

Operador de comparación de elementos multivaluados basado en Funciones de Equivalencia Restringida

1º Aitor Castillo-López^a, 2º Carlos Lopez-Molina^{a,b,c}, 3º Javier Fernández^a,
4º Humberto Bustince^a y 5º Sesma-Sara^a

^aDepartamento de Estadística, Informática y Matemática, Universidad Pública de Navarra, (31006) Pamplona, Spain

^bKERMIT, Dept. Data Analysis and Mathematical Modelling, Ghent University, (9000) Ghent, Belgium

^cNavarraBiomed, Complejo Hospitalario de Navarra, (31008) Pamplona, Spain

aitor.castillo@unavarra.es

Abstract—En este trabajo proponemos un nuevo enfoque del algoritmo de clustering gravitacional basado en lo que Einstein consideró su “mayor error”: la constante cosmológica. De manera similar al algoritmo de clustering gravitacional, nuestro enfoque está inspirado en principios y leyes del cosmos, y al igual que ocurre con la teoría de la relatividad de Einstein y la teoría de la gravedad de Newton, nuestro enfoque puede considerarse una generalización del agrupamiento gravitacional, donde, el algoritmo de clustering gravitacional se recupera como caso límite. Además, se desarrollan e implementan algunas mejoras que tienen como objetivo optimizar la cantidad de iteraciones finales, y de esta forma, se reduce el tiempo de ejecución tanto para el algoritmo original como para nuestra versión.

Index Terms—cosmos, clustering, no supervisado, simulación, fuerza gravitacional

I. INTRODUCCIÓN

LOS OPERADORES DE COMPARACIÓN han sido objeto de estudio en el ámbito del procesamiento de la información. De hecho, la comparación (cuantitativa) de información es una de las tres operaciones más básicas sobre datos, junto a las operaciones de igualdad y ordenación. De manera general, la investigación se ha centrado en simular el comportamiento humano al realizar este tipo de operaciones.

Gran parte de la literatura sobre operadores de comparación está dedicada a las métricas, así como a clases de operadores estrechamente relacionados (pseudométricas [1], cuasimétricas [2], etc.). Una de las principales críticas a las métricas como operadores de comparación es el hecho de que se imponga la desigualdad triangular [3]. Si bien la desigualdad triangular es matemáticamente conveniente en una amplia gama de escenarios, no está claro si los humanos realmente se comportan de acuerdo con esta propiedad, y se pueden encontrar muchos contraejemplos diferentes en contextos específicos [4]. Por esta razón, los investigadores han intentado construir paradigmas de comparación que no se basen ni se inspiren en métricas.

Dentro de la teoría de conjuntos difusos, la comparación se ha abordado de diferentes maneras. Una parte importante se ha dedicado a la idea de métricas difusas [5], [6] o pseudométricas [7], [8], y las Funciones de Equivalencia

Restringida (REF por sus siglas en inglés), son en este ámbito de vital relevancia. Estas fueron presentadas en [9] para la comparación de grados de pertenencia en el intervalo $[0, 1]$ adaptando los axiomas originales propuestos por J. Fodor y M. Roubens [10]. Desde su introducción, el concepto de REF se ha adaptado a ámbitos en los que los valores a comparar se encuentran dentro del intervalo $[0, 1]$. Ejemplos relevantes son las REF intervalo-valoradas (IV-REF), diseñadas para comparar grados de pertenencia con intervalos [11], o las REF radiales (RREF), adaptadas para datos escalares en configuraciones radiales [12]. Una necesidad crítica en la adaptación de las REF a escenarios distintos al original es en relación al modelado del orden de crecimiento, que se utiliza críticamente en la definición axiomática de REF.

En este trabajo presentamos una adaptación de las REF a datos multivaluados, que denotamos como L^n . Para lograr este objetivo, presentamos la idea de L^n -REF, y desarrollamos un conjunto de axiomas que estos operadores deben cumplir. Además, introducimos métodos de construcción para L^n -REF capaces de acomodar diferentes interpretaciones en el ordenamiento multivaluado. Nuestras propuestas, en términos de ordenación de datos multivaluados, se circunscriben dentro de la taxonomía de Barnett [13]. Tengase en cuenta que imponer algún orden para los datos multivaluados es necesariamente arbitrario y dependiente del contexto, ya que *no hay un orden natural para los datos multivaluados* [13]. A modo de ejemplo, utilizamos las L^n -REF en la comparación de colores, ya que el color se representa de forma habitual como un dato multivaluado (independientemente del espacio de color específico). Además sirve como ejemplo de aplicación de las L^n -REF en visión artificial.

El resto de este trabajo está organizado de la siguiente manera. La Sección II resume algunos conceptos de uso para las próximas secciones. La Sección III presenta nuestra propuesta, mientras que diferentes ejemplos ilustrativos presentan una prueba de concepto de nuestros operadores en el contexto de la comparación de colores. Finalmente, en la Sección IV se recogen las conclusiones de nuestro trabajo y posibles líneas futuras.

II. PRELIMINARES

A. REF en L

Considérese (L, \leq) donde $L = [0, 1]$ y \leq es el orden natural de los números. Ahora bien, considérense en letra mayúscula los elementos pertenecientes a L^n , es decir $X = (x_1, \dots, x_n) \in L^n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Existe un orden parcial \leq_P inducido por \leq dado de la siguiente manera: $X \leq_P Y$ iff $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ ¹.

Denótese $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in L^n$ y $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in L^n$. Una función de agregación n -aria M de elementos multivaluados en L^n es una función $M : L^n \rightarrow L$ creciente para cada una de las variables y debe satisfacer $M(\mathbf{0}) = 0$, $M(\mathbf{1}) = 1$ [14]–[16]. Las siguientes propiedades para las funciones de agregación $M : L^n \rightarrow L$ son de utilidad para las siguientes secciones:

(P1) $M(x_1, \dots, x_n) = 0$ iff $x_1 = \dots = x_n = 0$.

(P2) $M(x_1, \dots, x_n) = 1$ iff $x_1 = \dots = x_n = 1$.

Una Media Aritmética Ponderada n -aria (MAP) en L con pesos normalizados $w_1, \dots, w_n \in L$ y $X = (x_1, \dots, x_n)$ es una función $\omega : L^n \rightarrow L$ definida como $\omega(X) = w_1x_1 + \dots + w_nx_n$ tal que $w_1 + \dots + w_n = 1$.

Definición II.1. *Un automorfismo de L es una función continua estrictamente creciente $\varphi : L \rightarrow L$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Además, la identidad en L se indica con Id.*

Defínase una REF en L construida por automorfismos de la siguiente manera.

Definición II.2. [9] *Una función $R : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es llamada Función de Equivalencia Restringida si cumple:*

(R1) $R(x, y) = 1$ iff $x = y$;

(R2) $R(x, y) = 0$ iff $\{x, y\} = \{0, 1\}$;

(R3) $R(x, y) = R(y, x)$ para todo $x, y \in [0, 1]$;

(R4) Si $x \leq y \leq z$, entonces $R(x, z) \leq R(x, y)$ y $R(x, z) \leq R(y, z)$ para todo $x, y, z \in [0, 1]$.

En [17] se introduce un método para construir REFs en términos de automorfismos.

Proposición II.3. [17] *Si φ_1, φ_2 son dos automorfismos de L, entonces la función $R : L^2 \rightarrow L$ definida como*

$$R(x, y) = \varphi_1^{-1} \left(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)| \right),$$

es una REF.

Definición II.4. *Una función $f : (L^n)^m \rightarrow L^n$ es llamada representable si existen $f_1, \dots, f_n : L^m \rightarrow L$ tales que*

$$f(X_1, \dots, X_m) = (f_1(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, f_n(x_{1n}, \dots, x_{mn})), \quad (1)$$

para todo $X_1, \dots, X_m \in L^n$ with $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

¹A lo largo de este trabajo, la definición de i será la misma para abreviar. De lo contrario, se redefinirá explícitamente para algunas excepciones si así fuera necesario.

B. Espacios de color y operadores lineales

Como se expone en [18], para reproducir una imagen a color, es necesario generar nuevos vectores en el espacio espectral n a partir de los obtenidos por un sensor multi-espectral dado, mientras que los dispositivos de salida, que pueden caracterizarse como aditivos o sustractivos, debe poder reproducir colores de estos vectores. Dado que el ojo humano se puede representar como un sensor $n = 3$, lo más común es usar espacios tridimensionales para guardar información de color. Entre todos los diferentes sistemas de color posibles para dispositivos de salida aditiva, el modelo RGB [19] es el más extendido debido a la evolución de la codificación, que trata las imágenes a color como tres bandas monocromáticas independientes [20]. A pesar de que existen otros espacios de color como CIE $L^*a^*b^*$ que intentan reproducir un espacio de color uniforme basado en la percepción humana del color, donde el significado de cada valor L^* , a^* y b^* es bastante diferente. Por el contrario, el espacio RGB es un espacio simple en forma de cubo y el significado de cada valor que compone un *triplete* es siempre el mismo, siendo la cantidad de rojo, verde o azul que compone un color respectivamente. Por simplicidad e idoneidad, tomaremos el modelo RGB como espacio de color en el que trabajar. Incluso si se puede elegir cualquier otro espacio de color, los resultados y las interpretaciones podrían ser bastante diferentes.

En RGB es habitual representar los tres componentes de un color en una escala de 0 a 255 y sólo se corresponde un único color para cada triplete en el espacio $[0, 255]^3$. Consideremos ahora el espacio RGB, pero refactorizado al espacio $[0, 1]^3$, es decir, L^3 . Entonces, los colores que corresponden a las esquinas del cubo RGB son:

■ Rojo: C_R (1, 0, 0)	■ Verde: C_G (0, 1, 0)	■ Azul: C_B (0, 0, 1)
■ Cian: C_C (0, 1, 1)	■ Magenta: C_M (1, 0, 1)	■ Amarillo: C_Y (1, 1, 0)
■ Negro: C_K (0, 0, 0) o $\mathbf{0}$	□ Blanco: C_W (1, 1, 1) o $\mathbf{1}$	

Estos son los únicos colores compuestos usando solo 0s y 1s y por esta razón los llamamos *tripletes crisp* o *colores crisp*.

Todos los colores posibles en el espacio RGB se pueden describir, de acuerdo con la terminología común, en los siguientes términos de apariencia de color [21]: *brillo*, *tonalidad* o *matiz* y *saturación*. Un color pierde brillo si disminuye el promedio de los valores del triplete que describe su posición en el espacio RGB. Entonces, todos los colores dentro de un plano perpendicular a la diagonal entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ tienen brillo idéntico. El tono del color es otra propiedad principal y está relacionada con la longitud de onda dominante percibida; en otras palabras, si un color es rojo, azul, amarillo, naranja... Los colores dentro de la diagonal entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son los únicos colores sin matiz, y además, en esta diagonal se encuentran todos los colores grises posibles; por eso dicha recta se llama *diagonal de grises*. Finalmente, la saturación describe cuán cerca está

un triplete de la diagonal de grises; cuanto más cerca(lejos) de la diagonal de grises, menor(mayor) saturación. A mayor saturación, más fácil es percibir el tono de un color dado.

Denotamos *colores complementarios* a los pares de colores que, cuando se combinan, producen un determinado color en escala de grises [22]. Estos pares de colores se consideran complementarios dependiendo de la teoría de color que se utilice: la teoría de color moderna utiliza el modelo de color aditivo RGB o el modelo CMY para los sustractivos. Es por ello que en este trabajo consideramos *colores complementarios crisp* los pares $C_R - C_C$, $C_G - C_M$, y $C_B - C_Y$. El par de colores $C_K - C_W$ es común a todas las teorías del color.

A lo largo de todo este trabajo, se pueden aplicar diferentes $f : (L^n)^m \rightarrow L^n$ (como se presenta en Def. II.4) a un punto $X = (x_1, \dots, x_n) \in L^n$, es decir, $f(X \times m)$. Además, algunas funciones f se construyen con $m = n$ MAPs. En estos casos, la función f toma la forma

$$f(X \times n) = (\omega_1(X), \dots, \omega_n(X)),$$

que se puede reescribir como una transformación lineal de un punto $X \in L^n$ a otro punto $X' \in L^n$ mediante una multiplicación matricial;

$$\begin{aligned} (f(X \times n))^T &= \\ \begin{pmatrix} \omega_1(X) \\ \vdots \\ \omega_n(X) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} w_{11}x_1 + \dots + w_{1n}x_n \\ \vdots \\ w_{n1}x_1 + \dots + w_{nn}x_n \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= WX^T = X'^T, \end{aligned} \quad (2)$$

donde la fila i -ésima de la matriz W se compone de los pesos de la i -ésima MAP, ω_i .

Esta forma de representación nos permite tratar muchas de las futuras operaciones en este trabajo como operaciones lineales algebraicas en el espacio RGB y se utilizarán para:

- 1) Visualizar de una manera sencilla lo que sucede con el espacio de color, mientras,
- 2) La notación algebraica reduce la complejidad de las expresiones obtenidas, y además,
- 3) Simplifica la implementación del algoritmo presentado.

Nótese que para cualquier n el cubo L^n se transforma en un n -hiperparalelepípedo más pequeño dentro del cubo original L^n con dos de sus vértices opuestos en $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ debido a las propiedades (P1) y (P2). Además, sea $X_d = (x, \dots, x)$ cualquier punto en la diagonal de L^n , i.e., X_d está en la línea entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$. Es fácil ver que X_d permanecerá inmutable bajo la transformación f presentada en la Eq. 2 debido a que cada una de las filas de W suma 1, entonces,

$$X_d'^T = WX_d^T = X_d^T. \quad (3)$$

En términos de color, la Eq. 3 implica que cualquier color gris es inmutable bajo cualquier W . Con respecto a los colores de fuera de la diagonal de grises, estos serán diferentes bajo una transformación W . De hecho, los colores que no son grises

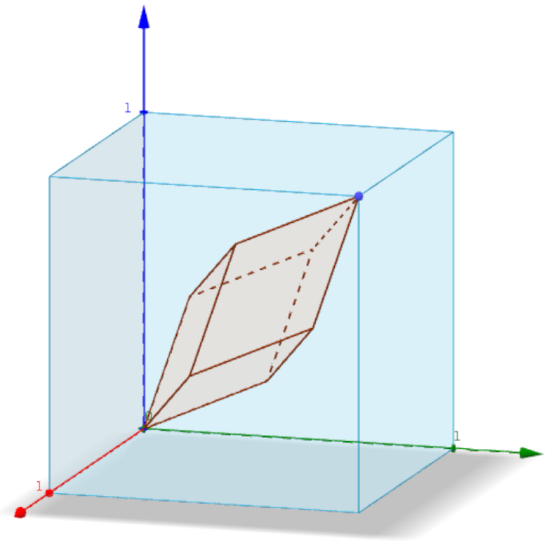


Fig. 1: Transformación del cubo L^3 para los valores del Ejemplo II.5. Es evidente que las propiedades del espacio resultante se pueden deducir de las propiedades de la matriz W como, por ejemplo, sus simetrías, el determinante, etc.

se aproximarán a la diagonal de la escala de grises cuando $\det(W) < 1$, por lo que los colores perderán saturación. En muchas otras transformaciones, estos colores también pueden cambiar su tono y brillo.

Ejemplo II.5. Tomemos la siguiente matriz W para un ejemplo en L^3 ,

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta las columnas de W , es fácil ver que los tripletes C_R , C_G y C_B , que son la base de nuestro espacio RGB, se transforman en $\blacksquare = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $\blacksquare = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ y $\blacksquare = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ respectivamente. La representación visual de la transformación del espacio RGB se muestra en la Figura 1. Como se deduce de la Eq. 3, cualquier color de la escala de grises permanecerá invariante bajo transformación. También se puede apreciar cómo los colores de las esquinas C_R , C_G y C_B han perdido saturación, y además, han cambiado de tono debido a la rotación inducida por W . Los colores C_R y C_G han ganado brillo, mientras C_B lo ha perdido.

Como resumen, si aplicamos esta W a los colores que forman la base del espacio RGB, C_R , C_G y C_B , se transformarán en

$$\begin{matrix} \color{red}\square & \color{green}\square & \color{blue}\square \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \color{grey}\square & \color{grey}\square & \color{grey}\square \end{matrix}.$$

III. L^n -REF: NUEVO OPERADOR PARA COMPARAR DOS COLORES OBTENIENDO UN TERCERO COMO RESULTADO

El objetivo de esta sección es construir un operador que sea capaz de devolver una medida de equivalencia en L^n como resultado de comparar dos elementos multivaluados pertenecientes a dicho espacio. Para ello, mientras la teoría es desarrollada para cualquier n , los ejemplos ilustrativos se darán para $n = 3$, y en concreto, se presentará un algoritmo de comparación de imágenes. Este, dadas dos imágenes, debe devolver una imagen de salida donde sus pixeles pueden ser interpretados como un mapa, donde sea posible interpretar las regiones donde las imágenes de entrada son similares en color o, en su defecto, diferentes. Para lograr este objetivo, introducimos un algoritmo para comparar pixel a pixel todos los pixeles de una imagen con los pixeles correspondientes en una segunda imagen de entrada, siendo necesario que, ambas tengan las mismas dimensiones.

Definamos el pixel ij -ésimo de una imagen A como $P_{A_{ij}}$. En el Algoritmo 1 presentamos la estructura computacional de nuestra propuesta.

Algoritmo 1: Comparación pixel a pixel

Entrada: Dos imágenes A y B del mismo tamaño.
Resultado: Una imagen a color de tamaño idéntico.
 Escoger un método de comparación de pixeles ;
para cada posición ij **hacer**
 Comparar los pixeles $P_{A_{ij}}$ y $P_{B_{ij}}$;
 Asignar al ij -ésimo pixel de la imagen resultado el valor de la comparación entre pixeles anterior;
fin

Por lo tanto, para la acción de comparación del Alg. 1 es necesario construir un método para comparar pixeles, es decir, encontrar un operador que dados dos tripletes de entrada su salida sea otro triplete que guarde la información de la comparación.

Llegados a este punto, podemos considerar dos filosofías diferentes teniendo en cuenta cuáles de los tripletes crisp complementarios son antagonistas para el caso del color. Es posible construir dos métodos diferentes, uno para cada una de las siguientes filosofías:

- 1) Un método que trata el par de colores complementarios $C_K - C_W$ de manera diferente a los otros pares crisp complementarios al compararlos, siendo $C_K - C_W$ el único par que presenta el mayor antagonismo.
- 2) Un método que trata todos los pares crisp complementarios por igual al compararlos.

Para comparar dos pixeles de color, debemos definir la noción de REF sobre L^3 (en general sobre L^n), de tal forma que el valor que obtengamos sea nuevamente un elemento de L^3 (L^n). En las siguiente subsección definimos y presentamos una versión de REF en L^n con este propósito. De las dos filosofías posibles, en este trabajo solamente se ha desarrollado la primera planteada donde el par $C_K - C_W$ se trata de diferente manera que los restantes.

A. L^n -REF basadas en la filosofía donde el par $0 - 1$ es tratado de diferente manera

Esta versión de REF trata el par $C_K - C_W$ como el único que representa la menor equivalencia posible.

Definición III.1. Sea n un número entero positivo. Una función $R_{L^n} : L^n \times L^n \rightarrow L^n$ se llama función de equivalencia restringida en L^n (R_{L^n}), si satisface:

- (RL1) $R_{L^n}(X, Y) = \mathbf{1}$ iff $X = Y$;
- (RL2) $R_{L^n}(X, Y) = \mathbf{0}$ iff $\{X, Y\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$;
- (RL3) $R_{L^n}(X, Y) = R_{L^n}(Y, X)$ para todo $X, Y \in L^n$;
- (RL4) Si $X \leq_P Y \leq_P Z$, entonces $R_{L^n}(X, Z) \leq_P R_{L^n}(X, Y)$ y $R_{L^n}(X, Z) \leq_P R_{L^n}(Y, Z)$ para todo $X, Y, Z \in L^n$.

Teniendo en cuenta Def. II.2, la justificación del axioma (RL1) es natural; comparar tripletes equivalentes debe devolver el valor más alto en L^n , i.e., $\mathbf{1}$, como medida de equivalencia dado que estos son equivalentes. En cuanto al axioma (RL2), se trata de comparar los tripletes $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$. En este caso, estamos teniendo en cuenta que los tripletes C_K y C_W son los tripletes menos equivalentes entre todos los pares de colores posibles según la filosofía escogida, entonces, siendo este nuestro punto de partida, se justifica que son los tripletes únicos que al compararse, deben devolver $\mathbf{0}$, es decir, el valor más bajo posible de todo L^n . La justificación del axioma (RL3) es que se exige a la REF que la comparación entre dos pixeles debe cumplir con la simetría. Esta propiedad puede no ser necesaria en otras aplicaciones donde existe una dependencia entre imágenes comparadas (como imágenes de vídeo donde existe una relación temporal entre fotogramas), en nuestro caso, no se considera dependencia del tiempo, por lo que (RL3) está justificado. Finalmente, la justificación del axioma (RL4) es que la equivalencia resultante entre comparar dos tripletes similares debe ser mayor que la equivalencia de comparar dos tripletes que son, al menos, más diferentes que los anteriores.

Ahora damos un método de construcción para R_{L^n} en L^n de acuerdo con Def. III.1.

Teorema III.2. Sea $\omega_i : L^n \rightarrow L$ una MAP n -aria como vector de pesos normalizados $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ tal que los vectores son linealmente independientes y existe $k \in \{1, \dots, n\}$ con $\omega_{kj} \neq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Sea $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ una secuencia de REFs en L . Entonces la función $R_{L^n} : L^n \times L^n \rightarrow L^n$ dada por,

$$R_{L^n}(X, Y) = \left(R_1(\omega_1(X), \omega_1(Y)), \dots, R_n(\omega_n(X), \omega_n(Y)) \right), \tag{4}$$

para todo $X, Y \in L^n$, es una R_{L^n} en L^n .

Proof. (RL1) La suficiencia se deriva de Eq. (4). Con respecto a la necesidad, sea $R_{L^n}(X, Y) = \mathbf{1}$, entonces, $R_i(\omega_i(X), \omega_i(Y)) = 1$, por lo tanto $\omega_i(X) = \omega_i(Y)$ y finalmente $X = Y$.

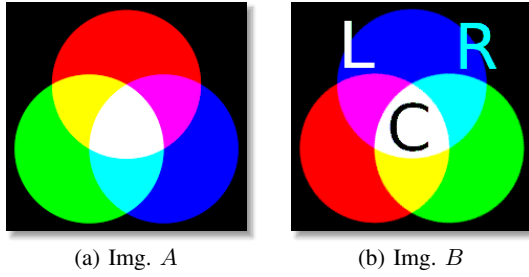


Fig. 2: Las imágenes sintéticas A (Fig. 2a) y B (Fig. 2b) son el input para el Algoritmo 1 en el Ejemplo III.4.

(RL2) Sea $R_{L^n}(X, Y) = \mathbf{0}$. Por lo tanto para todo i , se tiene que $R_i(\omega_i(X), \omega_i(Y)) = 0$, de modo que $\{\omega_i(X), \omega_i(Y)\} = \{0, 1\}$. Ya que existe k tal que ω_k satisface (P1) y (P2), se sigue que $\{X, Y\} = \{0, 1\}$.

(RL3) La prueba es directa teniendo en cuenta (R3).

(RL4) De $x_i \leq y_i \leq z_i$ se obtiene $\omega_j(X) \leq \omega_j(Y) \leq \omega_j(Z)$ para todo j y consecuentemente $R_j(\omega_j(X), \omega_j(Z)) \leq R_j(\omega_j(X), \omega_j(Y))$, de donde se sigue que $R_{L^n}(X, Z) \leq_P R_{L^n}(X, Y)$. La prueba para $R_{L^n}(X, Z) \leq_P R_{L^n}(Y, Z)$ es similar. \square

Si aplicamos el método de construcción de las REFs R_1, \dots, R_n en el Teorema. III.2 en términos de automorfismos se obtiene que al seguir la construcción de R_{L^n} .

Corolario III.3. Si se asume el Teorema III.2, sea φ_{ij} para $j = 1, 2$, un automorfismo de L . Luego la función $R_{L^n} : L^n \times L^n \rightarrow L^n$ dada por,

$$R_{L^n}(X, Y) = \left(\varphi_{11}^{-1} \left(1 - |\varphi_{12}(\omega_1(X)) - \varphi_{12}(\omega_1(Y))| \right), \dots, \varphi_{n1}^{-1} \left(1 - |\varphi_{n2}(\omega_n(X)) - \varphi_{n2}(\omega_n(Y))| \right) \right), \quad (5)$$

para todo $X, Y \in L^n$, es una R_{L^n} en L^n .

Nótese que es posible reescribir la anterior expresión en términos de Eq. 2 dado el caso en el que ω_i son MAPs,

$$R_{L^n}(X, Y) = \mathbf{R}((WX^T)^T, (WY^T)^T), \quad (6)$$

donde W es la matriz construida con los pesos de las MAP y \mathbf{R} es una secuencia de REFs en L .

Tomemos los colores crisp presentados en la Subsección II-B y compongamos las imágenes sintéticas A y B (Figuras 2a y 2b respectivamente). Ambas son la misma imagen pero una rotada con respecto a la otra, y además, la segunda contiene tres caracteres adicionales: el carácter blanco "L" a la izquierda, el carácter cian "R" a la derecha y un tercer carácter negro "C" en el centro.

Ejemplo III.4. Las imágenes sintéticas Fig. 2a y Fig. 2b nos permiten comparar muchos de los colores crisp entre sí al

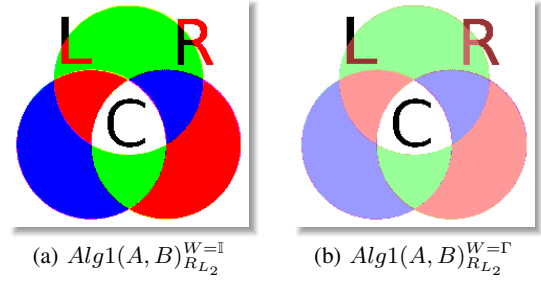


Fig. 3: Mapas resultantes para $W = \mathbb{I}$ (Fig. 3a), y para $W = \Gamma$ (Fig. 3b).

usar el Alg. 1. En este ejemplo, el resultado se calcula dos veces; uno para $W = \mathbb{I}$ y otro para $W = \Gamma$, siendo

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix},$$

donde, en ambos casos la secuencia de REFs elegida es $\mathbf{R} = (1 - |x - y|, 1 - |x - y|, 1 - |x - y|)$.

Los mapas de características resultantes se muestran en la Fig. 3. Se observa cómo al comparar C_R y C_B devuelve el mismo tono verde que al comparar C_C y C_Y para diferentes valores de W sin rotación. Esta simetría se debe a que el canal que permanece inalterado es el segundo. Véase como, tomando $C_C = (0, 1, 1)$ y $C_Y = (1, 1, 0)$ el canal con valor equivalente sigue siendo el segundo. Entonces, esto se puede interpretar como; los tonos de color del mapa resultante identifican los canales que son más equivalentes entre los pixeles comparados, haciendo coincidir el tono del pixel resultante con sus canales correspondientes cuando no hay rotación inducida por W .

Ejemplo de (RL1) es que el fondo de ambos mapas es C_W porque se compara el mismo color; en ambos casos, el color C_K está como fondo. Además, el área circundante del carácter "C" en los mapas es C_W porque en ambas imágenes de entrada se compara el color C_W . Por el contrario, teniendo en cuenta (RL2) C_K se obtiene en el mapa resultante para el carácter "C" y la parte superior del carácter "L" al comparar $\mathbf{0}$ con $\mathbf{1}$.

El color en la parte izquierda de "R" es el resultado de comparar dos pares de colores crisp complementarios ($C_R - C_C$) y depende de W . Para $W = \mathbb{I}$ (en la Fig. 3a), se obtiene C_K y lo mismo sucede si se comparan cualquiera de los colores crisp complementarios en el cubo RGB; $C_K - C_W$, $C_R - C_C$, $C_G - C_M$ o $C_B - C_Y$. Esto implica que todos los pares crisp complementarios tienen el mismo comportamiento con respecto a la REF que va en contra de la filosofía establecida. Entonces, debido a esta razón, W no puede ser la matriz de identidad para R_{L^n} . En otras palabras, esto significa que C_K se puede obtener en más casos que comparando exclusivamente C_K con C_W , entonces, el axioma RL2 no se cumple para $W = \mathbb{I}$ (o, en cualquier caso, cuando $\det(W) = 1$).

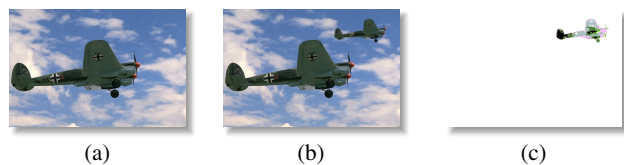


Fig. 4: La imagen 3063 original (Fig. 4a) y su versión modificada (Fig. 4b) para usar como input del Alg. 1 en el Ejemplo III.5. El mapa resultante se muestra en la Fig. 4c.

Para concluir este trabajo, mostramos un ejemplo donde aplicamos el Alg. 1 usando R_{L^n} . Este Ejemplo III.5 es una posible aplicación del Algoritmo 1 donde se detecta un objeto en función de la diferencia de color entre las imágenes de entrada. Con este propósito, hemos tomado del Berkeley Segmentation Dataset [23] la imagen indexada como 3063 (Fig. 4a) y la hemos modificado para agregar un segundo avión en la esquina superior derecha como se muestra en la Fig. 4b.

Ejemplo III.5. La R_{L^n} tal y como aparece en la Eq. 6 es usada para comparar mediante el Alg. 1 las imágenes de la Fig. 4 tomando como secuencia de REFs $\mathbf{R} = (1 - |x - y|, 1 - |x - y|, 1 - |x - y|)$. Por simplicidad W es la misma que en el Ejemplo II.5. El mapa resultante se muestra en la Fig. 4c.

IV. LÍNEAS FUTURAS

Una evidente línea futura es generar una nueva clase de operadores L^n -REF que se basen en la filosofía en la cual todos los posibles complementarios crisp sean tratados de la misma manera, por ejemplo, deberán tomar como igualmente antagónicos todos los elementos multivaluados que sean complementarios crisp y no acentuar la diferencia para el único par $0 - 1$.

En concreto, la creación de este tipo de operador nos llevaría a tener que analizar qué diferencias se podrían apreciar entre la aplicación de los operadores construidos en base a las diferentes filosofías en el procesamiento de imagen a color.

Otra posible línea futura es extender las aplicaciones a otro tipo de formato de información como pueden ser las imágenes multi e hiperespectrales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido respaldado por los proyectos PID2019-108392GB-I00 (AEI/10.13039/ 501100011033) de la Agencia Estatal de Investigación.

REFERENCES

- [1] F. Van Breugel, J. Worrell, A behavioural pseudometric for probabilistic transition systems, *Theoretical Computer Science* 331 (1) (2005) 115–142.
- [2] C. Lopez-Molina, S. Iglesias-Rey, H. Bustince, B. De Baets, On the role of distance transformations in baddeley's delta metric, *Information Sciences* (2021).
- [3] A. Tversky, I. Gati, Similarity, separability, and the triangle inequality., *Psychological review* 89 (2) (1982) 123.
- [4] A. Tversky, D. H. Krantz, The dimensional representation and the metric structure of similarity data, *Journal of mathematical psychology* 7 (3) (1970) 572–596.
- [5] I. Kramosil, J. Michálek, Fuzzy metrics and statistical metric spaces, *Kybernetika* 11 (5) (1975) 336–344.
- [6] O. Kaleva, S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, *Fuzzy sets and systems* 12 (3) (1984) 215–229.
- [7] Z. Deng, Fuzzy pseudo-metric spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 86 (1) (1982) 74–95.
- [8] Y. Yue, F.-G. Shi, On fuzzy pseudo-metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 161 (8) (2010) 1105–1116.
- [9] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, Restricted equivalence functions, *Fuzzy Sets and Systems* 157 (17) (2006) 2333–2346.
- [10] J. C. Fodor, M. Roubens, *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, Vol. 14, Springer Science & Business Media, 1994.
- [11] A. Jurio, M. Pagola, D. Paternain, C. Lopez-Molina, P. Melo-Pinto, Interval-valued restricted equivalence functions applied on clustering techniques, in: *Proc. of the IFSA-EUSFLAT*, 2009, pp. 831–836.
- [12] C. Marco-Detchart, J. Cerron, L. De Miguel, C. Lopez-Molina, H. Bustince, M. Galar, A framework for radial data comparison and its application to fingerprint analysis, *Applied Soft Computing* 46 (2016) 246–259.
- [13] V. Barnett, The ordering of multivariate data, *Journal of the Royal Statistical Society: Series A* 139 (1976) 318–355.
- [14] H. Bustince, J. Montero, E. Barrenechea, M. Pagola, Semiautoduality in a restricted family of aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems* 158 (12) (2007) 1360–1377.
- [15] D. Dubois, H. Prade, A review of fuzzy set aggregation connectives, *Information sciences* 36 (1-2) (1985) 85–121.
- [16] G. J. Klir, *Fuzzy sets, Uncertainty and Information* (1988).
- [17] H. Bustince, M. Pagola, E. Barrenechea, Construction of fuzzy indices from fuzzy di-subsethood measures: application to the global comparison of images, *Information Sciences* 177 (3) (2007) 906–929.
- [18] H. J. Trussell, E. Saber, M. Vrhel, *Color image processing: Basics and special issue overview*, *IEEE signal processing magazine* 22 (1) (2005).
- [19] T. Mélange, *Fuzzy techniques for noise removal in image sequences and interval-valued fuzzy mathematical morphology*, Ph.D. thesis, Ghent University (2010).
- [20] G. Sharma, H. J. Trussell, *Digital color imaging*, *IEEE transactions on image processing* 6 (7) (1997) 901–932.
- [21] G. Wyszecki, W. S. Stiles, *Color science: concepts and methods, quantitative data and formulas* (1982).
- [22] J. Cohen, *Visual color and color mixture: The fundamental color space*, University of Illinois Press, 2001.
- [23] P. Arbelaez, M. Maire, C. Fowlkes, J. Malik, Contour detection and hierarchical image segmentation, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 33 (2011) 898–916.