

upna

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS, SOCIALES Y DE LA
EDUCACIÓN
GIZA, GIZARTE ET HEZKUNTZA ZIENTZIEN FAKULTATEA

Graduado o Graduada en Maestro en Educación Primaria
Lehen Hezkuntzako Irakaslean Graduatua

Trabajo Fin de Grado
Gradu Bukaerako Lana

Análisis y propuesta de ejercicios de isometrías

Estudiante: Javier Alfaro Garnica

Tutor: Miguel Rodríguez Wilhelmi

Departamento: Estadística, informática y matemáticas

Campo: Didáctica de la Matemática

Mayo, 2023

RESUMEN

Se ha llevado a cabo un tratamiento de diferentes documentos relacionados con la geometría y el desarrollo del conocimiento en el alumnado, basándose en la concepción constructivista del aprendizaje. Se ha obtenido previamente esta base de conocimiento para poder llevar a cabo un análisis de ejercicios de isometrías en los libros de texto de Educación Primaria y ver las necesidades que exigen y las faltas que se cometen por parte de las editoriales. Una vez realizado el estudio de las actividades se ha propuesto un libro GeoGebra, en el que se incluye un capítulo, con diferentes actividades, por cada isometría, con la finalidad de promover el aprendizaje y compensar mediante las TIC las faltas de los libros de texto.

Palabras clave: Isometría; Piaget, Visión Geométrica; GeoGebra; Construcción

ABSTRACT

A treatment of different documents related to geometry and the development of knowledge in children has been carried out, based on the constructivist conception of learning. This knowledge base was previously obtained in order to carry out an analysis of isometry exercises in primary school textbooks and to see the needs they require, and the mistakes made by the publishers. Once the study of the activities has been carried out, a GeoGebra book has been proposed, in which a chapter is included, with different activities, for each isometry, with the aim of promoting learning and compensating the shortcomings of the textbooks by means of ICT.

Keywords: Isometry; Piaget, Geometrical Vision; GeoGebra; Construction

ÍNDICE

1. GEOMETRÍA Y LAS ISOMETRÍAS	4
2. PIAGET Y LA VISIÓN GEOMÉTRICA	11
2.1 Desarrollo cognitivo propuesto por Piaget	11
2.1.1. Estadio sensorio-motor	13
2.1.2 Estadio preoperacional	16
2.1.3 Estadio de las operaciones concretas	17
2.1.4. Estadio de las operaciones formales.....	19
2.2. Visión geométrica.....	22
2.2.1. Dificultades.....	25
2.2.2. Necesidades	26
3. CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.....	27
4. GEOGEBRA.....	29
5. ANÁLISIS DE EJERCICIOS DE ISOMETRÍAS EN LIBRO DE TEXTO	31
6. RESULTADOS	33
7. NECESIDADES	34
8. PROPUESTA LIBRO GEOGEBRA.....	35
9. SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS.....	38

1. GEOMETRÍA Y LAS ISOMETRÍAS

La matemática es una ciencia destinada al estudio de los números y de las relaciones que se establecen entre ellos. Dentro de la misma se pueden encontrar diferentes ramas de estudio, entre ellas se encuentra la geometría, la cual se preocupa del análisis de las formas, las medidas y las relaciones espaciales que se establecen entre los objetos. El comienzo de la geometría se remonta a la antigua Grecia, siendo objeto de estudio muy importante hasta el día de hoy en todo el mundo (Stillwell, 2010). Las personas destinadas a la indagación en dicha rama hacen uso de principios y postulados, axiomas, para realizar una construcción de teoremas y demostración de resultados sobre formas y las relaciones espaciales. La geometría está dividida en diferentes áreas de estudio, entre las que se encuentran la geometría analítica (la cual hace uso de herramientas de álgebra y cálculo para el estudio de formas y relaciones) y la geometría diferencial (centrada en las propiedades de las curvas y las superficies en espacios más complejos) y la geometría euclidiana (geometría plana y tridimensional, enseñada en los centros educativos) (Camargo y Acosta, 2012).

En primer lugar, la rama de la matemática que combina la geometría con el álgebra es conocida como geometría analítica. Esta se centra en la indagación y estudio de las formas y objetos geométricos haciendo uso de útiles matemáticos, como los sistemas de coordenadas y las ecuaciones (Ayerbe, 2017)

En esta rama los objetos geométricos se representan mediante puntos, rectas, curvas y figuras, las cuales previamente son descritas por medio de ecuaciones algebraicas. Tras la definición de la figura se realiza una representación en el plano de coordenadas para ubicar los puntos en el plano o espacio, y así poder describir sus propiedades y relaciones (Ayerbe, 2017).

La geometría analítica no solo se usa en el campo de las ciencias puras, sino que también en el ámbito económico. Esta geometría se encuentra muy presente para el estudio de los mercados, las inflaciones, las relaciones entre precios y más aspectos inherentes en este campo económico. Algunas de las utilidades de la geometría analítica son las siguientes: la solución mediante el uso de sistemas de coordenadas y fórmulas matemáticas de problemas de la geometría tridimensional y bidimensional. También hay un uso de esta rama en la representación gráfica de los objetos y de las figuras geométricas en dos y tres dimensiones, lo cual permite el estudio y la manipulación de las propiedades y las características. Una de las utilidades de la geometría analítica es el cálculo de las distancias, los ángulos, áreas y volúmenes de las figuras mediante una serie de fórmulas

matemáticas que son estudiadas desde los primeros cursos educativos, además de problemáticas reales en los que están presentes la geometría, como la orientación en el espacio de los objetos o la determinación de la ubicación de los mimos (González Urbaneja, 2003)

Por otro lado, geometría euclidiana es la rama de la geometría que se centra en el estudio de la geometría plana y tridimensional tal como fue descrita por el matemático griego Euclides en su obra "Los Elementos". Este libro consta de 13 volúmenes que contienen definiciones, axiomas y teoremas sobre geometría, y sigue siendo una de las obras más destacadas de la historia de las matemáticas (Hartshorne, 2018). Otros matemáticos notables de la antigua Grecia que hicieron contribuciones importantes a la geometría incluyen a Tales de Mileto, fue el primero en demostrar que un triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo, Pitágoras, cuyo teorema sobre la longitud de los lados de un triángulo rectángulo es famoso hasta hoy; y Apolonio de Perga, que trabajó en el estudio de las curvas cónicas como elipses, parábolas e hipérbolas (Zúñiga, 2003).

En la Grecia antigua, la geometría se practicaba como una forma de arte y ciencia. Los griegos creían que las proporciones y las formas eran la clave para entender el mundo físico y las relaciones entre los objetos. Por lo tanto, la geometría se convirtió en una herramienta fundamental para la construcción de edificios y monumentos, así como para la navegación y la medición de la tierra (Zúñiga, 2003)

La geometría euclidiana está basada en un conjunto de principios o axiomas básicos, que son aceptados sin una demostración real, mediante los cuales se pueden deducir algunos de los teoremas y proposiciones que se estudian en el área de geometría (Hartshorne, 2018).

Algunos de los postulados más conocidos de dicha geometría se encuentran el axioma de las rectas paralelas, el axioma de las tres perpendiculares y el axioma de las congruencias. Además, la geometría euclidiana se centra también en el estudio de la medida de los ángulos y de las propiedades de las figuras geométricas básicas, como triángulos, cuadriláteros y círculos (Helmholtz, 1956).

Esta rama de la geometría ha tenido un continuo estudio desde su nacimiento y desarrollo en la Grecia antigua, pasando por la Edad Media y sigue en estudio en el día de hoy, siendo una de las ramas más importantes de la matemática, ya que se puede considerar la base de otros estudios científicos (Zúñiga, 2003).

La geometría euclidiana sigue siendo un tema importante en la educación matemática y es la base para muchos de los conceptos y principios geométricos que se utilizan en la vida cotidiana y en otros campos de la matemática y la ciencia (Roa et al, 2006). Hermann Von Helmholtz, físico y médico alemán, hablando de Geometría dice lo siguiente (p.243):

El hecho de que pueda existir una ciencia y pueda ser desarrollada como lo ha sido la geometría, ha atraído siempre la máxima atención de todos aquellos que están interesados en cuestiones relacionadas con las bases de la teoría del conocimiento. De todas las ramas del conocimiento humano no hay ninguna que haya surgido, como ella, igual que una Minerva armada de la cabeza de Júpiter; ninguna ante cuyo escudo de Medusa la duda y la inconsciencia se haya atrevido a levantar la vista. Se libra de la aburrida y pesada tarea de recoger datos experimentales, que se da en el campo de las ciencias naturales en el sentido estricto de la palabra: su único método científico es la deducción. De una conclusión se deduce otra conclusión, y sin embargo, nadie con sentido común duda que todos estos principios geométricos deban encontrar una aplicación práctica en el mundo que nos rodea.

Esto define muy bien la visión contemplativa que tenían en la Antigua Grecia, para ellos el objeto su todo, la Matemática ya estaba asociada a la realidad que se ve, sin ser ellos mismos creadores de la ciencia que estudia las propiedades de los números y las relaciones que se establecen entre ellos, tan solo eran observadores del todo, sin embargo, no eran conscientes de que mediante su intelecto, obteniendo deducciones, para comprar y finalmente crear conclusiones, estaban creando un objeto de estudio matemático (Roa et al, 2006)

Tal estudio matemático formuló una serie de movimientos geométricos llamados isometrías. Este fenómeno, de los cuerpos geométricos, está dentro de la rama de la geometría euclidiana y consiste en transformaciones de los objetos en el plano manteniendo las propiedades características de los polígonos, permaneciendo así los ángulos y las distancias. En definitiva, son transformaciones geométricas que mantienen inalterada la forma y tamaño de un objeto, generando así una imagen original, siendo una réplica de la imagen primitiva. Técnicamente se puede afirmar que una isometría es una función que lleva consigo una distancia de medida entre dos puntos y permanece siempre inamovible en dicha función. En otras palabras, las isometrías son cambios que permiten que la geometría en el espacio sea inamovible, conservando las propiedades de la figura como la longitud de los segmentos, los ángulos, la forma y la orientación en el espacio.

Las isometrías conocidas son la traslación la simetría y la rotación. A continuación, se detalla un poco más acerca de ellas.

La traslación es una transformación de la ubicación de la figura en un espacio euclidiano. Esta figura primitiva es movida en función de un vector que determina la distancia y la dirección del deslizamiento de la figura sobre el plano, formando de nuevo la figura haciendo que se mantengan todas las propiedades de la misma, sin embargo, se encontrará ubicada en otros puntos del plano, así pues, se mantiene la forma y el tamaño del objeto. Para la traslación de un elemento con coordenadas (x, y) se hace uso del vector (a, b) , entonces la posición del mismo en el plano variará quedando la nueva posición en $(x + a, y + b)$ (figura 1).

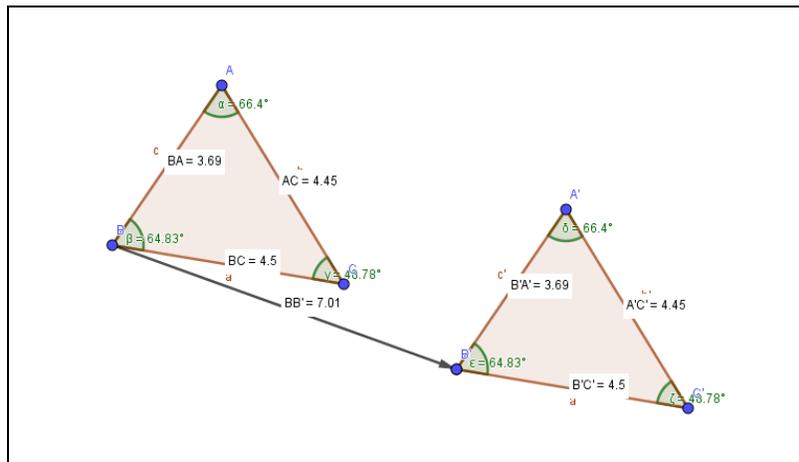


Figura 1. *Traslación oblicua.*

El movimiento de la figura se hace mediante vectores, los cuales son objetos geométricos que tienen una distancia, una dirección y un sentido. Estos se representan mediante una línea, magnitud del mismo, una dirección, que indica sobre qué línea se tiene que mover la figura, una flecha, la cual indica la sentido u orientación del vector, es decir, hacia donde se tiene que mover la figura a trasladar. Además, estos objetos pueden ser sumados, restados, multiplicados por un escalar. Estos no son solo utilizados en las traslaciones, sino que también pueden ser usados en la física, la mecánica y otros ámbitos científicos (Pari Huayllani, 2019)

Dentro de este tipo de isometría se pueden encontrar diferentes tipos de traslaciones. La primera de ellas es la traslación rectilínea, en la cual los puntos del objeto a trasladar son movidos en un único eje del plano. Se pueden diferenciar dos tipos de traslaciones rectilíneas, una de ellas es la

traslación vertical (Figura 2.a), en la cual el objeto referencia es movido tan solo en el eje Y , siendo entonces el vector de movimiento así $(0, a)$. Se le asigna un valor 0 al vector en el eje X y se aporta un valor, ya sea positivo o negativo en el eje Y o eje vertical. Por otro lado, existe la traslación horizontal (Figura 2.b), mediante la cual la figura es deslizada en el eje X . Para ello el valor del vector siempre ha de ser $(a, 0)$, para que el vector tan solo sea paralelo al eje horizontal.

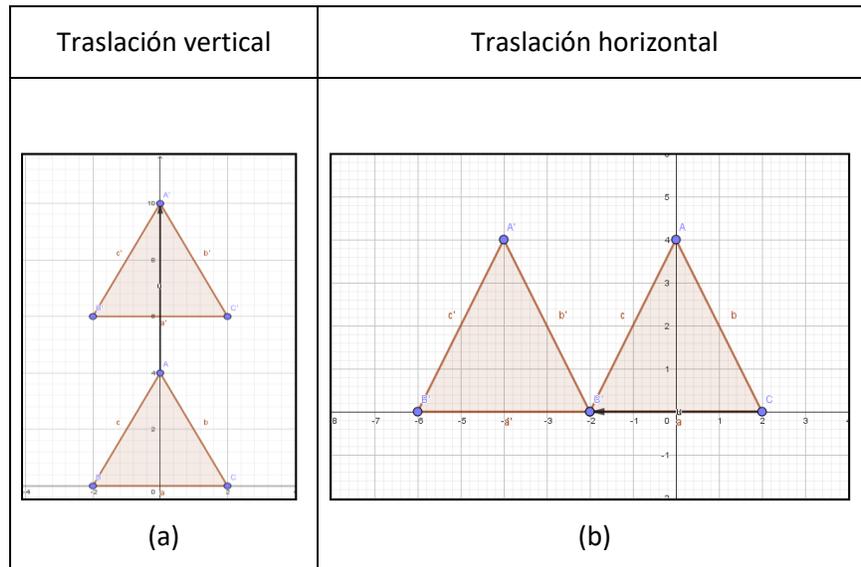


Figura 2. *Traslación vertical (a) y horizontal (b).*

Este tipo de traslaciones difieren de la traslación oblicua ya que los puntos son solamente movidos en un eje del plano, mientras que el mencionado anteriormente tiene un movimiento oblicuo, es decir, tiene capacidad de movimiento tanto en el eje vertical como en el horizontal. Por ello, a la hora de hacer una traslación de manera oblicua los valores que se le dan al vector de traslación son dos números distintos de 0 tanto en el eje X , como en el eje Y , por ejemplo (a, b) siendo $a, b \neq 0$. Un ejemplo de traslación oblicua puede ser encontrado en la Figura 1.

Dentro del campo de las isometrías se puede abrir otro camino de estudio, el de la simetría, término que ha gozado de un encanto natural en diferentes culturas vinculado estrechamente con el orden, la perfección y la belleza. Sin embargo, la simetría no es solo algo estético, sino que está asociada a otros órdenes, siendo innumerables las dimensiones en las que este concepto está presente. Quizás el terreno que más requiere de este concepto no es en el mundo del esplendor, sino que de forma natural está vinculado a la geometría. Normalmente se han considerado elementos geométricos a

aquellos que tienen un orden o regularidad, siendo imágenes idénticas en función a un eje o punto de simetría (Bohorquez, et al, 2009.)

Se define simetría como propiedad de un objeto que se mantiene inalterable a cierto tipo de transformación, presentada como una noción estática, teniendo una correspondencia de posición, tamaño y forma, con respecto a un punto, línea o un plano. Dentro de las simetrías se diferencian dos; la simetría axial (simetría respecto a un eje) y la simetría central (simetría respecto a un punto).

Es necesario conocer que la simetría axial (Figura 3) , es la simetría que se genera respecto a un eje. Además, tiene una serie de fenómenos tales como la dependencia; una figura no puede ser simétrica a otra sino depende de esa imagen, es decir, las imágenes dependen la una de la otra. Otra de las características de dicha simetría es el movimiento de las figuras con respecto al eje de simetría. Los movimientos que se realizan son contrarios, es decir, si arrastramos una figura hacia su derecha, acercándola al eje de simetría, la imagen refleja se acercará a su vez al eje de simetría, pero en el sentido contrario, es decir, hacia su izquierda. Esto ocurrirá también cuando las figuras se alejen del eje de simetría, alejándose cada en sentido contrario, estableciendo en todo momento la misma distancia con respecto al eje de simetría de todos los puntos de la figura. Además, otra de las propiedades de la simetría es que dos figuras simétricas coinciden a lo largo de una recta llamada eje de simetría (Acosta et al, 2010)

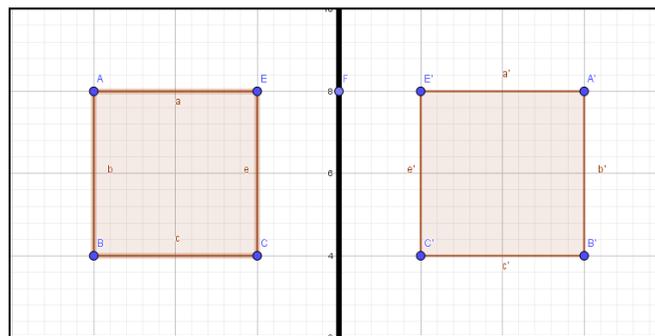


Figura 3. Simetría axial.

Por otro lado, hay otra conocida simetría conocida como central (Figura 4), la cual mantiene sin ningún tipo de alteración al objeto tras haber sido rotado 180 grados alrededor de un punto, denominado centro de simetría. Mediante esta simetría todos los puntos del objeto se encontrarán de nuevo, tras el giro, a la misma distancia del centro de simetría, propiedad conocida como

isotropía. La simetría central se puede encontrar en distintas figuras geométricas como el círculo o polígonos regulares.

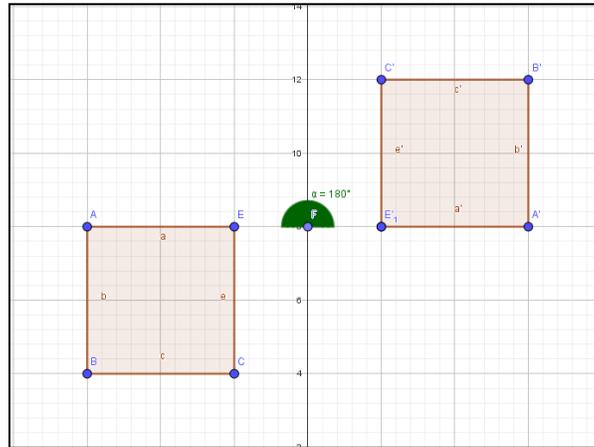


Figura 4. Simetría central.

La rotación es un giro de la figura alrededor de un punto fijo llamado centro de rotación, pudiendo girar todos los puntos del plano (Figura 5). Cada punto realiza un giro siguiendo un arco que tiene un centro y un ángulo concreto, por lo que toda rotación queda establecida por su centro de rotación y su ángulo de giro. Cabe destacar que el giro puede ser en sentido horario, siendo un giro negativo y antihorario siendo un giro positivo.

Los giros más comunes son de tres tipos. El primero de ellos consta de una rotación de 90° , la cual realiza un giro de esta magnitud alrededor de un punto. Dicha rotación es también conocida como perpendicular debido a que los lados del objeto rotado quedan en perpendicular a los lados del objeto original. En segundo lugar, se pueden encontrar los giros de 180° , esto también es conocido como simetría central, ya que el objeto ha girado de manera simétrica al punto de giro. Por último, existen las rotaciones de 270° dentro de las más comunes, lo que es igual a $3/4$ de vuelta.

Luego existen otros tipos de giros que son más particulares como son 60 , 120 u otros tipos, sin embargo, se puede destacar el giro de 360° lo que es lo mismo que una vuelta completa, quedando el objeto girado en su posición original. Los grados comparten con los radianes la misma función, la

cual es la medida de ángulos. Para conocer más sobre ello las proporciones son las siguientes: 360 grados son lo mismo que 2π radianes, por lo tanto 180° equivale a π .

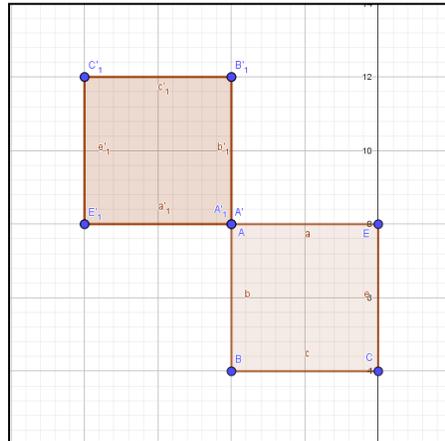


Figura 5. Giro sobre centro de rotación.

2. PIAGET Y LA VISIÓN GEOMÉTRICA

2.1 Desarrollo cognitivo propuesto por Piaget

Sabiendo ya qué es la geometría, de dónde parte y algunas de sus ramas, se debe empezar a conocer hacia dónde va el ser humano dentro de este amplio campo matemático. La geometría ha sido objeto de estudio desde la antigüedad hasta la actualidad, pasando por muchas etapas de la historia de la humanidad, estando continuamente el ser humano expuesto a ella, pero sin darse cuenta si no había una reflexión previa. Todo ser humano está expuesto a la geometría en su día a día, en edificios, en señales de tráfico, en las tarjetas que uno lleva consigo mismo, por lo que desde que uno nace se ve marcada, condicionado por los fenómenos de la geometría. Sin embargo, en el nacimiento el menor se puede ver más condicionado todavía sobre aquello que vea a su alrededor, ya que según el filósofo John Locke en su obra “Ensayo sobre el entendimiento humano” publicada en el siglo XVII, argumenta que el infante nace siendo una tabula rasa, es decir una página en blanco, siendo el conocimiento humano adquirido a través de la experiencia sensorial y no del razonamiento. Según este filósofo el ser humano nace con una mente sin ningún tipo de capacidad cognitiva y se va desarrollando mediante la exposición de lo que le rodea. Por el contrario, Jean Piaget, desarrolló y defendió a lo largo de sus obras el desarrollo cognitivo, viendo al menor recién nacido con una serie de estructuras cognitivas que les permiten interactuar con el mundo y aprender

de él. Esto lo defiende a lo largo de sus obras como en “El nacimiento de la inteligencia en el niño” (1936).

El autor suizo defiende la teoría del desarrollo cognitivo como un conjunto de transformaciones que se producen en el transcurso de la vida respecto a las características y capacidades del pensamiento, centrándose en el periodo de desarrollo, en el cual el infante adquiere la base de conocimiento y habilidad para desarrollar la capacidad de percibir, pensar y comprender en las diferentes realidades de su vida diaria. La adquisición del conocimiento se va desarrollando en función de los llamados esquemas, mediante los cuales el menor comienza a organizar el mismo. Estos son un conjunto de acciones físicas, relaciones que se establecen, es decir, operaciones mentales mediante las cuales el niño/a percibe el mundo. Además, estos esquemas no se mantienen fijos, sino que el niño mediante la exploración, como si de un científico se tratase, mediante ensayos y errores, va generando nuevos esquemas y modificando aquellos que tenían desaciertos. Para exponer su teoría Piaget divide el desarrollo cognitivo en diferentes fases o etapas: Etapa sensoriomotora, etapa preoperacional, etapa de operaciones concretas y etapa de operaciones formales (Piaget, 2007)

Para entender bien las fases y los estadios que propone Piaget, primero se deben conocer algunos de los principios propuestos por él. El primero de ellos es la organización, una tendencia innata en todos los humanos gracias a la cual el ser humano formaliza una serie de estrategias cognitivas simples a otras que supongan más complejidad. En segundo lugar, propone la adaptación, capacidad que tienen los seres humanos para adecuar sus estructuras mentales a los efectos cambiantes del mundo. En tercer lugar, propone la asimilación como molde para que los nuevos estímulos de los cuales se adquiere un aprendizaje se adecuen a sus estructuras cognitivas, siendo más concretamente la interiorización de un objeto, hecho o conducta. Es un proceso activo ya que muchas veces es necesario modificar la información que anteriormente se había integrado debido a una nueva información y haciendo que sean compatibles, alcanzando un estado de equilibrio. En cuarto lugar, propone el principio de acomodación, el cual consiste en una modificación de esos esquemas previos gracias al conocimiento de experiencias que hacen cambiar las bases de los mismos, adecuándolas al nuevo conocimiento generado. Estos dos últimos principios son muy cercanos el uno del otro, siendo similares, explicando muy bien cómo se va desarrollando el conocimiento en el ser humano. Finalmente se propone el principio de equilibrio, el cual se ve intrínseco en el desarrollo cognitivo, mediante el cual alcanzamos un nivel superior de las ejecuciones mentales (Mounoud & Sastre, 2013).

Una vez conocidos ya los principios propuestos por Jean Piaget, este en su obra se caracteriza por desarrollar las etapas del desarrollo cognitivo, mediante las cuales explica como el infante va generando su aprendizaje progresando a lo largo de estos estadios. Estos estadios muestran cuatro características.

En primer lugar, las etapas propuestas por Piaget siguen un orden fijo, es decir, no hay un salto de una etapa, sino que el menor va pasando secuencialmente por todas ellas, alcanzando los niveles de la misma y adquiriendo mayor capacidad cognitiva para así dar el salto a la siguiente etapa. Los ritmos de adquisición son variados, ya que hay personas que tienen redes neuronales más complejas, las cuales le permiten a la persona tener un mejor proceso de asimilación y acomodación de los conocimientos, haciendo que el progreso sea más veloz.

En segundo lugar, hay una existencia de estructura de conjunto significativa de cada etapa. Piaget proponía que el pensamiento del infante cambia de manera abrupta en periodos breves, apareciendo nuevas estructuras cognitivas.

En tercer lugar, los estadios son completamente inclusivos, es decir, los estadios de orden superior contienen a los de orden inferior. Por ejemplo, no se puede entender el estadio de las operaciones concretas sin el progreso adquirido por el menor en la etapa inferior. Así a su vez no se entiende la etapa del periodo preoperacional sin el paso por el periodo sensoriomotor.

Por último, la transición de un estadio a otro se hace de manera gradual, no se consigue un salto inmediato entre ambos estadios, sino que hay proceso de promoción en el que el menor se va preparando para ir adquiriendo la capacidad para dar el paso al siguiente estadio, así como también una vez en el estadio hay una fase de adaptación para completar los logros de la etapa (Valdes, 2014)

2.1.1. Estadio sensorio-motor

El estadio sensorio-motor va desde el nacimiento hasta los dos años. Durante esta etapa el infante se relaciona con la realidad que le rodea mediante los sentidos y la acción. Este periodo da lugar al primer desarrollo intelectual. El infante comienza a desarrollar una conducta intencionada, es decir buscan realizar algunas acciones para que se lleven a cabo lo que el menor buscaba, por ejemplo, se golpea un sonajero para que éste emita sonido. Durante este periodo el infante entiende que el objeto tiene una permanencia en el espacio, independientemente de su percepción. Además, se realizan juegos como el de la imitación (Piaget, 2007)

El mecanismo de aprendizaje más temprano fue denominado reacción circular, según Piaget. Esto consiste en integrar nuevas experiencias después de haber realizado determinadas acciones. Este mecanismo de aprendizaje recibe dicho nombre debido a que las acciones tienen una repetición constante, se realiza el acto repetidamente. Existen tres tipos de reacciones circulares: primarias, relacionadas con el cuerpo del menor, sacar la lengua, secundarias, centradas en la manipulación de objetos, golpear algo, y la tercera la exploración de la realidad cercana a ellos, viendo situaciones como novedosas, como golpear algo repetidamente de distintas formas.

Dentro de este estadio se pueden apreciar diferentes sub-estadios, es decir, se pueden diferenciar etapas dentro del mismo, en función de los esquemas y las acciones del niño/a, como bien explica Piaget.

El primero de ellos va desde el nacimiento hasta el primer mes de vida. Durante esta etapa el menor tan solo posee reflejos innatos, es decir, estos no son aprendidos, sino que vienen integrados en las habilidades del ser humano desde el nacimiento. Los reflejos son pasivos, no son acciones realizadas con un fin, sino que se realizan de manera inconsciente hasta que algo estimula y empieza a formarse un esquema, es decir se empieza a formar una acción habitual controlada. Por ejemplo, se puede observar que en los lactantes que a los pocos días aparecen los movimientos reflejos de la boca relacionados con la succión aun sin tener nada en la boca. En esta etapa la asimilación es el principio que más se puede apreciar, así como la acomodación, en la que el menor comienza a realizar ajustes de la posición de los labios y de la cabeza para que la acción de succionar sea realizada correctamente.

En segundo lugar, se encuentra el sub-estadio que va desde el primer mes de vida hasta el cuarto, el denominado reacciones circulares primarias. Una reacción circular se produce cuando un lactante realiza una acción de manera repetida que se había realizado por casualidad. Un ejemplo de esto es la acción de chuparse el dedo. Durante un momento espontáneo el menor acerca el dedo hacia su boca y por medio del reflejo de succión introduce su dedo en la boca y se realiza una succión de su propio dedo, hasta que en otro momento la mano inconscientemente es retirada de la boca. En este caso no ha habido ningún tipo de aprendizaje hasta que se vuelve a dar el caso en el que el infante vuelve a acercar el dedo a su boca y se realiza la misma acción de manera inconsciente. Hay una repetición de la acción, es decir, existe una reacción circular que hará que se forme un esquema de

acción. De esta manera ha ido juntando esquemas sencillos, como la succión y el movimiento de la mano, para realizar un esquema más complejo, como es el de chuparse el dedo.

En tercer lugar, se encuentra el subestadio que va desde los cuatro a los diez meses. El anterior estadio se denomina primario debido a que las acciones se realizan en función de su cuerpo. En cambio, este estadio se denomina secundario debido a que los actos se realizan con la realidad que rodea al menor. Por ejemplo, el infante al realizar algún movimiento más brusco integra que los juguetes que tiene cerca realizan algún sonido o ruido, por lo que integra este esquema de acción, sabiendo que al moverse de manera agitada se va a producir un sonido afectivo para el niño/a realizando repeticiones y formando así una reacción circular.

En cuarto lugar, hay una coordinación de los esquemas secundarios, dicho subestadio va de los diez a los 12 meses. En esta etapa el menor relaciona dos acciones secundarias y las combina para alcanzar un objetivo. Por ejemplo, se esconde un sonajero detrás de una caja, de manera que el niño/a no puede acceder de manera directa a la manipulación del sonajero, por lo que tiene que combinar esquemas de acción para alcanzar el sonajero, es decir, se realiza una combinación de un primer esquema que es retirar la caja, para después realizar la acción de coger el sonajero por el que había un interés. Este subestadio contiene implicaciones muy importantes para el desarrollo del menor. Lo primero la intención que tiene el menor hacia un objeto, esa búsqueda de experimentar más allá de su cuerpo y, en segundo lugar, hay una implicación de temporalidad y espacio, sabiendo que antes tiene que retirar la caja para después coger el sonajero, así como también qué está delante y qué está detrás.

En quinto lugar, existe la fase de reacciones circulares terciarias, la cual va desde los 12 a los 18 meses. En este caso se podría decir que hay una investigación de diferentes acciones para observar qué ocurre en función de la acción ejecutada por el menor. Por ejemplo, si el menor coloca una serie de piezas en una mesa que se mantengan en equilibrio y después golpea el soporte sobre las que se encuentran viendo que estas caen. Después las vuelve a colocar, realizando de nuevo un golpe de menor intensidad, jugando el menor con la fuerza con la que ejerce el golpeo a la mesa y analizando que en función de la potencia que ejerce las piezas caen o no. Se puede conocer también esto con otro ejemplo, el niño/a abre el grifo cayendo un flujo de agua continuo, el menor pone la mano en el chorro de agua subiendo y bajando la mano para conocer en qué posición salpica más o menos.

Como se puede ver hay una experimentación autónoma formando esquemas que son interiorizados y así adquiriendo más conocimientos a partir de esa indagación en la realidad.

Por último, a partir de los dieciocho hasta los veinticuatro meses se encuentra el subestadio de comienzo de pensamiento. Ante algunas situaciones el menor busca varias vías para conseguir su objetivo, por ejemplo, se mete en una bola en una caja con un agujero en uno de sus lados. El menor intenta meter la mano por el agujero para conseguir coger la pelota, sin embargo, la mano no le entra, por lo que se detiene y piensa otra manera de alcanzar el objetivo. En una segunda acción agita la caja para ver si la pelota sale por sí sola de la caja por el agujero. El que el menor haya realizado dos acciones completamente diferentes supone que haya habido una reflexión y por tanto un pensamiento.

2.1.2 Estadio preoperacional

La etapa preoperacional es la segunda etapa del desarrollo cognitivo según Jean Piaget y se extiende aproximadamente desde los dos hasta los siete años de edad. Durante esta etapa, los niños comienzan a desarrollar la capacidad de representar objetos y eventos en su mente, lo que les permite pensar simbólicamente y usar el lenguaje para comunicarse.

Sin embargo, según Piaget, los niños en la etapa preoperacional todavía tienen algunas limitaciones cognitivas importantes. Por ejemplo, tienden a ser egocéntricos, lo que significa que tienen dificultades para comprender el punto de vista de los demás. También tienen dificultades para entender las relaciones causales y tienden a razonar de manera intuitiva más que lógica.

Además, los niños en la etapa preoperacional tienen dificultades para comprender la conservación, lo que significa que no comprenden que los objetos pueden cambiar de apariencia sin cambiar su cantidad o esencia. Por ejemplo, un niño en esta etapa puede creer que un vaso lleno de agua tiene más agua que el mismo vaso con la misma cantidad de agua, pero vertido en un vaso más ancho (Valdes, 2014)

Antes de conocer las limitaciones se va a mostrar los progresos cognoscitivos más significativos de esta etapa.

El primero de ellos es el pensamiento representacional. Durante esta fase el menor puede hacer uso de símbolos para reflexionar sobre el ambiente. Además, es capaz de usar palabras para referirse a algo que no está presente, lo que se llama funcionamiento semiótico. También en esta

etapa aparece el juego simbólico (Singer y Singer, sacado de Piaget, 2007), siendo juegos simples utilizando objetos reales como puede ser atribuir a un plátano ser una pistola o un teléfono. Este juego favorece a la creatividad y a la imaginación. Durante esta etapa comienza una adquisición del lenguaje y así como también el lenguaje silencioso, el cual es una representación pictórica, es decir, dibujos e imágenes mentales que tiene el menor, los cuales van variando conforme pasan los años, comenzando con trazos hasta llegar a una representación de figuras con detalles.

En segundo lugar se encuentra el concepto numérico, que mediante los trabajos de Rochel Gelman y algunos compañeros proponen que los niños/as de 4 años consiguen entender los siguientes principios básicos de conteo: a) puede contarse cualquier arreglo de elementos b) cada elemento deberá contarse una vez c) los números se asignan en el mismo orden d) es irrelevante el orden en que se cuenten los objetos e) el último número pronunciado es el de los elementos que contiene el conjunto. Comienzan a entender ciertos contenidos básicos del conteo, sin embargo, los errores también están presentes muchas veces omitiendo números o teniendo dificultad en contar extensos grupos de elementos (Baroody, 1987 sacado de Piaget, 2007).

En tercer lugar, el niño realiza teorías intuitivas. En un estudio realizado por Piaget descubrió que para ellos el mundo se rige por el animismo, no hay una distinción entre los objetos inanimados y los seres animados. Por ejemplo, un niño de tres años dice que los ríos llevan agua porque no quieren que pasemos sed y que tienen vida porque se mueven muy rápido. De esta manera se puede denominar intuitivo debido a que se basa en experiencias momentáneas.

2.1.3 Estadio de las operaciones concretas

La etapa de operaciones concretas es la tercera etapa del desarrollo cognitivo según Jean Piaget y se extiende aproximadamente desde los 7 hasta los 12 años de edad. Durante esta etapa, los niños comienzan a desarrollar habilidades de pensamiento más sofisticadas y pueden pensar de manera más lógica y sistemática que en la etapa preoperacional. En particular, los niños en la etapa de operaciones concretas pueden comprender la conservación de la cantidad, es decir, que una cantidad de líquido o de masa sigue siendo la misma a pesar de que se cambie su forma o su apariencia. También pueden comprender mejor las relaciones causales y las reglas matemáticas básicas, como la suma y la resta (Valdes, 2014)

Además, los niños en esta etapa comienzan a comprender que las perspectivas de los demás pueden ser diferentes a las suyas y a desarrollar una comprensión más avanzada de las emociones y los

sentimientos de los demás. También pueden razonar sobre eventos hipotéticos y abstractos y comenzar a comprender los conceptos de tiempo y espacio de manera más precisa.

Los tres tipos de esquemas con las que el niño organiza su mundo son: seriación, clasificación y conservación.

En primer lugar, La seriación es una habilidad cognitiva que se desarrolla durante la etapa de operaciones concretas según la teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget. La seriación se refiere a la capacidad de ordenar objetos o elementos en una serie lógica basada en una dimensión específica, como el tamaño, la longitud o el peso.

Por ejemplo, un niño en la etapa de operaciones concretas que ha desarrollado la habilidad de la seriación puede ordenar una serie de objetos (como varillas o bloques) desde el más corto hasta el más largo, o desde el más liviano hasta el más pesado. Esta habilidad requiere la comprensión de que los objetos pueden compararse y ordenarse en una dimensión específica, y que los elementos intermedios se pueden ubicar en relación con los extremos.

Según Piaget, la habilidad de la seriación es un hito importante en el desarrollo cognitivo de los niños porque demuestra que pueden comprender y utilizar conceptos abstractos y relaciones matemáticas. Además, la habilidad de la seriación es fundamental para el aprendizaje de habilidades más complejas, como la comprensión de las fracciones, la geometría y la clasificación (Torres Barrios, 2012).

En segundo lugar, la clasificación se refiere a la capacidad de agrupar objetos o elementos en categorías basadas en características comunes, como la forma, el tamaño, el color o la función.

Por ejemplo, un niño en la etapa de operaciones concretas que ha desarrollado la habilidad de la clasificación puede agrupar una variedad de objetos (como juguetes o lápices de colores) en diferentes categorías según sus similitudes. Por ejemplo, puede agrupar todos los objetos rojos juntos o todos los objetos que tengan una forma similar.

Según Piaget, la habilidad de la clasificación es un hito importante en el desarrollo cognitivo de los niños porque demuestra que pueden comprender y utilizar conceptos abstractos y relaciones lógicas. La habilidad de la clasificación también es fundamental para el aprendizaje de habilidades más complejas, como la comprensión de las jerarquías de clasificación y la organización de la información en categorías (Torres Barrios, 2012).

La conservación se refiere a la comprensión de que una cantidad o propiedad de un objeto o sustancia no cambia a pesar de que su apariencia externa se modifique.

Por ejemplo, un niño en la etapa preoperacional (anterior a la etapa de operaciones concretas) puede pensar que un objeto que ha sido estirado o aplanado es ahora más grande o pequeño, respectivamente, a pesar de que la cantidad de material que compone el objeto sigue siendo la misma. Sin embargo, un niño en la etapa de operaciones concretas que ha desarrollado la habilidad de la conservación comprende que la cantidad o propiedad de un objeto o sustancia permanece igual, incluso si su forma o apariencia cambia.

Piaget utilizó varios experimentos para demostrar la habilidad de la conservación, como el experimento de la conservación de líquidos. En este experimento, se muestra a un niño dos vasos idénticos con la misma cantidad de líquido. Luego, se vierte uno de los vasos en un vaso más estrecho y alto. A pesar de que la cantidad de líquido es la misma, un niño en la etapa preoperacional puede pensar que hay más líquido en el vaso alto, mientras que un niño en la etapa de operaciones concretas entiende que la cantidad de líquido sigue siendo la misma.

Según Piaget, la habilidad de la conservación es un hito importante en el desarrollo cognitivo de los niños porque demuestra que pueden comprender y utilizar conceptos abstractos y relaciones lógicas. La habilidad de la conservación también es fundamental para el aprendizaje de habilidades más complejas, como la comprensión de las fracciones y la comprensión de la idea de que las cosas pueden ser diferentes en apariencia, pero iguales en cantidad o proporción (Piaget, 2007)

2.1.4. Estadio de las operaciones formales

El estadio de operaciones formales es la última etapa del desarrollo cognitivo según la teoría de Jean Piaget. Se desarrolla a partir de los 11 o 12 años de edad y continúa hasta la edad adulta.

En esta etapa, los individuos pueden pensar de manera abstracta y lógica, y son capaces de razonar sobre hipótesis, posibilidades y situaciones complejas. Además, pueden manejar conceptos abstractos y realizar operaciones mentales de manera sistemática y flexible.

Durante el estadio de operaciones formales, los individuos también pueden reflexionar sobre su propio pensamiento y razonamiento, lo que les permite analizar y evaluar sus propias ideas y argumentos. Además, pueden considerar múltiples perspectivas y evaluar diferentes soluciones a un problema antes de tomar una decisión.

En resumen, el estadio de operaciones formales se caracteriza por la capacidad de pensar de manera abstracta, lógica y sistemática, y la capacidad de razonar sobre situaciones complejas. Esta etapa es fundamental para el aprendizaje y la resolución de problemas complejos, y es un hito importante en el desarrollo cognitivo de los individuos.

Esta capacidad que tienen los seres humanos de pensar de manera abstracta y reflexiva se adquiere en esta etapa, la cual cuenta con cuatro particularidades significativas del pensamiento: la lógica proposicional, el razonamiento científico, el razonamiento combinatorio y el razonamiento sobre probabilidades y proporcionalidad (Piaget, 2007)

En cuanto a la primera característica, la lógica proposicional es un área de la lógica que se centra en las proposiciones y su relación lógica, es decir, cómo se combinan las proposiciones para formar argumentos válidos. Según la lógica proposicional, las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas, y se pueden combinar utilizando operadores lógicos como la negación, la conjunción, la disyunción, la implicación y la equivalencia.

En términos de la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, la lógica proposicional está relacionada con la etapa de operaciones formales, en la que los individuos pueden pensar de manera abstracta y lógica, y son capaces de razonar sobre hipótesis y situaciones complejas.

Durante esta etapa, los individuos pueden manejar conceptos abstractos y realizar operaciones mentales de manera sistemática y flexible, lo que les permite comprender y aplicar las reglas de la lógica proposicional. Sin embargo, cabe destacar que no todos los individuos que alcanzan la etapa de operaciones formales necesariamente dominan la lógica proposicional, ya que el desarrollo de habilidades específicas depende en gran medida del entorno cultural y educativo en el que se desarrollan.

En lo que respecta a la segunda característica Jean Piaget no abordó directamente el concepto de razonamiento científico en su teoría del desarrollo cognitivo. Sin embargo, sus teorías pueden tener implicaciones para la comprensión del razonamiento científico.

Piaget sostuvo que los niños construyen su conocimiento mediante la interacción activa con el mundo físico y social que los rodea. Según su teoría, los niños construyen sus propias teorías y conceptos sobre el mundo, que se basan en la exploración y la experimentación.

El proceso de construcción del conocimiento de Piaget se asemeja al razonamiento científico en el sentido de que tanto la construcción del conocimiento como el razonamiento científico implican la

observación cuidadosa de los hechos, la formulación de hipótesis y teorías, la realización de experimentos y la revisión de las teorías en función de la evidencia.

En este sentido, se podría decir que el razonamiento científico implica el uso de habilidades cognitivas que se desarrollan en la etapa de operaciones formales de Piaget, como la capacidad de pensar de manera abstracta y lógica, de formular hipótesis y de realizar operaciones mentales sistemáticas y flexibles.

Además, el razonamiento científico también implica habilidades metacognitivas, como la capacidad de reflexionar sobre el propio pensamiento y de evaluar la validez de las pruebas y los argumentos.

En cuanto a la tercera característica, el razonamiento combinatorio se refiere a la capacidad de combinar y manipular diferentes elementos para producir nuevas combinaciones o permutaciones. Esta habilidad está relacionada con la capacidad de pensar de manera abstracta y lógica. A medida que los niños desarrollan estas habilidades, también comienzan a desarrollar habilidades de razonamiento combinatorio, como la capacidad de contar, clasificar y agrupar objetos de diferentes maneras para crear nuevas combinaciones o permutaciones. Esta habilidad implica la capacidad de combinar y manipular diferentes elementos para producir nuevas combinaciones o permutaciones y es fundamental para el aprendizaje matemático y la resolución de problemas.

Por último, el razonamiento sobre probabilidades y proporciones es una habilidad cognitiva que permite a los niños y adolescentes pensar de manera abstracta y lógica, lo que les posibilita entender conceptos matemáticos más complejos, como las probabilidades y las proporciones. Los adolescentes en esta etapa pueden comprender conceptos abstractos, como la proporción y la probabilidad, y aplicarlos en situaciones de la vida real.

En términos de razonamiento sobre las probabilidades, los adolescentes en esta etapa pueden comprender la idea de que los eventos pueden ser probables o improbables, y pueden aplicar el concepto de probabilidad para hacer predicciones sobre eventos futuros. Además, pueden comprender las relaciones entre diferentes eventos y la probabilidad de que ocurran simultáneamente.

En cuanto al razonamiento sobre las proporciones, los adolescentes en esta etapa pueden entender la idea de que una proporción es una relación entre dos o más cantidades y pueden aplicar el concepto de proporción para resolver problemas matemáticos y aplicarlos a situaciones de la vida real.

Los adolescentes en esta etapa pueden comprender conceptos abstractos y aplicarlos en situaciones de la vida real, lo que les permite resolver problemas matemáticos más complejos y tomar decisiones informadas basadas en probabilidades y proporciones.

2.2. Visión geométrica

Los estudios y propuestas de Jean Piaget han sido un impulso para la educación. En la actualidad muchas corrientes didácticas se rigen por los estudios realizados por el suizo, siendo la base de muchas metodologías activas que se están llevando en la actualidad. Su estudio es válido para todas las áreas de educación, sin embargo, se puede apreciar que su estudio índice más o tiene una mayor relación con el área matemática, ya que muchas de sus propuestas son demostradas con teorías matemáticas o hechos que tienen cierta relación con la misma. Por ello también hizo un gran aporte en la rama de la geometría dentro de la matemática, lo que permitirá al docente conocer los tiempos y momentos para realizar determinadas tareas, aplicando los postulados publicados por Jean Piaget.

Una de las obras que recoge todo lo propuso Piaget es la Concepción de la geometría en el niño según Piaget de G.E.T Holloway. El libro mencionado recoge cómo el menor entiende y visualiza la geometría en función de los estadios según el autor suizo. La obra aporta grandes conocimientos al personal docente, debido a que es necesario entender los tiempos madurativos del menor para saber cuándo se puede introducir temas como las isometrías.

Se puede comenzar hablando de la isometría de simetría, la cual ha sido desarrollada anteriormente. La simetría está muy relacionada, según el libro, con la conservación y medición de la longitud. Para ello se ha de entender previamente que es longitud y que es distancia, el primero de ellos denota todo el espacio sobre el que se está trabajando, mientras que la distancia es la medida que existe entre los objetos dispuestos en ese espacio de trabajo. Esto tiene una ligera relación con la simetría debido a ciertos estudios propuestos por Piaget. En primer lugar, se les pone a los alumnos que indiquen si dos figuras idénticas separadas por unos 50 cm están “cerca” o “lejos” según su criterio (percepción). Tras su respuesta se les pone una pantalla, más alta que los propios objetos, que podría semejar a un eje de simetría y se les vuelve a preguntar si las figuras están tan cerca o tan lejos como habían dicho anteriormente. Tras realizar esta pregunta el alumnado, perteneciente al rango de edad de 3 a 5 años, dice que es menor la distancia entre ambas figuras ya que ve que el objeto se encuentra más cerca del eje de simetría y no ve la totalidad de la distancia entre ambos objetos.

En cuanto al segundo grupo de estudiantes que va desde los 5 hasta los 7 años, reconocen en un primer lugar la distancia existente entre las figuras del espacio, sin embargo, en el momento en el que se introduce la pantalla el espacio es menor, ya que existe un objeto que hace que el espacio entre los mismos sea más pequeño, además dicen que la distancia del espacio vacío, existente antes de poner la figura, varía cuando se coloca el objeto entre ellas. Sin embargo, hay otros que comentan que la distancia entre las dos figuras no varía, por lo que la entrada del eje de simetría no modifica la medida ente las dos figuras simétricas, pudiendo empezar a intuir lo que sería la simetría en cuanto a distancia.

Pasados los 7 años, afirman repetidamente que la distancia entre ambos objetos inmóviles es fija, independientemente del objeto que pongas entre ellos, es decir, da igual que pongas la pantalla representando el eje de simetría, que la distancia entre los dos figuras va a ser la misma. Además, proponen que la distancia de medida en cualquier dirección es la misma, es decir, que la distancia del objeto A al objeto B va a ser la misma que del objeto B al objeto A, así como también que ambas figuras van a tener la misma distancia con respecto a la figura que las separa. Por ello, este manejo de distancia anuncia que el menor ya ha comenzado a coordinar los esquemas mentales del campo espacial desarrollando así conceptos como las distancias lineales y simetrías.

Otra de las isometrías que se puede ver vista en el libro G.E.T Holloway es la simetría de traslación ya que se hacen diferentes estudios de distancias que pueden guardar relación con este tipo de isometría. En el primer experimento, se presentaron dos rectas físicas realizadas con varillas, de 5 cm, colocadas a la par, de manera que ambos extremos coincidiesen. Tras ello, se adelantó una de las varillas un par de centímetros.

El alumnado perteneciente al primer grupo, de 3 a 5 años, comenta que la varilla que ha sido adelantada un par de centímetros es más larga, ven esa traslación de la varilla sin tener en cuenta el punto de origen, viendo que el otro extremo se ha movido a su vez, por lo que se puede interpretar que según su visión no se siguen cumpliendo todas las propiedades que mantenía la figura antes de ser trasladada, puesto que ahora es más larga, según la visión del menor.

En cuanto al grupo 2, que va desde los 5 a los 7 años, la reacción anterior es mantenida hasta más o menos los 6 años, viéndose esta edad, como punto de inflexión y punto madurativo para el menor, ya que a partir de esta edad hay un ajuste. La respuesta de los menores ante la pregunta que se hacía tras realizar la traslación, es que una es que una es más larga de un lado y la otra es más la

larga del lado contrario. Entonces entre unas pequeñas dudas afirman que ambas varillas tienen la misma longitud.

Finalmente, pasados los 7 años de edad, hay una comprensión de la conservación de la longitud y por tanto de las propiedades que poseen las varillas, ya que, si anteriormente eran iguales, por trasladarla unos centímetros la medida de las mismas no sería una variante. Por lo que a partir de esta edad se podría trabajar de una manera efectiva el término de traslación.

Por último, falta por destacar una isometría, la rotación, la más costosa de entender para el alumnado. Por ello Piaget propone que, para alcanzar la comprensión de las relaciones espaciales, el menor debe verse como un objeto que se puede mover dentro de una realidad de estructuras inmóviles, que serán sus referencias.

Para esta isometría Piaget propone un experimento en el que se encuentren en un espacio cercano a ellos, este ambiente será el camino que repiten todos los días yendo de casa al colegio y del colegio a casa. De esta manera tendrá muchas referencias marcadas debido a la repetición. Estas estructuras referencia son denominadas mojones y se pueden asociar este término a los edificios, plazas, restaurantes, ríos, puentes o lo que se vaya encontrando el infante en el trayecto hacia el centro escolar.

El experimento da comienzo cuando colocan al alumnado en una de las ventanas del centro escolar, mirando a través de ella el paisaje cercano al centro, tomando como referencias alguno de las estructuras cercanas al colegio. Tras una visualización del paisaje se les dota de una bandeja de arena y una maqueta de las referencias que habían tomado tras la visualización y se les pidió que las colocasen correctamente en la bandeja. Tras la deposición de las mismas en la bandeja, se les solicitó que realizasen el camino hacia su casa o a un punto que pudiesen ubicar bien en el plano, dibujándolo sobre la arena. Finalmente, se les hizo realizar un giro de 180º de la maqueta de la escuela para que volviese a colocar las demás como creyera para que hubiese una corrección en el plano.

En primer lugar, el alumnado del primer grupo de edad queda muy confundido tras realizar el giro, aunque tienen ciertos comentarios que pueden indicar que tienen algo de sentido de orientación. Aun así este experimento es inadecuado para esta edad debido a su alta complejidad.

En el segundo grupo de alumnos, de 5 a 7 años de edad, sigue sin ser adecuado la experimentación, debido a que siguen pensando en acciones propias. Es decir, están condicionados en función de sus

intereses, hay una distorsión de la maqueta, las posiciones y distancias, debido a que a lo mejor no sienten atracción por el colegio y la distancia entre las maquetas del colegio a casa son más distanciadas, no representando la realidad de distancia que existe entre el centro y el hogar. Por ello, este experimento no es válido para conocer si el alumnado ha integrado bien el giro.

Finalmente, llegados al tercer grupo de niños/as pasados los 7 años de edad, aparecen puntos de referencia coordinados, aunque es una coordinación parcial, lo que ha sido demostrado al observar que los grupos que se realizan de la parte del plano es correcto, sin embargo, falta una relación entre las partes, es decir, el alumnado conoce la necesidad de hacer rotar el plano entero, pero no consiguen posicionar correctamente las maquetas debido a ciertas confusiones de rotación. Pasados los 8 años de edad, los menores ya tienen referencias fijas, lo que les permite realizar el ejercicio con exactitud en cuanto a rotaciones y proporciones, aunque en ocasiones esta puede variar un poco de la realidad.

2.2.1. Dificultades

Como se ha podido apreciar el desarrollo de la visión geométrica en los menores es un proceso costoso, ya que se ve como un ente abstracto y de gran dificultad de entendimiento para el alumnado. Es una habilidad que va de la mano con el desarrollo madurativo del menor, hasta que el menor no haya adquirido una serie de esquemas mentales acerca de la geometría será muy difícil que entienda las isometrías que se han desarrollado con anterioridad.

Se ha visto mediante experimentos los momentos en los que el infante está capacitado para el entendimiento de esta rama de la matemática, sin embargo, se desconocen las dificultades que se pueden presentar en la instrucción de la geometría en los niños/as. Debido a que es algo costoso de entendimiento, antes de llevar a cabo una unidad didáctica relacionada con las isometrías, es conveniente conocer las posibles dificultades que se pueden encontrar.

En primer lugar, se puede comentar la identificación de los conceptos, es decir, al alumnado conoce la definición de cada figura geométrica, identificando de esta manera un ejemplo prototípico de la misma. En los libros de texto, la orientación de los cuerpos geométricos es casi siempre vertical, además son en su mayoría de veces polígonos regulares, con los lados y ángulos iguales. Por ello, el alumnado que vea una figura con 5 lados de distintos y con diferentes ángulos, no lo verá como un polígono pentagonal, debido a esa integración de figuras normativas. Además, no solo existe este

problema en los libros de texto, sino que muchos docentes siguen cometiendo el error de mostrar esas figuras prototípicas sin incidir en otros polígonos (Martín Cordero, 2021).

Otra de las dificultades que comenta Enzo Martín Cordero es la orientación y el espacio. Problema que comienza cuando el menor no ha interiorizado las relaciones espaciales y la lateralidad, como son arriba-abajo, delante-detrás, derecha-izquierda. Además, de no tener realizados los esquemas mentales correspondientes con lo anterior, el menor se ve condicionado por la manera de la enseñanza del docente, ya que si se comienza a trabajar la orientación en el espacio con maquetas físicas será mucho más sencillo de entendimiento que de manera intuitiva sobre un plano bidimensional. Además, se puede realizar a través de su propio esquema corporal, realizando rotaciones, simetrías o traslaciones, lo que les hará entender e integrar de mejor manera ciertos principios sobre las isometrías.

2.2.2. Necesidades

La geometría es necesaria para el ser humano, para conocer el mundo en el que habita, ver las formas y reconocer la realidad en la que vive. La geometría está presente en la vida y por ello es necesario que sea enseñada correctamente a los menores.

La geometría es considerada como una herramienta para desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo, que tan de moda está en el mundo de la educación, que le permita obtener ciertas herramientas para resolver problemas de variadas características.

Pero, ¿por qué es necesaria la enseñanza de la geometría?

Esta rama de las matemáticas es la base para la formación académica, permitiendo al hombre visualizar, pensar críticamente, intuir o razonar (Araya y Alfaro, 2009). Además, esto hará que se integre en la vida cotidiana del menor, ya que en muchas ocasiones está presente la geometría, por ejemplo, en las orientaciones de los mapas de navegación, en los que la dirección del móvil es de vital importancia para no ubicarte de manera errónea. También se encuentra presente en la decoración, viendo la simetría como belleza, al igual que lo hacían en la antigüedad. En la construcción de diferentes estructuras que realiza el menor, muchas veces si esas construcciones no hay una proporción, la pieza puede venirse abajo.

3. CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Por ello la necesidad de formar al alumnado de manera correcta en la geometría hace pensar en cómo la base de la educación está programada para la enseñanza de la misma. Es necesario acudir al Currículo de las enseñanzas de la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra, Decreto Foral 67/2022, BON N° 130, de 1 de Julio de 2022.

Este documento se expone mediante artículos y diferentes apartados, pero los que conviene analizar son el apartado de objetivos, competencias claves, competencias específicas, saberes básicos y perfiles de salida. Mediante estos apartados se podrá realizar una apreciación de la importancia que dota el Departamento de Educación de Navarra a las matemáticas.

En primer lugar, los objetivos son los logros que el alumnado se espera que alcance al finalizar la etapa vinculado a su vez con las competencias claves. Debido a ello, se propone una revisión de ambos artículos, yendo al artículo 8 que propone los objetivos de la etapa, en la que se hará una búsqueda de aquellos logros matemáticos que se buscan alcanzar tras finalizar la Educación Primaria. Los dos objetivos relacionados con esta área son (DEGN, 2022, p. 6):

- “Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana.”
- “Desarrollar las competencias tecnológicas básicas e iniciarse en su utilización, para el aprendizaje, desarrollando un espíritu crítico ante su funcionamiento y los mensajes que reciben y elaboran.”

Ambos tienen una relación directa con la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería, que dice lo siguiente:

La competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (competencia STEM por sus siglas en inglés) entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible. La competencia matemática permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos.

La competencia en ciencia conlleva la comprensión y explicación del entorno natural y social, utilizando un conjunto de conocimientos y metodologías, incluidas la observación y la experimentación, con el fin de plantear preguntas y extraer conclusiones basadas en pruebas para poder interpretar y transformar el mundo natural y el contexto social.

La competencia en tecnología e ingeniería comprende la aplicación de los conocimientos y metodologías propios de las ciencias para transformar nuestra sociedad de acuerdo con las necesidades o deseos de las personas en un marco de seguridad, responsabilidad y sostenibilidad (DEGN, 2022, p. 20).

Después de conocer los objetivos y competencias clave que marca el documento es necesario saber aquellas competencias específicas relacionadas con la geometría (DEGN, 2022, p. 106-107):

- “Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado”.
- “Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para contrastar su validez, adquirir e integrar nuevo conocimiento.”
- “Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar situaciones de la vida cotidiana.”

Finalmente, se siente la necesidad de conocer en qué momento pone el Departamento de Educación su interés por la geometría, es decir, visualizar en qué curso se ve conveniente que se enseñen las isometrías de manera total y no parcial. El curso en el que los autores del documento han propuesto las isometrías han sido en el tercer ciclo de Educación Primaria, introduciendo la rotación como último movimiento o transformación. En los anteriores ciclos sí se menciona la simetría y la traslación, sin embargo, hasta el último ciclo no se añade al currículo las rotaciones.

Tras realizar este análisis se puede afirmar que se le da importancia por parte del Departamento de Educación a la geometría, siendo una rama que se ha ajustado al desarrollo madurativo y así de las capacidades del alumnado en cada etapa.

4. GEOGEBRA

Como bien menciona el Currículo de Educación Primaria, parte de la competencia matemática lleva consigo el desarrollo de la competencia tecnológica. Actualmente, la humanidad se encuentra en una era digital, en la que no se puede entender nada sin la informática, por tanto, la educación no se encuentra fuera de la burbuja digital, sino que se ve involucrada en ello. Así pues, se han ido desarrollando programas digitales para la enseñanza de las matemáticas, para el aprendizaje de las matemáticas o simplemente para resolver cuestiones que supongan un esfuerzo para el ser humano, dado que este tipo de herramientas facilitan la vida de todas aquellas personas que le dan uso a las mismas. La incorporación de las TIC ha sido tardía según Castillo (2008), habiendo una gran brecha generacional entre los nativos digitales y los que se han intentado adaptar a esta nueva etapa, por lo que el uso de las mismas ahora mismo se ve como algo obligatorio para poder llegar al alumnado y adecuarse a sus nuevas necesidades. De no hacerlo así se vería como una enseñanza tradicional, basándose en la jerarquía y la autoridad del docente, siendo quién haga un planteamiento de la clase en función de sus capacidades y no intentando fomentar todas las capacidades intrínsecas del alumnado. Por eso mismo Barrera y Santos (p.449) comentan lo siguiente acerca de las TIC:

El uso de la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los estudiantes logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas y sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o problemas, lo que constituye un importante aspecto en el aprendizaje de las matemáticas.

Las herramientas digitales promueven la motivación del alumnado, cualquier momento en el que se introduce la tecnología el alumnado se encuentra exaltado y con ganas de conocer que se les va a proponer. Ya que las matemáticas presentan grandes dificultades para el alumnado, hay que utilizar recursos para atraer a estos a esta área científica. Además, cabe destacar que las matemáticas es un área compleja de aprender y de explicar, no solo incomoda al alumnado sino que el docente muestra un malestar ante la asignatura debido a la posible falta de dominio. Esta dificultad hace que el alumnado tenga un interés bajo, lo que se puede contrarrestar con herramientas digitales. Además, les resulta difícil debido a que no tienen desarrollado un pensamiento matemático profundo, por lo que no hay un razonamiento lógico, sino que son alumnos mecánicos, que conocen patrones para la resolución de los problemas y ejecutan como si de un programa se tratase. En el momento en el que se introduce una nueva variante su sistema

operativo alerta de que algo está yendo mal, debido a que no tienen esa capacidad pensar crítica y reflexivamente (Jiménez et al, 2017)

Viendo estas dificultades que presentan las matemáticas, cabe pensar en una innovación académica, en introducir diferentes útiles didácticos que hagan motivar al alumnado. Una de las herramientas que puede ayudar a la enseñanza activa de las matemáticas es el programa GeoGebra. Esto es un software educativo para enseñar y aprender matemáticas. Hay una combinación entre la geometría, álgebra y el cálculo, lo que se ha convertido en una herramienta revolucionaria en el marco de la docencia. Es un programa gratuito, sencillo, instalable en cualquier dispositivo electrónico y se puede ejecutar en línea.

Este programa cuenta con muchas ventajas de cara al estudiante debido a que gracias al mismo se ha visto una mejora a nivel académico, ya que promueve el pensamiento matemático y aumenta el nivel de comprensión, lo que hace que el alumnado sea capaz de resolver los problemas que se le plantean de manera más eficaz. Además, es de utilidad ya que hay una construcción del propio conocimiento, es decir, que mediante ensayo y error el alumnado aprende, va generando diferentes esquemas mentales que luego los pone en práctica en diferentes problemáticas que se les plantea, ya sea en el centro educativo o en la vida diaria (Jiménez et al,2017). A su vez, gracias a GeoGebra se ha demostrado que hay un desarrollo de la competencia de visualización y de los conceptos matemáticos en el entorno visual y manipulativo (Costa, 2011).

Sin embargo, es necesario conocer los momentos de enseñanza de GeoGebra, ya que es importante saber cuándo hay que introducir al alumnado en el mundo de las herramientas digitales para la educación.

El uso de GeoGebra se puede dividir en tres momentos de uso. En primer lugar, se puede realizar una exploración por parte del alumnado, mediante la cual hagan diferentes hipótesis de las propiedades de una figura geométrica y que realicen su construcción. Es decir, hay un diseño de una construcción por parte del docente que ayude al alumnado a resolver el problema. Tras ello, los discentes infieren las diferentes propiedades de la figura mediante la manipulación de la construcción (Lasa y Wilhelmi, 2013)

En segundo lugar, se plantea la ilustración de una propiedad, es decir, se busca dar modelos de propiedades mediante ejemplos específicos. Se muestra una figura que determina ciertas propiedades, por lo que, mediante la manipulación de la misma, el alumnado puede verificar si esas

propiedades son las que se han propuesto o no. Este programa permite que haya más de una figura sobre la pantalla y poder analizar la propiedad en todas las construcciones, apreciando si es así o no, mejorando la confianza del alumnado en las conjeturas (Hölz (2001), citado por Lasa y Wilhelmi,2013) Hay una afirmación según la cual en un programa de geometría dinámica, cuando un estudiante ve que una conjetura es verdadera, es natural que quiera saber por qué es cierto. Simplemente ver una imagen de una propiedad no es suficiente para satisfacer su curiosidad y entender plenamente el razonamiento detrás de la afirmación.

Finalmente queda la demostración de la propiedad, la cual al estar propuesta en programa digital es necesario que el docente la construya de manera que pueda unir el razonamiento inductivo, vinculado a las TIC y el deductivo relacionado con las pruebas tradicionales de lápiz. Además, muchos autores defienden que el modelo inductivo motiva al alumnado, ya que mediante una prueba empírica los discentes ya pueden construir un argumento inductivo, teniendo a mano el ejemplo sin tener que demostrar los procesos matemáticos utilizados (Lasa y Wilhelmi,2013)

5. ANÁLISIS DE EJERCICIOS DE ISOMETRÍAS EN LIBRO DE TEXTO

Tras haber hecho un estudio teórico en el campo de las matemáticas, centrado sobre todo en el ámbito de la geometría. Se expone una investigación y reflexión de diferentes libros de matemáticas de Educación Primaria, analizando en todos ellos el apartado de geometría, centrándose en las diferentes isometrías y cómo se trabajan.

Para ello se han seleccionado 5 libros de diferentes editoriales de 5º y 6º de Educación Primaria, para también realizar una comparativa de la dificultad de los ejercicios y la puesta en práctica de los mismos en cursos sucesivos, viendo a su vez si estos ejercicios son adecuados con el Currículo de Educación Primaria.

Tras haber seleccionado los libros, la metodología de análisis que se ha realizado ha sido minuciosa, indagando en cada detalle que esconde la actividad. La búsqueda ha llevado a realizar una tabla comparativa de todos los libros en la que se muestra qué libros tienen al menos entre su batería de ejercicios una actividad que ponga de manifiesto algún aspecto de la columna de la izquierda. Además, si al menos hay un ejercicio que ponga en práctica el concepto propuesto, en la columna citada anteriormente, se pondrá un 1, mientras que si no se ha encontrado ningún ejercicio en el que se trabaje dicho contenido en todo el libro se pondrá un 0.

En cuanto a los conceptos de estudio seleccionados han sido los giros más comunes que se trabajan en primaria, como son los de 90° , 180° y 270° , dejando un apartado también para otro tipo de rotación que proponga el material de investigación. En segundo lugar, se ha analizado las diferentes traslaciones que se pueden trabajar en esta etapa, como son la vertical, la horizontal y la oblicua. En tercer lugar, se ha realizado un análisis de cómo se plantean los ejercicios de simetrías, en función de la cuadrícula, es decir, si los ejercicios de simetría presentaban cuadrícula o no. Finalmente, se estudian tres conceptos en relación con la geometría, el primero de ellos es la visión normativa, es decir, si las figuras presentadas son ejemplos prototípicos, sin variar la orientación de las mismas, los ángulos, los lados, es decir, una búsqueda de cómo son los ejemplos que dan para los diferentes cuerpos geométricos. En segundo lugar, se realiza una batida de aquellos ejercicios que hacen al alumnado realizar diferentes combinaciones de figuras para formar una nueva o una descomposición de figuras dentro de una principal. Por último, se pretende conocer si hay un uso isometrías, por ejemplo, la rotación, para formar algún polígono.

Tabla 1. Análisis de actividades encontradas en libros.

	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Libro 5
Giro 90°	1	0	1	0	1
Giro 180°	1	0	1	0	1
Giro 270°	1	0	0	0	1
Otro giro	1	0	1	0	1
Traslación horizontal	1	0	1	0	1
Traslación vertical	0	0	1	0	1
Traslación oblicua	1	0	0	0	1
Simetría con cuadrícula	1	1	1	0	1
Simetría sin cuadrícula	1	0	1	0	0
Representación normativa	1	1	1	1	1
Representación no normativa	1	1	1	1	1
Combinación de polígonos para formar otros	1	0	1	1	1
Uso de isometrías para la formación de polígonos	1	0	0	0	1

Nota: Libro 1: 6º de primaria SM más savia, libro 2: Santillana 6º de primaria, libro 3: 5º de primaria SM más savia, libro 4: 5º de primaria Vicens Vives, libro 5: 6º de primaria Erein

6. RESULTADOS

Tras realizar el análisis de los ejercicios de isometrías en los diferentes libros de texto se pueden ver los siguientes resultados:

En primer lugar, con respecto a la primera isometría, los giros o rotaciones, se puede observar como el libro 1 y el libro 5, alberga en su batería de ejercicios tareas en las que se trabajan todos los tipos de rotaciones, incluyendo también algún tipo de rotación que no sea de los ángulos que sean múltiplos de la rotación de 90° . Por otro lado el libro 3 se puede observar que tiene rotaciones de todo tipo menos de 270° . Terminado con los ejercicios de rotación, cabe destacar los dos libros de texto restantes los cuales el 2 y el 4, en los que no se introduce ningún tipo de ejercicio de rotación, lo que no se podría justificar de ninguna manera, ya que si se echa mano del Currículo de Educación Primaria de Navarra, en el apartado de saberes básicos se introduce el concepto de rotación como un elemento que el alumnado debería de saber. La única justificación entendible podría ser que el libro 4 es un libro de 5º curso de Educación Primaria, sin embargo, en comparativa con el otro libro del mismo curso este sí que introduce ejercicios de rotación y el libro 4 no, por lo que es digno de analizar. Por otro lado, el libro 2 es un cuaderno de trabajo de 6º de Educación Primaria, por lo que no se entiende la ausencia del concepto rotacional, siendo una necesidad muy importante para la concepción geométrica del alumnado.

En segundo lugar, con lo que concierne a la traslación se dividen en tres modelos de desplazamientos, siendo desplazados de manera horizontal, vertical y oblicua. El primero de ellos se ve presente en los libros 1, 3 y 5, el segundo de ellos se puede encontrar en los libros 3 y 5, finalmente, la traslación oblicua, que conlleva un movimiento en ambos ejes, X e Y, se puede ver presente en los libros 1 y 5. En cuanto a la traslación se podría afirmar que el libro 5 es el más completo debido a que entre sus ejercicios se pueden encontrar todos los tipos de desplazamientos.

En tercer lugar, en cuanto a simetría, esta se puede dividir en dos los tipos de ejercicios encontrados. Los ítems que analizar es la existencia o a ausencia de la cuadrícula para las actividades de simetría. En cuanto a la presencia de cuadrícula en los ejercicios de esta isometría, se ha visto presente en todos los libros menos en el libro 4, en la que no hay ninguna actividad de simetría con cuadrícula. En relación con tareas sin presencia de cuadrícula, en ejercicios de isometría, se ha podido observar que la ausencia de la pauta para la realización de los mismos se encuentra en los libros 1 y 3, no existiendo ningún ejercicio de simetría sin cuadrícula en los otros estudiados.

En cuarto lugar, se hace un estudio de las representaciones de los polígonos, analizando si la presentación de los mismos siempre es igual, sin variar tamaños, ángulos, distancias de los lados, orientaciones. En cuanto a la visión normativa, se ha podido observar que en todos los libros aparece al menos un ejemplo prototípico de un polígono. Por otro lado, en todos los libros existía también algún ejemplo no normativo, no ajustándose así pues al prototipo de polígono.

Finalmente, se analizan dos conceptos que podrían estar relacionados entre sí, ya que es realizar una combinación de polígonos o movimientos para formar una figura geométrica. En cuanto a la combinación de polígonos para la formación de otros se ha podido ver al menos un ejercicio en casi todos los libros, en el único material de texto que no se ha sido posible encontrar ningún ejemplo ha sido en el libro 2. Por otro lado, en cuanto al uso de isometrías para la formación de otros polígonos ha sido posible encontrar al menos 1 combinación en los libros 1 y 5. En el resto no se ha podido encontrar ejemplo alguno de esta conjugación.

Se puede concluir este apartado tras haber analizado los materiales de texto que el más completo hasta en el pequeño estudio ha sido el libro 5, el cual es necesario que trabaja centrándose en las competencias y no en los contenidos, por lo que se ha podido ver que hay una existencia de todos los ítems evaluados, menos uno. A su vez, el libro 1 también está compuesto por ejercicios que trabajan los conceptos que se han llevado a estudio. Por lo que es posible afirmar que ambos libros son adecuados para trabajar las isometrías y desarrollar las competencias propuestas por el Currículo de Educación Primaria de Navarra.

7. NECESIDADES

Una vez realizado el análisis de los libros de texto se pueden apreciar una serie de lacras bastante importantes desde el punto de vista competencial. En primer lugar, no hay un desarrollo efusivo de la isometría de rotación, ya que como se ha comentado anteriormente es una de las más complejas para el alumnado, pero si por parte de los libros de texto no se trabaja será el docente quien tenga que proponer diferentes actividades para desarrollar este concepto. Sí que se encuentra presente en 3/5 partes de los libros estudiados, sin embargo, se debería encontrar en todos ellos. Ahora bien, ya dependerá de la profesionalidad del docente para complementar esta falta para desarrollar los contenidos y competencias necesarias, para alcanzar los perfiles de salida correspondientes. En relación con estas ausencias, se puede destacar también los tipos de traslaciones las cuales son poco trabajada por parte de los libros de textos, siendo un ejercicio sencillo para el alumnado, debido a

que la complejidad según los artículos revisados es más sencilla que las otras isometrías, ya que el menor siempre está expuesto a cambios de posición y este tipo de movimiento. Finalmente, las simetrías sí que se trabajan en mayor medida, sin embargo, se puede destacar la falta de ejercicios sin cuadrícula, los cuales también se pueden trabajar de manera efectiva para desarrollar la integración de este concepto en el conocimiento académico del menor.

Como se puede observar, todos ellos son ejercicios de libros de texto, de los cuales algunos tienen extensiones a nivel multimedia, es decir, tienen una copia a nivel digital. Sin embargo, la integración de las TICS de esta manera no promueve la construcción del conocimiento del menor, ya que son tan solo extensiones del libro de texto a nivel digital, sin poder manipular e interactuar con el ejercicio. Tan solo los ejercicios proponen correcciones momentáneas y algún ejercicio que en el libro no aparece, sin embargo, no hay una extensión mayor al libro de texto, viéndose más como un recurso para no portar el material físico, teniendo una copia en el centro escolar y otra en el hogar, para poder tenerla a mano siempre que se quiera.

8. PROPUESTA LIBRO GEOGEBRA

La ausencia de actividades a nivel digital hace que el nivel de comprensión del alumnado sea más bajo, haciendo un flaco favor al desarrollo de la competencia matemática y el desarrollo de todas las competencias que esta tiene intrínsecas. Por ello para paliar estas faltas se propone generar un libro en el programa digital GeoGebra, el cual se ha mencionado anteriormente, viéndose este como un potenciador para el desarrollo del conocimiento matemático del menor, y no solo para eso, sino que es visto como una herramienta que le permitirá al menor desarrollar una serie de habilidades de visión que le serán muy útiles para su vida diaria. Estas tareas permitirán al estudiante manipular las figuras y construir su propio conocimiento, mejorando así su nivel de comprensión.

[El libro GeoGebra \(https://www.geogebra.org/m/pbawzabf\)](https://www.geogebra.org/m/pbawzabf) está compuesto por 3 capítulos, cada uno con respecto a una isometría analizada previamente. En primer lugar, en este libro GGB, se presenta el [capítulo de la isometría de simetría](#), que se considera más sencilla para su desarrollo en el tercer ciclo (5º y 6º) de Educación Primaria (10-12 años). Para este capítulo se proponen tres actividades, las cuales llevan consigo diferentes ejercicios en sí mismas. El primer ejercicio (Figura 6) consiste en la realización de unos polígonos regulares y marcar los ejes de simetría. Hay detalles que no se da al alumnado, promoviendo el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas. Con las herramientas que disponen deberán desarrollar la actividad, lo que les permitirá

construir sus propios conocimientos y sacando diferentes conclusiones tras la resolución de la tarea. Además, en esta actividad se les presta la ayuda de un applet, creado por A. Ceferino y E. Martínez Rosales, en el que pueden observar los ejes simétricos de los polígonos propuestos, permitiendo de esta manera que hagan una autoevaluación de la tarea. En segundo lugar, se propone una actividad para conocer la simetría central, proponiendo el punto de simetría como el centro de la figura, prestando una serie de herramientas y partiendo del primer problema que es la búsqueda del punto medio del polígono, por lo que tendrán que manipular el applet, viendo los errores aprendiendo de ellos y adquiriendo las técnicas correspondientes para encontrar el centro de la figura y realizar lo que se les pide en la tarea. Finalmente, se les da la libertad de crear una figura que sea simétrica, ofreciéndoles todas las herramientas y desarrollando la creatividad en el menor, ya que muchas veces la matemática se encierra en patrones a seguir negando la inventiva del menor, aspecto que debe ser desarrollado desde todas las áreas. Sin embargo, también tendrá su parte matemática rigurosa que es la comprobación de la simetría de la figura creada, ya que se les pide que marquen ese eje de simetría.

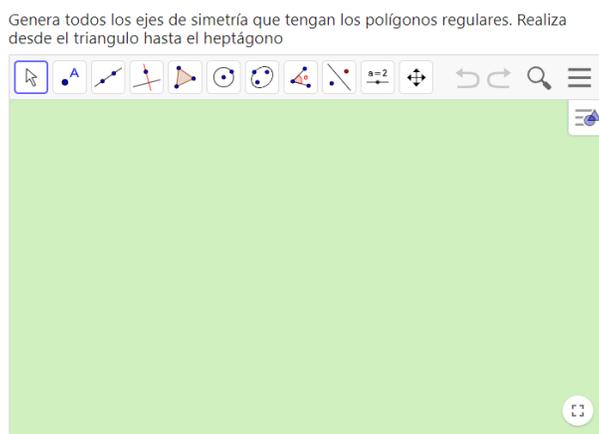


Figura 6. Ejercicio de simetría.

[El capítulo segundo](#) corresponde a la traslación, la cual consiste en el movimiento de una figura mediante un vector que indica el sentido y las unidades de desplazamiento de la figura propuesta para la traslación. En este capítulo se pueden encontrar dos ejercicios, el primero de ellos consiste en dos construcciones diferentes con unas características determinadas por el ejercicio. Después de la formación de la figura se les pide que realicen una traslación y tienen que tener en cuenta las particularidades que propone la actividad. Tras realizar las correspondientes traslaciones se les

propone unas preguntas para conocer qué conocimientos han obtenido al finalizar la tarea, obteniendo un *feedback* de cómo han realiza la tarea.

En segundo lugar, se les propone una actividad algo más motivante de cara al alumnado (Figura 7), ya que deberán ayudar a un conocido piloto de fórmula 1 a terminar la carrera en el Circuito de Navarra, para ello tendrán que trazar la línea a seguir por el conductor para llegar a la meta. En este caso tan solo se les da la herramienta de traslación, la única que deben utilizar para realizar la tarea, poniendo también un énfasis en el aspecto competitivo y así manteniendo los intereses del menor en el libro de las isometrías. Finalmente se busca conocer cómo les ha ido la carrera, viendo si ha sido una actividad difícil o no, obteniendo también las estrategias que han utilizado para llegar a meta lo antes posible y ver si han adquirido el concepto de traslación analizando el dibujo que se ha realizado.

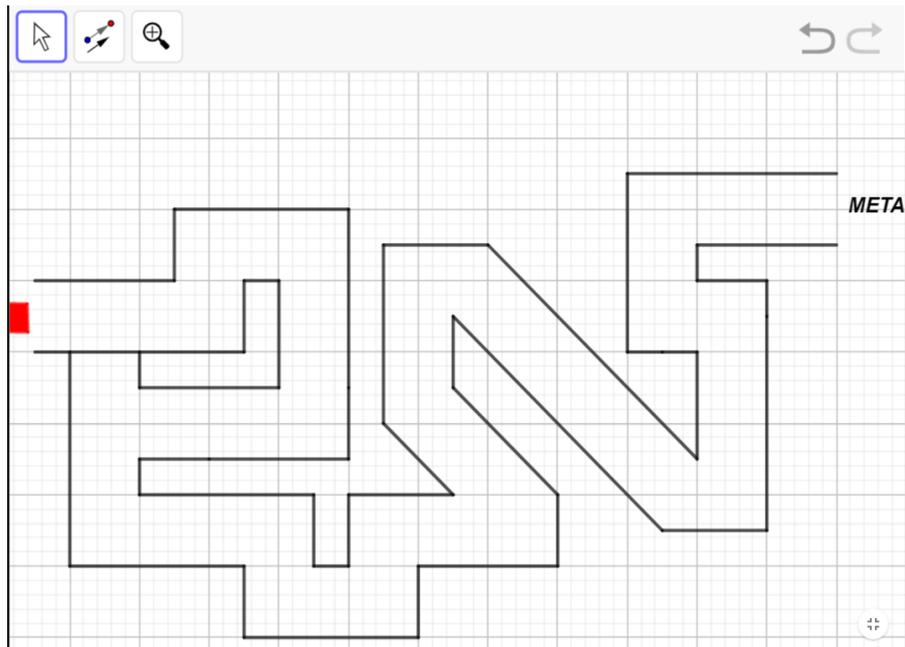


Figura 7. Ejercicio de traslación.

Por último, en el tercer [capítulo](#), este alberga ejercicios relacionados con la rotación. Concepto de mayor complejidad para su integración, por ello ha sido ubicado en el último capítulo. En primer lugar, se propone un ejercicio de visualización de las rotaciones de unas figuras con respecto a un punto. Actividad interactiva, ya que es el discente quien mediante un deslizador mueve para conocer los diferentes ángulos de rotación. Tras la manipulación de este applet se les propone una serie de preguntas las cuales están relacionadas con la actividad interactiva.

En segundo lugar, se propone una actividad que consiste en la teselación. Se parte de una explicación de qué es este concepto y después se les pide que busquen aquellos cuerpos geométricos que permiten realizar una teselación con motivo del embaldosado de la clase, poniéndoles así en situación y visualizando la tarea como algo real y útil para la vida diaria. Finalmente, se les pide que nombren qué figuras permiten realizar la teselación y una pregunta abierta para que piensen lo que han hecho.

Por último, se les pide que realicen una construcción de una figura mediante rotaciones de un polígono regular, realizando diferentes giros para conseguir un objeto nuevo. Finalmente se les realiza una pregunta para que reflexionen sobre la rotación de un polígono para formar otro.

9. SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Llegados a este punto de la actualidad, la sociedad exige que haya una incorporación de la informática en todos los campos de estudio y en sus respectivas ramas. La edad en la que se sitúa la humanidad no se entiende sin el uso de las tecnologías, por lo que la educación tampoco. Este pilar constructor de sociedad necesita estar a la última, necesita estar al corriente de las modas digitales, incorporando todas estas herramientas en su labor de enseñanza por la cantidad de beneficios que las mismas generan en el alumnado. Por ello cabe destacar la importancia que le da el DEGN a la incorporación de las TIC en el aula de Educación Primaria. Se pueden destacar las siguientes citas textuales del Currículo en relación con el uso de las tecnologías(DEGN):

- “Desarrollar las competencias tecnológicas básicas e iniciarse en su utilización, para el aprendizaje, desarrollando un espíritu crítico ante su funcionamiento y los mensajes que reciben y elaboran.” (p.6)
- “Analizar de manera crítica y aprovechar las oportunidades de todo tipo que ofrece la sociedad actual, en particular las de la cultura en la era digital, evaluando sus beneficios y riesgos y haciendo un uso ético y responsable que contribuya a la mejora de la calidad de vida personal y colectiva.” (p.17)
- “La competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (competencia STEM por sus siglas en inglés) entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible.” (p.20)

- “La competencia matemática permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos.” (p.20)
- “La competencia digital implica el uso seguro, saludable, sostenible, crítico y responsable de las tecnologías digitales para el aprendizaje, para el trabajo y para la participación en la sociedad, así como la interacción con estas.” (p.20)
- “Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.” (p.105)
- “Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para contrastar su validez, adquirir e integrar nuevo conocimiento.” (p.106)
- “Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar situaciones de la vida cotidiana.” (p. 107)

Visto estos se puede apreciar como el currículo establece una relación directa entre la tecnología y el área matemática, teniendo una fuerte vinculación. Sin embargo, analizando los libros de texto se ha podido observar que el alumnado deja de lado todo aquello que el currículo pide, ya que no dejan de ser ejercicios de papel y bolígrafo, en los que la tecnología no interfiere, generando así carencias en el desarrollo de las competencias matemáticas y por tanto en los perfiles de salida que pretende el Currículo conseguir. Además, el documento que marca el camino de la educación establece una serie de saberes básicos relacionados con la geometría, los cuales están relacionados a su vez con la incorporación de herramientas digitales para la construcción y descomposición de figuras, para la manipulación, para explorar ciertas propiedades y poder desarrollar al uso la competencia matemática y digital.

Como bien se ha podido observar tras realizar una pequeña síntesis de los aspectos que marcan el documento presente, hay una conexión entre la tecnología y las matemáticas, establecida por un marco legal que expone las cuestiones más importantes de la Educación Primaria. Por ello tras el análisis de los libros, se ha podido observar que se quedan escasos no promocionando la competencia matemática y todas sus específicas en su totalidad. Por ello, se necesitan herramientas

específicas que incorporen la tecnología, permitiendo conjeturar en el contexto de la geometría. Debido a esto, es necesario proponer materiales específicos, como GeoGebra, herramienta que ha sido la seleccionada para realizar la propuesta de trabajo, teniendo esta el objetivo fundamental de satisfacer aquellas peticiones que marca el currículo, en relación con el ámbito geométrico.

Así, pues, las principales conclusiones se refieren al impacto de este nuevo instrumento en procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en 5º y 6º de EP. Estas implicaciones son:

El desarrollo del pensamiento crítico, lógico y analítico que le permitirá al alumnado realizar una la toma de decisiones de manera reflexiva, ya que al tener desarrollado el pensamiento crítico y al presentarse varias opciones, el niño/a analizará todas las posibles causas que puede generar la elección de una decisión u otra. Desde la propuesta se les da diferentes vías para solucionar un problema, no pautando nada y dejando pie a su imaginación, enfrentándose por sí solos a una tesitura, esta variedad de caminos les permitirá desarrollar esa capacidad para tomar una decisión u otra, haciéndola válida también para la vida cotidiana, en la que el niño se puede ver inmerso en la elección de determinadas elecciones y procederá a hacer una elección crítica, lógica y analítica.

Por otro lado, se puede desarrollar la orientación espacial. En la vida la gente se mueve de un lado a otro, haciendo uso de una herramienta telefónica en la que se muestra un mapa vía satélite. Esta propuesta permitirá también desarrollar esa orientación en el menor, la cual será esencial en su vida en casos como este, de usos de mapas para orientarse en el espacio.

Finalmente, queda como cuestión abierta la aplicación de la propuesta, que por limitación temporal de las prácticas no ha sido posible. Por lo que queda pendiente llevarla a cabo en el aula de Educación Primaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Acosta, M. E., Blanco, L. A. M., & Gómez, K. R. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Integración: Temas de matemáticas*, 28(2), 173-189.
- Araya, R. G., & Alfaro, E. B. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. 4(5), 113-136.
- Ayerbe, JM (2017). El nacimiento de la geometría analítica. *Lecturas Matemáticas*, 38 (2), 93-124.
- Barrera, F. y Santos, M (2001). Students' use and understanding of different mathematical representations of tasks in problem solving instruction. proceedings of the twenty-three annual meeting north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education. *Eric clearinghouse for science, mathematics, and environmental education*. 1, 449-456.
- Bernabeu, J et al (2019). *Matemáticas 6º Primaria*. SM más Savia.
- Bohorquez, H. J., Boscán, L. F., Hernández, A. I., Salcedo, S., & Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. *Educere*, 13(45), 477-489.
- Camargo, L., & Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 32, 4-8.
- Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En *RELIME*, 11(2), 171-194
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33511202>
- Costa, L. J. (2011). Problematización de matematización en un entorno GeoGebra dentro de un planteamiento didáctico <<desde abajo hacia arriba>>. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), 101-114.
<http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/243826/353429>

- Departamento de Educación del Gobierno de Navarra (DEGN) (2022). Currículo de las enseñanzas de la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra, Decreto Foral 67/2022. BON Nº130, de 1 de Julio. Autor.
- Euclides. (300 a.C.). Los Elementos.
<http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/elementseuclides1.pdf>
- Fraile, J., y Pineda, A. (2022). *Matemáticas 5. (Comunidad Zoom)*. Vicens Vives.
- Garín, M et al (2018). *Matemáticas 5º Primaria*. SM más Savia.
- González Urbaneja, P.M (2003). *Los orígenes de la Geometría Analítica*. La Ortotava: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia Canaria. 6
- Grence, T (2015). *Matemáticas 6º Primaria*. Santillana Saber Hacer
- Hartshorne, R. (2018). *Geometry: Euclid and beyond*. Springer.
- Helmholtz, Hermann. (1956) Sobre el origen y el significado de los axiomas geométricos.
SIGMA. 4, pág. 243.
- Holloway, G.E.T. (1986). *Concepción de la geometría en el niño según Piaget*. Paidós Educador
- Jiménez García, J. G., & Jiménez Izquierdo, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica Sobre Tecnología, Educación Y Sociedad*, 4(7), 1-17
- Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, explanatory and demonstrative moments. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, 2(1), 52–64. <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160>
- Martín Cordero, E. J. (2021). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y sus dificultades. Universidad de la Laguna. Grado en Maestro de Educación Primaria.
<https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/25425/El%20proceso%20de%20ensenanza%20de%20la%20geometria%20y%20sus%20dificultades..pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Mounoud, P., & Sastre (trad.), S. (2013). El desarrollo cognitivo del niño : Desde los descubrimientos de Piaget hasta las investigaciones actuales. Contextos Educativos. Revista De Educación, (4), 53–77. <https://doi.org/10.18172/con.486>
- Pari Huayllani, E. (2019). Cálculo vectorial en R^2 . Vectores en el plano y en el espacio. Adición y multiplicación de un vector por un real. Segmentos dirigidos y vectores. Vectores paralelos. Producto escalar. Vectores ortogonales. Norma de un vector. Bases y proyección ortogonal de vectores en R^2 . Ecuación vectorial de rectas en R^2 . Didáctica de los vectores en el plano. Resuelve problemas de cantidad.
- Pereda, L. (2015). *Matemáticas 6 Primaria*. Erein
- Pérez Porto, J., Gardey, A. (2020). Tabula rasa - Qué es, definición y concepto. <https://definicion.de/tabula-rasa/>
- Piaget, J. (1936). *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Biblioteca de bolsillo. <https://piagetflix.com/wp-content/uploads/2020/02/2-El-Nacimiento-de-La-Inteligencia-en-El-Nino-Jean-Pieget.pdf>
- Piaget (2007). Desarrollo Cognitivo: Las Teorías de Piaget y de Vygotsky. Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). http://www.paidopsiquiatria.cat/files/teorias_desarrollo_cognitivo_0.pdf
- Roa, M. A. G., Franco, F. A., & Garzón, D. (2006). *Didáctica de la geometría euclidiana: Conceptos básicos para el desarrollo del pensamiento espacia*. Didácticas Magisterio. https://books.google.es/books?id=jkUUhKtRLHgC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
- Stillwell, J. (2010). *Las matemáticas y su historia*. Springer.
- Torres Barrios, R. (2012). Operaciones de seriación y clasificación en niños de 5 años de instituciones educativas estatales y privadas -Callao. Universidad San Ignacio de Loyola. <https://repositorio.usil.edu.pe/server/api/core/bitstreams/02f6dd30-cb84-4802-bd27-1e6ee1094e67/content>
- Valdes, V. A. (2014). Etapas del desarrollo cognitivo de Piaget. México: Universidad Marista de Guadalajara.

https://www.researchgate.net/publication/327219515_Etapas_del_desarrollo_cognitivo_de_Piaget

Zúñiga, Á. R. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. EUNED.

<https://centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20maticas.pdf>

Applets de GeoGebra (GGB)

Alfaro, J. *Isometrías*. <https://www.geogebra.org/m/pbawzabf>

Ceferino, A y Martínez, E. *Simetría de polígonos*. <https://www.geogebra.org/m/jkrqaxfa>

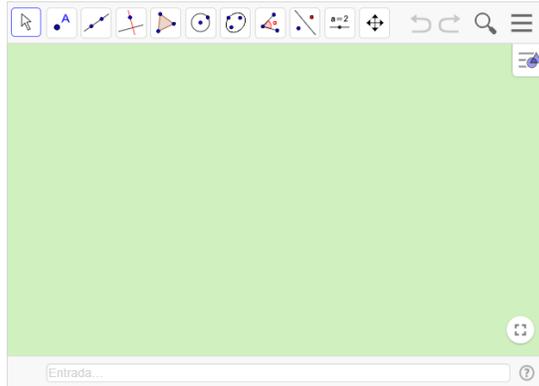
ANEXO. Applet GeoGebra

En este anexo se recogen las imágenes de todas las actividades del libro GGB (<https://www.geogebra.org/m/pbawzabf>)

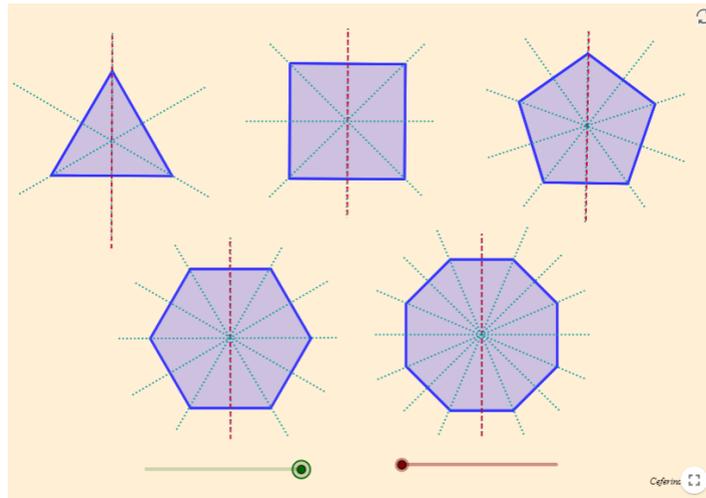
Capítulo 1.

Actividad 1.1.

Genera todos los ejes de simetría que tengan los polígonos regulares. Realiza desde el triángulo hasta el heptágono



A continuación deberás explicar al menos alguna propiedad que se te ocurra sobre los ejes de simetría de los polígonos regulares que has realizado. Podrás comprobar los ejes de simetría en el siguiente applet.



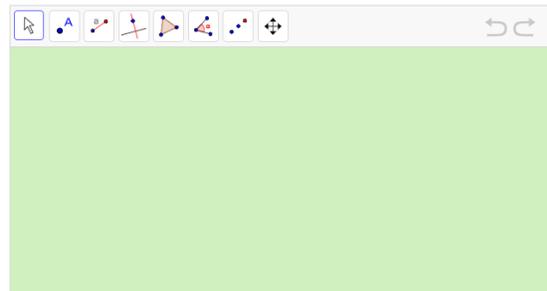
Análisis y propuesta de ejercicios de isometrías

Actividad 1.2.

En primer lugar hay que recordar que la simetría central es la simetría respecto a un punto. Ahora bien, el punto puede estar fuera o dentro del polígono. Por ello se pide que mediante simetría central, tomando como punto el centro del objeto al que se le aplicará la simetría central, saber cuáles son aquellos polígonos que casan sin sobresalir ningún elemento, es decir, que se ponen el uno sobre el otro sin que haya salientes de segmentos o vértices. Después es necesario que propongas al menos una propiedad y explicarla.

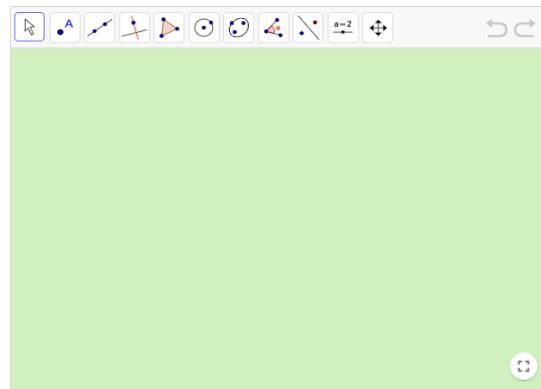
Escribe aquí la propiedad y su explicación

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...



Actividad 1.3.

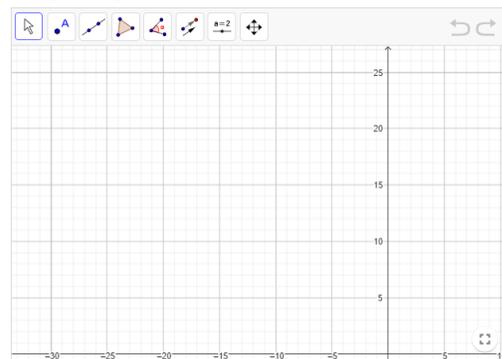
Realiza una figura que sea simétrica. Al menos deberá de tener dos polígonos diferentes. Después, con ayuda de alguna herramienta, marca el eje de simetría



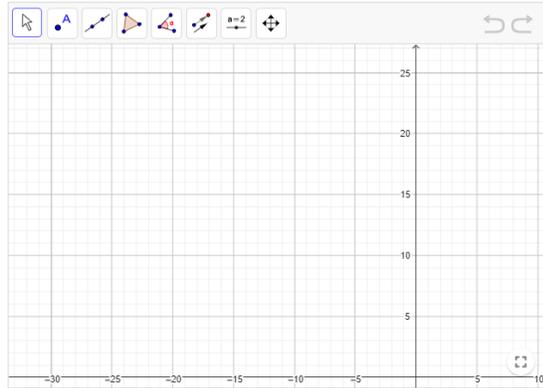
Capítulo 2.

Actividad 2.1.

Construye un cuadrado cuyo vértice de abajo a la izquierda este situado en el punto $(-2,3)$ y como perímetro sea 16 unidades. Después de construir el cuadrado deberás realizar una traslación del mismo hacia la derecha, 3 unidades en el eje de la X y 1 en e



Construye un cuadrado con el primer punto en el origen de coordenadas, con un área de 25 unidades². Después mediante la traslación tienes que hacer coincidir el punto situado en el origen de coordenadas con el punto superior derecho.



¿Han cambiado las medidas del cuadrado tras haber hecho la traslación? ¿Por qué crees que ocurre esto?

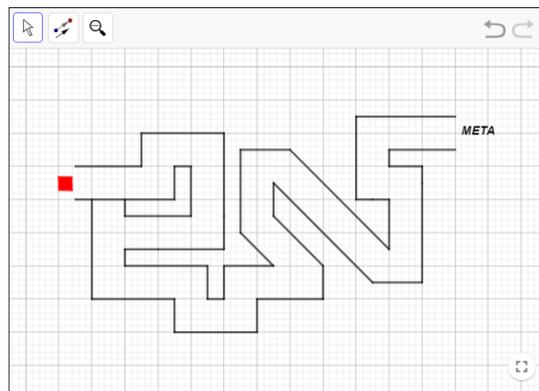
Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

¿Podrías definir con tus palabras qué es la traslación y que propiedades tiene? No importa que te equivoques, mira, analiza y escribe con tus palabras.

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

Actividad 2.1.

Fernando Alonso, se dispone a dar la última vuelta en el Circuito de Navarra, hay que ayudarle para marcarle la trayectoria mediante la traslación, moviendo así el coche. Cuantas más veces se mueva el coche más le costará al piloto llegar. Hay que intentar



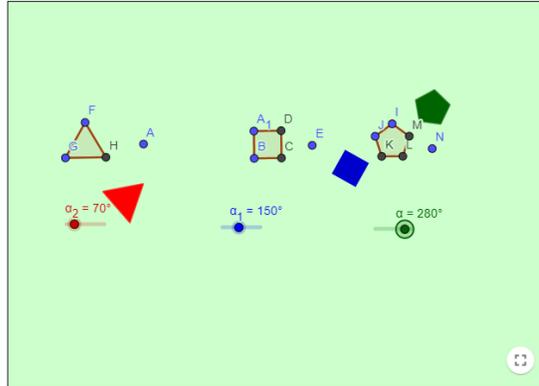
¿Te ha resultado difícil? ¿Qué estrategia has utilizado para llegar lo antes posible a la meta?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

Capítulo 3.

Actividad 3.1.

Podrás jugar con los ángulos de rotación de los diferentes polígonos con respecto a un punto



1- ¿Se te hacen raros estos tipos de giros, por qué?

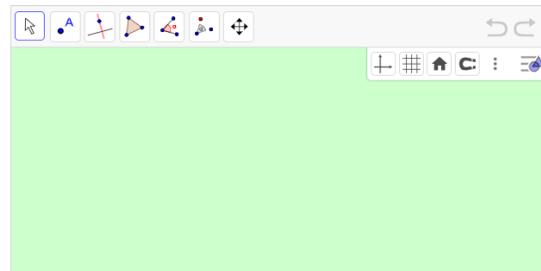
2- ¿Hacia qué lado giran las figuras? ¿A qué te recuerda este giro?

3- Fíjate en el triángulo y el cuadrado, gíralos. ¿En qué ángulos las figuras que se desplazan tienen la misma orientación que la figura original, la estática? ¿Por qué crees que se ponen en la misma orientación en estos ángulos?

Actividad 3.2.

Los términos teselaciones y teselado hacen referencia a una regularidad o patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana que cumple con dos requisitos: Que no queden espacios. Que no se superpongan las figuras.

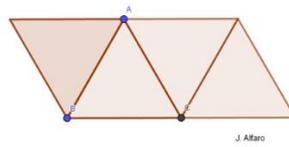
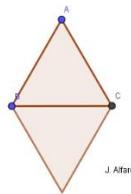
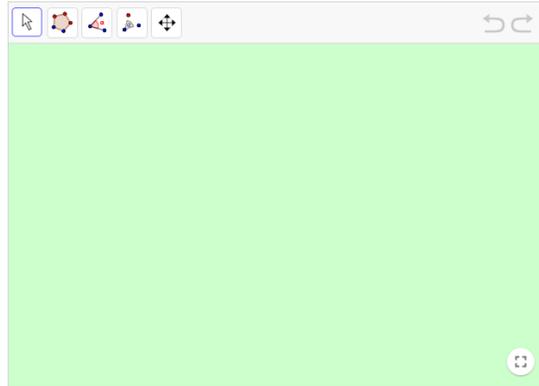
Sabiendo ya lo que es el teselado, se ha pedido desde el centro que debemos arreglar el suelo de la clase. Para ello, han pedido a este aula, en concreto, que haga un estudio de qué figuras geométricas se pueden utilizar para embaldosar el suelo y cuál tiene que ser los ángulos de rotación de la figura, con respecto al vértice, para que se pueda realizar. Para ello han dicho que hay que elegir las todas las figuras que cumplan las propiedades de teselación. Han mandado también una circular con un estudio realizado por una universidad en el cual han dicho que para saber cuáles son aquellas figuras que permiten realizar la teselación se puede utilizar esta herramienta haciendo girar el polígono con respecto a sus vértices. Se os propone el reto de que digáis qué polígonos podrían ponerse en el suelo de la clase y qué ángulos de giro tiene cada uno de estas figuras para que se pueda embaldosar el suelo de clase.



Nombra las figuras geométricas que permiten que cumplen los principios de la teselación y cuáles son sus ángulos de giro. Además, ¿crees que tiene alguna relación los ángulos de giro con los ángulos de los polígonos correspondientes? Explica tu respuesta

Actividad 3.3.

Crea diferentes figuras geométricas conocidas mediante la rotación de polígonos regulares.



¿Podrías sacar alguna conclusión de la rotación de una figura para formar otra?