadrato? Doppia sfida (25 minuti)

Si propone ad ogni coppia o piccolo gruppo (3-4 partecipanti) di creare a piacere dei quadrati con carta velina, carta 80 g e carta 200 g (cartoncino):

- con bordi completamente irregolari;
- sgualciti e stropicciati.

Si possono usare:

a) solo pennarelli o matite
b) solo le forbici

Vi è ampia scelta (dei materiali e della grandezza del quadrato) e così nascono due difficoltà:

1) i pezzi di carta non sono rettangolari (come lo è ad esempio il comune A4) e dunque non si possono "sfruttare i suoi angoli e lati" come riferimento per la costruzione del quadrato;
2) il foglio è sgualcito e non è agevole fare e vedere eventuali piegature della carta.

a) Costruire quadrati… potendo usare solo pennarelli o matite

Nel primo passo si hanno solo le matite o i pennarelli per disegnare. Ecco gli ostacoli che incoraggiano la riflessione dei partecipanti offrendo esperienze corporee:

- la difficoltà nell'andare dritti "a mano libera" senza supporto di righelli (tracciare/tirare una retta/segmento) o di eventuali piegature;
- la difficoltà di individuare un angolo retto "ad occhio" cioè per approssimazione visiva;
- le difficoltà di realizzazione che aumentano al crescere della misura scelta dei lati dei quadrati.

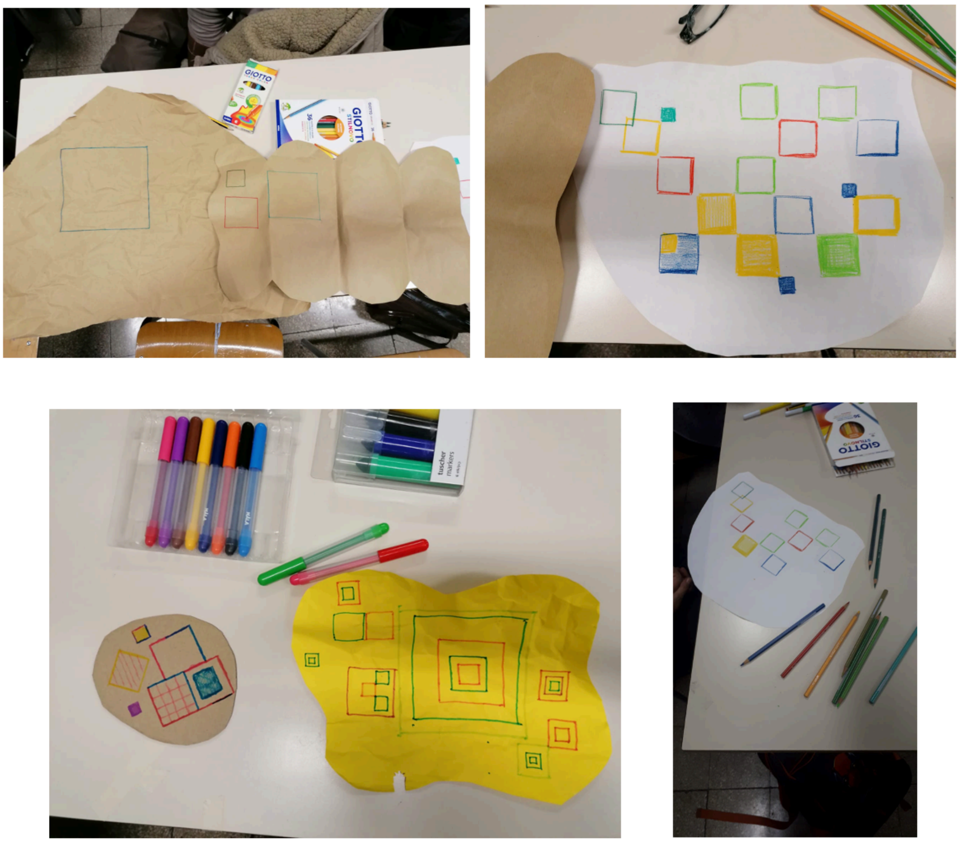


Figura 6.3.1 La sfida dei quadrati con matite e pennarelli

b) Costruire quadrati… potendo usare solo le forbici

La difficoltà cui si trovano di fronte i partecipanti risiede nel fatto che si hanno solo le forbici per "tracciare" lati e angoli, ma le forbici tracciano in modo "definitivo e non cancellabile". Questo porta ad aggiustamenti per tentativi e "ad occhio" che procedono lato per lato e hanno come unica possibilità di tagliare (togliere) carta. Così è possibile sperimentare:

- la difficoltà nell'andare dritti senza poter seguire una linea retta disegnata,

- la difficoltà di individuare un angolo retto "ad occhio" cioè per approssimazione visiva,
- la difficoltà di non poter tornare indietro nei tagli e ritagli fatti,
- la difficoltà di costruzione al crescere delle misure dei lati dei quadrati

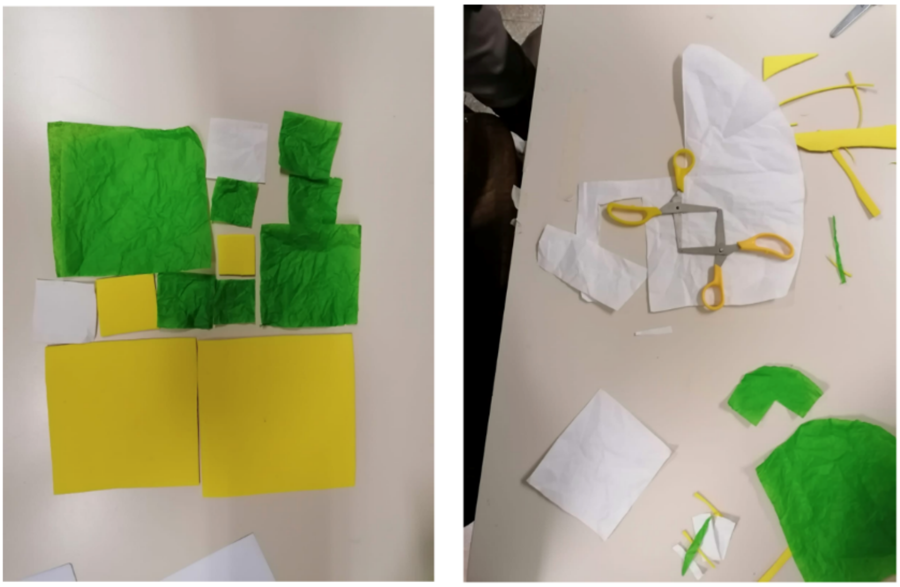


Figura 6.3.2 La sfida dei quadrati con le forbici

Dopo circa 20 minuti l'insegnante passa ad osservare e possibilmente fotografare i lavori dei gruppi che sistemeranno in 5 minuti il materiale in modo da poter ruotare e passare alla costruzione di quadrati con altri materiali.

Risposta attesa dai partecipanti

Entrambe le esperienze portano a riflettere sulla complessità di:

- creare/tracciare una linea retta su una superficie non liscia e di forma non regolare in assenza di riferimenti e strumenti (bordo del foglio, righelli, piegature);
- creare/tracciare un angolo retto in assenza di riferimenti e strumenti come quadretti/squadre/angoli da ricalcare/goniometro/compasso, ecc;
- disegnare/tagliare segmenti di uguale misura senza la possibilità di misurarli con un righello e di poterli sempre sovrapporre.

I partecipanti reagiscono con un momento iniziale di sorpresa. Ciò porta a un graduale adattamento a una situazione giocosa, di sfida, favorita dalla presenza del partner o dei membri del piccolo gruppo, dalla disposizione in banchi da officina e dalla presenza dei materiali. Ci può essere un accentuarsi progressivo dei commenti ad alta voce, del coinvolgimento anche emotivo, del desiderio di condividere con altri.

Fantasia e creatività si manifestano in modi diversi. Tuttavia, le prime "opere" realizzate incoraggiano a mettersi in gioco e a trovare altri quadrati, più grandi o più piccoli, combinati fra di loro oppure di colori diversi.

Attività 3.2: I tenditori delle corde (25 minuti)

Questa attività è ispirata al ruolo delle corde tirate nell'agrimensura[32]. Si propone a ogni coppia o piccolo gruppo (3-4 partecipanti) di creare a piacere dei quadrati solo con:

- corde, fili di lana o altri materiali, nastrini, cordoncini

Con questa seconda attività entra in gioco l'aspetto cruciale della sessione: la varietà dei punti di vista geometrici che offre l'uso di diversi materiali. Vi è di nuovo ampia scelta (dei materiali e della grandezza del quadrato) e nel contempo si pongono difficoltà già presenti e altre nuove, dovute a un nuovo tipo di materiale:

1) non è facile tendere contemporaneamente 4 cordini di uguale lunghezza, (soprattutto se di lunghezza superiore al palmo) e formare con essi 4 angoli retti e quindi si avrà bisogno di altre mani "che tendano" gli altri lati (o in alternativa del nastro adesivo per "fermare" il punto dove il cordino deve cambiare direzione, come si sono inventate le colleghe in foto).
2) è complesso individuare un angolo retto "ad occhio" senza usare riferimenti presenti nell'ambiente (mattonelle, libri, tavoli, ecc) solo tendendo le corde.
3) la corda, i fili, i nastrini e i cordoncini hanno come peculiarità quella di far trovare facilmente i 4 lati uguali (attraverso piegature e sovrapposizioni) e anche i nodi possono essere una possibilità per individuare il punto dove "cade l'angolo" ossia dove la corda deve effettuare un cambio di direzione di 90 gradi.
4) le difficoltà di realizzazione aumentano al crescere delle misure dei lati dei quadrati.

Figura 6.3.3 I tenditori delle corde

Risposta attesa dai partecipanti

Questa esperienza porta a riflettere sulla complessità di:

- tirare una corda (linea retta) in assenza di sufficienti "tenditori";
- creare/tirare un angolo retto in assenza di riferimenti e strumenti come quadretti/squadre/angoli da ricalcare, ecc;
- definire segmenti di uguale misura senza la possibilità di misurarli sovrapporli/piegarli.

[32] Si suggerisce la lettura del libro "*La geometria del faraone*" di Anna Cerasoli, Emme Edizioni, 2013.

I partecipanti possono avere sentimenti ambivalenti. Avevano costruito i quadrati con difficoltà non indifferenti nella prima attività, ed ecco che ritorna di nuovo la richiesta: si ricomincia da capo! Ci può essere un iniziale senso di rifiuto, ma la radicale differenza del materiale e il modo in cui coinvolge l'esperienza corporea - che richiede anche la tensione ottenuta "stirando" - spinge a mettersi nuovamente in gioco, anche facendo confronti con le soluzioni e l'esperienza dell'attività precedente.

Anche in questo caso è cruciale l'esperienza condivisa: la coppia o il piccolo gruppo si interrogano insieme su "come fare". Vi è, da una parte, il vincolo dato dal materiale; dall'altra, la libertà di creare e di mettere all'opera la fantasia. La natura di "forma limite" (Husserl) del quadrato oltre le realizzazioni fisiche si fa avanti nelle riflessioni dei partecipanti.

Figura 6.3.4 I tenditori delle corde: coinvolgimento, creatività

Attività 3.3: Armeggiando con bastoncini e asticine (25 minuti)

Questa attività prevede che la coppia o il piccolo gruppo (3-4 partecipanti) creino a piacere dei quadrati solo con:

- asticine, listarelle, bastoncini, stuzzicadenti, cannucce di diverse dimensioni

Ora le difficoltà di realizzazione non aumentano al crescere della misura scelta dei lati dei quadrati. Le difficoltà che i partecipanti devono superare in questo caso sono in parte nuove e in parte inedite:

1) non è facilissimo individuare un angolo retto "ad occhio" senza usare riferimenti presenti nell'ambiente (mattonelle, libri, tavoli, ecc), anche se è certamente meno difficile rispetto all'utilizzo della corda dell'attività precedente;
2) le asticine, le listarelle, i bastoncini sono di dimensioni diverse e pertanto non è così facile riuscire a comporre dei quadrati.

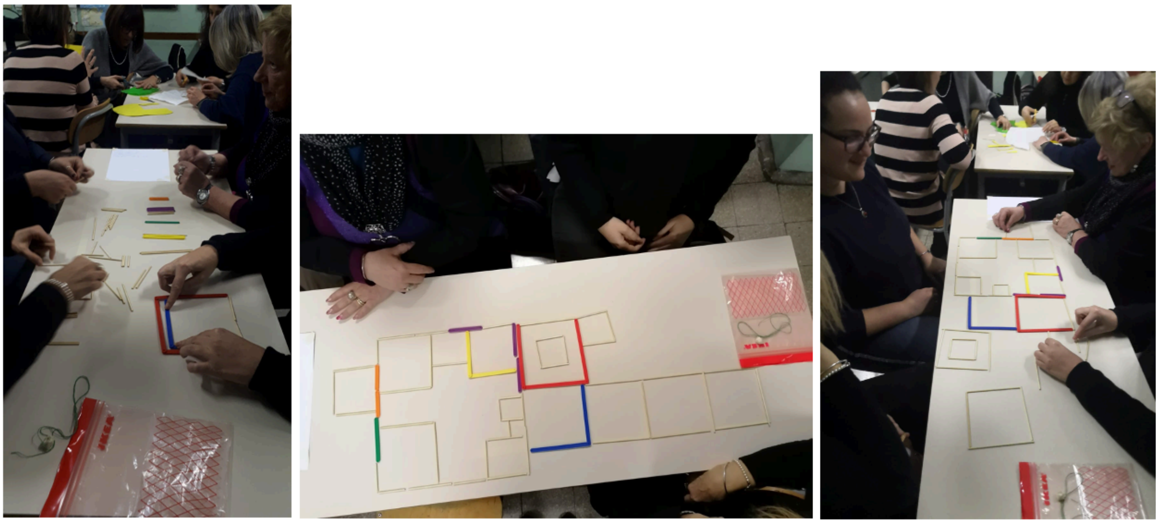


Figura 6.3.5 Armeggiando con asticine di varie lunghezze

Risposta attesa dai partecipanti

Questa esperienza porta a riflettere sulla complessità di:

- individuare un criterio per utilizzare asticine, listarelle e bastoncini di lunghezza diversa (in questo caso è possibile individuare segmenti congruenti per sovrapposizione);
- formare un angolo retto ad occhio in assenza di riferimenti e strumenti come quadretti/squadre/angoli da sovrapporre, ecc.

Arrivati alla terza attività, un buon numero di partecipanti iniziano a essere catturati dalla vertigine della costruzione del quadrato. Le esperienze infantili possono affiorare, sia scolastiche, sia di giochi del passato con asticine e altro.

Attività 3.4: Quadrati pitagorici (25 minuti)

Questa attività è ispirata ai numeri figurati[33] e anche alla raffigurazione del centinaio con i materiali montessoriani e prevede che la coppia o il piccolo gruppo (3-4 partecipanti) creino a piacere dei quadrati solo con:

- ceci, lenticchie, perle, bottoni…

Questa costruzione appare come una configurazione (il quadrato si rompe con estrema facilità). Inoltre, essa spinge ad attività di conteggio oltre il numero quattro, oppure a moltiplicazioni, e si ottengono i numeri quadrati: 4, 9, 25, e così via. La visuale si concentra sull'estensione del quadrato, sul quadrato come superficie.

Le nuove difficoltà proposte da questa attività sono le seguenti:

1) bisogna muovere ed allineare sul banco da lavoro dei ceci/lenticchie/perle/bottoni (punti) per costruire dei quadrati;

[33] Si suggerisce la lettura del libro "*Il mago dei numeri*" di Hans M. Enzensberger, Einaudi, 1997, pp. 98-99 e "*Sono il numero 1*" di Anna Cerasoli, Feltrinelli Kids, 2008, p. 51.

2) non è facilissimo “andare dritti” con piccoli punti per costruire i lati e quindi la sagoma o bordo del quadrato;
3) risulta più agevole costruire il quadrato come “schieramento” di punti, riga per riga o colonna per colonna, sottolineando allineamento, parallelismo, congruenza di segmenti;
4) le difficoltà di costruzione aumentano anche qui al crescere delle misure dei lati dei quadrati.

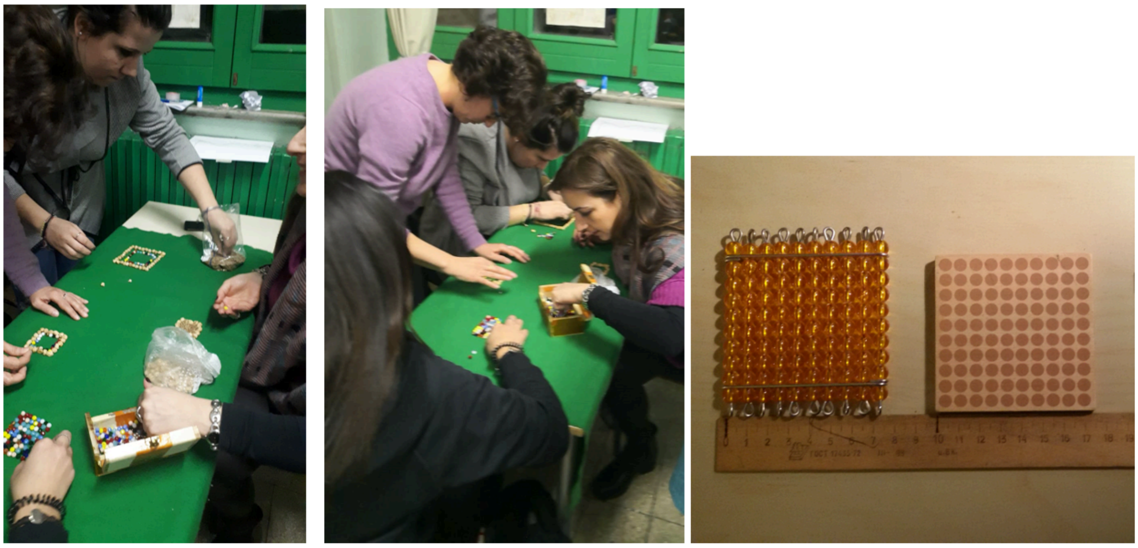


Figura 6.3.6 Quadrati pitagorici (a destra rappresentazione del centinaio con le perle e con il quadrato di legno secondo le indicazioni di Maria Montessori)

Attività 3.5: I nostri quadrati in mostra. Cosa abbiamo scoperto? (20 minuti)

Durante le attività i vari gruppi o le varie coppie hanno già guardato e ammirato, con curiosità e interesse, le opere degli altri gruppi. Nell'attività conclusiva alcuni minuti dovrebbero essere dedicati a passeggiare fra i vari banchi guardando o fotografando le soluzioni dei compagni.

Il docente attiverà una discussione sulle linee seguenti:

- Come ti sei sentito nel costruire e nel cercare soluzioni creative e originali?
- Quali materiali hai prediletto, quali meno e perché?
- Pensi che in questo modo sia più facile imparare? Cerca di spiegare perché, senza usare la parola “manipolazione”
- Pensi che sia complicato organizzare un’attività di questo tipo in classe? Hai immaginato come potrebbe andare con i bambini?
- Pensi che possa essere un’attività inclusiva? Perché?

Potremmo anche riflettere insieme sui contenuti di una discussione collettiva con i piccoli alunni. Domande che potrebbero attivare la condivisione con i bambini sono ad esempio:

- Ti è piaciuto costruire le figure piane? (potrebbero emergere verbi quali fabbricare, montare, creare, inventare, immaginare, giocare…)
- Ti è piaciuto ricercare soluzioni insieme ai compagni? Cercavi una soluzione facile o cercavi di farne una speciale o sorprendente per la classe?

- Quali materiali hai prediletto, quali meno e perché
- Cosa hai imparato oggi sul quadrato? Vuoi scrivere o disegnare le nostre scoperte sul quaderno?

Risposta attesa dai partecipanti

L'attività di discussione collettiva potrebbe anche essere iniziata, strada facendo, con il ritmo in crescendo delle attività. In ogni caso è utile un momento di "raffreddamento" o alleviamento della tensione di entusiasmo, che faccia leva su di essa ma porti a un sentimento più profondo. Attraverso le parole e la rievocazione del percorso, si cerca di scavare il collegamento fra idee geometriche ed esperienza nello spazio rappresentativo tattile, visivo e motorio. Si cerca di immaginare come questo approccio possa essere esteso ad altre figure geometriche; come in generale ogni concetto matematico abbia numerose sfaccettature che possono essere colte di fronte ai bambini con attività diverse, fra cui quelle laboratoriali.

Il ruolo del docente è cruciale nell'invitare a esprimersi, guidare la discussione oltre la superficie, esplorando anche il ruolo del divertimento, del piacere, del coinvolgimento, nel corpo, della mimesi, nell'apprendimento infantile.

Sessione 4: Tu come la vedi? Dal solido al piano e viceversa

Scopo della sessione

Sperimentare e indagare le figure solide e le loro caratteristiche, attraverso l'osservazione, la manipolazione e la realizzazione di figure composte da più parti mediante il posizionamento corretto delle singole parti.

Guidare all'astrazione imparando a costruire un oggetto in tre dimensioni partendo dal suo prospetto a due dimensioni, stimolare la visione tridimensionale e l'osservazione dei solidi da diversi punti di vista e la capacità di valutare la profondità di oggetti posizionati nello spazio.

Metodologia didattica

Dopo una conversazione matematica iniziale sulla conoscenza dei solidi geometrici e delle loro caratteristiche, si mostrano i pezzi del gioco "La Boca", descrivendone insieme la forma e lasciando che i partecipanti prendano confidenza con i diversi volumi.

Poi si spiegano le tre attività da realizzare.

Materiali

I pezzi del gioco "La Boca" (acquistabile contattando emanuele@creativamente.eu), le carte e la plancia di gioco (una griglia quadrettata 4 x 4), carta a quadretti, penne, matite, colori e righelli.

Tabella dettagliata della sessione

Attività 4.1	Il gioco "La Boca". Tu come la vedi?	30 min
Attività 4.2	La visione dall'alto	15 min
Attività 4.3	Dal solido alla visione piana	15 min
Attività 4.4	Dalla visione piana al solido	60 min

Attività 4.1: Il gioco "La Boca". Tu come la vedi? (30 minuti)

Il docente presenta il gioco "La Boca" e ne illustra le varie componenti agli studenti.

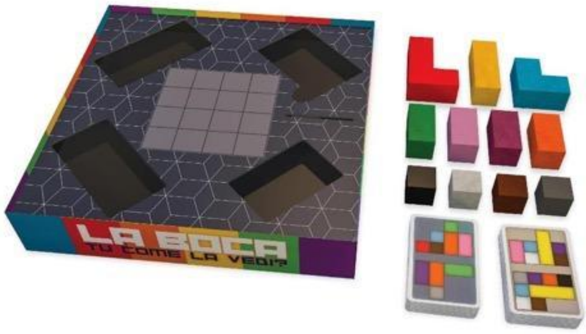


Figura 6.4.1 Le componenti del gioco “La Boca”

La scatola gioco contiene 1 piano di gioco, che consiste in una plancia con quadrettatura 4 x 4, 11 blocchi in legno di 11 diversi colori diversi e 55 carte, divise in *facili* (grigio chiare) e *difficili* (grigio scure), con due obiettivi ciascuna, per un totale di 110 obiettivi. L’obiettivo del gioco è quello di costruire una struttura tridimensionale sulla superficie quadrettata raffigurata sulla scatola, rispettando la raffigurazione bidimensionale della carta. I blocchi di legno sono cubi, parallelepipedi e due blocchi a forma di L, uno più grande di colore rosso e uno più piccolo di colore celeste (Figura 6.4.1).

Si tratta di un gioco che permette di lavorare **contemporaneamente sulla geometria piana e su quella solida.** I giocatori hanno infatti a disposizione una rappresentazione bidimensionale che devono osservare e immaginare in tre dimensioni. Sulla base è presente un reticolo cartesiano bidimensionale che aiuta i giocatori a focalizzare la componente x e y di uno spazio tridimensionale. L’altezza, quindi l’asse z, viene immaginata dagli stessi giocatori grazie all’osservazione delle due facce della carta, ovvero dei due prospetti.

Questo gioco permette di ragionare sul **punto di vista**. Nel passaggio dalle tre alle due dimensioni si perde la profondità, quindi tutto ciò che sulla carta ci sembra in prima linea non è detto che lo sia sul piano reticolato. E ci possono essere molteplici possibilità di soluzione dello stesso obiettivo, distinte proprio dalla profondità.

Si gioca a squadre formate da due o quattro persone. I giocatori (o le coppie nel caso di quartetto) si dispongono uno di fronte all’altro, posizionando una carta estratta dal mazzo all’interno dell’apposita fessura presente sul tavolo di gioco. Il gioco è dunque collaborativo, entrambi i giocatori (o entrambe le coppie) devono completare lo stesso obiettivo e usano gli stessi blocchi di legno, ma ogni giocatore vede soltanto un lato di ciò che deve essere costruito.

I pezzi posizionati da un giocatore possono essere spostati dall’altro, qualora non siano nella giusta posizione per realizzare il solido secondo le indicazioni del suo punto di vista.

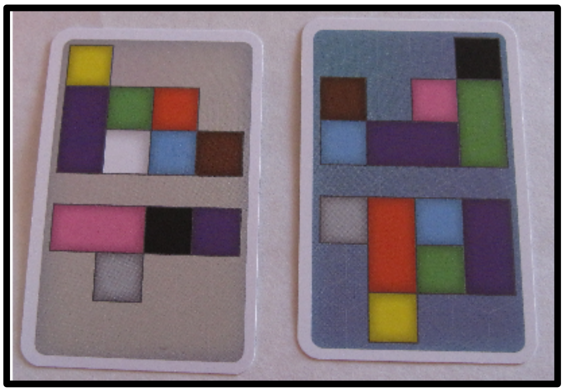


Figura 6.4.2 A sinistra le carte *Facili* e a destra quelle *Difficili*

Per raggiungere l'obiettivo richiesto vanno utilizzati **tutti i pezzi a disposizione**. Se alcuni pezzi non sono visibili nei due prospetti sui due lati della carta, devono comunque essere posizionati, nascosti all'interno della costruzione.

La differenza tra le carte facili e difficili consiste nel fatto che giocando con le carte facili il pezzo rosso a forma di L, che è grande e complicato da posizionare, non deve essere utilizzato.

Figura 6.4.3 Un esempio di carta e costruzione corrispondente "da tutte e due le parti"

I giocatori lavorano insieme e contemporaneamente, spostando i mattoncini sul piano reticolato. I giocatori delle due squadre lavorano per realizzare un obiettivo comune. Ai giocatori non è concesso di guardare l'altra faccia della carta, visibile solo al compagno, ma è consentito parlare e chiedere "tu come lo vedi?" "Hai bisogno del pezzo giallo?". "No, non lo vedo! Però ho bisogno del pezzo azzurro al secondo piano."

Nella costruzione tridimensionale nessun pezzo può sporgere al di fuori dell'area di gioco - la plancia 4x4 - e nessun pezzo può essere in equilibrio e avere sotto di sé uno spazio vuoto con ponti o mattoncini non completamente appoggiati (Figure 6.4.4 e 6.4.5).

Figura 6.4.4 Un esempio di "ponte"

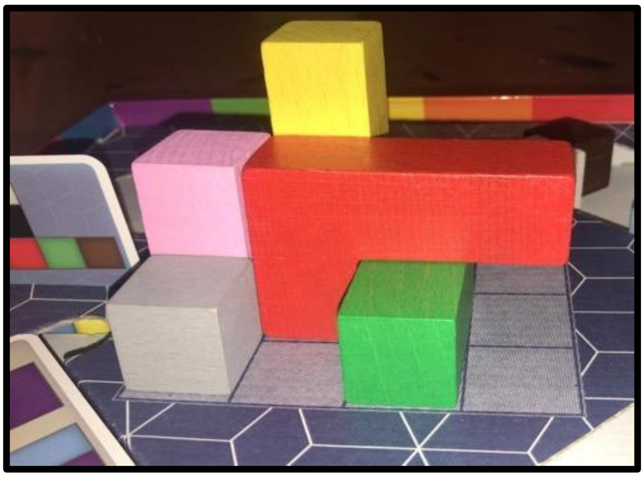


Figura 6.4.5 Un esempio di pezzo sospeso

La costruzione non può superare inoltre il limite di altezza di tre piani (la dimensione maggiore del pezzo giallo). Se lo ritiene opportuno il docente può proporre esplicitamente un esempio per ogni tipologia di costruzione che non rispetti tutte le condizioni date:

a) un solido che esca fuori dalla superficie quadrettata della plancia
b) un solido con un'altezza superiore a quella di 3 spigoli del cubo
c) un solido che non utilizzi tutti i blocchi di legno presenti nel gioco

Si può scegliere di giocare in due modalità:

- A TEMPO: (15-20 minuti) vince chi realizza il maggior numero di carte. Con ogni carta si possono fare due partite; la carta è considerata terminata quando si sono completate entrambe le possibilità di gioco.
- A CARTE OBIETTIVO: vince chi riuscirà a raggiungere un numero stabilito di carte nel minor tempo.

Alcune facce dei mattoncini, come nel caso del rettangolo dei parallelepipedi potranno apparire di forme diverse, magari quadrate, solo perché davanti ad esso è posto un altro pezzo che impedisce la visione di una parte di tale facciata. In questo caso si ragiona sia sulla parte visibile che sulla parte non visibile nella carta bidimensionale.

In questa sessione il docente spiega le regole del gioco ai partecipanti evidenziando tutti i casi particolari riportati e si inizia a giocare costruendo i primi solidi senza preoccuparsi di rispettare le condizioni di delle due modalità di gioco possibili, immaginando comunque 20 o 25 minuti di esperienza-gioco.

Si consiglia di partire dalle carte più facili (quelle a fondo chiaro), che non prevedono il posizionamento del pezzo rosso, molto ingombrante e difficile da collocare soprattutto quando non si vede! È necessario però che dopo un numero congruo di carte obiettivo facili risolte e comunque dopo 15 minuti che si è iniziato a giocare si passi ad utilizzare le carte obiettivo difficili, in modo da entrare completamente nella sfida matematica richiesta.

Si chiede a ciascun gruppo di costruire un solido collocando tutti i blocchi di legno sulla plancia 4x4 (per semplificare, si può omettere il posizionamento del pezzo rosso, ma si consiglia di inserirlo gradualmente a mano a mano che gli studenti prendono confidenza con questa attività).

Giocando con La Boca i partecipanti consolidano il senso della profondità nello spazio: sulla carta la visione bidimensionale del solido porta a pensare che tutti i pezzi siano posizionati sullo stesso piano e non ce ne sia qualcuno "davanti" e qualcuno "dietro" (Figura 6.4.6) o addirittura nella griglia 4x4 siano presenti addirittura più livelli di profondità (Figura 6.4.7).

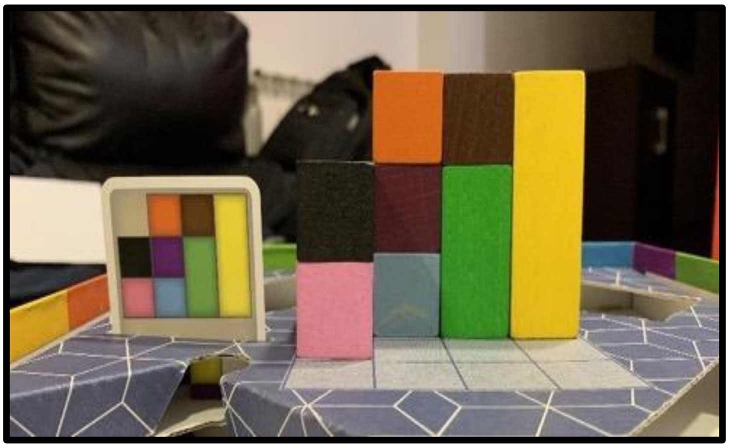


Figura 6.4.6 Un esempio di costruzione dove alcuni pezzi si trovano più "avanti" di altri

Figura 6.4.7 Un esempio di costruzione con pezzi collocati su diversi piani

Costruendo il solido partendo dalle due facciate opposte, pian piano ci si rende conto che passando alle tre dimensioni compare l'aspetto della profondità. Dopo diverse sessioni di gioco il docente può condurre una conversazione matematica su questo aspetto, per essere certo che sia chiaro a tutti, e verificarne l'effettiva padronanza giocando egli stesso con i partecipanti.

Risposta attesa dai partecipanti

Giocare può sembrare sempre un'attività semplice e di sicuro successo. Per una buona riuscita di quest'attività è necessario però anzitutto essere molto attenti al fatto che tutti i partecipanti abbiano compreso le regole del gioco, specialmente l'utilizzo di tutti i pezzi e le posizioni vietate dei pezzi (ponti, pezzi sospesi ed esterni). In secondo luogo, occorre intervenire per dare un ritmo al gioco affinché i partecipanti possano sentirsi coinvolti interamente nel gioco e ne accolgano tutta la sfida fino all'utilizzo delle carte difficili. Spesso sono proprio i partecipanti a chiedere di passare subito alle carte difficili, ovvero all'utilizzo di tutti i pezzi da collocare sulla plancia, proprio perché vogliono giocare al gioco "intero".

La scoperta del passaggio dal piano al solido con la perdita (o la comparsa) della profondità è sempre un punto molto delicato che va anch'esso seguito con cura dal docente: spesso c'è una fase iniziale di sgomento per alcuni che vorrebbero mettere necessariamente sullo stesso piano i pezzi che vedono nella carta obiettivo "tutti in primo piano", come ci hanno detto diverse volte docenti in servizio o futuri tali.

La conversazione matematica aiuta a lavorare su questo aspetto che presto da motivo di difficoltà diventa occasione di meraviglia una volta entrati nello spirito del gioco.

Attività 4.2: La visione dell'alto (15 minuti)

In questa sessione viene proposto ai partecipanti di realizzare la costruzione solida utilizzando tutti i pezzi del gioco La Boca ma stavolta a partire da una sola carta obiettivo particolare: la visione dall'alto della figura da realizzare.

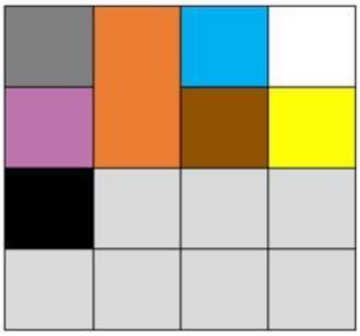



Figura 6.4.8 Un esempio di visione dall'alto

L'attività è tanto più ricca quanto più numeroso è il gruppo di partecipanti. Ad esempio, in questa sessione proposta ad un gruppo costituito da 16 futuri insegnanti, che lavoravano a coppie, sono state trovate ben 8 soluzioni di costruzione differenti. A queste va aggiunta la proposta in Figura 6.4.8. Si riportano in Figura 6.4.9 alcune di queste soluzioni che differiscono almeno per la posizione nello spazio di un pezzo.

L'obiettivo di quest'attività è far comprendere come una sola visione renda più ampia la varietà di soluzioni possibili e, ancora, come la visione dall'alto permetta di approfondire il concetto di profondità nello spazio che si perde nella sola visione dall'alto che non permette, ad esempio, di conoscere il numero di piano di cui è costituito il palazzo.

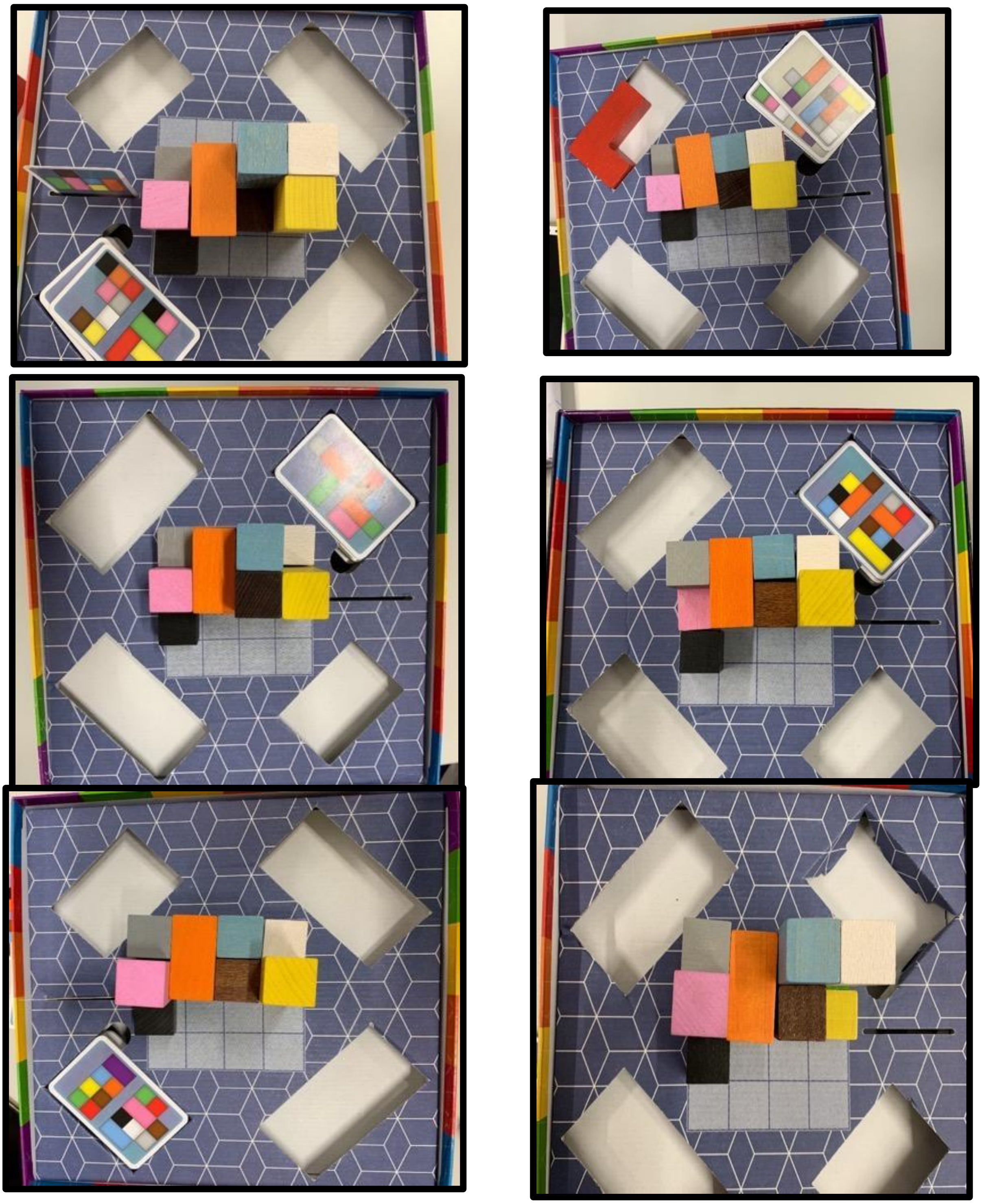


Figura 6.4.9 Altre 6 possibili costruzioni soluzione della visione dell'alto in Figura 6.4.8

Attività 4.3: Dal solido alla visione piana (15 minuti)

I partecipanti hanno preso confidenza con il gioco La Boca, hanno imparato a manipolare i pezzi, a costruire in maniera cooperativa il solido, hanno fatto esperienza del concetto di profondità nello spazio tridimensionale e hanno affrontato la sfida anche con la carta speciale "visione dall'alto". Si lavora sempre in gruppi di due o quattro persone. Ogni gruppo ha a disposizione una confezione del gioco La Boca.

Il docente spiega che esistono 5 possibili visioni piane dello stesso solido. Scegliendo una delle facce del solido come *frontale* (la facciata), e tenendola fissa, si potranno denominare le 5 visioni possibili dello stesso solido nel seguente modo:
VF la visione frontale scelta
VLD la visione laterale a destra rispetto alla frontale scelta
VLS la visione laterale a sinistra rispetto alla frontale scelta
VFOP la visione opposta alla frontale
VA la visione dall'alto.

Si definirà inoltre *livello 1* la porzione di spazio di altezza pari allo spigolo di un cubo, delimitata inferiormente dalla superficie quadrettata di base (il primo piano della costruzione), *livello 2* quella di altezza pari allo spigolo di un cubo e delimitato inferiormente dal cubo sottostante (il secondo piano della costruzione) e infine *livello 3* quella di altezza pari allo spigolo di un cubo e delimitato inferiormente dal cubo del livello 2 (il terzo piano della costruzione).

Si chiede quindi di rappresentare su fogli di carta a quadretti le 5 possibili visioni piane del solido costruito, scegliendo quella che chiameranno "facciata" come visione frontale e procedendo con gli altri punti di vista riferendosi sempre alla visione frontale scelta.

Figura 6.4.10 Al lavoro con un solido

Prima di demolire la costruzione ottenuta, il docente le scatterà delle foto da diversi punti di vista in modo da poterla poi – nell'attività 4.4 - confrontare con quelle che verranno realizzate utilizzando le visioni piane realizzate in questa attività.

Figura 6.4.11 Foto di un solido da diversi punti vista

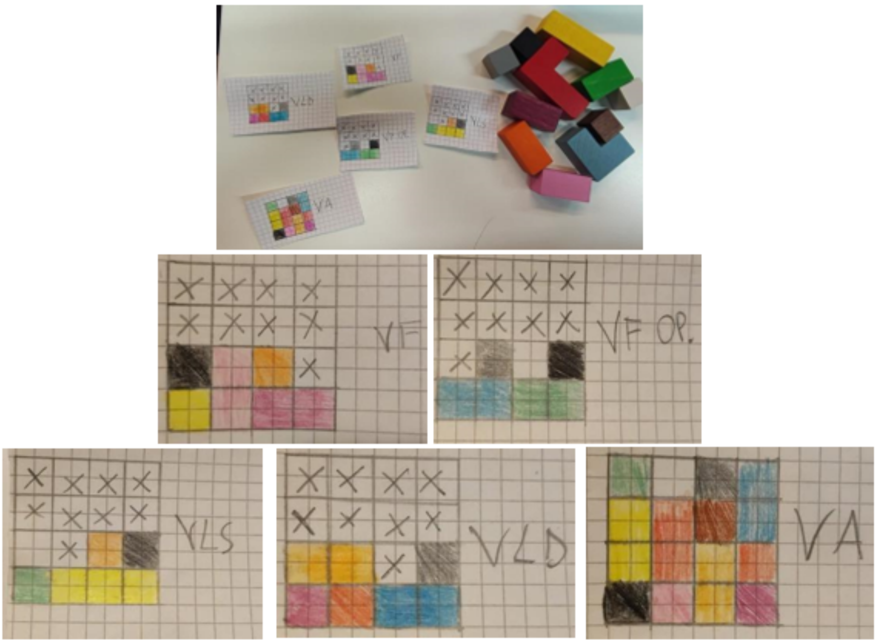


Figura 6.4.12 Foto delle 5 visioni possibili del solido in Figura 6.4.11

Al termine dell'attività il docente verifica la correttezza delle 5 visioni piane realizzate e le raccoglie per ciascun solido realizzato in tre mazzi distinti a seconda della tipologia (VF=VF+VFOP, VL=VLD+VLS, VA).

Risposta attesa dai partecipanti

Questa attività è stata proposta più volte (anche nelle classi con i bambini) e nella sua semplicità risulta molto importante per raggiungere lo scopo dell'intera sessione. È, infatti, fondamentale rappresentare correttamente le figure solide nel piano sul foglio di carta a quadretti per poter comprendere fino in fondo il passaggio dal solido al piano. Diventa poi interessante quando le costruzioni e le loro rappresentazioni sulla carta danno vita a nuove carte obiettivo rispetto a quelle già presenti nella scatola gioco, poiché i partecipanti si sentono così protagonisti addirittura della costruzione di una nuova sfida del gioco.

Attività 4.4: Dalle visioni piane al solido (60 minuti)

Si chiede al docente di realizzare prima dell'attività le cinque visioni bidimensionali di altri quattro solidi che, a differenza di quelli realizzati dai partecipanti nell'attività 4.3, devono rispettare le seguenti caratteristiche:

A. un solido deve essere realizzato con tutti i pezzi tranne la L rossa
B. un altro solido deve essere realizzato con tutti i pezzi tranne la L rossa e la L celeste
C. un altro solido ancora deve essere realizzato con tutti i pezzi tranne la L rossa, la L celeste e il parallelepipedo giallo (3x1x1)
D. un ultimo solido realizzato con numero e tipologia di pezzi scelti dal docente, ma differenti da quelli precedenti.

A questo punto il docente inizia l'attività a partire da un solido del tipo C, ovvero realizzato con tutti i pezzi tranne la L rossa, la L celeste e il parallelepipedo giallo (3x1x1). Non viene comunicato però ai partecipanti che per realizzare la costruzione non sono stati utilizzati tutti i pezzi e il docente consegna a ciascun gruppo una differente tipologia di visioni piane dello stesso solido.

Ciascun gruppo riceverà solo una tipologia di visione piana e da quella dovrà costruire il solido, immaginando quello che c'è nelle posizioni che non vengono indicate dalla visione piana a lui assegnata: un gruppo dunque riceverà le due VF, un altro gruppo le due VL e infine un ultimo gruppo l'unica VA dello stesso solido.

A seconda del numero di partecipanti, il docente può decidere di chiedere di realizzare contemporaneamente un solido del tipo B ad altri gruppi ed eventualmente ad altri un solido del tipo A.

Quando tutti i gruppi hanno realizzato il solido, si chiede ai gruppi di confrontare tra loro tutti i solidi costruiti dello stesso tipo (C, B o A). Le domande da porre ai partecipanti sono le seguenti:

a) Ci sono gruppi che hanno costruito un solido uguale al vostro a partire da visioni piane diverse dello stesso tipo di solido? Probabilmente non ci saranno gruppi che avranno costruito lo stesso solido, ma non si può escludere questa possibilità. In ogni caso molto dipenderà dal solido scelto e dalle relative visioni piane assegnate.

b) C'è una tipologia di visione piana che è meno vincolante di altre, ovvero che lascia più libertà di interpretazione e movimento? Per questa domanda dovrebbe essere scontata la risposta alla luce dell'attività 4.2 sulla visione dall'alto. La VA può essere realizzata, infatti, in moltissimi modi ed è la meno vincolante per il posizionamento dei pezzi che non si vedono, mentre le visioni frontale, laterali e posteriore vincolano quanto meno l'altezza della costruzione.

c) Avete utilizzato tutti lo stesso numero di blocchi di legno del gioco La Boca? Anche in questo caso dipenderà molto dal solido scelto e dalle relative visioni piane assegnate, ma potrebbero esserci gruppi che hanno utilizzato un numero diverso di pezzi. La motivazione va ricondotta alla perdita di profondità delle visioni piane, dove non si distingue, ad esempio, una fila di 3 cubi da una di 1 o 2. Tutte queste riflessioni vanno fatte assieme ai partecipanti.

Il docente consegna ora a ciascun gruppo un foglio con tutte le visioni piane dello stesso solido originale o più semplicemente ne proietta l'immagine su una LIM o su uno schermo. Si chiede quindi di modificare il solido per far sì che corrisponda anche alle nuove visioni piane.

Si invitano i partecipanti a riflettere su quali sono le eventuali differenze tra il solido costruito in precedenza e quello che corrisponde a tutte le visioni piane date. In questo caso è interessante mettere in evidenza i cambiamenti che hanno dovuto apportare al solido costruito in precedenza e soprattutto quali sono stati i dettagli delle nuove visioni piane che li hanno reso necessari.

Si chiede poi se la costruzione ottenuta è unica, confrontando le costruzioni dei vari gruppi. Infine, si invitano i partecipanti a riflettere su questa domanda: con tutte e cinque le visioni piane del solido originale è sempre possibile costruirne uno uguale rispettando tutte le condizioni iniziali?

Spesso si arriva alla conclusione che avendo tutte e cinque le visioni piane del solido originale è possibile costruirne uno uguale in modo univocamente determinato. Eppure, il numero (e la tipologia) di pezzi utilizzati dovrebbe metterci in guardia da una conclusione simile. È necessario, infatti, conoscere anche quanti e quali pezzi sono stati utilizzati perché la costruzione *possa* essere l'unica possibile.

Si suggerisce di dare uno spazio adeguato al confronto e alla conversazione matematica con i diversi gruppi e poi tirare le conclusioni a partire dalle risposte ottenute alle diverse domande proposte.

Si ripete quest'attività di costruzione e discussione per ogni solido realizzato dal docente: A, B, C e D. Se il numero dei gruppi dovesse essere abbastanza elevato, chi ha iniziato con un solido del tipo C prosegue con B, chi ha iniziato con B procede con A e chi ha iniziato con A procede con B.

Il docente può decidere anche di fare più copie delle visioni piane dello stesso solido o di proiettarle direttamente su una LIM o su uno schermo.

Nelle Figure 6.4.13, 6.4.14 e 6.4.15 si riportano degli esempi di realizzazioni con solidi rispettivamente di tipo C, B e A.

Figura 6.4.13 Un solido del tipo C (tutti tranne la L rossa, la L celeste e il parallelepipedo giallo) e le carte delle visioni piane

Figura 6.4.14 Un solido del tipo B (tutti tranne la L rossa e la L celeste) e le carte delle visioni piane

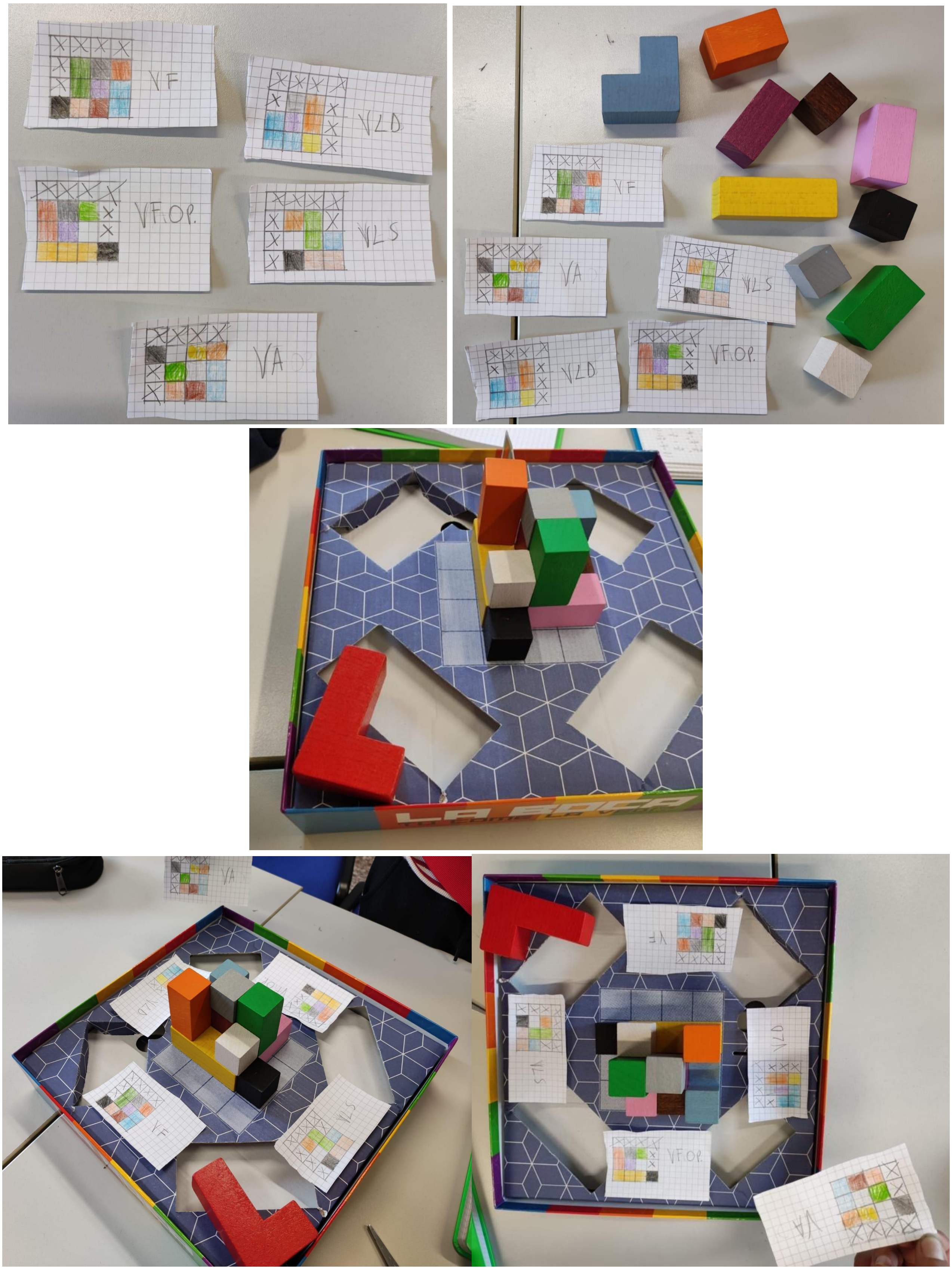


Figura 6.4.15 Un solido del tipo A (tutti i blocchi tranne la L rossa) e le carte delle visioni piane

Sul solido di tipo D si lavora invece a partire da tutte le visioni piane messe a disposizione dal docente. Si suggerisce al docente di costruire un solido senza utilizzare tutti i pezzi, anche se non è necessario, poiché l'importante è che i partecipanti non sappiano quali e quanti pezzi sono stati utilizzati. Nella Figura 6.4.13 sono riportate le foto di un solido di tipo D costruito utilizzando solamente cinque blocchi di legno.

Figura 6.4.16 Un solido del tipo D (blocchi a scelta del docente) e le carte delle visioni piane

Infine, si lavora su un solido realizzato dai partecipanti nell'attività 4.3. Ogni gruppo riceve tutte o solo alcune delle visioni piane del solido realizzato da un gruppo di suoi compagni. In quest'ultima situazione i partecipanti sanno che sono stati usati tutti i blocchi di legno.

Figura 6.4.17 Ricostruzione a partire dalle sole visioni frontali VF (posteriore e frontale)

Figura 6.4.18 Ricostruzione a partire dalle sole visioni laterali VL (destra e sinistra)

Il docente consegna ora a ciascun gruppo le altre visioni piane dello stesso solido originale. Si chiede quindi di modificare il solido per far sì che corrisponda anche alle nuove visioni piane.

Figura 6.4.19 Unione delle 5 visioni realizzate nell'attività precedente e ricostruzione del solido originale

Alla luce delle cinque diverse realizzazioni – secondo le condizioni sopra riportate - si invitano i partecipanti a riflettere sui pezzi che risultano nascosti e sugli spazi vuoti, o *buchi*, pari al volume di un blocco del gioco La Boca, attraverso la seguente domanda: è possibile collocare blocchi nascosti alla vista e spazi vuoti, o *buchi*, pari al volume di un cubo senza poterli determinare conoscendo tutte le visioni piane del solido? Se sì, come?

I partecipanti si accorgeranno che durante le costruzioni restano degli spazi interni che sono nascosti, non si vedono da nessuna delle visioni piane. Questi spazi interni devono essere riempiti per sostenere i pezzi appoggiati sui livelli superiori, tuttavia accade che i pezzi da utilizzare per riempire questi spazi siano più di uno e che la disposizione dei pezzi che non vediamo sia commutativa, ovvero scambiare la posizione relativa di questi pezzi non influisce sul risultato finale. Quindi due costruzioni possono essere apparentemente identiche e formate dallo stesso numero di blocchi del gioco La Boca, ma nascondere al loro interno delle differenze. Le riflessioni finali del docente riguarderanno senza dubbio la varietà delle soluzioni/costruzioni/rappresentazioni possibili e si metterà in evidenza l'importanza di un'osservazione attenta sia delle figure solide sia delle diverse visioni piane.

Risposta attesa dai partecipanti

Questa attività è stata realizzata in incontri con docenti e anche nelle classi con i bambini. In entrambi i casi la risposta è stata positiva, perché la collaborazione allo stesso obiettivo è motivante e piacevole. I bambini, in particolare, percepiscono questa attività come un gioco di costruzione, quindi sono ben disposti a dare e ricevere consigli, che spesso diventano un'occasione di apprendimento tra pari. È di tutte le età il fascino di mettere su carta qualcosa che si percepisce come reale, per cui ci si impegna nel rendere la costruzione precisa e corretta.

Sorprendente è l'atteggiamento positivo con cui viene accettata la sfida di ripercorrere il problema: dalla carta disegnata alla costruzione del solido. I "costruttori della carta" vengono riempiti di domande, i partecipanti si interrogano su ciò che non vedono ipotizzando dove nascondere eventuali pezzi, si stupiscono della non unicità della maggior parte delle soluzioni trovate e soprattutto scoprono una geometria dove osservazione e ragionamento sono elementi fondamentali. È infine frequente e fondamentale che sorgano nei partecipanti nuove domande come "Cosa succede se prendo solo un pezzo?" oppure "Cosa succede se ricopro tutta la base e lascio tutto al livello 1?" e così via. Si tratta di fare un'esperienza completa dell'avventura matematica dove si risolvono problemi e contestualmente ne nascono di nuovi da affrontare.

Sessione 5: Tassellare e misurare con i polimini

Durante questa sessione si lavora sulla tassellazione di superfici piane, sull'identificazione delle aree, sulle isometrie del piano (rotazione, traslazione, riflessione) e sul ribaltamento nello spazio o capovolgimento (da ora in poi lo chiameremo per comodità solo ribaltamento) attraverso polimini di cartone. Si usano, in particolare, i polimini contenuti nel gioco da tavola "Polyminix", che riteniamo molto efficace per sperimentare le isometrie del piano e per svolgere esercizi di tassellazione con una superficie piana data.

Scopo della sessione

Sperimentare e indagare figure piane e le loro caratteristiche, attraverso l'esperienza di osservazione e manipolazione di polimini.

Metodologia didattica

Si introducono i partecipanti al mondo dei polimini, si vedono i vari movimenti ammessi nel gioco (rotazione, traslazione, riflessione e ribaltamento), si distinguono in base al numero di quadrati da cui sono composti e si passa, infine, allo studio dei materiali di gioco e all'osservazione delle figure piane rappresentante nelle carte del gioco Polyminix affrontando successivamente le diverse modalità di gioco proposte.

Materiali

I 15 polimini del gioco Polyminix (acquistabile contattando emanuele@creativamente.eu), le carte o schede del gioco.

Tabella dettagliata della sessione

Attività 5.1	Pavimentazione con polimini dati	30 min
Attività 5.2	Pavimentazione con divieto di polimini	30 min
Attività 5.3	Pavimentazione con polimini nascosti	30 min
Attività 5.4	Pavimentazione con polimini di area nota	30 min

Attività 5.1: Pavimentazione con polimini dati (30 minuti)

I partecipanti sono disposti singolarmente (o a coppie) e ricevono in dotazione un kit di 15 polimini ciascuno (o ciascuna coppia). **I polimini sono figure geometriche piane composte da un numero finito di quadrati uguali che devono avere in comune con un altro quadrato almeno un lato.**

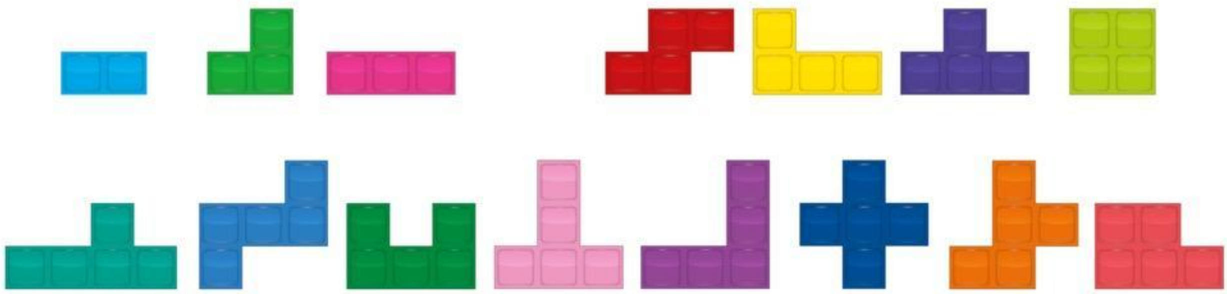


Figura 6.5.1 - Il kit di 15 polimini a disposizione nel gioco Polyminix

Dopo una breve manipolazione libera dei 15 polimini presenti, si indicano i nomi dei polimini in base al numero di quadratini da cui sono costituiti e si invitano i partecipanti a classificarli, scoprendo che nel kit hanno a disposizione:

- 1 domino
- 2 trimini
- 4 tetramini
- 8 pentamini

Si concorda poi che l'unità di misura dell'area è il quadratino (che d'ora in poi resterà sottinteso) e quella del perimetro è il lato di un quadratino (anche questo resterà sottinteso).

Si passa, quindi, a indagare una delle schede, spiegando che il gioco consiste nella pavimentazione dell'area bianca quadrettata. Il colore della carta ne indica la difficoltà di pavimentazione: carte verdi, più facili, con area compresa tra 14 e 16 quadretti, carte gialle di difficoltà media, con aree comprese tra 17 e 20 quadretti, carte rosse, più difficili, con aree comprese tra 21 e 24 quadretti.

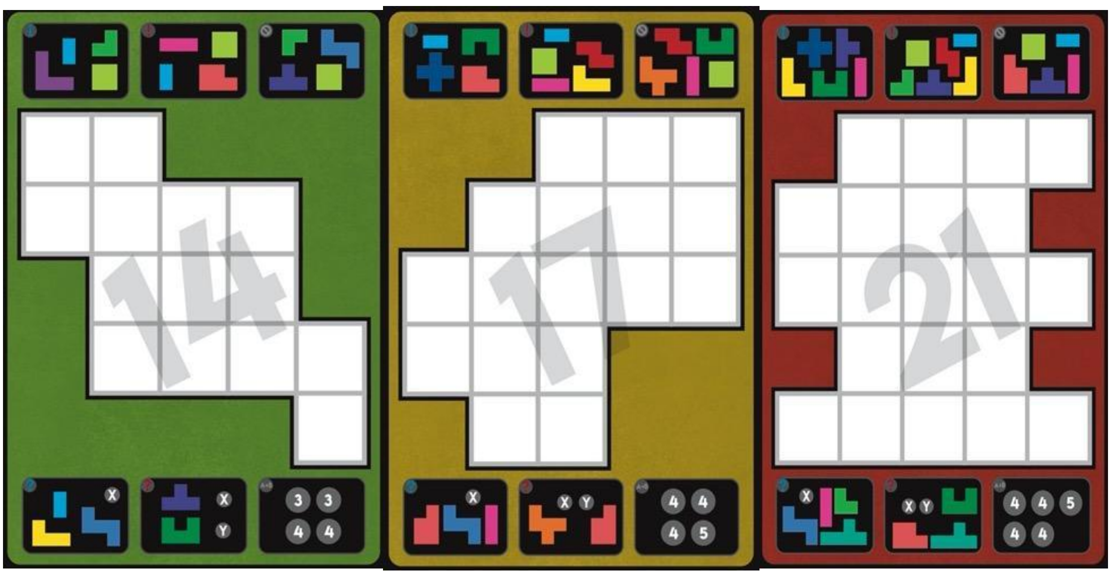


Figura 6.5.2 - Le tre tipologie di schede di gioco (verde, gialla, rossa)

Il numero che compare sulla scheda corrisponde alla misura dell'area da pavimentare espressa in quadratini (tale numero viene fatto scoprire ai bambini nell'attività in classe). Il docente attira poi l'attenzione sui riquadri neri che sono posti nelle carte da gioco, sopra e sotto l'area bianca da pavimentare. Ciascun riquadro corrisponde ad una partita o sfida di gioco ed è identificato da un simbolo che corrisponde a una delle facce del dado che si utilizza per giocare.

In questa prima attività ci si concentra sui punti esclamativi, blu e rosso, che corrispondono ai primi due riquadri neri e alla prima modalità di gioco: pavimentazione del piano con dei polimini dati.

L'insegnante può decidere di proiettare le schede di gioco consegnate cartacee per svelare le soluzioni delle richieste proposte e per ragionare in una conversazione matematica collettiva.

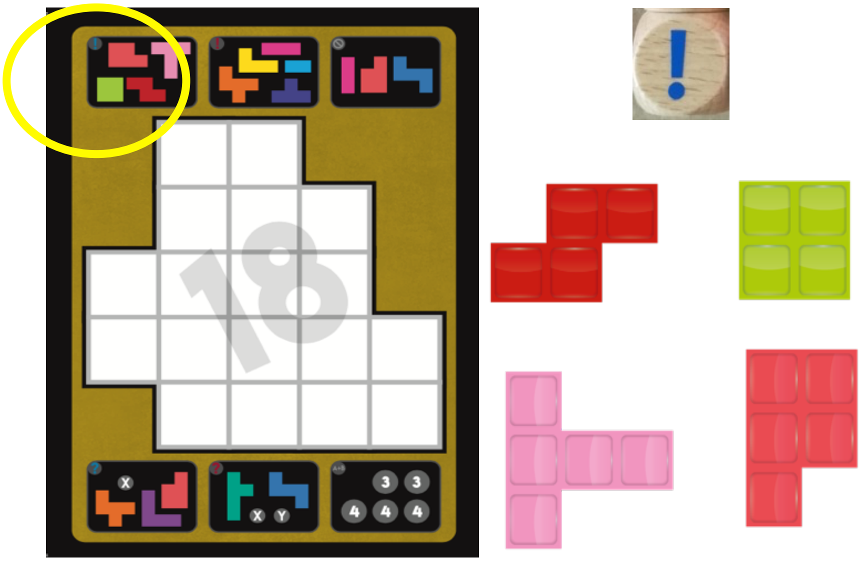


Figura 6.5.3 - Carta di area 18, prima modalità di gioco, il punto esclamativo blu, i polimini selezionati

Il docente indica ora il riquadro da prendere in esame, quello contrassegnato dal punto esclamativo blu. Poi invita a selezionare, tra i 15 polimini a loro disposizione, solo quelli indicati nel riquadro contrassegnato dal punto esclamativo blu e ad escludere tutti gli altri: quelli e solo quelli sono i polimini con cui pavimentare l'area della carta. Si procede per manipolazione e tentativi fino a ottenere la pavimentazione corretta della superficie rappresentata nella carta.

L'esercizio permette di prendere confidenza con le diverse forme dei polimini e con i cambiamenti che si verificano - o che non si verificano! - quando i polimini vengono ruotati o ribaltati. Inoltre, attraverso l'abitudine alla manipolazione, i partecipanti si rendono presto conto che alcuni polimini possono essere inseriti in determinati spazi e altri no, quindi il gioco diventa presto più veloce e coinvolgente.

Rispetto alla carta della Figura 6.5.3 e alla sua pavimentazione con i polimini indicati dal punto esclamativo blu, si può scoprire che la soluzione non è unica:

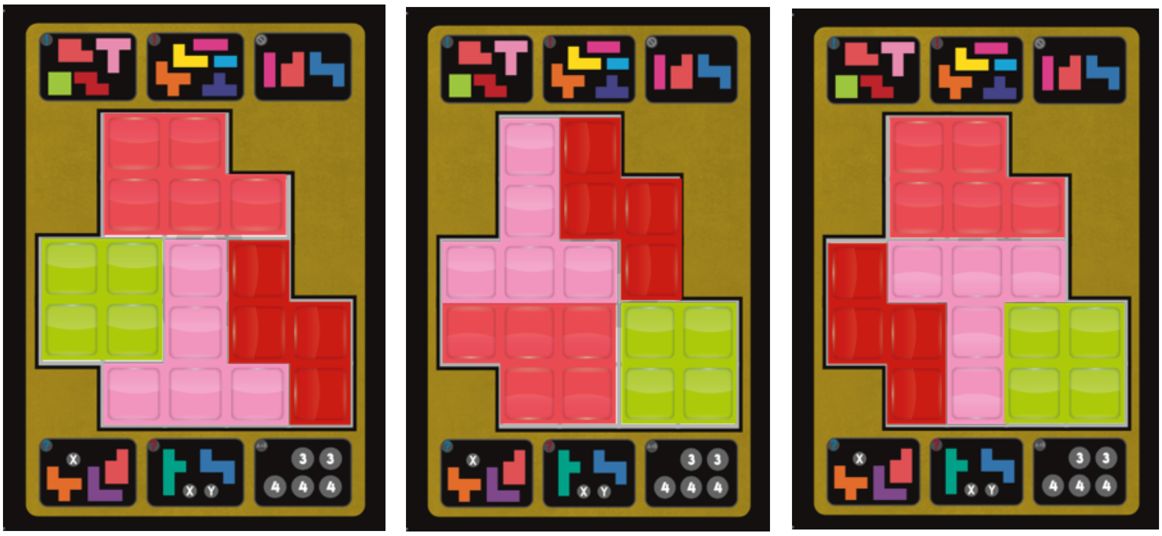


Figura 6.5.4 Possibili pavimentazioni con la stessa combinazione di polimini

Durante la pavimentazione e la manipolazione può accadere che, posizionati tre dei 4 polimini richiesti, ci si accorga che resta a disposizione uno spazio che non può essere occupato dal quarto polimino selezionato, ma che questo spazio ricorda la forma di un altro polimino (Fig. 6.5.5).

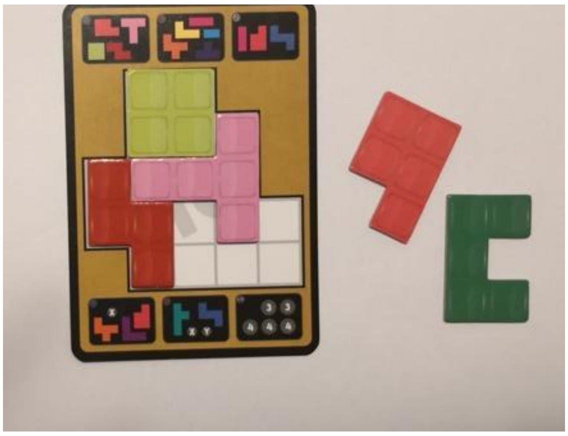


Figura 6.5.5 Disposizione che suggerisce l'uso di un polimino diverso da quelli indicati

I partecipanti devono essere quindi guidati all'osservazione che la stessa carta può essere pavimentata sostituendo uno solo dei polimini indicati dal punto interrogativo blu con un altro polimino di uguale area; per esempio, possiamo sostituire un pentamino (quello rosso) con un altro pentamino (quello verde scuro) e ottenere la seguente pavimentazione possibile:

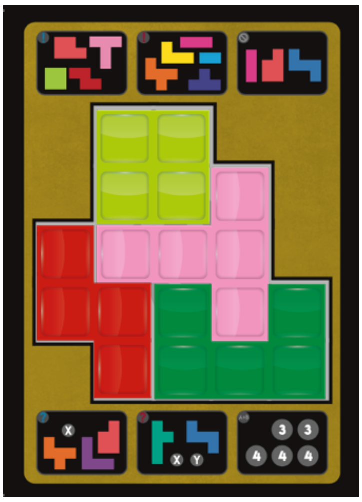


Figura 6.5.6 Pavimentazione che non rispetta la consegna, ma che porta a fare delle considerazioni importanti "oltre il gioco"

Questo ci porta a riflettere sulla somma delle aree dei singoli polimini, spingendoci a sperimentare nuove combinazioni di polimini, la cui somma delle aree sia sempre uguale all'area della scheda.

Disattendendo per un attimo la richiesta del punto esclamativo blu si può anche provare a ricoprire la stessa area scegliendo polimini diversi da tutti quelli a disposizione.

Quindi, per valorizzare la scoperta del possibile utilizzo del pentamino verde scuro, si può partire da quello e, mantenendolo fisso, si chiede di costruire la pavimentazione con altri polimini tra quelli a disposizione, cercando tutte le possibili combinazioni con gli altri polimini che permettono la pavimentazione della scheda (alcune delle possibili pavimentazioni sono in Fig. 6.5.7).

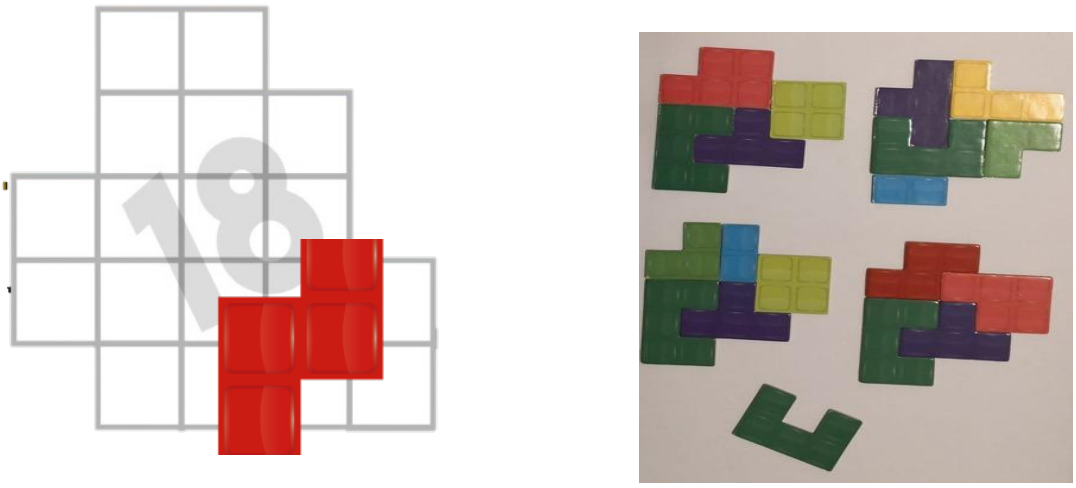


Figura 6.5.7 Possibili pavimentazioni dell'area 18, che prevedono l'uso del pentamino verde scuro

A questo punto si invita a riflettere sulle aree dei singoli polimini e sulle somme delle aree. Ad esempio, il pentamino rosso (figura 6.5.7 in basso a sinistra) può essere sostituito dal trimino verde e dal domino celeste (figura 7 in basso a destra): 5 = 3 + 2

Si prosegue poi andando a controllare come sono state realizzate le altre pavimentazioni, e quindi si riflette sulle possibili scomposizioni dell'area da ricoprire che corrispondono alle decomposizioni additive del numero 18. Nel caso in figura:

18 = 5 + 5 + 4 + 4 (in alto a destra e in basso a sinistra)

18 = 5 + 4 + 4 + 3 + 2 (in alto a sinistra e in basso a destra)

L'equivalenza geometrica è anche un'equivalenza aritmetica.

Con lo stesso sistema, partendo da un altro polimino da tenere fisso, si invita a ragionare su come costruire intorno a quel polimino la pavimentazione completa. Si valuta l'area da pavimentare e si scelgono i polimini in base alla loro area. Nel caso in figura, sempre per pavimentare la stessa area da 18 quadratini, si invita a tenere fisso il pentamino rosso e a riflettere sull'area restante (Fig. 6.5.8):

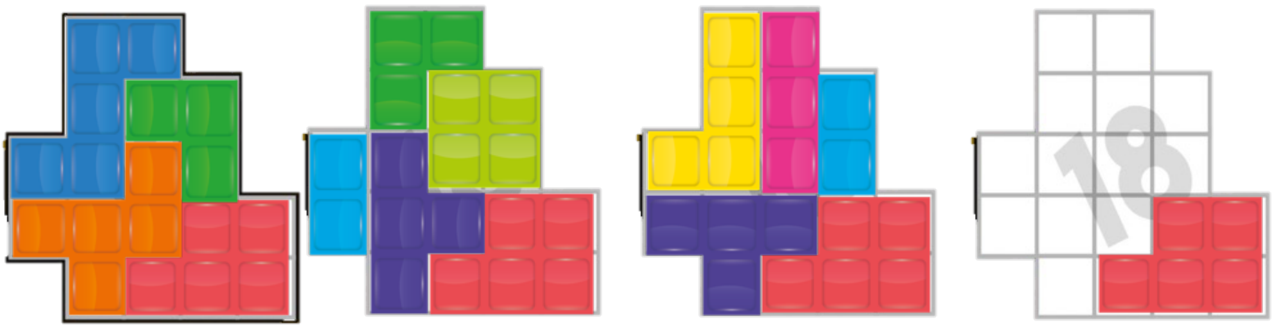


Figura 6.5.8 Pavimentazione partendo da un polimino obbligato

18 – 5 = 13

13 = 4 + 4 + 3 + 2

13 = 5 + 4 + 4

13 = 5 + 5 + 3

13 = 5 + 3 + 3 + 2

Si richiede quindi di trovare una pavimentazione possibile per ciascuna delle scomposizioni elencate dell'area rimanente pari a 13.

Si può verificare, a un certo punto, che non si riesca a pavimentare l'area scegliendo i polimini in base alle loro aree, sebbene la somma delle aree sia comunque 18.

Questo è il caso della Fig. 6.5.9: dopo aver posizionato il pentamino rosso e gli altri due pezzi, cercando di riprodurre la configurazione data dalla scomposizione aritmetica 18 = 5 + 5 + 3 + 3 + 2

Nonostante l'area residua da ricoprire sia di 6 quadratini, ci si accorge presto che a causa della forma dei pezzi a disposizione non è possibile completare la pavimentazione.

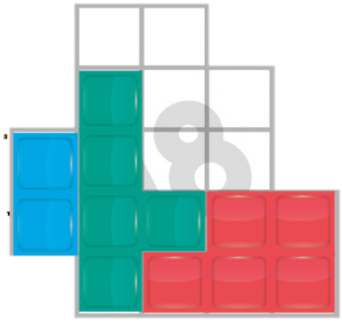


Figura 6.5.9 - Impossibilità di completare la pavimentazione con i polimini restanti

Va quindi avviata una riflessione di tipo aritmetico. La scomposizione aritmetica della superficie di 6 quadratini può essere: $6 = 4 + 2$ o $6 = 3 + 3$.

Si guida a ragionare sul fatto che la prima decomposizione non è realizzabile in quanto l'unico domino presente nel kit è stato già utilizzato, come si vede in figura. Si può allora provare con la seconda scomposizione, che aritmeticamente sarebbe possibile perché ci sono due trimini a disposizione nel kit. Attraverso la manipolazione, però, ci si rende presto conto che i due trimini non sono comunque utili per la risoluzione geometrica. Aritmeticamente è possibile, eppure non si riesce a "incastrare" i due trimini nell'area da 6, a causa della loro forma.

Questo è un punto delicato sul quale si invitano i docenti a soffermarsi ancor prima di proporre l'attività agli studenti: siamo davanti a quello che sembra un controsenso rispetto a quanto detto in precedenza. Abbiamo inizialmente suggerito che la soluzione aritmetica e quella geometrica si equivalgono, che si può ragionare in termini di somma delle aree oppure attraverso le prove e la manipolazione, per ottenere lo stesso risultato. Ora invece sembra che la soluzione aritmetica sia possibile e quella geometrica non lo sia, e quindi sembra che le due soluzioni portino a risultati differenti. La spiegazione risiede nel fatto che i due trimini (che corrispondono alla soluzione aritmetica $3 + 3$) permettono la pavimentazione, ma tale soluzione è vincolata alla forma dei trimini stessi e alla forma della superficie da pavimentare.

Andando avanti fidandosi della soluzione aritmetica ci si accorge che il $3 + 3$, cioè i due trimini, possono risolvere il problema e pavimentare l'area solo cambiando la posizione degli altri pezzi in gioco. Una possibile soluzione della decomposizione aritmetica $18 = 5 + 5 + 2 + 3 + 3$ è mostrata in figura 6.5.10.

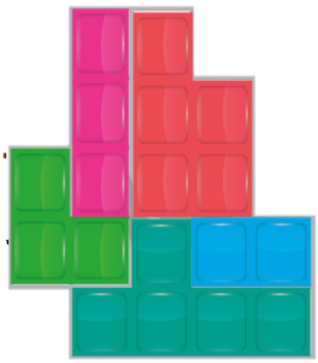


Figura 6.5.10 - Spostamento del pentamino rosso e pavimentazione dell'area 18

Si invitano i docenti a trovare altri esempi di pavimentazioni di questo tipo, da proporre agli studenti per far comprendere quanto il legame tra soluzione geometrica e soluzione aritmetica dello stesso problema siano legate e non in contrapposizione tra loro.

Anche il secondo riquadro delle carte da gioco, quello identificato dal punto esclamativo rosso, prevede la stessa modalità di gioco: l'area va pavimentata utilizzando tutti e solamente i polimini indicati.

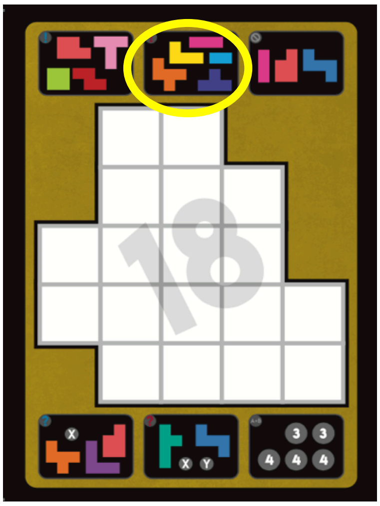


Figura 6.5.11 - Punto esclamativo rosso: stessa modalità di gioco

Risposta attesa dai partecipanti

Sicuramente si tratta di un'attività particolarmente coinvolgente, eppure l'esperienza ci dice che saranno presenti sia partecipanti che si entusiasmeranno presto e rapidamente troveranno le tassellazioni corrette, sia quelli che avranno bisogno di più tempo per scoprire la giusta collocazione dei polimini. Certamente sarà molto importante permettere a ciascuno di fare l'esperienza di scoperta della soluzione alla sfida di una o più superfici piane da ricoprire, eventualmente suggerendo la collocazione del primo polimino.

Esperienza con i bambini

I bambini manipolano con piacere i polimini. Si consiglia di lasciar loro tempo per scoprirli, per prendere confidenza con le possibili trasformazioni sul piano e per distinguerli in base alla forma, alla superficie occupata. Si suggerisce di ribadire spesso il concetto che i polimini possono essere ruotati e ribaltati, e che si considerano come la stessa figura due figure risultanti dall'uso degli stessi polimini, semplicemente disposti diversamente sul piano (si può fare un parallelo con la proprietà commutativa dell'addizione).

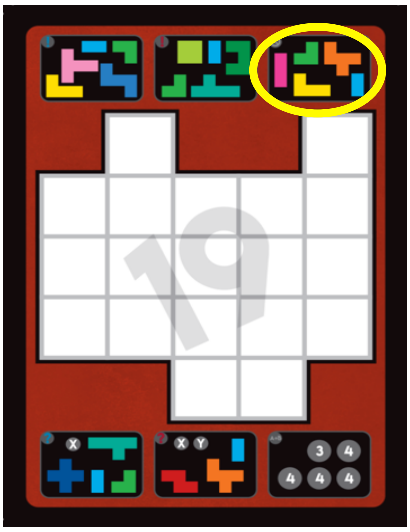
Nella classe ci saranno bambini che per una propria disposizione personale si appassioneranno all'aspetto geometrico, all'aspetto manipolativo, all'aspetto della sfida per tentativi e altri che faranno più fatica. Con questi ultimi si può puntare sull'aspetto aritmetico delle costruzioni: ciascuna figura richiesta, infatti, deriva dalla somma delle aree dei singoli polimini, quindi conoscendo l'area della figura che si vuole realizzare si può partire dalla scomposizione di tale numero e si possono preventivamente selezionare i polimini necessari, anziché andare avanti per successive prove di manipolazione.

Attività 5.2: Pavimentazione con divieto di polimini (30 minuti)

Questa seconda modalità di gioco, identificata dal simbolo del divieto, consiste nel pavimentare l'area bianca utilizzando i polimini a scelta tra i 15 presenti nel kit di gioco, con esclusione di quelli indicati nel terzo riquadro in alto della carta. È necessario mettere da parte i polimini indicati e a lavorare solo con quelli che restano.

Il docente invita a ragionare sul fatto che questa modalità di gioco è più complicata delle precedenti, perché occorre scegliere i polimini da usare da un insieme più numeroso e ci sono moltissime combinazioni. In un primo momento si permette di lavorare per manipolazioni successive, come nell'attività precedente. L'insegnante valuta bene il tempo da dedicare a questa prima fase manipolativa, nella quale si corrono due rischi: da una parte l'instaurarsi dell'impressione che il gioco sia sempre uguale, con il conseguente subentrare della noia anche nel caso in cui alcuni completino la pavimentazione troppo in fretta oppure non riescano a completarla affatto, dall'altra la successiva disattenzione nel momento in cui li si vuole portare a ragionare sul legame con la soluzione di tipo aritmetico.

Nella figura 6.5.12 è riportato un esempio di modalità di gioco "divieto" con una carta rossa di area 19.



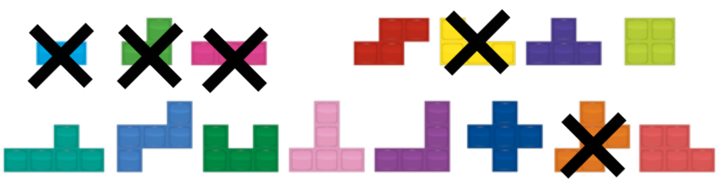


Figura 6.5.12 - Carta rossa, di area 19, modalità di gioco "divieto"

La riflessione aritmetica prosegue in questa maniera: conoscendo le superfici si provano solo le combinazioni possibili, analizzando le decomposizioni aritmetiche del 19:

19 = 5 + 5 + 5 +4

19 = 4 + 4 + 4 + 4 + 3

19 = 4 + 4 + 4 + 5 + 2

19 = 5 + 5 + 4 + 3 + 2

19 = 4 + 4 + 4 + 4 + 3

Si analizzano poi le decomposizioni possibili assieme ai pezzi vietati e si scopre che solo la prima è effettivamente possibile. Infatti:

- la seconda prevede l'uso di uno dei trimini, che sono entrambi vietati;
- la terza prevede l'uso del domino, che è vietato;
- la quarta addirittura prevede l'uso di entrambi i trimini;
- la quinta, oltre al trimino, prevede l'uso di tutti e 4 i tetramini, ma uno di essi è vietato.

Quindi, attraverso un ragionamento aritmetico, si selezionano solo i pezzi permessi e si dirigono in questo modo i loro tentativi manipolativi. Come già successo in precedenza, anche questa volta la soluzione non è unica (Fig. 6.5.13):

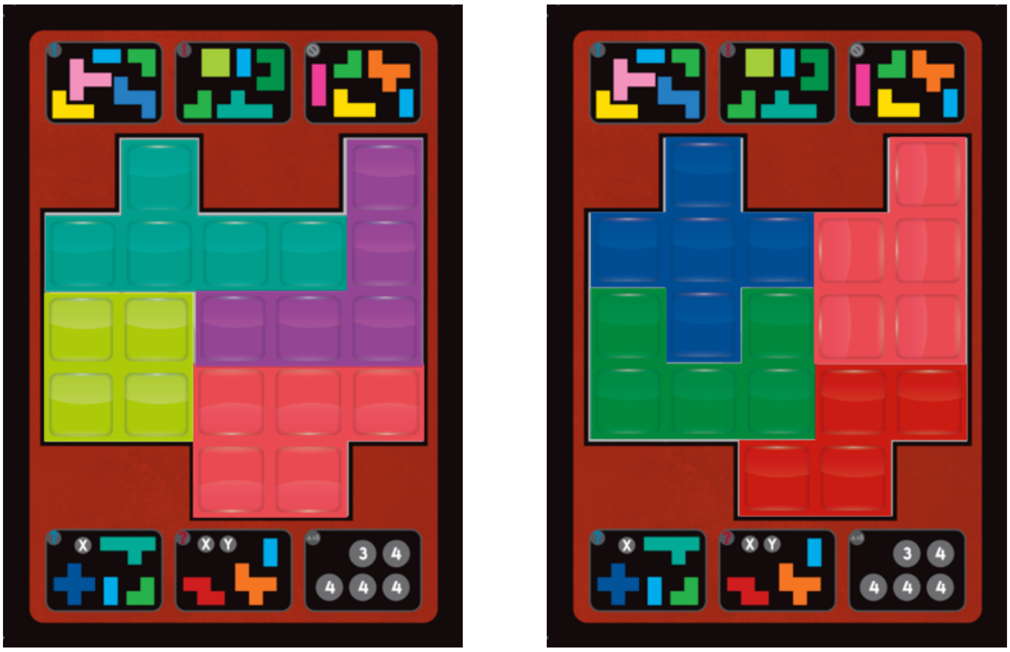


Figura 6.5.13 - Possibili pavimentazioni con la modalità di gioco "divieto"

Risposta attesa dai partecipanti

In questa modalità di gioco gli adulti come i bambini trovano maggiore difficoltà nel determinare le pavimentazioni. Spesso capita che dimentichino la consegna e la confondano con la precedente modalità di gioco scegliendo proprio i pezzi vietati!

Nel caso della Fig. 6.5.13 si scopre facilmente che i pezzi vietati non permettono di ricoprire la figura: la somma delle aree dei pezzi vietati è 17 anziché 19 come la figura data sulla carta. Oltre a questo particolare, sicuramente nel "divieto" fanno esperienza di cosa vuol dire fare delle scelte "ragionate": infatti non devono scegliere solo dove collocare i polimini, ma anche quali di essi possono essere utilizzati.

Attività 5.3: Pavimentazione con polimini incogniti (30 minuti)

La modalità di gioco indicata dal punto interrogativo (blu o rosso) prevede che si scelgano i polimini indicati e poi se ne trovino altri per completare la pavimentazione. Questi polimini incogniti sono indicati da lettere: la X, se è uno solo, X e Y se sono due, X, Y e Z se sono tre.

Nel caso della carta in Fig. 6.5.14, di superficie 19, il punto interrogativo blu indica che devono essere usati i due pentamini, il trimino e il domino disegnati nel riquadro, più un solo polimino incognito. Anche in questo caso si può procedere per tentativi manipolativi, ma ci si rende presto conto che, posizionati i tre pezzi obbligati, resta a disposizione un'area di soli 4 quadretti, quindi occorre orientarsi su un tetramino per completare la pavimentazione.

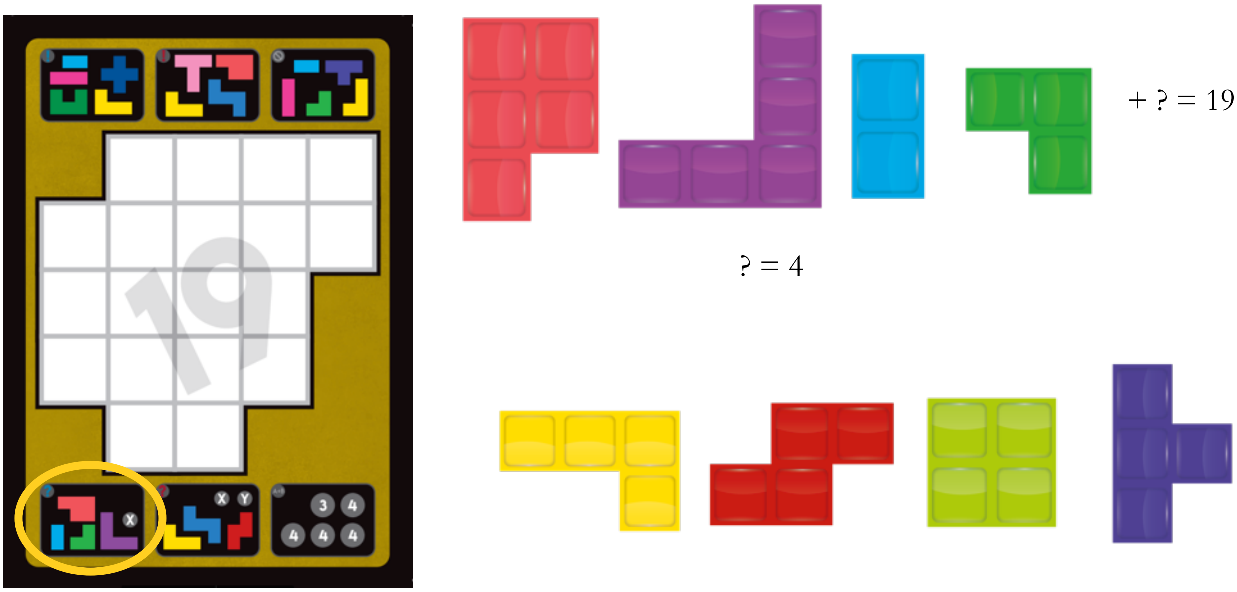


Figura 6.5.14 - Carta di area 19, modalità di gioco "punto interrogativo blu", polimini incogniti

Dopo aver selezionato i tetramini con cui completare la pavimentazione, manipolando si trovano tutte le soluzioni possibili, che in questo caso sono 4 (Fig. 6.5.15):

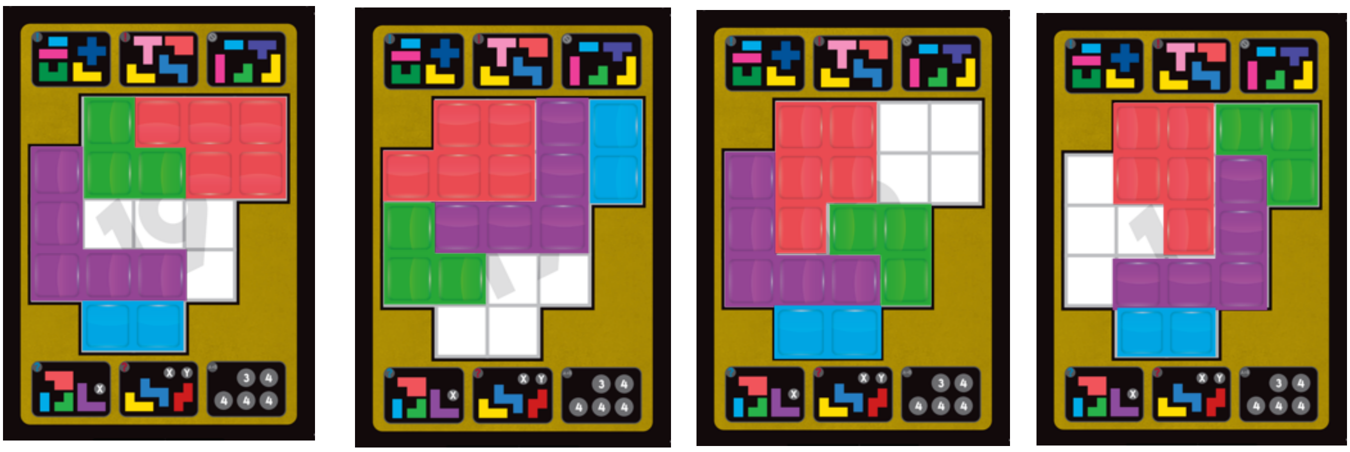


Figura 6.5.15 - Possibili soluzioni alla richiesta del punto interrogativo blu, polimini incogniti

Si invitano i docenti a preparare altre carte per mostrare che non sempre questa situazione si verifica: in alcuni casi la forma dell'area da pavimentare e dei polimini obbligati rende impossibile l'uso di alcuni pezzi, sebbene la loro superficie sia quella giusta per completare la pavimentazione. Si passa poi ad altre sfide identificate dal punto interrogativo, sia blu sia rosso, nelle quali i polimini incogniti sono più di uno. Anche in questi casi si calcola la superficie incognita da pavimentare per scegliere solo i polimini utili a tale pavimentazione.

Esperienza con i bambini

Nel corso delle attività svolte in classe con il gioco Polyminix ci siamo resi conto che la modalità di gioco identificata dal punto interrogativo, che richiede l'identificazione di polimini incogniti, è la preferita da quei bambini che hanno una buona capacità nell'aritmetica, ma che ancora non si sentono a proprio agio con la manipolazione. Questo perché la sicurezza data loro dal poter calcolare le aree da pavimentare, e selezionare così i polimini possibili tra i tanti, permette di ridurre le variabili e concentrarsi solo su poche possibilità. A mano a mano, fidandosi della loro abilità di calcolo, svilupperanno anche una miglior competenza geometrica.

Attività 5.4: Pavimentazione con polimini di area nota (30 minuti)

L'ultima modalità di gioco proposta dalle carte di Polyminix è contrassegnata dall'icona "A+B". Compaiono nel riquadro corrispondente dei numeri, che indicano le superfici dei polimini da usare per la pavimentazione della carta. Anche questa volta siamo molto legati al mondo dell'aritmetica.

Prendendo come esempio una delle carte già analizzate, quella con area 18 (Fig. 6.5.16), vediamo che sono richiesti per la pavimentazione i due trimini e tre dei quattro tetramini.

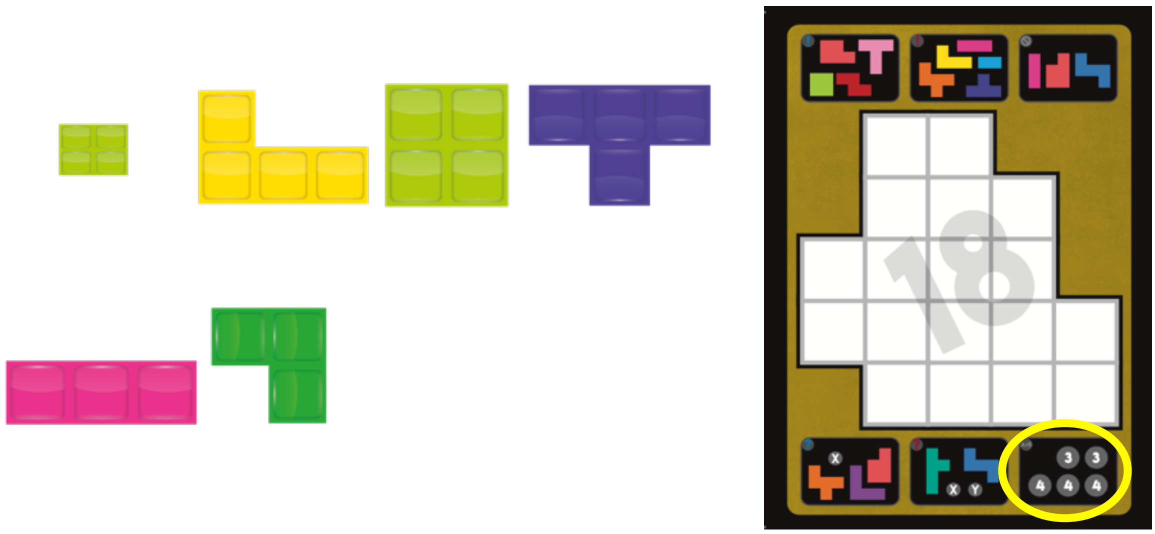


Figura 6.5.16 - Modalità di gioco "A+B", somma delle aree

Il docente lascia totale libertà di azione per la risoluzione di questa pavimentazione. Si procede così nel modo preferito, con tentativi manipolativi. Anche in questo caso, come spesso accade, le soluzioni possibili sono più di una, e prevedono l'uso di diverse combinazioni dei polimini selezionati.

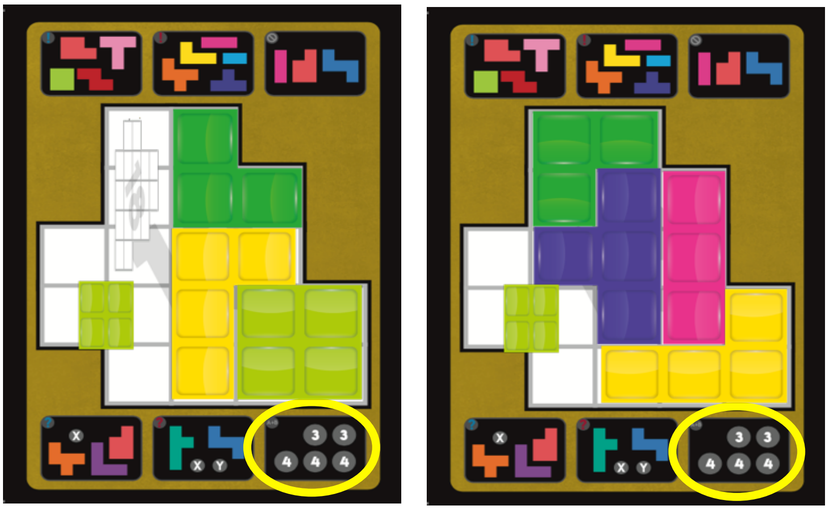


Figura 6.5.17 - Possibili soluzioni della sfida "A+B"

Risposta attesa dai partecipanti

Analogamente alla modalità di gioco del "divieto" gli adulti come i bambini possono fare esperienza di cosa vuol dire fare delle scelte "ragionate": stavolta però la scelta dei polimini da utilizzare è guidata e molto spesso (si pensi al caso dei trimini) è quasi obbligata. Certamente nel caso in cui siano presenti uno o più pentamini tra quelli della sfida "A+B" si tratta di una scelta ragionata più articolata. Spesso si sorprendono nell'individuare più soluzioni diverse al variare della scelta di uno o più polimini equivalenti: ad esempio, una soluzione con il pentamino rosa "a forma di T" e un'altra con il pentamino verde "a forma di C". All'interno di un percorso, dove la gradualità è una componente indispensabile, quest'ultima modalità di gioco apre definitivamente gli occhi ai partecipanti sulla grande varietà di soluzioni presenti per la stessa sfida, per la stessa superficie da tassellare.

Sessione 6: Costruire figure con i polimini

Questa sessione fa seguito alla sessione 5 nella quale il gioco da tavola Polyminix è stato utilizzato per prendere confidenza con i polimini, per sperimentare le trasformazioni sul piano (rotazione, traslazione, ribaltamento) e per esercizi di tassellazione con un'area data.

Scopo della sessione

Sperimentare e indagare le figure piane e le loro caratteristiche, attraverso l'osservazione, la manipolazione e il calcolo di aree e perimetri.

Metodologia didattica

Dopo aver preso confidenza con i polimini, averli distinti in base al numero di quadrati da cui sono composti e aver realizzato qualche figura, si passa alla costruzione sistematica di figure.

Materiali

I 15 polimini del gioco Polyminix (acquistabile contattando emanuele@creativamente.eu)

Tabella dettagliata della sessione

Attività 6.1	Quadrati e rettangoli	50 min
Attività 6.2	Perimetro e Area	50 min
Attività 6.3	Discussione	20 min

Attività 6.1: Quadrati e rettangoli (50 minuti)

I partecipanti sono disposti singolarmente (o a coppie) e ricevono in dotazione un kit di 15 polimini ciascuno (o ciascuna coppia). L'insegnante ha la possibilità di proiettare le figure che sono inserite nel testo per svelare le soluzioni delle richieste proposte e per ragionare in una conversazione matematica collettiva.

Il docente, quindi, invita a costruire le seguenti figure:

A. QUADRATI

a) un quadrato 2x2 (o di area 4)[34]. C'è un'unica possibilità di realizzare un quadrato di area 4 ed è il tetramino quadrato stesso (Fig.6.6.1).

[34] Nell'attività in classe con i bambini ciascun insegnante si rivolgerà ai suoi alunni nel modo che ritiene più consono al linguaggio che nel corso delle lezioni e dei mesi di scuola hanno costruito assieme. Se i bambini sono abituati a riferirsi alle figure attraverso la misura della loro area, l'insegnante chiederà un quadrato di area 4, se invece è consuetudine per la classe

Figura 6.6.1 - Quadrato 4x4

b) un quadrato 3x3 (o di area 9). Ci sono diverse possibilità, si invita a realizzarne il maggior numero possibile, e si riflettere sul fatto che un quadrato 3x3 può essere realizzato con:
   – un tetramino e un pentamino (Fig.6.6.2)

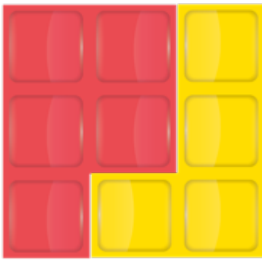


Figura 6.6.2 - Quadrato di area 9 formato dalla somma delle aree 4+5

   – un tetramino, un trimino e il domino (Fig.6.6.3)

Figura 6.6.3 - Quadrato di area 9 formato dalla somma delle aree 4+3+2

(si comincia quindi a ragionare sulla somma aritmetica delle aree)

c) un quadrato 4x4 (o di area 16): anche in questo caso ci sono molte combinazioni, e il quadrato 4x4 può essere realizzato con
   – due pentamini, un tetramino e il domino (Fig.6.6.4)

---

riferirsi alle figure specificando la lunghezza dei lati, l'insegnante proporrà la realizzazione di un quadrato 2x2. Naturalmente questa è anche l'occasione per ampliare il linguaggio matematico che si utilizza in classe.

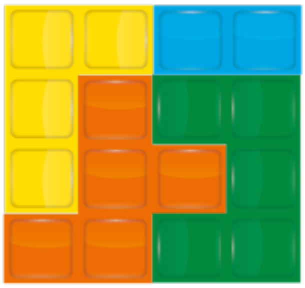


Figura 6.6.4 - Quadrato 4x4 formato dalla somma delle aree 5+5+4+2

– due trimini e due pentamini (Fig.6.6.5)

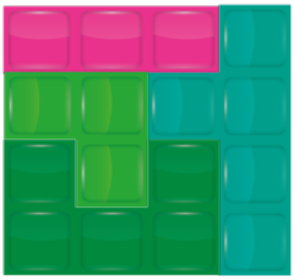


Figura 6.6.5 - Quadrato 4x4 formato dalla somma delle aree 5+5+3+3

– un pentamino, due tetramini e un trimino (Fig.6.6.6)

Figura 6.6.6 - Quadrato 4x4 formato dalla somma delle aree 5+4+4+3

d) un quadrato 5x5 (o di area 25): si fa lo stesso ragionamento (un solo esempio in Fig.6.6.7)

Figura 6.6.7 - Quadrato 5x5

e) così via, con quadrati sempre più grandi, fino ad arrivare al quadrato di area 64. Il quadrato di area 64 è il più grande possibile e si può realizzare solamente usando tutti e 15 i polimini a disposizione, ma questo fatto non dovrà essere svelato prima dal docente, bensì dovrà essere scoperto ragionando per tentativi o per somma delle aree dei singoli polimini.

B. RETTANGOLI

Anche per i rettangoli si può partire da dimensioni piccole per poi gradualmente aumentarle. Si chiederà quindi di realizzare un rettangolo di area 2 (che corrisponde al domino), di area 3 (che corrisponde al trimino rosa), di area 6, di area 8 (Fig.6.6.8), di area 10, di area 12 (Fig.6.6.9) e così via.

Figura 6.6.8 - Rettangoli di aree crescenti: 2x1, 3x1, 3x2, 4x2

Figura 6.6.9 - Rettangoli di area 10 e 12

Da un certo punto in poi si può puntare l'attenzione sull'esistenza di più rettangoli diversi che hanno la stessa area (sia perché sono formati da combinazioni diverse di polimini, sia perché hanno lati di diverse lunghezze).

Si inizia così a ragionare:

- sulla scomposizione di un numero con 12 = 4 + 3 + 3 + 2 oppure 12 = 5 + 5 + 2 o ancora 12 = 5 + 4 + 3 (Fig.6.6.10)
- sui multipli e i divisori di un numero con 12 = 6 x 2, ma anche 12 = 4 x 3 (Fig.6.6.11).

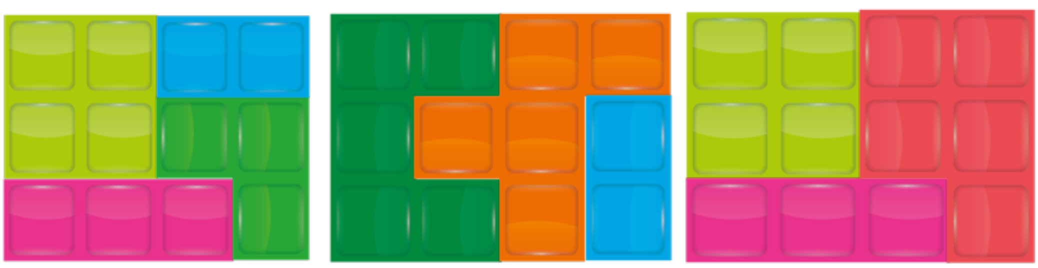


Figura 6.6.10 - Rettangoli di area 12 (4x3) formati da somme di polimini di aree diverse

Figura 6.6.11 - Rettangolo di area 12 (6x2)

Si arriva, gradualmente dopo la costruzione di tutti i rettangoli possibili - oppure anche saltando qualche passaggio qualora la stanchezza sia tanta e ci sia il rischio di perdere l'attenzione e il coinvolgimento dei partecipanti - a chiedere la realizzazione di un rettangolo di area 65: aritmeticamente sarebbe possibile, perché 65 = 13 x 5, ma non è possibile costruirlo perché la somma delle aree di tutti polimini è 64 (l'abbiamo visto costruendo il quadrato 8 x 8).

Si mostra però che un rettangolo di area 65 si può costruire se si accetta che abbia un "buco" da qualche parte (Fig.6.6.12).

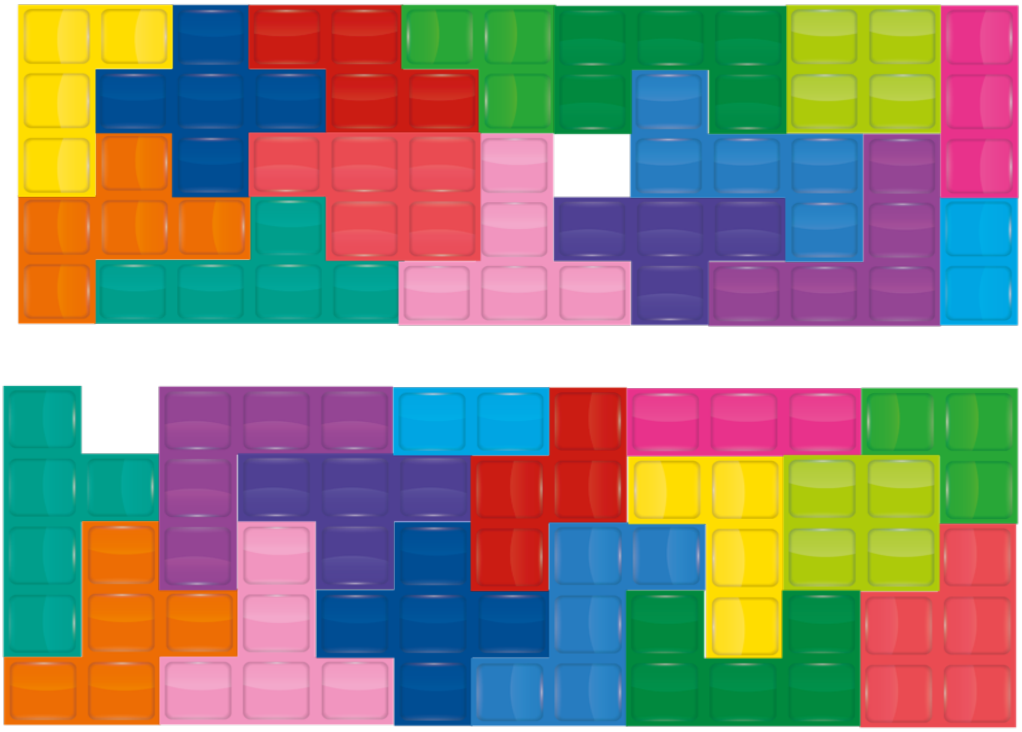


Figura 6.6.12 - Rettangoli di area 65, con un buco

Si chiede quindi di costruire un rettangolo usando tutti i pezzi e senza lasciare buchi. A questo punto l'area del rettangolo è 64, quindi si può costruire un rettangolo 16 x 4 (Fig.6.6.13), oppure riproporre il quadrato 8 x 8 (Fig.6.6.14). Questo consente di ragionare sul fatto che anche il quadrato è un rettangolo, un rettangolo speciale perché equilatero.

Figura 6.6.13 - Rettangolo di area 64 (16x3)

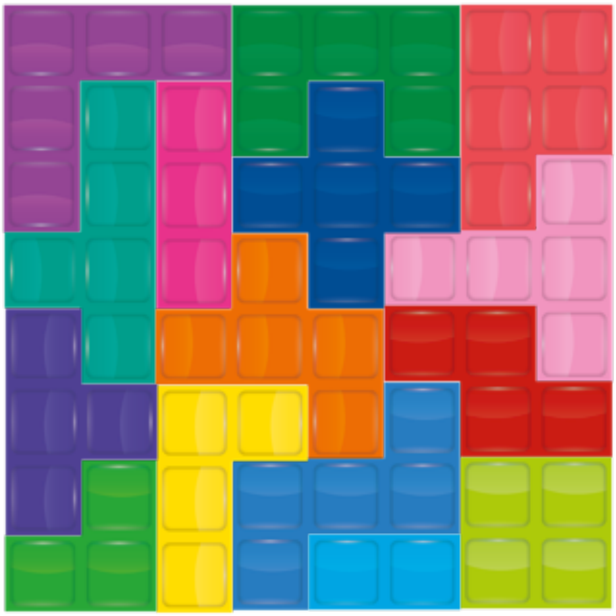


Figura 6.6.14 - Rettangolo equilatero di area 64 (quadrato 8x8)

Risposta attesa dai partecipanti

Abbiamo più volte sperimentato che iniziando le attività con i polimini senza utilizzare le carte con le superfici da tassellare e senza dare alcuna istruzione se non quella di "giocare" con i polimini di cartone, il primo gesto quasi spontaneo - negli adulti come nei bambini - è proprio l'attività di costruzione di quadrati e rettangoli. Non altrettanto spontanea è la costruzione di figure con gradualità e ordine, partendo da quelle di superficie minore a quelle di superficie maggiore. Per questo il ruolo del docente guida è fondamentale.

Attività 6.2: Perimetro e Area (50 minuti)

Dopo aver realizzato tutte o in parte le attività proposte nell'attività 1, si passerà a richiedere la realizzazione di figure dando il perimetro come variabile di cui tenere conto.
In questo caso si utilizzerà come unità di misura non il quadretto ma il suo bordo.

Si parte chiedendo di realizzare quadrati o rettangoli fornendo la misura del perimetro:

- perimetro 14: il rettangolo 3 x 4 (Fig.6.6.15)

Figura 6.6.15 - Rettangolo di perimetro 14

- perimetro 16 (Fig.6.6.16): il quadrato 4 x 4 oppure rettangolo 3 x 5; si introduce il concetto di figure isoperimetriche, di figure equiestese, e si ragiona sul fatto che figure isoperimetriche non sono necessariamente uguali e non sono nemmeno necessariamente equiestese.

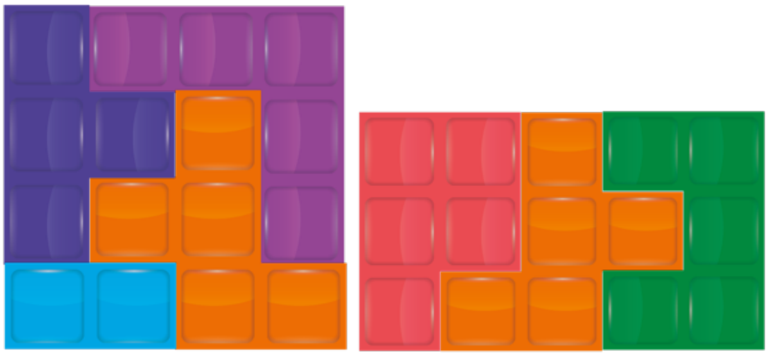


Figura 6.6.16 - Rettangoli di perimetro 16 (quadrato 4x4 e rettangolo 5x3)

- perimetro 18: il rettangolo 4 x 5 oppure rettangolo 6 x 3 (Fig.6.6.17). Quest'ultimo ha area = 18 quadratini, perimetro = 18 segmenti: non bisogna mai stancarsi di sottolineare che area e perimetro possono essere espressi dallo stesso valore ma non dalla stessa unità di misura, quindi incontrare rettangoli come il 6 x 3 che ha area e perimetro = 18 è interessante per far riflettere sui diversi significati delle unità di misura delle due grandezze.

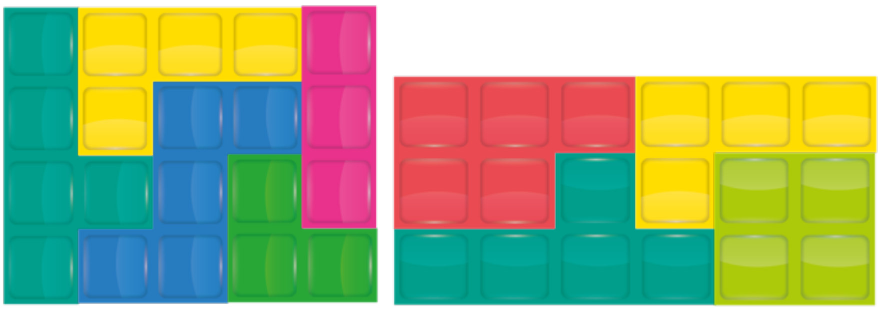


Figura 6.6.17 - Rettangoli di perimetro 18 (5x4 e 6x3)

- si va avanti in questo modo proponendo più volte anche multipli di quattro, affinché si realizzino anche dei quadrati di perimetro 20, 24 (Fig.6.6.18), perimetro 28 (Fig.6.6.19) ecc. per ribadire che il quadrato è un rettangolo speciale, perché equilatero.

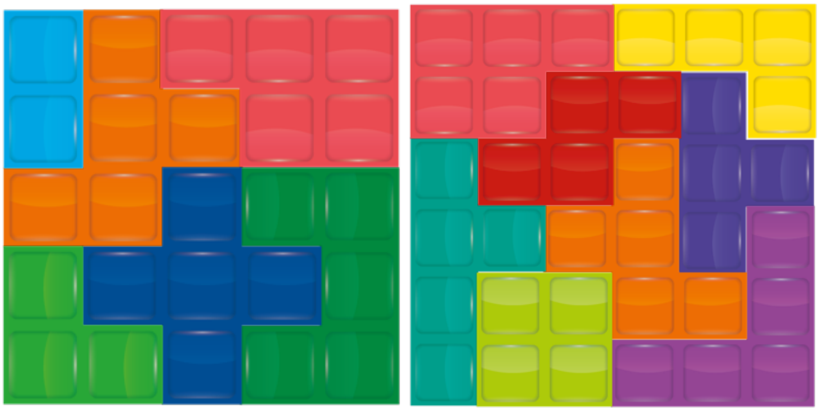


Figura 6.6.18 - Rettangoli equilateri di perimetro 20 e 24 (quadrati 5x5 e 6x6)

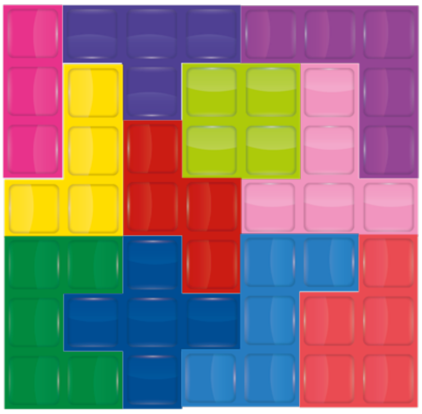


Figura 6.6.19 - Rettangolo equilatero di perimetro 28 (quadrato 7x7)

Si passa quindi a chiedere di realizzare figure rispettando contemporaneamente due condizioni: area e perimetro dati.

- Costruisci di una figura di Area 22 e Perimetro 20 (Fig.6.6.20).

Figura 6.6.20 - Figura di area 22 e perimetro 20

Probabilmente i partecipanti cercheranno di costruire un quadrato o un rettangolo, perché fino a questo momento abbiamo chiesto loro di realizzare solo questo tipo di figura. L'unico rettangolo che si riesce a realizzare con i polimini che abbia area 22, però, è il rettangolo 2 x 11. Si accorgeranno rapidamente che il perimetro di tale rettangolo non corrisponde alla nostra richiesta, infatti misura 26 segmenti (Fig.6.6.21).

Figura 6.6.21 - Figura di area 22 (perimetro 26)

Cercheranno quindi un altro rettangolo possibile e si renderanno ben presto conto che non esiste un rettangolo di area 22 e di perimetro 20. Suggeriamo di non stressare troppo questa fase perché i partecipanti potrebbero perdere la pazienza e la voglia di manipolare, come accade anche in classe con i bambini.

Se qualcuno riesce a trovare rapidamente la soluzione, sarà compito del docente valorizzarla e partire da quella per far riflettere sul concetto di figura. Nel caso in cui, dopo un tempo ragionevole, nessuno abbia trovato la soluzione richiesta, verrà mostrata una possibile soluzione concentrando l'attenzione sul fatto che la definizione "figura geometrica" non corrisponde necessariamente né a una figura regolare (come un quadrato o un poligono regolare) né a un rettangolo.

Una volta compreso questo, si propone la realizzazione di un'altra figura, fornendo sempre la misura del perimetro e anche dell'area:

- Costruisci una figura di Area 22 e Perimetro 22 (Fig.6.6.22)

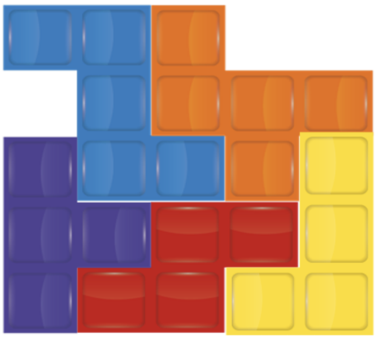


Figura 6.6.22 - Figura di area 22 e perimetro 22

- Costruisci una figura di Area 28 e Perimetro 24 (Fig.6.6.23)

Figura 6.6.23 - Figura di area 28 e perimetro 24

- Costruisci una figura di Area 28 e Perimetro 28

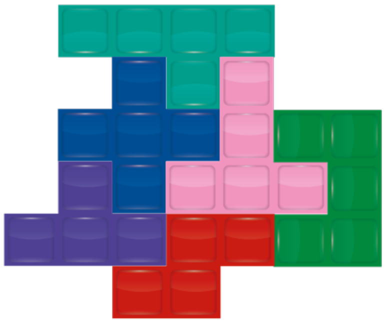


Figura 6.6.24 - Figura di area 28 e perimetro 28

- Costruisci una figura di Area 28 e Perimetro 32 (è il rettangolo 2 x 14, Fig.6.6.25)

Figura 6.6.25 - Figura di area 28 e perimetro 32 (rettangolo 14x2)

Risposta attesa dai partecipanti

L'attività realizzata nelle classi ha messo in evidenza che spesso si è abituati a considerare come figure geometriche solo il rettangolo, il quadrato, il triangolo e poche altre: viene mostrata una certa resistenza ad accettare che il termine figura geometrica si possa riferire anche a figure spesso denominate "irregolari". L'intento dell'attività è proprio quello di far prendere loro confidenza con il significato di figura e con la misura di perimetro e di area delle figure piane.

Esperienza con i bambini

Questa sessione risulta particolarmente importante nelle classi della scuola primaria in vista dell'introduzione dei concetti di area e perimetro. Inizialmente i bambini dovranno essere guidati a comprendere come misurare correttamente il perimetro delle figure, quindi è richiesto l'uso di un proiettore per mostrare alcune figure preparate in precedenza di cui si conosce il perimetro per far sperimentare ai bambini, ciascuno con il proprio kit di polimini, l'effettiva lunghezza di tale perimetro.

Nella nostra esperienza precedente all'utilizzo del gioco Polyminix, per quanto gli insegnanti si sforzassero di far sperimentare in qualche modo molto pratico il concetto di area e quello di perimetro delle figure, non di rado i bambini si focalizzavano sulla memorizzazione delle formule per calcolare le due grandezze nelle varie figure geometriche incontrate. La cattiva comprensione dei due concetti, tuttavia, emergeva nel momento in cui si cimentavano nella risoluzione di problemi geometrici, perché talvolta scambiavano tra loro le formule dimostrando di averle memorizzate ma non comprese e di non saper discriminare quale usare in base alle richieste del testo.

Far lavorare contemporaneamente i bambini su area e perimetro di alcune figure, soprattutto nel caso in cui la misura di tali grandezze non può essere calcolata mediante l'applicazione di una formula, ma richiede un conteggio, permette loro di interiorizzare le due nozioni per poi estenderle a figure note e astratte. Mediante l'utilizzo del gioco abbiamo notato una diversa attenzione e la ricerca di strategie nuove.

Un punto che ci sembra particolarmente ostico per i bambini è la comprensione che figure equiestese possono non essere anche isoperimetriche e viceversa. Si consiglia di insistere su questo punto, fornendo più esempi possibile, sia mediante l'utilizzo dei polimini (chiedendo le costruzioni che abbiamo suggerito, e altre ancora), sia attraverso il disegno e il conteggio, di gruppo e individuale.

Un'ultima difficoltà di questa attività è il dover tenere conto di due condizioni contemporaneamente. Si consiglia, nei casi di difficoltà oggettiva di qualche bambino, di semplificare le richieste e ridurre le condizioni.

Attività 6.3: Discussione (20 minuti)

Si prevede un tempo da dedicare alla discussione di quanto finora esposto, per far emergere dubbi, proposte, commenti.

Ci siamo accorti, nel corso del tempo e del nostro lavoro nelle classi, che la manipolazione dei polimini è affascinante e spesso nascono percorsi che l'insegnante non aveva pensato o preparato, seguendo l'ispirazione che scaturisce dalla ricerca di soluzioni a problemi posti.

È naturalmente importante far sì che si proceda con ordine concentrandosi nella soluzione delle consegne date, ma è altrettanto importante tenere conto della capacità attrattiva che hanno i polimini: se mentre si spiega un problema o si fa una richiesta qualcuno continua a manipolare e sembra non interessato, non va considerato distratto, ma al contrario "attratto dai polimini stessi".

Ci piace infatti puntare sul gioco di parole che vede il contrario di "distratto" non come "attento", bensì "attratto": ogni volta che richiamiamo l'attenzione dei partecipanti (come dei bambini in classe), li distogliamo da qualcosa che li stava attraendo più delle nostre parole. Possiamo pensare che l'"attratto" stia seguendo un suo ragionamento, un pensiero che lo porterà a qualche personale scoperta, che resterà impressa nella sua mente più delle nostre parole.

Poiché ogni volta che abbiamo proposto le nostre attività con i polimini si è creata una situazione del genere, ci sembra opportuno dedicare del tempo, al termine della sessione, per far nascere una discussione su questo argomento e raccogliere le impressioni dei partecipanti, per valorizzare i percorsi che hanno seguito autonomamente e per accogliere i loro suggerimenti.

Sessione 7: La meraviglia della simmetria e la sfida dei problemi

Scopo della sessione

Sperimentare e indagare la simmetria, simmetria rispetto a un piano, simmetria rispetto a un centro di rotazione. Affrontare la risoluzione di problemi di tassellazione che hanno numerose soluzioni.

Metodologia didattica

Dopo aver preso confidenza con i polimini, averli distinti in base al numero di quadrati da cui sono composti e aver costruito figure secondo informazioni date di area e perimetro, si passa alla costruzione sistematica di figure simmetriche.

Materiali

I 15 polimini del gioco Polyminix (acquistabile contattando emanuele@creativamente.eu)

Tabella dettagliata della sessione

Attività 7.1	La meraviglia della simmetria	50 min
Attività 7.2	Problemi di tassellazione	50 min
Attività 7.3	Discussione	20 min

Attività 7.1: La meraviglia della simmetria (50 minuti)

I partecipanti sono disposti singolarmente (o a coppie) e ricevono in dotazione un kit di 15 polimini ciascuno (o ciascuna coppia). Il docente ha la possibilità di proiettare le figure che sono inserite nel testo per svelare le soluzioni delle richieste proposte e per ragionare in una conversazione matematica collettiva. Si passa a indagare una caratteristica delle figure geometriche: la simmetria.

Si inizia indagando la simmetria dei singoli polimini: alcuni di essi sono simmetrici.

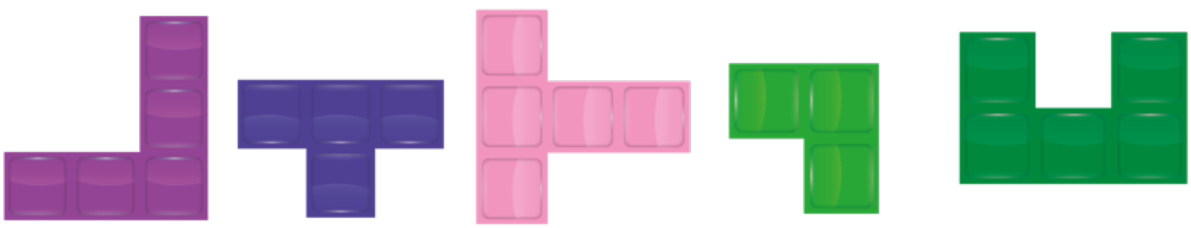


Figura 6.7.1 - Polimini con un solo asse di simmetria

Figura 6.7.2 - Polimini con due assi di simmetria

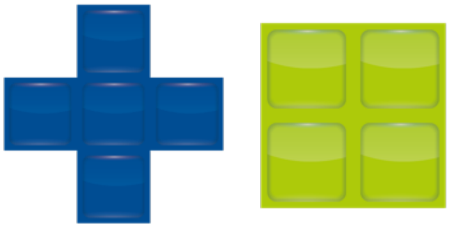


Figura 6.7.3 - Polimini con 4 assi di simmetria

Figura 6.7.4 - Polimini con un centro di simmetria

Si invitano i partecipanti a classificare i polimini a seconda della presenza in essi di uno o più assi di simmetria, oppure rispetto alla presenza di un centro di simmetria.

Poi si chiede di realizzare figure simmetriche usando più polimini:

- realizza una figura composta da 3 polimini e che abbia un asse di simmetria
- realizza una figura composta da 4 polimini e che abbia un asse di simmetria
- realizza una figura composta da 5 polimini e che abbia un asse di simmetria
- realizza una figura composta da 6 polimini e che abbia un asse di simmetria
- realizza una figura composta da 7 polimini e che abbia un asse di simmetria

e così via fino ad arrivare a figure simmetriche costituite da tutti e 15 i polimini.

Anche in questo caso, l'insegnante valuterà bene la risposta dei partecipanti e il loro coinvolgimento nell'attività: se li vede annoiati o non entusiasti potrà saltare qualche passaggio. Nella nostra esperienza, la realizzazione di figure simmetriche è però molto coinvolgente e inoltre i docenti non sono abituati a costruirle: pertanto abbiamo pensato un tempo più lungo per questa attività rispetto alla precedente, che richiedeva continui conteggi.

Una volta presa confidenza con la simmetria rispetto a un asse, si possono gradualmente aumentare le richieste, aggiungendo altre condizioni ai problemi:

- realizza una figura simmetrica che abbia superficie maggiore di 10

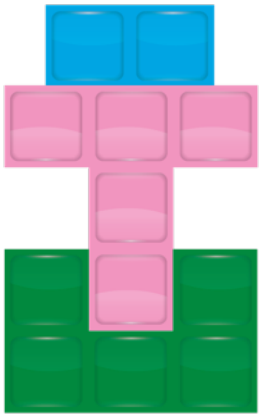


Figura 6.7.5 - Figura simmetrica con superficie maggiore di 10

- realizza una figura simmetrica che abbia Area = 7 e Perimetro = 16

Figura 6.7.6 - Figura simmetrica, con area 7 e perimetro 16

- realizza una figura che abbia due assi di simmetria

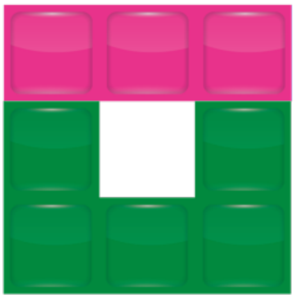


Figura 6.7.7 - Figura con due assi di simmetria

- realizza una figura che abbia due assi di simmetria ma che non sia un quadrato

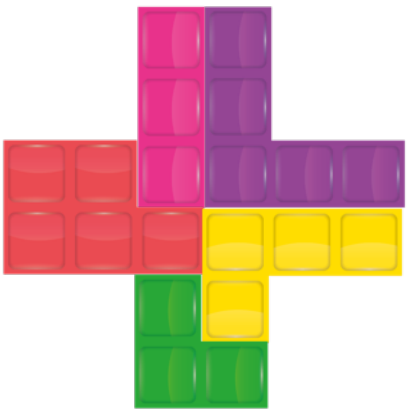


Figura 6.7.8 - Figura con due assi di simmetria, diversa da un quadrato

– realizza una figura che abbia un centro di simmetria

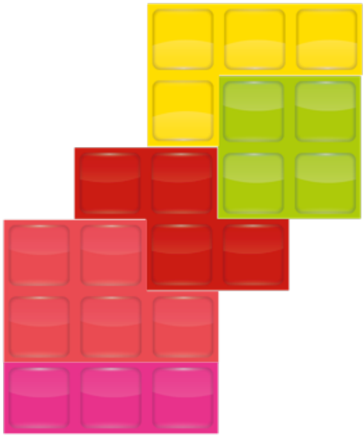


Figura 6.7.9 - Figura con un centro di simmetria

A seconda delle figure realizzate, si inviteranno i bambini a osservare la posizione dell'asse di simmetria. A volte l'asse di simmetria è verticale, altre volte è orizzontale, si valorizzeranno figure con asse di simmetria diagonale perché sono più difficili da realizzare, e figure con simmetria rispetto a un centro di rotazione. Inoltre, si osserverà se l'asse di simmetria cade tra un quadratino e l'altro dei polimini oppure se è interno al quadratino stesso, e lo taglia in due parti.

La seconda parte di questa attività prevede la realizzazione di figure simmetriche con dei buchi, anche essi simmetrici:

– realizza un quadrato con il lato di almeno 5 quadretti e con un buco posto in posizione simmetrica

Figura 6.7.10 - Quadrato di lato 5 con un buco posto in posizione simmetrica

– realizza un quadrato con il lato di almeno 5 quadretti e con due buchi posti in posizione simmetrica rispetto a un asse di simmetria

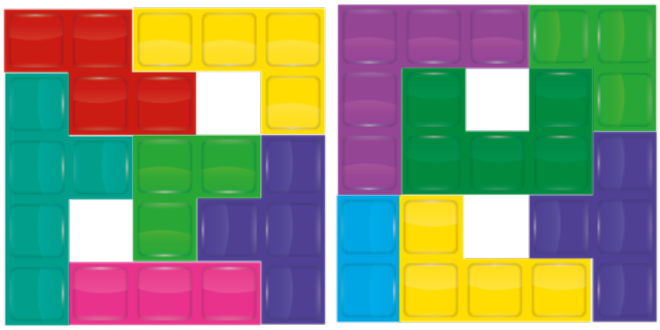


Figura 6.7.11 - Quadrati di lato 5 con due buchi posti in posizioni simmetriche

- realizza un quadrato con il lato di almeno 5 quadretti e con due buchi posti in posizione simmetrica rispetto a un centro di rotazione

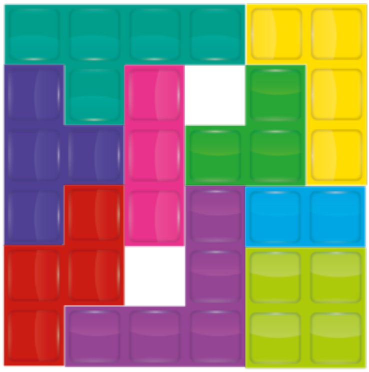


Figura 6.7.12 - Quadrato di lato 6 con due buchi posti in posizione simmetrica rispetto a un centro di rotazione

- realizza un quadrato con il lato di almeno 5 quadretti e con quattro buchi posti in posizione simmetrica

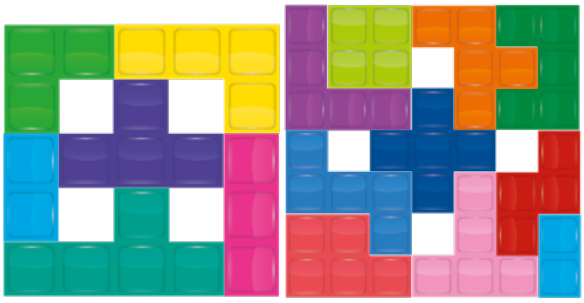


Figura 6.7.13 - Quadrati con 4 buchi in posizione simmetrica

- realizza un quadrato con il lato di almeno 5 quadretti e con cinque buchi posti in posizione simmetrica

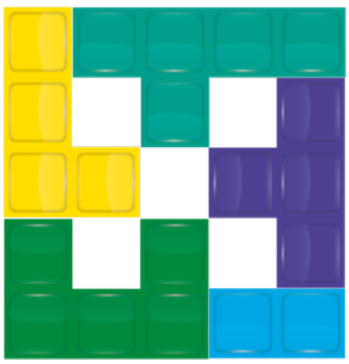


Figura 6.7.14 - Quadrato con 5 buchi posti in posizione simmetrica

Risposta attesa dai partecipanti

Queste attività sono state realizzate con adulti (insegnanti in servizio) e con bambini in classe. Durante la realizzazione di figure simmetriche si alternano due sentimenti contrastanti: da una parte la meraviglia e il piacere estetico nel riconoscere figure ordinate ed eleganti, dall'altro la frustrazione di non riuscire a realizzare le figure richieste in maniera immediata e semplice. È compito del docente che conduce l'officina guidare i partecipanti a scoprire come questi sentimenti siano parte integrante di un'attività matematica vissuta pienamente, ma la frustrazione deve lasciare presto lo spazio alle virtù che si esprimono così potentemente nell'attività di gioco in matematica. Il matematico contemporaneo Francis Su nel capitolo dedicato al PLAY nel suo libro *Mathematics for Human Flourishing* (Su 2020) parla proprio di speranza, curiosità, concentrazione, fiducia nella lotta, pazienza, perseveranza, capacità di cambiare i punti di vista, apertura di spirito. È auspicabile che possano emergere queste virtù in un'attività come quella proposta, anche perché si tratta di tappe necessarie nel cammino verso la scoperta della meraviglia.

Esperienza con i bambini

Non tutti i bambini riescono a percepire la simmetria, soprattutto utilizzando i polimini colorati, perché si aspettano una disposizione simmetrica anche dei colori oltre che delle forme. Alcuni bambini hanno bisogno di uno specchio per valutare se le figure da loro realizzate sono effettivamente simmetriche. È possibile semplificare l'approccio a questa sessione utilizzando inizialmente dei polimini non colorati, che i bambini possono ritagliare da fogli quadrettati, e solo in un secondo momento passare ai polimini del kit di gioco.

Attività 7.2: Problemi di tassellazione (50 minuti)

Dopo la somministrazione delle attività della sessione 5, della sessione 6 e l'attività 1 della presente sessione, si passerà alla proposta dei problemi di tassellazione. Questi problemi sono strutturati in maniera sequenziale, cioè si passa con gradualità da richieste semplici a richieste più difficili. L'obiettivo è quello di proporre un percorso che tutti possano fare completamente o solo o in parte, in modo che non ci sia nessuno che non riesca a risolvere nessuna richiesta, ma che sia possibile rendersi conto delle differenze individuali. Un esempio di problema è il seguente:

Corsa a ostacoli con i polimini!

La maestra ha finalmente reincontrato i suoi alunni e ha preparato per loro una mattinata di sfide con i polimini. Ha pensato a una "corsa ad ostacoli": infatti, ricordando l'etimologia della parola problema, i bambini in gruppi da 3 o 4 saranno chiamati ad affrontare dei veri e propri ostacoli, ovvero a risolvere dei problemi, uno diverso per ogni stazione.

1 - PRIMA STAZIONE

Per la prima sfida la maestra mette a disposizione i polimini rappresentati in figura 6.7.15: 1 domino, 2 trimini, 3 tetramini, 1 pentamino.

NB1: l'unità di superficie è il "quadratino". Così il domino ha superficie 2, il trimino 3, il tetramino 4, il pentamino 5 e così via.

NB2: ogni tassello può essere ruotato e/o "ribaltato".

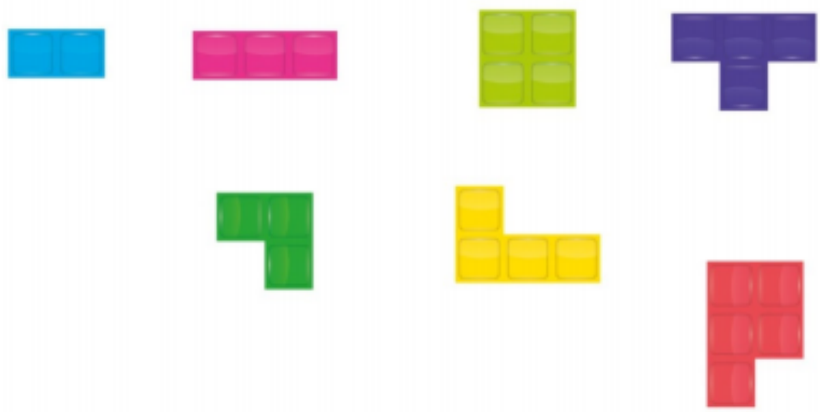


Figura 6.7.15 – I polimini utilizzabili nella prima stazione

Utilizzando TUTTI i polimini indicati - usando ciascuno una sola volta - si chiede di costruire le seguenti figure:

a) un quadrato

b) una figura simmetrica con almeno un asse di simmetria che non sia un quadrato

c) una figura di perimetro 22

d) una figura qualsiasi diversa dalle precedenti

2 - SECONDA STAZIONE

Al kit precedente vengono aggiunti 1 tetramino e 4 pentamini. Così i bambini hanno ora a loro disposizione tutti i polimini rappresentati in figura.

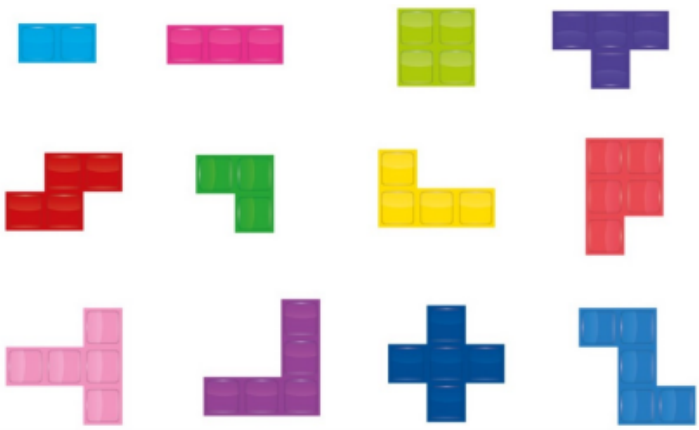


Figura 6.7.16 – I polimini a disposizione nella seconda stazione

Utilizzando almeno quattro tra i polimini indicati in figura 6.7.16 - usando ciascuno una sola volta - si chiede di costruire le seguenti figure:

a) un quadrato di superficie 36

b) un quadrato di superficie 49

c) una figura simmetrica che abbia almeno due assi di simmetria e che non sia un quadrato

d) una figura simmetrica che abbia un centro di simmetria e che non sia né un quadrato, né un rettangolo
e) un rettangolo che non sia un quadrato

3 - TERZA STAZIONE

Il kit di polimini a disposizione rimane lo stesso della seconda stazione. La nuova sfida è la seguente:
Quali e quanti rettangoli - quadrati esclusi - diversi per almeno una dimensione (ad es, un rettangolo 4×7 è ovviamente diverso da un rettangolo 4×8) **si possono costruire con i polimini a disposizione, utilizzando almeno 2 polimini?**
Disegnate tutti i rettangoli possibili.

4 - QUARTA STAZIONE

Per la quarta stazione la maestra chiede ai bambini di prendere un pennarello. La nuova richiesta è la seguente:
È possibile dividere ciascuno dei tre quadrati ottenuti durante la prima e la seconda stazione (quesiti 1 a, 2 a, 2 b) in due parti di uguale superficie (cioè composte dallo stesso numero di quadratini), ma non necessariamente della stessa forma?
Per ciascuno dei tre quadrati determinate se è possibile e, in caso affermativo, disegnate la soluzione tracciando il contorno delle due parti con il pennarello o colorando solo la superficie di una delle due parti.
NB: non è possibile dividere/tagliare i polimini!

5 - QUINTA STAZIONE

La maestra vuole far lavorare i suoi bambini sul concetto di superficie anche dal punto di vista "aritmetico". Decide così di lanciar loro la seguente sfida:
Aggiungete al kit 3 nuovi polimini diversi da quelli già presenti, in modo da poter costruire un quadrato di superficie 64 utilizzando tutti i pezzi a vostra disposizione.

6 - SESTA STAZIONE

L'ultima sfida consiste nel ricoprire la superficie quadrettata in figura 6.7.17 potendo utilizzare SOLAMENTE i polimini indicati accanto insieme a un quinto polimino incognito. L'ultima sfida è quindi duplice e si può sintetizzare così:
Determinate il quinto polimino da utilizzare scegliendolo tra quelli presenti nel kit costituito da 15 polimini (compresi gli ultimi 3 aggiunti nella quinta stazione) e ricoprite la superficie usandolo insieme ai polimini già indicati.
Ci sono più possibilità di scelta per il quinto polimino? Disegnate tutti i ricoprimenti possibili in base alla scelta del quinto polimino.

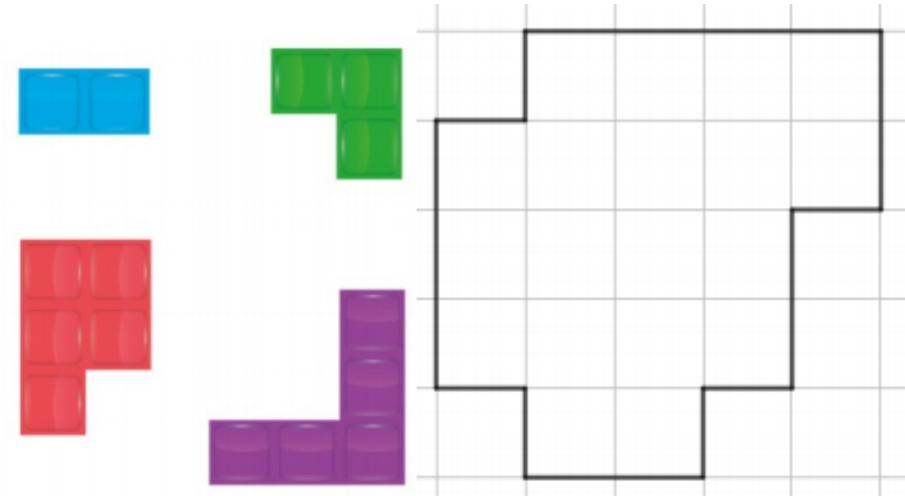


Figura 6.7.17 – La superficie da ricoprire nella sesta stazione e quattro dei cinque polimini da utilizzare

Riportiamo alcune delle possibili numerosissime soluzioni che si possono dare per ciascuna "stazione" del problema, solo a scopo esemplificativo. Il docente cercherà di valorizzare tutte le risposte ottenute, dalle più semplici alle più complesse ed eleganti.

Soluzioni possibili

1 - PRIMA STAZIONE

a) un quadrato

Figura 6.7.18 – Un quadrato soluzione alla domanda 1 a)

b) una figura simmetrica

Figura 6.7.19 – Una figura simmetrica soluzione alla domanda 1 b)

c) una figura di perimetro 22

Figura 6.7.20 – Una figura di perimetro 22 soluzione alla domanda 1 c)

2 - SECONDA STAZIONE

a) un quadrato di superficie 36

Figura 6.7.21 – Un quadrato soluzione alla domanda 2 a)

b) un quadrato di superficie 49

Figura 6.7.22 – Un quadrato soluzione alla domanda 2 b)

c) una figura simmetrica che abbia almeno due assi di simmetria e che non sia un quadrato

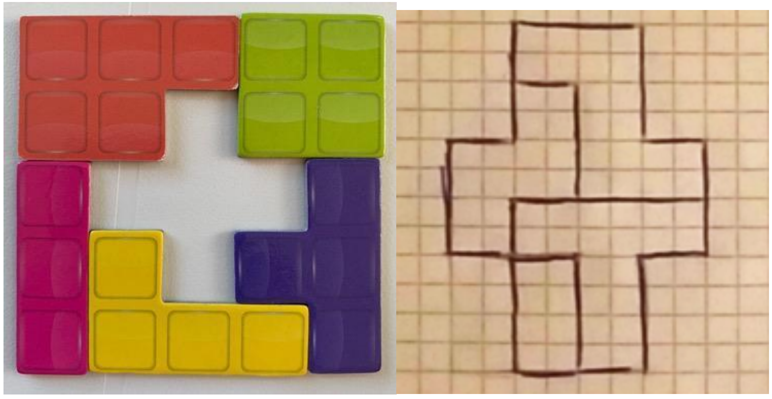


Figura 6.7.23 – Figure simmetriche con almeno due assi di simmetria non quadrati, soluzioni alla domanda 2 c)

Questa richiesta è abbastanza complessa, quindi si consiglia di valutare positivamente e valorizzare anche una soluzione non completa, cioè una soluzione che non tiene conto di tutte le richieste ma solo di alcune. Un esempio potrebbe essere quello in figura 24, che risponde al fatto di essere una figura simmetrica, non un quadrato, ma ha un solo asse di simmetria, quindi disattende la seconda richiesta del problema.

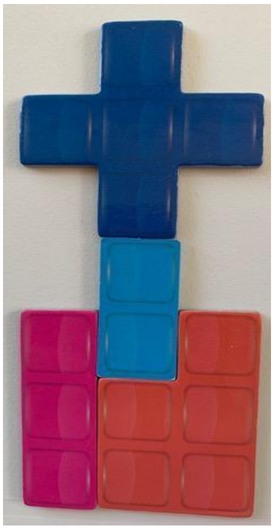


Figura 6.7.24 – Una figura con un solo asse di simmetria

d) una figura simmetrica che abbia un centro di simmetria e che non sia né un quadrato, né un rettangolo

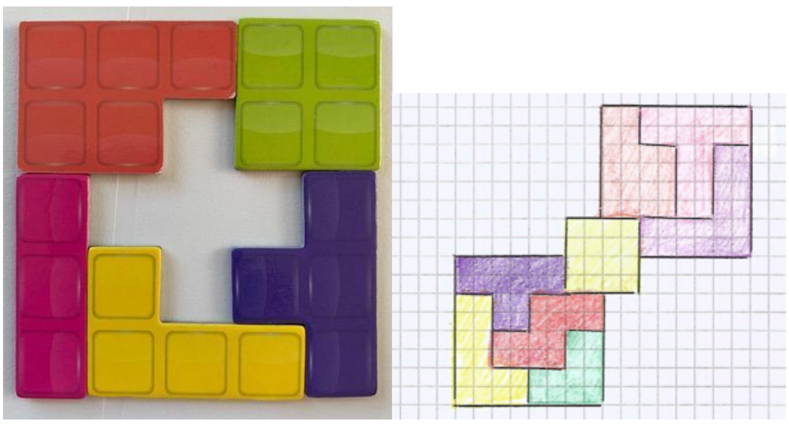


Figura 6.7.25 – Figure simmetriche con centro di simmetria non quadrati, soluzioni alla domanda 2 d)

La stessa figura realizzata per la consegna precedente può essere sfruttata per questa consegna, essendo una figura che oltre ad avere due assi di simmetria (in realtà ne ha addirittura 4) ha anche un centro di simmetria.

e) un rettangolo che non sia un quadrato

Figura 6.7.26 – Un rettangolo non quadrato soluzione alla domanda 2 e)

3 - TERZA STAZIONE

Quali e quanti rettangoli - quadrati esclusi - diversi per almeno una dimensione (ad es, un rettangolo 4 × 7 è ovviamente diverso da un rettangolo 4 × 8) **si possono costruire con i polimini a disposizione, utilizzando almeno 2 polimini?**

Qui i rettangoli diversi possibili sono ben 36. Aritmeticamente si possono elencare nel modo presentato nella Tabella 6.12, ma naturalmente vanno costruite le figure geometriche corrispondenti. Lasciamo in questo caso al docente e ai partecipanti la bellissima fatica di costruirli, garantendone l'esistenza.

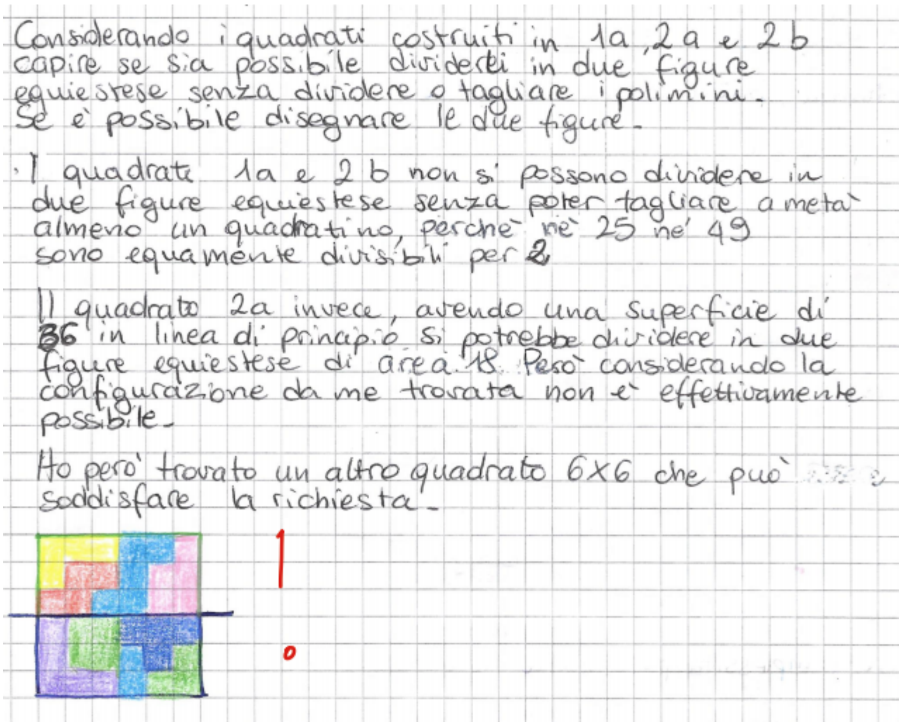
1 rettangolo con una dimensione pari a 1:
1 x 5 (domino+trimino rettangolari)
11 rettangoli con una dimensione pari a 2 e l'altra maggiore di 2:
2 x 3, 2 x 4, 2 x 5, 2 x 6, 2 x 7, 2 x 8, 2 x 9, 2 x 10, 2 x 11, 2 x 12, 2 x 13
12 rettangoli con una dimensione pari a 3 e l'altra maggiore di 3:
3 x 4, 3 x 5, 3 x 6, 3 x 7, 3 x 8, 3 x 9, 3 x 10, 3 x 11, 3 x 12, 3 x 13, 3 x 14, 3 x 15
7 rettangoli con una dimensione pari a 4 e l'altra maggiore di 4:
4 x 5, 4 x 6, 4 x 7, 4 x 8, 4 x 9, 4 x 10, 4 x 11
4 rettangoli con una dimensione pari a 5 e l'altra maggiore di 5:
5 x 6, 5 x 7, 5 x 8, 5 x 9
1 rettangolo con una dimensione pari a 6 e l'altra maggiore di 6:
6 x 7

Tabella 6.12 – L'elenco dei diversi rettangoli possibili al variare di una delle due dimensioni

4 - QUARTA STAZIONE

È possibile dividere ciascuno dei tre quadrati ottenuti durante la prima e la seconda stazione (quesiti 1 a, 2 a, 2 b) in due parti di uguale superficie (cioè composte dallo stesso numero di quadratini), ma non necessariamente della stessa forma?

Figura 6.7.27 – Una possibile divisione in due parti equivalenti del quadrato 6x6



Considerando i quadrati costruiti in 1a, 2a e 2b capire se sia possibile dividerli in due figure equiestese senza dividere o tagliare i polimini. Se è possibile disegnare le due figure.

· I quadrati 1a e 2b non si possono dividere in due figure equiestese senza poter tagliare a metà almeno un quadratino, perché né 25 né 49 sono equamente divisibili per 2

Il quadrato 2a invece, avendo una superficie di 36 in linea di principio si potrebbe dividere in due figure equiestese di area 18. Però considerando la configurazione da me trovata non è effettivamente possibile.

Ho però trovato un altro quadrato 6X6 che può soddisfare la richiesta.

1

0

Figura 6.7.28 – La spiegazione dell'impossibile divisione dei primi due quadrati e una possibile divisione in due parti equivalenti del quadrato 6x6

5 - QUINTA STAZIONE

Quadrato di superficie 64

Figura 6.7.29 – Un possibile quadrato 8x8

6 - SESTA STAZIONE

Qui sembra incredibile ma le soluzioni sono veramente molte, queste sono solo alcune delle possibili risposte.

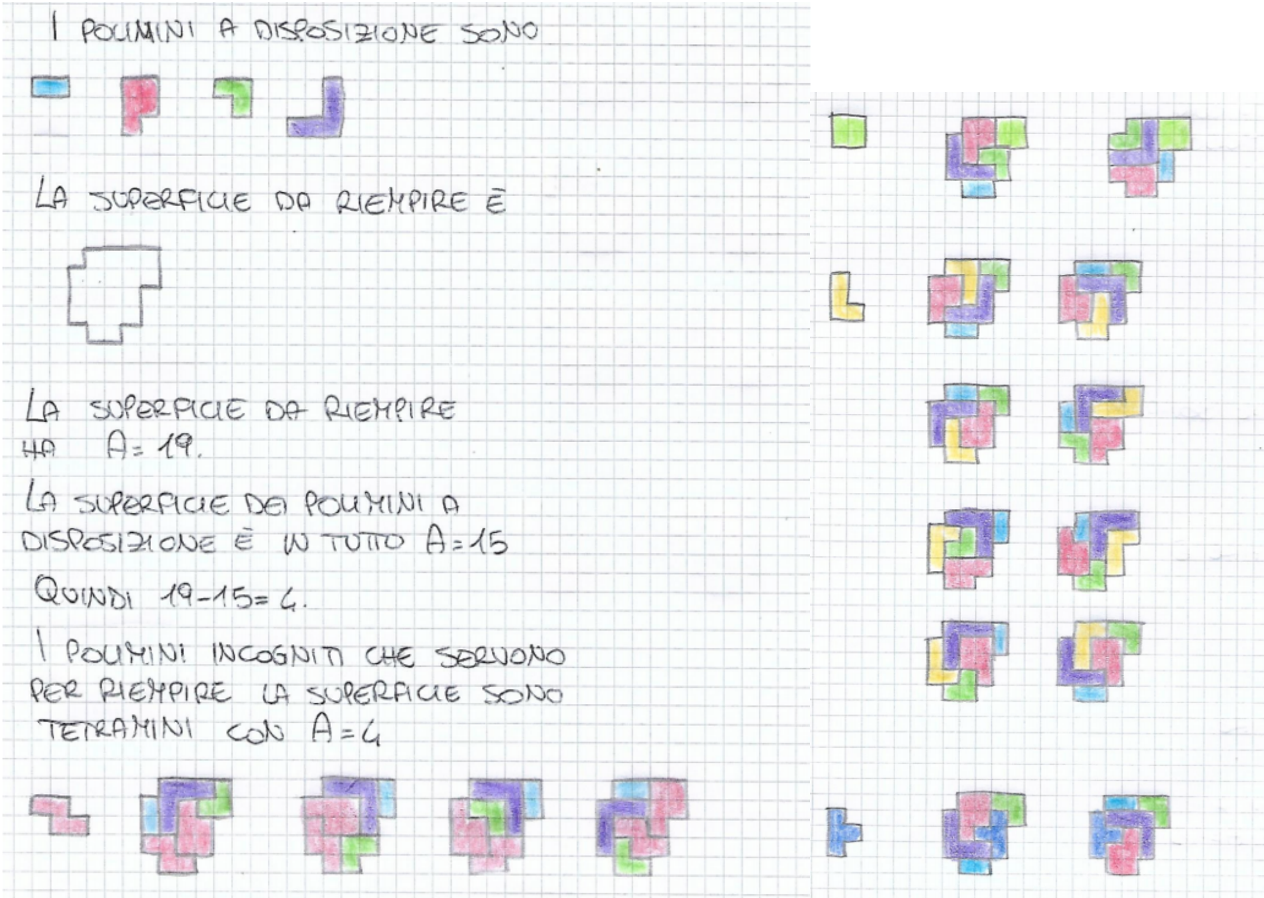


Figura 6.7.30 – Alcune possibili soluzioni della domanda della sesta stazione

Risposta attesa dai partecipanti

La sfida del problema ottiene in generale due risposte fondamentali nei partecipanti che la accolgono:

a) si scopre come si possono concepire e confrontare diverse strategie e quanto sia importante voler scoprire la propria strada. Affermava George Polya: “La comprensione del problema non è sufficiente; è necessario anche desiderare di ottenere una soluzione. Non c’è alcuna probabilità di risolvere un problema, se non si vuole ardentemente conoscerne il risultato; tale ansia è per se stessa una probabilità di successo.” [35] Così occorre che ciascun partecipante accolga personalmente la sfida del problema, desiderando di risolverlo, in modo che diventi il suo problema e non quello del docente o di qualcun altro che te lo ha proposto.

b) contestualmente si scopre l’importanza di trovare la propria strada anche se questa è inicialmente sbagliata. *Sbagliando s’impara* dice il famoso proverbio e si dovrebbe insegnarlo anche ai propri studenti. Piuttosto di concentrarsi solo sul risultato, è fondamentale scoprire e rischiare la varietà di strade giuste o sbagliate che cercano di arrivare alla meta. Non si vuole certo affermare che andare da Roma a Milano passando da Bari sia uguale a prendere il treno diretto che passa per Firenze, ma non è detto che passare da Bari sia stato inutile: il confronto tra le diverse strade percorse, tra i diversi tempi impiegati, permette a tutti gli studenti di comprendere la bellezza del treno diretto che impiega solo 3 ore per arrivare alla meta. Chi può escludere che passando per Bari non sia possibile scoprire cose interessanti e addirittura decidere di fermarsi a Bari? È più importante, almeno all’inizio, imparare a salire sul treno piuttosto che preoccuparsi di andare nella giusta direzione: basti pensare a quanti studenti (e docenti) si fermano sulla banchina della stazione, osservano immobili i treni partire per la paura di salire sul treno-soluzione sbagliato.

Può sembrare azzardato il fatto di chiedere a un insegnante la risoluzione di un problema di tassellazione in prima persona o in piccoli gruppi. Ovviamente ogni provocazione ha i suoi rischi, ma questa scelta è stata ben meditata anche alla luce di una diffusa resistenza nel proporre problemi da parte dei docenti di scuola primaria, resistenza confermata durante le varie attività formative. Anche in un contesto di adulti un problema agisce come un sasso gettato nello stagno: smuove le acque, introduce dinamismo dove prima era la quiete. Un problema suscita curiosità e desiderio di misurarsi in una sfida, diffidenza dinanzi ad una soluzione che sembra irraggiungibile, paura di sbagliare, deludere e deludersi. Risolvere problemi, e in generale ragionare, può costare fatica, ma risulta necessario che un insegnante sia consapevole proprio di questa caratteristica della matematica affinché possa scoprirne la bellezza e tutte le virtù ad essa associate, fino al punto che magari un giorno si troverà ad affermare che “insegnare matematica è una bellissima fatica[36]”.

Esperienza con i bambini

Proponendo un problema di tassellazione molto lungo, che ha delle domande successive, ognuna delle quali presuppone la risoluzione delle precedenti, i bambini possono stancarsi e desiderare di passare ad altro. Il problema va proposto perciò come una caccia al tesoro, formata da step

[35] Polya G. 1945 (p. 216, trad.it. 2016)

[36] Slogan dell’associazione ToKalon

consecutivi, e si può pensare di suddividerlo anche in più giornate di lavoro, a seconda della lunghezza, magari utilizzando un quaderno dedicato alla sua risoluzione e ai successivi problemi che verranno proposti.

Attività 7.3: Discussione (20 minuti)

Si prevede un tempo da dedicare alla discussione di quanto finora esposto, per far emergere dubbi, proposte, commenti, come nella precedente sessione.

Faranno parte della discussione senza dubbio:

- l'argomento impegnativo della simmetria, soprattutto in relazione alle diverse tipologie di simmetria presenti in una figura;
- l'argomentazione delle risposte fornite al problema proposto come esempio;
- l'invenzione di nuovi possibili problemi a partire dai contenuti proposti.

Bibliografia

Arcavi, A. (2003) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241

Argaud, H.-C., Douaire, J., Emprin, F., Emprin-Charotte F., Gerdil-Margueron, G. (2016). *Les essentielles ERMEL CP. 15 situaciones para el aprendizaje de la numeración y el cálculo*. Hatier.

Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, 54, 23-39.

Baldridge, S. y Parker, T. (2003). *Elementary mathematics for teachers*. Oregon City: Sefton-Ash Publishing.

Baldridge, S. y Parker, T. (2008). *Elementary geometry for teachers.* Oregon City: Sefton-Ash Publishing.

Boole, M. E.(1903). *Lectures on the logic of arithmetic*, Oxford, Clarendon Press.

Brissiaud R. (2003). *Cómo aprenden a calcular los niños*. Ed. Retz

Brissiaud R. (2007). *Primeros pasos hacia las matemáticas. Los caminos del éxito en la escuela materna*. Éd. Retz

Bruner, J. (2001). *El proceso mental en el aprendizaje.* Madrid. Editorial Narcea.

Butlen, D. (2007). *El cálculo mental entre el sentido y la técnica*. Presses Universitaires de Franche-Comté.

Cartocci, A. (2007). *La matematica degli Egizi. I papiri matematici del Medio Regno*, Firenze, Firenze University Press.

Catalán, R. G., Celi, V., Cogolludo, J. I., Gil Clemente, E., Lizasoain, I., Millán Gasca, A., & Regoliosi, L. (2019). Learning from children to improve primary school teachers' math-specific education. In Dagmar Szarková, Daniela Richtáriková, Peter Letavaj (Ed.), Proceedings, 18th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2019 (pp. 190–193). Bratislava, Slovakia: SPEKTRUM STU.

Celi, V. (2017). Creencias y conocimientos de los futuros profesores sobre el cálculo mental en la escuela primaria francesa: ¿qué perspectivas para el aprendizaje? ¿qué necesidades para la enseñanza? Simposio Más allá de la alfabetización numérica: una matemática formativa para la Educación Primaria, *5° Congreso Internacional Educational Sciences and Development*, 2016, Santander, España.

Celi, V., Cogolludo, J. I., Gil Clemente, E., Lizasoain, I., Millán Gasca, A., Moler, J. A., & Regoliosi, L. (2019). Addressing the issue of trust in elementary teachers' maths-specific education: Anfomam project. In Jarmila Novotná e Hana Moraová (Ed.), Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics, Proceedings, International Symposium Elementary Mathematics Teaching, Prague, August 18-22, 2019 (pp. 113–121). Prague, Czech Republic: Charles University Faculty of Education, 2019, ISBN 978-80-7603-069-5.

Celi, V; Cogolludo, J.I.; Gil Clemente, E.; Lizasoain, I.; Millán Gasca, A. & Regoliosi, L. (2021). Addressing the issue of trust in elementary teachers' maths-specific education: Anfomam project. In *J. Novotná, H. Moraová (eds.) Broadening experiences in elementary school mathematics, Proceedings, International Symposium Elementary Mathematics Teaching*, pp. 139-147. Prague: Charles University Faculty of Education.

Celi, V. et De Simone, M. (2018a). El lugar de las creencias en la práctica de una profesora novel de primaria: el caso del cálculo mental. *Actes Colloque CITAD 6*, janvier 2018, Autrans (France).

Celi, V. y De Simone, M. (2018b). El cálculo mental en las prácticas de un profesor novato de primaria : un análisis en términos de creencias y conocimientos. *Conferencias y seminarios de la Associazione Subalpina Mathesis*, 175-197.

Charnay, R. (2004). Calculadoras en la escuela primaria. ¿Oui? ¿No? ¿Por qué? ¿Comentario? *Gran N,* 74, 67-75.

Charnay, R. (2014). *Actividades y ejercicios para la calculadora CM1 - CM2*. Hatier.

Clavié, C., Peltier, M.-L., Auber P. (2005a). *Cálculo mental en el ciclo 2. Actividades para un entrenamiento diario*; Hatier.

Clavié, C., Peltier, M.-L., Auber P. (2005b). *Cálculo mental en el ciclo 3. Actividades para un entrenamiento diario*; Hatier.

Clements, D.H. & Sarama, J.(2011) Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematical teacher education. D0I:10.1007/s10857-011-9173-0*

Cogolludo Agustín, J.I, & Gil Clemente, E. (2019) The Effectiveness of Teaching Geometry to Enhance Mathematical Understanding in Children with Down Syndrome. *International Journal of Disability, Development and Education,* 66(2), 1–20

Dahan-Dalmédico, A., Peiffer, J. (2009). *History of mathematics. Highways and byways*, The Mathematical Association of America (ed. originale francese 1986).

De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Santa Cruz de Tenerife, 10-14 Septiembre.

De Guzmán, M. (1986) *Aventuras matemáticas*. Labor.

Del Notaro L., Floris R.. (2005). La utilización de la calculeta en la escuela primaria: un nuevo enfoque didáctico para la enseñanza de la numeración. *Math-École*, 215, 4-18.

Donaldson, M. (1978) *Children's minds*. Croom Helm. Londres.

Egan, K. (1989). *Teaching as storytelling*, Chicago, Chicago University Press.

Egan, K. (2014/1988) *Primary understanding*, Abingdon, Routledge.

Enzensberger, H. M. (2013) *El diablo de los números*. Siruela, Madrid.

Euclides (1991) *Los Elementos* (Edizione della Bibliotca Clásica Gredos. Traduzione e note di PUERTAS CASTAÑO, M.L.)

ERMEL (1991). *Apprentissages numériques CP*. Hatier.

Ferreiro, E. (2003). *Alfabetizzazione. Teoria e pratica*, Milano, Raffaello Cortina Editore.

Ferreiro, E.; Teberosky. A. (1979). *La costruzione della lingua scritta nel bambino*, traduzione di Noce Grazia, Firenze, Giunti.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Fuson, K. (1988) *Children´s counting and concepts of number.* Springer-Verlag, New York.

Gaskins D. (2018). *Más de 70 cosas que hacer con una carta de cien*. Tabletop Academy Press.

Gerdes, P (2011). *African Pythagoras: A study in culture and mathematics education*. www.lulu.com (open access e-book).]

Giaimo, C. (2016) How to keep a zibaldone, the 14th answer to Tumblr, *Atlas Obscura* https://www.atlasobscura.com/articles/how-to-keep-a-zibaldone-a-13thcentury-answer-to-tumblr

Gick, M.L. (1986). Problem-solving strategies. *Educational psychologist* , 21 (1-2), 99-120.

Gil Clemente,E. (2020) *Matemáticas que suman.* Horsori. Barcelona

Gil Clemente, E.; Millán Gasca, A. (2016). Integrating history of mathematics with foundational contents in the education of prospective elementary teachers, in L. Radford, F. Furinghetti, T. Hausberger (Ed.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 427–440). Montpellier: IREM de Montpellier.

Gil Clemente, E. & Millán Gasca, A. (2021) Geometry as "forceps of intelligence": lines, figures, and the plane in Édouard Séguin's educational thought. *In press.*

Gunderson et al (2012). The Relation Between Spatial Skill and Early Number Knowledge: the Role of the Linear Number Line. *Developmental Psychology 2012, 48(5) 1229–1241*

Hilbert, D. (1902) *The foundations of Geometry*. (traduzione di Townsend, E.J. Illinois: The Open Court publishing company)

Hughes M. (1986) *Children and Numbers, Difficulties in Learning Mathematics*. Basil Blackwell. Oxford e New York.

Ifrah, G. (1985). *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention*. Éditions Robert Laffont París.

Keller, O. (1998). "Questions etnographiques et mathématiques de la préhistoire", *Revue de synthèse*, serie 4, 4, pp. 545-573.

Keller, O. (2000). Préhistoire de l'arithmétique : la découverte du nombre et du calcul. Dans Barbin É., Le Goff, J.-P. (Éds) (2000). *Si el número se contara*, (15-40). Elipses.

Keller, O. (2016a). *L'Invention du nombre. Des mythes de création aux Éléments d'Euclide*, Paris, Classiques Garnier.

Keller, O. (2016b). *The invention of number*, Lecture, Montpellier, History and pedagogy of mathematics Meeting, online https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349249/

Kline M. (1972/1991). *Storia del pensiero matematico dalle origini ai tempi nostri*, Einaudi, Torino, 1991, 2 voll.

Kula, W. (1970/1986).*Measures and men*, Princeton, Princeton University Press. 1984 Les mesures et les hommes, Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme. Uomini e misure. Dall'Antichità ad oggi, Bari, Laterza, 1986. 1980 Las medidas y los hombres, Madrid, Siglo XXI (originale polacco, 1970)

Lafforgue, L. (2010) L´importance du calcul et de la geometrie à lécole primaire. *Journeée "Trans maitre": intruir aujourd´hui à lécole primarie*

Laisant, C. A. (1906) *Initiation mathematique*. Paris. (edito nel 2010 da Kessinger Legacy Reprints. Kessinger Publishing, LLC).

Lewis, D.(2001). *Reading contemporary picture books: picturing text*, London/New York, Routledge.

Mason J., Burton L., and Stacey K. (2011). *Thinking mathematically*. Pearson Higher Ed.

McGarrigle, J., Grieve, R. & Hughes, M. (1978) Interpreting inclusión: a contribution to the study of the child´s cognitive and linguistic development. *Journal of Experimental Child Psychology,* 26, pp 528-550.

MEN (2003). *Le calcul mental à l'école primaire, Documents d'accompagnement des programmes, Mathématiques, école primaire*, Scérén, CNDP, 32-49.

MEN (2003). *Utiliser la calculatrice en classe, Documents d'accompagnement des programmes, Mathématiques, école primaire*, Scérén, CNDP, 55-65.

Millán Gasca, A. (2004). *All'inizio fu lo scriba*, Milano, Mimesis.

Millán Gasca, A. (2006). *All'inizio fu lo scriba. Piccola storia della matematica come strumento di conoscenza*, 2a. ed., Milano, Mimesis.

Millán Gasca, A. (2011). "Il ruolo della storia nell'insegnamento della matematica nella scuola primaria", in *Convegno nazionale La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori*, http://php.math.unifi.it/convegnostoria/materiali/MillanGasca.pdf

Millán Gasca, A. (2016). La matematica è parte di noi, in: Davide Peddis e Carla Romagnino (a cura di) *La meraviglia della scienza*, Cagliari, ScienzaSocietàScienza, 34-40.

Millán Gasca, A. (2016) *Numeri e forme*. Zanichelli.

Millán Gasca, A. & Gil Clemente, E. (2016). Integrating history of mathematics with foundational contents in the education of prospective elementary teachers, in L. Radford, et al (Ed), *Proceedings of the 2016 Meeting of History and Pedagogy of Mathematics, 427-440*. Montpellier, France.

Millán Gasca, A.; Gil Clement., & Colella, I. (2017) Combining historical, foundational, and developmental insights to build children's first steps in mathematics. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth congress of the European society for research in mathematics education (CERME10, February 1–5, 2017)* 1977–1884. Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Millán Gasca, A.; Mazzitelli, A.; Neri, F. & Spagnoletti Zeuli, E.(2017). Storia e racconto nella matematica della scuola primaria: basi didattiche e sequenza operativa, *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, numero monografico "Strategie e metodologie didattiche in matematica e nelle scienze", 9(14), pp. 209-239.

Millán Gasca, A. & Neri, F. (2017). Gesto, voce, drammaturgia: un laboratorio di didattica della matematica "in-corporata" in Silvia Kanizsa (a cura di), *Oltre il fare. I laboratori nella formazione degli insegnanti*, Reggio Emilia, Edizioni Junior-Bambini Srl, (parte online) pp. 93-106.

Millán Gasca, A. & Neri, F. (2019). The role of stage presence in primary mathematics teachers' education, in Dagmar Szarková, Daniela Richtáriková, Peter Letavaj (a cura di), *Proceedings, 18th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2019*, Bratislava, Slovak University of Technology in Bratislava, Publishing house Spektrum Stu, pp. 829-835.

Millán Gasca, A. & Spagnoletti Zeuli, E. (2015) La geometria nei materiali e nelle immagini per apprendere il sistema di numerazione posizionale decimale. Dalla storia alla scuola di oggi, *Periodico di matematiche Serie IX 7(3) (2015), 23–40.*

Millán Gasca, A. & Vale, P. (2021). Re-placing mathematics into cultural heritage. A path for educational and social inclusion, in Antonella Poce, (a cura di) *Inclusive memory*, Napoli, Edizioni Scientifiche Italiane, pp. 195-232.

Mirra, A. (2016). Rhetorical Strategies in Leopardi's "Zibaldone", *Italica*, 93, pp. 92-104.

Monari Martinez E. & Benedetti, N. (2011) Learning mathematics in mainstream secondary schools: experiences of students with Down syndrome. *European Journal of Special Needs Education,* 26 (4), pp 531-540.

Moyon, M. e Tournès, D. (a cura di) (2018). *Passerelles. Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, Irem-Arpem.

Neri, F. (2014). *La presenza scenica nel lavoro dell'insegnante di scuola primaria*, Matematica per la formazione primaria, Dipartimento di Scienze della Formazione, Università degli studi Roma Tre. http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/Neri_Presenza%20scenica%202014.pdf

Neri, F. (2016). *Insegnanti: 12 ore in sala teatro. Voce, gesto, drammaturgia*, MimesisLab, Dipartimento di Scienze della Formazione, Università degli studi Roma Tre. http://host.uniroma3.it/laboratori/mimesislab/ricerca/attivita/2015_Insegnanti_12ore_in_sala_teatro.pdf

Paulos Allen J. (1998). *Innumeracy: El analfabetismo matemático y sus consecuencias*. Hill y Wang, 1988

Pasternack M. (2003). ¿0-99 o 1-100? *Mathematics Teanching*, 182, 34-35.

Peltier, M.-L., Briand, J., Ngono, B., Vergnes, D. (2011). *EuroMaths* CP, Hatier.

Peltier, M.-L., Briand, J., Vergnes, D., Ngono, B., Sampo, M. (2018). *Operación Matemáticas CP*. Hatier.

Piaget, J (1952) *The child´s conception of number*. Routledge and Kegan Paul. Londra.

Pólya, G. (1945) *How to solve it*. Princeton University Press.

Roditi, É. (2005). La educación frente a las teorías de la construcción del nombre en el niño. *Spirale, Revue de Recherche en Éducation*, 36, 37-52.

Scaramuzzo, G. (2010) *Paideia mimesis: attualità e urgenza di una riflessione inattuale*. Anicia.

Scaramuzzo, G. (2016) Aristotle's homo mimeticus as an Educational Paradigm for Human Coexistence. *Journal of Philosophy of Education*, 50 (2), 246-260.

Seguín, E. (1866) *Idiocy: and its treatment by the physiological method*. Augustus M. Kelley. New York.
Seguín, E. (1897) *Premiers Mémoires de Séguin sur l´idiotie (1838-1943) (pubblicato da Bourneville, D. Prógres Medical. Paris).*

Valentín D. (2005). *Descubrir el mundo con las matemáticas. Situaciones para la Sección Moyenne*. Hatier.

Valentín D. (2005). *Descubrir el mundo con las matemáticas. Situaciones para la Gran Sección*. Hatier.

Van Manen, M. (2016). *Researching lived experience*. New York: Routledge.

Weiss L. (2005). Algunas ideas y actividades en conjunto para la enseñanza de las matemáticas con la calculadora. *Math-École*, 215, 28-41.

Wilson, J.W., Fernández, M.L. and Hadaway, N. (1993) Mathematical problem solving. *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, 57, 78.

Sitographie

http://www.tocamates.com/?s=calculadora
https://www.transum.org/Software/SW/Starter_of_the_day/Students/Broken_Calculator.asp

Allegati

ALLEGATO 4.0

Esercizi e problemi per *Sesdown*

Con la tabella dei numeri

Le attività proposte nelle sessioni 2 e 3 sulla tabella dei numeri possono essere adattate per essere proposte ai bambini di *Sesdown* (per esempio, https://youtu.be/pRwirlovDxQ).

Con la calcolatrice e la tabella dei numeri

Con il pretesto di valutare la conoscenza delle designazioni orali e scritte di alcuni numeri e di alcune loro proprietà, si inizia proponendo esercizi per valutare la familiarità del bambino con la calcolatrice, che poi diventano più complessi man mano che si procede, a seconda delle capacità del bambino.

In alcuni casi, la tabella dei numeri può essere utile per confrontare con quello che succede quando il bambino scrive sulla calcolatrice.

« Digita un numero di cui conosci il nome »
« Digita due, tre, sei, nove, ..., trentadue, ... »
« Digita il numero che precede 7, il numero che segue il 12 »
« Digita un numero tra 4 e 10 »

« Digita n + 1: cosa noti? »
« Digita n, poi aggiungi 1 (*o 2 o 5*) e continua più volte » (*il bambino leggerà man mano ogni risultato ottenuto*)
« Scrivi n + 10: cosa noti? »
« Scrivi n + 1 (*essendo n un numero la cui cifra dell'unità è 9*): cosa noti? »

« Se digito 1 + 1 + 1 + 1 + ... arrivo a 10? a 20?
« Se digito 2 + 2 + 2 + 2 + ... arrivo a 10? a 20?
« Se digito 3 + 3 + 3 + 3 + ... arrivo a 10? a 20?
« Se digito 3 + 3 + 3 + 3 + ... fino a 12, quali sono i numeri che vedo man mano?

« Digita n, poi + 0 (*si propongono diversi valori di n*). Che noti? »
« Digita n, poi – 0 (*si propongono diversi valori di n*). Che noti? »
« Digita n, poi – n (*si propongono diversi valori di n*). Che noti? »
« Digita n, poi × 1 (*si propongono diversi valori di n*). Che noti? »
« Digita n, poi × 0 (*si propongono diversi valori di n*). Che noti? »
« Digita n, poi ÷ 1 (*si propongono diversi valori di n*). Che noti? »
« Digita n, poi ÷ n (*si propongono diversi valori di n*). Che noti? »

« Digita 12 senza utilizzare il tasto 2 »
« Digita 21 senza utilizzare il tasto 2 »
« Digita n+m e annuncia il risultato prima di utilizzare il tasto = »
« Digita 8. Che devi aggiungere (sottrarre) per fare comparire 10 (5) ? »
« Digita 17. Che devi aggiungere(sottrarre) per far comparire 20 (15) ? »

ALLEGATO 4.1.1

Questionario da sottoporre all'inizio della sessione 1

Domanda 1: Tra le seguenti parole, scegli le tre che meglio esprimono la tua idea di calcolo mentale. Giustifica brevemente la tua scelta.

Disgusto - Iniziativa - Ragionamento - Rapidità - Gioco - Allenamento - Strategia - Automatismo - Utilità - Attenzione
Giustificazione.

Domanda 2. Secondo te, perché dovremmo imparare il calcolo mentale nella scuola primaria?
È possibile barrare più di una casella.

	Per sviluppare la memorizzazione.
	Sviluppare le capacità di ragionamento e di argomentazione.
	Costruire e rinforzare la conoscenza delle proprietà dei numeri e delle operazioni.
	Identificare i vari modi possibili di eseguire lo stesso calcolo.
	Per poter controllare il risultato visualizzato da una calcolatrice
	Saper valutare l'ordine di grandezza di un risultato (calcolo approssimativo).
	Per aiutare a risolvere i problemi.

Domanda 3. Nelle scuole elementari, il calcolo mentale dovrebbe avere la priorità sul calcolo scritto. Sei d'accordo o no? Giustifica brevemente la tua risposta.

Giustificazione.

ALLEGATO 4.1.2

Trascrizione 1 (sessione 1)

Un'insegnante propone ai suoi alunni di 6 e 7 anni di lavorare sul calcolo "N + 9". Di seguito troverete la trascrizione delle discussioni tenute durante la prima sessione.
L'insegnante (EN nella trascrizione) inizia la sessione con calcoli del tipo "N + 10". Per cominciare, gli alunni devono trovare il risultato di un calcolo proposto dall'insegnante, devono scriverlo sulla loro lavagna e mostrarlo non appena l'insegnante dà il segnale.
Sono proposti i seguenti calcoli: 2 + 10; 14 + 10; 36 + 10; 30 + 10; 68 + 10. Ci concentriamo qui sui calcoli 14 + 10, 36 + 10 e 68 + 10 e sulle strategie di calcolo proposte dagli alunni e dall'insegnante.

« 14 + 10 » : la strategie di Céleste
EN: mostriamo. Ah, ci sono alcuni che non hanno trovato proprio, no non hanno trovato (scrive alla lavagna 14 + 10 =); così chi può spiegare come ha trovato 24? Celeste
CELESTE: ho messo da parte il quattro, ho messo dieci e dieci dopo ho messo il quattro e fa ventiquattro
EN: quindi quello che volevi dire era che quattordici è dieci più quattro (scrive alla lavagna, sotto 14, 10 + 4) hai calcolato il dieci più il dieci (cerchia i due 10 scritti alla lavagna) che fa…
Alcuni alunni: venti
EN: venti, più i quattro rimanenti fanno…
Alcuni alunni: ventiquattro
EN: ventiquattro (scrive 24) OK, vi chiedo: qualcuno ha un altro modo per farlo?
Alcuni alunni: no
EN: no, va bene

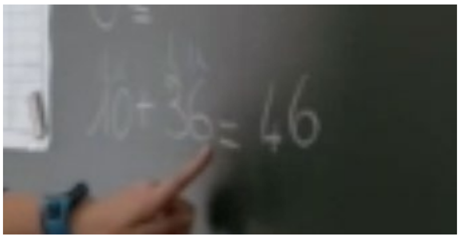
« 36 + 10 » : la strategia di LISE
LISE: Ho trovato quarantasei
EN: come hai fatto a trovare quarantasei (scrive 46 accanto a =)?
LISE: Ho preso il dieci e l'ho messo con il trenta
EN: OK.
Un allievo: fanno quaranta
LISE: Non ho dimenticato il sei
EN: ok
LISE: e nella mia mente so che trentasei più dieci fa quarantasei
EN: ok

« 36 + 10 » : EN propone una strategia
EN: Vi ricordate cosa abbiamo visto ieri
Alunni: no
EN: vi ho detto che nel dieci <u>ci sono quante unità?</u>[1]
Alunni: zero
EN: zero (*scrive u sopra il numero 0 di 10*) in trentasei <u>quante unità ci sono?</u>[2]
Un alunno: anche zero
Altri alunni: sei
Un alunno: tre
EN: Non ho capito bene
Alcuni alunni: sei
EN : <u>Nel trentasei, sei unità</u>[3] (*scrive u sopra il numero 6 di 36*) e poi <u>quante decine nel dieci?</u>[4]

---

[1] Avrebbe dovuto dire: "Qual è la cifra delle unità? ».
[2] Allo stesso modo, avrebbe dovuto dire "qual è la cifra delle unità".
[3] In 36, 6 è la cifra delle unità.
[4] 10 essendo un numero a due cifre, la cifra delle decine corrisponde al numero di decine.

Alunni: uno (*scrive d sopra il numero 1 di 10*)
EN: una decina, quante decine ci sono in (indica il 36 scritto sulla lavagna)?
Alunni: tre (*EN scrive d sul numero 3 di 36*)
EN: come posso fare?
Luca: So che tre più uno fa quattro, perché è in dieci quaranta, e siccome dieci ha zero, beh, fa zero e siccome trentasei ha sei fa quarantasei
EN: infatti quello che Luca ti sta dicendo è che ha sommato i (*indica i numeri delle decine in 10 e 36*)
Un allievo: prima le decine



EN: prima le decine una decina più tre decine fa quattro decine (scrive d sul numero 4 di 46) zero unità più sei unità fa 6 unità (scrive u sul numero 6 di 46) ok
Alunni: d'accordo

« 68 + 10 » : la strategia di Lucie
LUCIE: Ho messo da parte l'otto di sessantotto poi ho collegato il sei con il dieci e una volta collegati i due ho visto che in effetti non ho contato lo zero di dieci ho messo direttamente il sei e l'uno, che faceva sette e una volta che avevo il mio sette ho aggiunto l'otto e che faceva (nel frattempo, EN collega con una linea l'1 e il 6 e scrive 7 dopo l'=)
Allievo: settantotto
EN: Dove devo aggiungere l'otto davanti o dietro?
Alunni: dietro
LUCIE: queste sono le unità
EN: OK (scrive 8 accanto al 7).

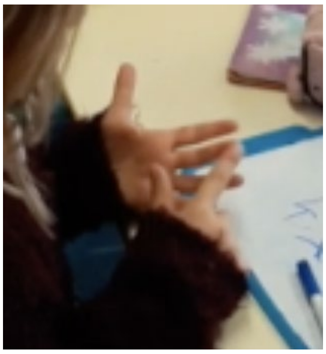
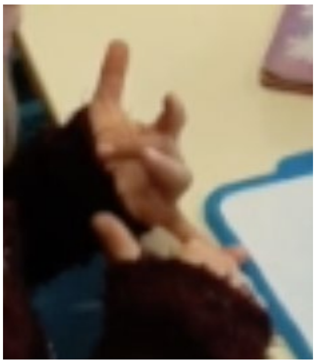
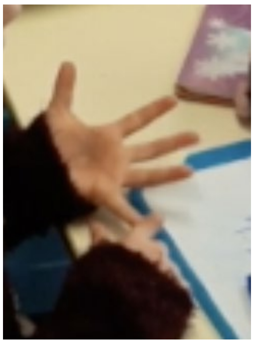
ALLEGATO 4.1.3

Trascrizione 1 (sessione 1)

Durante la fase in cui l'insegnante propone calcoli come "N + 10", alcuni alunni usano le loro dita per contare. Ecco gli scambi tra l'insegnante e una di queste allieve, Caroline, subito dopo aver proposto di calcolare "36 + 10". Si noti che anche nei calcoli precedenti, questa alunna usa le dita per contare.

EN: Cancellate ventiquattro e passiamo al prossimo e ora si fa trentasei più dieci o dieci più trentasei, abbiamo visto che è la stessa cosa trentasei più dieci
CAROLINE: trentasette [...] quarantadue quarantatre (conta in basso sulle dita, cominciando dalla mano sinistra; quando dice 'quarantatre', alza contemporaneamente l'indice della mano destra, ma poi non la sentiamo recitare la sequenza di numeri e, dopo aver alzato il mignolo, scrive 47 sulla lavagna)


EN: mostrate dieci più trentasei (scrive contemporaneamente 10 + 36 = sulla lavagna) come lo calcolo
CAROLINE: Lo so, lo faccio con le dita
EN: quindi ha contato con le dita ma purtroppo ha trovato
CAROLINE: quarantasette
EN: quarantasette, quindi cosa succede quando si conta con tutte le dita? (indica le dita di entrambe le mani) si può ottenere
CAROLINE: fare un errore
IT: sbagliare, hai iniziato con trentasei?
CAROLINE: sì
IT: quindi più dieci, vai avanti, vuoi le mie dita?
CAROLINE: no, trentasette, trentotto (alza le dita delle mani contemporaneamente, sincronizzando ogni parola con ogni dito alzato), quarantasei, oh, ne ho messo uno di troppo

EN: sì, ne hai messo uno di troppo, ma non è troppo grave

ALLEGATO 4.1.4
Trascrizione 2 (sessione 1)

L'insegnante (EN) propone ai suoi studenti calcoli come "N + 9". Il dibattito della seconda fase della prima sessione è trascritto di seguito.

« 13 + 9 » : la estrategia de Lise

EN: Proviamo una nuova operazione, vediamo se riuscite a trovare qualcosa

Un allievo: la moltiplicazione

EN: No, no, no, sempre addizioni mentali sulla lavagnetta all'inizio, ma ne faremo una o due solo per provare e vedere come funziona, quindi questa volta vi chiedo di calcolare tredici più nove

Allievo: facile

EN: fai il calcolo e poi spiegacelo

(Poco dopo)

EN: vediamo così vi ho chiesto (sulla lavagna scrive 13 + 9 =) ok, ci sono alcuni che hanno trovato ventidue ventitré quarantanove (scrive questi numeri sulla lavagna) non ci sono altre proposte [...] Lise

LISE: Ho messo prima il dieci, poi il nove

EN: il dieci da dove l'hai preso, il tredici?

LISE: sì

EN: ah giusto quindi in effetti hai fatto tredici è dieci più tre (scrive sulla lavagna 10 + 3 sotto 13) hai fatto il dieci con il nove che fa diciannove

LISE: dopo aver contato a mente

EN: hai fatto diciannove più…

LISE: tre

EN: più gli altri tre

LISE: L'ho fatto nella mia testa e ho scoperto che fa ventidue

EN: ventidue, tutto bene

« 25 + 9 » : la strategia di Nathan

EN: quindi andiamo oltre, cancelliamo, cancelliamo e ora facciamo VENTICINQUE PIÙ NOVE, venticinque più nove

(poco dopo)

EN: mostrate … trentatré trentaquattro (scrive 25 + 9 = 33 _ 34 sulla lavagna)

NATHAN: Posso dirlo?

EN: spiega come hai fatto

NATHAN: Infatti, ho fatto venticinque più nove come nove ha cinque unità

EN: oh, è vero

NATHAN: Li ho messi in venticinque, quindi fanno tre decine, quindi nel nove ci sono quattro, ci sono anche quattro unità che ho messo quattro trentaquattro

EN: Avete capito cosa ha fatto?

Alunni: no

Un allievo: per niente

EN: È partito dal fatto che il nove è…

NATHAN: cinque e quattro

EN: cinque PIÙ quattro (scrive alla lavagna 5 + 4, sotto 9) poi ha usato quello che…

NATHAN: Ho usato il cinque

EN: cinque (traccia una freccia da 5 a 25)

NATHAN: Li ho messi lì, questo è (inaudibile)

EN: più cinque è…

NATHAN: trenta

EN: trenta e poi…

NATHAN: più quattro
EN: i quattro quindi è…
NATHAN: trentaquattro
EN: trentaquattro, ok (cancella il 33) hanno capito tutti?
Alcuni studenti: SÌ
Altri studenti: NO

« 25 + 9 » : la strategia di Lise

Lise (alza la mano): Ne ho un altro
EN: ah un altro modo
Lise: Non ho ancora contato le unità, ho preso il venti di venticinque, poi ho messo il nove, poi ho più uno, che fa trenta, quindi mi rimane solo il quattro, quindi fa trentaquattro
EN (scrivendo alla lavagna): quindi hai scomposto, come hai fatto, venti più cinque
LISE: Ho fatto nove
EN: venti più nove ok, che fa…
LISE: ventinove
EN: ventinove
LISE: Ho contato quello di cinque
EN: OK qui hai scomposto il cinque in quattro più uno, quindi sono trenta OK
LISE: e così ho preso i quattro e fanno trentaquattro
EN (scrivendo alla lavagna): OK, ha fatto venti più nove, che è ventinove, poi ci rimane il cinque, che ha scomposto in quattro più uno, ha preso l'uno e l'ha messo nel ventinove, che è trenta, e ci sono ancora questi quattro da aggiungere, trenta più il quattro uguale trentaquattro.

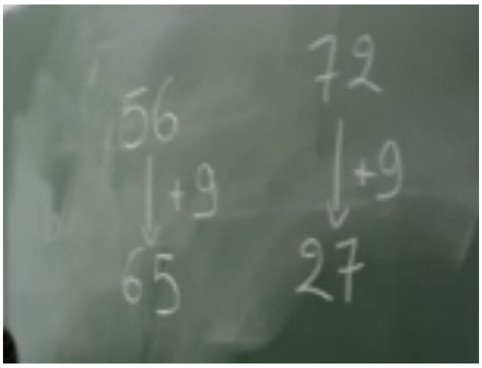
ALLEGATO 4.1.5

Trascrizione 3 (sessione 1)

L'insegnante (EN) suggerisce di nuovo ai suoi alunni calcoli come "N + 9". Qui sotto c'è la trascrizione della discussione della seconda sessione.

L'insegnante (EN) chiede agli alunni di calcolare "56 + 9". Scrive sulla lavagna mentre un allievo dà il risultato.

KOFFI: quarantasette
LOUIS (contemporaneamente a Koffi): no sessantacinque
EN: quindi hai detto quarantasette o sessantacinque?
LOUIS: sessantacinque
KOFFI: ah sì, sessantacinque
EN: Sessantacinque, qualcuno può spiegare cosa ha trovato, come l'ha trovato?
LISE: quello che è successo è che ha fatto il contrario, per esempio il cinquantasei ora il sei è sostituito dal cinque e il cinque dal sei



EN: OK, quindi se io dicessi settantadue più nove (scrive 72 + 9, sulla lavagna) sarebbe ventisette (scrive 27), quindi pensi che vada bene?
ADAM: NO, ottantadue
EN: ah, perché mi stai dicendo ottantadue?
CAT: No, ottantuno
EN: ah, ottantuno, cosa succede guarda le decine, cosa succede con le decine (mostra la cifra delle decine in 65 e poi in 56)?
CAT: Ho capito, vedi, ci sono cinquantasei e sessantacinque, le decine e le unità sono…
ADAM: infatti, non sono uguali, infatti le decine salgono e le unità scendono
EN: hai capito o no?
Diversi alunni: SÌ
IT: guarda cosa succede alle decine, aggiungo un dieci (passa dal 5 di 56 al 6 di 65)
KOFFI: va su
IT: sale invece a livello delle unità (mostra il 6 di 56)...?
Diversi alunni: va giù
IT: RIMUOVO un'unità, OK
Diversi alunni: sì
IT: quando faccio più nove cosa significa che aggiungo un dieci
ADAM: più dieci
IT: più dieci e quando tolgo un'unità qual è l'operazione
Più alunni: meno uno
IT: quindi meno uno, quindi possiamo anche fare più dieci meno uno quando aggiungo nove.
Diversi alunni : sì

« 24 + 9 »

EN: ora vi chiedo ventiquattro più nove

(Un minuto dopo)

EN: così hai trovato trentatré, cinquantacinque, ah, non siamo d'accordo; ho chiesto quale fosse il numero che fa ventiquattro più nove (scrive alla lavagna), cosa abbiamo detto che avremmo fatto con le decine?

Un allievo: aggiungiamo un dieci

IT: quindi aggiungiamo un dieci, quante decine, qual è la cifra delle decine in ventiquattro?

KOFFI: venti

CAT: due

EN: qual è la cifra delle decine in ventiquattro?

ADAM: due

IT: mi dici che aggiungo un dieci, si trasforma in…

Diversi alunni: tre e le unità (nasconde le decine di entrambi i numeri e indica le unità)?

KOFFI: tre

EN: diventa tre (scrive 3) abbiamo tolto un'unità (indica un dito con la mano sinistra) il numero è

Diversi alunni: trentatré

EN: trentatré, sì Lise

LISE: In realtà quello che ho fatto è che quando avevo ventiquattro, ho spostato il quattro (mima questo spostamento con le mani) ho messo il nove con il quattro ho visto che se togli uno dal quattro ci sono ancora tre nel quattro, e uno che è con il nove, così ho fatto un nuovo dieci da mettere con il venti che fa trenta e ho trovato il tre che era rimasto dal quattro

« 37 + 9 »

EN: cerchiamo di andare più veloci dopo ventiquattro faremo trentasette: trentasette più nove cosa dà (scrive alla lavagna)? Vai veloce veloce veloce: cinque quattro tre due uno stop mostrate! Quarantacinque, quarantasei (scrive contemporaneamente), trentaquattro, allora come si fa? C'è anche quarantotto, vedo (lo aggiunge alla lista sulla lavagna), allora cosa abbiamo detto su come fare dieci unità (segna d sul 3 di 37 e u sul 7) aggiungo un dieci non ho più tre ma…

CAT: quattro

EN: quattro (scrive), tiro fuori un'unità ora ho un po' di…

ADAM: sei

EN: sei, e se lo facciamo con il mio secondo metodo, cosa ho detto? Ho detto che se aggiungo un dieci è come aggiungere…

Un allievo: ah

EN: un dieci è…

Un allievo: un'unità

EN: dieci e poi tolgo

Più alunni: un'unità

EN: una unità significa che tolgo…

CAT: uno

EN: uno, facciamo la stessa cosa per vedere se troviamo lo stesso risultato
Un alunno: più nove meno uno
EN: no PIÙ DIECI meno uno, se faccio trentasette più dieci che è…
ADAM: quarantasette
EN: quarantasette meno uno
CAT: quarantasei
EN: quarantasei, troviamo lo stesso risultato, vedete, ora vi sto dando delle tecniche per calcolare velocemente, quindi vi dirò cinque quattro tre due uno per ottenere il risultato
Alcuni alunni: no!!!
EN: OK, inizierò da dieci allora

« 48 + 9 »
EN: ora farete quarantotto, farete quarantotto più nove, io comincio da dieci (mostra entrambe le mani aperte e comincia ad abbassare un dito dopo l'altro) mostriamo: così, ci sono alcuni che sono riusciti (legge i numeri sulle lavagne) cinquantasette, cinquantasette, quarantasette, trentaquattro (sorpresa) ho dato quale numero all'inizio?
KOFFI: quarantacinque
EN: no era quarantotto
KOFFI: sì quarantotto, come si fa quarantotto, se si usa il metodo più dieci, quarantotto più dieci?
ADAM: cinquantotto, e ora sono cinquantasei, sette
EN: sette, ok, ci sono voluti dieci secondi per farlo
Alunno: sì
EN: No, quindi possiamo fare più dieci meno uno, o possiamo fare: aggiungo un dieci e tolgo un'unità ma hai dieci secondi per farlo.
KOFFI: dieci secondi
EN: dieci secondi, tutto qui

« 51 + 9 »
EN: attenzione, vi dico cinquantuno, cinquantuno più nove una trappola (dieci secondi dopo) mostriamo: allora ho sessanta, dei sessantasei, dei cento (scrive alla lavagna questi tre numeri). Lucas, allora, come hai trovato sessanta?
LUCAS: infatti, ho fatto il metodo che hai detto tu perché lì si aggiunge un dieci e poi si toglie un'unità
EN: allora ho chiesto cosa? Cinquantuno più nove (scrive questi numeri sulla lavagna) come hai fatto?
KOFFI: che fa sessanta
LUCAS: Ho aggiunto un dieci e sessantuno e tolto un'unità, che fa sessanta
EN: è zero, aggiungo un dieci a cinque, guarda, ho cinque decine (mostra il 5 di 51) cinque decine più un dieci, sono sei decine
Un allievo: cinquantuno
KOFFI: sessanta e fa sessantuno
EN: guarda (scrive d e u rispettivamente sul 5 e sull'1 di 51 e separa con una barra i due numeri) ho cinque decine, vedi, aggiungo un cinque, aggiungo uno che fa…
Un allievo: sessanta
EN: NO, nelle decine, solo nelle decine (indica la cifra delle decine in 51) cinque decine più un dieci fa SEI decine ok nelle unità (copre la cifra delle decine in 51 e 60) ora ho quante
Diversi alunni: uno
EN: uno, se ne tolgo uno, quanti ne ho dopo?
Koffi: zero
EN: zero, ok andiamo

HUGO: Ho un altro metodo
EN: ah, hai un altro metodo
HUGO: infatti ne ho contati cinquanta e fanno cinquantanove, e poi ne ho contati sessanta e ho messo sessanta.

ALLEGATO 4.2.1

La tavola dei numeri

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

ALLEGATO 4.2.2

La tavola dei numeri (vuota)

ALLEGATO 4.2.3

Tabelle dei numeri da completare: degli esempi

Una tabella di numeri in cui solo la prima riga in alto e la prima colonna a sinistra sono riempite.

Da completare interamente.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10									
20									
30									
40									
50									
60									
70									
80									
90									

Solo le caselle colorate devono essere riempite.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10									
20									
30									
40									
50									
60									
70									
80									
90									

Una tabella di numeri in cui solo la prima riga in alto o la prima colonna a sinistra è riempita.

Da completare interamente.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

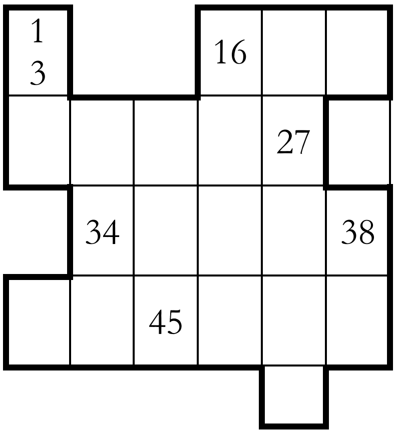
Solo le caselle colorate devono essere riempite.

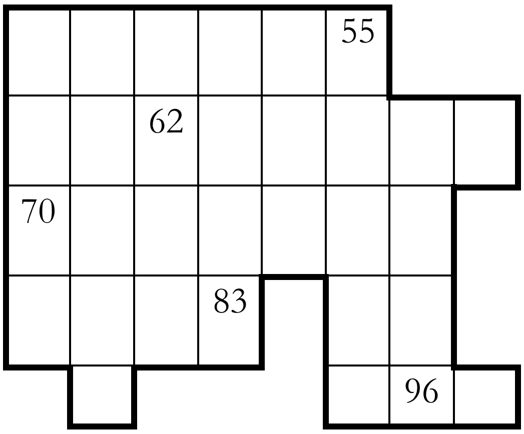
0									
10									
20									
30									
40									
50									
60									
70									
80									
90									

ALLEGATO 4.2.4

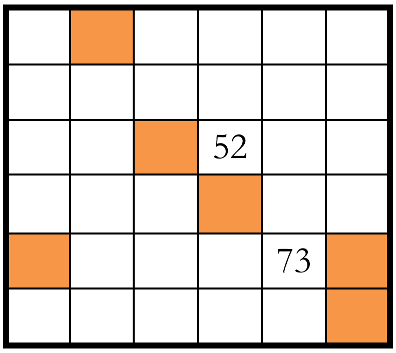
Pezzi della tabella dei numeri: esempi

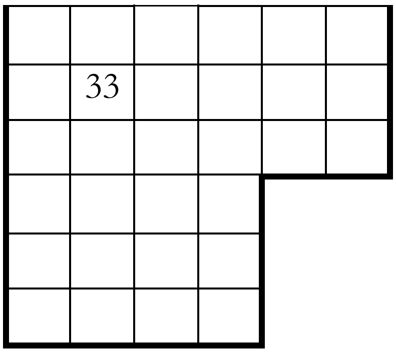
Da riempire



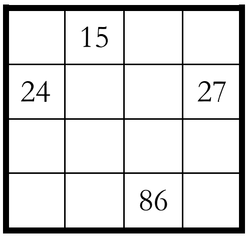


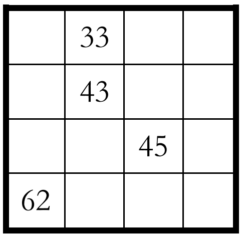
Riempire le caselle colorate





Da correggere

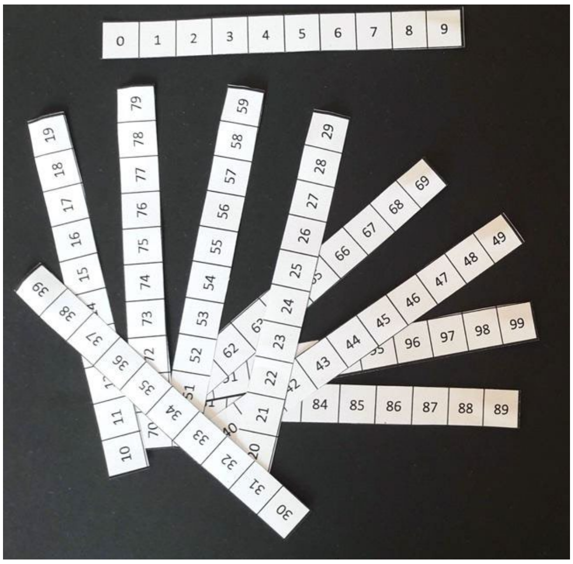




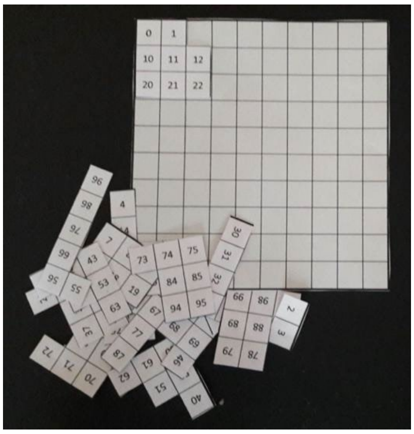
ALLEGATO 4.2.5

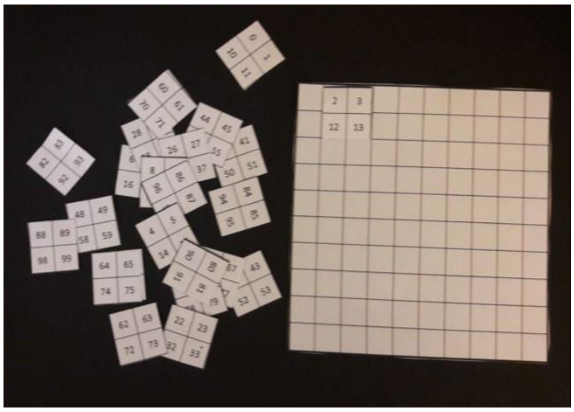
Degli esempi di puzzle

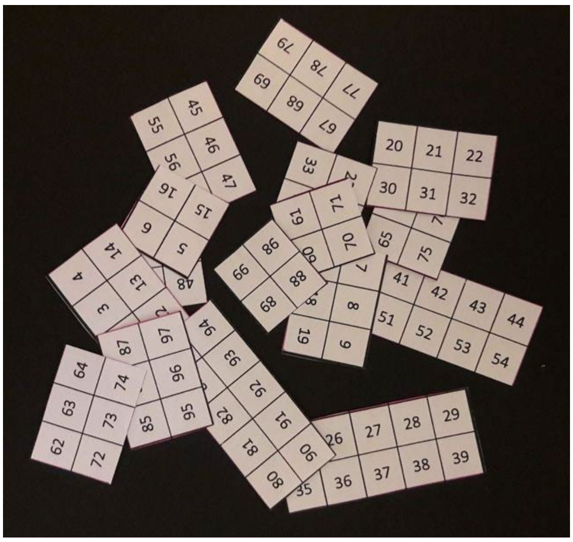
Pezzi della tavola in forma di strisce (tagliate lungo le linee).

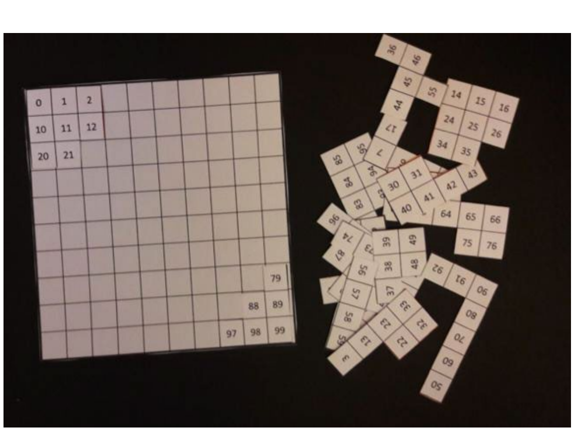


Pezzi della tavola dei numeri di svariate forme.









ALLEGATO 4.2.6

Altre tabelle di numeri

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	42	44	45	46	47	48	49	50
51	52	52	54	55	56	57	58	59	60
61	62	62	64	65	66	67	68	69	70
71	72	72	74	75	76	77	78	79	80
81	82	82	84	85	86	87	88’	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ALLEGATO 4.4.1

Questionario da proporre all'inizio della sessione 4

Domanda. Qual è l'utilità della calcolatrice alla scuola elementare?
È possibile barrare più di una casella.

	È utile per calcolare.
	È utile per verificare il risultato di un calcolo.
	È utile per ridurre la memorizzazione.
	È utile per effettuare dei calcoli con grandi numeri o con molti numeri, altrimenti difficili da realizzare con il calcolo mentale o in colonna.
	È utile per risolvere problemi che richiedono molti tentativi.
	È utile per risolvere i problemi, senza preoccuparsi dei calcoli.
	È utile per esplorare i numeri.
	È una fonte di problemi ed esercizi.

ALLEGATO 4.4.2

Esercizi e problemi con la calcolatrice (sessione 4)

Problema 1. A coppie, ognuno con la propria calcolatrice

Ognuno digita un numero segreto di quattro cifre sulla propria calcolatrice, le cifre sono diverse l'una dall'altra. A turno, ogni giocatore cerca di indovinare una cifra del numero segreto dell'altro; se indovina, l'altro giocatore esegue l'operazione che fa apparire uno zero al posto della cifra indovinata dall'avversario. Il vincitore è colui che per primo riesce a far sparire il numero segreto dal display dell'altro.

Problema 2

Digitare sulla calcolatrice il primo numero dato. Poi, senza cancellarlo, far comparire il secondo numero dato.

Esempi

a) Digitare sulla calcolatrice 47. Senza cancellarlo, far comparire 127.
b) Digitare sulla calcolatrice 12905. Senza cancellarlo, far comparire 12825.
c) Digitare sulla calcolatrice 8,701. Senza cancellarlo, far comparire 8,79.

Problema 3

Digitare sulla calcolatrice un primo numero dato. Poi, senza cancellarlo e <u>con il minor numero di passi possibile</u>, far apparire il secondo numero dato.

Esempi

a) Digitare 6 sulla calcolatrice. Senza cancellarlo, far comparire 18.
b) Digitare 6 sulla calcolatrice. Senza cancellarlo, far comparire 55.
c) Digitare 73 sulla calcolatrice. Senza cancellarlo, far comparire 9.
d) Digitare 1032 sulla calcolatrice. Senza cancellarlo, scambiare il 2 con lo 0.

Problema 4

Sul display della calcolatrice, far comparire il numero dato, secondo le condizioni imposte.

Esempi

a) Far comparire il numero 28 senza utilizzare i tasti 2 e 8.
b) Far comparire il numero 28 utilizzando il tasto « + » almeno una volta.
c) Far comparire il numero 28 utilizzando il tasto « + » almeno una volta ma senza utilizzare il tasto 8.
d) Far comparire il numero 36, senza utilizzare il tasto 6 e utilizzando il tasto « × » almeno una volta.
e) Far comparire il numero 57, senza utilizzare i tasti 5 e 7.
f) Far comparire il numero 270, senza utilizzare i tasti 0, 2 e 7 e utilizzando il tasto « × » almeno una volta.
g) Far comparire il numero 1,25, senza utilizzare i tasti 2, 5 e « , ».
h) Sulla calcolatrice, solo i seguenti tasti funzionano: 2, 5, « - », « × », « (», «) » e « = ». Quale sequenza di tasti bisogna usare per ottenere ciascuno dei seguenti numeri: 1, 3, 24, 32, 100 ?
i) Sulla calcolatrice, solo i seguenti tasti funzionano: 1, 5, « - », « × », e « = ». Quale sequenza di tasti bisogna usare per ottenere ciascuno dei numeri da 1 a 20 ?

Problema 5

Digitare sulla calcolatrice, un numero a *n* cifre. Senza cancellare, usando solo i tasti numerici e il tasto "+", far apparire un numero a *n* cifre con (*n* – *1*) zeri.

Esempio

Digitare 47 058 sulla calcolatrice. Senza cancellare, usando solo i tasti numerici e il tasto "+", far apparire un numero a *5* cifre con quattro zeri.

Problema 6

Digitare il numero *n* sulla calcolatrice. Senza cancellarlo e utilizzando unicamente tasti imposti, come far comparire il numero *m* dato (*m* diverso da *n*) ?

Esempi

a) Digitare il numero 18 sulla calcolatrice. Senza cancellarlo e utilizzando unicamente tasti "+", "×" e 2, come far comparire il numero 330 ?
b) Digitare il numero 18 sulla calcolatrice. Senza cancellarlo e utilizzando unicamente tasti "+", "×" e 2, come far comparire il numero 360 ?

Problema 7

Rispettando le condizioni imposte, digitare un'espressione equivalente all'espressione data e determinare il risultato.

Esempi

a) 147 + 174, senza usare il tasto 4.
b) 7563 – 4265, senza usare il tasto 6.
c) 2756 – 795, senza usare il tasto 9.
d) 327 × 45, senza usare il tasto 4.
e) 64 × 99, senza usare il tasto «×».
f) 64 × 12, senza usare il tasto «×».
g) 64 × 3, senza usare il tasto «×».

Problema 8

Senza usare il tasto " ÷ ", determinare il quoziente o il resto di una divisione.

Esempi

a) Senza usare il tasto « ÷ », calcolare il resto di 257 ÷ 11.
b) Senza usare il tasto « ÷ », calcolare il quoziente di 1919 ÷ 9.

ALLEGATO 4.4.3

Alcuni promemoria teorici

ADDIZIONE	SOTTRAZIONE	MOLTIPLICAZIONE
Proprietà commutativa **A + B = B + A**	**A – (B + C) = A – B – C** **con A ≠ B + C** *Esempio. 31–8=31–(1+7)=…*	**Proprietà commutativa** **A × B = B × A**
Proprietà associativa **(A + B) + C = A + (B + C)**	**A – (B – C) = A – B + C** **con A ≠ B – C e B ≠ C** *Esempio. 31–8=31–(10–2)= 31–10+2=…*	**Proprietà associativa** **(A × B) × C = A × (B × C)**
A + B = (A + C) + (B– C)	**Scarto costante** **A – B = (A + C) – (B + C)** **con A ≠ B** *Esempio. 31–8=(31+2)–(8+2)=…*	**Proprietà distributiva rispetto all'addizione (sottrazione)** **A × (B + C) = A × B + A × C**

Teorema fondamentale della divisione euclidea

Dati due numeri naturali a e b (con $b \neq 0$), esistono e sono unici i due numeri naturali q e r, tali che: $a = bq + r$, con $0 \leq r < b$.

Il sistema di numerazione decimale

Aspetto posizionale della numerazione. Nella scrittura numerica di un numero, il valore delle cifre dipende dalla loro posizione.

migliaia	*centinaia*	*decina*	*unità*
1	**2**	**3**	**4**

Aspetto decimale della numerazione. Le diverse unità sono legate l'una all'altra da relazioni decimali, cioè dieci unità di un certo ordine sono uguali a una unità dell'ordine immediatamente superiore:

- dieci unità è una decina,
- dieci decine sono un centinaio,
- dieci centinaia sono un migliaio,
- ecc.

Questo dà luogo a relazioni tra le unità di diversi ordini. Per esempio:

- mille sono dieci centinaia, cento decine, mille unità
- cento è dieci decine, cento unità.

Cifra, numero

In 1234 :

- la cifra delle unità è 4, il numero di unità è 1234 ;
- la cifra delle decine è 3, il numero delle decine è 123 ;
- la cifra delle centinaia è 2, il numero delle centinaia è 12;
- essendo un numero di quattro cifre, la cifra delle migliaia e il numero delle migliaia coincidono.

ALLEGATO 5.1

La storia della matematica nei corsi teorici e pratici del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università Roma Tre (2008-2018)

Questa officina si ispira all'esperienza 2008-2018 presso l'Università Roma Tre di introduzione di argomenti di storia della matematica nei corsi teorici e pratici (Gil Clemente, Millán Gasca, 2016). In particolare, la Sessione 2 è stata progettata e realizzata nel novembre 2015 come sessione di 4 ore di un corso pratico con la collaborazione di Anna Mazzitelli ed Emanuela Spagnoletti.

Perché la storia nella formazione dei futuri insegnanti nell'area di matematica

Gli elementi di storia della matematica e di storia dell'insegnamento della matematica sono stati introdotti insieme ad aspetti linguistici e antropologici allo scopo di:

a) restituire una visione della matematica nella cultura (Bishop 1990)

– spiegare da un punto di vista culturale e interculturale i concetti primordiali della matematica (numero, rapporto, punto, linea, retta, piano ecc) e le prassi che sono alla base della matematica (misura, computo, gioco, costruzione e tecnica)
– avvicinare gli studenti alla natura della matematica come disciplina (matematica greca)
– favorire una visione della vita matematica nelle sue varie manifestazioni: accademica, nei mestieri, nella vita quotidiana, nel gioco, nell'arte

b) elaborare un racconto della matematica in grado di avvolgere l'esperienza universitaria della matematica degli studenti, anche per favorire l'acquisizione di un modo di insegnare narrativo (Egan 1989) rivolto ai bambini

c) discutere le motivazioni che spiegano la presenza della matematica nella istruzione obbligatoria (Millán Gasca, 2016).

Percorsi e materiali per l'introduzione della storia della matematica

Queste sono le quattro principali linee di indagine per introdurre la storia

1. Argomenti scelti in corrispondenza con singoli argomenti matematici trattati, ad esempio

– sistemi di numerazione diversi da quello oggi corrente
– origini paleolitici e neolitici dei concetti geometrici
– origine del sistema di numerazione sumero
– la visione di Platone sulla matematica come paideia
– le origini dell'idea di dimostrazione nel mondo greco
– origini e sviluppo europeo dei sistemi di unità di misura
– il movimento assiomatico alla fine dell'Ottocento

2. Raccolta di materiale iconografico ed elaborazione di presentazioni con un buon supporto grafico

3. Lettura di testi scritti da storici della matematica, in particolare per quanto riguarda la storia dell'insegnamento della matematica o la storia della misura

4. Lettura di albi illustrati di storia della matematica

Riscontro fra gli studenti

La storia della matematica è stata ben accolta fra gli studenti, come si desume dagli elementi raccolti durante il corso:

– attenzione, partecipazione e domande nelle ore in cui l'aspetto storico è diventato predominante

– risposte alle domande nei compiti scritti, nelle quali gli studenti richiamano molto spesso gli elementi storici

– commenti o valutazioni generali di singoli studenti, informali oppure scritti.

– risultati del questionario Q0 ANFoMAM fra gli studenti del corso di laurea in Scienze della Formazione a Roma Tre dell'a.a 2019-20.

In generale la storia della matematica ha avuto il seguente riscontro fra gli studenti:

– è risultata una scoperta sorprendente, poiché non vi era alcuna consapevolezza del fatto che la matematica è un campo del sapere che risale al mondo antico e che le idee matematiche si manifestano in diverse culture

– ha permesso di forgiare una visione più flessibile degli oggetti e delle relazioni matematiche nella sua dimensione antropologica, e delle varie espressioni della vita matematica

– ha controbattuto la paura e l'astio verso la matematica

– ha permesso di superare alcuni pregiudizi molto diffusi nella scuola primaria in Italia, quali quelli relativi alla misurazione e al suo insegnamento

– ha contribuito a far emergere l'esigenza e il convincimento dell'avvicinamento alla matematica nella scuola dell'infanzia

– ha contribuito ad avere un atteggiamento di maggiore autonomia rispetto ai contenuti specifici del curriculum nella scuola primaria, nel discernimento su ciò che è cruciale e ciò che è accessorio. Per esempio, le classificazioni (degli angoli, dei triangoli, dei quadrilateri, delle frazioni in apparenti, proprie e improprie) hanno perso la centralità nella visione complessiva, intese in un senso puramente discriminatorio e mnemonico; la dimensione esperienziale dei concetti e il ruolo di confronti e di uguaglianza è invece balzata a un posto centrale.

Riscontro fra i laureandi

Fra gli studenti che hanno scelto la matematica per il lavoro conclusivo degli studi, si è osservato che la storia della matematica è stata introdotta nelle programmazioni delle 60 ore di tirocinio in classe in modo completamente autonomo con queste modalità

– è diventato il perno per costruire in classe un approccio narrativo alla matematica

– sono state scelte attività che permettevano di immedesimarsi nelle pratiche di calcolo e misura del passato.

Si tenga presente che nei libri di testo della scuola primaria in Italia la storia della matematica è praticamente assente, tranne per alcune occasionali pagine dedicate a sistemi di numerazioni antichi. La storia della matematica è assente nella maggior parte di libri di testo universitari di matematica e didattica della matematica rivolti agli studenti del corso di laurea in scienze della formazione primaria.

Sperimentazioni della Officina 5

L'Officina 5 è stata realizzata in modo sperimentale le seguenti due volte nel corso di laurea in Scienze della formazione primaria, come insegnamento pratico inserito nel piano degli studi (Laboratorio di Matematica e didattica della matematica, 2 CFU):

a) nel gennaio 2019, in quattro giornate con 50 studenti (8 sessioni di 2 ore raggruppate in macrosessioni di 4 ore; si vedano le video clip di due delle giornate, corrispondenti alla sessioni 4 e alla sessione 6; si allega la *Presentazione agli studenti*

b) nella primavera del 2021, in versione online su piattaforma moodle con 70 studenti iscritti (8 tappe settimanali più due conferenze in video); si allega la cattura di schermo.

Il riscontro delle due realizzazioni è stato molto positivo tenendo presente:

– la partecipazione attiva

– il rendimento individuale (tutti gli studenti hanno ottenuto l'idoneità per 2 crediti formativi universitari senza difficoltà)

– i contenuti delle prove di idoneità finali

ALLEGATO 5.2

AA20/21 - LABORATORIO DI MATEMATICA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA - 22902387 - CANALE B (MILLAN GASCA)

Annunci

Presentazione del Laboratorio

Ricerca nei forum

Vai

Ricerca avanzata

Annunci recenti

Aggiungi nuovo argomento...

18 gen 2021, 11:58:27
Ana Maria Millan Gasca
Audio finale e link alle lezioni-conferenza

14 dic 2020, 11:45:54
Ana Maria Millan Gasca
Lo zibaldone non va consegnato

14 dic 2020, 11:34:08
Ana Maria Millan Gasca
Attività settima e ottava

Argomenti precedenti ...

Prossimi eventi

Non ci sono eventi prossimi
Vai al calendario...

Lo zibaldone del Laboratorio

A ognuno dei partecipanti è chiesto di seguire il percorso elaborando un proprio Zibaldone, con parole, pensieri, riflessioni e annotazioni (ognuna corredata dalla data), relative alla matematica elementare con i bambini:

- gli esercizi del Laboratorio

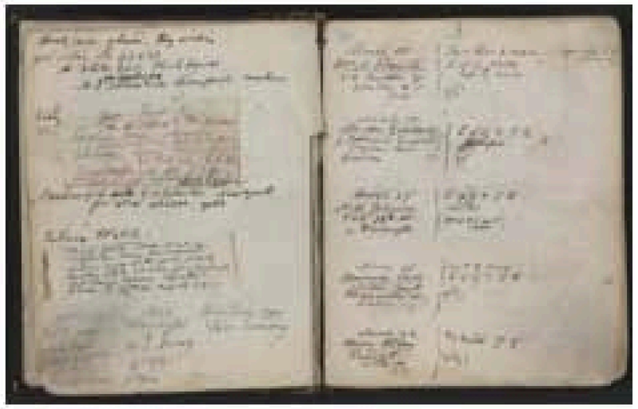
- il collegamento fra i materiali proposti e i contenuti degli insegnamenti di Istituzioni di matematica e di Matematica e didattica della matematica

- la propria esperienza infantile, scolastica e nel tempo libero

- le proprie eventuali esperienze nelle supplenze, ripetizioni, cura o attività informali realizzate con bambini, professionali o di volontariato.

żibaldóne s. m. [prob. voce onomatopeica, per alteraz. da *zabaione*]. – 1. ant. a. Vivanda composta di molti e svariati ingredienti. b. estens. Mescolanza di cose diverse; mucchio confuso di persone: *uno zibaldone Di cancellieri e di bidelli in toga Gli fa ghirlanda intorno al seggiolone* (Giusti). 2. a. ant. Scartafaccio in cui si annotano, senza ordine e man mano che capitano, notizie, appunti, riflessioni, estratti di letture, schemi, abbozzi, ecc.: *non ha lasciato opere compiute, ma solo alcuni z.*; *l'evoluzione del pensiero del Leopardi si può ricostruire dagli appunti del suo Zibaldone.*

Dal Vocabolario della Lingua Italiana Treccani



Una pagina dello zibaldone di Walt Whitman

Apertura dello zibaldone

Prepara il tuo zibaldone:

- se scritto a mano, usa fogli sciolti oppure un piccolo quaderno

- se scritto alla tastiera, predisponi un file

Lo Zibaldone è un tuo documento personale: scriverlo è un esercizio fondamentale di questo Laboratorio proprio perché esso si svolge a distanza, e il filo individuale come risonanza delle attività del Laboratorio che sono uguali per ogni partecipante.

Alla fine del Laboratorio, sceglierai alcune delle tue annotazioni inserendole in un testo scritto di ca. 3000 caratteri che consegnerai come prova di idoneità.

Tre parole sulla matematica

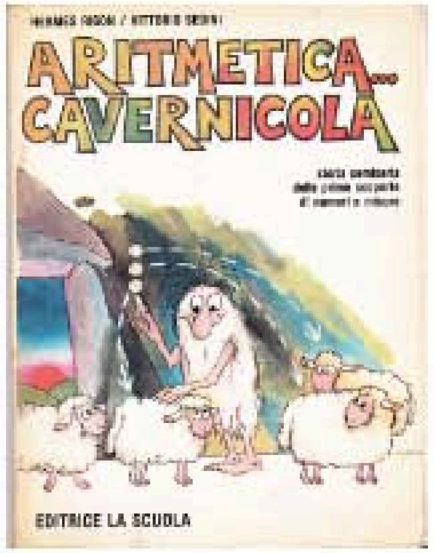
Scrivi, dopo il tuo nome e della data, tre parole che associ di getto alla matematica, senza riflettere più di un minuto.

Valgono nomi, aggettivi, avverbi...

Preistoria divertente

1. Sfoglia ...

le prime pagine di questo albo illustrato pubblicato dall'Editore La Scuola (Brescia nel 1981). L'autore del testo è Ermes Rigon, l'illustratore è Vittorio Sedini.



L'immagine della copertina ti ricorda qualcosa che abbiamo visto nel corso?

Aritmetica cavernicola_prime pagine

2. Analizza e valuta

Nel corso di Letteratura per l'infanzia si apprende a capire, valutare, apprezzare, le opere di letteratura per l'infanzia, nel loro intimo rapporto fra testi, immagini e struttura fisica (questa vi manca, ma il libro è rilegato, il formato è grande, le pagine sono 76). È un corso di educazione estetica.

Cerca di esprimere un tuo parere (anche se "ingenuo") in una scheda con questi aspetti:

- sul testo, sullo stile dell'autore

- sulle illustrazioni, il disegno, il colore ...

- sulla disposizione grafica delle pagine (o della doppia pagina)

- sull'andamento del racconto

3. In classe

Ti piace, vorresti usarlo in classe? Con bambini di quale età lo immagini? Scrivi al riguardo all'autore, in risposta alle sue righe di "Premessa".

Rigon è maestro elementare dal 1969, ma è anche un artista plastico e grafico (www.ermesrigon.com). In questa intervista trovate il modo in cui vede la scrittura per l'infanzia.

4. Matematica

Elenca le questioni di matematica di cui parlano queste pagine

5. Storia vera o storia immaginaria?

Credi che questo racconto sia verosimile? In quale periodo della storia dell'umanità è ambientato? Ricorda ciò che conosci sulla preistoria (anche consultando brevemente un tuo libro di scuola) e le cose che abbiamo raccontato nel corso.

5. Se vuoi, puoi continuare a leggere

Un Laboratorio di Storia della matematica doveva per forza partire dalla preistoria! Lo dico scherzando, ma stiamo per vedere che lo sforzo per "fare le presentazioni" dei bambini con la matematica, di renderli consapevoli di ciò con cui hanno a che fare, ha portato a proposte interessante riguardanti il passato più remoto.

"The recovered past": un dono ai bambini, secondo Mary E. Boole

1. Raccontami una storia ...

I racconti scherzosi accompagnano la storia dell'aritmetica. Leggi se non sei convinta questo problema, che si trova in un libro ... scritto attorno all'anno 800 (ricorda che non c'era la stampa, eppure è stato molto apprezzato e ricopiato)

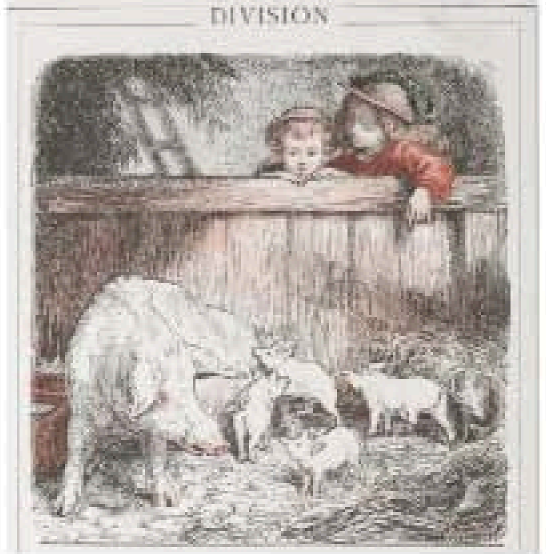
Una lumaca fu invitata a pranzo da una rondine una lega più avanti. Ma essa non poteva camminare più di un pollice al giorno. Dica, chi vuole, quanti giorni la lumaca avrà camminato per questo pranzo.

2. La serietà della aritmetica

Tuttavia, l'aritmetica e la grammatica sono state da sempre avvolte in un aria di serietà. Solo persone di pensiero libero e spregiudicato hanno osato con le storielle e un po' di leggerezza.

Augustus De Morgan, un professore di matematica a Londra, radicale in politica e molto impegnato nella diffusione della cultura anche alle classi popolari, inizia il suo libro di *Aritmetica* (1830) con un racconto di due compagnie di ufficiali a cavallo, e una cesta con sassolini per contarli.

Jean Macé, dal suo esilio politico durante il Secondo Impero in Francia, arrivò a scrivere un intero racconto per bambini sull'aritmetica, intitolato *L'aritmetica del nonno.Storia di due venditori di mele* (1862). Affinché fosse alla portata di ogni bambino, Macé non ha voluto illustrazioni per non aumentare il prezzo; questa immagine procede di un libro pubblicato qualche anno dopo sulla scia del successo di vendite di Macé.



3. Il racconto per non privare i bambini dalla storia

Forse già conosci Mary Everest Boole, la autrice del saggio La preparazione del bambino alla scienza. Il suo libro *Lezioni sulla logica dell'aritmetica* (1903) inizia così:

«You have heard, my dears, that, a long time ago, there were no people in this country except savages. [...] How do you think children learned lessons in those days?»

Inizia così un racconto in due parti su come gli uomini primitivi, ancor prima di parlare, impararono a contare, dapprima con le dita, per difendersi dai pericoli: non è davvero la stessa cosa scappare da un animale feroce oppure da un branco di animali feroci. A quei tempi non c'erano degli insegnanti dai quali imparare 'eppure i bambini non sono cresciuti ignoranti'. I veri insegnanti erano le belve selvagge, i lupi, e quello spirito di sopravvivenza che li portava a trovare un modo per continuare a vivere e proteggere la loro famiglia. È proprio tra questi insegnanti che l'uomo primitivo potrebbe aver capito come indicare 'quanti lupi'. Anche questo era un modo per sopravvivere. Un lupo poteva affrontarlo da solo ma quando c'erano molti lupi l'unica cosa da fare era scappare e trovare rifugio. Per avvertire del pericolo di un lupo si poteva forse imitare il suo ululato, ma come fare se erano più?

Il passato è negato ai bambini, afferma Mary Boole nella sua premessa, eppure le ragioni delle cose così come sono risiedono nella loro origine, e solo "recuperando" o restituendo il passato si può comprendere il senso di ciò che si sta facendo oggi. Solo così l'aritmetica potrà smettere di essere quella materia triste e stupida, come sembra a tanti piccoli alunni.

Mary Boole ricorda ai bambini le storie sugli uomini primitivi allora molto popolari, con illustrazioni come questa, di Fred Stearns, di un opera per ragazzi del 1918.

4. Prova a raccontare tu

Scrivi un racconto breve sull'origine o l'invenzione dei numeri, seguendo l'idea narrativa di Mary Boole (nota che non si riferisce a simboli scritti), e quello che hai studiato nel corso. Pensa all'età dei bambini cui la vuoi rivolgere. Cura la scrittura, cercando il sentimento, la spiegazione, la bellezza delle parole. Altrimenti inventa una storia tutta tua sulle origini della matematica

Reperire studi storici affidabili

1. Quali sono le tue preoccupazioni, persino le tue paure, quando pensi a te stessa/a te stesso insegnando matematica ai bambini di varie età?

Rifletti e fai un elenco.

2. In che senso vedi la matematica come una fonte di opportunità interessanti e rilevanti, nella tua azione professionale futura a scuola con i bambini?

Rifletti e fai un elenco.

Sono domande che ti permettono di ricapitolare a che punto sei del tuo percorso formativo in quest'area. Ciò che scriverai dipende dalle tue esperienze scolastiche passate, dallo studio del corso di Istituzioni di matematica e le prospettive che propone sulla matematica elementare, dal percorso che stiamo seguendo nel corso di Matematica e didattica della matematica; cerca tuttavia di proiettarti nel futuro. Potrebbe anche riferirsi a qualche esperienza molto attuale, se insegni o hai insegnato già in qualche grado di scuola.

1. Ora vediamo come vedono le cose gli storici di oggi.

Lo storico della matematica Enrico Giusti è stato professore dell'Università di Firenze e ora è il direttore del Giardino di Archimede. Museo per la matematica.

Ecco cosa scrive nel suo libro *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici* (1999)

[...] le definizioni e i postulati ***svolgono un'opera di traduzione dai procedimenti empirici della prassi*** *alle figure e alle operazioni astratte della geometria. [...]*

Nello stesso meccanismo potrebbero rientrare i numeri, non astrazioni da oggetti che non esistono (meno che mai astrazioni da altre astrazioni, come la numerosità, o l'equipotenza, come fino a qualche anno fa sembravano suggerire i programmi delle scuole elementare), ma oggettualizzazioni dell'attività del contare (qui il condizionale è d'obbligo: data l'assoluta mancanza di documenti, non possiamo che rimandare alla testimonianza di Qwfwq).

[Il saggio è stato pubblicato a Torino dall'editore Bollati Boringhieri]

Quindi, **così come dal tirare le corde e dalla misura si è arrivato alla geometria, allo stesso modo dal contare sarebbero nati i numeri**.

2. La leggenda di Qwfwg

Nessuna ipotesi sulle origini dei numeri è sicura, perché queste origini risalgono al pozzo profondo della preistoria e non abbiamo testimonianze né scritte né materiali.

Osserva quindi: il prof. Giusti propone un racconto anche ai suoi lettori adulti, quindi a te!

Qwfwq il cacciatore delle tigri

3. Racconta una storia

Dopo aver letto la leggenda di Qwfw, prova a raccontarla ad alta voce a una classe di bambini. Prima di iniziare a raccontare, decidi l'età dei bambini, dai 5 ai 10 anni. Una volta che c'è una trama, è il modo di raccontare che fa la differenza a seconda dell'età. Se vuoi registrati e condividilo con i compagni nel forum didattico.

Φ Un mio commento

Ogni argomento che si tratta con i bambini deve essere documentato su saggi e studi affidabili. Chi scrive un libro di testo per la scuola primaria dovrebbe procedere sempre così, per le pagine di ogni materia scolastica. Leggere e studiare sempre, coltivando la propria curiosità, è la base più solida per lezioni in classe dinamiche, coinvolgenti ed efficaci.

Paure e opportunità

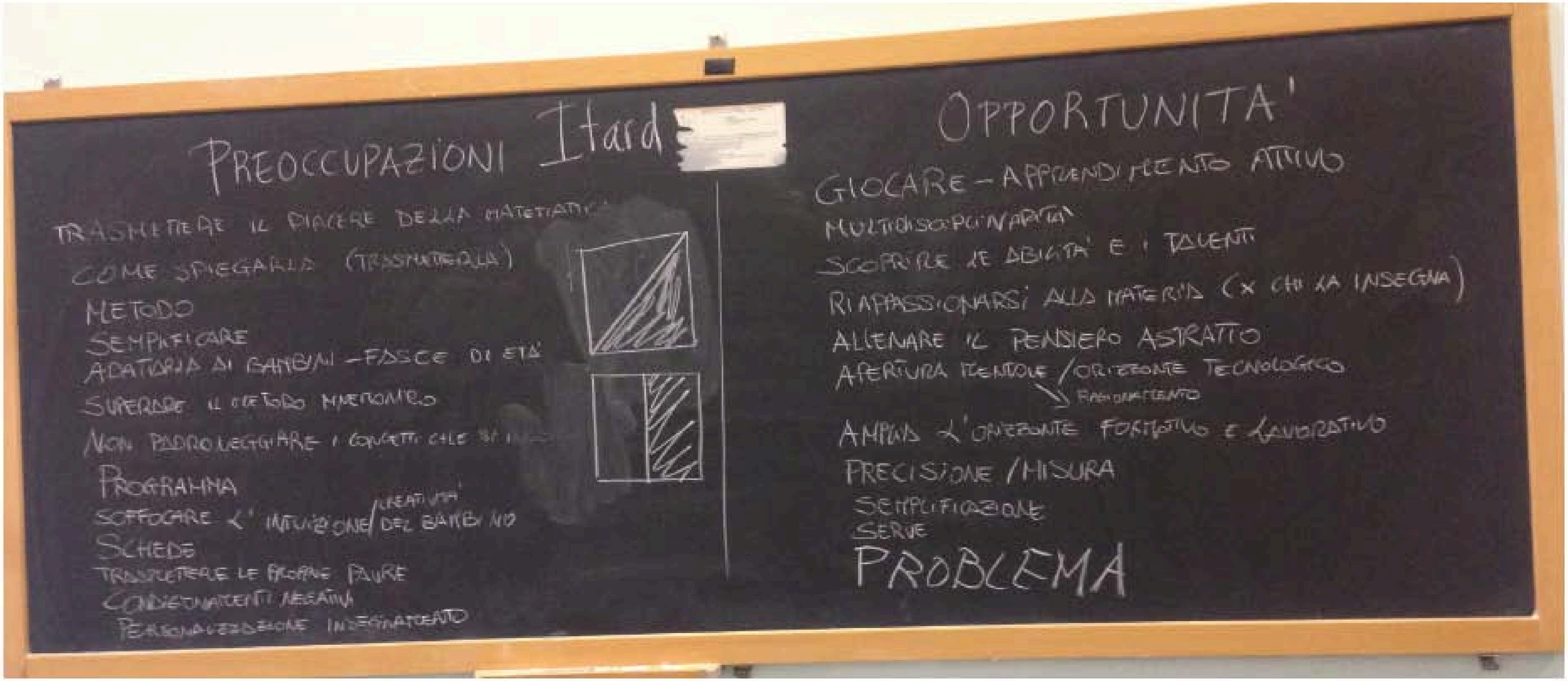
1. Quali sono le tue preoccupazioni, persino le tue paure, quando pensi a te stessa/a te stesso insegnando matematica ai bambini di varie età?

Rifletti e fai un elenco.

2. In che senso vedi la matematica come una fonte di opportunità interessanti e rilevanti, nella tua azione professionale futura a scuola con i bambini?

Rifletti e fai un elenco.

Sono domande che ti permettono di ricapitolare a che punto sei del tuo percorso formativo in quest'area. Ciò che scriverai dipende dalle tue esperienze scolastiche passate, dallo studio del corso di Istituzioni di matematica e le prospettive che propone sulla matematica elementare, dal percorso che stiamo seguendo nel corso di Matematica e didattica della matematica; cerca tuttavia di proiettarti nel futuro. Potrebbe anche riferirsi a qualche esperienza molto attuale, se insegni o hai insegnato già in qualche grado di scuola.



Le risposte a confronto

L'antico Egitto: geroglifici e tenditori di corde

1. Scopri ...

nei seguenti link tre multimedia prodotti da Martina Delzoppo, studentessa del V anno di Scienze della Formazione Primaria all'Università Roma Tre, con la propria voce narrante: 1) Le magie del punto e la linea; 2) Ames e la geometria; 3) Impariamo a misurare con Thembi (in due parti)

Tutti e tre sono stati realizzati nell'ambito del suo tirocinio finale nella scuola dell'infanzia, come modalità didattica di emergenza dopo la chiusura delle scuole in Italia a causa della pandemia. Essi hanno come idea portante il racconto, che porta con sé un invito alla matematica.

Per l'elaborazione grafica ha utilizzato il sito canva.com, dove molti materiali sono disponibili ed utilizzabili anche gratuitamente.
La voce è stata registrata usando il telefono cellulare.
Il montaggio è stato realizzato con Windows movie maker.
Infine, i multimedia sono stati messi a disposizione della classe attraverso un canale YouTube.

2. Analizza ...

almeno per uno dei multimedia, i contenuti matematici soggiacenti e gli aspetti didattici, ricordando che sono rivolti a bambini di una sezione di 4 anni.
Prima o dopo (forse questa è la migliore opzione) ascolta la breve testimonianza di Martina Delzoppo (maggio 2020): la ringraziamo molto di averla registrata per noi.

3. Ideazione e autonomia

Rifletti sull'iniziativa di Martina, i rischi, i punti di forza, e l'impressione che ha fatto su di te.

4. Annotazione sullo zibaldone

In conclusione del lavoro (anche di tutti e tre video se volete veramente impegnarvi), scrivi la tua annotazione nello zibaldone.

1. Leggi ...

le prime pagine dell'albo *Ahmose e i 999.999 lapislazzuli* (2008) di Raffaella Petti (illustrazioni di Simone Frasca), che racconta la storia di un bambino che inventò il simbolo geroglifico egizio per un milione...

Il racconto di Ahmose

Questo albo illustrato, pubblicato dal Giardino di Archimede, è basato sulla ricerca storica riguardante la matematica nell'antico Egitto.

Analizza e valuta gli stessi punti presi in esame per *Aritmetica cavernicola*.

2. La storia per comprendere i concetti matematici

Per parlare delle **frazioni** ai suoi alunni di classe quarta in un istituto comprensivo a Roma, Maria Teresa Marrano ha creato un file di diapositive durante i mesi di didattica a distanza.

Dopo aver visto il ppt, scrive le tue impressioni nello zibaldone, scrivendo una frase per ognuno di questi aspetti: 1) la grafica, 2) la trama didattica e 3) i contenuti.

Gli Egizi credevano che la scrittura fosse un dono del dio Thot, dio della Luna, della scrittura e delle scienze, rappresentato spesso come un uomo dalla testa di ibis o come babbuino, era il "segretario" degli dei e lo scriba divino, ma anche il custode della conoscenza e il responsabile della sua diffusione.

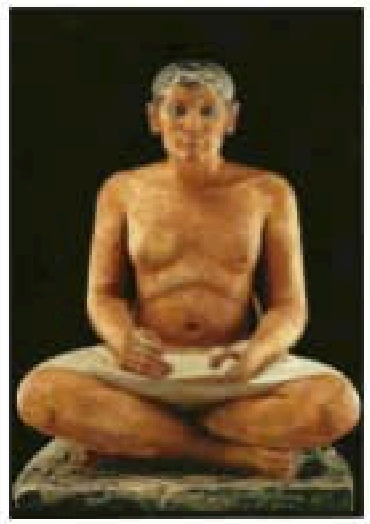
L'avventura dei geroglifici di Paola Cantatore, illustrazioni e disegni di Roberto Lauciello, progetto grafico Silvia Monzani (Panini editore, Modena, 2016, in collaborazione con il Museo Egizio di Torino)

Le frazioni e l'antico Egitto

3. Condividi una riflessione di innovazione didattica

In questo video (6', prodotto da ANFoMAM) Francesca Neri Macchiaverna ed Emanuela Spagnoletti Zeuli, collaboratrici esterne del Laboratorio di Matematica per la Formazione primaria di Roma Tre e insegnanti in due scuole a Roma, leggono ad alta voce frammenti del libro illustrato *La geometria del faraone* di Anna Cerasoli e riflettono su storia e racconto nella matematica della scuola primaria.

Dopo aver visto il video, scrive una riflessione breve sullo zibaldone in risposta a questa domanda: cosa è per te l'innovazione didattica nell'ambito della matematica con i bambini.



Una officina matematica ispirata alla storia

4. Si può introdurre la storia della matematica fin dalla scuola dell'infanzia

Questo multimedia è stato realizzato da Martina Delzoppo per il suo tirocinio di V anno in un classe di 4 anni nella scuola dell'infanzia. Osserva come adatta ai suoi alunni piccoli la narrazione dello stesso albo illustrato, *La geometria del faraone* di Anna Cerasoli, dal quale sono tratte alcune immagini, in rispetto ai diritti d'autore.

Anna Cerasoli è stata ospite del Laboratorio di Matematica per la formazione primaria Roma Tre in molte occasioni. Ad esempio trovate qui la sua presentazione di un altro libro bellissimo, *Tutti in cerchio.*

Un libro da avere nella propria biblioteca da insegnante!

La storia nella scuola dell'infanzia

Elenca i contenuti matematici soggiacenti.

Ora commenta il multimedia da un punto di vista didattico, ricordando che è rivolti a bambini di una sezione di 4 anni.

Per l'elaborazione grafica ha utilizzato il sito canva.com, dove molti materiali sono disponibili ed utilizzabili anche gratuitamente.
La voce è stata registrata usando il telefono cellulare.
Il montaggio è stato realizzato con Windows movie maker.
Infine, i multimedia sono stati messi a disposizione della classe attraverso un canale YouTube.

Φ Un mio commento

In questa attività a distanza abbiamo ricordato le attività in aula e siamo entrati in contatto con le circostanze della scuola in questi mesi. Sperando di ritrovarci presto, ma comunque ricordando che la formazione **degli adulti** a distanza è sempre una grande opportunità.

5. Ideazione e autonomia

Abbiamo visto in questo percorso quattro insegnanti che hanno ideato autonomamente attività e materiali. Rifletti sulle loro iniziative, i rischi, i punti di forza, e l'impressione che ha fatto su di te il loro lavoro e le loro proposte.

Qui sotto trovi il racconto di Martina Delzoppo sulla didattica di emergenza, e come è arrivata a ideare questo e altri prodotti multimediali.

Produrre i propri multimedia

Ames e la geometria

Questo multimedia è ispirato a un capolavoro di Anna Cerasoli, La geometria del faraone, dal quale sono tratte alcune immagini, in rispetto ai diritti d'autore.

Anna Cerasoli è stata ospite del Laboratorio di Matematica per la formazione primaria Roma Tre in molte occasioni. Ad esempio trovate qui la sua presentazione di un altro libro bellissimo, *Tutti in cerchio*.

Un libro da avere nella propria biblioteca da insegnante!

Impariamo a misurare con Thembi

Questo multimedia (in due parti) è ispirato all'albo illustrato Mamma Khanyi e i vasi. Trovate nel sito del corso MDM 19-20 il pdf del libro originale in inglese, il pdf della traduzione italiana e il mio commento al libro.

Martina Delzoppo ha realizzato un proprio commento analisi del libro, insieme ad Alice Romeo.

Trovate qui sotto la seconda parte.

Impariamo a misurare con Thembi_Seconda parte

Anna Cerasoli presenta "Tutti in cerchio" (2013)

Un percorso attraverso la storia dalla prima alla quinta classe

La storia della matematica (**Da dove viene la matematica?**):

– è una chiave importante di fronte alla domanda su **cos'è la matematica**, àncora la matematica alla vita umana e alla storia della cultura.

– coadiuva la introduzione e la comprensione dei concetti matematici. In questa tabella si propone un percorso nella storia della matematica dalla classe prima alla classe quinta.

– offre molti spunti per costruire un Grande Racconto della matematica, che vada incontro all'immaginazione dei bambini, alla loro comprensione mitica e mimesica

Tavola del percorso

Questa tavola propone un percorso storico dalla prima alla quinta classe, che sviluppa le varie potenzialità della storia della matematica in classe.

Soffermati un po' sulla suddivisione in due parti e sulle varie tappe. Scrivi sullo zibaldone le tue impressioni immediate, le domande che ti poni

La storia della matematica in una doppia pagina in classe IV

Nascosta agli studenti

Conferenza: cosa offre la storia alla didattica della matematica?

Questa è la registrazione della mia relazione al Convegno Matematica e storia, Ferrara, 11 dicembre 2020

I numeri degli indiani

Trovi qui alcune pagine scelte di un albo illustrato pubblicato dal Museo per la matematica Il giardino di Archimede, che sta per riaprire le porte a Pistoia.

Analizzalo da più punti di vista:

- il testo: linguaggio, trama, dialoghi, personaggi, ambientazione

- le illustrazioni: disegno, colore

- i contenuti matematici soggiacenti

- a che epoca della storia della matematica si rifersice?

- abbozza come useresti questo libro in una classe III, all'inizio dell'anno scolastico.

Alla fine, scrive una annotazione sul tuo zibaldone.

Un libro del giardino di Archimede

Che cosa offre la storia alla didattica della matematica?

Che cosa ci offre la storia? Svelamento e significato nella didattica della matematica

Lezione-conferenza della prof.ssa Millán Gasca

La storia nell'incontro dei bambini con la matematica

La storia della numerazione parlata nella preistoria nell'incontro dei bambini con la matematica, con l'albo illustrato Awa impara a contare

Una lezione-seminario di Francesca Neri Macchiaverna

Audio finale

Audio finale

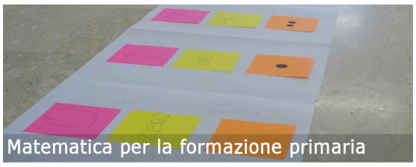
1 e 2 Le prove di idoneità: la forma dei file di testo e la stesura del testo pertinente alla richiesta

2. La progettazione e realizzazione del Laboratorio integralmente a distanza: creare una dinamica, costruire la complicità e il dialogo a distanza.

4 e 5 Risposta ad alcune domande, commento su alcuni errori,

NEL FORUM DIDATTICO ALL'INIZIO DELLA PAGINA POTETE INSERIRE UNA FRASE DEL VOSTRO ZIBALDONE

ALLEGATO 5.3



CORSO DI LAUREA IN SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA
LABORATORIO DI MATEMATICA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA
CANALE B – A. A. 2019-20

OFFICINA DI STORIA DELLA MATEMATICA E IL SUO RUOLO NELLA DIDATTICA CON BAMBINI

Presentazione

Questo laboratorio è dedicato alla storia della matematica nella scuola primaria. Il suo scopo è doppio:

1) avvicinarsi allo stato delle conoscenze storiche sulla matematica e riflettere sulle implicazioni nella didattica della matematica con i bambini e
2) allenarsi ad introdurre la storia nelle lezioni di matematica con bambini usando racconti, immagini e materiali, sia per l'interesse che conoscere la storia ha di per sè per i piccoli alunni, sia per contribuire a comprendere i concetti della matematica elementare.

Sono scopi collegati fra di loro: nella misura in cui si conosce la storia della matematica e si impara a cercare fonti affidabili (libri, siti, articoli), si possono affrontare temi storici, sotto forma di racconto con i bambini più piccoli e con un approccio storico-filosofico con i più grandi.

Cosa significa "officina" (*taller* in spagnolo)

Questo canale del Laboratorio fa parte delle attività del progetto europeo Erasmus + finanziato dall'Unione Europea dal titolo ANFoMAM[1].

ANFoMAM ha come obiettivo principale progettare un format innovativo, chiamato *taller* (che traduciamo dallo spagnolo con il termine "officina") rivolto sia alla formazione all'università di futuri insegnanti di scuola dell'infanzia e scuola primaria, sia alla formazione in servizio degli insegnanti. Un'**officina** Anfomam è divisa in 8 sessioni di 2 ore.[2]

Ogni **officina** Anfomam completa la offerta formativa di corsi e laboratori universitari ed è specialmente adatto anche alla formazione in servizio. Si lavora soprattutto su aspetti quali:

[1] **ANFoMAM** – **A**prender de los **N**iños para **Fo**rmar a los **M**aestros en el **Á**rea de **M**atemáticas (Aprendere dai bambini per formare i maestri nell'ambito matematico) – Progetto europeo Erasmus + 2018 Acción Clave KA203, Asociaciones Estratégicas (Educación superior), n° 2018-1-ES01-KA203-050986. Oltre al secondo socio italiano, la Associazione Tokalon dedicata alla formazione in servizio, altri quattro soci si trovano in Francia e in Spagna.

[2] ANFoMAM sta progettando sei officine; il progetto prevede una sperimentazione di ogni officina, all'università oppure in scuole fra insegnanti in servizio, prima di rendere il materiale disponibile a tutti (in varie lingue) su Internet, in un sito dedicato.
Una parte (4 ore) dell'officina di storia della matematica e del suo insegnamento (corrispondente alle prime due sessioni) è stata già realizzata con un piccolo gruppo di studenti di Italia, Francia e Spagna nel settembre 2019.Nel corso di questo Laboratorio di Matematica e didattica della matematica a Roma realizzeremo per la prima volta la intera officina. In allegato trovate una bibliografia per chi vuole saperne di più.

– la **fiducia nelle risorse di comprensione del bambino**, in parte diverse da quelle di un adulto, e che oltre alla logica e la razionalità nel discorso, includono il corpo, le concezioni ingenue, la comprensione narrativa

– la **fiducia, iniziativa e capacità di ideazione dell'insegnante**, inclusi aspetti tecnici della didattica (creazione di un ritmo, uso dei materiali, invenzione nelle verifiche oltre le prove standardizzate) come aspetti di riflessione autobiografica molto rilevanti nel rapporto che ognuno di noi a con la matematica.

Le officine prevedono attività quali: uso dei materiali, racconto e analisi di attività in aula con bambini, attività simulate anche tattili, visive e di movimento, analisi dei sussidiari, discussioni e ideazione di gruppo. Ci si allena anche all'immedesimazione nel bambino-alunno.

Programma delle sessioni

- ✓ *Martedì 7 gennaio 2020 ore 14.30-18:30*
(con Anna Mazzitelli e Francesca Neri)

  Prima parte: Le grandi tappe della storia della matematica, in immagini

  Seconda parte: *Awa insegna a contare* (2011), di Enrico Giusti, illustrazioni di Simone Frasca.

- ✓ *Mercoledì 8 gennaio 2020 ore 14.30-18:30*
(con Emanuela Spagnoletti Zeuli)

  Prima parte: *Uri il piccolo sumero* (2008), di Raffaella Petti, illustrazioni di Simone Frasca.

  Awa e *Uri* fanno parete della collana Collana "Nel mondo dei numeri", Firenze, Il Giardino di Archimede Un museo per la matematica, 2008. **https://php.math.unifi.it/archimede/archimede/bottega/mondonumeri.php**

  Seconda parte: La storia della matematica in classe, in immagini

- ✓ *Giovedì 9 gennaio 2020 ore 14.30-18:30*

  Prima parte: Cercare nel presente le tracce del passato. Come si indaga nella storia della matematica: l'esempio della misura

  Seconda parte: Raccontare la misura ai bambini: storie, immagini, attività.

- ✓ *Venerdì 10 gennaio 2020 ore 14.30-18:30*
(con Francesca Neri ed Emanuela Spagnoletti)

  Prima parte: *La geometria del faraone* di Anna Cerasoli, con illustrazioni di Desideria Gucciardini, San Dorligo della Valle, Emme Edizioni, 2013.

  Seconda parte: Prova di idoneità scritta, portando con sè note e zibaldone elaborati durante il Laboratorio.

Formatori invitati

Anna Mazzitelli, Francesca Neri ed Emanuela Spagnoletti, che sono insegnanti della scuola dell'obbligo e cultori della materia del Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università Roma Tre, membri del Laboratorio di Matematica per la formazione primaria dell'Università Roma Tre e formatori dell'Associazione Tokalon (associazionetokalon.com).

Materiali

Vi saranno forniti i materiali necessari.

Portate con voi:
– un quaderno o dei fogli bianchi o a quadretti di lato 1 cm
– matita e gomma da cancellare
– matite colorate
– soltanto mercoledì 8 gennaio, per poter riportare a casa il materiale lavorato, vi servirà un barattolo di vetro, o un contenitore da cucina in vetro o in plastica (capacità minima 2 dl e apertura larga, di non meno di 25 cm^2).
– i testi seguenti:

1. MILLÁN GASCA Ana
   2006 *All'inizio fu lo scriba. Piccola storia della matematica come strumento di conoscenza*, 2a. ed., Milano, Mimesis.

2. (articolo che si trova nel materiale di formonline)
   MILLÁN GASCA Ana, MAZZITELLI Anna, NERI Francesca e SPAGNOLETTI ZEULI Emanuela
   2017 Storia e racconto nella matematica della scuola primaria: basi didattiche e sequenza operativa, *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, numero monografico "Strategie e metodologie didattiche in matematica e nelle scienze", 9(14), pp. 209-239.

Anfomam

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Bibliografia

Per chi vuole saperne di più ...

CELI Valentina, COGOLLUDO José Ignacio, MILLÁN GASCA Ana, GARCÍA CATALÁN Raquel, GIL CLEMENTE Elena, LIZASOAIN Inmaculada e REGOLIOSI Luigi

2019 Learning from children to improve primary school teachers math-specific education, in Dagmar Szarková, Daniela Richtáriková, Peter Letavaj (a cura di), *Proceedings, 18th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2019*, Bratislava, Slovak University of Technology in Bratislava, Publishing house Spektrum StuPEKTRUM STU, pp. 190-193.

CELI Valentina, COGOLLUDO José Ignacio, MILLÁN GASCA Ana, MOLER José Antonio, GIL CLEMENTE Elena, LIZASOAIN Inmaculada e REGOLIOSI Luigi

2019 Addressing the issue of trust in elementary teachers's maths-specific education: Anfomam project, in Jarmila Novotná e Hana Moraová (a cura di) *Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics, Proceedings, International Symposium Elementary Mathematics Teaching, Prague, August 18-22, 2019*, Prague, Charles University Faculty of Education, pp. 113-121.

MILLÁN GASCA Ana

2011 "Il ruolo della storia nell'insegnamento della matematica nella scuola primaria", in *Convegno nazionale La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori*, http://php.math.unifi.it/convegnostoria/materiali/MillanGasca.pdf

2016 La matematica è parte di noi, in Davide Peddis e Carla Romagnino (a cura di) *La meraviglia della scienza*, Cagliari, ScienzaSocietàScienza, pp. 34-40.

MILLÁN GASCA Ana e GIL CLEMENTE Elena

2016 Integrating history of mathematics with foundational contents in the education of prospective elementary teachers. In L. Radford, F. Furinghetti, T. Hausberger (a cura di), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, Montpellier, IREM de Montpellier, pp. 427-440.

MILLÁN GASCA Ana, GIL CLEMENTE Elena, COLELLA Ilaria

2017 Combining historical, foundational, and developmental insights to build children's first steps in mathematics, in Dooley, Therese & Gueudet, Ghislaine (a cura di), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1 – 5, 2017)*, Dublin, DCU Institute of Education and ERME, pp. 1877-1884.

MILLÁN GASCA Ana e NERI Francesca

2019 The role of stage presence in primary mathematics teachers' education, in Dagmar Szarková, Daniela Richtáriková, Peter Letavaj (a cura di), *Proceedings, 18th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2019*, Bratislava, Slovak University of Technology in Bratislava, Publishing house Spektrum Stu, pp. 829-835.

MOYON Marc e TOURNÈS Dominique (a cura di)

2018 *Passerelles. Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, Arpeme, Bouc Bel Air, Commission Inter IREM épistémologie et histoire

ALLEGATO 5.4

I vasi di mamma khanyi:
https://associazionetokalon.com/i-vasi-di-mamma-khanyi/