GEOMETRÍA Y MECÁNICA

DE LAS ARTES Y OFICIOS

Y DE LAS BELLAS ARTES.

CURSO NORMAL

para el uso de los artistas y menestrales, y de los maestros y veedores de los talleres y fábricas.

Esplicado en el Conservatorio Real de Artes y Oficios

POR EL BARON CARLOS DUPIN,

MIEMBRO DEL INSTITUTO (ACADEMIA DE LAS CIENCIAS), OFICIAL SUPERIOR DEL CUERPO DE INGENIEROS DE MARINA, OFICIAL DE LA LEGION DE HONOR Y CABALLERO DE SAN LUIS.

TRADUCIDO AL CASTELLANO

DE ORDEN DEL REY NUESTRO SEÑOR,

QUE ESTÁ EN GLORIA,

POR DON JUAN LOPEZ PEÑALVER DE LA TORRE,

DEL CONSEJO DE S. M. Y SU SECRETARIO HONORARIO.

TOMO II.

CONTIENE LA MECÁNICA.

MADRID: 1835.

IMPRENTA DE LOS HEREDEROS DE COLLADO.

MECÁNICA

DE LAS

ARTES Y OFICIOS

Y DE LAS BELLAS ARTES.

LECCION PRIMERA.

Sistema general de medidas empleadas en las artes mecánicas.

Son mensurables todas las propiedades de la materia. Su medicion suministra á la ciencia de los cálculos el medio de valuar las relaciones que tienen entre sí algunas propiedades comparables y los varios grados de una misma propiedad.

Entre los objetos de la ciencia llamada *física*, es el mas importante medir las propiedades de la materia. Siempre que se descubre algun nuevo ramo de esta ciencia, se necesita encontrar medidas para las nuevas relaciones que se han de estudiar. Por lo comun cada una de estas medidas encamina á conocimientos que sin ellas no hubiera sido posible adquirir. Nos limitaremos ahora á considerar las medidas de indispensable uso en todas las partes de la mecánica. En cuanto á las que son útiles solo á ciertas partes de esta ciencia y á ciertas artes, las daremos á conocer sucesivamente cuando tratemos de las materias que tienen conexion con ellas.

Medidas geométricas. Llamo así á las medidas de estension, esto es, de distancias, de superficies y de volúmenes. La mecánica hace uso de ellas para medir los espacios ocupados y los espacios corridos, por puntos, líneas, superficies y cuerpos.

Medidas de longitud. Todos comprenden que se puede tomar una parte de línea recta mas ó menos estensa por unidad de longitud; y que se puede variar esta unidad segun los tiempos, los lugares, las necesidades y las circunstancias. Asi vemos que los franceses, los alemanes, los italianos y casi todos los pueblos de la tierra emplean diferente unidad para la medida de longitudes, y lo que es mas, que las diferentes provincias de un mismo país emplean medidas de longitud que no tienen la menor analogía.

Esta diversidad produce graves inconvenientes en la práctica de las artes, en las operaciones del comercio y en el trato civil, y hace indispensable el cabal conocimiento de las relaciones que hay entre unidades muy diversas empleadas en la medida de unos mismos objetos. Si despues se quieren hacer los cálculos de las obras, trasportes, ventas ó compras, es necesario hacer á cada instante reducciones de números para encontrar el verdadero valor de las dimensiones y precios.

Ademas de la pérdida de tiempo que ocasionan estas reducciones, causan grandes perjuicios por los medios que suministran para engañar á los que no tienen el tiempo ó la instruccion suficientes para verificar cálculos complicados y frecuentes. Es, pues, importantísimo que haya en cada país un mismo sistema de medidas, y si reflexionamos mas, veremos que no es menos importante el que fuese uno mismo en todos los países.

Hoy se hace uso en el reino de los Países-Bajos, en parte de la Suiza, en el Piamonte, en el antiguo reino de Italia, y en el reino de Nápoles, del sistema de medidas establecido por los franceses, y podria esperarse con razon verlo adoptado por todas las naciones ilustradas, si el orgullo nacional de ciertos pueblos,

celosos de la gloria de aquellos, no se opusiese á este benéfico sistema.

La unidad de medidas de longitud adoptada antiguamente por los franceses, no tenia ningun tipo invariable en la naturaleza al cual se pudiese recurrir para volver á encontrarla en todos los lugares y en todos los tiempos. El *pie* y la *toesa* se tomaron en su orígen de la longitud del pie y de la estatura de un hombre; mas como no hay dos hombres cuyos pies sean rigurosamente iguales en longitud, ni cuya estatura sea cabalmente la misma, resulta que si se hubiese perdido el patron del pie ó de la toesa, no hubiera sido posible volver á hallar su verdadera longitud.

Los sábios franceses concibieron la idea de medir en la superficie de la tierra la distancia del polo al ecuador, dirigiéndose de norte á sur, es decir, siguiendo la direccion de un meridiano, y ejecutaron esta delicada operacion con tan buen éxito, que honra igualmente al método que proporcionó la ciencia, á los instrumentos que las artes mecánicas suministraron, y al talento, perseverancia y valor de los hombres célebres que emprendieran y continuaran este inmenso trabajo.

Despues de valuada con toda la exactitud de que es capaz la industria humana, la longitud de la distancia del polo al ecuador, la dividieron en diez millones de partes iguales, y esta fraccion, esta diezmillonésima fue tomada por unidad de longitud, dándole el nombre de *metro*.

Comparado el metro con las medidas antiguas tiene 3 pies, 11 líneas y 296 milésimas de longitud, es decir, un poco menos de tres pies y una pulgada.

Si las distancias fuesen poco diferentes unas de otras, y si no se necesitase una exactitud muy grande, podria usarse solo una especie de unidades y despreciar las fracciones; pero como hay una infinidad de distancias ó longitudes que es necesario tomar á menos de un metro (necesidad evidente cuando se trata de objetos que no llegan á un metro de longitud) ha sido preciso dividir y subdividir la unidad principal de las medidas, y aquí es donde se descubre una de las mayores ventajas del nuevo sistema.

Por unidades, decenas, centenas ó decenas de decenas &c., que son diez veces mayores de derecha á izquierda, y diez veces menores de izquierda á derecha, contamos en nuestro sistema de numeracion, y á él está ajustado el nuevo de medidas francesas.

Dividióse primero el metro en diez partes, esto es, en *decímetros*; despues el decímetro en otras diez partes que son décimas de décimas ó centésimas del metro, que son los *centímetros*; despues este centímetro tambien en diez partes que son las décimas de centímetro, ó décimas de centésimas ó de centímetros, es decir, milésimas de metro, que son los milímetros, y asi progresivamente.

Por la misma razon que es de la mayor importancia el tener unidades de medidas pequeñas para los objetos de pequeña dimension y distancias cortas, es igualmente ventajoso el tener unidades grandes para medir grandes dimensiones y grandes distancias.

Se ha tomado una longitud de diez metros para formar la medida llamada *decámetro*.

Una longitud de diez decámetros, ó diez veces diez metros, ó cien metros para hacer un *hectómetro*.

Una longitud de diez hectómetros, ó diez veces cien metros, ó mil metros para hacer el *kilómetro*.

Una longitud de diez veces mil metros, ó diez mil metros para hacer el *miriámetro*.

Diez miriámetros igualan á un grado centígrado de la tierra (1), es decir, á la centésima parte de la distancia del polo al ecuador medida en un meridiano.

(1) *La division centigrada es la del cuarto de círculo en cien grados, del grado en cien minutos, y del minuto en cien segundos, tal como la ponemos aquí.*

El grado latitudinal (1) de la tierra es igual á diez miriámetros.

El minuto es igual al kilómetro.
El segundo igual al decámetro.
El tercero igual al decímetro.
El cuarto igual al milímetro.

Por consiguiente desde el milímetro hasta la vuelta entera de la tierra, segun lo hemos esplicado en la *Geometría leccion 3.ª* al tratar del círculo, todas las medidas usuales de nuestros caminos y de nuestros mas mínimos trabajos no forman mas que un sistema.

Por esta mera esposicion se comprende la sencillez que han de proporcionar estas felices coincidencias en muchas operaciones de navegacion, de topografía ó de geografía combinadas con las observaciones astronómicas.

La inmensa ventaja del nuevo sistema de medidas, es de prestarse con suma facilidad á todas las operaciones de nuestra aritmética. Una longitud cualquiera de miriámetros, de kilómetros, de hectómetros, de decámetros y de metros, puede y debe escribirse colocando de izquierda á derecha todos los números á continuacion unos de otros, como las unidades, las decenas y las centenas de un mismo número.

Por consiguiente, si estos nombres sacados del griego, cansan la memoria, no hay mas que despreciarlos, no acordarse de decámetros, hectómetros &c., y hablar solo de decenas de metro, centenas de metro &c., pues asi subsistirá igualmente el sistema.

Las fracciones de metro, el decímetro, centímetro, milímetro &c., se escriben como fracciones decimales

(1) *Como no todos los grados son iguales, se ha tomado la longitud de los grados medios medidos desde las islas Baleares hasta la isla de Setland al norte de Escocia.*

á la derecha de los metros (1) y se prestan al cálculo con tanta facilidad como los números enteros.

Pocos franceses habrá que no hayan hecho uso del antiguo sistema de medidas, é ignoren cuán fastidioso era, y cuán entretenida y sujeta á errores su division. Una toesa de seis pies, un pie de doce pulgadas, una pulgada de doce líneas, una línea de doce puntos; son divisiones que no se avienen de ningun modo con el órden decimal de nuestra aritmética: divisiones y subdivisiones que con el nombre de *partes alícuotas* piden cálculos tan complicados que asustan á los jóvenes y exigen años de enseñanza por maestros de escuela ineptos. Ahora en pocas semanas se puede enseñar á la juventud estas operaciones de modo que se puedan aplicar á las nuevas medidas.

Estas ventajas del nuevo sistema, son las mismas respecto de las demas clases de medidas de que nos falta hablar. Parece que debian adoptarse por aclamacion, si no en todos los pueblos al menos en el pueblo francés, que deberia considerarlo como un monumento nacional. Pero preocupaciones de circunstancias y dificultades, hijas de los hábitos, se han opuesto largo tiempo á su introduccion.

Del metro, segun acabamos de ver, se derivan todas las demas medidas de longitud, y del mismo se derivan todas las medidas de superficie, de volúmen, de peso, &c.

Medidas de superficie. La unidad fundamental de estas medidas es el *metro cuadrado.*

Un cuadrado de diez metros de largo y otro de diez de ancho, el cual presenta de consiguiente diez hileras de diez metros cuadrados, ó cien metros cuadrados, (Geometría leccion 6.ª) es lo que se llama un *area.*

(1) *Separando con una coma las fracciones y los enteros, asi*: 5 $^{met}_{,}$ 4 *quiere decir cinco metros y cuatro décimas de metro.*

Un cuadrado de diez areas de largo y diez de ancho, presenta diez órdenes de diez areas cuadradas, ó cien areas, y es lo que se llama *hectárea* que sustituye al antiguo *arpent*, asi como el area sustituye á la antigua *percha.*

Medidas de capacidad. El metro cúbico, llamado *estere* es la unidad de volúmen ó de capacidad.

Un cubo que tenga un decímetro en todos sentidos, es decir, un decímetro cúbico, es la milésima de un metro cúbico.

Para facilitar las operaciones del comercio y de las artes se fabrican vasos, cuyo interior contiene un decímetro cúbico, y se llaman *litras*, que se usan para medir líquidos, y sólidos en grano ó en polvo.

Un vaso cien veces mayor que la litra, ó que contiene cien litras se llama *hectolitra*, lo mismo que el hectómetro, es la medida de cien metros.

En las cantidades pequeñas se subdivide la litra en diez *decilitras*, ó cien *centilitras*, ó mil *mililitras* &c., lo mismo que el metro, que contiene diez decímetros, cien centímetros, ó mil milímetros.

Esta cabal analogía entre las subdivisiones de las varias medidas y sus denominaciones, es muy favorable á la memoria, porque facilita el que las recordemos por llevar en sí mismas su significacion.

Las tres clases de medidas que acabamos de indicar podrian llamarse medidas geométricas, porque son suficientes para medir todo lo que forma el objeto de la geometría pura, pero es menester otras medidas para la ciencia y las artes mecánicas.

Medidas de mecánica: *Pesas.* Todos los cuerpos de la tierra estan impelidos hácia el centro del globo, y se acercan en efecto cuando no se les opone ningun obstáculo, bajando, ó como se dice, cayendo. La fuerza total que impele á caer un cuerpo que está en reposo se llama *peso*: así que, dos cuerpos tienen el mismo peso cuando la fuerza total que los impele á caer hácia el centro de la tierra es igual.

Se comparan ó se valuan los pesos de los cuerpos con el auxilio de unas máquinas de que hablaremos detenidamente. Por medio de estas máquinas se averigua si dos cuerpos tienen ó no tienen un mismo peso.

La *grama* es la unidad de medida á que se refiere el peso de todos los cuerpos.

10 gramas hacen un *decagrama*,
100 gramas una *hectograma*,
1000 gramas un *kilograma*,
10000 gramas un *myriagrama*,

que son la misma clase de palabras compuestas con que hemos espresado las medidas mayores, sacadas del metro y de la litra.

El kilograma sirve para pesar los cuerpos de un peso comparable al de los objetos que podemos manejar fácilmente.

100 kilogramas forman el quintal métrico, y 1000 kilogramas forman la medida conocida en la marina con el nombre de *tonelada*.

La grama y sus divisiones sirven para pesar objetos muy pequeños, como son los de platería, química, farmácia &c. Subdivídese en diez decigramas, en 100 centigramas, en 1000 miligramas.

Para referir las medidas de peso á las medidas de dimension, se ha tomado por valor del kilograma el peso de un decímetro cúbico, ó una litra de agua pura, reducida á su mayor densidad aminorando la temperatura tanto cuanto sea necesario.

De este modo en todos los lugares de la tierra, teniendo sólamente un metro, ó una litra, ó un estere, ó un kilograma, se pueden encontrar todas las demas clases de medidas, con tanta exactitud como facilidad.

La moneda es una medida usada en las artes, la cual no podemos pasar en silencio.

La unidad de la moneda es el *franco*, que se divide en diez partes, llamadas *décimos*, en cien partes, llamadas *céntimos*, y en mil partes, llamadas *milésimos*. Como cuarenta piezas de cinco francos pesan un kilograma, las medidas monetarias se reducen á las demas medidas del nuevo sistema.

Modo de medir los valores de la moneda por la mecánica. Considerada la moneda como representante de todos los valores, puede considerarse tambien como medida de las fuerzas empleadas en las operaciones de las artes.

No conozco, decia el célebre Montgolfier, mas fuerza que la que se paga; es decir, que tomaba la moneda por medida de la fuerza empleada en producir un efecto cualquiera. Por ejemplo, un hombre de cierta fuerza, empleado en llevar cierto peso á un metro de distancia, recibe un franco; y otro de mas fuerza, ó que trabaja mas tiempo ó mas aprisa, lleva dos veces el mismo peso á la misma distancia, y recibe dos francos: estos dos francos representan una *fuerza útil* doble. He aqui como se mide la fuerza por el dinero.

Supongamos ahora que viene otro hombre que con una máquina cualquiera puede transportar tres veces el mismo peso, sin gastar mas fuerza que el obrero que recibe un franco por llevar solo una vez este objeto á la misma distancia. El obrero que emplea la máquina recibirá tres francos, aunque tal vez no ha empleado mas fuerza que el que solo recibe un franco. Por manera, que para producir el mismo efecto, seria necesario que el uno emplease tres veces mas fuerza que el otro.

A los ojos de Montgolfier, estos dos hombres que han producido el mismo efecto útil, han proporcionado la misma cantidad de *fuerza útil*, y deben recibir la misma suma de dinero, aunque el uno haya empleado tres veces mas fuerza que el otro.

El problema que ha de proponerse el mecánico es calcular todos los movimientos, todos los transportes, todas las operaciones de las artes, de manera que se pierda la menor cantidad posible de fuerzas; y por consecuencia, de manera que con una cantidad dada de fuerzas se logre la mayor suma, precio legítimo del mayor efecto útil.

La fuerza se nos manifiesta, no solo por equilibrios obtenidos por medio de pesos que midan esta fuerza, sino por movimientos cuya duracion es menester medir.

No intentaré definir el tiempo y la duracion, porque mis definiciones no darian una idea tan clara como la que cada uno tiene formada de uno y otro.

Los cuerpos que corren espacios iguales en tiempos iguales pueden servir para medir la duracion, pero es casi imposible hallar estos cuerpos en la naturaleza. No obstante, como los hombres que han observado el aspecto del cielo, han notado que el sol vuelve con relacion á cada *punto* de la tierra en un mismo plano vertical (1), á la mitad de cada dia y de cada noche; dividieron este tiempo en doce partes, á las cuales llamaron *horas*, la hora en sesenta minutos, el minuto en sesenta segundos, y asi progresivamente.

Esta medida basta para el uso comun, pero se necesita otra para las ciencias exactas, como la astronomía y geometría; y para ciertas artes como la navegacion, porque todos los dias del año no son iguales entre sí.

El astrónomo toma por unidad la longitud media de todos los dias del año, despues subdivide estos dias astronómicos en horas, minutos, segundos &c. El tiempo estimado con estas últimas medidas se llama *tiempo medio*.

Al formar el nuevo sistema de pesas y medidas se adoptó para la division del año el sistema de Egipto y de Atenas, colonia de Egipto: descomponíase el año en 12 meses, y el mes en 3 décadas de á 10 dias; en cada uno se añadian 5 dias, complementarios á los 360 de las 36 décadas, y cada 4 años un 6.° dia complementario, que daba 366 dias del año bisiesto.

(1) *El plano del meridiano dirigido de norte á sur.*

Este sistema era mucho mejor que la amalgama incoherente y estraña de los doce meses de 28, 29, 30 y 31 dias, y las 52 semanas del calendario gregoriano; pero como todas las religiones cristianas refieren á la division semanal las alternativas del trabajo y descanso, perjudicaria el obligar á que se tomase el término de las *décadas* por los dias de descanso y fiestas religiosas. Hubiera sido necesario dejar los dias feriados como estaban antiguamente, y no emplear la division decadaria mas que en el comercio y la contabilidad, en cuyo caso se hubieran encontrado menos dificultades para su adopcion.

La division del dia en diez horas, de la hora en cien minutos, y del minuto en cien segundos, no fue mejor conservada que la de las décadas y doce meses iguales.

Entre las muchas dificultades que se opusieron á la introduccion de las demas partes del sistema de pesas y medidas, apuntaremos las faltas de los administradores, que al hacerlo adoptar, valiéndose de su autoridad, temian que se les escapase de las manos un poder efímero, y se apresuraron á mandar lo que ante todo era preciso saber ejecutar.

Una de las primeras operaciones debió haber sido la refundicion general de todas las monedas que tienen por unidad la libra tornesa, en monedas que tuviesen el franco por unidad, pero se han gastado mas de quince años sin haber hecho del todo la refundicion de las monedas de plata ni de las de oro (1).

(1) *En el soto del antiguo Bas-Poiton se reciben hoy mismo las piezas de seis libras por seis francos, en los mercados y en las ferias. Me han asegurado que los comerciantes de Chollet no quieren pagar mas que en libras tornesas por francos las compras que hacen á los fabricantes en pequeño, los cuales con este motivo se quejan inútilmente. Lo mas notable es que las libras tornesas, que no debieran ya correr, las*

Los que establecieron el nuevo sistema de medidas cometieron tambien la falta de obligar á que se pusiese en práctica en todo el reino, sin hacerse cargo de que no se habia hecho todavia un número suficiente de medidas de cada especie, lo cual imposibilitaba la pronta ejecucion de la ley.

Los vendedores á quienes se obligaba con rigor á vender con las nuevas medidas, se veian en la precision para satisfacer á los compradores, de vender con las antiguas, porque los compradores querian una *ona* de paño y no un *metro*; dos libras de pan y no un *kilograma*; una *pinta* de vino y no una *litra*; y esto es lo que hacian frecuentemente señalando las medidas nuevas sobre las antiguas, ó bien reduciendo unas á otras. El tiempo ha hecho desaparecer algunos de estos inconvenientes.

Hoy en casi toda la Francia se comprende y se sigue el nuevo sistema monetario.

Los habitantes de París y del Nivernés hacen en la actualidad uso esclusivo del stere para medir la leña.

El uso del kilograma le adoptaron generalmente las empresas de acarreo, y el comercio.

Los obreros saben bien el valor de la litra que es la medida de los líquidos. Sin embargo quedan, respecto de ciertas medidas de capacidad, molestas escepciones que debieran desaparecer (1).

---

proporcionan los empleados del fisco, que hacen con ventaja suya este comercio ilícito.

Publicando estos abusos llegarán á noticia de la autoridad, cuyo celo por el bien público se empleará en que aquellos cesen.

(1) *Por ejemplo, los aguardientes se cuentan por veltas, en vez de contarse por litras en muchas operaciones importantes. El boletin de comercio, que refiere exactamente el precio de las mercaderías de las diferentes plazas, continúa señalando los aguardientes dobles y sencillos en el depósito de París por 27 veltas (216 pintas antiguas). Este método conserva la costumbre del cálculo de esta clase de operacion, y favorece en uno por ciento al comerciante.*

Los géneros de Marsella se cuentan tambien, segun el mismo periódico, por la cantidad de kilogramas, correspondiente á las cien libras del pesillo antiguo de esta plaza del Mediodia.

Aun podria citar otros muchos ejemplos relativos á los vinos, aceites y cerbeza que se venden en París mismo por pintas y por barriles, en vez de litras y hectolitros.

Despues de haber hecho una narracion exacta de la ignorancia y de las preocupaciones, estudiemos otras dificultades que nada tienen de comun con las opiniones de los hombres, y nacen de la naturaleza misma de las cosas. Esto ilustrará algo acerca de los medios para que se adopten del todo las nuevas medidas.

Es siempre penoso y difícil abolir un sistema de medidas establecido desde mucho tiempo, y en los primeros dias de la innovacion parece que hay mas inconvenientes que ventajas: hé aqui cuáles son las dificultades.

Todos los objetos empleados en nuestras artes y en la sociedad, las máquinas, los instrumentos, las herramientas, los muebles y los edificios se componen de partes cuyas dimensiones, peso y volúmen han sido determinadas por la esperiencia, mas bien que por el raciocinio y el cálculo: poco á poco retiene la memoria los números que representan estos volúmenes, pesos y dimensiones referidos á la unidad de medida. Cuando el artista no ilustra sus conocimientos con la teoría, toda su ciencia se reduce á saber de memoria las magnitudes de todas especies, y asi mudando la unidad de medida, pierde enteramente su talento numérico. Para tomar la menor dimension necesitará hacer reducciones y cálculos, perder tiempo y aumentar su trabajo, y la pereza es muy elocuente abogado entre los hombres. Hay mas, nuestros pensamientos son inseparables de la lengua que nos es familiar, y aun despues de haber aprendido otra no podemos en mucho tiempo seguir el hilo de las ideas, imaginar, comparar y reflexionar en este nuevo idioma sin pasar mentalmente por el primero. Esta observacion cualquiera puede hacerla. Ahora bien, sucede con las operaciones de los sentidos lo mismo que con las del entendimiento. A fuerza de emplear una unidad de medida retiene su idea la memoria, es decir, ve en el espacio la verdadera magnitud de esta unidad, aprende á aplicarla mentalmente á los objetos que se representa; y es sin duda un gran paso en la práctica de las artes el haber adquirido esta idea, porque acostumbra el ojo á la exactitud geométrica tan necesaria en todo y para todo.

Se ve, pues, que forzando al que está familiarizado con la idea de ciertas medidas, á usar otras unidades, sino es mas que un hombre comun, es decir, un hombre como todos, esceptuando algunos hombres estraordinarios, pierde la memoria de las estensiones. Pues veía la estension de un pie y habria visto la longitud de tres pies, aun añadiendo casi una pulgada, se formaria idea exacta de esta longitud, y sin embargo no la percibirá como una unidad. No podrá aplicarla instantánea y mentalmente á los objetos y reducirlos á su medida, y no empleará el metro y sus subdivisiones sino calculando cuántos pies tendrá la dimension de que se ocupa, y despues cuántos metros compondrán estos pies, lo cual es largo y penoso.

No obstante, continuada algun tiempo esta operacion por un espíritu observador, no podrá menos de producir el tino respecto de las nuevas medidas. Pero ¡qué corto es el número de hombres que procuran adquirir un bien futuro por cercano que esté, á costa de sacrificios ciertos y presentes.!

Acabamos de notar el importante papel que hace la memoria en las operaciones de las artes. Para esto se

ha procurado como mas sencillo y mas fácil poner todos los objetos en relacion elemental con las medidas adoptadas, espresando en números redondos las dimensiones que se emplean mas comunmente en las artes. Todos conocen que hombres que en su vida hayan calculado la fuerza del menor pedazo de hierro, piedra ó madera, no sabrán si es mejor que tenga 12 pulgadas ó $12\frac{1}{4}$, ó $12\frac{1}{2}$, ó 13 pulgadas. ¿Cómo, pues, podrán descubrir á primera vista la oportunidad de tal ó tal dimension con la diferencia de menos de un dozavo.? Esta exactitud es muy superior á las operaciones á que están acostumbrados para que puedan conseguirla. Así la pieza que emplean deberá tener un pie justo, y será la dimension mas cabal por ser la mas sencilla. Ademas sucede en el órden regular que pasan siempre de aprendices á maestros, y en la práctica de las artes como en los usos del trato civil, el tiempo lo autoriza todo. Mas cuando se muda el sistema de medidas, los números redondos en el primer sistema no lo son en el segundo, y el que desea dar á una pieza un pie de longitud, y ha visto á su padre ó á su maestro darle un pie, ¿cómo ha de darle nada menos que un metro dividido por tres unidades mas 0,1144 y 0,296 de 0,144 del pie.? Le pareceria un trastorno de los principios de su arte, si alguno apreciando las verdaderas dimensiones de la misma pieza, le decia, por ejemplo: no son 12 pulgadas reducidas á metros lo que se le ha de dar matemáticamente; la práctica alumbrada por la teoría enseña que han de ser tres decímetros, ó tres decímetros y medio &c.

Entre los autores que han empleado en sus escritos las nuevas medidas, algunos presentan los valores de los objetos en medidas nuevas, y añaden los mismos valores en medidas antiguas; y como estas son todavía mas familiares á la mayoría de los lectores, resulta que al servirse de sus obras, el entendimiento que se detiene naturalmente en lo que le cuesta menos trabajo, fija únicamente la atencion en estas últimas.

Ofrécesenos otra razon que merece notarse: como la memoria no es mas que una ciencia de analogía, retenemos mucho mejor los valores espresados en la lengua usual. Por ignorar esta razon hemos visto tantas personas figurarse que las nuevas medidas eran en sí mismas mas difíciles de retener que los mismos valores espresados con las antiguas denominaciones; y á la verdad todo se reunia para fortificar esta ilusion. Cuantos mas valores se espresen con números simples ó redondos en las antiguas medidas, tanta mas complicacion presentarán por este mismo motivo las nuevas medidas, como que son incomensurables con las otras. La comparacion involuntaria que hace el lector de estos valores, ¿será por ventura favorable al sistema mas ventajoso?

Otros autores han empleado esclusivamente en sus escritos las nuevas medidas, pero á ejemplo de los primeros, habian hecho, ó por mejor decir, les habian hecho todas las operaciones primitivas con medidas antiguas: esto daba márgen á que en vez de sacar por resultado números redondos, se sacaban fracciones aproximadas hasta un grado ridículo, por pasar de la exactitud necesaria en cada clase de operaciones.

Hubiera, pues, convenido en todas las artes, en el momento de la institucion de las nuevas medidas, formar tablas nuevas en números redondos, segun estas mismas medidas nuevas, las cuales tablas habrian ofrecido los datos y los resultados mas esenciales, de los que las otras no son mas que consecuencias necesarias. Entonces hubiera ofrecido tantas ventajas la adopcion del nuevo sistema, y tan pocos inconvenientes, que se hubiera completado al cabo de muy corto tiempo.

Es menester añadir algunas observaciones para poner en claro estas ideas. Cuando las artes han hecho grandes progresos, puesto que están estrecha y necesariamente unidas entre sí, y pocas hay que no tomen de otras ó instrumentos ó primeras materias, y muchas las que no tienen mas objeto que satisfacer esta nece-

sidad, las cuales son las que mas debieron tenerse en consideracion, hubiera sido necesario apresurar por todos los medios posibles la introduccion de las nuevas medidas, transformando todos los valores, todas las dimensiones de sus productos en números redondos con relacion á estas medidas. Por de pronto habria que hacer las matrices, hileras y moldes de toda especie, ó al menos aguardar su fin natural, haciendo solo los que estubiesen en armonía con el nuevo sistema; habria que hacer los telares de manera, por ejemplo, que se pudiesen tejer en ellos telas de 4, 5, 6 ó 7 decímetros de ancho. En una palabra, hubiera sido necesario que los introductores del nuevo sistema descendiesen con paciencia hasta los mas pequeños pormenores de las artes. Este trabajo era sin duda grande, y mas útil que lucido, pero tambien los hubiera recompensado el buen éxito, y el honor hubiera recaido en los mismos autores del sistema.

Aclaremos mas estas reflexiones con ejemplos palpables. Si las nuevas medidas debian adoptarse en alguna parte es ciertamente en las obras públicas, porque se confian á hombres de instruccion que por su profesion están dispuestos á contribuir á que se realicen los designios del gobierno. Examinemos hasta qué punto han seguido estas miras respecto del objeto que nos ocupa.

Como los ingenieros militares y los de caminos y canales obligados por la naturaleza de su profesion á hacer ó á verificar de continuo un gran número de cálculos, ganaban demasiado desechando un sistema que los tiene tan irregulares y complicados, para no adoptar prontamente otro sistema uniforme y sencillo, segun es el de las medidas decimales, rehicieron por entero la tabla de los valores de sus trabajos, reducidos á las nuevas medidas, y no conocen ya otras.

Los ingenieros marinos no han hecho tantos progresos hácia esta mejora, pues solo al cabo de cuatro años presentaron una tabla de las dimensiones de la madera segun las nuevas medidas; mas á pesar de los innumerables defectos de este primer trabajo, como la cubicacion de la gran cantidad de madera necesaria para las fabricaciones navales, es una operacion tan larga cuando se hace por pies, pulgadas &c., al paso que en las cubicaciones métricas son en estremo sencillas, los pedidos de maderas se han hecho por medidas nuevas en los puertos del estado. Mas para aplicar las nuevas medidas á la fabricacion de las naves, era necesario un trabajo mucho mayor, porque se necesitaba rehacer en números redondos la cuenta por menor de los navíos, fragatas, y en general de las naves de todas clases, espresando menudamente las dimensiones reducidas de todas las piezas de que se compone cada nave. Finalmente, era necesario estender este inmenso trabajo á todas las artes de la marina, artes cuyos productos son otros tantos elementos de las operaciones del ingeniero: la arboladura, la járcia, las poleas, el velámen &c.; y como no se han ejecutado estas operaciones preliminares, ha resultado que se han empleado por largo tiempo en nuestros puertos los metros graduados en pies, en los cuales solo se consideraban los pies. Estas medidas duplicadas son la imágen de los escritos de que hablamos hace poco, porque todas las dimensiones se encuentran en ellos por los dos métodos, de suerte que nunca se consultan mas que las antiguas.

Mas desde que un antiguo alumno de la escuela politécnica, el marqués de Clermont-Tonnerre, dirigió el departamento de marina y de las colonias, se hizo una mudanza notable en este punto. Resolvió que en lo sucesivo no se hiciese uso en los puertos ni en los arsenales de las antiguas medidas, y mandó romper las que tenian por un lado las divisiones del sistema antiguo y por otro las del nuevo.

He aquí los beneficios lentos, pero ciertos, de las grandes instituciones que dan á la juventud una vasta y sólida instruccion, ejercen una influencia que crece

con los años, y los alumnos educados asi, adquieren y aseguran un bien con que casi no contaban.

Otro de los casos que nos mostrará mas particularmente los inconvenientes que hemos mencionado últimamente es la artillería, en la que el elemento de que dependen todos los demas, es el peso de la bala de cañon ó su calibre: las dimensiones de las piezas, de sus ajustes, de los arcones y sus cargas, todo es consecuencia necesaria de este primer dato. Pero el peso de las balas de cañon, espresado en números redondos, con relacion á las antiguas medidas, no lo seria con relacion á las nuevas. ¿Cómo llamar, pues, á los cañones de 24 libras de bala, por ejemplo? ¿Se les llamará cañones de 12 kilogramas? Pero sería tambien un error, porque 12 kilogramas son mas que 24 libras. Si se les llama piezas de á 11 kilogramas tambien será un error, pues 11 kilogramas son menos de 24 libras. Si solo se les llama piezas de 11 ó de 12, siendo falsa su denominacion, la carga y todos los datos establecidos por el peso serán tambien falsos.... Estas dificultades son mas aparentes que reales, porque una fabricacion mejor y mas exacta de las piezas y de las balas de cañon ha permitido aumentar el peso de dichas balas. Hoy escede este peso del número de libras indicado por su calibre, y asi se acerca mucho á los medios kilogramas el número de libras que espresa el calibre de los cañones y de las carronadas.

En el tiempo en que se introdujo el nuevo sistema se presentó la coyuntura mas favorable para hacer una mudanza general en la artillería. Cuando nuestro sistema militar tomaba un giro enteramente nuevo, cuando se necesitaba hacer mas máquinas, fundiciones y taladros que los que antiguamente habia, cuyas máquinas estaban por otra parte muy cerca de no poder servir para trabajos de una estension, y de una actividad sin ejemplo hasta entonces, ¿por qué no hacer los nuevos taladros para los calibres de 4, 6, 8 medios-kilogramas, en vez de hacerlos para los de 4, 6, 8 libras? Muy luego hubiera sido incomparablemente mayor el número de los nuevos cañones que el de los antiguos, y el inmenso y antiguo servicio que aquellos hacian, los hubiera inutilizado en poco tiempo, ejecutándose la mudanza de las medidas sin pérdida y sin esfuerzo. Si se temia la multiplicidad momentánea de calibres como resultado de esta innovacion, ¿habia mas que componer el armamento de algunas plazas y de algunos ejércitos con cañones antiguos, y dar solo á los demas cañones nuevos? Estas mudanzas es indudable que no se harian sin algunos transportes de piezas, pero pasando siempre las antiguas desde las plazas tranquilas á las amenazadas ó á los cuerpos activos, y las nuevas á los depósitos y parques de reserva, y á los lugares menos espuestos; y transportando siempre á las naves los antiguos calibres de marina, guarneciendo con los nuevos primero las costas y despues los parques de los puertos, el efecto natural de la guerra hubiera obrado por sí una mudanza que solo pareceria gigantesca á espíritus apocados.

¿Podrian hacerse todavía estas mudanzas? nosotros lo creemos así, pues los mismos medios conducirian con el tiempo á los mismos resultados: bastaria mudar convenientemente el diámetro de las terrajas, y el resto se haria por sí mismo. Pero, que se ejecute ó nó tal mudanza, nada impide que se introduzcan en la artillería las nuevas medidas de estension (1), que nada tienen de comun con las de pesos. Los calibres de las piezas de 4, 6 y 8 libras que dán números redondos de pulgadas, no los darian menos de *centímetros*: y lo mismo sucede con las demas dimensiones. Seria, pues, un interesante trabajo el que se tomase cualquier oficial

(1) *Desde la época en que se presentaron por primera vez estas investigaciones en el curso del Conservatorio, ha empezado la artillería de tierra esta importante innovacion.*

de esta arma distinguida, apreciando como mecánico y como geómetra todas las medidas antiguas sancionadas por la rutina, y reduciéndolas á números sencillos de las nuevas; y esta no seria una ocupacion ingrata ni estéril. Mejoras inesperadas resultarian ciertamente de esta útil empresa; y con el tiempo las ventajas naturales que ofreceria esta grande obra obligarian á todo el ejército á adoptarla, y tarde ó temprano se efectuaria la misma correccion de los calibres para el progreso de las operaciones de la artillería.

Cuando en todos los ramos del servicio público se hubiesen adoptado sin escepcion las nuevas medidas, se encontrarian naturalmente introducidas en los demas trabajos públicos y en todas las artes civiles enlazadas con ellos por relaciones necesarias, esto es, con casi todas las artes matemáticas. Las artes químicas se sirven ya de ellas con ventaja; el gran número de hombres dedicados á estas diferentes artes, propagarán poco á poco los conocimientos que hayan adquirido, y el tiempo acabará de vencer los demas obstáculos.

Despues de formada alguna idea de las dificultades que ofrece la mudanza del valor de las medidas, es natural que nos ocupemos tambien en las dificultades de una mudanza de nomenclatura; y este será el objeto de las primeras páginas de la siguiente leccion (1).

(1) *Los inconvenientes y perjuicios que de esta mudanza de medidas los espone el autor, y aun pudieran añadirse otros; y todos ellos se hubieran evitado si se hubiera atendido á que para los usos comunes no traia ventajas esta novedad. Al fin se ha desterrado de dichos usos el de la division decimal, y adoptado lo que llaman* sistema usual de pesas y medidas. *De todo ello hablaremos en las notas que se pondrán al fin.*

LECCION SEGUNDA.

Continuacion de las medidas. Leyes primeras del movimiento y sus aplicaciones á las máquinas.

Hemos visto cuán fundadas eran las razones que hicieron elegir las denominaciones sacadas de las lenguas antiguas, que por ser muy sábias eran incomprensibles á la multidud. ¿Por qué, se decía, servirse de nombres que solo entienden los doctos y eruditos? ¿No son bastantes las dificultades reales de toda mudanza en la magnitud de las medidas, sin añadir tambien los inconvenientes de una nueva nomenclatura? Ademas, esta nomenclatura ¿no se hace para la generalidad de los hombres? Cuanto mas ingeniosa es la idea de espresar los multíplos y los submultíplos con palabras compuestas de dos partes, que indican la especie y la modificacion de la unidad, tanto mas dificil será para la muchedumbre, pues confundirán siempre esta multitud de palabras, milímetros, centímetros, decímetros, cuya terminacion es la misma. ¿Quién creería, sin embargo, que unas objeciones tan frívolas hayan usurpado el derecho á la razon en los países mismos que debian honrarse de haber fundado el mas hermoso sistema de medidas?

Por otra parte, si nosotros no hacemos algunos esfuerzos en favor del sistema que hemos formado para conservarlo y transmitirlo á las demas naciones ¿querrán éstas admitir sin oposicion un sistema que no conocen?

Pero á estas razones que no tienen peso, sino entre un corto número de personas, se pueden añadir las siguientes. Si no se muda el nombre de las medidas que se desechan ¿cómo se distinguirán los valores espresados primeramente con las antiguas y déspues con las nuevas? ¿Será escribiendo siempre *medidas antiguas*, *medidas nuevas*? Pero ya la pereza nos ha hecho acortar la mitad de los nombres de las medidas. Hay mercaderes franceses que no quieren tomarse el trabajo de decir un kilograma, y le llaman un *kilo*; de suerte, que haciendo lo mismo con el kilolitro y el kilómetro, se convertirán igualmente en *kilos* por estos abreviadores, los que al fin no sabrán lo que han querido decir; pero como somos tan consecuentes, estas dificultades no nos arredran, y nos contentaremos solo con indicar, bajo el nombre de *pie*, el pie antiguo y el tercio del metro. Así dejaremos á la posteridad la incertidumbre que se halla en las medidas de los antiguos, como sucede, por ejemplo, cuando nos hablan de estadios, que habia cuatro diferentes, que ordinariamente no tenian cuidado de distinguir, por lo que no sabemos á cuál se referian las distancias que nos citan, pues tal es el bien que tratamos de hacer á nuestros nietos.

¿Pero es cierto que una nomenclatura, compuesta de una quincena de palabras, sea tan dificil de retener? ¿No se diría que nos complacemos en exagerar las dificultades para tener el placer de decir que son invencibles? Un siglo hace ¿los progresos de las ciencias no han introducido rápidamente un sin número de sus locuciones tambien derivadas del griego en la lengua comun, y aun en el idioma del pueblo? ¿Quién no conoce el barómetro y el termómetro? ¿Son por ventura estos nombres mas fáciles de retener que el de kilómetro.?

Aun entre los niños ¿cuáles son los que no retienen los nombres de *cosmorama*, de *diorama*, de *panorama*, de *georama*, y de *fantasmagoría*? y ¿quién es el que no tiene una idea muy clara y muy distinta de ellos? ¿Qué facilidad mayor presentan estas palabras que las de metro, decímetro &c.? No obstanto, las primeras indican solamente imágenes, sombras que cambian, y que son fugitivas, en tanto que las últimas indican longitudes materiales, que se pueden tener á la mano, palpar, conocer bien una vez, y jamás varían. Confesémoslo, nosotros somos tan pensadores en nuestros placeres fútiles, como incapaces de esfuerzos de atencion en lo que interesa á nuestras necesidades efectivas.

Pero sin ir á buscar nombres de objetos aislados, y por esto mas fáciles de retener, ¿no tenemos todavía á la vista un gran ejemplo de una nomenclatura inmensa, adoptada por toda la Europa? Hablo de la nomenclatura química. Hoy cualquiera aprendiz de boticario conoce las principales denominaciones. Sin embargo, ¿qué diríamos de los químicos franceses, si para hacerse mas inteligibles á los droguistas y á los barberillos de los lugares, hubiesen desechado las espresiones mas útiles de la ciencia? ¿Si por su parte los alemanes, los italianos, los ingleses, hubiesen elegido denominaciones peculiares de su idioma? En lugar de no tener mas que una sola lengua científica, hubiera habido veinte, todas ininteligibles la una para la otra. Los químicos han tenido ideas mas exactas y generales rehaciendo una inmensa nomenclatura, y haciéndola adoptar en el espacio de diez años entre todos los pueblos que cultivan las ciencias naturales. Añadamos que estos sábios laboriosos no han temido refundir enteramente su ciencia, y que esto mismo debiera practicarse en la ciencia de las medidas de toda especie, lo cual ya lo hemos dicho y lo repetimos.

Y del mismo modo que considerando de nuevo todos los fenómenos, para determinar con exactitud las proporciones de los principios que los producen, este trabajo ha llegado á ser para los químicos el orígen de un gran número de descubrimientos, asi tambien formando tablas exactas de las cantidades de toda especie que espresan los datos de las artes, se prepararian y producirian una infinidad de mejoras, se someterian al cálculo un sin número de prácticas, y estas tareas llegarian á ser un manantial inagotable de progresos futuros.

PRIMERAS LEYES DEL MOVIMIENTO.

La observacion de los cuerpos en movimiento sobre la tierra y nuestro sistema planetario, nos han dado á conocer muchos principios generales que importa presentar aqui para servir de basa á nuestras esplicaciones subsiguientes.

1.° Un cuerpo en reposo sin que nada le impela á moverse, permanece eternamente en reposo. Permanece en él porque en este caso no hay razon alguna para que se mueva en un sentido mas bien que en otro.

Asi cuando un cuerpo pasa del estado de reposo al de movimiento, es preciso que una causa cualquiera le haya hecho mudar de lugar, le haya obligado á moverse á un lado mas bien que á otro; pues esta causa, este agente es lo que llamamos *fuerza*. El objeto de la mecánica es conocer como obran las fuerzas sobre los cuerpos sin relacion á otros, ó dependientes unos de otros en sus posiciones y en sus formas.

2.° Cuando un cuerpo empieza á moverse en cierta direccion y con cierta velocidad. Si ningun obstáculo altera este movimiento le continuará en la misma direccion, conservando la misma velocidad, esto es, corriendo espacios iguales en tiempos iguales. Este movimiento se llama *movimiento uniforme*.

Siempre que un cuerpo puesto en movimiento en cierta direccion y con cierta velocidad, muda esta velocidad ó esta direccion, la esperiencia enseña constantemente que esta alteracion proviene de la accion favorable ó contraria de una nueva fuerza.

Del mismo modo que un cuerpo inanimado *inerte* es incapaz de darse un movimiento que no tiene, asi tambien es incapaz de acelerar un movimiento que ha recibido. De aqui resulta que cuando un cuerpo inanimado está en movimiento, continúa siempre este movimiento, es decir, que corre en la misma direccion espacios iguales en tiempos iguales. La velocidad es la relacion entre el espacio corrido y el tiempo. Por ejemplo, tomando el minuto por unidad de tiempo, y el metro por unidad de longitud, se dirá: El cuerpo que corre un metro en un minuto se mueve con la velocidad **1**: el cuerpo que corre dos metros en un minuto tiene la velocidad 2: el cuerpo que corre tres metros en un minuto tiene la velocidad 3, &c.

La esperiencia nos enseña ademas otro hecho muy notable, y es que dos fuerzas aplicadas á un mismo cuerpo en la misma direccion (como dos caballos que tiran de un carruage, puestos uno detras de otro) producen el mismo efecto que una fuerza única, igual á la suma de las dos primeras y obrando tambien en la misma direccion. Esta fuerza única es lo que se llama la *resultante ó derivada*, porque proviene de las otras dos que se llaman las *componentes*; ó si pareciere mejor porque produce el mismo resultado que sus dos componentes.

Al contrario, cuando dos fuerzas obran en la misma direccion y en sentidos opuestos, el cuerpo se mueve como si estubiera animado de una sola fuerza *resultante*, igual á la diferencia de las dos fuerzas *componentes*, y dirigida en sentido de la mayor (*). Asi vemos que en las bajadas rápidas los carruageros desenganchan uno de los caballos de adelante y le enganchan detras del carruage para impedir que se precipite. En este caso la fuerza motriz en lugar de ser la de los dos caballos, no es mas que la fuerza del caballo de varas que tira hácia adelante, menos la del otro caballo que tira hácia atrás (*).

Del equilibrio. Si la fuerza que tira hácia atrás fuese igual á la fuerza que tira hácia adelante, la diferencia seria cero, el cuerpo no se moveria en sentido de la una ni de la otra, y habria lo que se llama *equilibrio*, esto es, *reposo forzado*: estado bien diferente del *reposo natural*, que subsiste cuando no obra ninguna fuerza sobre el cuerpo para impelerle á moverse.

Si se opone á la resultante de muchas fuerzas una

nueva fuerza igual y dirigida en sentido contrario á esta resultante, hay pues equilibrio: principio notable y fecundo que permite referir á las cuestiones de equilibrio las que tienen por objeto la investigacion de los resultados que producen el movimiento.

En lugar de considerar solamente dos fuerzas obrando en la misma direccion, podríamos considerar 3, 4, 5 &c.: en una palabra un número cualquiera; y entonces veríamos que para hallar la resultante, es preciso: **1.°** tomar la suma de todas las que tiran hácia adelante; y 2.° la suma de todas las que tiran hácia atrás. El cuerpo se moverá en el sitio en que obra la mayor suma, del mismo modo que si fuese empujado ó arrastrado por una sola fuerza igual á la diferencia de estas dos sumas (**1**).

Otro principio que importa grabar en la memoria es el siguiente: Si es preciso cierta fuerza para mover un cuerpo con cierta velocidad, esto es, para transportarle á una distancia dada en un tiempo dado,

---

(1) *Consideremos por ejemplo un carro tirado por ocho caballerias en hilera. Cuando todas estas caballerias estan puestas en un mismo sentido y direccion, anda el carro con la misma fuerza que si solo tirase una caballeria igual en fuerza á las otras ocho. Si despues el carretero desengancha tres caballerias para engancharlas detras del carruage y las hace tirar hácia atrás:* **1.°** *El movimiento total es el mismo que si no hubiese mas que una caballeria adelante, igual en fuerza á las cinco que quedan todavia, y que una caballeria detras, igual en fuerza á las tres que se acaban de enganchar: 2.° Este movimiento seria tambien igual al que se produjese con un solo caballo que tenga por fuerza la diferencia de los cinco que tiran delante á los tres que tiran detras; y es evidente que el movimiento se verificaria en el sitio donde tiran las cinco caballerias, si eran todas de igual fuerza.*

en el mismo tiempo la mitad de esta fuerza no llevará el mismo cuerpo mas que á la mitad de esta distancia: el tercio de esta fuerza no llevará el mismo cuerpo mas que al tercio de esta distancia; el cuarto de esta fuerza no llevará el mismo cuerpo mas que al cuarto de esta distancia, y asi sucesivamente en la misma proporcion.

Por el contrario, si suponemos constante la duracion del tiempo, el doble de la fuerza llevará el mismo cuerpo al doble de la distancia; el triple de la fuerza le llevará al triple de la distancia; el cuadruplo de la fuerza le llevará al cuadruplo de la distancia, y asi sucesivamente.

Cuando la fuerza es constante y la masa del cuerpo varía, hé aqui lo que sucede.

En el mismo tiempo la fuerza constante transporta una masa doble á una distancia subdoble; una masa triple á una distancia subtriple; una masa cuadrupla á una distancia subcuadrupla, y asi sucesivamente. De la misma manera la fuerza constante lleva la mitad del cuerpo á una distancia doble; el tercio del cuerpo á una distancia triple; el cuarto del cuerpo á una distancia cuadrupla, y siempre en la misma proporcion.

Asi vemos que las grandes masas son mas difíciles de mover que las pequeñas, y esta resistencia es cabalmente proporcional á la masa: de suerte que con la misma fuerza empleada en mover el mismo peso la resistencia es siempre proporcional á la masa. Hay pues en la materia una oposicion al movimiento y á la velocidad, oposicion directamente proporcional á la masa. Esta oposicion que es preciso vencer para poner los cuerpos en movimiento, se llama *inercia.*

La inercia se conoce bien cuando se comparan los esfuerzos que hay que hacer para mover cuerpos grandes y pequeños. Cualquier niño arroja lejos de sí una piedrecilla y los granos de arena, en tanto que los hombres mas robustos reuniendo todas sus fuerzas, apenas pueden mover pesos enormes: v. g. un gran trozo de mármol.

Por último, notemos aqui como una misma fuerza puede producir un mismo resultado por diferentes medios.

Yo puedo cortar el cuerpo que se trata de transportar en dos, tres, cuatro.... partes iguales y despues aplicar á cada una toda la fuerza. Si le corto en dos partes iguales, cada mitad será transportada dos veces mas veloz: luego las dos mitades serán transportadas en el mismo tiempo total. Si le corto en tres partes iguales, cada tercio será transportado tres veces mas veloz. Luego los tres tercios serán transportados en el mismo tiempo total, &c.

Supongamos ahora que tengo veinte pesos de igual masa, y haya que transportar cada uno á una distancia dada por veinte fuerzas iguales. Si reuno estos pesos dos á dos, tendré diez géneros de transporte en vez de veinte; pero los veinte cuerpos serán siempre transportados á la misma distancia en el mismo tiempo. Lo mismo sería si hubiese unido tres á tres, cuatro á cuatro.... los pesos para hacerlos tirar tambien por las fuerzas unidas tres á tres, cuatro á cuatro, &c.

Hé aqui por que (bajo el punto de vista de valuacion mecánica) es indiferente hacer transportar el mismo peso total por carros de uno, de dos, de tres, de cuatro.... caballos, siendo las cargas como uno, dos ó tres, ó cuatro.... El peso total siempre es acarreado á la misma distancia en el mismo tiempo. Esta es la razon porque las empresas de acarreo hacen pagar un precio fijo por kilograma de porte, sea que la carga pese muchos ó pocos kilogramas, á causa de que la fuerza total que es necesario emplear en el transporte es proporcional al peso total de la carga. Finalmente, esta es tambien la razon por que las empresas de acarreo pagan á los carreteros un mismo precio por kilograma, siéndoles indiferente que los carreteros empleen carros de uno, dos, tres ó cuatro caballos; porque el peso total que lleva cada carro, es proporcional á la fuerza total de los caballos que tiran del carro.

Para tener el gasto de fuerzas que exige un cuerpo transportado á una distancia dada, se valúa: 1.° por el peso del cuerpo; 2.° por la velocidad que hay que emplear en correr la distancia. El producto de esta valuacion representa la *cantidad de movimiento*.

El peso se valúa en kilogramas, y el tiempo en horas. Luego si un kilograma corre la distancia que se ha tomado por unidad en una hora, la cantidad de movimiento =1,

10, 100, 1000 kilogramas, corriendo dos veces la unidad de distancia en una hora, darán la cantidad de movimiento, representada por dos veces 1, 10, 100, 1000 kilogramas.

Me he detenido en estos ejemplos porque son propios para presentar, bajo un punto de vista elemental, las nociones que importa facilitar todo lo posible.

Antes de pasar adelante recapitulemos las leyes del reposo y del movimiento que acabamos de dar á conocer.

Todo cuerpo en reposo *permanece en él*, á menos que una ó muchas fuerzas no le soliciten á moverse.

Todo cuerpo en movimiento *persiste en él*, á menos que alguna fuerza no le detenga.

Todo cuerpo puesto en movimiento se mueve en línea recta, y corre espacios iguales en tiempos iguales, si alguna fuerza estraña no viene á alterar la constancia y la regularidad de este movimiento que se llama *uniforme*.

La *velocidad* es la relacion que se encuentra entre un espacio uniforme corrido y el tiempo empleado en correrle.

Cuando el tiempo empleado en correr un espacio es constante, la velocidad duplica, triplica, cuadruplica como el espacio, y tambien se hace subduplo, subtriplo, subcuadruplo; en una palabra, es directamente proporcional á este espacio.

Si el espacio corrido es constante, cuanto mayor es el tiempo empleado en correrle, tanto menor es la velocidad, y esto es una relacion inversa, es decir, que si el tiempo duplica, triplica, cuadruplica, entonces la velocidad subduplica, subtriplica, subcuadruplica, &c.

Si la velocidad es constante, el espacio corrido es directamente proporcional al tiempo, esto es, crece y decrece en la misma proporcion.

En los movimientos uniformes la fuerza es proporcional á la masa del cuerpo, multiplicada por la velocidad.

Si los cuerpos se moviesen sin esperimentar resistencia, como sucedería en un vacío perfecto, una vez dada la primera impulsion, continuarían moviéndose con la misma velocidad y la misma direccion.

Pero sobre la tierra se oponen á cada instante á la perpetuidad del movimiento de los cuerpos un sin número de obstáculos, de rozamientos y de resistencias.

Así cuando comunicamos á un cuerpo un movimiento cualquiera, vemos que este movimiento disminuye por grados, y al fin cesa.

En el juego de las bochas, por ejemplo, á no ser por el rozamiento del terreno y la resistencia del aire, una vez puesta la bola en movimiento sobre un plano horizontal, rodaría sin disminuir jamas su velocidad; pero sabemos que en los planos mas tersos que podemos fabricar, esta velocidad disminuye y cesa prontamente.

Por consiguiente, para producir un movimiento continuo en nuestras artes, hay que añadir á cada instante nuevos grados de fuerza á los cuerpos que ponemos en movimiento.

Así, por ejemplo, cuando tenemos cargas que transportar por los caminos, no basta comunicarlas solo un cierto movimiento, sino que hay que sustituir á cada instante el que hacen perder las resistencias, y esto se logra por medio de hombres ó animales destinados á tirar de estas cargas. Esta cantidad de fuerzas que se necesita emplear á cada instante, es evidentemente igual á la fuerza perdida en el instante precedente, y la suma de las fuerzas empleadas en el transporte al cabo de un tiempo considerable, ha de mirarse como igual á la suma de las fuerzas perdidas por las resistencias.

Asi cuando un hombre camina con una fuerza constante en un tiempo considerable, la suma de las fuerzas empleadas en este tiempo, representa la suma de las fuerzas perdidas.

Vemos que aqui el gasto de las fuerzas es tanto mayor, cuanto el espacio es mayor. Cuando este movimiento es enteramente uniforme, las fuerzas empleadas en producirle en un tiempo dado, son directamente proporcionales á este tiempo.

Nótese bien la gran diferencia que se encuentra, por una parte entre los movimientos, tales como los que pudieran existir en el vacío, y sin ninguna especie de rozamiento, y por otra entre los movimientos que efectuamos nosotros sobre la tierra.

Si se tuviera que hacer viajar en el cielo un planeta, un cometa, una carga cualquiera, y este movimiento se pagase, bastaría pesar el planeta, el cometa ó la carga, y multiplicar el peso por la velocidad; y este producto sería el mismo á cualquiera distancia que se verificase el transporte, puesto que no habrá jamás necesidad de emplear fuerzas nuevas para continuar el transporte. Pero en la tierra sería necesario añadir á esta suma otra que representase las fuerzas perdidas á cada instante, la cual creciendo siempre escedería en breve de tal modo á la primera, que se podría despreciar. Entonces se diría como los empresarios de acarreo, siendo las circunstancias las mismas, el precio del transporte es proporcional á los espacios corridos. Estas observaciones no solo se aplican á los transportes sino tambien á la mayor parte de los movimientos comunicados á las máquinas por las diversas especies de fuerzas, como ya veremos en el discurso de nuestra obra y particularmente en el volúmen.

III. USO DE LAS FUERZAS MOTRICES.

Acabamos de ver lo que sucede cuando una fuerza única comunica una sola vez el movimiento á un cuerpo dado. Supongamos que esta fuerza renueve su accion en intervalos de tiempo iguales entre sí.

Llamemos e el espacio corrido por un cuerpo, v la velocidad comunicada á este cuerpo, y t el tiempo empleado en correr el espacio e con la velocidad v. Al principio de la segunda unidad de tiempo, reiterando la fuerza su accion duplica la velocidad del cuerpo, el cual en el segundo espacio del tiempo t corre un espacio igual á $2e$. Al principio de la tercera unidad de tiempo reiterando la fuerza todavía su accion, *triplica* la velocidad de este cuerpo, que en el tercer espacio de tiempo t corre un espacio igual á $3\,e$ &c. Luego, se tiene en cada uno de los diversos instantes.

1.º Tiempo t; 2.º tiempo t; 3.º tiempo t; 4.º tiempo t; medio tiempo t,

Velocidades adquiridas.... v.... $2\,v$.... $3\,v$.... $4\,v$.... $m\,v$.

Espacios corridos.......... e.... $2\,e$.... $3\,e$.... $4\,e$.... $m\,e$.

El espacio total corrido por el cuerpo en m veces el tiempo t, es igual evidentemente á

$$e + 2\,e + 3\,e + 4\,e + \ldots\, m\,e.$$

Podemos valernos de la Geometría para hacer palpables con una figura estos resultados relativos á la ciencia de las fuerzas.

Sea la fig. 1.ª la línea vertical OX dividida en espacios iguales, cada uno de los cuales representa la unidad de tiempo t. Sea la horizontal OY dividida en espacios iguales cada uno de los cuales representa el espacio e corrido en el primer tiempo t.

Tirando por los puntos de division líneas horizontales y verticales formaremos una escalera, cuyos escalones tendrán por longitud los espacios e $2e$ $3e$ $4e$.... corridos en los tiempos sucesivos iguales á t.... La superficie de los diferentes escalones será

$$OA \times e,\ AB \times 2\,e,\ BC \times 3\,e,\ CD \times 4\,e....$$

Pero OA=AB=BC=CD.... Hagamos el ancho de todos los escalones igual á la unidad, entonces la superficie de los escalones será solamente

$$e,\ 2e,\ 3e,\ 4e,\ldots$$

y la superficie total de la escalera representará el espacio total corrido por el cuerpo.

Supongamos que la fuerza impulsiva se reduzca á su mitad, y que duplique el número de sus impulsiones en un tiempo dado.

Conservando siempre la misma unidad de estension los escalones de la nueva escalera fig. 2.ª, que representan este nuevo movimiento, no tendrán mas que la mitad de ancho, y el número de ellos será dos veces mayor.

Del mismo modo, los espacios corridos no tendrán en cada medio tiempo sino la mitad del incremento primitivo, pero habrá dos veces mas incrementos.

Igualmente se podría suponer la fuerza impulsiva reducida al tercio, al cuarto, fig. 3.ª, al quinto de su magnitud primitiva, aunque renovando sus impulsiones, tres, cuatro, cinco.... veces, en tanto que la fuerza primitiva no las renovase mas que una vez. En este caso los movimientos estan representados por los escalones, cuyo ancho queda reducido al tercio, al cuarto, al quinto del ancho primitivo, y cuyo incremento de longitud no es mas que el tercio, el cuarto, el quinto del incremento primitivo.

Si se tira una recta OZ desde el vértice á la estremidad inferior de la escalera, pasará por todos los puntos I, II, III, IIII, que terminan la parte inferior de los escalones, y se tendrá por espacios corridos al cabo de los tiempos.

$$t,\ 2t,\ 3t,\ 4t\ldots.$$
$$\text{AI},\ \text{BII},\ \text{CIII},\ \text{DIV}\ldots$$

La relacion de los lados de OAI no se altera cuando se toman á un tiempo la mitad del lado OA$=t$ y del lado AI$=e$, el tercio de OA y el tercio de AI, el cuarto de OA y el de AI para formar las escaleras fig. 2 y fig. 3, que representan los otros movimientos que acabamos de esplicar.

Asi la direccion de la línea OI II III IV...... no varía cuando se supone que la fuerza disminuye de magnitud en la misma relacion que multiplica sus impulsiones en un tiempo dado.

Si las impulsiones llegasen á ser tan multiplicadas, y la fuerza tan pequeña á cada impulsion que fuese necesario dividir OA$=t$ y AI$=e$ en partes iguales, cada una de las cuales no pudiesen percibir nuestros sentidos, entonces el perfil de la escalera 1 I, 2 II, 3 III, 4 IV, fig. 1, llegaría á ser á nuestros ojos una recta OZ fig. 4. Representando la superficie de la escalera O1I, 2II,... ZX el espacio total corrido por el cuerpo en el tiempo representado por OX, esta superficie llegaría á ser la del triángulo OXZ fig. 4. Siendo la velocidad proporcional al espacio dividido por el tiempo (que se toma aqui por unidad) las longitudes de los escalones AI, BII, CIII.... representan las velocidades adquiridas por el cuerpo al cabo de un tiempo igual á $1t$, $2t$, $3t$.... Luego esta velocidad es la misma al cabo del mismo tiempo, suponiendo que la fuerza reducida á un

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},$$

obrase.... 2, 3, 4, 5..... veces en tanto que la fuerza primitiva no obrase mas que una vez.

Cuando el número de impulsiones es tan grande en un tiempo dado que nuestros sentidos no pueden distinguir la sucesion por la mudanza repentina de velocidades, la línea recta OZ, hemos dicho fig. 4 y 5, representa las velocidades adquiridas cuando OX representa los tiempos corridos, y la superficie de la escalera que se convierte entonces en la del triángulo OXZ representa los espacios corridos. Por consiguiente, al cabo de un tiempo representado por OX, la velocidad adquirida está representada por una longitud XZ, y el espacio corrido está representado por una superficie OXZ.

Llamemos t y T los tiempos representados por Ox

y OX, fig. 5; v V las velocidades representadas por xz y XZ; en fin, e y E los espacios representados por la superficie de los triángulos Oxz, OXZ, y se tendrá

$$Ox : OX :: xz : XZ$$
$$\text{ó}\ldots\ t : T :: v : V$$

Luego en el movimiento que consideramos las velocidades v V adquiridas al cabo de los tiempos t T, son proporcionales á estos tiempos.

Se tiene ademas GEOMETRÍA LEC. V.

$$\text{Superficie } Oxz : \text{Superficie } OXZ :: Ox^2 : OX^2$$
$$\text{ó}\ldots\ldots\ldots\ e : E :: t^2 : T^2.$$

Luego los espacios son proporcionales á los cuadrados de los tiempos empleados en correrlos.

Asi siendo los tiempos $1\,t$, $2\,t$, $3\,t$, $4\,t$, $5\,t$, $6\,t$....
los espacios corridos son $1\,e$, $4\,e$, $9\,e$, $16\,e$, $25\,e$, 36 ....
Se tienen los triángulos semejantes Oxz, OXZ,
Superficie Oxz: Superf. OXZ:: xz^2 : XZ,
e : E :: v^2 : V^2.

Luego los espacios corridos en tiempos dados son proporcionales á los cuadrados de las velocidades adquiridas al fin de estos instantes.

Por consiguiente,

Al cabo de tiempo $1\,t$, $2\,t$, $3\,t$, $4\,t$, $5\,t$, $6\,t$....
las velocidades adquiridas son $1\,v$, $2\,v$, $3\,v$, $4\,v$, $5\,v$, $6\,v$....
los espacios corridos son $1\,e$, $4\,e$, $9\,e$, $16\,e$, $25\,e$, $36\,e$....

Supongamos que al cabo de un tiempo T, representado por OX, fig. 5, la fuerza impulsiva cesa repentinamente su accion; el cuerpo va á moverse con la velocidad constante V representada por XZ. Entonces las horizontales iguales XZ $=$ $x'z'$ $=$ X$'$ Z$'$, representan esta velocidad constante. La superficie del triángulo OXZ representa el espacio total corrido en el tiempo T por fuerzas impulsivas sumamente pequeñas, y reproduciendo á cada instante igual su accion constante.

La superficie del rectángulo XZZ$'$X$'$ doble del triángulo OXZ, representa el espacio total corrido en un segundo tiempo T, con la velocidad constante adquirida al cabo del primer tiempo T.

Asi cuando una fuerza constante sumamente pequeña renueva sus impulsiones en intervalos de tiempo iguales, y tambien sumamente pequeños, el espacio total que hace correr á un cuerpo en un tiempo T, es la mitad del espacio que en el mismo tiempo T correrá este cuerpo si la fuerza cesa de renovar sus impulsiones.

Gravedad. La naturaleza nos presenta un grande ejemplo de la repeticion continua de una fuerza impulsiva constante. Todos los cuerpos se hallan atraidos hácia el centro de la tierra, y nosotros sentimos esta fuerza cuando sostenemos un cuerpo.

La fuerza de la gravedad se destruye á cada instante por la resistencia que nuestro cuerpo ofrece al movimiento, y la sentimos reproducirse el instante despues siempre con una misma accion.

De consiguiente, todos los resultados á que acabamos de llegar relativamente á las fuerzas que renuevan á cada instante su impulsion constante, se aplican á la fuerza de la gravedad.

Asi cuando un cuerpo cae libremente sin que ningun obstáculo se oponga á su movimiento.

1.° Las velocidades que adquiere son proporcionales á los tiempos empleados en adquirirlas.

2.° Los espacios totales que corre son proporcionales á los cuadrados de los tiempos empleados en correrlos.

3.° Los espacios totales corridos son proporcionales á los cuadrados de las velocidades adquiridas por el cuerpo al cabo de cada espacio corrido.

4.° Si el cuerpo al cabo de un tiempo dado adquiere una velocidad constante igual á la que acaba de adquirir en este tiempo, correrá un espacio total doble del que acaba de correr, aumentando gradualmente de velocidad.

En el punto de la tierra en que nos hallamos, el espacio que un cuerpo corre cuando cae, en el primer segundo de la caida es igual 4,$^{met.}$9043975, luego la velocidad que adquiere al cabo de un segundo puede hacerle correr uniformemente el doble de este espacio, esto es, 9,$^{met.}$808795 por segundo. Al cabo de diez segundos el espacio corrido por un cuerpo que cae libremente, es igual á 100 veces el espacio que corre en un segundo 490,$^{met.}$43975; al cabo de un minuto es igual dicho espacio á 17655,$^{met.}$831.

Está muy lejos de suceder que los cuerpos caigan con una velocidad tan grande, á causa de la resistencia que les opone el aire. Véase vol. III. USO DE LAS FUERZAS MOTRICES.

Aplicacion. Cuando los espacios que hay que correr no son muy grandes y se emplean cuerpos muy pesados, se puede, valiéndose de un escelente cronómetro que señala los quintos de segundo, medir con una aproximacion notable la profundidad de un pozo ó la altura de una pared, de una torre &c. Se deja caer el cuerpo contando los segundos y fracciones de segundo que emplee en correr este espacio, y multiplicando el cuadrado de este número por 4,$^{met.}$904; el producto que resulta es el espacio corrido.

Nótese esta primera y curiosa relacion de la geometría y de la mecánica, que nos ha hecho hallar la altura de un edificio ó la profundidad de una mina, mirando un relox, y que igualmente nos haría hallar la longitud de un tiempo corrido con una sola medida del espacio. Los péndulos nos ofrecerán un ejemplo todavía mas notable de la íntima conexion de dos ciencias que reunen sus principios y sus consecuencias para ilustrar y guiar las artes.

Cuando esplique el efecto de las mazas, de los volantes para la moneda, de los martillos, de los martinetes &c. &c., se verán las aplicaciones importantes y numerosas que las artes han sabido hacer de las leyes que rigen la caida de los cuerpos, y la grandísima importancia del conocimiento de estas leyes. Supongamos que en el momento que la gravedad va á empezar las impulsiones repetidas á cada instante, el cuerpo haya adquirido una cierta velocidad. Entonces hay que distinguir tres casos.

1.° Si la velocidad primitiva se dirige en el mismo sentido que la gravedad, es una velocidad constante que se añade á las velocidades comunicadas por la gravedad. En este caso la gravedad es respecto del cuerpo, cuya velocidad se aumenta, se acelera á cada instante, lo que se llama una fuerza *aceleratriz.*

2.° Si la velocidad primitiva se dirige en sentido contrario á la gravedad, ésta disminuye á cada instante dicha velocidad, y como retarda sin cesar el movimiento del cuerpo se le llama entonces fuerza *retardatriz.*

Cuando se tira un pistoletazo de arriba abajo la bala cae desde luego con toda la velocidad que recibe de la pólvora inflamada, y esta velocidad primera se aumenta despues con las acciones incesantemente repetidas de la gravedad, que obra como fuerza *aceleratriz.*

Cuando se tira un pistoletazo de abajo arriba la bala sube con toda la velocidad que recibe de la pólvora inflamada, pero su movimiento se halla á cada instante retardado por la accion incesantemente renovada de la gravedad, que obra en este caso como fuerza *retardatriz.*

Al cabo de un cierto tiempo la accion siempre contraria de la gravedad, ha destruido toda la velocidad primitiva que habia recibido la bala, y esta bala queda un momento en reposo. Continuando la gravedad su accion, hace descender esta bala desde la posicion en que se halla en reposo, y continúa obrando como fuerza *aceleratriz.*

En este nuevo movimiento la fuerza de la gravedad añade á cada instante una cantidad de accion exactamente igual á la que antes retardaba la subida de la bala. Así, *en la misma duracion de tiempo, antes y despues del momento en que dicha bala llega al punto mas alto, corre espacios iguales, ya suba ya descienda, y tiene siempre la misma velocidad adquirida cuando llega á la misma altura, ora suba, ora descienda.*

Importa mucho grabar este resultado en la memoria, porque es uno de los principios mas fecundos de la mecánica, y se verá cuán importantes y numerosas son sus aplicaciones á las artes.

La velocidad perdida por la bala que sube es proporcional al tiempo corrido desde que ha sido arrojada, y la disminucion de espacio corrido por la bala que sube es proporcional al cuadrado de este tiempo.

La velocidad adquirida por la bala que desciende es proporcional al tiempo corrido desde que ha empezado á descender. El espacio corrido por la bala descendente en virtud de la gravedad, es proporcional al cuadrado de este tiempo.

Se ha dado nuevamente el nombre de fuerzas á las que no obran sino una vez sobre un cuerpo, y respecto á las cuales los espacios corridos son proporcionales á las velocidades constantes.

Dáse el nombre de *fuerzas vivas* á las fuerzas aceleratrices ó retardatrices, cuya medida la dá el cuadrado de las velocidades adquiridas.

En cualquier posicion que se halle desde luego un cuerpo, y cualquiera velocidad que le anime, si desciende en un tiempo t adquiere una velocidad v, proporcional á t. De consiguiente, siendo M su masa, adquiere una cantidad de movimiento igual á Mv^2, la cual es la fuerza viva del cuerpo M.

Cuando se deja caer un cuerpo para que adquiera una fuerza que se pueda emplear despues en las maniobras de las artes, la cantidad de fuerza que acumula está representada por su masa, multiplicada por la velocidad adquirida. Lo que dá por ejemplo al cabo de

1. 2. 3. 4...... Segundos

1. 4. 9. 16...... veces $M \times 9,^{\text{met.}}808795$.

Los valores tomados de izquierda á derecha dan las fuerzas vivas crecientes respecto al cuerpo que cae: los mismos valores tomados de derecha á izquierda dan las fuerzas vivas decrecientes respecto al cuerpo que sube. La diferencia de estas fuerzas es evidentemente la misma entre las mismas alturas, ya se suba, ya se descienda.

Así, cuando un cuerpo cae libremente con una fuerza viva, adquirida desde un punto A hasta un punto B, si se le arroja de abajo arriba con esta misma fuerza, sube desde B hasta A, antes que la fuerza retardatriz de la gravedad haya consumido todo lo que al principio habia producido, haciendo descender el cuerpo.

Por lo espuesto se ve que no se puede sacar ventaja. 1.° De la fuerza adquirida por un cuerpo que desciende para hacerle subir á mayor altura que el punto de donde parte. 2.° De la fuerza perdida por un cuerpo que sube para ganar mas fuerza por la caida de este mismo cuerpo en caso de devolver al punto de donde partió. Estas verdades son muy sencillas, por lo cual si nos penetramos bien de ellas, nos evitarán un sin número de combinaciones falsas y de vanas investigaciones acerca del MOVIMIENTO PERPÉTUO.

Cuando un cuerpo se halla en reposo y está espuesto á la accion del viento, esta es una fuerza que le empuja renovando sin cesar sus impulsiones hasta que haya adquirido una velocidad igual á la del mismo viento. Pero á medida que el cuerpo adquiere una velocidad mas considerable recibe del viento una impulsion menos fuerte, en cuyo caso la fuerza aceleratriz deja de ser constante, y las leyes matemáticas que rijen las relaciones de los tiempos con las velocidades y los espacios corridos, no son de consiguiente tan sencillas como las de que hemos dado la demostracion y aplicacion, relativamente á la gravedad (1).

Cuando un cuerpo se mueve en el aire, que supondremos en calma, ó bien se mueve en una direccion contraria á la del viento, á medida que el cuerpo aumenta de velocidad, esperimenta por parte del aire una resistencia creciente. Por manera, que el aire no solamente obra como una fuerza retardatriz constante, sino tambien como una fuerza retardatriz que crece cada vez mas.

Daremos mas estension á estas observaciones, que por ahora basta indicar, cuando hagamos conocer la naturaleza mas particular de la fuerza del aire, y sus aplicaciones á las artes en el tomo III, que tratará de las *fuerzas motrices aplicables á las artes.*

Nos falta presentar un tercer caso de que todavía no podemos tratar, y es cuando la fuerza primitiva está dirijida en un sentido diferente de la accion de las fuerzas aceleratrices ó retardatrices. Entonces el cuerpo ya no corre una línea recta, sino que describe una curva cuya naturaleza y curvatura dependen de la ley de accion de las fuerzas aceleratrices ó retardatrices, y de la intensidad de estas fuerzas.

Aunque no he mencionado mas que dos fuerzas, la fuerza del aire y la de la gravedad, que obran para acelerar ó retardar el movimiento de los cuerpos. Las artes hacen uso de un gran número de otras fuerzas, ó bien tienen que vencer la resistencia de ellas para obtener diferentes efectos. Me contentaré con indicar algunas.

Un navío puesto en movimiento en el agua lo está generalmente por una fuerza constante que le hace partir del estado de reposo para llegar á la mayor velo-

(1) *Mas adelante veremos que aun la fuerza misma de la gravedad no es constante á diversas distancias del centro de la tierra.*

cidad que puede tener. Para esto tiene que vencer por grados las resistencias del agua, que obra como fuerza retardatriz, y no llega á caminar con un movimiento uniforme, sino cuando la pérdida de velocidad esperimentada por efecto de la fuerza retardatriz, es igual á la adquisicion de velocidad que recibiría de la fuerza impulsiva, que suponemos renueva á cada instante la accion.

En toda especie de máquinas se distingue tambien una fuerza impulsiva, la cual á cada instante añade una cantidad dada de accion para destruir las resistencias, que á cada instante destruirán esta misma cantidad de accion.

Cuando empieza á ponerse en movimiento la máquina, la fuerza impulsiva sobrepuja necesariamente á la fuerza retardatriz para que haya movimiento. Este movimiento se acelera por grados hasta que la pérdida de velocidad, causada á cada momento por las resistencias, es igual á la adquisicion de velocidad, ocasionada por la fuerza impulsiva. En llegando á este estado la máquina adquiere un movimiento uniforme, como el que sirve en la mayor parte de las operaciones de las artes.

Es necesario distinguir bien en el movimiento de las máquinas los primeros movimientos *variados*, que empiezan con una velocidad nula, y crecen por grados hasta la velocidad constante que ha de tener.

Esta consideracion no es meramente objeto de curiosidad. Al empezar el movimiento una porcion de la fuerza impulsiva se gasta en comunicar á cada parte de la máquina el grado de velocidad que luego ha de tener. De consiguiente, es preciso que la fuerza impulsiva destruya: 1.° la fuerza de inercia de la máquina: 2.° las primeras resistencias de las fuerzas retardatrices. Si se comunicase repentinamente á la máquina una fuerza constante, capaz de ponerla en el instante mismo en movimiento con toda la velocidad que ha de tener despues, sería necesario un esfuerzo instantáneo sumamente considerable para vencer al mismo tiempo las resistencias de esta máquina, y las que provienen de la fuerza de inercia de sus partes, y esponerse á romper algunas piezas de la máquina, ó á lo menos perjudicar á su solidéz. Cuando espliquemos el movimiento de los engranages daremos un ejemplo notable de la importancia que merecen estas observaciones.

LECCION TERCERA.

Fuerzas paralelas.

Hasta aquí no hemos considerado mas que las fuerzas dirigidas en el sentido de una misma línea recta, y hemos visto que sus acciones se aumentan ó disminuyen, segun que las fuerzas obran en un mismo sentido ó en sentido contrario.

Semejantes efectos se producen cuando actúan dichas fuerzas, no ya segun una misma línea recta, sino segun las líneas paralelas.

Asi, por ejemplo, dos caballerías que tiran una tras de otra, ó en una misma línea recta, producen el mismo efecto que dos caballerías puestas de frente, y tirando paralelamente. Tres caballerías, puestas una tras de otra y tirando en una misma línea recta, producen el mismo efecto que tres caballerías puestas de frente y tirando paralelamente, &c.

Luego 1.° varias fuerzas paralelas y dirigidas en el mismo sentido, producen el mismo efecto que una fuerza sola igual á su suma, y tirando en la misma direccion. Esta fuerza es su *resultante*. Si hay varias fuerzas paralelas que tiran hácia adelante y varias fuerzas paralelas que tiran hácia atrás, se reducirán las primeras á una sola fuerza igual á su suma; las segundas tambien á una sola igual á su suma; y la resultante final será igual á la diferencia de las dos sumas, y dirigida en el sentido de la mayor.

Doy estos resultados como demostrados por la esperiencia, pues me parece mejor seguir este camino que presentar demostraciones poco satisfactorias para cierta especie de ingenios. Asi, por ejemplo, pudiera decir con algunos autores de obras elementales, que es necesario mirar dos fuerzas cuyas direcciones son paralelas, como concurrentes en un mismo punto *al infinito*, y como teniendo al *infinito* una sola y misma direccion. Pero hablando de esta manera diria ciertamente cosas poco exactas y que no comprenderían bien las personas para quienes se escribe esta obra. Es fácil ver que la resultante de las fuerzas paralelas tiene la misma direccion que las componentes, y es igual á la suma de las que hacen adelantar, menos la suma de las que hacen retroceder; pero no es tan fácil ver en todos los casos cuál ha de ser la verdadera posicion de la resultante. Para hallar mas fácilmente esta posicion es preciso recurrir á la geometría. Esta ciencia sirve para representar con líneas proporcionales no solo los espacios corridos ó que hay que correr, y los espacios ocupados por máquinas y productos de las artes, sino tambien otros elementos de mecánica, que al parecer no tienen conexion alguna con la ciencia de la estension. Sobre esto importa mucho fijar las ideas.

Ciertamente no hay conexion alguna entre la duracion de un tiempo y la longitud de una línea. Mas dividamos el tiempo en partes iguales, por ejemplo, en horas. Dividamos estas horas en partes iguales, en minutos, en segundos, &c. Dividamos una línea recta ó curva en partes iguales numeradas con 1, 2, 3.... como las horas que se suceden, tomando por punto de partida un instante determinado. Dividamos cada porcion de línea en otras tantas partes iguales como minutos hay en una hora, y estas nuevas divisiones representarán los minutos de cada hora. Subdividamos estas nuevas porciones de línea en otras tantas partes iguales como segundos hay en un minuto, y las subdivisiones formadas de esta manera representarán los segundos, y asi sucesivamente.

Si se numeran con cifras todas estas divisiones podrá representarse el tiempo: 1.° por medio de números, 2.° por medio de longitudes de líneas, y si se añaden, restan, multiplican ó dividen las porciones de línea como se habrá hecho con las porciones de tiempo que representan, es evidente que la línea final, resultado de todas estas operaciones, indicará el tiempo final que era preciso calcular. Pues asi es como la geometría sirve para representar el tiempo con líneas.

Los cuadrantes de los relojes tienen un círculo graduado dividido en 12 partes iguales, que representan las horas, y subdividido en 60 partes iguales, que representan los minutos. Mas no siendo la misma la unidad de medida con respecto á los minutos ni á las horas, son menester dos agujas para seguir los dos movimientos, y la aguja que señala los minutos va doce veces mas apriesa que la aguja que señala las horas.

En los cuadrantes solares, la duracion del tiempo tambien está representada con elementos geométricos que son los ángulos. Tírase por el centro del cuadrante una línea recta paralela al eje de la tierra. Supónese que un plano pasa á la vez por esta recta y por el centro del sol. Este plano gira uniformemente, y los ángulos que miden su movimiento miden los espacios corridos.

Las velocidades, asi como los tiempos, pueden representarse por líneas. Asi en la fig. 1.ª, lecc. 2.ª, las alturas OA, AB, BC.... representan los tiempos corridos, en tanto que un cuerpo adquiere las velocidades representadas por las paralelas AI, BII, CIII....

Entonces, segun hemos visto, los espacios corridos estan representados con superficies.

Cuando se quiere que los espacios corridos estén representados con líneas proporcionales á estos mismos espacios, y que los tiempos estén tambien representados con líneas, las velocidades llegan á ser las relaciones de estas líneas, y ya no estan representadas sino con números.

Las fuerzas no son tiempos, velocidades ni espacios, sino agentes que emplean el tiempo para hacer correr á los cuerpos ciertos espacios en cierto tiempo con ciertas velocidades.

Las fuerzas, asi como el tiempo, las velocidades y los espacios, pueden representarse con líneas, que les sean proporcionales, y tengan la misma direccion de estas fuerzas.

Estas nociones tan sencillas y fáciles hacen descubrir inmediatamente una inmensa utilidad de la geometría.

Esta ciencia sirve aqui para facilitar la inteligencia de la mecánica y para representar y pintar á nuestros ojos cosas muy reales aunque no tienen una apariencia perceptible á nuestros sentidos. Asi es que no podemos ver, tocar ni oir el tiempo, pero podemos ver las líneas, los puntos, las cifras señaladas en un cuadrante. Es pues la geometría la que las hace ver y la que nos permite medir el tiempo.

Tampoco podemos ver, oir, tocar el peso de la atmósfera, pero podemos ver las divisiones de una línea recta aplicada á lo largo de un barómetro, y leer en ella las variaciones del peso de la atmósfera. La geometría es tambien la que hace perceptible todo esto á nuestros sentidos.

Igualmente no podemos juzgar por medio de nuestra vista de la presion que el vapor ejerce en la caldera de una máquina de vapor, pero por medio de un *manómetro*, que no es sino un *barómetro* de vapor, podemos representar estas presiones con una línea dividida en partes iguales. Véase vol. 3.°, EMPLEO DE LAS FUERZAS.

No hay, pues, de que admirarse si representamos las fuerzas con líneas rectas. La direccion de estas líneas será la misma que seguiría un cuerpo sometido á la accion de la fuerza representada. La longitud de la línea representará la magnitud de la fuerza. Volvamos ahora al exámen de las fuerzas paralelas.

Cuando dos fuerzas, AX, BY, fig. 6, tiran de una línea recta AB que es perpendicular á ellas, claro está que una varilla CR, sujeta á la mitad de AB y paralela á las fuerzas, como esté situada simétricamente con respecto á ellas, representará la direccion de su resultante. En efecto, no siendo mayor la fuerza de la derecha que la de la izquierda, no hay razon ninguna para que la resultante se acerque mas á la derecha que á la izquierda, ó mas á la izquierda que á la derecha. Si hubiese tres fuerzas que tirasen paralelamente en AX, BY, CZ, fig. 7, y situadas á igual distancia, la resultante obraría segun BY, y asi en adelante. Estos dos casos tienen aplicacion al tiro de las caballerías.

Cuando un solo caballo tira de un carruage por medio de dos tirantes simétricamente dispuestos á derecha é izquierda del medio del carruage, el caballo tira igualmente del tirante de la derecha y de la izquierda. Asi el carruage debe caminar en la direccion paralela á estos tirantes como si el caballo no tirase mas que con una cuerda sujeta en el medio del carruage.

Cuando hay dos caballos de frente, estan situados á igual distancia del medio, fig. 8. Entonces los cuatro tirantes son t, t', t'', t''' dispuestos simétricamente á la derecha y á la izquierda del medio: 1.° los dos tirantes t, t', tienen por resultado una fuerza igual á $t+t'$ aplicada en Ee en medio del balancin $a\,b$; 2.° t'' y t''' tienen por resultado una fuerza igual á $t''+t'''$ aplicada en Ff en medio de la bolea ó balancin $c\,d$; 3.° las dos fuerzas eE, fF tienen por resultante gG igual á su suma, esto es, á $t+t'+t''+t'''$ y situada á igual distancia de eE, fF.

De consiguiente la línea g G que pasa por el medio del carruage, representa en direccion la resultante final.

Supongamos que se tengan dos fuerzas paralelas aX, bY desiguales, tirando de la barra ó palanca ab, fig. 9, y tratemos de averiguar la posicion de la resultante.

Para representar este caso, supongamos que $x\,a$ C y $y\,b$ C, fig. 10, sean dos prismas ó dos cilindros de la misma materia y grueso, y de una longitud tal, que puesto el estremo del uno contra el estremo del otro, ocupen dos veces la longitud ab, lo cual siempre podemos hacerlo.

Esto supuesto, es evidente que el peso $Cax = X$, y de $Cby = Y$, permanecerá el mismo si suspendemos Cax y Cby horizontalmente por su medio. Entonces habrá entre a y b: **1.°** la mitad de la longitud del peso menor; 2.° la mitad de la longitud del peso mayor. Pero la suma de las mitades de estas longitudes es igual á la distancia ab: luego los dos pesos estarán el uno á continuacion del otro, y dispuestos como si no formasen mas que un peso único. Supongamos que esten pegados uno á otro, esto no alterará nada el equilibrio, pero es evidente que un peso único xy igualmente grueso de un estremo al otro, estaria en equilibrio suspendiéndole con una sola fuerza por su medio. Sea c este medio, la resultante R de las dos fuerzas X é Y pasará por el punto c.

Supongamos que se vuelve del otro lado acb; el punto c hallándose ahora en C se tendrá evidentemente.

$$bC = ac = bY$$
$$aC = bc = aX$$

Asi el punto C caerá en c, medio de ab.

Luego *basta situarse en c á las distancias de aX y de bY que sean proporcionales á las fuerzas bY y aX para tener el punto de aplicacion de la resultante.*

Voy á presentar un ejemplo de esta verdad en el tiro de los caballos.

Las mas veces se emplea el sistema siguiente: Hay tres caballos de frente X,Y,Z, fig. **11**; Y y Z estan enganchados al balancin ab; su resultante cR es igual á la suma de las fuerzas situadas en medio de ab, esta resultante obra directamente con la fuerza resultante del tercer caballo. Entonces se coloca el punto E dos veces mas cerca de cR que de dX; cuyo punto es el de aplicacion de las fuerzas cR y dX, y por consecuencia de la resultante final Q, si EQ se halla dirijida segun el eje longitudinal del carruage.

Supongamos que en la fig. 9 la fuerza $R = X + Y$ escede cada vez menos á la fuerza Y, por disminuir X cada vez mas. En la igualdad $R + bC = X \times ab$, si suponemos que R y bC no varían, se ve claramente que cuanto mas disminuya X tanto mas aumentarán ab. Si la fuerza X se va reduciendo sucesivamente á la mitad, al tercio, al cuarto &c., de su longitud primitiva, es preciso que la distancia aC se haya duplicado, triplicado, cuadruplicado &c., para conservar el mismo producto $X \times ab$. Por grande que sea ab siempre se hallará un valor menor de X que podrá satisfacer á esta igualdad; y $R = X + Y$ escederá siempre Y en la cantidad menor X. De aqui resulta una consecuencia bien notable, y es, que cuando dos fuerzas Y R son iguales paralelas, y dirijidas en sentidos contrarios, no pueden ponerse en equilibrio con una tercera fuerza X. Por pequeña que sea X, y á cualquier distancia que se la sitúe, nunca será bastante pequeña ni situada á bastante distancia.

Puesto que una fuerza única no puede equilibrar á dos fuerzas iguales, opuestas y paralelas, es preciso que estas dos fuerzas no puedan tener por resultante una fuerza única, capáz de hacer caminar el cuerpo en línea recta. Las dos fuerzas iguales, opuestas y paralelas, producirán, pues, en el cuerpo al cual se aplican, otro efecto que transportarle en línea recta. Las leyes del nuevo movimiento que adquiere entonces el cuerpo, se esplicarán en la leccion cuarta, despues de haber esplicado todo lo concerniente á los movimientos que se efectúan en línea recta.

Volvamos á la accion de las fuerzas paralelas que pueden tener una resultante, y demos á conocer relativamente á ellas un principio muy notable.

Cuando dos fuerzas X Y obran perpendicularmente sobre una barra A B, fig. **12**, si se oblicuan igualmente estas dos fuerzas, esto es, que se las conserva paralelas en X é Y, la resultante R, siempre igual á su suma, queda aplicada al mismo punto C. Asi la *posicion del* *punto de aplicacion y la magnitud de la resultante no dependen de ningun modo de la oblicuidad de las fuerzas paralelas, relativamente á la recta que une sus puntos de aplicacion.*

Esta propiedad del movimiento, bien sencilla en la apariencia, tiene resultados de estraordinaria importancia en toda la mecánica y las artes, y así indicaremos los principales.

Supongamos que se tengan tres fuerzas paralelas X, Y, Z, aplicadas á tres puntos que no estan en línea recta, AX, BY, CZ, fig. 13, representando la direccion de estas fuerzas. Desde luego X é Y tendrán una resultante R aplicada en D igual á X+Y, y tal que se tenga la proporcion

DA : DB : : Y : X

Despues R y Z tendrán por resultante S = R+Z = X+Y+Z, y el punto de aplicacion E de S será tal que DE : EC : : Z : R.

Sentado esto mudemos á la vez la direccion de todas las fuerzas, sin cambiar su paralelismo. Puesto que la posicion de los puntos D y E es independiente de la direccion de las fuerzas, esta posicion permanecerá la misma. Así de cualquier manera que se mude la direccion de las fuerzas paralelas, obrando en A, B, C, con tal que el paralelismo no se destruya, la resultante tendrá siempre el mismo punto de aplicacion E.

Si hubiese cuatro, cinco, seis fuerzas en lugar de dos, hallaría tambien que el punto de aplicacion de todas las fuerzas no muda aunque mude á la vez la direccion de todas las componentes, con tal que estas fuerzas permanezcan paralelas.

Puede considerarse un cuerpo como la reunion de un gran número de partes pequeñas de materia, impelidas hácia la tierra, por fuerzas cuyas direcciones son casi paralelas, lo que puede suponerse sin grande error.

Cuando da vueltas el cuerpo, si en cada posicion se busca el punto donde debiera estar aplicada la fuerza única resultante del peso de cada partécilla del cuerpo,

se halla siempre un mismo punto, cuyo punto notable es lo que se llama *el centro de gravedad.*

Para asegurarse por la esperiencia de esta propiedad de los cuerpos, se suspenden por el medio con un hilo en diferentes direcciones. El hilo sigue la direccion de la resultante del peso de todas las partes del cuerpo, y se conoce claramente que está siempre en una direccion que pasa por un punto único, que es el *centro de gravedad.*

La propiedad de los centros de gravedad tiene consecuencias muy importantes para las artes en el movimiento de los cuerpos.

Supongamos que un cuerpo de figura cualquiera se mueva en línea recta y sin dar vueltas. Cada una de sus partes mas pequeñas, llamadas *moléculas*, está animada de una fuerza proporcional: 1.° á la velocidad comun: 2.° á la cantidad de materia que contiene esta *molécula.*

En el movimiento rectilíneo que examinamos, cada molécula se mueve en línea recta, y está animada de una fuerza dirijida en el sentido de esta recta y proporcional: 1.° á su masa: 2.° á su velocidad.

Consideremos por ejemplo un cuerpo que tenga un metro de longitud. Si se toma esta longitud por base de un triángulo, cuyo vértice sea el centro de la tierra, se formará un triángulo cuya base no será la seismillonésima parte de su altura, y los dos lados mayores que representarán la direccion de la gravedad no formarán un ángulo igual al *cienmillonésimo* de un grado; ángulo que jamás podrá medirse con los mejores instrumentos que tenemos. Todas estas fuerzas tienen solo una resultante paralela á su direccion comun, igual á su suma, y pasando por el centro de las fuerzas que aqui es el centro de gravedad de los cuerpos.

Así *el cuerpo se mueve de la misma manera, esto es, en línea recta y sin dar vueltas.*

1.° *Si se anima á la vez cada una de sus moléculas por una fuerza proporcional á la masa de la molécula y dirigida en la direccion dada.*

2.º *Si se anima el cuerpo entero por una sola fuerza paralela á la direccion dada, y pasando por el centro de gravedad del cuerpo.*

3.º *Si se anima el cuerpo por muchas fuerzas paralelas que tengan solo una resultante, que pasa por el centro de gravedad del cuerpo.*

De consiguiente, para detener enteramente por medio de una sola fuerza el movimiento de un cuerpo que camina en línea recta, es preciso que la direccion de esta fuerza pase por el centro de gravedad del cuerpo.

Para detener por medio de muchas fuerzas el movimiento de un cuerpo que camina en línea recta, es preciso que la resultante de estas fuerzas pase por el centro de gravedad de dicho cuerpo.

Hemos probado que sosteniendo ó suspendiendo un cuerpo por un solo punto, la condicion de equilibrio es que el centro de gravedad del cuerpo se halle en la misma vertical con el punto de suspension.

Cuando se quiere suspender un cuerpo en una posicion determinada, es preciso por consiguiente concebir una vertical que pase por el centro de gravedad de este cuerpo, y situar el punto de enganche en esta vertical. En la leccion donde demos á conocer la posicion de los centros de gravedad del cuadrado, del rectángulo, del rombo, del círculo, de la elipse &c., veremos que los cuadros á que se dá esta forma, y que se cuelgan en nuestras habitaciones, tienen el punto de suspension y el de enganche situados en una misma vertical, con el centro de gravedad de los cuadros. Lo mismo sucede con las arañas suspendidas en las cúpulas de las iglesias, los techos de los salones y los cubos suspendidos por cuerdas para sacar agua, para bajar á las minas, &c.

El conocimiento de la posicion del centro de gravedad es como vemos necesario á los artistas, ya pongan cuerpos destinados á permanecer en reposo en una situacion dada, ya traten de hacer caminar los cuerpos

en línea recta y sin dar vueltas, ya procuren detener el movimiento de los cuerpos que caminan de este modo.

El cuerpo del hombre tiene su centro de gravedad, así como cualquiera otro cuerpo. Pero este centro de gravedad muda de lugar cuando el hombre mueve alguno de sus miembros, ó cuando lleva alguna carga. Entonces el cuerpo del hombre y la carga considerados juntamente tienen un centro de gravedad, por el cual pasa la resultante del peso de este hombre y del peso de su carga.

Cuando el hombre está de pie derecho, fig. **14**, se puede mirar la planta de sus pies como los puntos de aplicacion de fuerzas paralelas obrando de abajo arriba, y representando la fuerza de resistencia del terreno, en el cual se halla situado. Todas estas fuerzas de resistencia tienen solo una resultante vertical en un cierto punto.

Para que haya equilibrio es preciso que esta resultante pase por el centro de gravedad de nuestro cuerpo, sin esto el cuerpo se inclinaria al lado á que se halla su centro de gravedad. Nosotros caeríamos infaliblemente si no nos apresurásemos á volver este centro al aplomo de la resultante de las fuerzas de resistencia, echando algunos de nuestros miembros al lado opuesto á aquel en que empieza nuestra caida.

El centro de gravedad de nuestro cuerpo debe, pues, considerarse como variable casi á cada instante, por los diversos movimientos que exigen nuestras necesidades ó nuestros placeres.

En las bellas artes, y en muchas artes, es importante estudiar las várias posiciones que puede tener nuestro centro de gravedad.

Los pintores y escultores deben conocer con exactitud estas posiciones para no colocar las figuras en lo que se llama *posicion falsa*, es decir, en una situacion tal que si los personages fuesen reales no podrian mantenerse sin caer; defecto suficiente para quitar toda la gracia á las obras de las bellas artes.

Supongamos que un artista representa en situacion perfectamente recta á un hombre que lleva á la espalda una carga muy considerable y voluminosa, faltaría entonces á las leyes de la mecánica y á la verdad de observacion, pues el equilibrio exige entonces que el centro de gravedad del cuerpo del hombre, y de la carga reunidos como un solo cuerpo esté en la misma vertical que la resistencia esperimentada por la planta de los pies. Pero si el hombre permanece derecho el centro de gravedad se inclina hácia atras, hasta salir del espacio ocupado en el terreno por la planta de los pies, y el hombre caerá hácia atras con la carga.

Los mozos de cordel conocen muy bien este efecto mecánico, y así cuando se echan una carga á la espalda empiezan á inclinar hácia adelante la parte superior del cuerpo, á fin de que el centro de gravedad comun del cuerpo y de la carga se mantenga en la vertical conveniente.

Conservando la carga el mismo peso, cuanto mas distante se encuentre el centro de gravedad del cuerpo del hombre, tanto mas estará el centro comun, y tanto mas por consiguiente deberá inclinarse adelante el mozo de cordel, lo que llegaría á obligarlo con un peso muy voluminoso á tener una posicion muy incómoda y casi imposible.

Cuando un cuerpo es chato por un lado y ancho por el otro, el mozo de cordel apoya en la espalda el lado chato, inclinando así lo mas posible hácia adelante el centro de gravedad de la carga. Por consiguiente, con una carga dada puede inclinarse adelante lo menos posible por estar en equilibrio no obstante la carga.

La mochila del soldado es un peso de alguna consideracion, colocado en la espalda. Antiguamente se hácia muy boleada, y tenia un inconveniente análogo al de la carga voluminosa de que hemos hablado. El centro de gravedad se hallaba muy atras, y esto obligaba al soldado á marchar inclinando mucho adelante la parte superior del cuerpo, segun los penosos esfuerzos que exigia aquella táctica gótica. Reflexionando sobre las propiedades de los centros de gravedad se conoció toda la ventaja de dar á los soldados mochilas chatas y anchas, cuyo centro de gravedad se hallase menos hácia atras, colocándolas por su superficie mayor sobre la espalda del soldado. Esta mejora importantísima es una aplicacion muy fácil y sencilla de la teoría de los centros de gravedad, y sin embargo los soldados han estado llevando con trabajo unas mochilas mal configuradas por espacio de dos siglos antes de hacerse esta aplicacion en su favor.

Una carga colocada delante produce el efecto opuesto, obligándonos á echarnos hácia atras para conservar el equilibrio en los pies, y evitar una posicion en que nos espondríamos á caer.

Consideremos una verdulera francesa, por ejemplo, fig. 15, que lleva las verduras en una tabla, suspendida por delante con unos tirantes. Nótese que va muy empinada; la parte superior del cuerpo y la cabeza hácia atras, apoyando á veces las manos sobre las caderas, tambien los codos hácia atras, cuya postura la hace parecer descarada, y en realidad es para llevar con menos trabajo el centro de gravedad del cuerpo y de los brazos lo mas atras posible, haciendo contrapeso á su mercadería.

Observemos una muger embarazada. Cuando se aumenta la preñéz la carga mayor que lleva delante la obliga como á la verdulera á llevar hácia atras la parte superior del cuerpo; y si el uso lo permitiese andaria tambien muchas veces apoyando las manos en las caderas para echar hácia atras los codos.

Los hombres sobrecargados de gordura se ven obligados á mantenerse en una posicion semejante á la de la verdulera y de la muger embarazada.

Cuando se lleva un peso considerable es menester adelantar mucho los pies y echar mucho atras el medio del cuerpo para poner lo mas atras posible el centro de gravedad.

Un escritor moderno ha observado que las mugeres no saben correr, y que echan cuando corren los codos hácia atras, porque adelantan mucho la parte superior del cuerpo, lo cual exige esa operacion de los brazos para contrapeso.

Cuando un aguador no lleva en la mano sino un cubo, fig. 16, el centro de gravedad de su cuerpo y del cubo se encuentra dislocado, no ya adelante ni atras como en los casos anteriores, sino á un lado, y entonces tiene que inclinarse al lado opuesto, cosa siempre penosa. Lo mismo sucede con una persona que lleva un niño en brazos.

Para evitar este cansancio, esta pérdida de fuerza, no hay mas que cargar igualmente dos partes opuestas de nuestro cuerpo. Por egemplo, llevando dos cubos el aguador, fig. 17, y dos niños la niñera.

Vemos mugeres débiles llevar con desahogo pesos á veces considerables, poniéndoselos sobre la cabeza, de modo que el centro de gravedad de la carga esté encima del centro de gravedad del cuerpo; porque entonces el centro de gravedad del sistema se encuentra mas elevado, pero permanece siempre en la misma vertical. La que lleva la carga no tiene pues necesidad de inclinarse á ningun lado para conservar el equilibrio de su posicion natural.

La alforja es una invencion mecánica muy ingeniosa. Se compone de dos sacos iguales ó de un solo saco abierto por medio para que pueda meter la cabeza el caminante. A medida que se va echando carga en las alforjas, se van llenando igualmente por delante y por detras, y el centro de gravedad del sistema no muda de vertical. De este modo se puede acumular sin fatiga en los dos lados una carga muy considerable.

Supongamos que un hombre en pie levanta uno de sus pies; si permanece con el cuerpo derecho caerá inevitablemente hácia el lado del pie levantado, pero para precaver la caida inclina un poco el cuerpo hácia el lado del pie que permanece en el suelo, y el centro

de gravedad se encuentra en la vertical que pasa por la parte del terreno ocupado por este pie.

Por eso vemos que cuando los hombres andan se inclinan sin notarlo alternativamente á la derecha y á la izquierda, segun van levantando el uno ó el otro pie, fig. 18.

Cuando se nota mas este movimiento alternado, es cuando se coloca uno delante de un peloton militar en la alineacion de la marcha, pues se le ve oscilar á cada paso hácia derecha é izquierda, con tanta mas igualdad cuanto mas reunidos marchen.

Este ligero movimiento de derecha é izquierda, causado por la posicion que ha de guardar el centro de gravedad, es lo que hace penoso para dos personas que van del brazo el andar algo aprisa, á no ser que lleven el paso; pues sin esta precaucion el centro de gravedad de la una se inclina á la izquierda cabalmente cuando el de la otra se inclina hácia la derecha. Por consiguiente, cuando estan en tierra los dos pies de adentro, se chocan ó empujan las dos personas, y por el contrario, cuando lo estan los dos pies de afuera se tiran é inclinan ó separan, lo cual les molesta los brazos.

Estas mismas razones aplicadas á los soldados de infantería, que segun el órden actual han de marchar tocándose los codos, han hecho indispensable que marchen al paso todos los hombres que vayan en contacto, porque sin esto no podrian conservar el contacto de codos, pues mientras el cuerpo de uno se inclinase á la izquierda, el del otro se inclinaría á la derecha y se romperia la línea. A fin de que desde el principio de la marcha se establezca la debida armonía en los movimientos, se hace empezar á los soldados con un mismo pie, que es el izquierdo.

Asi se ve que *la razon que obliga á hacer partir á los soldados con un mismo pie en las marchas regulares, está fundada en la teoría de los centros de gravedad.*

El baile ofrece aplicaciones de esta teoría mucho mas variadas que las de la marcha. Este no es el lugar de examinar las lecciones de los maestros de baile para buscar las aplicaciones; mas siendo un principio de movimiento que se halla en el baile, en el paso y en los ejercicios de volatinería, merece que aquí tratemos de ello.

Supongamos que el bailarin ó el volatinero levanta el pie derecho hácia el lado derecho por ejemplo, debe inclinar alguna parte del cuerpo hácia el lado opuesto para mantener el equilibrio; pero como es preciso que los movimientos del cuerpo sean muy pequeños á fin de que se disimule mejor el esfuerzo y se haga con gracia y soltura, es menester que el brazo izquierdo se estienda hácia la izquierda. Si se lleva atrás el pie derecho es menester que el brazo izquierdo se lleve adelante; tal es la aptitud de la bella estátua de Mercurio volando, fig. 19, y la de la Fama.

La oposicion entre los movimientos de los brazos y de los pies para conservar el centro de gravedad en la misma vertical, es indispensable á los volatineros de cuerda que se mueven sin balancear, y en quienes se nota mas particularmente. El chorizo ó contrapeso arregla siempre en una vertical que pasa por la cuerda el centro de gravedad del cuerpo y el contrapeso reunidos.

Yo he notado muchas veces que algunos hombres que andan muy deprisa balancean mucho los brazos, inclinándolos mucho al costado en lugar de llevarlos adelante y atrás como hacen la mayor parte de los hombres. Segun las observaciones que acabo de esponer sobre el modo con que á cada paso se inclina nuestro centro de gravedad hácia el lado del pie fijo en el suelo, se ve que los brazos por un movimiento natural se dirigen hácia el lado del pie levantado para rectificar el centro de gravedad en la direccion de la marcha. Por eso estos hombres andan mas derechos que los demas.

La consideracion del centro de gravedad es de mucha importancia en el arte de la esgrima. Debiendo descansar el peso del cuerpo sobre el pie izquierdo que queda detras, es menester que el centro de gravedad del cuerpo esté en una vertical que pase siempre por este pie. Esta condicion obliga á llevar la parte superior del cuerpo muy atrás y á estender hácia atrás la mano izquierda para equilibrar el brazo derecho y la pierna derecha que estan delante. El menor golpe del florete derriba al tirador si tiene el centro de gravedad muy atrás. Por el contrario, cuando este centro está muy adelante, tiene el tirador una gran fatiga cuando es preciso que lleve el cuerpo atrás, y aun la lentitud de este movimiento puede poner en riesgo su vida.

En la leccion sobre el movimiento de rotacion, veremos que el centro de gravedad hace en él un papel no menos importante que en el movimiento de traslacion.

LECCION CUARTA.

Del centro de gravedad de las máquinas, de los productos de las artes, y de los momentos.

Algunos ejemplos de la leccion anterior han bastado para demostrar cuán importante es en muchas artes y oficios averiguar exactamente la posicion del centro de gravedad en un gran número de cuerpos de diversa figura, y no es menos importante averiguar el centro de gravedad de las partes estables y de las partes movibles de todas las máquinas.

Cuando se carga un carro de dos ruedas conviene que el peso de la carga no esté colocado muy adelante, ni muy atras del eje. En el primer caso abrumaria á la caballería inútilmente, y no disminuiria el esfuerzo necesario para tirar del carruage. En el segundo, siendo mayor el peso de la parte trasera que el de la delantera, balanceará el carro, ó al menos levantaria al caballo en el aire, y este esfuerzo penoso llegaria á ser perjudicial subiendo una cuesta muy pina.

En la fabricacion de las naves es indispensable calcular la posicion del centro de gravedad de cada parte de la nave y de cada objeto que contiene, para conocer el centro de gravedad del todo, y para asegurarse de que cumple con las condiciones del equilibrio y de la estabilidad, segun se esplicará en el tomo III. *Fuerzas motrices.*

Cuando dos pesos iguales, considerados como puntos materiales, estan atados á los dos estremos de una varilla inflexible que se supone sin pesantéz, el centro de gravedad del todo está en medio de la recta.

Una línea recta AB, fig. 20, en la que suponemos la pesantéz representada por un hilo metálico de igual

grueso en todas sus partes, tiene el centro de gravedad G colocado en medio de su longitud. Con efecto, si se suspende la recta por el medio no habrá razon para que un lado pese mas que otro, y el equilibrio subsistirá cualquiera que sea la inclinacion de la línea. El punto al rededor del cual se verifica este equilibrio constante, es el centro de gravedad de la línea recta mencionada.

Todos saben que colocando el medio de un baston horizontal sobre la estremidad del dedo, ó sobre una punta cualquiera, se mantiene en equilibrio, y tambien se mantiene suspendiéndolo por el medio. Cuando hablemos de la palanca veremos que el equilibrio de la balanza es una aplicacion de este principio.

Supongamos ahora que se quiere averiguar el centro de gravedad del sistema de dos líneas rectas AB, CD, fig. 21, del mismo peso en toda su longitud, de modo que las longitudes AB, CD, representan los mismos pesos de estas rectas.

Podrá mirarse el peso de la recta AB como concentrado en el medio E, y el peso de CD como concentrado en el medio F.

Entonces se tendrán dos fuerzas paralelas, aplicadas la una en E y la otra en F, representadas por AB CD. Su resultante estará representada por AB+CD, y tendrá el punto H de aplicacion sobre la recta EF, determinado por la proporcion:

$$AB : CD :: HF : HE$$

$$\text{y } AB+CD : AB :: EF : HF;$$

$$\text{por lo que } \frac{AB \times EF}{AB+CD} = HF,$$

pues sabemos encontrar el valor del cuarto término de una proporcion. *Véase Geom. lec. V.*

Con el método que acabamos de indicar será muy fácil conocer el centro de gravedad de todas las líneas graves que se quiera, tomándolas de dos en dos. Se trata, por ejemplo, de buscar el centro de gravedad de las líneas rectas que forman el polígono rectilíneo AB CD, fig. 22. Tómense los puntos 1, 2, 3.... en medio de los lados AB, BC, CD,....; despues sobre la recta 1, 2, se encontrará el centro x de gravedad de las dos rectas AB, BC, por el método que se acaba de dar. Tirando x 3, y considerando el peso de las dos rectas AB, BC, como reunido en x, en su centro de gravedad se hallará el punto y, centro de gravedad de AB+BC, y de CD. Igualmente se hallará el punto z, centro de gravedad de AB+BC+CD y de DA, que es el centro de gravedad de las cuatro rectas AB, BC, CD, DA.

Convendria que los alumnos se ejercitasen en un polígono AB, CD de alambre de hierro, y atasen á él hilos de seda 1.2, x 3, y 4, &c., y así hallarian exactamente la posicion del centro de gravedad del polígono: en seguida suspendiendo con un nuevo hilo el polígono por el punto A, despues por el punto B, por el punto C.... verían que poniendo un hilo á plomo al lado del hilo de suspension, pasaria siempre por el centro de gravedad del polígono. Así se formarian esperimentalmente una idea mas clara y fácil de la propiedad de los centros de gravedad. Este ejercicio les enseñaria ademas una operacion muy útil, y los haria practicar el método geométrico de las líneas proporcionales (véase Geom. lec. V.)

En nuestro curso de Geometría hemos examinado con atencion la figura y las propiedades de las líneas simétricas de las superficies simétricas y de los volúmenes simétricos. La importancia de la simetría de las formas es todavía mayor para el mecánico que para el geómetra, y es un objeto sobre el cual nunca estará de mas llamar la atencion de los artistas.

Sea (fig. 23) una figura cualquiera ABCDED′C′B′A simétrica respecto al eje AE. Sea g el centro de gravedad del contorno ABCDE situado á la izquierda del eje de simetría.

Si doblamos la parte de la izquierda sobre la parte de la derecha se sobrepondrán exactamente, y no diferenciándose entonces ni en tamaño, forma ni posicion, será necesario que su centro de gravedad se encuentre en el mismo punto. Luego g' centro de gravedad de AB′C′D′E está en una posicion simétrica respecto á g, es decir, que gg' estan igualmente distantes del eje y situadas sobre una recta gg', perpendicular á este eje.

Siendo de igual peso los dos contornos simétricos ABCDE, AB′C′D′E estan representados por dos fuerzas iguales, aplicadas la una en g y la otra en g'; y su resultante igual á su suma está en medio de gg', es decir, en G sobre el eje de simetría; luego....

El centro de gravedad de una línea simétrica cualquiera está necesariamente colocado sobre el eje de simetría.

Observemos que la superficie plana, terminada por su contorno simétrico, es simétrica con respecto al mismo eje que el contorno.

Podemos suponer que este contorno termina una superficie plana, de igual peso en todas sus partes, como una hoja de papel, de metal, &c. Entonces si gg' representan los centros de gravedad de las superficies situadas á derecha é izquierda del eje de simetría, la recta gg' es siempre perpendicular en G al eje, y Gg, igual á Gg'. Luego *el centro de gravedad de cualquiera superficie plana simétrica, está situado sobre el eje de simetría.* Por consiguiente, *si se suspenden por un punto del eje unos marcos de cualquiera figura, pero simétricos, el eje de simetría se situará siempre en posicion vertical.* En efecto, el peso de la figura obra como si todo él estuviese reunido en el centro de gravedad, y ademas la direccion vertical de esta fuerza se supone que pasa por el punto fijo de suspension. Luego la fuerza se destruye por el obstáculo, y por consiguiente el marco queda en equilibrio.

Nuestras habitaciones estan adornadas con muchos marcos. Cualquiera que sea su figura todos son de forma simétrica, todos deben tener el punto de suspension colocado en el eje de simetría, y choca á nuestra vista cuando no se ha observado bien esta regla.

Para fijar las ideas sobre las consideraciones generales que acabamos de presentar, pondremos algunos ejemplos sencillos. En todas las figuras de que vamos á hablar indicaremos con la letra G el centro de gravedad.

El centro de gravedad G, tanto del contorno como de la superficie de un marco triangular simétrico A B C, (fig. 24) está colocado sobre la vertical que pasa por el vértice A, y por el medio de la base B C del triángulo A B C.

Ya se suspenda este marco por el vértice A (fig. 24) ó ya por el medio D de la base B C (fig. 25), como estos dos puntos estan en el eje de simetría, la posicion del equilibrio del marco es aquella en que el eje A D se halla en posicion vertical.

Suspendamos un marco que tenga la forma de un trapecio simétrico A B C D: 1.° por el medio E de su base menor A B, como en la fig. 26: 2.° por el medio F de su base mayor C D, como en la fig. 27. Para que haya equilibrio será preciso que el eje de simetría E F, que contiene el centro de gravedad G del contorno y el de la superficie del trapecio, se sitúe en posicion vertical.

La demostracion que hemos dado para hacer ver que el centro de gravedad de un contorno plano y de una superficie plana simétrica respecto á un eje, está situado necesariamente sobre este eje, se aplica igualmente á las figuras terminadas por líneas rectas ó por líneas curvas. De aqui resultan las consecuencias siguientes.

Todo arco de círculo A B C (fig. 28) es simétrico respecto al rádio O B que pasa por el medio de este arco. Luego el centro G (1) de gravedad, ya del contorno ya de la superficie de este arco de círculo, está situado sobre el radio O B. De consiguiente, si se suspende el arco de círculo A B C por el medio B, los dos estremos A C estarán en la misma horizontal en la posicion de equilibrio.

(1) *En el arco de círculo y en el trapecio, debe notarse que el centro de gravedad del contorno no tiene la misma posicion que el centro de gravedad de la superficie.*

Lo mismo sucederá respecto de la superficie del segmento A B C y de la del sector O A B C. Trastornando la figura se tiene otra posicion de equilibrio, (fig. 29). Si el punto de suspension está siempre sobre el rádio O B, este rádio conserva en este caso como en el anterior la posicion vertical.

La parábola y la hipérbola, siendo simétricas con relacion al eje que pasa por su vértice, si se toman partiendo del vértice B de una de estas curvas (fig. 30) dos porciones B A = B C de esta curva, el centro de gravedad de la curva estará sobre el eje. Luego si se suspende esta curva por su vértice B, estará en equilibrio cuando el eje B D siga la direccion vertical.

Hay figuras que tienen dos ejes de simetría A B, C D. Tales son los rectángulos (fig. 31 y 32), y los rombos (fig. 33 y 34). En estas figuras ha de encontrarse el centro de gravedad G sobre cada uno de los ejes de simetría, y se halla necesariamente sobre el punto G, comun á todas ellas, es decir, en el centro de simetría.

Luego *el centro de gravedad de los contornos y de las superficies simétricas con respecto á dos ejes se encuentra en el punto de interseccion de estos ejes, es decir, en el centro de simetría.*

Todos los polígonos regulares son simétricos con respecto á muchos ejes; lo que presenta tantas suspensiones simétricas diferentes como ejes de simetría hay. Luego *el centro de gravedad del contorno y el de la superficie de los polígonos regulares, estan uno y otro situados en el centro de simetría de estos polígonos.*

La elipse (fig. 35 y 36) es simétrica con respecto á sus dos ejes A B, C D. Luego *el centro de gravedad G del contorno y de la superficie de la elipse está en el centro de simetría de esta curva.*

El círculo (fig. 37) es simétrico respecto á cada uno de sus diámetros A B, C D.... luego....

El centro de gravedad del contorno y de la superficie de un círculo está en el centro del círculo.

Asi por cualquiera punto del contorno de un marco poligonal regular ó de un contorno elíptico ó de un contorno circular, que se suspenda este marco, el centro de simetría estará situado en el *aplomo* del punto de suspension.

Centro de gravedad de las superficies. Para hallar su posicion se sienta que las superficies son como hojas delgadas de papel ó de metal, de igual grueso y peso por todas partes en la misma superficie.

Centro de gravedad del triángulo. Cuando se quiere encontrar el centro de gravedad del area de un triángulo A B C (fig. 38), se divide el triángulo en un gran número de fajas paralelas, y muy angostas, que se consideran como rectas pesadas. Su centro de gravedad se encuentra en la línea recta A E que las corta todas por medio, segun la propiedad de las líneas proporcionales. Luego el centro G del conjunto de estas fajas, ó lo que es lo mismo, del triángulo total, está sobre la recta A E, tirada desde A hasta el medio de B C. Lo mismo se demostrará que está sobre B F y sobre C K tirada desde B y C al medio de A C y de A B. Luego el centro de gravedad del triángulo está en el punto G, comun á las tres líneas A E, B F, C K. Ahora supuesto que los puntos K E estan en el medio de A B y de B C, la recta K E es paralela á A C. Las líneas proporcionales (Geometría lec. V.) dan 1 : 2 :: B K : B A :: K E : A C :: E G : G A.

Luego E G = $\frac{1}{2}$ G A y E G = $\frac{1}{3}$ A E.

Asi, 1.° *el centro de gravedad del triángulo está situado en la línea recta que une el vértice y el medio de la base*: 2.° *está en el tercio de esta línea, partiendo de la base.*

Centro de gravedad del cuadrilátero. A B C D (fig. 39.) Para encontrarlo se buscará primero el centro de los triángulos A B C, A D C, tirando E B, E D por la mitad de A C, y tomando E O = $\frac{1}{3}$ E B, E O′ = $\frac{1}{3}$ E D; despues uniendo O y O′ por una recta, se hallará la resultante de las dos fuerzas paralelas F = A B C, F′ = A D C aplicadas en O y O′. El punto de aplicacion G de la resultante será el centro de gravedad del cuadrilátero.

Es mas fácil hallar el centro de gravedad de los cuadriláteros que tienen alguna regularidad.

En el trapecio A B C D (fig. 41) el centro de gravedad G se encuentra en la línea E F que divide en partes iguales todas las fajas formadas por las rectas paralelas á las bases.

Las superficies del paralelógramo, del rombo, del rectángulo y del cuadrado, tienen su centro de gravedad en la interseccion de las dos diagonales. (Véase fig. 40, 33, 34, &c.)

Con efecto, cada diagonal divide estas figuras en dos triángulos iguales, y la segunda diagonal que corta la primera por el medio, contiene los centros de gravedad de los dos triángulos. Luego el centro de gravedad de la figura se encuentra en la segunda diagonal, y lo mismo se demostraría que está en la primera: luego está en las dos, y de consiguiente en el punto en que se cruzan.

Si dividiésemos una superficie simétrica cualquiera plana ó curva (fig. 23) en fajas paralelas entre sí y perpendiculares al eje de simetría, el centro de gravedad de cada faja estará en el eje ó en el plano de simetría. Luego el centro de gravedad de una area simétrica está en el eje ó en el plano de simetría.

Cuando un area tiene dos ejes ó dos planos de simetría, su centro de gravedad está en la interseccion de los dos ejes, que es el centro de la figura.

De consiguiente, en las areas planas que tienen dos ejes de simetría, el centro de gravedad está en el centro de simetría como lo demostramos al hablar de los contornos simétricos. Pasemos á las areas ó superficies curvas.

Una superficie curva ó compuesta de muchos planos es simétrica con relacion á un eje, cuando cualquiera seccion hecha en la superficie perpendicularmente al eje, tiene el centro de simetría colocado en este eje. El volúmen terminado por la superficie simétrica es igualmente simétrico con relacion á este eje.

Si en la superficie ó volúmen se hacen muchas secciones perpendiculares al eje, y muy juntas, se podrán considerar las secciones del sólido como superficies pesadas, cuyo centro de simetría está en el eje. Por consiguiente, la resultante de su peso estará en el mismo eje, y todas las resultantes pasarán por el eje que suponemos vertical. Luego su resultante única se dirigirá segun este eje; luego en fin....

Los volúmenes, así como las superficies curvas que son simétricas con relacion á un eje, tienen el centro de gravedad en este eje de simetría.

Cuando en un volúmen hay dos ejes de simetría, tiene un *centro de simetría* que se encuentra en estos dos ejes, y que es tambien el centro de gravedad de la superficie ó volúmen.

Las artes nos ofrecen un gran número de figuras que tienen un eje de simetría: por ejemplo, todas las superficies de revolucion. Cuando se suspenden estas superficies por un punto cualquiera de su eje, la posicion de equilibrio de la superficie ó volúmen, es aquella por la cual es vertical el eje.

Las arañas que se cuelgan, ya con una cuerda ó con una cadena en las casas, palacios y templos, son simétricas con relacion á un eje. Atase la araña por uno de los puntos del eje, y en la posicion de equilibrio toma el eje la posicion vertical; lo mismo sucede con el hilo á plomo A B (*fig.* 37) duplicada. El

plomo B es un cuerpo simétrico con respecto á un eje á que está atado el hilo.

No solo es vertical el eje cuando está la araña en reposo. Permanece vertical, 1.º si la araña sube ó baja moviendo verticalmente el punto donde está atada: 2.º cuando la araña gira sobre sí misma. Por consiguiente, á no ser que reciba algun choque oblícuo y solo por un lado, guardará la araña su posicion vertical.

Lo mismo sucede con el hilo á plomo, y esta cualidad justifica su uso.

Mas adelante se verá que ha hecho la industria muchas aplicaciones interesantísimas de la propiedad que tienen los ejes de simetría de contener el centro de gravedad de los cuerpos. Antes de ir mas lejos haremos conocer otras propiedades muy importantes de las fuerzas paralelas y de los centros de gravedad.

Momentos de las fuerzas paralelas. Las dos fuerzas paralelas X Y (fig. 43) aplicadas á los puntos A y B de la recta A B teniendo á Z por resultante aplicada en O sobre A B, se tiene

$$X \times OA = Y \times OB.... X : Y :: OB : OA.$$

Tiremos $m\,O\,n$ perpendicular á la direccion de las fuerzas paralelas, se tendrá....

OB : OA :: On : Om (Geom. lec. V. *Líneas proporcionales.*)

Luego tambien X : Y :: On : Om y $X \times On = Y \times Om$.

Permaneciendo lo mismo X y Om se puede suponer la distancia On subdupla; entonces es menester que la fuerza Y se duplique para que el producto sea constante y haya equilibrio. Puede suponerse la distancia On *subtripla*: entonces es menester que la fuerza Y sea *triple*. Se puede suponer la distancia On subcuadrupla; y entonces es necesario que la fuerza Y sea *cuadrupla* &c. Asi la accion de una fuerza Y sobre una resistencia Z′ igual y opuesta á Z para equilibrar una fuerza paralela X, se aumenta 1.º proporcionalmente á la distancia On de la direccion de esta fuerza al punto en que se halla colocada la resistencia. Este producto que mide la eficacia de la fuerza sobre una resistencia colocada en O, es lo que se llama *momento* de la fuerza con relacion al punto O. $X \times Om$ es el momento de X, lo mismo que $Y \times On$ es el momento de Y. La condicion de equilibrio $X \times Om = Y \times On$ se espresa diciendo:

Para que dos fuerzas paralelas X Y esten en equilibrio alrededor de un punto resistente O, es menester que el momento de las dos fuerzas, tomado con respecto á este punto, sea igual por una y otra parte.

Es menester ademas que las dos fuerzas X Y procuren hacer girar la recta en sentido opuesto.

Podría colocarse la resistencia en A (fig. 43) y considerar el equilibrio de dos fuerzas Y Z′ obrando en sentidos contrarios. Tirando $A\,p\,q$ perpendicular á la direccion de las fuerzas paralelas, se tendría:

$$Y : Z' :: A\,O : A\,B :: A\,p : A\,q.$$

Asi en este caso como en el anterior, el producto de los momentos es igual entre la fuerza Y y la fuerza Z′, que hace equilibrio á X y á Y, asi como entre la fuerza Y y la Z resultante de X é Y. Tiremos ahora una recta cualquiera Amn (fig. 44) por el punto A, y las perpendiculares Om Bn á esta recta. Las propiedades de las líneas proporcionales (*véase lec. V. Geom.*) nos darán:

$$Y : Z' :: A\,O : A\,B :: Om : Bn.$$

de donde.... $Y \times Bn = Z' \times Om$.

El producto de la fuerza Y por la distancia de su punto B de aplicacion á la recta Amn, y el producto de la fuerza Z′ por la distancia de su punto de aplicacion O á la recta Amn, son los *momentos* de Y y Z *tomados con respecto á la recta* Amn, recta que se llama entonces *eje de los momentos.*

Asi que, 1.° Cuando el eje de los momentos pasa por el punto de aplicacion de la fuerza X en equilibrio con las fuerzas paralelas Y y Z′, el momento de Y,

es igual al momento de Z′, y los dos momentos obran en sentidos contrarios.

Si tiramos L M N paralela á $A\,m\,n$, despues A L, $O\,m\,M$, $B\,n\,N$ perpendiculares á estas paralelas, tendremos

$$A\,L = N\,n = M\,m$$

pero $X + Y = Z'$

luego $X \times A\,L + Y \times N\,n = Z' \times M\,m$

y á $Y \times B\,n = Z' \times O\,m$,

por consecuencia $X \times A\,L + Y \times B\,N = Z' \times O\,M$.

Luego tomando una recta cualquiera L M N por eje de los momentos, la suma de los momentos de dos fuerzas paralelas X Y equivale al momento de la fuerza Z′ que les hace equilibrio, y por consiguiente al momento de la resultante Z de X y de Y, supuesto que $Z = Z'$.

Supongamos ahora que tenemos tres fuerzas componentes X Y U (fig. 45.) Refirámoslas á un eje cualquiera de los momentos $M\,m$:

1.°......... $X \times A\,x + Y \times B\,y = Z' \times D\,z'$

2.°......... $Z' \times D\,z' + U \times C\,u = Z \times E\,z$

Luego $X \times A\,x + Y \times B\,y + U \times C\,u = Z \times E\,z$

Asi, *los momentos de tres fuerzas dan una suma igual al momento de su resultante.*

Del mismo modo se probará que en un plano la suma de los momentos de cuatro, cinco, seis fuerzas, en una palabra, de un número cualquiera de componentes, es igual al momento de su resultante, cualquiera que sean la posicion y la direccion del eje de los momentos.

Por consiguiente, tirando desde cada punto de aplicacion de las fuerzas una perpendicular al eje de los momentos, el producto de la resultante por la distancia que corresponde á su punto de aplicacion, es igual á la suma de los productos correspondientes á todas las componentes.

Esta notable propiedad proporciona las aplicaciones mas importantes á los cálculos del movimiento de los cuerpos así como al de las máquinas. Conviene, pues, que los alumnos la fijen en la memoria, formándose de ella una idea exacta.

Esta misma propiedad sirve para conocer inmediatamente la posicion del punto de aplicacion de la resultante de todas las fuerzas paralelas que se quiera, sin necesitar tomarlas de dos en dos, de tres en tres, &c.

Se tiran dos líneas en ángulo recto OX, OY (fig. 46); despues desde los puntos de aplicacion A,B,C,D,.... de las fuerzas P,Q,R,S, se bajan sobre OX y OY las perpendiculares Aa, Bb, Cc.... y Aa', Bb', Cc'. Sentado esto, y siendo G el punto de aplicacion de la resultante Z se tiene,

$$Gg \times Z = Aa \times P + Bb \times Q + Cc \times R + \ldots$$
$$Gg' \times Z = Aa' \times P + Bb' \times Q + Cc' \times R + \ldots$$

Luego,

$$\text{(I.)}\quad Gg = \frac{Aa \times P + Bb \times Q + Cc \times R + \ldots}{Z}$$

$$\text{(II.)}\quad Gg' = \frac{Aa' \times P + Bb' \times Q + Cc' \times R + \ldots}{Z}$$

Recordemos que la resultante Z es igual á la suma de todas las componentes.

Si las fuerzas P,Q,R,S son iguales y en número n, su resultante $= n \times P$. Entonces la igualdad de los momentos da:

$$Gg \times Z = Aa \times P + Bb \times Q + Cc \times R + \ldots$$
$$Gg \times n \times P = Aa \times P + Bb \times Q + Cc \times R + \ldots,$$

Luego $$Gg = \frac{Aa + Bb + Cc + \ldots}{n}$$

Así, cuando las fuerzas componentes son iguales entre sí, si se toma en cada una la distancia de su punto de aplicacion al eje de los momentos, y se divide la suma de estas distancias por el número de las fuerzas,

se tiene la distancia del eje al punto de aplicacion de la resultante.

Este resultado puede ser de mucho uso en las artes.

Si se tienen solo tres fuerzas iguales á P, aplicadas á los tres vértices A,B,C de un triángulo (fig. 47), y se toma la base AB del triángulo por eje de los momentos, entonces la distancia de este eje á los puntos de aplicacion de las fuerzas aplicadas á los vértices AB, es nula, y por consiguiente tambien su producto por P. Luego queda solamente llamando R á la resultante, $R \times Gg = P \times Cc$; pero $R = 3P$.; luego por compensacion $Gg = \frac{1}{3} Cc$.

Así, *el centro de gravedad de tres fuerzas iguales, aplicadas á los vértices de un triángulo está en el tercio de la distancia desde cada vértice á la base opuesta. Luego este centro es el mismo que el centro de gravedad del area del triángulo* (1), consecuencia muy notable y que muchas veces tiene su aplicacion en los cálculos de la mecánica.

Desde que se tienen las distancias Gg, Gg' (fig. 46) del punto G á las dos rectas OX, OY, se tiene la posicion del punto G, centro de aplicacion de las fuerzas.

Segun la misma difinicion de los centros de gravedad, el punto G es el centro de gravedad de las fuerzas P,Q,R,S,.... aplicadas en A,B,C,D,.... (2).

---

(1) *Por el mismo método se demostraría con igual facilidad que el centro de gravedad de cuatro fuerzas iguales, aplicadas á los vértices de una pirámide, es el mismo centro de gravedad del volúmen de la pirámide.*

(2) *Si las fuerzas paralelas no estan todas en un mismo plano, se sustituyen á los ejes de los momentos,* planos de momentos, *perpendiculares entre sí. Entonces se sustituyen las perpendiculares de los ejes Aa Bb con perpendiculares de los planos. En todos los casos la suma de los momentos de las componentes es igual*

El principio que acabamos de esponer, y el método que proporciona, se aplican inmediatamente para encontrar la posicion del centro de gravedad de cuantas fuerzas se quiera, distribuidas con continuidad ó sin ella sobre líneas, superficies ó volúmenes.

Para hallar el centro de gravedad de una línea pesada AB, (fig. 48) se la divide en muy pequeñas partes de igual peso, se multiplica cada una de estas partes por su distancia á una recta OX, despues á una OY; se divide sucesivamente la suma de unas y otras por la suma de las fuerzas, y se tiene: 1.° Gg; 2.° Gg'.

La esplicacion de los métodos siguientes para hallar el centro de gravedad de las superficies y de los volúmenes solo es indispensable en los puertos.

Los fabricantes de naves tienen necesidad de medir la superficie de las velas y de fijar, 1.° la posicion del centro de gravedad de cada vela, 2.° el centro de gravedad del conjunto de estas velas. Con efecto, en igualdad de circunstancias cuanto mas elevado sobre el centro de gravedad se halle este último centro, llamado *centro de velamen*, tanta mayor energía tiene la fuerza del viento para inclinar el navío y hacerlo zozobrar.

Se admite que todas las velas girando alrededor de sus puntos de suspension estan inclinados á la vez hácia el plano de simetría del buque. Divídense estas velas en triángulos, determinando luego la superficie de estos y su centro de gravedad. Supongamos (fig. 46) que las fuerzas paralelas P, Q, R,.... que representan la superficie de estos triángulos esten aplicadas á los puntos A, B, C, centros de gravedad de los mismos triángulos: las dos fórmulas (I) y (II) de la pág. 74 darán inmediatamente las distancias Gg, Gg' del centro G del velamen á dos ejes OX, OY, uno horizontal y otro vertical, lo cual bastará para dar á conocer la posicion del centro de velamen en el plano de simetría de la nave.

al momento de la resultante. Esto seria muy fácil de demostrar por las propiedades de las líneas proporcionales. Geom. lec. V.

Sea el area plana A M, $m\,a$, (fig. 49) terminada por una curva A M, y por tres rectas en ángulo recto A a, $a\,m$, m M: se pide el momento de esta area con respecto á la recta $a\,m$.

Dividamos la recta $a\,m$ en un gran número de partes, cuya longitud sea igual á l, y tiremos por los puntos de division las rectas Bb, Cc, Dd, paralelas á A a y Mm.

1.° Si se consideran las porciones pequeñas A B, B C, C D.... de la curva A B C D.... como líneas rectas, se tiene superficie A a m M $= l$ $(\frac{1}{2}\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d + \ldots \frac{1}{2}\mathrm{M}m)$

Supongamos primero que se sustituye á la figura contínua $m\,a$ A B C D, la figura en escalones $m\,a$ A b' B c' C d' D...., los centros de gravedad q, q', q'' de estas figuras estarán distantes de $a\,m$ cantidades respectivamente iguales á $\frac{1}{2}$ Aa, $\frac{1}{2}$ Bb, $\frac{1}{2}$ Cc....

Luego los momentos de los rectángulos que componen la figura en escalones serán con respecto al eje $a\,m$:

$$\text{En } \mathrm{A}a\,bb' = l \times \mathrm{A}a \times \tfrac{1}{2}\mathrm{A}a$$
$$\mathrm{B}b\,cc' = l \times \mathrm{B}b \times \tfrac{1}{2}\mathrm{B}b$$
$$\mathrm{C}c\,dd' = l \times \mathrm{C}c \times \tfrac{1}{2}\mathrm{C}c\ldots$$

$$\text{Momento total} = \tfrac{1}{2}\,l\,(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}c^2 + \mathrm{M}'\,m')^2.$$

*Asi el momento total es igual á la suma de los cuadrados de las líneas A*a, *B*b, *C*c.... *multiplicada por la mitad del ancho de las bases iguales.*

Si se toma la figura en escalones $m\,a$ Aa' Bb'' Cc''.... M se tendrá del mismo modo por momento total,

$$\tfrac{1}{2}\,l \times (\mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}c^2 + \mathrm{D}d^2 + \ldots + \mathrm{M}m^2)$$

He aquí dos momentos entre los cuales está el de la superficie contínua $m\,a$ A M.

1.er Momento menor $\frac{1}{2}\,l\,(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}c^2 + \ldots \mathrm{M}'m^{2\prime}$

2.° Momento mayor $\frac{1}{2}\,l\,(\ldots \mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}c^2 + \ldots \mathrm{M}'m^2 + \mathrm{M}'m^2)$

Tomando el momento medio se tiene

$$\tfrac{1}{2}\,l\,(\tfrac{1}{2}\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}c^2 + \ldots \mathrm{M}'m'^2 + \mathrm{M}\,m.^2)$$

Luego *el momento del area ó superficie* M m a A *es igual á la mitad del ancho* l *de todas las porciones multiplicado por la suma de* *los cuadrados de las longitudes intermedias B* b, C c, *y por la mitad del cuadrado de las longitudes estremas A* a, *M* m.

El valor que se acaba de hallar se aproximará tanto mas al verdadero cuanto mayor sea el número de las porciones.

Si dividimos ahora el momento que acabamos de encontrar por el area $m\,a$ A M, tendremos la distancia G g del eje $a\,m$ al centro de gravedad G de esta area.

$$\text{Así G } g = \frac{\frac{1}{2}\text{A}a^2 + \text{B}b^2 + \text{C}c^2 + \ldots + \frac{1}{2}\text{M}m^2}{\text{A}a + 2\text{B}b + 2\text{C}c + \ldots + \text{M}m}$$

Es fácil calcular el valor de esta fraccion, pues solo basta para ello tener paciencia.

Sería igualmente fácil hallar su valor por la geometría, valiéndose de triángulos rectángulos, teniendo presente el principio de que el cuadrado del lado mayor es igual á la suma de los cuadrados de los dos lados menores.

Así se ve cuán útiles son las propiedades espuestas en la geometría para resolver las cuestiones de la mecánica.

El método que acabamos de esponer es general, y se aplica á las superficies de cualesquiera figuras.

Supongamos que se desea encontrar la distancia del eje X Y al centro de gravedad G del area A B C.... M c' b' A (fig. 30). Tiremos las paralelas equidistantes Aa, Bb'b, Cc'c, Dd'd.... Sean G' G'' los centros de gravedad de $m\,a$, A B C D M y de $m\,a$ A b' c' d'.... M, tendremos

$$\text{G}'g' = \frac{\frac{1}{2}\text{A}a^2 + \text{B}b^2 + \text{C}c^2 + \frac{1}{2}\text{M}m^2}{\text{A}a + 2\text{B}b + 2\text{C}c + \ldots \text{M}m}$$

$$\text{G}''g' = \frac{\frac{1}{2}\text{A}a^2 + b'b^2 + C'c^2 + \ldots \frac{1}{2}\text{M}m^2}{\text{A}a + 2bb' + 2Cc' + \ldots \text{M}m}$$

1.er Momento A B C D M $m\,a$.... $= \frac{1}{2}l(\frac{1}{2}\text{A}a^2 + \text{B}b^2 + \text{C}c^2 + \ldots + \frac{1}{2}\text{M}m)$

2.º Momento $a'b'c'$ M $m\,a$.... $= \frac{1}{2}l(\frac{1}{2}\text{A}a^2 + b'b^2 + cc^2 + \ldots + \text{M}m)$

Dividida la diferencia de estos momentos por la diferencia de las superficies, es decir, por la superficie propuesta A B C D M d' c' b' A, dará la distancia Gg del centro de gravedad de esta superficie al eje X Y de los momentos.

Con la figura 49 es muy fácil hallar la distancia Gg' del centro de gravedad G con respecto al eje a A perpendicular á $a\,m$.

Si calculamos con respecto á a A el momento de las porciones paralelas en escalones y menores tendremos:

1.er *Momento* de A$a\,bb'$ $= \frac{1}{2}l \times l \times \text{A}a$;

2.º *Momento* de B$b\,cc'$ $= \frac{3}{2}l \times l \times \text{B}b$

3.er *Momento* de C$c\,dd'$ $= \frac{5}{2}l \times l \times \text{C}c$

(I) *Momento total* $\frac{1}{2}l^2(\text{A}a + 3\text{B}b + 5\text{C}c + 7\text{D}d + \ldots)$

Si hacemos las porciones en escalones mayores que el area contínua $m\,a$ A B C D E, tendremos:

Momento de $a''\,a\,b$ B $= \frac{1}{2}l \times l \times \text{B}b$

Momento de $b''\,b\,c$ C $= \frac{3}{2}l \times l \times \text{C}c$

Momento de $c''\,c\,d$ D $= \frac{5}{2}l \times l \times \text{D}d$

Luego el *momento total* es

(II) $\frac{1}{2}l^2(\text{B}b + 3\text{C}c + 5\text{C}c + 7\text{D}d + \ldots)$

Tomando la mitad de la suma de los dos momentos (I) y (II) se tiene

(III) $\frac{1}{2}l^2(\text{A}a + 2\text{B}b + 4\text{C}c + 6\text{D}d + 8\text{E}e\ldots)^2$

continuando así hasta Mm, que deberá multiplicarse, no por el doble del número de las porciones á que corresponde, sino por el número solo.

Este momento (III), dividido por la superficie A B C D,.... es igual á Gg'

Los fabricantes de naves necesitan determinar la superficie, el centro de gravedad y el momento de varias secciones horizontales, hechas en la carena y terminadas en los contornos que llaman *líneas de agua* y *líneas de flotacion*. El método mas sencillo que puede emplearse es el que acabamos de esponer. Este método familiar á todos los oficiales de ingenieros de marina, debería serlo tambien á los fabricantes de naves mercantes. Lo mismo sucede con el método que vamos á esponer para determinar la posicion del centro de gravedad, de los sólidos y el momento de los mismos.

Reduzcamos la posicion del centro de gravedad del cuerpo sólido á dos planos de proyeccion que se corten en ángulo recto, tales como se emplean en la Geometría. *Véase Geom. lec. XIII.*

Cortemos el cuerpo en porciones verticales de igual grueso I, II, III,... y en porciones horizontales 1, 2, 3, tambien de igual grueso, señalando el órden de las cifras el de las porciones.

Supongamos (fig. 50) que el area ABCD sea la base de un cilindro recto, el centro de gravedad del cilindro, se proyectará horizontalmente sobre el centro de gravedad del area. Las fórmulas anteriores nos darán inmediatamente la distancia del centro de gravedad de este cilindro, con respecto á dos ejes perpendiculares entre sí.

Figurémonos que se divide un volúmen cualquiera, una nave, por ejemplo, en muchas porciones horizontales equidistantes, representadas en un plano (fig. 51), y que la superficie del buque en lugar de ser continua sea en escalones, de modo que presente como tramos de escalera contorneados segun la forma del sólido; cuanto mas se multipliquen estos escalones, menos se diferenciará el cuerpo en escalones del cuerpo de superficie continua. Por último, supongamos que es h la altura vertical de todas las porciones ó escalones.

1.° El volúmen de cada tramo de escalera será $h\times$ por la superficie de la porcion que sirve de base al escalon.

2.° El centro de gravedad del tramo se proyectará horizontalmente sobre el centro de gravedad de la porcion que sirve de base á este escalon.

3.° La altura h multiplicada por el momento de la porcion, es igual al momento del mismo escalon que tiene por base el area de esta porcion.

4.° La suma de los volúmenes de los escalones representa el volúmen total V del cuerpo propuesto.

5.° La suma de los momentos de los escalones representa el momento total del cuerpo propuesto.

Por último, si se toman los momentos con respecto al eje OY y su suma fuese M, se tiene inmediatamente $Gg'=\frac{M.}{U}$ Si los momentos se toman con respecto al eje OX y su suma fuese m, se tiene inmediatamente $Og=\frac{m.}{U}$

Ya se ve cuan sencillo y fácil es este método; y no se emplea solo por los teóricos sino que es útil á todos los ingenieros que quieren calcular con exactitud la posicion del centro de gravedad de un volúmen cualquiera. No dudamos repetir que este estudio es indispensable á los fabricantes de naves, y que muchas veces podría dar luces á los marinos acerca de las calidades de sus embarcaciones, si conociesen y aplicasen métodos semejantes.

Me contentaré con indicar la posicion notable del centro de gravedad de varias superficies y sólidos importantes á las artes, dejando á los alumnos que quieran llevar mas adelante sus estudios el cuidado de ver en tratados particulares la demostracion de los resultados que no hago mas que enunciar.

El centro de gravedad de un prisma ó de un cilindro está á igual distancia de la base superior é inferior. Cortando el prisma ó cilindro en dos partes iguales por un plano paralelo á ambas bases, el centro de gravedad de la seccion es el centro de gravedad del prisma ó del cilindro.

Si se toma el centro de gravedad de cada base de un prisma ó de un cilindro y se unen los dos centros por una recta, el medio de esta recta es el centro de gravedad, ya sea del prisma ó ya del cilindro (1).

(1) *Si el prisma es recto, el plano que le corta paralelamente á las bases á igual distancia de ellas, es un plano de simetría; luego contiene el centro de gravedad del prisma.*

Supongamos que se ha dividido el prisma en un

La suma de las aristas de un tronco del prisma triangular ó paralelipipedo, dividida por el número de las aristas, da la distancia de la base al centro de gravedad del tronco del prisma, midiendo esta distancia con una recta paralela á las aristas.

Si se toma el centro de gravedad de la base de una pirámide ó de un cono, y se la une con el vértice por medio de una recta; se toma despues el cuarto de esta recta partiendo de la base, ó los tres cuartos partiendo

---

número muy grande de rebanadas paralelas á las bases; los centros de gravedad de aquellas vendrán á ser, por decirlo asi, idénticos á los de la superficie de las rebanadas. Las rebanadas tendrán su centro de gravedad sobre una linea recta paralela á las aristas del prisma, y el centro del prisma estará en medio de esta recta. Si suponemos que las rebanadas se deslizan paralelamente unas sobre otras, de modo que los centros de las rebanadas permanezcan siempre en lineas rectas, se formará un volúmen en escalones, cuyo centro de gravedad estará siempre sobre la linea recta que une estos centros.

Cuanto mas delgadas y numerosas se supongan las rebanadas, tanto mas se acercará el volúmen en escalones á un prisma oblicuo, sin que por eso deje la posicion del centro de este volúmen de estar á igual distancia de los planos que terminan las rebanadas estremas.

Luego tanto en el prisma oblicuo como en el prisma recto, el centro de gravedad se encuentra en la mitad de la recta que pasa por el centro de gravedad de las bases.

La misma descomposicion del cilindro recto en cilindros en escalones, los cuales fuesen cada vez mas pequeños, haria ver que el centro de gravedad de un cilindro oblicuo ó recto, está en medio de la recta que une los centros de gravedad de las dos bases.

del vértice, el punto que se encuentra es el centro de gravedad, bien sea de la pirámide ó bien sea del cono (1).

El centro de gravedad de la superficie y del volúmen de la esfera está en el centro de simetría.

El centro de gravedad de un casquete esférico está sobre el eje de simetría ó ságita del casquete, y en el medio de esta ságita.

El centro de gravedad de la superficie y del volúmen de las superficies de revolucion, está situado sobre su eje de simetría.

Tiremos un plano que divida el eje de un cono recto circular, entero ó truncado, el triángulo ó trapecio de la seccion tiene por centro de gravedad el de la superficie del cono ó tronco del cono.

---

(1) *Dividiendo la pirámide en rebanadas muy delgadas por medio de planos paralelos á la base, se verá que los centros de estas rebanadas estan en el centro de gravedad de las secciones paralelas á la base. Pero estas secciones son semejantes, y sus puntos correspondientes estan en linea recta con el vértice de la pirámide; luego todos los centros de las rebanadas y por consiguiente el centro mismo de la pirámide, estan en la linea recta que une el centro de gravedad de la base con el vértice, lo que será cierto respecto de los cuatro vértices y de las cuatro caras opuestas á ellos.*

Sea g (fig. 42) el centro de gravedad de la base ABC de la pirámide $SABC$. Se tiene $Kg = \frac{1}{3} KB$, y lo mismo siendo g' el centro de gravedad de SAC dará $Kg' = \frac{1}{3} KS$. Luego si se tira $g'GB$ y gg', las dos lineas KS y KB estan cortadas proporcionalmente; asi gg' es el tercio de BS; lo mismo que Kg es el tercio de KS. Luego á causa de los triángulos semejantes Ggg', GBS, $Gg = \frac{1}{3} GS$, y por consecuencia $Gg = \frac{1}{4} Sg$. Luego, por último, el centro de gravedad de la pirámide está en el cuarto de la distancia del vértice al centro de gravedad de la base.

El centro de gravedad del volúmen de la semiesfera está en los tres octavos del rádio, partiendo del centro.

El centro de gravedad de un segmento de parábola está en los tres quintos de la sàgita partiendo del vértice.

El centro de gravedad de un segmento de volúmen paraboloide, formado por la revolucion de la parábola sobre su eje, está en los dos tercios del eje, partiendo del vértice.

Uso de los centros de gravedad para encontrar el volúmen de algunos cuerpos.

Ahora es menester esplicar y demostrar una interesante analogía entre la determinacion de algunos volúmenes y el centro de gravedad de algunas superficies.

Supongamos que se haya determinado el centro de gravedad G (fig. 52) de una superficie que gira alrededor de un eje O O′. En este movimiento el contorno O m n O describe una superficie de revolucion.

El volúmen comprendido en la superficie de revolucion, es igual á la superficie O m n O multiplicada por el círculo que ha corrido el centro G.

Para demostrarlo hagamos pasar por el eje O O′ dos planos O′p, O′q muy cercanos y formando entre sí un ángulo muy pequeño. Se podrá considerar el cuerpo como terminado por un lado cilíndrico entre estos dos planos. El tronco del cilindro tendrá por base O m n O sobre el plano O′p. Descompongamos esta base en cuadrados pequeños é iguales, y cada uno será la base de un prisma pequeño rectangular, terminado por el plano O′q.

Sea v x y z uno de estos cuadrados pequeños, por el centro i del cuadrado tiremos i i' u'' paralela al eje O O y tendrémos: volúmen del prisma a b c d cuya base es v x y z y cuya altura i i' i'' $= v\, x\, y\, z \times i'\, i''$.

Pero este producto es el momento de v x y z transportado sobre el plano O q con respecto á O p: luego la suma de los volúmenes de los prismas, es decir, el volúmen de la seccion p O q, es igual á la suma de los momentos del area O m n O en el plano O q con respecto al plano O p.

Proyectemos en G′ G″ el centro de gravedad G de O m n O, y tendrémos

Superficie O m n O $\times$ G′ G″ $=$ á la suma de los momentos de O m n O colocada en O q con respecto á O p.

Luego el producto

Superficie O m n O $\times$ G′ G″ es igual al volúmen de la parte del cuerpo de revolucion, comprendida entre O′ p y O″ q.

Pero G′ G″ es igual al espacio que el centro G ha de correr para pasar del plano O′ p al plano O′ q, cuando estos planos se suponen muy cerca uno de otro; luego por último:

La superficie O m n O multiplicada por el espacio G′ G″ que corre su centro de gravedad, cuando gira alrededor de su eje O O′, da un producto igual al volúmen de la parte del sólido de revolucion comprendida entre los planos O′ p *O′* q.

Podemos imaginar tantos planos como se quiera muy próximos unos á otros, y que pasen por el eje; siempre el volúmen de la parte del sólido de revolucion comprendida entre estos planos, estará representado por el producto del area O m n O, por el espacio que corra el centro de gravedad de esta area.

Asi cuando se forma un sólido por un area plana que gira alrededor de un eje, el volúmen de aquel es igual al producto del area por el espacio que corre en este movimiento el centro de gravedad del area.

La demostracion anterior será la misma si el area O m n O girando alrededor de O O′ á fin de pasar de O′ p á O′ q gira en seguida alrededor de otro eje trazado en el plano del area para describir una porcion mayor ó menor de una nueva superficie de revolucion; despues alrededor de otro eje trazado en el plano del area, &c.

En todos estos casos el volúmen terminado por cada nueva superficie, igualará á la superficie del area generatriz, multiplicada por el espacio que corre el centro de gravedad de esta area.

Aplicaciones. Este método tan sencillo lo emplean los arquitectos instruidos para calcular los volúmenes ó cantidades de piedra, madera ó hierro que contienen las escaleras de caracol, las bóvedas anulares, &c.; los ingenieros de caminos y canales para calcular los desmontes y los terraplenes de los canales; los artilleros para calcular el volúmen de las partes anulares, de las bocas de fuego, &c., &c. Los fabricantes de naves tienen tambien muchas ocasiones de aplicar en la cubicacion de las maderas el método general que acabamos de demostrar.

Importa mucho llamar la atencion de los alumnos sobre las relaciones íntimas de las propiedades de la Geometría y de la Mecánica. La Mecánica sin Geometría es una rutina sin teoría, un estudio á oscuras, ó mas bien un estudio *imposible*. La Mecánica á su vez hace importantes servicios á la Geometría, proporcionándola diversidad de instrumentos para ejecutar con notable exactitud y facilidad operaciones muy delicadas. Esforcémonos, pues, á manifestar cada vez mas las indispensables relaciones de estas dos utilísimas ciencias para aplicarlas de consuno á las artes.

LECCION QUINTA.

Continuacion de las leyes del movimiento.

Al estudiar las leyes del movimiento producidas por fuerzas dirigidas segun una misma línea recta, hemos visto que si dos fuerzas obran sobre un punto material en la misma direccion en un tiempo dado, el espacio total corrido en este tiempo, es el mismo que si el punto material se hubiese movido primeramente en virtud de la primera fuerza, y despues en virtud de la segunda.

Si suponemos, por ejemplo, que una nave que va viento en popa y camina uniformemente lleva un marino que anda con la misma uniformidad de la popa á la proa, y si suponemos que al cabo de un tiempo dado llega el marino á la proa siguiendo la direccion del rumbo de la nave, el espacio total corrido por el marino será el mismo que si primero hubiese andado de popa á proa en el tiempo dado, permaneciendo la nave en reposo; puesto que permaneciendo la nave en reposo el viento le hubiera impelido despues uniformemente en el tiempo dado con la velocidad primitiva de la nave.

No solo los espacios corridos son los mismos en ambos casos, sino tambien la fuerza total empleada en mover el hombre y la nave, porque no ha sido necesaria mas fuerza para la nave y el marino, aunque hayan efectuado sus movimientos en el mismo tiempo ó sucesivamente.

En ambos casos el espacio total corrido en virtud de las dos fuerzas que obran á la vez, es la suma de los espacios corridos cuando obran separadamente la fuerza que hace andar la nave por una parte, como la que hace adelantar al hombre por la otra.

En tanto que adelanta la nave, admitamos por el contrario que retrocede el marino de proa á popa. El efecto es el mismo que 1.º si permaneciendo el marino desde luego en reposo, ejecutase la embarcacion su movimiento progresivo. 2.º Si permaneciendo en reposo la embarcacion retrocediese el marino de proa á popa. El espacio corrido cuando estos dos movimientos se efectúan á un tiempo, es igual á la diferencia de los espacios corridos. 1.º Cuando el marino está animado solo de su propia fuerza. 2.º Cuando solo está animado de la fuerza que hace adelantar el buque.

Esta propiedad que tiene la materia de correr el mismo espacio total en un tiempo dado, cuando obran á la vez varias fuerzas en la misma direccion, y cuando cada una de ellas obra sucesivamente en este mismo tiempo; esta propiedad, no solo pertenece á los cuerpos impelidos al movimiento por fuerzas dirigidas segun una misma línea recta, sino que es general cualquiera que sea la direccion de las fuerzas.

He aquí un ejemplo muy sencillo y familiar de estos movimientos combinados. Colóquese uno en una nave y paséese de un lado á otro cuando aquella está parada. Al adelantarse la nave en el sentido de su longitud, el movimiento transversal del que está dentro, no por eso dejará de continuar con la misma velocidad uniforme mientras emplee la misma cantidad de fuerza para moverse.

Si se tira un tiro de fusil ó de pistola desde un punto á otro de la nave, la bala llegará del mismo modo al blanco, ora esté el buque en reposo, ora esté en movimiento, con tal que no varíe el movimiento en el espacio que corre la bala, disparada desde el arma hasta el objeto apuntado. He aquí el camino que debe seguir esta bala.

Supongamos que la bala ó el cuerpo cualquiera que sea A (fig. 53) esté impelida por dos fuerzas que representen las ságitas AX y AY. La primera fuerza obrando sola, hará correr en tiempos iguales al cuerpo A es-

pacios iguales $A\,b$, $b\,c$, $c\,d$.... en la línea recta $A\,x$, prolongacion de AX. La segunda fuerza obrando sola hará correr en los mismos tiempos iguales, al cuerpo A, espacios iguales $A\,b'$, $b'\,c'$, $c'\,d'$.... sobre la línea recta $A\,y$, prolongacion de A Y.

Si en el primer tiempo obra sola la fuerza AX, transporta el cuerpo A á b; despues si obra sola la fuerza AY, en un tiempo igual en su misma direccion, hace correr al cuerpo A una línea $b\,B$ igual y paralela á $A\,b'$.

Si la fuerza AX obra sola en los dos primeros tiempos, transporta el cuerpo A á c; despues si la fuerza AY obra sola en dos tiempos iguales á los dos primeros, hace correr al cuerpo A una línea cC, igual y paralela á $A\,c'$, y asi sucesivamente.

Por último, los puntos B, C, D.... á que se encuentra transportado el cuerpo, cuando se hacen obrar de este modo á su vez las dos fuerzas AX y AY, son los puntos á que llegaría este cuerpo, suponiendo que las dos fuerzas obren á la vez á un mismo tiempo. Ademas la propiedad de las líneas proporcionales, *Geometría, lec. V.*

$$Ab : bB :: Ac : cC :: Ad : dD \ldots.$$

exige que los puntos A, B, C, D.... esten en línea recta, y que las figuras $Ab\,Bb'$, $Ac\,Cc'$, $Ad\,Dd'$, sean paralelógramos que tengan todos la diagonal colocada en la recta A B C D.... Luego cuando un cuerpo está impelido por dos fuerzas, se mueve en línea recta y sigue la diagonal del paralelógramo, cuyos lados representan cada uno de por sí el espacio que correría este mismo cuerpo, á no estar impelido en el mismo tiempo mas que por una de las dos fuerzas componentes.

Asi cuando las dos fuerzas componentes estan representadas en magnitud y direccion por las rectas Ab, $A\,b'$, su resultante está igualmente representada en magnitud y direccion por la diagonal del paralelógramo Ab, Bb', cuyos lados son $A\,b$, $A\,b'$. Hé aquí lo que ha de entenderse por el *paralelógramo de fuerzas* (1).

---

(1) *La propiedad del paralelógramo de fuerzas* puede demostrarse rigorosamente (1).

Sean dos fuerzas cualesquiera X, Y, (fig. 54) representadas por las rectas AM, AN. Con estas rectas como lados acabemos el paralelógramo AMIN. Apliquemos en N sobre IN, y su prolongacion dos fuerzas opuestas x y *iguales á Y, que se destruirán mutuamente, y la resultante de X y de Y será la misma.*

Combinemos ahora X con x, *y tambien Y con* y. 1.° *Dirigida S segun HK, y siendo la resultante de las fuerzas paralelas X,* x, *se tiene*

$$x : X :: AN : NI :: AH : HN.$$

Pero siendo HK paralela á NI, la propiedad de las líneas proporcionales, Geometría lec. V, *da: AN : NI :: AH : HK, luego HK = HN. Tirando la recta KNR, el triángulo KHN tiene los ángulos HKN, HNK iguales entre sí, como tambien al ángulo KNI. Luego la recta KNR divide en dos partes iguales los ángulos ANI ó YN*y. *Siendo iguales las fuerzas Y*y, *la resultante de ellas R está situada en KNR, supuesto que no hay razon para que se acerque mas á una que á otra de las dos fuerzas Y*y.

Asi las dos fuerzas XY por una parte, y por otra las dos fuerzas S y R tienen la misma resultante. Pero la resultante de las dos primeras pasa por el punto A, comun á entrambas; la resultante de las dos segundas pasa por el punto K, comun á ellas; luego en fin, la resultante de X y de Y pasa por A y K, es decir, por AKY diagonal del paralelógramo AMIN,

(1) *Nota del traductor.* El raciocinio que hace el autor no es una *demostracion rigorosa*, es decir, que no es una *demostracion*, pues toda *demostracion*, si lo es, es *rigorosa* ó no es demostracion. ¿Qué es una *demostracion* que en *rigor* no es una *demostracion*?

A cada instante tiene aplicacion á los movimientos de nuestros miembros en el uso de los útiles que empleamos, y en los movimientos esteriores de los cuales participamos. Es importante considerar bien en cada caso si las fuerzas componentes de que hacemos uso estan dirigidas de manera que produzcan una resultante, dirigiendo aquella en el sentido que nos parezca conveniente, y si la cantidad de fuerzas perdidas es la menor posible. Puede asegurarse que este estudio, hecho con atencion y perseverancia, producirá en los talleres y fábricas una economía de fuerza y de tiempo, que tendrá las consecuencias mas importantes y evitará muchos riesgos graves. Daremos un solo ejemplo, por desgracia harto frecuente.

Cuando una persona asustada del movimiento rápido de un coche, salta por la portezuela, está animado su cuerpo, 1.° del movimiento horizontal del coche: 2.° de la fuerza vertical de la gravedad. La resultante

---

cuyos lados AM, AN representan las dos fuerzas componentes XY.

Para encontrar la magnitud de la resultante Z, dirigida segun AI (fig. 55), tomemos Z′ igual y directamente opuesta á esta fuerza. Entonces X, Y, Z′, se equilibran, y cada una de estas tres fuerzas es igual y directamente opuesta á la resultante de las otras dos.

Construyamos un paralelógramo que tenga la diagonal dirigida segun AM′, dos lados dirigidos segun AN y AI′ = AI, con AN por uno de los lados. Si se quiere que AN represente una de las componentes, y AM′ la direccion de una resultante X, dirigiéndose la componente Z segun AI′, es menester que AI′ sea un lado del paralelógramo ANM′I′. Luego AI′ = NM′ = AI. Luego la resultante Z = Z′ está representada en magnitud y en direccion por la diagonal AI del paralelógramo AMIN, cuando los lados AM, AN de este paralelógramo representan dos componentes.

oblicua de estas dos fuerzas hace que casi siempre la persona que salta caiga en el momento de llegar á tierra. Como la diagonal representada por la resultante de las dos fuerzas, obra oblicuamente y pasa por el centro de gravedad de la persona, no pasa por los pies de la misma si se mantiene derecha. Para no caer debia, pues, tirarse inclinando mucho la parte superior del cuerpo hácia el lado de donde venga el coche. Por ignorar este principio, y por falta de serenidad en el momento del peligro, padecen tantas personas fracturas de miembros, y á veces pierden la vida cuando saltan de un carruage cuya celeridad los asusta.

Cuando dos lados AB, AC, (fig. 56) de un paralelógramo son iguales entre sí, forman un rombo, y la diagonal divide en dos partes iguales el ángulo formado por los lados. Así cuando dos fuerzas son iguales, su resultante divide en dos partes iguales el ángulo formado por estas fuerzas. Compréndese con efecto que entonces no hay razon alguna para que la resultante se acerque mas á una componente que á otra.

Todos los pájaros tienen una figura simétrica con respecto á un plano vertical AD (fig. 57), que va de la cabeza á la cola cuando estan de pie. Cuando vuelan hacen con las alas movimientos simétricos, hendiendo igualmente el aire que obra contra ellas con dos fuerzas iguales, dispuestas simétricamente con relacion al plano AD. Luego la resultante de las dos fuerzas está en este plano é impele al ave segun la direccion indicada por dicho plano.

El lado derecho y el izquierdo de nuestro cuerpo son simétricos, y cada vez que empleamos simétricamente los brazos y las piernas para producir un efecto mecánico, la resultante de los esfuerzos de estos miembros pasa por el plano de simetría de nuestro cuerpo.

El ejemplo que mas se viene á los ojos de este efecto le ofrece el arte de nadar. Para seguir el nadador un camino dirigido segun el plano de simetría de su cuerpo, ejecuta movimientos simétricos con las manos y

los pies, como se representa en la fig. 58. La repulsion del agua contra la palma de la mano y la planta del pie la indican las ságitas f, f, F, F, y las resultantes las indican r, R.

Los peces, cuya forma es simétrica, con relacion al plano vertical que va de la cabeza á la cola (fig. 59), tienen las aletas por pares, colocadas simétricamente á derecha é izquierda, y las mueven simultáneamente como el nadador las manos y pies, de modo que forman el mismo ángulo con el plano de simetría. Por esto está su resultante en este plano y produce la marcha directa.

Las naves, que vienen á ser peces artificiales, tienen generalmente un plano vertical de simetría, dirigido de popa á proa. Cuando se quiere que anden se emplean fuerzas iguales, y situadas simétricamente á cada lado de este plano: unas veces son remos (fig. 60), otras ruedas de alabés, y otras pesos, &c. *Véase tomo* III. *Uso de las fuerzas motrices*. Siempre la resultante de estas fuerzas está en el plano de simetría, cuando se quiere dar á la nave un rumbo directo.

La navegacion producida por la fuerza de un viento de costado nos ofrece una aplicacion constante de la descomposicion de las fuerzas. Sea AB (fig. 61) el eje de una nave en que la recta MN representa la proyeccion de una rueda apoyada en O, contra un mástil. Representando OP en magnitud y direccion la fuerza X, con la cual impele el viento la vela, figuremos el paralelógramo réctangulo OCPD, cuya diagonal es OP. La fuerza OP se resuelve en otras dos; la 1.ª OC que se halla en el sentido de la vela MN no produce efecto alguno para hacer adelantar la nave; la 2.ª OD perpendicular á la vela, es la única que empuja esta vela, el mástil y la nave; pero OD se descompone en otras dos fuerzas, la 1.ª OE en el sentido del eje de simetría procura hacer andar el navío; la 2.ª OF lo empuja al través y produce el movimiento de costado, que se llama *deriva*, *ó abatimiento del rumbo*.

El fabricante de naves y el navegante deben combinar los trazados y las maniobras de modo que la fuerza OE produzca la mayor andadura, y la fuerza OF la menor *deriva*.

En el paralelogramo ABDC (fig. 62), cuando el ángulo BAC está muy abierto, la diagonal AD es muy corta. En seguida, á medida que el ángulo BAC se cierra, se alarga la diagonal AD hasta el punto en que el ángulo BAC llega á ser nulo, en cuyo caso AC cae sobre AB, y la resultante es igual á la suma de las componentes.

Hácese uso frecuente de la propiedad que tiene la resultante AD de disminuir á medida que aumenta el ángulo BAC. Citaremos un ejemplo muy sencillo.

Supongamos que se trata de liar el baul ó maleta MM (fig. 63). Paso primero el cabo CA de la cuerda por una lazada A, hecha en el estremo A de BA; tiro con fuerza del cabo suelto, en direccion muy próxima á AC; cuando ya no puedo producir efecto en este sentido dirijo este cabo transversalmente en AD. Si tiro con la fuerza menor me resulta un ángulo BEC, es decir, que fuerzo el punto A á llegar á E, de modo que al formar el paralelogramo BECF, la diagonal pequeña EF representa la corta fuerza de la mano que hace equilibrio á las grandes tensiones BE, EC de la cuerda. Ato despues el cabo de cuerda suelta por debajo de la maleta, luego entre EB, EC, ED, y traigo el punto E á A por medio de una tension gradual de la cuerda.

En otro tiempo se empleaba con mucha frecuencia el arma arrojadiza llamada flecha, que se lanzaba con un arco elástico CED (fig. 64), que mantenía tirante una cuerda CD. El uso de este arco era tan comun, como hemos visto en la *Geometría*, *lec. III*, que los nombres de arco, de cuerda y de flecha, han pasado de los usos de la caza y de la guerra á los de la ciencia. Examinemos los efectos del arco.

Con una mano agarra el hombre el arco por E, y con la otra tiene la estremidad posterior de la flecha. Con esta estremidad comprime el medio F de la cuerda. El esfuerzo que hace el hombre para separar el punto E del punto F está representado por 2 F G, y el esfuerzo que resiste la cuerda lo está por G D y por G C. Cuando la mano colocada en G suelta el estremo de la flecha, las dos mitades de la cuerda G C, G D, procuran volver á tomar su longitud natural, obran en la flecha con una fuerza igual, y por consiguiente le hacen seguir la direccion diagonal G F E.

En el momento de disparar, la tension que sufre cada mitad de la cuerda, es respecto de la fuerza con que se dispara la flecha, como la longitud G C ó G D, es respecto del duplo de G F. En efecto, G F es la mitad de la diagonal del paralelogramo de las fuerzas, formado con los lados G C y G D.

Pero siendo generalmente el arco C E D un cuerpo elástico, procura enderezarse con tanta mayor energía cuanto mas cerrado está el ángulo C G D, lo cual aumenta tambien la fuerza con que se dispara la flecha. Por este medio un individuo que con sola la mano no podría arrojar la flecha sino á algunos pasos y con poca fuerza, la envia á distancias considerables con vigor suficiente para herir y matar al hombre y animales corpulentos.

Otro ejemplo demostrará toda la eficacia de una fuerza pequeñísima que obra de un modo análogo al de la cuerda y el arco.

Para dar á las cuerdas de una harpa el grado de tension que produce el tono conveniente, es menester servirse de una llave que hace tres ó cuatro veces mayor la fuerza del puño del templador. Dos hombres robustos agarrando con la mano, y tirando cada uno para sí de ciertas cuerdas de harpa, hallarian sin duda mucho trabajo en estirarlas tanto como han de estarlo cuando forman parte de este agradable instrumento. Mr. de Proni calculó las tensiones de las cuerdas de un piano, y la suma que encontró es mayor que la fuerza de cuatro caballos. Sin embargo, una jóven que apenas puede estender sin trabajo los brazos á lo largo de las cuerdas de una harpa, halla en sus dedos delicados la fuerza suficiente para coger y pulsar estas cuerdas por el medio, de modo que formen dos medias cuerdas angulosas, que son los dos lados de un paralelógramo (fig. 65), cuya diagonal representa el esfuerzo que hacen los dedos de la jóven. Cuando ésta abre la mano comunica á la cuerda un movimiento de vibracion, que duraría mucho tiempo si no lo cortase el pedal, ó se perdiese en los sonidos sucesivos de la pieza que se toca.

Hasta aquí hemos considerado lo que pasa respecto de un paralelógramo de fuerzas, es decir, cuando solo se tienen dos componentes y su resultante.

Supongamos ahora que tenemos tres componentes que obran sobre un mismo punto material A (fig. 66). Sean A B, A C, A D, las partes de línea recta que representan en longitud y direccion estas tres componentes. Si se forma el paralelógramo A B E C con las dos líneas A B, A C, tomadas por lados, la diagonal A E representará la magnitud y direccion de la resultante de las dos primeras fuerzas, es decir, que un cuerpo solicitado á la vez por las dos fuerzas A B, A C, ó solo por la fuerza A E, correrá el mismo espacio en la misma direccion y durante el mismo tiempo.

Combinemos la resultante parcial A E con la tercera fuerza A D, formando con estas dos líneas un paralelógramo A E F D. La diagonal A H de este nuevo paralelógramo es evidentemente la resultante de A D y de A E. Pero el efecto producido por A E equivale al producido por las dos fuerzas A B y A C: luego el efecto producido por la fuerza A F equivale en el total al que producirían las tres fuerzas A B, A C, A D.

Tambien pudiéramos llegar á este resultado por medio de otra consideracion. Cuando dos fuerzas A B, A C, (fig. 67) obran sobre un cuerpo A, la primera fuerza A B, que obra sola en un tiempo dado le transporta de A á B. La segunda fuerza AC, obrando en seguida sola, le transportará de B á E, paralelamente á AC, de modo que BE=AC. La tercera fuerza AD, obrando despues sola, la transportará de E á F paralelamente á AD, y de modo que EF=AD. En fin, el cuerpo que llega á F por efecto sucesivo de las tres fuerzas, estará en el mismo punto á donde llegaría si las tres fuerzas hubiesen obrado al mismo tiempo para transportarlo.

Se diferencia de la anterior esta construccion en ser mas sencilla por faltarle los lados 3.° y 4.° de los paralelógramos de la figura 66.

Si hubiese un número cualquiera de fuerzas OA, OB, OC.... (fig. 68), obrando sobre un punto material, sería transportado tan lejos en un tiempo dado, como en el caso en que todas las fuerzas obrasen separadas y sucesivamente para transportarlo en su direccion propia durante este mismo tiempo. Entonces se prolongarian sucesivamente Ab, bc, cd, &c., paralelas é iguales en longitud á OB, OC, OD, &c.: despues uniendo el primer punto O y el último E de todos estos lados, Oe representaría la resultante de todas las componentes representadas por OA, OB, OC, OD.... Luego cerrando con una recta Oe el polígono O$Abcd$.... eO, esta recta representa la resultante, cuando cada uno de los demas lados represente una fuerza componente.

Si ponemos en Oe' la resultante Oe, siendo esta fuerza directamente opuesta á las componentes, les haría equilibrio. De aquí resulta este notable teorema debido á Leibnitz: *Si se aplican las fuerzas que se quiera á un mismo punto material, y si estas fuerzas pueden representarse en magnitud y direccion en un sentido continuado por los lados de un polígono cualquiera regular ó irregular, pero completo é invariable, todas estas fuerzas se equilibran necesariamente.*

En el polígono MNPQRS (fig. 69) se advierte un ángulo entrante Q. Este ángulo es necesario á la formacion del polígono, porque la direccion de la ságita QR indica el sentido en que ha de trazarse el lado QR, para que las fuerzas que han de equilibrarse se sucedan todas en el mismo sentido. En fin, cada lado del polígono representa la magnitud y la direccion de las fuerzas.

La composicion de las fuerzas del modo que la hemos considerado tiene la ventaja de que se aplica igualmente á las potencias que obran en un mismo plano, y en planos diferentes, lo que en muchos casos es de suma importancia.

Resulta de esto solamente que cuando las fuerzas OA, OB, OC, OD... (fig. 68) no estan todas en un mismo plano, los lados del polígono O*Abcd* que son respectivamente paralelos á las direcciones de estas fuerzas, no estan en un mismo plano. Pero la resultante O*e* de todas estas fuerzas no deja de estar representada en magnitud y direccion por la línea recta O*e*, tirada del punto O, principio del polígono O*Abcd* hasta el punto *e*, en que termina el último de los lados que representa las fuerzas componentes.

Tan sencillo y fácil como es el figurar en el papel ó terreno el polígono O*Abcd*, cuando está todo en un mismo plano, tan difícil y complicado sería figurar este polígono si todos los lados que le componen no pudiesen estar en un mismo plano.

Por fortuna las nociones que dimos (*tom. I. Geometría, lec. II, VII y XIII*), nos ofrecen un medio muy breve y exacto para hallar la direccion y la magnitud de la resultante, cualesquiera que sean el número, direccion y magnitud de las fuerzas componentes.

Para hallar la proyeccion de una línea MN (fig. 70), situada en un plano con relacion á dos ejes OXOY, basta bajar de los dos estremos de esta recta perpendiculares á los ejes de proyeccion: las partes mn $m'n'$, comprendidas entre estas perpendiculares, son las proyecciones buscadas.

Prolonguemos mM hasta A y $m'M$ hasta B, y tendre-

mos el paralelógramo MANB, en el cual podremos considerar á MN como una fuerza resultante, cuyas componentes se hallan representadas por MB$=mn$ y por MA$=m'n'$. Supuesto que estas últimas líneas son paralelas, comprendidas entre paralelas. *Geometría, lec. II.*

Lo que digo de una fuerza podria decirlo de dos, de tres, de cuatro, y de un número cualquiera de ellas; sea la que quiera su magnitud y direccion estarian representadas por sus dos proyecciones sobre dos ejes en ángulo recto.

Cuando tengamos un número cualquiera de fuerzas tales como MN, NP &c. (fig. 70), bastará tomar sus proyecciones sobre los dos ejes en ángulo recto OX, OY; despues considerar por una parte que el cuerpo se mueve segun OX con las fuerzas mn, np, pq....; por otra segun OY, con las fuerzas $m'n'$, $n'p'$, $p'q'$....; y el efecto resultante será siempre el mismo. Se vé en efecto que la recta MQ que cierra el polígono MNPQ, representa la resultante de las fuerzas MN, NP, PQ; y que esta resultante tiene por proyecciones mq, $m'q'$, suma ó diferencia de las proyecciones paralelas. Ahora, pues, cuando las fuerzas mn, np, pq.... $m'n'$, $n'p'$, $p'q'$.... obran segun una misma línea recta. 1.° Su resultante se dirige segun esta recta: 2.° es igual á la suma de todas las que se dirigen á un lado, menos la suma de las que se dirigen al lado opuesto. Es bien fácil de hacer esta distincion.

Sea (fig. 69) un grupo cualquiera de fuerzas representadas por las rectas MN, NP, PQ. Proyectemos estas rectas sobre el eje OX en mn, np, pq... Veremos que las fuerzas pq y rs empujan en sentido contrario de mn, np, qr... Asi la resultante será $mn + np + qr$ menos $pq + rs$. Es evidente que $mn + np$ menos pq, es mq, y que qr menos rs es qs. Luego la resultante total es mq mas qs, es decir, ms. Esta parte del eje es en efecto la proyeccion de MS que cierra el polígono de las fuerzas, y que por consiguiente representa la resultante de MN, NP, PQ...

Si todas las fuerzas MN, NP, PQ, (fig. 70) estan en el plano de los ejes OX, OY, los movimientos ejecutados por el punto M en ambos ejes de proyeccion, representarán perfectamente los movimientos ejecutados por M, en virtud de las fuerzas componentes cualesquiera MN, NP, PQ, &c.

Pero si las fuerzas no estan en el plano de los dos ejes, es menester tomar tres ejes perpendiculares entre sí. Por ejemplo, se puede tomar un plano vertical y dos horizontales, uno dirigido de norte á sur y otro de oriente á occidente.

Bajando entonces perpendiculares á los ejes de los dos estremos de cada línea recta que representa una fuerza, las proyecciones representarán tres fuerzas, tales que un punto material movido sucesivamente segun la direccion de cada una de ellas, llegará finalmente á la misma posicion que si hubiese sido movido por la fuerza primitiva única.

Del mismo modo que se hace perceptible por medio de un paralelógramo la resolucion y composicion de dos fuerzas en un plano, se hace tambien perceptible por un paralelipípedo la resolucion y composicion de tres fuerzas en el espacio. (*V. Geometría, lec. VIII de los paralelipípedos.*)

Asi tirando la diagonal AG (fig. 71) desde el ángulo A al opuesto G, es evidente que si tomo esta diagonal con los tres lados AB, AC = BE, AD = EG voy á formar un polígono ABEGA cerrado por todas partes. Luego el lado AG de este polígono, puede considerarse que representa en magnitud y direccion una fuerza AG que se equilibra con tres fuerzas respectivamente representadas en magnitud y direccion por AB, AC, AD.

De modo que si por ejemplo la fuerza AG basta para transportar en un tiempo dado el punto A á G; en un tiempo igual la fuerza AB transportará este punto de A á B; despues en un tiempo igual la fuerza AC transportará al punto A de B á C; por último, en un tiempo igual la fuerza AD transportará el punto A de E á G. Luego las tres fuerzas representadas por AB, AC, AD

obrando á la vez, trasladarán A á G en el mismo tiempo que cada una de estas fuerzas actuando sucesivamente, ó que la resultante AG si obrase sola.

Nótese aqui que llamando ejes de proyeccion á las rectas AB, AC, AD, son las proyecciones de la diagonal AG; es decir, de la resultante AG de estas tres fuerzas.

Parecerá acaso largo el camino que hemos seguido, pero era indispensable entrar en todos estos pormenores para que se hallasen tan elementales como lo son realmente las propiedades con que se ha arredrado muchas veces á los que empiezan el estudio de la ciencia.

Resolviendo cada una de las fuerzas que pueden obrar sobre un cuerpo en otras dos paralelas á dos ejes dados, ó en otras tres fuerzas paralelas á tres ejes dados, se forman grupos de tantas fuerzas paralelas á cada eje, cuantas son las fuerzas diferentes que obran sobre el cuerpo, sea cualquiera la magnitud y direccion de estas fuerzas. Asi la accion de fuerzas que no tienen ninguna analogía en cuanto á su direccion, se reduce inmediatamente al exámen de la accion de las fuerzas paralelas.

Si todas las fuerzas paralelas halladas por una resolucion como la que se acaba de indicar, tienen una sola resultante que pasa por el centro de gravedad del cuerpo, procurarán adelantar el cuerpo en línea recta y sin dar vueltas, del mismo modo que si estuvieran reducidas á una sola, igual á la suma de aquellas y paralela á su direccion comun.

Si todas las fuerzas tienen una resultante que no pase por este centro de gravedad, obrará para hacer dar vueltas el cuerpo. Importa examinar cómo se verifica este movimiento. Supongamos que una fuerza AX no pase por el centro de gravedad G (fig. 72); siendo GA la perpendicular tirada desde el punto G en la direccion AX de esta fuerza, permanecerá el mismo movimiento de dicho cuerpo, añadiendo una fuerza única Gx paralela é igual á AX, y dos fuerzas ay, AY, paralelas á Gx dirigidas en sentido contrario, iguales cada una á la mitad de Gx, y situadas de tal modo que $GA = Ga$, pues que Gx se equilibra con ay, AY. Pero la fuerza AY siendo mitad de AX y estando dirigida en sentido contrario, destruye la mitad de AX. Por consiguiente, el cuerpo se halla impelido al movimiento por tres fuerzas: 1.º Gx que pasa por el centro de gravedad del cuerpo $=$ AX; 2.º la mitad de AX obrando en el sentido de AX; 3.º ay igual á la mitad de AX y dirigida en sentido contrario.

Estando las dos fuerzas iguales $\frac{1}{2}$ AX y ay igualmente distantes del centro de gravedad G, obrarán para que dé vueltas este centro de gravedad sin hacerlo adelantar á un lado mas que á otro, supuesto que no hay razon para que dos fuerzas iguales y dirigidas paralelamente en sentido contrario, ejerzan mayor accion una que otra.

Así, 1.º por la accion de las fuerzas $\frac{1}{2}$ AX y ay, el centro de gravedad no se adelanta ni atrasa: 2.º por la accion de la fuerza GX el centro de gravedad es transportado en línea recta en virtud de la accion de una fuerza igual y paralela á AX.

Por consiguiente, cuando un número cualquiera de fuerzas obra sobre un cuerpo tambien de cualquiera figura; 1.º si se resuelven todas estas fuerzas paralelamente á ejes dados: 2.º si se determina la resultante total de las fuerzas para transportarla paralelamente al centro de gravedad, este centro se moverá en línea recta, como si todas las fuerzas estuviesen inmediatamente aplicadas al centro mismo de gravedad. Tal es el notabilísimo principio de la *conservacion del centro de gravedad*, denominacion sacada principalmente de la otra propiedad de que *todos los movimientos interiores producidos en un cuerpo por las acciones y reacciones de las diversas partes de este cuerpo, no alteran nada el movimiento del centro de gravedad con respecto á los puntos esteriores del espacio.*

El juego del villar ofrece varios ejemplos muy perceptibles de las propiedades del movimiento comunica-

do á los cuerpos por la accion de una fuerza que no pasa por el centro de gravedad de estos cuerpos. Despidamos una bola de villar, no en la direccion de su centro, sino hácia la derecha por ejemplo. Entonces, 1.º la bola anda con la misma velocidad que si fuese impelida en la direccion de su centro: 2.º adquiere un movimiento de rotacion de derecha á izquierda, caminando hácia adelante.

Si se pica la bola por cima del centro de gravedad, anda igualmente con la misma velocidad que si estuviese picada en la direccion de su centro, y toma un movimiento de rotacion de arriba abajo al tiempo que anda. Lo contrario respectivamente sucede cuando se pica la bola á la izquierda ó por bajo del centro de gravedad.

Cuando se pica la bola por bajo del centro de gravedad, se aumenta la resistencia causada por el rozamiento del tapete contra la bola. Cuando se pica la bola por bajo del centro apuntando con el taco de arriba abajo, anda la bola con menor velocidad que cuando obra el taco paralelamente al tablero; entonces la velocidad de rotacion puede vencer hasta el punto de no destruirse toda por este rozamiento cuando la velocidad progresiva de la bola esté ya destruida. Continuando siempre la resistencia del tapete como fuerza retrógrada, se emplea una parte de esta resistencia en disminuir la velocidad de rotacion de la bola, y la otra obra como si se transportase al centro de la bola á que hace retrogradar. Así es que con sólo un tacazo se puede hacer que adelante y despues retrograde una bola de villar.

Efectos análogos á los del juego de villar se notan en el movimiento de las balas de cañon y de las bombas, las que producen resultados estraordinarios, cuyo estudio es de la mayor importancia en el arte de la guerra, y es el objeto de la ciencia llamada *balística*.

LECCION SEXTA.

De las máquinas simples, cuerdas, puentes colgados, arreos, aparejos de buques.

Se llaman máquinas las combinaciones de partes materiales capaces de transmitir una fuerza cualquiera, mudando su direccion, su velocidad ó la amplitud del espacio corrido en un tiempo dado.

Las máquinas simples que se cuentan, á las cuales se refieren todas las compuestas, son siete; á saber: las cuerdas, la palanca, la polea, la cabria, el plano inclinado, la rosca y la cuña. Trataremos de cada una de ellas con la estension que pide materia de tanta importancia, y por el órden que las hemos nombrado.

1.° *De las cuerdas.*

Para facilitar el estudio de las cuerdas empleadas en transmitir fuerzas, suponen los geómetras que son flexibles, inestensibles y sin peso. Despues segun la necesidad de tomar en consideracion su rigidez mayor ó menor, su estensibilidad ó su peso, buscan (tanto por la teoría como por la esperiencia) las alteraciones que pueden producirse en los resultados primitivos por las propiedades de la materia de que se componen las cuerdas.

Como este método de apurar las cuestiones mas complicadas refiriéndolas á sus elementos mas simples es muy filosófico, auxilia la debilidad de nuestra inteligencia y acrecienta la eficacia de nuestros medios de obrar, le aplicaremos para encontrar las propiedades de las cuerdas y de todas las demas máquinas simples. Consideremos, pues, una cuerda perfectamente flexi-

ble, inestensible y sin peso. Empezemos aplicando una fuerza única á cada estremo de la cuerda, y supongamos que estas dos fuerzas que tiran de la cuerda en sentido opuesto son iguales. Por efecto de ellas está la cuerda estendida en línea recta; línea cuyos dos estremos se hallan á la mayor distancia posible. Entonces se equilibran las dos fuerzas supuesto que no hay razon para que la cuerda solicitada igualmente por los dos cabos, se alargue mas por uno que por otro.

Hagamos obrar otra tercera que tire en el mismo sentido que una de las dos primeras, por ejemplo, la segunda. Destruido el efecto opuesto de la primera por la segunda, se moverá la cuerda hácia el lado de la tercera como si no obrasen las dos primeras. En este movimiento ejecutado en la direccion de la cuerda, es evidente que esta cuerda no dejará de permanecer en línea recta. La tercera fuerza no hará mas que arrastrar la cuerda, y las dos primeras fuerzas que se equilibran producirán este equilibrio ejerciendo sobre la cuerda una tension representada por cada una de estas dos fuerzas.

Siendo los mismos los resultados á que acabamos de llegar, se sigue, sea cualquiera la longitud de la cuerda, que la tension que esperimenta es la misma en cada uno de los puntos C, A....

En efecto, para conocer la tension que esperimenta la cuerda en un punto cualquiera C (fig. 73) se le podria suponer aplicadas las dos fuerzas AX, BY: del mismo modo para conocer la que esperimenta en el punto A se pueden suponer las dos fuerzas AX, AY aplicadas en A. Como el efecto de las fuerzas no varía cualquiera que sea el punto de aplicacion, resulta que la tension que esperimenta la cuerda en un punto cualquiera C, es (como ya hemos dicho) la misma que en la estremidad A; luego es igual en todas sus partes.

Supongamos ahora que la cuerda tenga en todas partes una fuerza constante escepto en un solo punto mas débil que los demas. Aumentando gradualmente y en la misma cantidad las dos fuerzas opuestas, se llega á un término en que la tension ejercida sobre la cuerda (tension que se supone igual en todos los demas puntos de dicha cuerda) es tan poco considerable, que no puede romperla en ninguno de sus puntos, esceptuando el mas débil. Luego la cuerda se romperá por este punto débil y quedará destruido el equilibrio del sistema.

Este medio es el que se emplea en las artes para medir *la fuerza de las cuerdas*. Cuando las cuerdas han de servir para atar ó para suspender objetos cuya suspension es de mucha importancia, hay que asegurarse indispensablemente de que las cuerdas resistirán sin romperse los mayores esfuerzos á que se las ha de sujetar. Asi, pues, lo primero que ha de buscarse es la resistencia de que son capaces, y esto debe hacerse con particular esmero, respecto de las cuerdas ó cables de hierro, (cables que tuve la felicidad de hacer que se adoptasen desde 1817 en la marina francesa); porque bastaria que un solo eslabon, en virtud de la mala calidad del hierro ó de la fabricacion, tuviese menos fuerza que los demas para hacer que se rompiese el cable, como si fuesen igualmente endebles todos los demas eslabones.

Cuando una cuerda es corta hay menos probabilidad de que se halle en ella un punto mucho mas débil que los otros, y sino obsérvese que tomando dos cabos de una misma cuerda desiguales en longitud para sujetarlos á tensiones iguales, el cabo mas corto puede sufrir por lo general un esfuerzo mayor antes de romperse que el otro mas largo.

En lugar de una fuerza que obre en cada estremo de la cuerda, supongamos que hay un número cualquiera de fuerzas.

Sean Ax', Ax'', Ax''' (fig. 74) las fuerzas que obren en un sentido, y By', By'', By''' las que obran en otro. Podrán sustituirse por una parte todas las fuerzas Ax', Ax'', Ax''', y por otra By', By'', By''', por una fuerza única que será la resultante de ellas, y que hallaremos en virtud de las leyes generales de la composicion de las fuerzas. Para el efecto figuraremos un polígono cuyos lados sean iguales y paralelos á las rectas que representan las fuerzas. Las dos líneas rectas AX, BY que cierran estos polígonos, representarán las dos resultantes. Será preciso que estas dos resultantes, 1.º esten dirigidas en sentidos opuestos siguiendo la misma direccion de la cuerda AB; 2.º que sean iguales entre sí.

Si las fuerzas no son iguales, habrá movimiento en el sentido de la mayor, y la velocidad estará en razon inversa de la masa de la cuerda que se ha de mover &c., *leccion II.*

Aplicacion al toque de las campanas.

Cuando se tocan las campanas de las iglesias se tira de ellas con una cuerda vertical AB (fig. 75.) Cuando la campana es muy grande, para que dos ó tres hombres tirando á un tiempo de la cuerda puedan tocarla con facilidad, se ponen debajo de la cuerda principal AB cuerdas mas pequeñas Ax', Ax'', Ax'''..... Un hombre coge cada una de estas cuerdas y todos tiran simultáneamente para dar á la campana el movimiento que conviene. Para hallar la resultante basta formar un polígono Ax', X'', X'''.... cuyos lados Ax', $x'X''$, X'', X''', representen en magnitud y direccion las fuerzas Ax', Ax'', Ax'''....

Tirando la recta AX''' por el punto A y por el estremo del último lado, se cerrará este polígono de fuerzas, en el cual la línea recta AX''' representa la resultante.

Por último, en el caso que examinamos será menester que dicha resultante esté en la direccion de la cuerda vertical AB.

Por lo comun los campaneros cuya fuerza es próximamente la misma, se colocan en derredor á igual distancia unos de otros, de manera que el centro del círculo que vienen á formar esté al aplomo del estremo de la cuerda AB. En esta disposicion la resultante de sus fuerzas pasa necesariamente por la línea AB.

Mazas para clavar estacas. Lo que acabo de decir acerca del toque de las campanas, se aplica igualmente cuando se quiere tirar con cordones de la cuerda principal que hace obrar la maza puesta en uso para clavar las estacas en las obras hidráulicas. Por esto se da comunmente á esta máquina el nombre de *campana*, pues se tira de ella del mismo modo que de una gran campana de iglesia. Mas para completar la esplicacion de esta máquina, es menester conocer las poleas.

Hasta aquí hemos considerado las cuerdas como tiradas solo por sus estremos. Supongamos que ademas se tira de ellas por un punto intermedio.

Sean AX y BY (fig. 76) las fuerzas aplicadas á los estremos A, B, de una cuerda ACB; y CZ la fuerza aplicada al punto intermedio C. Estas tres fuerzas se equilibrarán si transportando BY á Cy y AX á Cx el paralelógramo formado por los lados Cx, Cy, tiene su diagonal CZ' igual y opuesta á la fuerza CZ.

Supongamos que la fuerza AX (fig. 77) representada por Cx, y la fuerza BY representada por Cy sean iguales entre sí. Entonces el paralelógramo Cx Z'y será lo que se llama un rombo, y los ángulos xCZ', y yCZ' serán iguales; es decir, que las rectas CAX, CBY, formarán el mismo ángulo con la direccion de la resultante CZ'.

Pero segun que Cy sea mayor ó menor que Cx, la fuerza CZ' se acercará ó alejará mas á CBY que á CAX, y esto dependerá de la forma de los triángulos iguales Cx Z', Cy Z'.

Si tuviésemos cuatro fuerzas AX, BY, A'X', B'Y', (fig. 78) aplicadas en C C', sería necesario que hubiese equilibrio alrededor de cada punto CC'....

Por ejemplo, alrededor del punto C se tendrian las fuerzas AX y BY, cuya resultante estaria dirigida segun la prolongacion de CC' y representaria la tension ejercida por estas dos componentes sobre el trozo de cuerda CC'. Figurando, pues, el paralelógramo Cy Zx en el cual Cx igual á AX, Cy = BY, se tendrá CZ igual á la tension de la cuerda BC.

Del mismo modo respecto al punto C', figurando el paralelógramo C'y'Z'y' con los lados C'x' = A', X', C'y' = B', Y', se tendrá C'Z' igual

á la tension de la cuerda. Será necesario para que CC' permanezca en equilibrio, que las dos tensiones opuestas CZ y CZ' sean iguales.

Observemos aquí que siendo independiente la determinacion de las diversas tensiones de AC, CC', C'A' etc. de la longitud de las partes AB, BC, CD, etc., no mudan estas tensiones ni el estado del equilibrio de todo el sistema cuando se aumenta ó se disminuye la longitud de estas partes. Se pueden, pues, suponer nulas una ó muchas de ellas, sin que por esto se rompa el equilibrio. De consiguiente, cuando se aplica un número cualquiera de fuerzas á diversos puntos de una misma cuerda, aplicando todas estas fuerzas al mismo punto sin mudar su magnitud ni su direccion, transportadas así todas las fuerzas paralelamente y libres de la cuerda, quedan en equilibrio.

Cuando se tira una cuerda por fuerzas aplicadas á diversos puntos presenta la figura de un polígono, y por esta razon se le da el nombre de *polígono funicular* de la palabra latina *funiculum* cuerdecilla ó cordelillo. Será necesario que las fuerzas que obran alrededor de cada punto, esten en equilibrio con las tensiones esperimentadas por los lados del polígono cuyo vértice determina ó constituye este punto.

Tenemos frecuentes ejemplos del equilibrio del polígono funicular cuando suspendemos pesos en una cuerda cuyos dos estremos no estan en la misma vertical. Los puentes colgados de que hablaremos al fin de esta leccion, nos presentarán otro ejemplo de los polígonos funiculares y de la utilidad de las valuaciones que tienen relacion con ellos.

Sean Ay, Bz, Cv, Dw, (fig. 79) fuerzas verticales: su resultante Rr será asimismo vertical, igual á su suma, y podrá determinarse inmediatamente por la teoría de las fuerzas paralelas. Para que haya equilibrio en el polígono funicular, es menester que la fuerza Rr que representa el conjunto de las fuerzas Ay, Bz, Cv y Dw, haga equilibrio á la tension de los estremos A, D, de la cuerda. Lo que exige 1.º que las direcciones en las dos fuerzas estremas Ax Du terminen en el mismo punto O sobre la resultante Rr de las fuerzas paralelas. 2.º Que tomando Ox' = Ax, y Ou = Du en las rectas OAx y ODu, la diagonal del paralelógramo formado sobre estos dos lados, sea igual á Rr y vertical como todas las fuerzas componentes.

En cuanto á las tensiones esperimentadas por las diversas partes de la cuerda ABCD, será siempre muy fácil hallarlas considerando cada fuerza paralela Ay y Bz etc. como la diagonal de un paralelógramo cuyos lados son Ax y AB prolongados, AB y BC prolongados, BC y CD prolongados etc.: los lados de estos paralelógramos representarán las tensiones de estos trozos de cuerda. De este modo se sabrá la tension de cada trozo de cuerda AB, BC, CD, en sus dos estremos. Si el equilibrio subsiste, será menester que esta tension sea la misma en los dos estremos de cada trozo de cuerda, pues de otro modo se adelantaria este hácia el lado de la mayor tension, como si fuese solicitado igualmente por dos fuerzas desiguales.

Ahora nos hallamos en el caso de tomar en consideracion la gravedad de las cuerdas. Para esto examinemos primero una cuerda sujeta por los dos estremos y suelta por los demas puntos.

Podemos considerar esta cuerda como compuesta de un número infinito de líneas rectas pequeñas, iguales entre sí, muy poco inclinadas una contra otra, y formando la curva que en tal caso ha de seguir la cuerda para ponerse en estado de equilibrio y en reposo. Consideremos dos de estos lados pequeños consecutivos AB y BC (fig. 80) la resultante del peso de cada uno es una fuerza que pasa por su medio en M y N, y tendremos varias fuerzas paralelas Mx, Ny, Oz, iguales y tales que sus puntos de aplicacion M, N, O, se hallan equidistantes.

La resultante de todas estas fuerzas es igual á su suma y está dirigida verticalmente: sea Rr esta resultante. Será necesario segun lo que hemos visto anteriormente que los dos últimos lados Ff; Gg del polígono funicular se encuentren por su prolongacion en la resultante Rr.

Así las tangentes en F y G á la curva FAB.... G se cortan siempre en la direccion de la resultante del peso de la cuerda que está colgando; resultante que pasa por el centro de gravedad de la cuerda (1).

(1) *Esta propiedad sirve á los matemáticos para hallar una ecuacion diferencial de la curva que forma la cuerda por el solo efecto de la accion de la gravedad, aunque los métodos que conocemos no pueden dar en cantidades finitas la ecuacion que ha de determinar la figura de esta misma curva; pero nosotros que en las artes podemos obrar*

La curva formada por la cuerda en virtud de su pesantez, permaneceria siendo la misma, ora fuese esta curva un hilo muy flexible y continuo, ora fuese una cadena ó cadeneta compuesta de eslabones infinitamente pequeños, lo cual haria que esta cadena fuese un polígono compuesto de un número infinito de lados infinitamente pequeños; y asi es como primero se ha considerado el problema. Se ha llamado particularmente *catenaria* á la curva que forma una cadena semejante ó una cuerda perfectamente flexible, sujeta por los dos estremos y en la que solo actúa la gravedad.

Las artes mecánicas y las bellas artes usan frecuentemente la catenaria.

Los cables y las cadenas AB (fig. 86) con que se mantienen en equilibrio los navíos contra las fuerzas del viento y de la corriente toman la forma de catenarias mas ó menos curvas segun su tension. Lo mismo sucede con las cuerdas empleadas para tirar la sirga por hombres ó caballos por medio de cordeles atados á varios puntos de las cuerdas principales. El exámen de las tensiones que sufren estas cuerdas y cordeles y la transmision y pérdida de fuerzas de tiro de sirga, son cuestiones importantes que se resuelven por medio de los principios espuestos en esta leccion. Esplicaremos el uso de las catenarias respecto de los aparejos de buques.

Necesitamos referir á la catenaria y al polígono funicular el equilibrio de las maromas ó cuerdas tendidas desde la una hasta la otra orilla de los rios. Estas estan atadas á puntos bastante altos para dejar paso por debajo á los barcos con sus palos ó mástiles. Sobre la maroma puede correr por medio de una polea el cabo superior de una cuerda cuyo cabo inferior esté sujeto en una barca. En cada posicion en que se encuentre esta

con la misma curva y determinar todos sus elementos por medio de medidas inmediatas, llegamos asi de hecho y del modo mas sencillo á los resultados que la ciencia analítica no podria proporcionarnos.

cuerda, esperimenta una tension ocasionada por la accion que el agua corriente ejerce sobre la barca. Esta tension se equilibra con otras dos tensiones que esperimentan las porciones de maroma situadas á derecha é izquierda de la cuerda que está atada á la barca. Para averiguar la fuerza que ha de tener esta cuerda ó la maroma, es menester calcular las mayores tensiones que hayan de sufrir, para lo cual sirven las propiedades de la catenaria y del polígono funicular.

Una de las aplicaciones mas importantes de la catenaria y de las cuerdas en general, es á los puentes colgados (fig. 87), pero antes de darla á conocer vamos á esplicar las propiedades geométricas de esta curva, que son muy fecundas en consecuencias.

Si los dos estremos A, B, de una catenaria AECFB (fig. 81) estan colocados á la misma altura, esta curva será simétrica con relacion á la vertical DC tirada por el medio D de AB. Se vé en efecto que no hay razon para que la parte izquierda AEC tenga otra forma ni magnitud que la parte derecha BFC.

Las guirnaldas y los cordones de oro, de seda, de cintas, de galones y de flores suspendidos desde puntos que no estan en la misma vertical, forman catenarias cuya simetría contrasta felizmente por la variedad de posiciones y curvaturas, y en la elegancia de esta variedad consiste uno de los secretos del arte que tiene por objeto el ornato de las habitaciones y edificios públicos.

Es muy útil que el pintor y el dibujante estudien la clase de curvatura que caracteriza la catenaria para que puedan dar á la representacion de estos objetos de adorno, contornos que no carezcan de verosimilitud.

Ahora consideremos como fijo el punto E (fig. 81) y suprimamos AE; la parte restante ECB estará tambien en equilibrio. Luego si se tira la horizontal EF y se toma el punto F en vez del punto B por segundo punto fijo, la parte EC será aun simétrica á AC.

Asi que, cuando una catenaria (fig. 81) no tiene los dos estremos E, B, situados á una misma altura, si por el estremo menos elevado E se le tira la horizontal EF, la parte ECF de la catenaria debajo de esta

horizontal, será simétrica con respecto á la perpendicular CG bajada por el medio G de EF, y el punto C será el mas bajo de todos los puntos de la catenaria.

Supuesto que la catenaria ECF es simétrica con respecto á la vertical CG, el centro de gravedad de esta curva está en esta vertical. Tiremos las dos rectas EO, FO, tangentes en E y en F á la catenaria: tomemos en seguida una parte OR vertical y representante del peso de la catenaria; los lados del paralelógramo Or Rr' representarán las tensiones que sufre la cuerda en E y en F.

Tratemos de saber cuál es la tension ejercida en C, punto el mas bajo de la catenaria. Si tiramos CO, OB (fig. 82) tangentes á la catenaria en C y B: 1.º el centro de gravedad de la catenaria CB estará en la vertical OG que pasa por el punto O; 2.º si figuramos sobre OG, OC, OB prolongados, el paralelógramo OPQS, cuando OP represente el peso del arco CB, OS representará la tension esperimentada en C, y OQ la tension esperimentada en B por la catenaria. Pero en el paralelógramo OPQS, PQ=OS, y como OPS es un triángulo rectángulo, OQ es siempre mas largo que OS, es decir, que la tension esperimentada por la catenaria en B es siempre mayor que la tension esperimentada en C.

Pero cuando se eleva la tangente BOQ, forma con la vertical un ángulo mas agudo; la longitud de OS permanece constante; la longitud de OP se aumenta proporcionalmente al peso de la catenaria, y el lado OQ se aumenta cada vez mas. De consiguiente, la tension de la catenaria es cada vez mayor en los puntos mas altos.

Si se supone que la catenaria es de igual fuerza por todas partes, empezará siempre la ruptura por el punto mas alto, y si la cadena puede resistir por este punto, con mas razon podrá resistir por las partes intermedias.

Cuando en un triángulo rectángulo POS (fig. 82) un lado OP del ángulo recto O se alarga, si el otro lado OS permanece constante, el lado mayor PS se diferencia cada vez menos de PO.

Supongamos ahora que la figura representada por la catenaria CB (fig. 83 y 84) aumenta ó disminuye repentinamente de tamaño, y á proporcion en todas sus partes. En este caso no se alterará de modo alguno el equilibrio, y por consecuencia la forma de la catenaria no variará por esta causa.

En efecto, en la nueva catenaria un punto cualquiera *m* que esté igualmente situado con relacion al punto M de la primera, la tangente *mo* forma con la vertical *dco* el mismo ángulo que la tangente MO con la vertical DCO. Por otra parte la longitud de las catenarias es proporcional á las distancias BD *bd*. Por consecuencia se tendrá la relacion de los pesos de las catenarias OP: *op* igual á la relacion de las tensiones OQ, *oq* esperimentadas por las catenarias en M y *m*.

Asi las tensiones se aumentarán por todas partes en la misma proporcion que el peso de la cuerda. Estas fuerzas estan situadas en una posicion semejante á la que ocupaban en la primera posicion; luego se equilibran de un modo semejante obrando sobre una catenaria de la misma figura.

Sentemos por principio que en las catenarias semejantes las tensiones esperimentadas por cada una de ellas en puntos situados del mismo modo, estan en relacion de las dimensiones análogas, ó como se dice *homólogas* de estas dos curvas.

De consiguiente, si se comparasen dos catenarias de figura semejante, pero una de ellas dos veces menor y dos veces mas pesada que la otra, ó tres veces menor y tres veces mas pesada que la otra, ó cuatro veces menor y cuatro veces mas pesada que la otra, la tension esperimentada por las dos catenarias en puntos igualmente situados, sería igual por una y otra parte.

Comparemos ahora las tensiones esperimentadas por dos catenarias no semejantes. Para simplificar nuestras investigaciones, y ademas para ocuparnos especialmente en el caso por lo general mas útil á las artes, consideremos catenarias muy poco curvas de igual peso y longitud, y supongamos que los puntos fijos esten siempre á la misma distancia.

Cuando una curva ACB (fig. 85) tiene muy poca curvatura, sin error perceptible se puede considerar el centro de gravedad de cada parte CB de esta curva como hallándose en una vertical EF situada á igual distancia de los estremos C y B. Si se levanta por este centro G la vertical EGF hasta llegar á la recta AB, se tendrá DF=FB; y si se baja del punto B la vertical BY sobre CE prolongada, se tendrá CE=EY.

Ahora tomemos C y B por puntos fijos de la catenaria, tiremos las dos tangentes estremas CE, EB; y serán los dos lados de un paralelógramo CE,BF, teniendo por diagonal FE. Representemos por FE el peso del arco CB, los lados EB, EC representarán las tensiones esperimentadas por la cuerda en B y en C.

Si la ságita CD es en estremo pequeña con relacion á la longitud AB,

no hay por decirlo asi, ninguna diferencia entre CF y EB, FB y CE. Luego entonces la tension de la cuerda ó de la cadena que forma catenaria, queda con muy poca diferencia la misma en toda su estension. Mas para que la tension fuese rigorosamente la misma en todos los puntos, sería necesario que la ságita CD fuese nula.

Ahora, pues, considerado el peso de la curva como constante y suponiéndole representado por OR, la tension que la cuerda esperimenta en B, está representada por OQ, tirando QR horizontalmente hasta la prolongacion OQ de la tangente BE.

Pero tenemos los dos triángulos semejantes BEI, OQR, en los cuales

$$BE : BI :: OQ : OR. \text{ Luego } OQ = OR \times \frac{BE}{BI}$$

Siendo BI igual á CD, y BE muy poco diferente de $\frac{1}{2}$ BD, cuando BI=CD es muy pequeño, se tiene por aproximacion.

$$OQ = OR \times \frac{BD}{2CD}$$

Luego si la distancia de los estremos AB es invariable, como tambien el peso de la cuerda representado por OR, la tension OQ estará en razon inversa de la ságita CD: luego será necesario que la tension OQ ejercida en B ó en A, fuese infinitamente grande para que CD pudiese ser infinitamente pequeño ó nulo. Por consiguiente, *cuando se tira horizontalmente de una cuerda por los dos cabos, es necesario que tiren de ella dos fuerzas infinitamente grandes para que se ponga exactamente en línea recta.*

He creido necesario manifestar detenidamente esta circunstancia, porque hay personas á quienes con dificultad se podrá persuadir de que tirando, por ejemplo, muy fuerte de una cuerda muy delgada por dos puntos situados á la misma altura, será imposible lograr el ponerla enteramente en línea recta.

Aplicacion al aparejo de las naves. Es muy útil familiarizarse con las propiedades que acabamos de esponer, respecto á la catenaria, para comprender algunos esfuerzos que sufren las cuerdas en una multitud de casos importantes. Citaré, por ejemplo, todo el aparejo de las naves. Llámase asi la reunion de las cuerdas empleadas en sostener y en mover los mástiles y vergas de una nave.

Los mástiles verticales CD, EF, GH (fig. 86) estan sustentados en su parte inferior por un sistema particular de armadura. Por su parte superior se pasa un nudo corredizo, hecho con una cuerda muy fuerte que se llama *estay*, y que bajando en la direccion de popa á proa, viene á fijarse en un punto de la nave. En los *balances*, cuando la popa se levanta y la proa se baja, el estay resiste é impide que se rompa el palo cayendo hácia atrás. El estay sirve ademas para contrabalancear el esfuerzo considerable de los *obenques*. Los obenques son unas cuerdas dobladas por medio y liadas en esta parte, de modo que forman un ancho ojal, por el cual pasa la cabeza del palo: los dos cabos de cada cuerda forman dos obenques que vienen á sujetarse á lo largo del mismo borde. Colócase de este modo alternativamente para el mismo mástil un par á estribor y otro á babor.

Los obenques tiran á la vez de la cabeza del mástil bajando del medio del buque hácia los bordes, y de adelante hácia atrás.

Estando inclinados los estays y los obenques, no pueden formar líneas rectas, cualquiera que sea la tension que se les haga esperimentar, sino que forman catenarias. Las de los obenques tienen una curvatura poco notable, porque estas cuerdas se acercan mucho á la direccion vertical; pero en los estays que se alejan mas de dicha direccion vertical, es mucho mas considerable la curvatura de la catenaria.

La catenaria formada por un estay ó por un obenque, varía de curvatura á cada nuevo impulso del viento ó de las olas. Cuando el viento impele el buque de atrás adelante, disminuye la curvatura de la catenaria formada por los obenques para aumentar la curvatura de la catenaria formada por los estays.

Cuando el viento sopla por un costado, disminuye la curvatura de las catenarias formadas por los obenques

de aquel lado para aumentar la curvatura de las catenarias formadas por los obenques que estan al lado opuesto.

La consideracion de las prolongaciones que pueden verificarse con las catenarias formadas por los obenques y estays, ya por la materia de que se componen estas cuerdas, ya por la naturaleza de las curvas que forman, es importante no solo para el aparejo de los buques, sino tambien para la navegacion.

En lugar de cuerdas de igual grueso se podian emplear de un grueso que disminuyese hácia abajo, de modo que no tuviesen en el punto mas bajo sino la fuerza necesaria para resistir la tension artificial que en esta parte adquiere cada obenque.

Esta nueva condicion haría indudablemente mas difícil la fabricacion de las cuerdas, pero sería de una grande economía y haría mas ligero el aparejo de las naves.

Resultarian ademas otras muchas mejoras cuya esposicion no es de este lugar, pero lo dicho basta para mostrar cómo se puede calcular en cada momento la tension de las cuerdas y su direccion mas ventajosa.

Puentes colgados. Espliquemos ahora la estructura y equilibrio de estos puentes.

Supongamos que se tiende una cuerda entre dos puntos A, B. Partiendo de diferentes puntos colocados á iguales distancias sobre esta cuerda, fijemos otras cuerdas verticales ó suspensorias mm', nn', oo', pp'.... Coloquemos dos cuerdas iguales A $mnop$.... B al lado una de otra y á la misma altura, juntemos por medio de travesaños horizontales el punto bajo de las suspensorias, colocados uno enfrente de otro: por último, en estos travesaños paralelos fijemos un tablado, y este será el puente colgado.

Para hallar las condiciones del equilibrio de este puente es menester considerar que cada cuerda Amno.... B sostiene una parte del puente del mismo peso, y con el mismo intervalo entre las suspensorias, pero estas aumentan de peso á medida que se acercan á los estremos de la cuerda.

Como el peso de las suspensorias es corto en comparacion del peso total del puente, se admite que la cuerda sostiene comprendiendo su peso, cargas iguales en longitudes horizontales iguales, y entonces la curva que forma es una parábola. Yo he sido el primero que demostré esto en mi tratado de arquitectura naval militar de los siglos XVIII y XIX, obra presentada al instituto de Francia en 1815.

Segun esto se puede encontrar inmediatamente la posicion del centro de gravedad de la cuerda A *m n* B y el punto T donde se encuentran sus dos tangentes; porque en la parábola que tiene IM por ságita, IM = MT.

Si se figura el paralelógramo T *a* M *b* sobre las tangentes AT, BT de una cadena de suspension, considerada como una parábola, se tendrá: el peso de la cadena es á la tension esperimentada en T por esta cadena como MT es á *a*T. Si tiramos *a b* paralela á AB tenemos,

$$MT : aT :: 2IT : AT :: 4IM : AT :: 8IM : 2AT$$

En fin, cuando la ságita IM es poco considerable con relacion á la longitud AI, se pueden considerar 2AT y AB como iguales. Luego en este caso el peso de la cadena es á la tension de la cadena en A como ocho veces la ságita de la cadena es á la distancia AB de los puntos de apoyo A, B.

Debe notarse que este valor es solo aproximado. Cuando sin error perceptible no se puedan confundir una con otra las longitudes AT, AY, ha de volverse á tomar la relacion AT: 4IM en lugar de AB: 8IM.

Se calculará con mucha mayor comodidad la fuerza de las suspensorias verticales, dividiendo el peso de la plataforma del puente por su número. Se deberá proporcionar su grueso segun el número de kilogramas que se encuentre por cociente de esta division.

Los grandes puentes colgados, destinados al paso de los rios caudalosos, se fabrican por los ingenieros de caminos y canales, ó por empresarios. Pero los puentes pequeños económicos que sirven para el paso de una

rambla, ó de un arroyo, ó para sostener hombres á pie, carretas, &c., ó que sirven de comunicacion entre dos edificios de una fábrica, interesan á todos los ramos de las artes.

A veces se usan en estos puentes económicos en lugar de cadenas alambres de hierro (1) reunidos en manojos y rodeados de un hilo en helice espiral, como las cuerdas metálicas en los instrumentos músicos; algunas varillas de hierro sirven de suspensorias, y unos travesaños pequeños inferiores con solo las tablas longitudinales bastan para completar el puente. Estas fabricaciones reunen en el mas alto grado la economía y la solidéz cuando se proporciona la figura y las dimensiones, segun las leyes establecidas en esta leccion para el equilibrio de las cuerdas.

Mr. Seguin de Annonay que fue el primero que hizo en Francia puentes colgados con alambres de hierro, dió el ejemplo mas ventajoso, habiendo hecho ejecutar en su propia fábrica un puente de esta clase de 18 metros de largo y 6 decimetros de ancho. Este puente, que era para pasar hombres á pie, no costó mas que *cincuenta francos*.

Mr. Seguin ha publicado una obra elemental muy útil, que deben consultar las personas que quieran fabricar puentes pequeños colgados. Para las operaciones mas importantes de la misma clase indicaremos las memorias del coronel Dufour, cuyo analisis forma parte de nuestros viajes á la Gran Bretaña; el sábio y profundo trabajo de Mr. Navier, individuo del instituto; por último, la 3.ª parte de nuestros viages, *Fuerza comercial*, en la cual dimos los planos y la descripcion de los puentes grandes colgados, hechos para Inglaterra y para nuestras colonias.

(1) *Se podrá suponer por menor fuerza del hilo de hierro, que sostiene 40 kilogramas por milímetro cuadrado de seccion, antes de romperse, y no cargar mas que 20 kilogramas por milímetro.*

Despues de haber considerado las cuerdas solamente, sometidas á la accion de unas fuerzas cualesquiera, así como á la accion de la gravedad, consideremos las cuerdas como debiendo aplicarse á la superficie de cuerpos sólidos. Cuando una cuerda se aplica á una superficie, y se tira de ella por los dos cabos, es evidente que ha de mudar de posicion, tanto cuanto sea posible, por cada fuerza que la solicite á adelantar en el sentido de su direccion; y en general tanto cuanto sea posible á la cuerda misma el tomar una posicion en que ocupe mas longitud en la superficie. No podrá haber equilibrio sino en la última posicion en que la cuerda ocupe en la superficie la posicion de la línea mas corta que pueda tirarse entre dos cualesquiera de los puntos de contacto de la cuerda y de la superficie. Las líneas mas cortas que se pueden trazar en estas superficies tienen por consiguiente una relacion con la posicion de equilibrio de las cuerdas, aplicadas sobre superficies y tiradas por sus dos estremos (1).

(1) *El carácter geométrico de estas curvas es que en cada uno de sus puntos, si se pasa un plano que les sea osculador, este plano ha de ser perpendicular á la superficie sobre que está trazada la curva. Por consiguiente, si se pusiesen varias* miras *en los diferentes puntos de la curva perpendicularmente á la superficie* y, *mirando en el sentido de la curva, de modo que los radios visuales formasen un plano que pasase á la vez por la tangente á la curva, y por la mira perpendicular al punto que se considera, el plano formado por los radios visuales, seria osculador á la curva, que apareceria como si no tuviese ninguna curvatura en el punto que se considera. Esta propiedad puede servir para trazar por aproximacion la curva mas corta que se pueda trazar en una superficie, partiendo de un punto dado, y en una direccion igualmente dada.*

Cuando una cuerda está doblada sobre una superficie y solicitada por una fuerza en cada uno de sus estremos, es menester que estas dos fuerzas sean iguales para que haya equilibrio; pues si no lo fuesen se moveria la cuerda en el sentido de la mayor, del mismo modo que no habiendo mas que una fuerza obrando en este sentido, é igual á la diferencia de las dos fuerzas primitivas.

Las artes hacen mucho uso de cuerdas aplicadas de este modo sobre superficies. Los fabricantes de naves cuando quieren dar á la superficie de las viguetas, así como á la de los bordages, una curvatura contínua, tienden cordeles en el sentido longitudinal, con mucha igualdad. Quitan sucesivamente las partes prominentes de los trozos de madera que han de preparar entre los diferentes clavos que sujetan la cuerda con la superficie. Teniendo tirante esta cuerda por los cabos, toma la direccion y la curvatura de la línea mas corta que se puede trazar sobre la superficie de la nave entre los clavos consecutivos.

Hay superficies que se pueden abrazar completamente con una cuerda, cuyos dos estremos se reunen y aprietan fuertemente con un nudo, ó por otro medio cualquiera. La cuerda no llega á su posicion de equilibrio sino cuando sigue exactamente la direccion de la línea mas corta que pueda pasar desde el punto en que se halla el nudo, dando vuelta al cuerpo para volver á este mismo nudo.

El vestido de los hombres y de las mugeres presenta una contínua aplicacion de las cuerdas, aplicadas de este modo á las superficies. Los cinturones y las cinturas son las líneas mas cortas que se pueden trazar en la superficie inmediata del cuerpo *cubierta* con nuestros *vestidos*. Si la cintura estuviese colocada mas alta procuraría bajar, y si, por el contrario estuviese mas abajo procuraria subir.

Muchas partes del adorno de las mugeres y de los hombres se componen tambien de cuerdas ó cordones, aplicados á la superficie de la cabeza; tales como cadenas, cintas, colocadas con arte en los cabellos, en los peinados griegos y romanos, como diademas asiáticas, lazos de talle, cintas ó correillas de los cothurnos, &c. Las ligas, brazaletes, collares y anillos, han de asimilarse, ora á las cadenetas sueltas, colocadas sobre superficies varias, ora á las líneas que ciñen la superficie de las piernas, de los brazos, de los dedos y del cuello, siguiendo las direcciones mas cortas que ofrecen estas partes de nuestros miembros.

Cuando espliquemos el uso de las poleas se verá que las cuerdas se colocan en la garganita de la rueda de las poleas, siguiendo la línea mas corta que se pueda trazar en esta garganta.

Las guarniciones ó arreos de los caballos ofrecen aplicaciones interesantes y muy variadas de la combinacion de las líneas mas cortas que se pueden trazar en la superficie del cuerpo de estos animales. Las colleras, cinchas, bridas, y en general todas las partes de dichos arreos estan sujetas á la regla que hemos dado para el equilibrio de las cuerdas aplicadas á superficies.

Despues de haber considerado una cuerda aplicada á una superficie, y de la que se tira solo por los estremos, supongamos que ademas se tira de ella por un punto intermedio. Se encontrarán las condiciones del equilibrio en este punto, si se supone que las fuerzas que tiran de la cuerda por los estremos se trasporten segun la direccion misma de la cuerda al punto en que obra la fuerza intermedia. Estas tres fuerzas han de estar dirigidas y proporcionadas de modo que se equilibren en dicho punto, como si la cuerda no correspondiese á ninguna superficie.

Los principios sentados al tratar de los polígonos funiculares para la igualdad de las tensiones en cada punto intermedio solicitado por una fuerza particular, son los mismos que los principios que se aplican á los polígonos funiculares, en los cuales las porciones de las cuerdas estan dobladas sobre una superficie cualquiera. Será necesario siempre, 1.º que las tensiones

ejercidas en dos partes de la cuerda á derecha ó izquierda de una fuerza intermedia, hagan equilibrio con esta fuerza: 2.º que las tensiones ejercidas en cada parte de cuerda entre dos fuerzas intermedias, sean iguales y directamente opuestas.

Los arreos que acabamos de citar son varios ejemplos de polígonos funiculares. La condicion del equilibrio y de la proporcion de las fuerzas en estos polígonos funiculares, no es cosa de mera curiosidad; porque es evidente que la solidez de cada parte de unos arreos, ha de ser proporcionada á los esfuerzos que esta parte ha de aguantar, y que los arreos han de tener sus diferentes partes trabajadas de modo que permanezcan en equilibrio á pesar de la accion del peso y de las fuerzas del tiro, sin cuya circunstancia los arreos mudarian necesariamente de posicion, y el tiro sería desventajoso.

Aplicando la geometría y la mecánica á la proporcion y corte de los arreos, se ha llegado particularmente en las artes militares á hacer un mínimo el peso de estos arreos, y su forma tan favorable como es posible á la aplicacion de la fuerza del caballo. Los ingleses y alemanes son los primeros que han hecho este estudio, y de él ha resultado que sus caballos y tiros tienen una gran superioridad de accion. Mucho tenemos todavia que hacer bajo este punto de vista, particularmente respecto de los arreos de los caballos empleados en los transportes de la agricultura y del comercio. Esta es una cosa de las mas importantes, en la cual deben parar la consideracion los artistas.

Cuando en lugar de cuerdas que hemos mirado como líneas matemáticas, hayan de emplearse cuerdas de volúmen conocido y de forma particular, como las correas, las corregüelas &c., es preciso colocar unas y otras á lo ancho en las superficies sobre que se apoyan, sin cuya circunstancia se desfigurarian por precision.

Entónces han de considerarse las corregüelas y las correas como superficies evolvibles tangentes á la superficie del cuerpo sobre que se las coloca. Hé aqui una aplicacion de las consideraciones presentadas en la *Geometría leccion X.*

El modo de suspender cargas con cuerdas para facilitar á los hombres su conduccion, merece particular atencion. Un medio sencillo y cómodo es el de dos correas atadas á la espalda de la mochila de los soldados, ó de la banasta y gancho que usan en París los mozos de cordel.

Estos correones pasan por debajo del brazo y sobre la espalda: no pueden permanecer en equilibrio á no tomar la direccion de la línea mas corta que pueda tirarse desde los puntos donde estan atados ó sujetos, pasando de este modo por debajo del brazo y por cima de la espalda. Hé aqui por qué muchas veces es preciso sujetarlos con una cuerda horizontal que se cruza delante del pecho y pasa del uno al otro correon. Se determina con facilidad la tension que esperimenta esta cuerda, y el ángulo que forma con los dos correones en su punto de aplicacion. Otro medio de aplicar el correon es el que usa en París el aguador, que coloca el suyo sobre las espaldas, le hace bajar á lo largo de los brazos hasta la altura de las manos, donde remata el correon en cada estremo en un gancho que agarra el asa del cubo. Para impedir el que se acerquen los dos cubos en virtud de su peso á las piernas del aguador, se los separa por medio de un aro. Sería fácil de hallar en este sistema la tension que sufre el correon. Se necesita que equilibre, 1.° al peso de cada cubo, 2.° á la fuerza de compresion que esperimenta el aro, y que destruye el esfuerzo que ejercen ambos cubos para aproximarse el uno al otro.

El arte de atar paquetes con bramante está fundado en las propiedades del equilibrio de las cuerdas aplicadas á las superficies de los paquetes. El estudio de esta aplicacion es fácil y agradará á los alumnos el hacerle por sí mismos, y verificar la teoría en las prácticas de las artes.

El arte de trazar en la superficie del cuerpo humano y en la de nuestros vestidos curvas que sean las líneas mas cortas que puedan trazarse en estas superficies, y que satisfaciendo á esta condicion se unen al mismo tiempo á las de la variedad, de la sencilléz, de la uniformidad y de la elegancia, pertenecen á las bellas artes, que nos presentan las mas variadas y mas ingeniosas aplicaciones.

Hemos visto que la espiral tiene la propiedad geométrica de ser la línea mas corta que se puede trazar sobre un cilindro, entre dos puntos cualesquiera de esta línea. Por consiguiente, pueden aplicarse cuerdas en espiral sobre una superficie cilíndrica, y tirar de estas cuerdas despues por sus estremidades, tangencialmente á su direccion, sin que deje de ser la misma la curvatura que afectan alrededor del cilindro.

Se ha hecho una aplicacion muy estensa de esta propiedad geométrica en las máquinas donde hay precision de aplicar cuerdas sobre superficies; por ejemplo, en la aplicacion de la cuerda á la máquina llamada torno, que describiremos en la *lec. X.* Los bordones de los violines, de las harpas y de los pianos, estan formados de una cuerda de tripa alrededor de la que se aplica en espiral un hilo metálico. La tension de este hilo es la misma en todos los puntos de su longitud, cuando toma la forma espiral. De consiguiente las vibraciones que resultan al tocar el instrumento son las mismas en todas las partes de la cuerda, lo cual resulta de las propiedades de esta curvatura espiral.

Las redes se forman de cuerdas unidas de dos en dos, en puntos que siguen un orden determinado. Hay redes que se hacen para aplicarse exactamente sobre superficies. Tal es la red con que se cubren los globos acreostáticos, que remata en el contorno de la barquilla que llevan estos globos. Es fácil calcular, segun los principios espuestos en esta leccion, la tension que cada cordon esperimenta en las diversas partes de la red.

El adorno de las mugeres presenta con frecuencia redes destinadas á cubrir ciertas partes de la superficie de sus cabellos y de sus vestidos. Tales son las redecillas usadas en el peinado, tales los tejidos ligeros llamados organdis y tules. Su fabricacion en forma de redes los hace á propósito para ajustarse con delicadeza á las inflexiones y curvaturas del cuerpo humano.

LECCION SÉTIMA.

Continuacion de las cuerdas. Movimientos circulares de las cuerdas, de las varas, de las ruedas, de los volantes. Momentos de inércia. Los péndulos.

Supongamos que se aplique una fuerza X (fig. 88), *perpendicularmente* al estremo A de una cuerda AC inestensible y sin peso, quedando el otro estremo C sujeto á un punto fijo.

Si la fuerza X actuase libremente en un tiempo cualquiera, haría caminar en línea recta el punto material A, alejándole cada vez mas del punto fijo C; pero el hilo que empleamos impide al punto material hallarse mas lejos de C que la distancia primera CA; luego este hilo tira del punto material para tenerle á una distancia constante del punto fijo. Por reaccion la fuerza AX tira del hilo que obedeciendo á estas fuerzas siempre está tirante. Luego la estremidad A de este hilo describe un círculo.

Aquí observamos tres fuerzas muy distintas: la primera X, perpendicular al rádio CA, y de consiguiente dirigida segun la tangente AX del círculo que corre el punto material A, es la *fuerza tangencial*; la segunda que tira del hilo hácia el centro es la *fuerza central*; la tercera que tira del hilo para alejar del centro el punto A es la *fuerza centrífuga*, igual y directamente opuesta á la fuerza central. Veamos la relacion de estas dos últimas fuerzas con la primera.

Figuremos el paralelógramo AN *mn* con los lados iguales AN, A*n*; la diagonal A*m* representará el esfuerzo necesario para mudar la direccion de A*n* en la de AN, y hacer pasar el cuerpo desde A á N. Este esfuerzo A*m* es la fuerza central.

Si tiramos el rádio CN, los triángulos ACN, NAm serán semejantes por ser simétricos y tener un ángulo comun A. Luego

$$CN:AN::AN:Am=\frac{AN^2}{CN}$$

Es decir, que Am que *representa á la vez la fuerza central y la fuerza centrífuga es igual al cuadrado de la fuerza tangencial dividido por el rádio.*

Con el raciocinio que acabamos de hacer veremos que tomando AN=NN′=N′N″...., y haciendo actuar sobre CN,CN′CN″.... una nueva fuerza central igual á Am, el cuerpo correrá en intervalos iguales de tiempo los espacios AN,NN′,N′N″.... Luego el cuerpo conserva siempre la misma velocidad tangencial, y recibe á cada instante, de la fuerza central, una impulsion nueva y constante, cuando corre un círculo dado. Este es el *movimiento circular uniforme.*

En este movimiento la *velocidad tangencial* es igual al arco corrido, dividido por el tiempo empleado en correrlo.

Si se divide el arco por el rádio se tiene la medida del ángulo. Así, el ángulo que corresponde al arco corrido, es igual á la velocidad tangencial, dividida por el rádio de este arco y multiplicada por el tiempo empleado en correrlo. Este ángulo, dividido por el tiempo dá la medida, de lo que se llama la *velocidad angular* de un cuerpo que da vueltas alrededor de un centro. Luego, 1.° con la misma velocidad tangencial, la velocidad angular está en razon inversa del rádio: 2.° con el mismo rádio la velocidad tangencial y la velocidad angular son proporcionales.

Cuando los rádios se diferencian entre sí, el tiempo empleado en correr el círculo entero está en razon inversa de la velocidad angular; luego el tiempo empleado en correr el círculo entero es proporcional al rádio dividido por la velocidad tangencial.

Estos resultados tienen aplicacion á una multitud de cuestiones de mecánica importantes á las artes.

Recordemos otra vez con atencion que cuando un cuerpo da vuelta alrededor de un centro, se halla sostenido por un hilo, un cordon, ó una varilla ó basa cualquiera, la fuerza central es la tension ó tirantéz que esperimenta el hilo, el cordon, &c., por parte del centro, y que la fuerza centrífuga es la tension opuesta que esperimenta el hilo para alejarse del centro.

El picador que hace dar vueltas á un caballo en el picadero, se coloca en el centro del círculo, y con una mano tiene el estremo de la cuerda del cabezon del caballo. En este estado la fuerza tangencial es la misma fuerza del caballo, que procura sin cesar escaparse por la tangente; pero el picador tira del ramal con una fuerza central, igual á la fuerza con que el caballo tira de él, es decir, igual á la fuerza centrífuga del caballo. Cuando el caballo duplica la velocidad, la fuerza central es cuatro veces mayor, cuando la triplica, la fuerza central es nueve veces mayor, &c. La misma esplicacion y las mismas relaciones son aplicables al movimiento de la honda, de que hablaremos en breve.

Un caballo que da vueltas en un círculo no se mantiene derecho, porque la fuerza centrífuga que anima á cada instante todas las partes de su cuerpo lo impele horizontalmente fuera del círculo y procura hacerlo caer. Para resistir á este conato, efecto de la fuerza centrífuga, inclina el caballo la parte superior del cuerpo hácia el centro del círculo que corre, y esta inclinacion aumenta como el cuadrado de su velocidad. Así, se nota que es muy considerable cuando el caballo corre á escape. Para que el caballo pueda caminar sin gran dificultad, manteniéndose inclinado hácia el centro del círculo, se inclina algunas veces el camino circular que corre. *Véase la fig.* 89.

El volatinero que se tiene de pie sobre el caballo tambien inclina lo alto del cuerpo hácia el centro del círculo para no ser derribado por el efecto de la fuerza centrífuga. La figura 89 manifiesta la composicion que se hace entre la fuerza de la gravedad y la fuerza centrífuga, para que haya equilibrio en la posicion del caballo y del volatinero.

Cuando un carruage camina describiendo un arco de círculo, ó como dicen, cuando toma la vuelta, esperimenta tambien la accion de una fuerza centrífuga que tira á volcarlo. Si va por un camino L, que tiene pendiente hácia el centro O de la revuelta, la fuerza centrífuga y lo de la gravedad hallan en esta disposicion la misma ventaja que el caballo (fig. 89), que dá vuelta en los caminos AA,ED alrededor del mismo eje OO′.

Si el camino M es horizontal, nada disminuye el conato de la fuerza centrífuga para volcar el carruage.

En fin, si el camino N desciende alejándose del centro de la revuelta, ésta pendiente, unida al efecto desfavorable de la fuerza centrífuga, lo pone en el mayor peligro de volcar.

Los caminos de Francia tienen el gran inconveniente de ser convexos en el medio, de modo que ofrecen dos pendientes bastante notables en sentido opuesto. En las revueltas en que se encuentran dos carruages, el que va por la pendiente que está del lado donde cae el centro del contorno, se halla favorecido por esta pendiente, pero el que va por el otro lado se halla otro tanto desfavorecido, y muy espuesto á volcar.

Debería ser una regla general en las vueltas de los caminos no hacer jamás pendiente esterior, y al contrario, practicar siempre que sea posible una sola pendiente inclinada hácia el centro de la parte de círculo.

Siendo la fuerza centrífuga en razon inversa del diámetro del arco corrido, resulta que es poco considerable cuando este diámetro es grande, y aumentando mas cuando el diámetro disminuye. En las revueltas muy cortas, esto es, en aquellas cuyo arco es de pequeño diámetro, la fuerza centrífuga es pues considerable, y de consiguiente hay gran peligro de volcar.

Al mismo tiempo este peligro aumenta como el cuadrado de la velocidad de los carruages, por cuya razon los cocheros y ginetes prudentes no aprietan nunca los caballos con gran velocidad en las vueltas cortas, y por poca velocidad que lleven detienen el paso cuando quieren dar vuelta.

Adviértase con que exactitud y facilidad aprecia la mecánica todos los efectos del movimiento circular en los casos mas importantes á la seguridad de los transportes y de los viageros. La mecánica da tambien á conocer los principios de fabricacion de carruages, fundados en las leyes del movimiento.

Cuando una rueda (fig. 90) se mueve con rapidéz en la arena ó en el lodo, lleva porciones de este lodo, ó arena que adquieren la velocidad tangencial de la rueda, y que no hallándose sujetas contra las pinas ó las llantas con una fuerza igual á la fuerza centrífuga, ceden á esta fuerza y las arroja con la velocidad tangencial que han adquirido. Delante de las ruedas de los carruages de lujo se pone una placa ancha y circular de metal XY, que se llama *paralodo*, y detiene todas las partículas del lodo, arrojadas por efecto de la fuerza tangencial.

Si las pinas de las ruedas no se hallasen unidas entre sí por medio de clavijas que las atravesasen por la mitad de sus dos estremos de contacto, y por los calces de hierro que cubren estas junturas, la fuerza centrífuga que procura sin cesar alejarlas del centro, las arrancaría de los rayos, despidiéndolas como la arena y el lodo cuando las ruedas adquiriesen una gran velocidad. Si los clavos que aseguran los calces de hierro á las pinas no estuviesen bien asegurados en la madera de éstas, la fuerza centrífuga los arrancaría y los despediria en la direccion de los rayos prolongados. De consiguiente, la solidéz de la union de los ensamblages de las pinas, de las llantas y de los clavos que las sujetan á dichas pinas, tiene sus reglas respecto á la fuerza tangencial y á la fuerza centrífuga. Lo mismo sucede con otras muchas ruedas empleadas en las máquinas, como se verá mas adelante.

El obrero que golpea con una hacha ó martillo le hace correr un círculo, de manera que soltándolo en el acto se escaparia por la tangente del arco que corre. Así es como en la milicia blandian circularmente y lanzaban la maza, el hacha, la daga, &c., y así es como se empleaba la honda.

Antes de la invencion de las armas de fuego, la honda era una arma arrojadiza muy importante; pero en el dia es un juguete de muchachos. En medio de una cuerda ligera ACB (fig. 91.) se halla una especie de hojal C, donde se coloca una piedra. Se agarran con la mano los dos cabos A y B, y despues se da á la honda un movimiento de rotacion. Si se emplea una fuerza constante: 1.º la honda da vuelta con una velocidad constante; 2.º la cuerda de la honda siempre está tirante egerciendo sobre la mano un esfuerzo que representa la fuerza central necesaria para que esté la piedra C á una misma distancia del centro A. Cuando se suelta uno de los cabos de los de la cuerda, esta fuerza central cesa de oponerse á la fuerza centrífuga, la piedra deja de moverse circularmente, y la fuerza tangencial impele la piedra que corre una línea recta cuando se arroja verticalmente.

En todo lo que acabamos de decir no hemos contado con el efecto del peso sobre el cuerpo A. Si se tuviera presente este efecto, el problema seria mucho mas complicado.

En el caso de obligar á un cuerpo á que gire en un círculo hueco, se moverá contra la circunferencia del círculo con una fuerza constante, que es la fuerza tangencial, la cual determina su velocidad progresiva. Esta fuerza tangencial, impeliendo al cuerpo á escaparse por la tangente, hallaria á cada instante una resistencia contra la circunferencia del círculo hueco. Esta resistencia perpendicular á la circunferencia, y de consiguiente dirigida hácia el centro, seria la fuerza central igual y directamente opuesta á la fuerza centrífuga.

La artillería emplea barriles que giran sobre su eje, los cuales contienen las balas de plomo para redondearlas. La solidéz de estos barriles ha de ser proporcionada: 1.º á la cantidad de balas que se ponen á la vez; 2.º á la fuerza centrífuga de las balas, la cual es proporcional al cuadrado de la fuerza tangencial, empleada en hacer rodar las balas en el barril.

Lo mismo debe decirse de los cubetos ó cilindros que se emplean dando vueltas, los cuales contienen las balas de cañon que se quieren limpiar del orin, ó las balas de cobre que se ponen entre la pólvora, con el objeto de granularla.

Hasta aquí no hemos examinado sino el movimiento circular de un cuerpo, obligado á moverse en línea curva, á causa de que una cuerda, una varilla ó una circunferencia maciza le precisaban á seguir esta línea, en virtud de una accion que se dirige siempre hácia el centro del movimiento.

La naturaleza nos presenta grandes ejemplos de cuerpos que se mueven en línea curva, sin hallarse detenidos por ninguno de esos lazos intermedios, ó de esos contornos esteriores. Asi se mueven en el espacio la luna alrededor de la tierra, y la tierra alrededor del sol. *Véase la fig.* 92.

En estos movimientos hay la fuerza tangencial T, que procura sin cesar impeler en línea recta la luna y los planetas. Ademas, la tierra es, respecto de la luna, el foco de una fuerza central C, que se ejerce á cada instante contra la fuerza centrífuga de la luna, lo mismo que el sol es, respecto de la tierra, el foco de una fuerza central C, que se ejerce á cada instante contra la fuerza centrífuga de la tierra.

Si la fuerza central y la fuerza tangencial se equilibrasen, se hallarian en la disposicion conveniente al movimiento circular, la luna describiría un círculo alrededor de la tierra, lo mismo que la tierra describibiría un círculo alrededor del sol. Pero hay posiciones en que la fuerza tangencial es algo mas considerable, y entónces la luna se aleja de la tierra, y la tierra del sol. Al alejarse su direccion centrífuga se hace oblicua respecto á la direccion central. De consiguiente, la fuerza central se opone á la fuerza centrífuga y la disminuye, de modo que al contrario, esta última al fin es algo mas considerable que la primera. Entonces el astro movible se aproxima al centro de su movimiento. He aqui cómo la luna alrededor de la tierra, y la tierra alrededor del sol, describen una curva prolongada, ó una elipse, siendo la tierra el foco para la elipse que sigue la luna, y el sol el foco para la elipse que sigue la tierra.

La fuerza central de la tierra, respecto á la luna, es la fuerza que hemos llamado *gravedad* y *atraccion*. Es la fuerza que procura continuamente bajar una bomba lanzada de abajo arriba, y la hace describir una curva ABC (fig. 93) cuando se arroja oblicuamente.

Si la fuerza del peso fuese constante, y si el aire no opusiese resistencia al movimiento de los cuerpos que se arrojan, una piedra, una bomba, un volante, en una palabra, un cuerpo cualquiera que hubiese recibido la impulsion de la fuerza primitiva, correria una parábola ABC.

La resistencia del aire disminuye mucho el espacio contenido en la curva, achata sobre todo la segunda rama de la parábola ideal, y produce la curva AEF.

El objeto de importantes esperimentos para la artillería es determinar segun la masa y el volúmen de las balas, bombas, &c., segun la fuerza que las arroja, y la direccion de la impulsion primitiva, los puntos á donde puede llegar el proyectil á diferentes alturas, así como á diferentes distancias. No podemos aqui mas que indicar esas grandes y hermosas aplicaciones de la mecánica que componen la teoría, que se llama *Balística*.

En el dia está bien demostrado que la tierra en lugar de hallarse en reposo, y situada, segun se ha creido

por mucho tiempo, como un punto fijo en el centro del universo, gira sobre sí misma con tal rapidéz, que concluye cada una de sus vueltas en la duracion total de un dia y una noche. Así, en virtud solamente de la rotacion del globo, los habitantes de la tierra, colocados en el ecuador, son llevados de occidente á oriente, con una velocidad cuatrocientas veces mayor que la de un peon que camina á su paso ordinario.

Cada uno de los puntos de la tierra se halla, pues, animado de una fuerza tangencial que procura llevarle lejos del globo, y de una fuerza central que procura al contrario precipitarle hácia el centro de la tierra. Esta fuerza central es la atraccion del globo. En cuanto á la fuerza tangencial, como es con corta diferencia casi la misma en todos los cuerpos situados en la inmediacion unos de otros, estos cuerpos arrastrados por un movimiento casi igual, se mantienen los unos respecto á los otros en un estado que se aproxima al reposo.

Sea (fig. 94) una proyeccion de la tierra paralela al ecuador, de modo que el ecuador y los paralelos se hallen representados por círculos. Comparemos el movimiento de los puntos E,A situados uno en el ecuador EE′E″, y otro en un paralelo cualquiera AA′A″. Tírese el rádio OyY infinitamente cerca del diámetro EOE′. Bajemos las perpendiculares Xy,XY sobre EOE′; y es evidente que los rádios OA,OE serán proporcionales á las líneas EX,Ax, que representan las fuerzas centrífugas de los puntos materiales EA. Luego en el movimiento de la tierra alrededor de su eje, la fuerza centrífuga que solicita cada punto, es proporcional á la distancia del eje de dicho punto.

Asi es que la mayor fuerza centrífuga es en los puntos EE′ situados en el ecuador. Esta fuerza destruye parte del peso de los cuerpos; en fin, el peso de estos es menor en el ecuador que en cualquiera otro punto de la tierra. Pronto veremos como puede justificar la esperiencia este resultado.

Sea una torre ET, edificada en E. Describamos desde el centro O el arco TY′, y tiremos Y′X′ perpendicular á OT, tendremos OE:OT::EY:TY; esta es la relacion de las fuerzas tangenciales.

Supongamos que dejo caer de lo alto de la torre T un cuerpo cualquiera que llega al pie de la torre cuando lo alto llega á Y′. Este cuerpo se halla animado de una fuerza tangencial que le hará igualmente correr TY′, luego debe caer no en Y, cuando el pie de la torre llega á este punto, sino en Z, á una distancia EZ=TY. Hagamos mas perceptible este resultado por medio de guarismos.

El rádio de la tierra en el ecuador es igual á 6.376,466 metros. Supongamos que en una de las ciudades que se hallan en la línea del ecuador haya una torre de la altura de 100 metros, y examinemos la diferencia de velocidad de los dos puntos materiales, situados el uno al pie y el otro en lo alto de la torre.

El rádio de la circunferencia corrida por el uno será de 6.376,466 metros, y por el otro de 6.376,566 metros. La relacion inversa de estos dos números será la de las velocidades. Es fácil conocer que en un dia el punto mas alto habrá corrido de mas, respecto al punto mas bajo, 100 metros multiplicados por la relacion de la circunferencia al rádio, lo cual produce 628 metros y algo mas. Entre tanto un cuerpo pesado, dejándole caer en el vacío, emplearía casi cinco segundos en descender estos 100 metros, partiendo de uno de los puntos de la circunferencia del ecuador, lo cual es la 17,280.ª parte del dia. Dividamos 628 metros por 17,280, y tendremos la cantidad que lo alto de la torre ha adelantado hácia el oriente mas veloz que la parte inferior durante la caida de este cuerpo. Asi hallaremos que el cuerpo pesado ha de caer no exactamente al pie de la torre segun la vertical, sino al oriente de esta vertical á la distancia de cerca de $\frac{628^{\text{met.}}}{17,280}=36$ milímetros.

Como la resistencia del aire retarda considerablemente la caida de los cuerpos graves se necesitarian muchos mas de cinco segundos para que un cuerpo cayese de la altura de 100 metros. De consiguiente el cuerpo grave caeria á mas de 36 milímetros al oriénte del pie de la torre, y el esperimento seria tanto mas concluyente.

Cuando un cuerpo sólido da vuelta uniformemente alrededor de un eje, dando al mismo tiempo todos sus puntos una vuelta completa, su velocidad es proporcional á la circunferencia, y de consiguiente al rádio de los círculos que corren.

Pero en dos círculos diferentes, cuyo centro esté en el mismo centro del movimiento, y cargados uniformemente de partes materiales, la cantidad de estas partes es proporcional al rádio; luego en estos dos círculos la cantidad de movimiento, es decir, el producto de la masa por la velocidad es proporcional al rádio multiplicado por el rádio, ó lo que es lo mismo, al *cuadrado* del rádio.

De esto se sigue que en las máquinas en que se emplean ruedas vanas, que tienen listones circulares de igual anchura ABC*abc* (fig. 95), la cantidad de movimiento de que se hallan animados estos listones ó llantas cuando cada una dá su vuelta en el mismo tiempo, es proporcional al cuadrado del rádio de estas ruedas.

En igualdad de masas es pues mucho mas penoso hacer dar vueltas á ruedas grandes que á pequeñas. Por ejemplo, si ABC es tres veces mayor y tres veces mas pesada que *abc*, y se quiere que ABC dé una vuelta completa en el mismo tiempo que *abc*, es menester tres veces tres, ó nueve veces la misma cantidad de movimiento. Pero si se hiciese *abc* tres veces mas pesada sin agrandarla, bastaria triplicar la cantidad para conservar la misma velocidad. Esta cantidad triplicada seria todavia menor que la de que se halla animada ABC, puesto que su fuerza es nueve veces mayor.

De consiguiente, si quiero acumular en una masa dada de materia una gran cantidad de movimiento, tendré tanta mayor ventaja, cuanto mayor sea el diámetro de la circunferencia, en la cual distribuya esta materia. Es de suma importancia en muchas máquinas acumular tambien la mayor cantidad posible de movimiento en una masa cuyo peso no cargue demasiado los puntos de apoyo. Por este medio, si hay irregularidades accidentales, ó producidas por la desigualdad de los movimientos que procuran producir aceleraciones ó detenciones perjudiciales, una rueda grande, animada de una rotacion constante, de modo que pueda adquirir ó perder una cantidad de movimiento bastante considerable, sin que se altere mucho su velocidad, actúa como un conservador ó un regulador, que muchas veces produce efectos sumamente útiles: estos conservadores de fuerzas se llaman *volantes*.

En vez de darles la forma de una banda contínua ABC (fig. 95), se concentra frecuentemente en tres ó cuatro puntos equidistantes A,B,C, (fig. 96), ó A,B,C,D, (fig. 97), toda la masa que se habia de repartir en la banda ó faja ABC. Entonces, quedando esta materia á la misma distancia media del centro de rotacion, conserva para una misma velocidad la misma cantidad de movimiento.

Vamos al momento á demostrar que el centro de rotacion O de los volantes, ha de ser igualmente su centro de gravedad. Sin esta circunstancia la rueda se inclinaría á cada instante hácia un lado mas que á otro, y su movimiento no podria tener regularidad ni uniformidad. Se satisface del modo mas ventajoso la condicion que indicamos, tomando el centro del volante por centro de simetría de los pesos de que se quiere componer el volante. Tal es la regla que se sigue en las figuras 96 y 97.

La teoría que sigue es indispensable á los fabricantes de naves, á los relojeros, á los maquinistas, pero en muchos pueblos todavía no podrán entenderla los obreros, en cuyo caso la omitirá el profesor.

Se demostrará, respecto de todo cuerpo sólido, que rueda alrededor de un eje, como se ha hecho respecto al globo de la tierra, página 133, que la fuerza centrífuga es proporcional á la distancia del eje á cada punto material.

Sea el plano de la figura 99 perpendicular á este eje representado por el punto G. Sean los puntos materiales iguales en masa $m,m',\ldots$ M,M'...., los cuales componen el cuerpo ABCD: las distancias $Gm,Gm'\ldots$ GM,GM'.... serán proporcionales á las fuerzas centrífugas y podrán representarlas.

Supongamos que el centro de gravedad se halle en el eje G, y tiremos las perpendiculares $mn,m'n'\ldots$ MN,M'N'.... sobre una recta cualquiera XGY, tomada por eje de los momentos de pesos iguales $m,m'\ldots$ M,M' tendremos....

1.° $m\times Gn+m'\times Gn'=M\times GN+M'\times GN'\ldots$

2.° $m\times mn+m'\times m'n'=M\times MN+M'\times M'N'\ldots$

Es decir, que las fuerzas centrífugas $Gm,Gm'\ldots$ GM,GM'...., resueltas 1.° perpendicularmente, 2.° paralelamente á la recta XGY, tienen una resultante nula en cualquiera direccion en que se resuelvan paralelamente al plano de la figura. Luego paralelamente á este plano *la resultante de las fuerzas centrífugas no tira en ningun sentido mas que en otro del eje que pasa por el centro de gravedad del cuerpo.*

Supongamos ahora que el centro de rotacion g esté á la distancia Gg del centro de gravedad G, sobre el eje xgy paralelo á XGY. Las nuevas fuerzas centrífugas $gm,gm'\ldots$ gM,gM'.... resueltas paralelamente á Gg, tendrán por resultante, $m\times ml+m'l+m'\times m'l'+\ldots+M\times ML+M'\times M'L'\ldots$

No se altera esta resultante, si se resta de ella $m\times mn+m'\times m'n'+\ldots$ y si se añade $M\times MN+M'\times M'N'+\ldots$ valor igual al de la espresion que se resta.

Pero observemos que....

$ml-mn=m'l'-m'n'\ldots=MN-ML=M'N'-ML\ldots$

Luego el resultado de la adicion y sustraccion propuestas será la suma de las masas $m+m'....+M+M'....$ multiplicada por Gg.

Luego, cuando un cuerpo gira alrededor de un eje xgy, que no pasa por su centro de gravedad G, la resultante de las fuerzas centrífugas aumenta proporcionalmente á la distancia del eje al centro; y es la misma que si se supusieran condensadas ó reunidas en el centro G todas las partes del cuerpo.

Este efecto de la fuerza centrífuga procura desalojar el eje, y llevarle sin cesar hácia el centro de gravedad. Es un inconveniente que ha de evitarse en la mayor parte de las máquinas de rotacion, y particularmente en aquellas en que se emplean volantes. Así, *por regla general, es preciso que el centro de gravedad de un volante se halle en el eje de rotacion.*

Consideremos ahora el efecto de las fuerzas centrífugas apreciado paralelamente al eje. Supongamos (figura 99) que el plano de la figura sea el del eje. Representemos tambien este eje por XGY, admitiendo ademas que G sea el centro de gravedad del cuerpo.

Cortemos el cuerpo con vários planos $mn, m'n', m''n''....$ perpendiculares al eje. Pónganse en el plano de la figura los puntos m', m'', m''', representando la proyeccion del centro de gravedad de los puntos materiales, contenidos en cada plano. La resultante de todas las fuerzas centrífugas se hallará representada por la resultante de las fuerzas $m \times mn, m' \times m'n', m'' \times m''n''...$ En seguida, para encontrar la resultante de estas fuerzas, será menester buscar primero la resultante P de las fuerzas situadas á un lado del eje, y la resultante Q de las fuerzas situadas al otro lado de este eje. Si las dos fuerzas PQ se hallaban en una misma perpendicular al eje, y éste pasaba por el centro de gravedad del cuerpo, las dos fuerzas se equilibrarian. De consiguiente, el eje no se hallaria solicitado á moverse en ningun sentido por efecto de las fuerzas centrífugas. Pero si como se ha representado en la fig. 12, las perpendiculares Pp Qq, llevadas al eje XGY, no pertenecen á la

misma recta, el eje se hallará solicitado á girar por efecto de las fuerzas P y Q, multiplicadas respectivamente por las distancias Gp, y Gq. Se hallan los momentos de P y de Q respecto al centro de gravedad G, multiplicando cada fuerza $m \times mn$ por Gn, $m' \times m'n'$ por Gn', $m'' \times m''n''$ por Gn'', &c., y despues viendo si la suma de los momentos de fuerzas que actúan en un sentido es igual á la suma de los momentos de fuerzas que actúan en el sentido opuesto.

Se demuestra con métodos de cálculo, que no podemos esponer aquí, que esta igualdad de momentos es la condicion indispensable para que el momento de inércia del cuerpo, tomado respecto al eje XGY, sea un máximo ó un mínimo.

Si se quiere que el eje de los volantes, y generalmente los ejes empleados en las máquinas de rotacion, no esperimenten presion en sentido alguno por efecto de las fuerzas centrífugas, se vé que es menester arreglarlo de modo que las fuerzas PQ, se hallen siempre situadas en una misma recta perpendicular al eje, al mismo tiempo que se haga pasar este eje por el centro de gravedad.

La grande utilidad que tienen en los movimientos de las máquinas aquellos ejes en que se halla verificada esta condicion, justifica su denominacion de *ejes principales*.

Despues de haber determinado la direccion mas ventajosa que conviene dar al eje de los volantes, es necesario ver qué velocidad pueden adquirir estos volantes cuando se emplea para moverlos una fuerza determinada, y cuando el volúmen y la masa de los volantes se hallan de igual modo.

Sea para mayor facilidad el eje de rotacion perpendicular al plano de la figura 98, y representado por el punto O, dando vuelta el cuerpo alrededor de este eje en virtud de la fuerza Ff y á la distancia Of del eje. Supongamos Ff en el plano de la figura.

El esfuerzo, el momento de Ff para hacer dar vuelta al eje, estará representado por $Ff \times Of$.

La velocidad angular a, adquirida por el cuerpo, será el arco corrido durante la unidad de tiempo sobre el círculo, cuyo rádio se ha tomado tambien por unidad. El punto material m del cuerpo va á correr en la unidad de tiempo un arco $mn = a \times Om$. La cantidad de movimiento de m será pues $m \times a \times Om$, y la cantidad total de movimiento de los puntos m, m', m'' del cuerpo, será

$$a \times (m \times Om + m' \times Om' + m'' \times Om'' + \ldots)$$

Para medir el efecto de cada molécula en virtud de esta cantidad de movimiento, ejercido para hacer dar vuelta al eje, traslademos todos los puntos $m, m' \ldots$ á la recta fo, y á un mismo lado del eje, sin alterar su distancia á este eje. Entonces todas las fuerzas tangenciales que animarán á $m, m', m'' \ldots$ fuerzas representadas por las cantidades de movimiento que acabamos de hallar, serán paralelas, y estarán dirigidas en el mismo sentido; su resultante Rr se hallará, segun el principio de los momentos, multiplicando cada fuerza por su distancia al eje; luego $Rr \times Or = a(m \times Om \times Om + m' \times Om' \times Om' + m'' \times Om'' \times Om'' \ldots)$

O para escribirlo con mas sencilléz $Rr \times Or = a \{m \times Om^2 + m' \times Om'^2 + m'' \times Om''^2 + \ldots\}$

Permaneciendo la misma la fuerza $Rr = F$, mas aumenta la suma $m \times Om^2 + m' \times Om'^2 + \ldots$ y mas disminuye a; al contrario, cuanto mas disminuye esta suma mas aumenta la velocidad angular a.

De consiguiente, esta suma representa la resistencia que en virtud de la inércia opone el cuerpo al movimiento de rotacion, cuando este cuerpo se halla solicitado por una fuerza dada. Tal es la razon por qué se ha llamado *momento de inércia*. Luego un punto material tiene por momento de inércia su masa m, multiplicada por el cuadrado de su distancia al eje de rotacion. El momento de inércia de un cuerpo cualquiera es igual á la suma de los momentos de inércia de cada una de las partes infinitamente pequeñas que lo com-

ponen. Luego *la velocidad angular alrededor de un eje, adquirida por el cuerpo en virtud de una fuerza cualquiera es igual al momento de esta fuerza dividido por el momento de inércia del cuerpo*: tal es la velocidad que nos habiamos propuesto valuar.

Los momentos de inércia tienen propiedades generales sumamente importantes en la mecánica, pero no podemos dar mas que una idea de ellos porque está materia pide mayores conocimientos.

Consideremos solo dos puntos materiales m, m' (figura 99), cuyo centro de gravedad se halle en G, y hagámosles girar alrededor del eje XGY perpendicular á mGm': tendremos por suma de los momentos de inércia de m y m' $m \times Gm^2 + Gm' \times m'^2$. Sea ahora el eje xgy paralelo á XGY, el momento de inércia respecto á este nuevo eje será $m \times gm^2 + m' \times gm'^2$.

La diferencia de estos dos valores es $m \times Gg^2 + m' \times Gg'^2$; es decir, el cuadrado de la distancia Gg del eje al centro de gravedad, multiplicado por la suma de las masas m y m'.

Esta propiedad no es solo cierta, respecto á dos puntos materiales, sino respecto á un número cualquiera de puntos que formen un cuerpo, cuya figura y masa pueden tambien ser cualesquiera. Asi, en una direccion dada XGY del eje de rotacion, el momento de inércia es el mas pequeño posible cuando este eje pasa por el centro G de gravedad del cuerpo, y cuando no pasa por el centro de gravedad, el momento de inércia aumenta una cantidad igual á la masa del cuerpo, multiplicada por el cuadrado de la distancia del eje al centro de gravedad del cuerpo. Representemos por MK^2 el momento de inércia del cuerpo, cuya masa es M, cuando el eje pasa por el centro de gravedad: K representa entonces una cierta longitud. Si llamamos D la distancia del centro de gravedad á un eje de rotacion cualquiera, tenemos de consiguiente por momento de inércia, respecto á este eje $M \times (D^2 + K^2)$, valor que será fácil de calcular conocido el momento de inércia tomado respecto á una recta paralela al eje y tirada por el centro de gravedad.

Todos los ejes paralelos á una direccion dada, y que esten á la misma distancia D del centro de gravedad, tendrán evidentemente el mismo momento de inércia

$$M\times(D^2+K^2).$$

Pueden compararse entre sí los momentos de inércia de un cuerpo, tomados respecto á los diferentes ejes que pasan por el centro de gravedad. Entre todos estos ejes hay uno, en el cual es mucho menor el momento de inércia que en todos los demas. Podria llamársele *eje de menor inércia.* Perpendicularmente á este eje hay otro que pasa igualmente por el centro de gravedad, y para el cual el momento de inércia es el mayor posible: á este podría llamársele el *eje de mayor inércia.* Ultimamente, un tercer eje perpendicular á los otros dos, y al cual podría llamarse *eje intermedio*, tiene la propiedad de que en un sentido, su momento de inércia es el mayor posible, y en otro sentido, el menor, respecto á los ejes tirados, 1.° en el plano de este tercer eje y del de menor inércia, 2.° en el plano de este tercer eje y del de mayor inércia. Estos tres ejes notabilísimos que acabamos de indicar, son los que se llaman *ejes principales* de los cuerpos, y respecto á los que hemos hecho observar, página....., que las fuerzas centrífugas no actúan en ningun sentido paralelo, ó perpendicular al eje, para mudar la posicion de estos ejes.

De aquí resulta que un cuerpo puesto una vez en movimiento alrededor de uno de sus ejes principales de rotacion continuará moviéndose eternamente alrededor de este eje, pues ninguna fuerza centrífuga actúa en ningun sentido para desviar la posicion del cuerpo, respecto á este eje. De aquí concluimos que en las máquinas de rotacion, cuyo eje ha de permanecer fijo, las partes que giran alrededor han de tener por eje de rotacion uno de sus ejes principales de inércia.

Cuando un cuerpo, cuya densidad es igual en todas

sus partes, se halla terminado por una superficie de revolucion, siendo este cuerpo simétrico respecto al eje de esta superficie, es fácil ver que cuando dá vueltas el cuerpo alrededor de este eje, no pueden actuar las fuerzas centrífugas para mudar la posicion del eje de rotacion, y este eje es entonces uno de los ejes principales del cuerpo.

Cuando espliquemos las máquinas de rotacion, v. g.: la polea, la cábria, el cabrestante, &c., veremos que se cuida de dar á las partes movibles la figura de una superficie de revolucion que tiene por eje el eje mismo de rotacion, á fin de evitar cualquier efecto desventajoso de las fuerzas centrífugas.

Todos los cuerpos que tienen un eje de simetría, tienen tambien sus puntos colocados de dos en dos, á igual distancia del eje, en una perpendicular á este eje. Si se hace dar vueltas al cuerpo alrededor de su eje de simetría, cada uno de dichos dos puntos, dispuestos de este modo, se hallan animados de una fuerza centrífuga, igual y directamente opuesta. Estas fuerzas se destruyen, pues, mútuamente, y no producen efecto alguno sobre el eje. De consiguiente, siempre que un cuerpo da vueltas alrededor de su eje de simetría, continuará este movimiento alrededor del propio eje cuando se le abandona á sí mismo.

Tal es el efecto del juego de las peonzas y las perinolas, que dan vueltas alrededor de su eje de simetría, colocado en una posicion vertical, y que continúan moviéndose con regularidad despues que se les ha dado la primera impulsion por medio de una cuerda, de un látigo, ó solo dando vuelta al mango de la perinola entre el pulgar y el índice, y despues abandonándola á sí misma.

Ya hemos advertido que las arañas son simétricas, respecto del eje vertical que pasa por su punto de suspension. He aquí por qué pueden las arañas dar vueltas libremente alrededor de este eje sin inclinarse á un lado mas que á otro: efecto que puede advertirse particularmente en las arañas colgadas en bóvedas muy elevadas.

En las máquinas de rotacion, tal como la de los caballos de madera, los caballos y las sillas destinadas á las personas que quieren correr la sortija, se hallan colocadas simétricamente alrededor del eje vertical de rotacion. De consiguiente, cuando se comunica un movimiento á estas máquinas, continúan moviéndose sin que su inércia ejerza esfuerzo alguno hácia ningun lado del eje.

Una fuerza Mv transporta directamente con la velocidad v el cuerpo M, suponiéndolo libre. Si se aplica la misma fuerza Mv al cuerpo M, suponiéndolo sujeto por un eje, y que l sea la distancia de la fuerza á este eje, tenemos Mvl momento de la fuerza respecto al eje $= aM(D^2+K^2) = a \times$ por el momento de inércia del cuerpo con relacion al eje.

Supongamos que el cuerpo se halle colocado de tal modo que dé vueltas sobre su eje, sin que le haga sufrir presion alguna en ningun sentido, este cuerpo se moverá como si estuviera libre, y su centro de gravedad adquirirá una velocidad igual á v; pero su velocidad es Da; luego $v=Da$, y $Mvl=MDal=aM(D^2+K^2)$ de donde se sigue

$$Dl=D^2+K^2 \ldots\ldots l=D+\frac{K^2}{D}$$

Se llama centro de rotacion el punto que en la prolongacion de la distancia mas corta del eje al centro de gravedad se halla á $\frac{K^2}{D}$ del centro de gravedad, y á $D+\frac{K^2}{D}$ del eje. Cuando una fuerza actúa en este punto perpendicularmente á esta recta, hace dar vueltas el cuerpo sin impeler el eje en ningun sentido. Luego una fuerza igual y directamente opuesta destruye toda la fuerza de rotacion producida por la primera, sin ocasionar ninguna presion en el eje. Tal es la propiedad del centro de rotacion. Sea $\frac{K^2}{D}=d$, tendremos $D=\frac{K^2}{d}$ y $l=d+\frac{K^2}{D}$; lo *que nos demuestra que podemos trasportar paralelamente el eje al centro de rotacion, y que entonces el centro de rotacion se trasporta al otro estremo de* l *en el primer eje*. Esta reciprocidad es muy importante.

PÉNDULO.

Suspendamos con un hilo muy delgado y ligero un cuerpo que tenga una gran masa en un corto volúmen, por ejemplo, una bala de hierro, de plomo ó de platino: sujetemos en un punto fijo el otro estremo del hilo. En el estado de reposo la bala toma tal posicion que el hilo permanece vertical y el centro de gravedad de la bala se halla en la direccion vertical del hilo: tal es la aplomada, *véase lec. IV, pág.... y fig. 18 doble.*

De la aplomada puesta en movimiento se hace un uso no menos importante que el de la misma en estado de reposo. Cuando se separa una aplomada de la vertical L, hallándose el hilo fijo en C, tirante, he aquí lo que se advierte inmediatamente que se la abandona á sí misma, suponiendo que no haya ninguna especie de resistencias.

El plomo A (fig. 100) empieza á bajar con una velocidad insensible. Esta velocidad se aumenta cada vez mas cuando pasando el plomo por los puntos A′, A″, A‴.... se aproxima á la vertical CO; llegado á ella continúa su camino y se eleva por a''', a'', a', hasta a en la misma altura que el punto A. Inmediatamente, despues de haber llegado á este límite, vuelve á bajar por a', a'', a''', como habia bajado desde A; luego sube por A‴, A″, A′, A, como habia subido por a''', a'', a', a,....; despues se detiene en A para volver á bajar como la primera vez, y así sucesivamente hasta el infinito.

La mecánica puede demostrar las leyes de este movimiento alternativo, que se llama *oscilacion*. Se dá el nombre de *péndulo* á la aplomada cuando se emplea en hacer oscilaciones en vez de emplearla en señalar la vertical.

A cada instante de la bajada del péndulo, empezando desde A hasta O, dá un nuevo impulso á este péndulo la atraccion de la tierra para acercarle al centro de la misma tierra; esta atraccion se combina con la fuerza tangencial adquirida, y produce una aceleracion que no tendria límites, sin la accion del hilo AC que produce el efecto de una fuerza central.

Representemos por Ag (fig. 101) la accion de la pesantéz, y por AX la fuerza tangencial, adquirida por el hilo á plomo ó aplomada, cuando llega á A; sea Ap la fuerza central.

1.° Tenemos $Ap = \dfrac{AX^2}{AC}$

2.° Las dos fuerzas Ag y Ap se combinan con la fuerza tangencial A. Proyectando Ag en Ag' sobre la tangente del círculo en el punto A, y despues añadiendo esta proyeccion Ag á AX si el péndulo desciende; pero sustrayendo al contrario, la misma proyeccion si el péndulo asciende, se tiene la fuerza tangencial, al cabo del tiempo que emplea el péndulo en correr un arco igual á AX.

Por esto cuando el péndulo sube se sustraen sucesivamente á cada intervalo igual de tiempo las mismas cantidades que se habian añadido á la fuerza centrífuga. Luego esta fuerza es igual en la subida y en la bajada respecto de los puntos igualmente distantes del punto mas bajo, de consiguiente, cuando es nula en un lado lo es en el otro á la misma altura.

De este modo la teoría demuestra lo que habia indicado la esperiencia, á saber: la igualdad y la simetría de la subida y de la bajada del péndulo.

Otra propiedad escelente del péndulo es que la duracion total de las dos pequeñas oscilaciones es al poco

mas ó menos la misma, aunque el arco corrido en una de estas oscilaciones sea doble, triple, cuadruple &c. del arco corrido en la otra oscilacion; en una palabra, sea la que quiera la relacion de los arcos corridos.

Para demostrar esta propiedad, figurémonos dos péndulos iguales CA, ca, (fig. 102 y 103) desigualmente apartados de la vertical al principio de la oscilacion. El efecto del peso respecto á las dos figuras represéntese por $AG = ag$ que actúa solo en el primer instante. Proyectemos AG en AG′ sobre el arco AV y ag en ag' sobre el arco av, tendremos AG′ y ag' por fuerzas tangenciales.

Tiremos dos horizontales AY y ay hasta las verticales CV, cv. Suponiendo el triángulo AGG′ infinitamente pequeño, puede tomarse el arco AG′ por una línea recta perpendicular á GG′, asi como á CA; y entonces los dos triángulos rectángulos ACY, AGG′, son semejantes por tener perpendiculares sus lados homologos.

Igualmente se demostrará (fig. 16) que los dos triángulos rectángulos acy, agg' son semejantes: se tienen pues las proporciones

$$AC : AG :: AY : AG'.$$
$$ac : ag :: ay : ag'.$$

Pero AC y ac son iguales, AG y ag lo son tambien; luego

$$AY : AG' :: ay : ag.$$

Ahora supongamos que la oscilacion sea de muy corta estension, la diferencia entre AY y el arco AV será casi nula, y lo mismo sucederá entre ay y el arco av. Asi el espacio corrido en el primer instante, es poco mas ó menos proporcional á la estension de los arcos AV y av.

Lo mismo se demostrará por *aproximacion* que al cabo del 2.°, del 3.°, del 4.°, del 5.° instante, la velocidad tangencial añadida, y de consiguiente el espacio corrido en cada uno de estos instantes por el primero y el segundo péndulo, es proporcional á los arcos que hay que correr. Asi cuando el espacio que falta correr al primer péndulo sea cero, el espacio que falte correr al segundo será igualmente cero; y los dos péndulos llegarán en el mismo tiempo al término de la oscilacion. Luego prescindiendo de diferencias muy pequeñas las oscilaciones serán de la misma duracion.

He aquí lo que hace esta última propiedad de una gran utilidad en las artes y en las ciencias de observacion. Cuando se pone en movimiento un péndulo y se abandona á sí mismo, oponiéndose la resistencia del aire á todos sus movimientos, los debilita cada vez mas, lo cual disminuye la amplitud de las oscilaciones. Sin embargo, estas conservan la misma duracion.

Cuando se emplea un péndulo muy pesado, como de plomo, y particularmente de platino, no esperimenta este cuerpo mas que una débil resistencia que altera muy poco la duracion de sus oscilaciones; y en un gran número de ellas se conserva perceptiblemente su duracion primitiva. Pero acumulando las resistencias leves del aire la repeticion contínua de las oscilaciones, disminuye por grados la amplitud de las mismas. A pesar de esto, las oscilaciones no dejan de ser notablemente iguales entre sí; y hay mas, la cortísima diferencia que se halla entre las duraciones sucesivas, disminuye á medida que estas oscilaciones se diferencian mas de la oscilacion primitiva.

Los cuerpos caen con mas prontitud cuando parten de puntos mas próximos al centro de la tierra. Se ha averiguado que *en un mismo tiempo, el espacio vertical corrido libremente por dos cuerpos abandonados á su peso, está en razon inversa del cuadrado de las distancias del centro de la tierra á estos mismos cuerpos.*

Asi, cuando la longitud de los péndulos está en razon inversa del cuadrado de la distancia del péndulo al centro de la tierra, los péndulos ejecutan al mismo tiempo sus oscilaciones.

Las observaciones que han hecho los astrónomos,

combinadas con la medida inmediata de la tierra, han demostrado geométricamente que nuestro globo es comprimido hácia los polos; de suerte, que el habitante de la tierra que se acerca al polo, se aproxima tambien al centro de la tierra. Segun esto vemos que los péndulos que hacen sus oscilaciones en el mismo tiempo, serán mas largas cuando se colocan en el polo que cuando se colocan en el ecuador. De modo, que partiendo de este círculo, es menester aumentar gradualmente el péndulo á medida que se aproxima al polo para conservar á las oscilaciones la misma duracion. Ademas, la longitud del péndulo en cada punto, dará á conocer la distancia del centro de la tierra al punto en que se mueve el péndulo.

Por la rotacion de la tierra se destruye una pequeña parte del peso de los cuerpos, para contrarestar su fuerza centrífuga y conservarlos en la superficie del globo. Esta fuerza, que es nula en el polo, llega á su máximo en el ecuador.

Combinando estas dos causas de variacion, se conoce la conformidad de la teoría con la esperiencia. Gracias al aparato inventado por Borda, geómetra ingenioso, puede conseguirse con el péndulo mas cómodo una exactitud sumamente notable. Con este péndulo es con el que se han medido las distancias del centro de la tierra á los puntos de la superficie del globo que forman el meridiano, cuya medida sirve de base á nuestro sistema métrico. La admirable conformidad de los resultados producidos aquí, por la Geometría y la Mecánica, es uno de los ejemplos mas bellos que pueden ofrecerse de la facultad que tienen las ciencias, no solo de prestarse un mútuo auxilio, sino de añadir á las probabilidades de exactitud de cada una de ellas toda la certeza que puede dar la concordancia de medios que no tienen para conformarse mas que una sola probabilidad á su favor contra otras infinitas: esto es ser enteramente exactas.

En lugar de suponer que el peso varía, supongamos solamente que varía la longitud del hilo de suspension, y consideremos dos péndulos desiguales (fig. 104 y 105) CA, ca, tales como

$$AC : ac :: m^2 : 1.$$

Sea ademas el arco AV al arco $av :: m^2 : 1$. Las figuras ACV, acv, serán semejantes.

Sea ag el espacio que el peso haria correr en un tiempo $t=l$ al punto material a, suponiéndolo libre y sea $AG = m^2 \times ag$. Entonces AG representará el espacio que hará correr la accion del peso en m instantes al cuerpo A que suponemos libre.

Proyectemos AG en AG′ y ag en ag'. Los triángulos semejantes AGG′agg' darán

$$AC : ac : AG : ag :: AG' : ag' : AV : av.$$

Así, los espacios AG′, ag' corridos por los péndulos en virtud de la accion repetida del peso en el tiempo m, respecto al primero, 1 en el segundo serán proporcionales á los arcos AV, av. Luego los péndulos se moverán proporcionalmente por los arcos AV, av; siendo los tiempos del primero m mientras los del segundo son 1. Luego los tiempos totales, empleados por los péndulos para llegar desde el punto mas alto hasta la vertical son entre sí $:: m : 1$, al paso que las longitudes del péndulo son $:: m : 1$. Es decir, respecto á un mismo punto de la tierra, que *las longitudes de los péndulos desiguales son proporcionales al cuadrado del tiempo que emplean estos péndulos en hacer sus oscilaciones.*

Galileo, ese ilustre geómetra, al cual debe la mecánica de los modernos sus mas bellos descubrimientos, ha sido el primero que conoció esta ley del movimiento de los péndulos, haciendo de ella la mas feliz aplicacion para medir las alturas de las bóvedas y de las cúpulas.

En los templos y en los palacios se suspende ordinariamente en el punto mas elevado de las bóvedas y de las cúpulas una araña de gran peso, respecto á la cuerda ó cadena que la sostiene. La mas mínima agitacion del aire basta para comunicar un movimiento de oscilacion á estos inmensos péndulos. Galileo observó la duracion de estas oscilaciones, y veia, por ejemplo, que el péndulo formado por una de las arañas oscilaba diez veces, mientras que otro oscilaba solo una vez; diez veces diez, ó el cuadrado de diez, es igual á 100, luego el primer péndulo es cien veces mas largo que el segundo. Si se conoce la longitud del mas pequeño, centuplicándola se tiene en seguida la del mayor, y de consiguiente entonces se conoce la altura que tiene la clave de la bóveda ó cúpula por cima de la araña, la que hallándose inmediata al suelo está á una altura fácil de medir. Así, el péndulo puede servir para medir el tiempo por medio de la duracion igual de sus pequeñas oscilaciones, y puede servir para medir las alturas por medio del aumento ó disminucion de la duracion de sus oscilaciones.

Se ha averiguado muy exactamente la longitud del péndulo, que oscila los segundos sexagesimales en el observatorio de Paris. Esta longitud es igual á 0,^{met} 9938267. De consiguiente, si en algun tiempo, á causa de revoluciones que la prudencia humana no podria evitar ni preveer, se perdiesen los patrones de nuestras medidas, hallaríamos inmediatamente la longitud del métro, únicamente por la observacion de un péndulo que indicase los segundos en Paris.

Si los romanos y los griegos hubieran tenido estos medios suministrados por la ciencia, podríamos hoy produbir todas sus medidas; y muchas cuestiones importantes para las ciencias, las letras y las artes, no quedarian para siempre indecisas.

Penetrémonos, pues, de la verdadera importancia de las ciencias, que llegan á fijar los trabajos del hombre, á pesar de la movilidad del tiempo; y que reuniendo nuestras observaciones y nuestras obras fugitivas á los movimientos eternos y á las dimensiones inalterables de la tierra, aseguran á los resultados de las empresas humanas la única inmortalidad á que pueden aspirar.

Los relojeros han hecho una aplicacion muy ingeniosa del péndulo en la fabricacion de las máquinas que sirven para medir el tiempo; máquinas á las cuales se ha dado el nombre de péndulos.

Figurémonos un disco metálico, convexo por el centro, y de la forma de un grano de lenteja, y que por esta razon se llama *lenteja*. Suspendamos este disco de una varilla, cuya direccion pase por el centro del disco. Si hacemos oscilar este sistema alrededor de la otra estremidad de la varilla, tendremos un péndulo semejante al de los relojeros. Cada oscilacion de este péndulo, que ha de verificarse en tiempos iguales, y corresponde al movimiento constante de la péndola del relox, sirve de conservador de fuerzas y de regulador.

Semejante sistema sería perfecto si la materia de que se compone no cambiase de dimensiones; pero por efecto del calor se alarga la varilla en que está suspendido el disco, y por efecto del frio se contrae. Las alternativas de la temperatura procuran, pues, hacer variar incesantemente la duracion de las oscilaciones del péndulo, siendo como acabamos de describirlo.

Se han hecho *péndulos de compensacion*, es decir, péndulos en que se compensan las variaciones de longitud de las diferentes partes.

Se ha observado que las varillas de cobre se alargan proporcionalmente mucho mas que las de hierro cuando aumenta el calor, y tambien se contraen proporcionalmente mucho mas cuando el calor disminuye. Segun esto, en lugar de una sola varilla de suspension, se ha combinado cierto número de ellas, unas de hierro, y otras de cobre.

Figurémonos una varilla de hierro AB (fig. 106), á cuya estremidad inferior se fija una pieza horizontal CD, que tiene dos varillas verticales de cobre CE, y DF. Otra pieza horizontal, en medio de la cual hay una abrazadera para que pase la varilla AB, reune las dos varillas de cobre CE,DF. A las estremidades KL de esta pieza hay dos varillas de hierro KM,LN, reunidas por otra pieza horizontal MN, que estan fijas á la lenteja V.

Fácil es comprender en este sistema, que cuando el calor aumenta, teniendo las varillas de hierro AB,KM, una altura efectiva AI, aumenta la distancia del punto A de suspension al centro de la lenteja, proporcionalmente á esta altura AI. Las varillas de cobre EC,DF, cuando se alargan por efecto del calor, hacen subir la pieza KL, y de consiguiente al mismo tiempo las varillas de hierro KM,LN, é igualmente la lenteja O suspendida en estas varillas. La cantidad que sube la lenteja, por efecto de las varillas de cobre, es proporcional á la longitud de EC, ó de FD. De aquí resulta, que si las longitudes AI,EC, son proporcionales á la dilatacion del cobre respecto á la primera, y del hierro respecto á la segunda, el centro de la lenteja se halla mas bajo por la dilatacion del hierro, tanto cuanto lo que se eleva por la dilatacion del cobre. Lo que acabamos de decir, suponiendo que el calor aumenta, se dirá igualmente suponiendo que disminuye. En este último caso la cantidad que suba la lenteja, en virtud de la contraccion de las varillas de hierro, será igual á la cantidad que baje por efecto de la contraccion de las varillas de cobre.

Hasta ahora hemos supuesto que el péndulo se hallase reducido á un hilo matemático sin pasantéz, y que á la estremidad de este hilo se suspendiese un punto material de un peso cualquiera; pero la naturaleza no nos ofrece semejantes péndulos. Ya se emplee un hilo flexible, ó ya una varilla rígida, cada una de sus partes tiene cierto peso y cierto volúmen; y el cuerpo que habiamos mirado como un punto material, ofrece tambien dimensiones en los tres sentidos, que impiden confundirle con el punto matemático. Es interesante conocer las leyes que siguen las oscilaciones de este péndulo, que se llama *péndulo compuesto*.

Suspendamos al mismo punto de un mismo eje dos péndulos de igual masa, el uno simple CO (fig. 101), y el otro compuesto CD,EF. Cuando estos péndulos esten en reposo, la varilla del péndulo simple se hallará vertical, y esta vertical pasará por el centro de gravedad del péndulo compuesto.

Empujemos los dos péndulos con una fuerza horizontal, actuando á la distancia R del eje. En el primer momento, hallándose destruido por el eje el efecto de la pesantéz, será menester para que los dos péndulos tomen la misma velocidad angular, que el centro de rotacion del péndulo compuesto se halle distante del eje una cantidad R, igual á la longitud del péndulo simple. Asi se tendrá $R=D+\frac{K^2}{D}$.

Veamos que efecto producirá la pesantéz en los dos péndulos cuando se apartan de la vertical.

Supongamos que la pesantéz empieza á actuar sobre la varilla GO (fig. 101) del péndulo simple que hasta este punto pasa siempre por el centro G de gravedad del péndulo compuesto. Sea OL=GI la altura vertical que mide la accion de la pesantéz sobre los dos péndulos en un tiempo t infinitamente pequeño. Resolvamos OL y GI en Ol y Gi, perpendicularmente á CGO.

La accion de la pesantéz sobre el centro de gravedad del péndulo compuesto se representará por Gi, la accion de la pesantéz sobre el péndulo simple será $Ol=Gi$. Pero hallándose el punto O en el centro de rotacion del péndulo compuesto, la fuerza GI transportada á Ol hará girar el péndulo como si estuviese concentrado en O, es decir, como si se sustituyese el péndulo simple al péndulo compuesto. Luego la velocidad angular, comunicada por la pesantéz, es la misma, respecto al péndulo simple que respecto al compuesto. Asi, 1.° los dos péndulos simples continuarán en virtud de las acciones sucesivas de la pesantéz, oscilando con la misma velocidad. 2.° la longitud del péndulo simple será la distancia del eje al centro de rotacion que entonces se llama *centro de oscilacion*. Luego cuando en un péndulo compuesto se considera el eje de suspension como un eje de rotacion, el centro de rotacion se confunde con el centro de suspension.

Hemos visto, que si se transporta paralelamente el eje de rotacion, de C á O, el centro de rotacion se transporta de O á C, en la recta CGO.

Luego si se transporta de C á O el eje de suspension del péndulo compuesto, el centro de oscilacion se transportará de O á C, y se hallará en el primer eje de suspension. Se ha hecho uso de esta propiedad para determinar y verificar la longitud del péndulo simple, cuyas oscilaciones se verifican en el mismo tiempo que las de un péndulo compuesto

La consideracion de los péndulos compuestos y de las posiciones respectivas de sus centros de gravedad, de sus ejes de suspension y de sus centros de oscilacion, es de suma importancia, no solo en la relojería, sino en los movimientos alternativos de gran número de máquinas, y sobre todo en los movimientos de las embarcaciones, conocidos bajo el nombre de *balances* ó *cabezadas*.

Cuando tratemos de la fuerza del agua, tom. III, daremos esplicaciones particulares respecto de esta última aplicacion.

Regulador de las máquinas de vapor. En la construccion de las máquinas de rotacion, cuya fuerza varía de intensidad como el vapor, segun las variaciones del fuego que se emplea, se hace un uso ingenioso de los péndulos compuestos, para abrir por grados un paso al vapor cuando ejerce una presion que se acerca á un límite peligroso de esceder. Para esto hay dos globos de hierro, unidos á dos varillas de lo mismo, que pueden oscilar en un eje horizontal, el cual atraviesa un tímpano vertical. Cuando este tímpano dá vuelta comunica una fuerza centrífuga á los dos péndulos compuestos que dan vuelta con él en virtud de esta fuerza. Cada péndulo se eleva hasta que la resultante de estas dos fuerzas pase por el eje de suspension, y de consiguiente se destruya. Siendo los dos globos de igual masa, y estando colocados simétricamente respecto al eje, suben y bajan en cada instante una cantidad igual. Un aro ó argolla que dá vueltas libremente alrededor del tímpano, está suspendido por dos varillas aseguradas á la varilla misma de los dos péndulos; la argolla se ve pues obligada á subir ó bajar segun las bolas se alejan ó aproximan al eje. Esta argolla mueve un brazo de palanca que abre ó cierra mas ó menos una abertura para dar salida al vapor escedente. *Véase tom. III, Fuerzas motrices.*

LECCION OCTAVA.

De la palanca.

Acabamos de examinar todo lo concerniente á la transmision inmediata de los movimientos, efectuada por medio de cuerdas perfectamente flexibles. Estas cuerdas no pueden servir mas que para *tirar*, pero con varillas ó varas inflexibles se puede igualmente tirar y empujar.

Muchos instrumentos sirven solo de intermedios entre la potencia y la resistencia, dirigidas en línea recta. Tales son los mangos de escobillon (fig. 108), y de sacatrapos (fig. 109) en la artillería, las perchas ó botadores de los marinos, y los ganchos que llevan los que guian las balsas ó armádias en los rios (fig. 110), las varas ó varillas de los embolos, &c.

No es necesario que una vara inflexible AB (figura 107) esté en línea recta, basta que la curva que ofrece sea de una forma invariable. Si se aplica en B una potencia que tire ó empuje en el sentido BA ó AB, el efecto será el mismo que si la vara fuese recta.

La palanca es una vara inflexible, apoyada en un punto fijo, llamado *punto de apoyo*, que recibe en otro punto la accion de una potencia para vencer la resistencia colocada en otro punto. Hay tres géneros de palanca.

En el *primer género* (fig. 111) el punto de apoyo A se halla entre la potencia P y la resistencia R.

En el *segundo género* (fig. 112), la resistencia R se halla entre la potencia P y el punto de apoyo A.

En el *tercer género* (fig. 113), la potencia P está entre la resistencia R y el punto del apoyo A.

Supongamos que la palanca sin pesantéz sea una vara recta BAC, fig. 111, BCA, fig. 112, y ABC, figura 113, perpendicular á la direccion de la potencia y de la resultante.

El esfuerzo de la potencia P y de la resistencia R no puede aniquilarse sino por el punto de apoyo A, que es el único fijo en el sistema; luego la resultante de P y de R pasa por el punto A.

Luego P×AB=R×AC.

Es decir, que *la potencia multiplicada por su distancia al punto de apoyo, es igual á la resistencia multiplicada por su distancia al punto de apoyo.*

Si sustituimos á la palanca BAC perpendicular á la direccion de las fuerzas P y R, una palanca oblicua bAc, *curva ó recta*, será forzoso que la resultante pase por el punto A, y que tengamos

P×AB=R×AC,

no siendo AB y AC mas que rectas ideales, perpendiculares á la direccion de las fuerzas PR.

Para simplificar las operaciones podemos suponer que cada brazo de la palanca es recto y perpendicular á la direccion de la fuerza, aplicada al estremo de este brazo.

Sean dos fuerzas iguales PR (fig. 114), perpendiculares á los brazos iguales AB, AC de la palanca encorvada BAC. Solicitando á la palanca estas dos fuerzas en sentidos contrarios á dar vuelta alrededor del punto de apoyo, todo es igual por una y otra parte, y el sistema queda en equilibrio, subsistiendo éste cualquiera que sea la magnitud del ángulo BAC.

Sea ahora la fuerza r igual y directamente opuesta á R, estas dos fuerzas se equilibran. Así, la fuerza R produce el mismo efecto contra la resistencia R que la potencia P. Luego las dos potencias iguales P, R, aplicadas al estremo de los brazos iguales de la palanca AB, AC, tienen la misma energía para hacer girar el punto fijo A.

Por ejemplo, si la recta AB representa la palanca en que se engancha un caballo que tira de esta palanca,

segun PB, para mover una máquina (por ejemplo una noria), la accion del caballo sobre el punto A será la misma respecto á todos los puntos del círculo que corra AB, mientras no varíe la distancia de A á BP.

Supongamos ahora que se apliquen dos fuerzas cualesquiera PR (fig. 115) á una palanca cualquiera BAC, siendo A el punto de apoyo se hará girar AB hasta Ab, de modo que BP se convierta en bp paralela á CR. Debiendo la resultante de las fuerzas paralelas Rp pasar por el punto fijo A, tendremos

R×AC=p×Ab=P×AB.

Así, *sean las que fueren la direccion de la potencia y la de la resultante, la potencia multiplicada por su distancia al punto de apoyo, es igual á la resistencia multiplicada por su distancia al mismo punto.*

Aplicacion á la transmision de los movimientos. Cuando se quiere por medio de cuerdas transmitir un movimiento segun dos direcciones diferentes BP, CR, se emplea una palanca encorvada, semejante á BAC (fig. 115 y 116), á la cual se fijan dos cuerdas, cadenas, cordones, ó hilos metálicos BP, CR. El vértice A del ángulo BAC se fija en un eje pequeño, alrededor del cual dá vuelta la palanca, y es su punto de apoyo.

Cuando no hayan de transmitirse sino movimientos pequeños, se tira del hilo P (fig. 116) pasando B á b, el arco Bb se diferenciará muy poco de una porcion de la recta BP; de consiguiente, el cordon BP no habrá mudado, por decirlo así, de direccion. Lo mismo sucederá respecto al cordon CR, de que tira el segundo brazo de la palanca, así como del primer brazo de la palanca tira el primer cordon.

Tal es el sistema que se emplea para dirigir los hilos metálicos que conducen desde una campanilla, colocada cerca de los sitios en que estan los criados, al cordon suspendido en la habitacion desde donde se los llama. En las grandes máquinas se emplea igualmente el sistema de los cordones y de la palanca encorvada para transmitir movimientos alternativos.

Supongamos que se quiera hacer subir y bajar alternativamente en un cañon de bomba el embolo MM (fig. 118), por medio de una fuerza horizontal que tire segun BP. Es evidente que por medio de la palanca encorvada en escuadra BAC, cuando se tire del cordon BP en el sentido indicado por la flecha, el brazo de palanca AC se eleva y hace subir el embolo M. Si se quiere que la vara ó varilla CT del embolo quede siempre bajo la misma vertical, es preciso obligarla á permanecer siempre tangente á un arco sólido Cc, descrito desde A como centro.

Cuando se afloja el cordon BP, el peso del embolo vuelve la palanca á su posicion natural, despues de lo cual el cordon BP empieza á actuar de nuevo para levantar el embolo. Se llaman *movimientos alternativos* los que se hacen alternativamente en un sentido y en otro. Las oscilaciones del péndulo nos presentan el primer ejemplo de esta especie de movimientos.

Se aplica con buen éxito la palanca encorvada en las máquinas para aserrar á lo largo por medio de la mecánica. La sierra DS (fig. 119 duplicada) está asegurada en D á la vara ó varilla DC, y está asegurada en C al brazo CA de la palanca CAB, mientras que la potencia P actúa sobre una vara ó varilla inflexible BP. Cuando se tira de BP, el brazo AC de la palanca describe un arco, y la sierra empuja hácia la palanca. Cuando se empuja BP se produce el efecto contrario, y la palanca empuja á la sierra. Asi es como la mecánica imita el movimiento de los serradores (fig. 119), cuyos miembros CABPRS*cabprs*, son palancas encorvadas.

Por medio de la palanca se puede equilibrar una gran fuerza con una muy pequeña. Si, por ejemplo, la resistencia está cien veces mas cerca del punto de apoyo que la potencia, y de consiguiente corre cien veces menos espacio, cuando hay movimiento será preciso por compensacion que la resistencia sea cien veces mayor que la potencia (1).

Algunas personas que entienden mal los principios de la mecánica, admiradas de este resultado imaginan que por medio de máquinas es posible crear fuerza. En efecto, segun ellas, supuesto que una fuerza pequeña puede equilibrar una grande, se puede vencer con esta fuerza pequeña una resistencia media y conservar todavía un resto de fuerza suficiente para producir efectos considerables.

Para convencerse del error de este raciocinio basta considerar el movimiento de la palanca. Supongamos que las fuerzas PR (fig. 116) esten en equilibrio por medio de una palanca BAC, y que se aumente un poco la potencia P. Roto el equilibrio hay movimiento; el brazo de la palanca AB empieza á girar en el sentido BP de la potencia, mientras que el brazo de la palanca AC dá vuelta en el sentido RC, opuesto á la resistencia. Al cabo de un tiempo cualquiera los dos brazos de la palanca han corrido un ángulo igual BA*b*, CA*c*; luego los arcos B*b* y C*c*, corridos por los puntos B y C (2) son proporcionales á la longitud de los brazos de la palanca AB y AC.

Pero tenemos P:R::AC:AB.

Luego............. P:R:: arco C*c*: arco B*b*.

(1) *Si el producto de la resistencia por su brazo de palanca es menor que el producto de la potencia por su brazo de palanca, hay movimiento en el sentido de la potencia, y la máquina adelanta, pero no adelanta sino en virtud de la porcion de la potencia que no se consume en equilibrar la resistencia. Es menester, pues, restar esta parte cuando se quiere averiguar la parte de la potencia que ha de producir el movimiento.*

(2) *Suponemos que AB, y AC son proporcionales á la direccion de las fuerzas que les corresponden.*

Así, las fuerzas P y R son recíprocamente proporcionales á los arcos que corren sus puntos de aplicacion, cuando se supone trastornado el equilibrio.

Se vé por esta demostracion que la potencia que hace equilibrio á la resistencia corre un arco tanto mayor, cuanto menos considerable es respecto á la resistencia; así, la potencia pierde en espacio corrido lo que gana en fuerza absoluta para equilibrar á la resistencia. La cantidad de movimiento que mide el producto de cada fuerza por el espacio corrido, es pues la misma respecto de la resistencia, y esta cantidad no sería posible aumentarla. El principio que acabamos de esponer es tanto mas notable, cuanto es general en todas las máquinas. Nunca se puede aumentar la cantidad de movimiento, lo cual manifiesta la imposibilidad de crear fuerza.

Si se toma por unidad la duracion del movimiento efectuado por los puntos B,C, (fig. 116) las velocidades de estos movimientos se hallarán representadas por los espacios corridos Bb, Cc. Se llama *velocidad virtual* la velocidad que tomarían los puntos de aplicacion BC de la potencia y de la resistencia si el equilibrio se hallase de pronto infinitamente poco trastornado. La igualdad $P \times Bb = R \times Cc$ se esplica diciendo, que *en la palanca la potencia multiplicada por su velocidad virtual, es igual á la resistencia multiplicada por su velocidad virtual, siempre que hay equilibrio.*

Supongamos que el brazo de la palanca AB, (figura 117) en vez de ser perpendicular á la direccion BP de la potencia sea oblícuo. Hagamos girar infinitamente poco la palanca formando un ángulo $BAM = bAm$. Sea Ab perpendicular á BP prolongado, siendo los rádios proporcionales á los arcos se tendrá

$$AB : Ab :: BM : bm.$$

Si del punto M se tira MN perpendicular á BP prolongado, los triángulos BMN, ABb serán semejantes por tener sus lados perpendiculares. Luego

$$AB : Ab :: BM : BN,$$

lo cual exige que se tenga $BN = bm$. Así, sea el que quiera el punto de aplicacion B de la potencia P sobre el brazo AB, trastornando infinitamente poco el equilibrio, y midiendo el espacio corrido por el punto de aplicacion, segun la direccion BM de la potencia, se tendrá la misma velocidad virtual, estimada segun la direccion de esta fuerza. De consiguiente *el equilibrio se verificará cuando la potencia multiplicada por su velocidad virtual, medida de este modo, y la resistencia multiplicada igualmente por su velocidad virtual, medida de la misma manera, den un mismo producto, sea el que quiera el punto de aplicacion de la potencia y de la resistencia*: suponiendo siempre que estas dos fuerzas procuren hacer dar vuelta á la palanca en sentidos contrarios.

Tal es el célebre principio conocido con el nombre de *principio de las velocidades virtuales*, y que se aplica, no solo á la palanca, sino á todas las demas máquinas y á todas las combinaciones imaginables de fuerzas. El ilustre Lagrange ha fundado en este principio su mecánica analítica, una de las mejores obras que ha producido la ciencia.

Hallándose destruida por el punto de apoyo la resultante de las dos fuerzas en equilibrio sobre una palanca, esta resultante es igual á la presion que la palanca ejerce sobre el punto de apoyo.

Luego, 1.° Cuando la potencia y la resistencia son paralelas, y estan dirigidas en el mismo sentido, la presion de la palanca sobre el punto de apoyo es igual á la suma de la potencia y de la resistencia.

2.° Cuando las dos fuerzas actúan en sentidos opuestos, la presion de la palanca sobre el punto de apoyo es igual á la diferencia de estas dos fuerzas, y ésta dirigida en el sentido de la mayor.

Así, en la palanca de primer género (fig. 111), la presion Z, que esperimenta el punto de apoyo, es igual á la suma de la potencia y de la resistencia.

En la palanca de segundo género (fig. 112), esta presion es igual á la resistencia menos la potencia, y está dirigida en el sentido de la resistencia.

En la palanca de tercer género (fig. 113) la presion es igual á la potencia menos la resistencia, y está dirigida en el sentido de la potencia.

Cuando las fuerzas BP, CR no son paralelas, es preciso prolongar sus direcciones hasta que se junten en D (fig. 120), despues figurar sobre las rectas DB, DC, el paralelógramo $AbDc$ de las fuerzas PR. Entonces....

1.° La diagonal pasará por el punto de apoyo A.

2.° Esta diagonal representará en magnitud, asi como en direccion, la presion que esperimente el punto de apoyo (1).

Si supusiésemos que se tuviese un número cualquiera de fuerzas P, Q, R, S, T, (fig. 121) aplicadas á una palanca CBADEF, bastaria tirar una perpendicular Ap, Aq, Ar.... á la direccion de cada una de estas fuerzas. En seguida se tomará: 1.° respecto á todas las fuerzas que procuran dar vuelta á la palanca en un sentido, la suma de los productos de cada fuerza por su brazo de palanca: 2.° la suma de los productos correspondientes de todas las fuerzas que procuran dar vuelta á la palanca en el sentido contrario. Si las dos sumas son iguales se verificará el equilibrio. Asi es que la condicion del equilibrio resultará de las igualdades

$$P\times Ap+Q\times Aq=R\times Ar+S\times Ss.$$

(1) *Sea* $AbDc$ *el paralelógramo que se ha figurado, tirando* Ab, Ac *paralelamente á CR y BP. Siendo las rectas AB, AC, perpendiculares á las rectas BP, CR, los triángulos* ABb, ACc, *serán rectángulos. Ademas, el ángulo* b *del primero, y el ángulo* c *del segundo, son iguales al ángulo BDC, y de consiguiente iguales entre sí. Luego los triángulos* ABb, ACc, *son semejantes. De consiguiente,* $AC:AB::Ac:Ab$; *pero* $Ac=Db$, $Ab=Dc$, *y el paralelógramo de las fuerzas dá* $P:R::Db:Dc$.

Despues de haber espuesto en toda su estension la teoría de la palanca volvamos á los principales casos particulares, y á las aplicaciones que presenta.

Palanca de primer género. La mas sencilla y la mas regular es aquella cuyos dos brazos son iguales, y cuyo equilibrio exige que la potencia y la resistencia sean asimismo iguales. *El peso de cruz ó de brazos iguales* es una máquina de este género.

El peso de cruz (fig. 122) se compone de una palanca de brazos iguales AB, AC, llamada hástil, escapa, ó libril. El punto de apoyo A se halla sostenido por la caja lmn, que sostiene un eje horizontal lAn, alrededor del cual puede girar el hástil. De los estremos de éste estan suspendidas con cordones ó cadenillas *balanzas* redondas, como en la fig. 122, ó cuadradas, como en la fig. 123 (1). Estas balanzas han de ser de igual peso. Generalmente son iguales, de las mismas dimensiones, y estan colgadas de cuerdas iguales; tienen un eje de simetría, el cual pasa por su centro de gravedad; su posicion natural de equilibrio es aquella en que este eje se halla vertical. De manera, que colocando en el centro de simetría de las balanzas las cosas que se quieren pesar, conservan dichas balanzas su situacion natural, y no esponen á caer las cosas que se pesan por efecto de una inclinacion mayor de un lado que de otro.

Se pone en una balanza el peso P, que representa la potencia P, y en el otro la cosa que ha de pesarse, y

Luego.... $P:R::Ac:Ab::AC:AB$
y. .... $P\times AB=R\times AC$.

Luego el punto A, tomado en el punto en que la diagonal del paralelógramo de las fuerzas encuentra la palanca BAC, es el punto de apoyo, lo cual debe ser asi, y ofrece la ventaja de manifestarnos la concordancia de dos caminos muy opuestos.

(1) Nota del traductor. *Usamos aqui, y en toda la traduccion, de los nombres castellanos, para no con-*

representa la resistencia R. Cuando estas dos fuerzas son iguales, y el hástil está horizontal, la condicion del equilibrio es $P \times AB = R \times AC$.

Si AB no es igual á AC, y es mas pequeño, en tal caso es menester, para que los productos sean iguales, que P sea mayor que R. Así, cuando los brazos son desiguales, y se pone el peso hácia el brazo mas pequeño, hace equilibrio á menor peso de mercancías. En esto se fundan los pesos falsos con que engañan los vendedores de mala fé. Se descubre la supercherÍa poniendo la pesa en el platillo de las mercancías, pues estando entonces la menor fuerza al estremo del brazo mas corto de la palanca no puede haber equilibrio.

En gran número de artes, y en los esperimentos exactos que hacen actualmente los químicos, los físicos y los geómetras, se emplea un medio que no depende de la mayor ó menor igualdad de los brazos del peso. Se pone en una balanza el cuerpo R que se quiere pesar, y en otro la pesa P que le equilibra: despues se quita el cuerpo R y se ponen en su lugar pesas conocidas hasta que hacen como hacía el cuerpo R, equilibrio á la pesa P. Es evidente que las nuevas pesas han de representar en suma lo que pesa exactamente el cuerpo R.

Para no dejar nada que desear acerca del peso de brazos iguales, tomaremos en consideracion lo que pesan las balanzas y el hastil ó libril. Es preciso lo primero, que haya equilibrio antes de poner ningun peso en las balanzas, y que los dos brazos sean del mismo peso, de la misma longitud, y sus centros de gravedad

---

tribuir como otros muchos á la corrupcion del lenguage español. Así, pues, llamamos peso de cruz ó de brazos iguales, *á lo que los franceses* balance, *y no traducimos esta palabra por* balanza, *que hablando con propiedad y en plural, significa en castellano los* platos pendientes de los estremos del hástil.

se hallen á la misma distancia de la vertical tirada por el punto de apoyo ó por el eje del libril.

Si ABC (fig. 122) son los dos brazos, llamando G, H, los centros de gravedad de los brazos de derecha é izquierda, el peso X del brazo AB que obra todo en G, hará equilibrio al peso Y del brazo AC que obra todo en H. Luego $X \times AG = Y \times AH$.

Si los dos centros GH y el punto de apoyo A se hallan en la misma línea recta, habrá siempre equilibrio aunque se dé cualquiera inclinacion á la palanca. Luego entonces el peso de brazos iguales no tomará con preferencia ninguna posicion mientras no se halle cargado de pesos. Ademas, llevándose la menor diferencia de peso uno de los brazos, nada limitaria la estension de este movimiento.

Se tiene cuidado de que los dos centros G, H, estén algo mas bajos que el punto de apoyo A, (fig. 124), pero los dos á la misma altura, cuando los brazos AB, AC son horizontales. Entonces si se altera un poco el equilibrio, por ejemplo, bajando AB (fig. 19) para subir AC, la línea recta AH se aproxima á la horizontal, mientras que AG se separa todavia mas que en la primera posicion. Luego si se tiran las dos verticales XGg, YHh, por los centros G, H, y despues la horizontal gAh, se tendrá necesariamente Ah mayor que Ag. Pero en esta posicion $X \times Ag$ es el momento de X; $Y \times Ah$ es el momento de $Y = X$; luego el momento de la derecha es el que vence; luego hará bajar el brazo AC hasta que la posicion de la palanca BAC vuelva á ser horizontal. Como el brazo AC ha bajado con cierta velocidad á causa del movimiento adquirido, cuando vuelve á la posicion horizontal, se continúa este movimiento; AC baja por debajo de la horizontal tanto como sube por cima de ella AB. Se produce, pues, un movimiento de oscilacion, que sería un movimiento perpétuo si pudiese hacerse un peso de brazos iguales en que el rozamiento y la resistencia del aire no presentasen ningun obstáculo á esta perpetuidad. Mas por efecto de estas resistencias, los pesos mas exactos de brazos iguales se detienen despues de un número de oscilaciones mayor ó menor, pero sin embargo, siempre muy limitado.

Sea O (fig. 124 y 125) el centro de gravedad del hástil. Cuando el equilibrio está poco trastornado, el peso $X+Y$ procura volver O á la vertical, con una fuerza$=(X+Y)$ multiplicada por el arco MO, que corre el centro O desde la vertical AM; arco que para un mismo ángulo es proporcional á la distancia AO.

Para saber cuando se fabrica un peso de brazos iguales, si el centro de gravedad del escapo está colocado muy próximo ó muy distante del punto A, es menester contar en un tiempo dado las oscilaciones del espresado escapo. Si son sumamente lentas y difíciles de producir, el centro está muy cerca del punto de apoyo. Si son muy rápidas se debe, al contrario, aproximar este centro al punto de apoyo. Se elevará ó bajará el centro de gravedad del hástil, quitando ó añadiendo materia á su parte inferior.

El hástil es un péndulo compuesto, y los cálculos de la leccion antecedente indicarán la velocidad de la duracion de las oscilaciones de los hástiles, luego que se haya determinado el momento de inércia del peso de brazos iguales y la posicion del centro O.

Para juzgar exactamente de la posicion del hástil se emplea un medio muy sencillo. Se usa de una aguja Am, fija ó unida al hástil (fig. 122 y 123), y perpendicular á la recta BAC, la cual se llama *fiel ó lengua*. La caja lmn, sostenida en m, donde regularmente se pone una asa, se coloca en una posicion vertical cuando se levanta el peso de brazos iguales; pero cuando BAC está horizontal, la lengüeta perpendicular á BAC es vertical. Basta, pues, observar si la lengüeta no se inclina á derecha ni á izquierda: 1.° Cuando las balanzas estan vacías: 2.° Cuando se ha colocado en una balanza pesas conocidas, y en la otra el cuerpo que se quiere pesar.

De los pormenores que acabo de dar, resulta que los instrumentos mas sencillos no pueden ejecutarse con perfeccion, si no se determina á qué leyes de mecánica han de satisfacer las diferentes partes de estos instrumentos para reunir en el mayor grado posible las ventajas que deben esperarse de ellos.

Las *romanas* ó pesos de brazos desiguales, son como los pesos de brazos iguales, una palanca de primer género, empleada para equiponderar á un peso dado con una potencia menos considerable, llamada *pilon, pesa, cursorio, sacoma ó antisacoma.*

Figurémonos una palanca recta BAC, cuyo brazo menor AC se tome por unidad de medida, y el mayor se divida en un cierto número de veces esta unidad. Segun se coloque el pilon P, en los puntos de division 1, 2, 3, 4.... equilibrará á otro peso R, igual á 1, 2, 3, 4.... veces el peso del pilon.

Subdividiendo, por ejemplo, en décimas partes cada parte de la palanca AB, dividida ya en partes iguales al brazo de palanca AC, cada una de estas partes representa en el producto $AB\times P$ una décima parte de $AC\times P$; y de consiguiente exige para el estado de equilibrio un aumento de peso en R, igual á la décima parte de P. Cada subdivision, que será igual á la centésima parte de AC, representará igualmente en el producto $P\times AB=AC\times R$, una centésima de $P\times AC$.

Asi que, si se divide con exactitud el brazo de palanca AB en unidades, decenas, centenas, &c., se podrá determinar cuántas veces un peso cualquiera R, contiene, no solo el peso P, sino las décimas, centésimas, &c., de este peso tomado por unidad.

Parte de las observaciones que hemos presentado acerca de la oscilacion de los pesos de brazos iguales, se aplica á la oscilacion de los pesos de brazos desiguales ó romanas. Es tambien preciso: 1.°, que los dos puntos BC de aplicacion esten exactamente en línea recta con el punto de apoyo A; 2.° que el centro de gravedad de la romana esté un poco mas bajo que el punto A, y en la misma vertical que este punto cuando la línea AC es horizontal.

Cuando es necesario verificar pesos muy exactos empleando la romana, puede recurrirse con mucha ventaja á un medio que consiste, despues de haber puesto el cuerpo en equilibrio, y haber fijado el punto donde equipondera al pilon, en sustituir por este mismo cuerpo pesos conocidos. Efectivamente, sean las que quieran las inexactitudes del instrumento que se emplea, los pesos conocidos que se sustituyen al cuerpo que se quiere pesar, representan exactamente su peso cuando colocándolos en el mismo sitio hacen equilibrio al pilon. En una multitud de circunstancias se conocerá cuán ventajoso es emplear este medio para las operaciones rigorosas que haya que hacer relativamente á esperimentos, á pruebas, comprobaciones, &c.

La romana ofrece un ejemplo de las palancas de primer género, en que se hace equilibrio á una resistencia dada con una potencia menor. Estas palancas no sirven solo para producir equilibrios, sino que frecuentemente se emplean para producir movimientos.

El timon de los navíos y demas naves es el ejemplo mas notable que podemos dar. Figurémonos una palanca CAB (fig. 127), fija en A, contra la popa de un navío, el brazo AB sumergido en el agua, el brazo AC sostenido en C por el timonero, ó por un aparato mecánico cualquiera.

Cuando el navío está caminando, y el timon CAB se halla en la direccion de su camino ó derrota, no esperimenta ninguna resistencia de parte del agua; pero cuando el timonero empuja la caña del timon AC hasta c por ejemplo, entonces la parte Ab del timon esperimenta una resistencia X que aumenta con el ángulo BAb. La fuerza oblícua X se resuelve en dos: la una y en el sentido Ab, la cual no produce otro efecto que tirar del timon en el sentido de su longitud para desgoznarle; la otra X perpendicular á Ab impele al timon en un sentido diferente de la derrota. Segun lo que hemos espuesto en la leccion V, la fuerza X actúa para hacer volver el navío con una accion cuyo momento es igual á $x \times Gg$: suponiendo que Gg sea la distancia del centro de gravedad G del navío ó la direccion de x. Llamemos P la potencia de los timoneros aplicada en C; y D el centro de aplicacion de x; tendremos para el equilibrio del timon $P \times AC = x \times AD$.

Palancas de segundo género. En estas palancas hemos dicho que la resistencia está entre la potencia y el punto de apoyo. No se emplean sino en los casos en que la potencia ha de ser menor que la resistencia.

Los remos que sirven para hacer caminar las barcas son palancas de segundo género. La potencia se aplica al mango N (fig. 127) del remo NOM, y empuja el mango de atrás hácia adelante de la barca. El punto de apoyo M se halla á la otra estremidad del remo, y la resistencia la produce la barca en un punto O de su borde, ya por medio de una muesca hecha en este borde, ó por medio de una clavija vertical ó de una estaca redonda, que se llama *tolete*, *escálamo*, y tambien *gavilán*.

Es evidente, que si se determina el centro de resistencia de la parte del remo sumergido en el agua, considerando este centro como punto de apoyo, la potencia multiplicada por la distancia de este centro al mango ó empuñadura del remo, es igual á la resistencia multiplicada por la distancia del mismo centro al punto donde el remo está sostenido contra el borde de la embarcacion.

Para no añadir al trabajo del remero la fatiga de pesar sobre el brazo corto de la palanca para hacer equilibrio al brazo largo, se lastra el brazo pequeño con un peso, de modo que la palanca se halle poco mas ó menos en equilibrio en el punto O en que lo sostiene la embarcacion.

En el tercer género de palancas, estando la potencia entre el punto de apoyo y la resistencia, es mucho mayor que la resistencia. Este género de palancas no puede, pues, emplearse sino en los casos en que se dispone de una fuerza superior á la resistencia.

La pluma, el pincel, el lapicero, nos ofrecen ejemplos notables de este género de palanca. Importa mucho comunicar movimientos rápidos á la punta de la pluma y del lápiz; la resistencia que esperimentan sobre el papel es poco considerable. De aquí la preferencia dada al modo de tomar estos instrumentos.

La pluma ABC (fig. 128) tiene su punto de apoyo A contra la primera falange del dedo índice. La resistencia está en C sobre el papel, donde resulta la escritura como efecto de la palanca. La potencia está repartida en *mno* entre el pulgar y los dos primeros dedos. Volviendo la mano (fig. 129) para mirar la pluma por la punta, se ven los tres puntos de aplicacion *mno* de los tres dedos de que hablamos. Segun nuestros músculos aumentan la fuerza que se ejerce en *m*, en *n*, ó en *o*, para disminuirla en los otros dos puntos, asi se halla impelida la pluma en los diferentes sentidos que pueden convenir al trazo de todas las especies de letras y figuras

La escritura ofrece un ejemplo notable de la complicacion de las máquinas sencillas en la apariencia. Los dos últimos dedos de la mano derecha sirven de apoyos á la pluma, el antebrazo derecho y el brazo izquierdo, sirven de apoyos á todo el cuerpo cuando la mano derecha escribe. Cada brazo con su mano se compone de veinte y dos palancas de primer género, y cada pierna con su pie se compone de veinte y tres palancas.

Así, las personas que escriben para desterrar de nuestras artes el uso de las máquinas, compuestas con el ánimo de volver, segun dicen, á la sencillez de la naturaleza, emplean una palanca artificial, movida por tres potencias, resultante de un sistema de noventa palancas, que la naturaleza ha colocado en nuestros miembros; y de estas noventa palancas tiran é impelen alternativamente ciento y ochenta grupos de cuer-

das llamadas músculos, unidas unas en una parte y otras en otra, de cada punto de apoyo. Esta multiplicacion de cuerdas y palancas, lejos de producir desórden ni embarazo alguno en las operaciones que el hombre puede ejecutar con sus miembros, es al contrario fácil de probar que á esta admirable combinacion debemos nuestra destreza y nuestra aptitud para hacer una multitud de operaciones delicadas; operaciones que no pueden ejecutar los animales, cuya mas sencilla estructura presenta menos cuerdas y palancas.

Las artes emplean á imitacion de la naturaleza varias combinaciones de palancas y de cuerdas. Asi los brazos de los telégrafos son palancas movidas por cuerdas, como nuestros brazos se mueven con el auxilio de nuestros músculos.

Si fuese menester con una potencia pequeña equilibrar una gran resistencia, sería preciso, haciendo uso de una palanca sola, colocar el punto de apoyo sumamente inmediato al punto de aplicacion de la resistencia; lo que en muchos casos ofreceria dificultades invencibles y no permitiria lograr con la precision necesaria el resultado que se desea. Este inconveniente se allana por medio del empleo de una combinacion de palancas, como la de la figura 130. Aplicando la potencia P al cabo del brazo mayor de la palanca BAC; otra palanca CDE al cabo de su brazo mayor L′ colocada contra el cabo C del brazo pequeño l de la palanca anterior; otra palanca EGH, presenta una disposicion semejante, y asi sucesivamente.

Sean X, X', X''..... las resistencias que se esperimentan en los puntos C, E, H..... de las palancas consecutivas; siendo L, L', L'' los brazos mayores de las palancas, y l, l', l'' los menores, se tendrá para la condicion de equilibrio

Primera palanca $P \times L = X \times l$

Segunda palanca $X \times L' = X' \times l'$

Tercera palanca $X' \times L'' = X'' \times l''$

....

Multipliquemos juntos todos los primeros términos de estas igualdades y todos los segundos. Quitemos de los dos productos las cantidades comunes X, X′, X″, &c.; siendo R la última de estas fuerzas, ó la resistencia, se tendrá para la condicion del equilibrio.

$$P \times L \times L' \times L'' \ldots = R \times l \times l' \times l'' \ldots$$

Es decir, *la potencia multiplicada por todos los brazos mayores de palanca, es igual á la resistencia multiplicada por todos los brazos menores.*

Supongamos por ejemplo que en todas las palancas el brazo mayor es igual á diez veces el menor; veremos que tomando sucesivamente 1, 2, 3, 4.... palancas, la resistencia es igual á la potencia multiplicada por 10, 100, 1000, 10000....

Asi cuatro palancas en que el punto de apoyo se halle solamente diez veces mas cerca de la resistencia que de la potencia bastan para equilibrar á una resistencia *diez mil veces* mayor que la potencia.

Un sistema de palancas como el de la fig. 130 sirve en Inglaterra para medir la fuerza de los cables de hierro.

Se ha hecho un uso ingenioso de este sistema de palancas para demostrar el alargamiento ú dilatacion de las barras metálicas cuando se las espone al calor. Este alargamiento ú dilatacion, que por ser muy poco considerable no es sensible á la vista, estando multiplicado por diez mil, con cuatro palancas como las de que acabamos de hablar, si el brazo largo de la última palanca es la aguja de un cuadrante, esta aguja caminará rápidamente, y por la division del arco que corre podrá juzgarse de lo que se ha alargado la vara metálica. Por este medio se han podido determinar exactamente las relaciones de la dilatacion del hierro, del acero y del cobre; relaciones de las cuales ha sabido diestramente sacar partido el relojero.

Véase la VII lec. Péndulos de compensacion.

LECCION NOVENA.

De las garruchas, carrillos, roldanas ó poleas, y de los rodillos (1).

Es la *garrucha simple* (fig. 131) una especie de máquina de diámetro y grueso arbitrarios (2). Su circunferencia DCD está hendida á manera de carril, para que no se escurra la cuerda ACB que la abraza, en cuyo estremo está atado el peso ó la resistencia, estando la potencia asida del otro. La rodaja dá vueltas alrededor de su eje F dentro de las *armas* FG.

Cuando las armas estan colgadas en X la garrucha ó polea es *inmoble* (fig. 132). La potencia P actúa sobre uno de los cabos del cordon ó cuerda PAMBQ, y el peso ó la resistencia Q está sujeta al otro cabo del cordon. Cuando la potencia obra sobre la resistencia se estira el cordon ó cuerda de modo que presenta dos partes rectilíneas AP y BQ, la una que va de la polea á la potencia, la otra que va de la polea á la re-

(1) Nota del traductor. *Nuestros autores españoles llaman garrucha* simple ó monopastos, *cuando no consta mas que de una rodaja; si de dos* dispastos; *si de tres* trispastos; *y generalmente si constan de muchos carrillos ó rodajas las llaman* polispastos ó poleas compuestas.

(2) Id. *Hemos sustituido á la descripcion que hace el autor de la polea, descripcion á nuestro parecer oscura y enredada, la que dá de ella Don Benito Bails, en su compendio de matemáticas. Esta descripcion de Don Benito Bails es tal vez poco estensa, pero clara si se consulta con atencion la figura.*

sistencia; ademas presenta una parte de línea curva AMB que entra en la canal de la polea, y que es la línea mas corta que puede tirarse entre los puntos A y B en la superficie de dicha canal; superficie cuyas propiedades hemos esplicado ya: *Geometria lec. XV.*

Cuando las dos fuerzas P y Q estan en un plano vertical, este plano es igualmente el de la curva AMB; y las dos fuerzas PQ no pueden estar en equilibrio respecto al punto fijo X sino en el caso en que este punto se halle tambien en el plano vertical de la potencia y de la resistencia.

La polea inmoble tal como se emplea para subir los cubos de los pozos y los materiales de las minas y de las canteras, nos presenta asimismo la potencia y la resistencia y el punto de apoyo, situados en un mismo plano vertical. El cabo BQ de la cuerda, al cual está atada la resistencia, se dirige igualmente segun la vertical, no siendo la resistencia otra cosa que un peso suspendido libremente á la cuerda BQ, el cual se trata de levantar.

En el mismo caso de que hablamos, si la direccion AP de la parte de cuerda en que obra la potencia no es vertical, esta cuerda toma la figura de una curva que hemos llamado catenaria, y cuyas propiedades hemos esplicado en la *lec. VI.*

Estando la cuerda en todos los casos aplicada libremente sobre la canal de la polea, las condiciones de equilibrio de esta cuerda son las mismas que las condiciones dadas en la *lec. IV.* para el equilibrio de un cordon, aplicado sobre una superficie del que tiran dos fuerzas por sus dos cabos. Así, la tension de esta cuerda en todos sus puntos AMB, aplicados al contorno de la polea es la misma; luego si la potencia se aplicase inmediatamente al punto A, y la resistencia inmediatamente al punto B, estas dos fuerzas serian iguales cualquiera que fuese su direccion.

Si las fuerzas no se aplican inmediatamente á los puntos A y B sino á una cierta distancia, sin contar

con el peso de la cuerda, todavía serán iguales estas fuerzas. Si se cuenta con el peso de la cuerda, este peso se añade por una parte á la potencia, y por otra á la resistencia. Es preciso que las dos sumas sean iguales para que haya equilibrio alrededor del eje de la polea.

Esta consideracion es de gran importancia cuando se trata de subir pesos á alturas considerables. A medida que obra la potencia baja con la cuerda de que tira y adquiere una parte del peso de esta cuerda, igual á la parte que va faltando al lado en que obra la resistencia. De consiguiente, siendo la potencia cada vez mas preponderante, comunica á la resistencia un movimiento de ascension cada vez mas considerable que pudiera ser peligroso.

Para que haya siempre la misma diferencia entre la potencia y la resistencia se usa de la *cadena de compensacion* QNO sujeta al peso Q que se quiere levantar verticalmente. Supongamos que con la misma longitud sea esta cadena dos veces mas pesada que la cuerda á que está asida la potencia y atada la resistencia. Cuando la potencia P tira de la cuerda de modo que venga á parar en P′, la parte AB se aumenta con PP′, y la parte BQ queda disminuida en igual cantidad QQ′. De consiguiente, nos hallamos como si la resistencia Q no hubiese adquirido dos veces el peso de una parte de cuerda PP′. Levantándose la resistencia Q una cantidad QQ′=PP′ una parte NN′ de la cadena de compensacion, que descansa en una tabla firme y horizontal, ó en otro artificio, sube, se pone vertical, y pesa en el sitio en que está la resistencia. Pero NN′, igual en longitud á PP′ y á QQ′, pesa doble que cada una de estas partes de cuerda; luego por una parte la potencia P adquiere dos veces el peso PP′, y por otra la resistencia Q adquiere dos veces el peso PP′. De consiguiente, hay siempre la misma diferencia entre la potencia y la resistencia, lo cual es un resultado importante en muchos casos.

Cuando las cuerdas AP,BQ (fig. 132) son paralelas, la resultante de las dos fuerzas iguales P y Q es paralela á las direcciones AP y BQ, y pasa por el eje de la rodaja. Cuando P,Q no son paralelas (fig. 134) es preciso que su resultante pase por el eje C de la rodaja, y por el punto de suspension X. Pero las dos fuerzas P y Q no dejan de ser iguales. Luego prolongando las dos direcciones AP,BQ hasta el punto en que se encuentren D, los tres puntos C,X,D, estarán en línea recta, y esta recta formará el mismo ángulo con las direcciones AP y BQ de la potencia y de la resistencia.

Para saber cuál es la presion que producen en el eje C las fuerzas P y Q, se hallará la resultante DH de un paralelógramo DE,HF, cuyos lados iguales DE,DF representen la potencia y la resistencia; la diagonal DH será la resultante de las dos fuerzas dirigidas segun DXC, es decir, la presion que experimenta el eje de la rodaja.

Esta presion añadida al peso de la polea representa el esfuerzo total que sufre el apoyo X.

Como en la polea inmoble es la potencia igual á la resistencia, no se puede emplear esta máquina sino para mudar la direccion de una fuerza en otra direccion diferente sin alterar el valor de dicha fuerza.

Si las dos fuerzas P y Q no fuesen iguales entre sí, la menor contrarestaria una parte de la mayor, igual á esta fuerza menor. Entonces la rodaja ó carrillo de la polea se moveria en el sentido de la mayor como si no se hallase impelida al movimiento mas que por la diferencia de las dos fuerzas; pero la presion que ejerce la rueda ó el eje en la caja, sería igual á la resultante de las dos fuerzas, suponiéndolas iguales á la menor. Así, el movimiento de la polea podria llegar á ser muy lento aunque las presiones en el eje fuesen muy considerables, y bastaria para esto que la potencia y la resistencia fuesen muy grandes, aunque poco diferentes una de otra. Tal es el principio de la máquina inventada por Adwood para demostrar por la experiencia las

leyes de la caida de los cuerpos, leyes que hemos espuesto en la *leccion II*.

Tiremos los rádios CA, CB (fig. 134) perpendiculares á las direcciones APBQ; la recta AB será perpendicular á CHD que divide el ángulo ACB en dos partes iguales. Luego los triángulos DEH y ACB tendrán sus lados correspondientes perpendiculares, lo cual dará la proporcion:

$$P=Q:R::DE=DE:DH::AC=CB:AB.$$

Luego *en la polea inmoble la potencia que iguala á la resistencia, es á la presion R que sufre el punto de apoyo, como el rádio de la rueda es á la cuerda AB que subtende el arco AB rodeado por la parte de cuerda aplicada sobre la rodaja.*

Polea movil. Si en la polea inmoble (fig. 132 y 134) se sustituye al punto fijo una fuerza R, igual al mismo esfuerzo que obra en este punto por el efecto de P y de Q, no se alterará el equilibrio entre las tres fuerzas P,Q,R, y se convertirá la polea inmoble en polea móvil (fig. 133 y 135). Luego en la polea móvil las fuerzas P,Q, aplicadas á los dos cabos de la cuerda que pasa por la rodaja, y la fuerza R aplicada á la caja conservan las relaciones

$$P=Q:R::DE=DF:DH.$$
$$P=Q:R::CA=CB:AB.$$

Comunmente se sustituye por una de las potencias P=Q, un punto fijo: v. g. Q. Entonces la potencia P basta para equilibrar á la resistencia R y la última proporcion se traduce al lenguaje vulgar diciendo.

En la polea móvil la potencia es á la resistencia como el rádio de la rodaja es á la cuerda que subtende el arco AB, ceñido por la parte de cuerda aplicada sobre la rodaja.

Esta relacion tiene la ventaja de que ahorra el figurar el paralelógramo de fuerzas, pues se refiere á elementos muy familiares á los geómetras, y calculados de antemano en tablas impresas que se llaman tablas de *logaritmos* y de *senos*.

Cuando las dos fuerzas P,Q sean paralelas (fig. 133) será preciso que la resistencia R tenga tambien la misma direccion y ademas sea igual á la suma P+Q. Este será el mayor efecto que puedan producir estas dos fuerzas con el ausilio de una polea móvil para tirar de la caja.

Cuanto mas obtuso sea el ángulo formado por las direcciones AP,BQ (fig. 5) mas disminuye la diagonal DH; mas pequeña ha de ser la resistencia R, si la potencia P=Q es limitada, y mayor es forzoso que sea P, si R es determinada.

Hemos dicho que en lugar de emplear dos fuerzas P,Q, para equilibrar á otra fuerza R (fig. 133 y 135) se sujeta las mas veces uno de los cabos de la cuerda AP ó BQ á un punto fijo. Este punto sostiene todo el esfuerzo que hubiera sufrido la fuerza Q que se economiza.

Por ejemplo, en el caso en que las cuerdas son paralelas (fig. 133) las fuerzas P y Q son iguales entre sí, basta para equilibrar la fuerza R=P+Q=2P emplear la fuerza P. Hay, pues, entonces la economía de una mitad en la fuerza empleada para producir el equilibrio. Digo para *producir* el equilibrio, porque para producir el movimiento no hay economía.

Supongamos que en efecto en un tiempo dado, permaneciendo fijo el punto Q, el punto P se adelante una cantidad P*p*; pasando la rodaja de la polea de AMB á *amb*, y no variando la cuerda de longitud, será preciso que tengamos QBMAP=Q*bmap*. Sustraigamos de las dos cuerdas las longitudes iguales AMB*amb* y las longitudes comunes Q*b*,P*a*; y queda

$$Pp = Aa + Bb = 2Cc.$$

Luego C*c* es igual á la cantidad que R se adelanta hácia *c*. De consiguiente, cuando la fuerza P no es mas que la mitad de R, P corre un espacio doble del que corre R. Luego multiplicando cada una de estas fuerzas por el espacio que corre en un tiempo dado, el producto es el mismo.

$$\text{Fuerza } P \times Pp = \text{fuerza } R \times Rr.$$

Los espacios P*p*R*r* representan las *velocidades virtuales* de las fuerzas P,R, y la igualdad que acabamos de indicar contiene un caso del principio de las velocidades virtuales. Este principio se hallará en todas las máquinas simples ó compuestas. En todos casos se verá que si con el auxilio de puntos de apoyo se pueden equilibrar las mayores fuerzas con las mas pequeñas, luego que hay movimiento se establece la compensacion entre las fuerzas y los espacios corridos, de suerte que las cantidades de movimiento no se aumentan jamas.

Se combina frecuentemente la polea inmoble con la polea móvil como se ve en la fig. 136. Con este artificio se cuelgan los reverberos empleados en el alumbrado de las calles de Paris.

La cuerda P*ab*P′ABQ pasa alrededor de la polea inmoble *abc* y despues alrededor de la polea móvil ABC, de la cual pende el peso R, y viene á sujetarse al punto fijo Q.

Sea P la tension ó esfuerzo esperimentado por la cuerda de que tira la potencia P. Para que subsista el equilibrio de la polea ó trócula inmoble es preciso que P′=P. En seguida para que subsista el equilibrio de la polea móvil es preciso que pasando en la rodaja la cuerda AB, por los puntos A,B, en que la cuerda deja de tocar á la rodaja, se tenga esta proporcion

$$P = P' : R :: AC : AB, \text{ condicion sencilla.}$$

Supongamos (fig. 137) muchas poleas móviles, combinadas de este modo: 1.º La cuerda QABPC′ de la primera polea, sujeta á Q, punto fijo, y á C centro de la segunda polea: 2.º La cuerda Q′A′B′P′C″ sujeta á Q′ punto fijo, y á C″ centro de la tercera polea, y así sucesivamente.

Llamando P,P′,P″, las tensiones que esperimentan las cuerdas BP,B′P′,B″P″, &c., se tendrá

$$\frac{R}{P} = \frac{AB}{AC};\ \frac{P}{P'} = \frac{A'B'}{A'C'};\ \frac{P'}{P''} = \frac{A''B''}{A''C''} \ldots\ldots;$$

Luego $\frac{R}{P}\times\frac{P}{P'}\times\frac{P'}{P''}\ldots\ldots=\frac{AB\times A'B'\times A''B''\times\ldots}{AC\times A'C'\times A''C''\times\ldots}$

Advirtamos que dividir R por P, y despues multiplicar por P el cuociente, es reproducir el mismo número R, que dividir este número por P′P″, y multiplicarle por P′P″ es igualmente reproducirle. Por consiguiente, queda solo la resistencia R dividida por la última potencia P^{m} igual al producto de todas las relaciones.

$$\frac{AB}{AC}\times\frac{A'B'}{A'C'}\times\frac{A''B''}{A''C''}$$

Todos estos cálculos son, como se vé, sumamente sencillos. Si se diese la posicion de las poleas, las relaciones $\frac{AB}{AC}$, $\frac{A'B'}{A'C'}$ $\frac{A''B''}{A''C''}$ &c, se darian igualmente. Se podría, pues, determinar á arbitrio cuál ha de ser la potencia para equilibrar á una resistencia conocida, y cuál ha de ser la resistencia para equilibrar á una potencia determinada.

Cuando todas las fuerzas son paralelas (fig. 138), las cuerdas AB, A′B′, A″B″.... vienen á ser los diámetros de las rodajas ABC, A′B′C′, A″B″C″.... De consiguiente, estas cuerdas son entonces dobles de los rádios AC, A′C′, A″C″, &c.; luego $\frac{R}{P^{m}}=2\times2\times2\ldots$ de modo que hay tantos factores 2 como poleas móviles.

Si buscamos en el caso del movimiento la relacion de los espacios corridos por la potencia y por la resistencia, veremos: 1.º que el espacio corrido por R es la mitad del corrido por P; éste la mitad del corrido por P′; éste la mitad del corrido por P″; y así sucesivamente. Se tendrá, pues, por la relacion de los espacios E, e, corridos por la potencia P^{m} y por la resistencia R.

$$\frac{E}{e}=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\times\ldots\ldots$$

Tantas veces como se tenia

$$2\times2\times2\times\ldots\ldots=\frac{R}{P^{m}},$$

que es la relacion de la resistencia á la potencia. En fin, multiplicando estas dos espresiones una por otra se tendrá $\frac{R\times E}{P^{m}\times e}=\frac{1}{2}$ vez $2\times\frac{1}{2}$ vez $2\times\frac{1}{2}$ vez 2..... tantas veces como poleas móviles haya.

Pero $\frac{1}{2}$ vez 2=1, luego se tendrá $\frac{R\times E}{P^{m}\times e}=1$,

lo que exige que la resistencia R, multiplicada por el espacio E, que puede correr en un instante, sea igual á la fuerza P^{m}, multiplicada por el espacio e, que ha de correr en el mismo instante, si trastornase de repente el equilibrio para dar movimiento á la máquina (1).

En las artes se emplea frecuentemente un sistema de poleas con cuerdas casi paralelas, este es el de las rodajas inmobles 1, 2, 3, &c., (fig. 139 y 140) sostenidas por la misma caja inmoble y rodajas móviles I, II, III, sostenidas por la misma caja móvil. Esta máquina se llama *polispastos* (2).

---

(1) *Este es todavía un ejemplo del principio de las velocidades virtuales.*

(2) Nota del traductor. *En el tratado de matemáticas de Don Benito Bails se llama* tróculα *á lo que nosotros* polispastos. *Uno y otro vocablo estan derivados de la lengua griega, y preferimos el último porque le usan nuestros autores españoles para significar un número cualquiera de poleas simples, unidas*

Pasando la cuerda á su vez por 1 y I, 2 y II, 3 y III, si las cuerdas bB, Aa', $b'B'$, $A'a''$, $b''B''$ &c., fuesen paralelas, la tension de cada una de ellas sería igual á la resistencia dividida por su número, cuidando sin embargo de no contar la última vuelta aP, que no actuando sino sobre una polea inmoble no altera el equilibrio. Se podría efectivamente sustituir P con su igual p, dirigida en la prolongacion de Bb; entonces la cuerda aP desaparecería.

De consiguiente, es menester contar solo las cuerdas que parten inmediatamente de las poleas móviles, es decir, dos cuerdas por cada polea móvil, cuando (fig. 139) la cuerda sale de la caja inmoble, y una cuerda mas cuando (fig. 140) la cuerda sale de la caja móvil. Estas cuerdas en general serán con corta diferencia paralelas, y podrán considerarse como tales, sin notable error en la práctica. De consiguiente, si hay m poleas móviles habrá $2m$ cuerdas en el primer caso, $2m+1$ en el segundo; contribuirán igualmente á resistir el esfuerzo de la resultante R, y cada una sufrirá la $\frac{R}{2m}$ emeavo, ó $\frac{R}{2m+1}$ parte de este esfuerzo. Pero $P=P'$, tension de Bb; luego la potencia P igual á la resistencia R, dividida por dos veces el número de poleas móviles (fig. 139), y dos veces este número mas uno (fig. 140)

Sería fácil probar en este caso, como en los antecedentes, que si se hiciese mover un poco la máquina, los espacios corridos por la potencia y por la resistencia en un mismo tiempo estarian entre sí en razon inversa de estos números.

En efecto, cuando CR baja una cierta cantidad, es preciso que cada distancia Bb, $B'b'$, $B''b''$..... Aa', $A'a''$..... se aumente la misma longitud. Luego la longitud total de las cuerdas desde a hasta c''..... se aumenta tantas veces esta longitud como cuerdas hay. Es menester, pues, que la cuerda libre aP haya dado toda esta longitud, y de consiguiente que P haya corrido todo este espacio. Así, siendo $2m$ (fig. 139) el número de las cuerdas, el espacio Rr corrido por R, es el espacio Pp corrido por $P :: 1 : 2m$.

Pero $R : P :: 2m : 1$. Se tiene, pues, fuerza $R \times$ espacio corrido por $R =$ fuerza $P \times$ espacio corrido por P..... Lo mismo se demostrará este principio respecto á la figura 140.

---

con cuerdas, siendo así que usan el primero para significar lo mismo que carrillo, garrucha, moton, roldana, *pues todos estos nombres se dan á la polea.*

Hay dos sistemas de poleas compuestas, ó como se llaman comunmente de *polispastos*. En uno de estos sistemas (fig. 139 y 140) hay muchas rodajas de poleas puestas cada una en un eje separado, y todos estos ejes atraviesan una misma caja. En el otro sistema (fig. 141 y 142) todas las ruedas de las poleas estan puestas en el mismo eje, en la misma caja, y separadas por medio de tablas planas, que forman parte de la caja. Cada uno de estos sistemas tiene sus ventajas y sus inconvenientes. En el primer sistema todas las rodajas de cada polispastos se hallan colocadas en el mismo plano, así como la cuerda que pasa sucesivamente de un polispastos á otro.

En el segundo sistema para que la cuerda pase de un polispastos á otro es necesario que mude de plano, de modo que todos los trozos de la cuerda que se hallan á un lado de los dos polispastos, aunque paralelos entre sí, no son paralelos á los trozos de cuerda que se hallan al otro lado de los dos polispastos. Este defecto de paralelismo tiene el inconveniente de procurar inclinar las rodajas en una posicion oblícua respecto al eje, lo cual vicia ó desfigura el *ojo*, es decir, el agujero en que entra el eje de las rodajas, y tambien los ejes, aumentando el rozamiento. Este inconveniente no es muy notable cuando los dos polispastos estan á bastante distancia, respecto á la separacion de las rodajas en un mismo eje, pero cuando los dos polispastos se acercan, el defecto de paralelismo aumenta y produce resistencias desfavorables.

Bajo este punto de vista las rodajas colocadas en el mismo eje, son menos ventajosas que las que estan en una misma caja con ejes diferentes.

Pero este último sistema ocupa mucho mas trecho que el antecedente. Cuando se trata, por ejemplo, de levantar pesos considerables, es necesario un aparato en que el punto de suspension del polispastos esté mas alto que el parage al cual se quiere subir el peso, á lo menos tanto como toda la longitud de los dos polispastos; y esta longitud puede ser considerable si cada una de las cajas contiene tres ó cuatro rodajas. Este inconveniente es mas grave, sobre todo cuando se llega á los últimos pisos de una casa y se trata de subir piedras á los puntos mas altos. A los mecánicos toca juzgar segun los casos del sistema mas conveniente.

Si los polispastos ó aparejos tienen la ventaja de facilitar el medio de vencer una gran resistencia con una corta potencia, exigen por compensacion una gran longitud de cuerda, de consiguiente la potencia ha de correr un gran espacio para hacer subir la resistencia una cantidad mucho menor. Esta es la compensacion general que observamos como un principio que se reproduce en el movimiento de todas las máquinas.

Del peso de las poleas. Considerando las poleas como cuerpos pesados, si se quiere hallar el valor del esfuerzo sufrido por el punto fijo Q (fig. 135) del cual está pendiente la polea que suponemos libre en el espacio, hay que tomar la resultante general de la potencia P, de la resistencia R, del peso de la cuerda PABQ, y de la polea entera.

Si m es el peso de la polea entera, y n el de la cuerda, se tendrán las cuatro fuerzas m,n,P,Q, cuya resultante ha de ser igual y directamente opuesta á la resistencia R para que haya equilibrio.

En seguida considerando lo que sucede alrededor del eje c de la polea, se verá que este eje resiste: 1.° el esfuerzo de P y de Q: 2.° el peso de la rodaja de la polea: 3.° el peso de las cuerdas PABQ en el caso de que la potencia obrase de alto á bajo como en la fig. 4. Asi, pues, llamando m' al peso de la rodaja que tiene evidentemente su centro en C, las fuerzas m',n,P y Q tendrán una resultante única que pase por el eje C. Esta resultante será igual á la presion que ejerce la rodaja en el eje.

Es fácil ver que el peso de la rodaja no altera las relaciones de P y de Q respecto al equilibrio; pero cuanto mas considerable es tanto mas padece el eje y mayores son los rozamientos. Por manera, que es sumamente importante que el peso de la rodaja sea el menor que se pueda si la polea ha de producir el mayor efecto posible.

En cuanto á la cuerda, en los casos (fig. 134) en que su peso esté sostenido por el eje, este eje se hallará tanto menos cargado cuanto mas ligera sea la cuerda.

Estas consideraciones son muy importantes para el uso de las cuerdas y de las poleas á bordo de las embarcaciones, independientemente de la economía considerable que puede conseguirse en la cantidad de materia empleada en las rodajas de polea, asi como en las cuerdas que pasan por dichas rodajas, se necesita para vencer la misma resistencia una fuerza mucho menor cuando las rodajas y cuerdas son muy ligeras.

Cuando se fabrican rodajas metálicas para hacerlas mas ligeras, se tiene gran cuidado de quitarles el macizo entre el eje y la garganta, ya por medio de rayos separados como los de una rueda de coche, ó ya por medio de una plancha delgada que reune la garganta con el cubo, como se vé en la fig. 143.

Cuando la polea (fig. 135) haya de ponerse en movimiento una parte de la potencia P equilibra á todas las resistencias; otra parte P′ dá á la cuerda, á la rodaja y á la resistencia R una cantidad de movimiento cuyo efecto representa todo el que no han contrarestado las resistencias de la máquina.

Ahora bien, esta cantidad de movimiento se mide: 1.° por el espacio que ha corrido P′; 2.° por la suma de los productos del peso de la cuerda, por el espacio que la cuerda ha corrido en el sentido de su longitud; 3.° por la suma de los productos del peso de cada elemento de la rodaja, por el espacio que este elemento corre. Es menester determinar esta tercera parte.

Si dividimos la rodaja en ruedecillas ó zonas de igual anchura, veremos que el peso de estas ruedecillas será proporcional á su rádio. Haciendo dos rodajas del mismo grueso y que difieran en el diámetro, su volúmen es proporcional al cuadrado de estos diámetros. Si se dividen estos dos círculos en partes pequeñas, cuyo volúmen se halle tambien en la misma proporcion é igualmente colocadas en las dos rodajas, el cuadrado de la distancia del eje á las partes correspondientes en las dos rodajas, será proporcional al cuadrado de los rádios de estas rodajas. Luego el producto del volúmen de cada parte por la distancia al eje será proporcional al cuadrado del diámetro multiplicado por el diámetro, es decir, al cubo del diámetro de las rodajas. Asi para una misma velocidad angular de dos rodajas de igual grueso, la cantidad de movimiento que recibe cada una es proporcional al cubo de su diámetro. Creciendo mucho esta proporcion con el diámetro de las rodajas, es importante (sobre todo en las grandes poleas) el hacer las rodajas lo menos voluminosas que sea posible. Esta es una ventaja que se consigue cuando se emplean cuerdas que con una fuerza dada tienen un diámetro poco considerable á causa de su excelente calidad. Basta efectivamente que el ancho de la rodaja sea un poco mayor que el diámetro de las cuerdas para que estas no se desgasten frotando contra los lados de la caja en que está la rodaja de la polea.

Si se pudiesen emplear cuerdas que no presentasen ninguna resistencia á la flexion sobre la garganta de la polea, cuanto menor fuese el diámetro de la rodaja menor sería la pérdida de fuerza empleada en vencer la

inercia de esta rodaja, cuando la potencia comunica un movimiento á la resistencia; pero la rigidez de las cuerdas es una resistencia considerable que conviene valuar.

Coulomb, célebre físico, ha determinado como vamos á indicar, la resistencia que la rigidez de las cuerdas opone al movimiento de las poleas.

Un madero AA′ (fig. 144) sostiene 1.° una balanza con la cuerda CC′ que dá una vuelta de derecha á izquierda sobre el rodillo móvil BB′; 2.° otra balanza menor q y el cordel pequeño cc' que dá dos á tres vueltas sobre el rodillo BB′ en sentido contrario de CC′. Para no complicar los efectos se tenia cuidado de que las cuerdas no se tocasen.

El rodillo BB′ tira á bajar: 1.° en virtud de la accion de su propio peso, con un brazo de palanca igual al rádio del rodillo: 2.° en virtud de la del peso de la balanza q con un brazo de palanca igual al diámetro del rodillo. De consiguiente, puede añadirse la mitad del peso del rodillo al peso de la carga q para tener una fuerza única que actúa con un brazo de palanca igual al diámetro del rodillo. Cuando el peso del rodillo era escesivo se disminuía su efecto con un contrapeso p atado al cabo de la cuerda cc' que pasa sobre una polea r. Cada unidad de peso p equilibraba á dos unidades de peso del rodillo.

Antes de sujetar á la experiencia la cuerda CC′ cuya rigidez se trataba de medir, se estiraba á fin de ponerla en un estado poco mas ó menos semejante al de las cuerdas que sirven regularmente para las máquinas. Se pasaba la cuerda CC′ por la garganta de una polea, se ataba un peso suficiente á uno de los cabos de la cuerda, y tirando algunos hombres del otro hacian subir y bajar el peso. Por este medio se evitaban las irregularidades que se advierten siempre en la rigidez de las cuerdas nuevas, y que no hubieran permitido conseguir resultados generales y satisfactorios.

Tomadas estas precauciones se ha visto cuál era el peso q para que hiciese empezar á bajar el rodillo BB′

y de consiguiente á vencer la resistencia de la cuerda CC'. Se ha hallado que *con grandes tensiones* (1) *la fuerza necesaria para enrollar las cuerdas alrededor de los cilindros de diferente diámetro está poco mas ó menos*: 1.° *en razon directa de las tensiones de las cuerdas é inversa del diámetro de los rodillos*: 2.° *en razon directa del cuadrado del diámetro de las cuerdas*. Esta última relacion se acerca tanto mas á la exactitud cuanto mas gruesas son las cuerdas.

Comparando las resistencias de un cable con las de las cuerdas delgadas se halla algo menor que lo que in-

(1) *La resistencia que proviene de la rigidez de las cuerdas, se compone de dos partes; una constante y otra que crece en proporcion de la carga. La cantidad constante no puede atribuirse sino á los diferentes grados de tension y de torsion que se dá á las cuerdas al tiempo de fabricarlas. Cada hilo se halla estirado por cierta fuerza y conserva su grado de tension despues que la cuerda está torcida, pues los hilos comprimidos y sujetos unos á otros, se hallan contrarestados por el rozamiento. Asi es que en una cuerda que sostiene un peso, cada hilo está estirado no solo en razon del peso que sostiene, sino tambien segun el grado de torsion que conserva de cuando se fabricó la cuerda: luego si las fuerzas necesarias para doblar una cuerda son proporcionales á las tensiones, resulta que serán proporcionales á una cantidad constante mas al peso de que se halla cargada la cuerda. Esta cantidad constante varia lo mismo que el grado de tension y de torsion á que se sujetan las cuerdas en su fabricacion. En cuanto á las cuerdas nuevas de tres ramales sigue exactamente la relacion del cuadrado de los diámetros de las cuerdas. Cuando las cuerdas sirven mucho tiempo los hilos se aflojan y disminuye la cantidad constante que representa su tension primitiva.*

dica la proporcion de los cuadrados. Esto consiste en que en las cuerdas gruesas la mecha que se coloca en el centro aumenta el diámetro sin aumentar en la misma proporcion la resistencia á la flexion. Ademas, en los cables gruesos no es posible que todos los hilos estén tirantes con la misma igualdad que en las cuerdas delgadas; los mas tirantes son los únicos que resisten mucho tiempo, y los demas ceden sin esfuerzo cuando se dobla la cuerda.

Era muy interesante saber qué efecto se produce en la rigidez de las cuerdas cuando éstas se impregnan de humedad. En una multitud de operaciones y trabajos, particularmente aquellos que se ejecutan al descubierto, como la maniobra de los navíos, la lluvia, los golpes de mar y otras muchas causas, se mojan las cuerdas y se ponen en circunstancias físicas del todo diferentes de aquellas en que se hallaban cuando secas.

Solamente la observacion habia enseñado que la rigidez de las cuerdas, especialmente de las gruesas, aumentaba notablemente cuando se impregnaban de agua. El aparato (de la fig. 144) ha probado que este aumento se mide por una cantidad constante, sea la que quiera la carga que las cuerdas tengan que aguantar.

Los primeros esperimentos de Coulomb se hicieron con *cuerdas sin embrear*, y los siguientes con *cuerdas embreadas*. Respecto á esta última especie de cuerdas, asi como á la primera, es menester añadir una cantidad constante (sea la que quiera la tension) á los esfuerzos que se necesiten para doblar la cuerda en el supuesto de que no esté embreada y de que esté seca. Sin embargo, la diferencia no es tanta como pudiera creerse: la rigidez de las cuerdas embreadas no escede en una sesta parte á la de las cuerdas sin embrear.

Con todo, esta diferencia es aun bastante importante y bien se echa de ver en la práctica. Asi es que se emplean generalmente cuerdas sin embrear para poleas y tambores aun cuando sea al aire libre. Se halla que entonces la economía de trabajo que producen en las fuerzas motrices, compensa escesivamente el gasto que resulta de inutilizarlas mas presto.

La esperiencia ha demostrado que la cuerda vieja embreada conserva poco mas ó menos la misma rigidez que la embreada nueva. Las fibras de cáñamo se aflojan sin duda por el uso, pero la esposicion al aire y á la lluvia endurece la brea y los efectos se compensan.

Coulomb dá reglas aritméticas muy sencillas, con el fin de aplicar los resultados que ha conseguido para la valuacion de la resistencia que oponen á la flexion diferentes cuerdas, en cilindros ó poleas de diámetros dados y de tensiones conocidas. Pueden verse estas aplicaciones en la obra de este sábio.

Los esperimentos relativos á las cuerdas embreadas se han hecho en invierno cuando el termómetro de Reaumur señalaba 5 ó 6 grados sobre cero. Parece que el hielo aumenta la rigidez de estas cuerdas, particularmente cuando tienen mucho diámetro. Una cuerda embreada de 15 hilos carretos, con la cual hizo el esperimento cuando el termómetro estaba á 4 grados bajo cero, necesitaba una fuerza mayor (poco mas ó menos de $\frac{1}{5}$) que cuando el termómetro estaba á 6 grados sobre cero. Pero este aumento no sigue la proporcion de las cargas, y tambien aqui la parte constante de la resistencia es la que al parecer aumenta mas notablemente.

Hay una observacion aplicable á todos los esperimentos que acabamos de referir. Si estando cargadas las cuerdas se levanta el rodillo BB′ (fig. 144) volviéndole á fuerza de brazos, y despues se le deja caer al instante, la rigidez de la cuerda será por lo regular una tercera parte menor que en los esperimentos citados. Este resultado se verifica tanto en las cuerdas sin embrear como en las embreadas, tanto en las viejas como en las nuevas. Solo sí es mas notable con las cuerdas gruesas y con las nuevas que con las usadas y delgadas, y mas con los rodillos delgados que con los gruesos. Pero déjese el sistema algun tiempo en reposo, súbase el

rodillo sin volverle á bajar, y se hallará la rigidez de la cuerda notablemente aumentada. No llega á su límite segun lo ha fijado Coulomb en sus esperimentos sino hasta haber permanecido en reposo 5 ó 6 minutos. Asi en un movimiento alternativo en que se empleasen las fuerzas en hacer subir y bajar un peso, como en la accion de las maromas que se emplean para levantar el mazo que sirve para clavar estacas, la rigidez de la cuerda será algo menor que en los esperimentos. Lo mismo sucederá á una cuerda que pase por dos poleas muy próximas una de otra: por poco rápido que sea el movimiento, la fuerza que habrá que emplear en vencer la rigidez de la cuerda doblada sobre la segunda polea, será menor, aunque bajo el mismo grado de tension, que la fuerza empleada en doblarla sobre la primera polea.

Parece resultar de esta observacion que las partes dobladas se vuelven á enderezar con lentitud, y que la rigidez mayor ó menor depende de la accion de estas partes.

Ademas, esta observacion rara vez debe influir en el cálculo de las máquinas destinadas á la marina. En estas máquinas los movimientos son demasiado lentos y las poleas casi siempre estan bastante distantes para que cada porcion de cuerda tenga tiempo de recobrar toda su rigidez al pasar de una polea á otra. Ademas, casi siempre es necesario al valuar las máquinas calcular las resistencias con relacion á los casos mas desventajosos para las fuerzas motrices. Los resultados que se hallaron con el aparato (fig. 144) se han hallado confirmados por los del aparato (fig. 145.)

Se pusieron dos banquillos TT, TT que sostenian á dos tablas DD, DD, y á dos tablones *mm*, *mm*, de roble, colocados de canto con la parte superior bien horizontal y pulimentada. Entre estos dos tablones hay una abertura longitudinal.

Se pusieron sucesivamente diferentes rodillos sobre las dos reglas de roble, de modo que el eje de los rodillos se hallase como se vé (fig. 145) perpendicular á la alineacion de las reglas cuyas esquinas ó ángulos se habian redondeado. Las dos reglas estaban perfectamente á nivel, y de los dos lados del rodillo se suspendian pesos de 25 kilogramas, con bramantes flexibles de cuatro milímetros y medio de circunferencia, y cuya rigidez no era la 30.ª parte de la de una cuerda de 6 hilos carretos. Por medio de muchos bramantes repartidos sobre los rodillos, y cargados cada uno con 25 kilogramas de cada lado, se producia sobre las reglas una presion determinada. Con un contrapeso pequeño suspendido alternativamente por los dos lados del rodillo, se averiguaba en seguida cuál era la fuerza necesaria para dar á este rodillo un movimiento contínuo é insensible, ó para vencer 1.º la rigidez de la cuerda CC'; 2.º el rozamiento del cilindro.

La rigidez de la cuerda está siempre en razon inversa del diámetro del cilindro.

El rozamiento del cilindro BB que roza un plano horizontal está en razon directa de las presiones é inversa del diámetro. Así en los cilindros del mismo peso cuanto mayor es el diámetro de estos, menor es la resistencia del rozamiento.

Este resultado tiene muchas aplicaciones. En las labores de la agricultura se emplean frecuentemente cilindros que se pasan por las tierras labradas para deshacer los terrones, ó por las praderas para apisonar la yerba, que de este modo se hace mas fina é igual. Importa disminuir todo lo posible la resistencia del rozamiento, pues entonces una caballería puede arrastrar sin gran trabajo un cilindro mas largo y pesado. Esto es lo que se hace en Inglaterra donde se sirven de cilindros huecos de hierro colado, que al mismo tiempo son sólidos, ligeros y de gran diámetro. Añadamos á esto que en igualdad de masas, siendo el momento de inercia del cilindro hueco, mucho mas considerable que el del cilindro macizo, la fuerza adquirida por el cilindro se altera en menor proporcion con los obstáculos que

tiene que vencer. Estas consideraciones se aplican al uso de las ruedas en toda especie de transportes.

Despues de haber examinado los casos principales del equilibrio de las poleas empleadas independientemente ó combinadas segun diferentes sistemas, conviene que paremos la atencion en los medios de fabricar estas máquinas. La fabricacion de las poleas es un importante ramo de artes, particularmente en la marina.

No hablaremos aquí de las poleas metálicas, cuyas principales piezas se fabrican empleando moldes dibujados con cuidado, ejecutados como obras exactas de carpintería, colados ó vaciados luego en hierro ó en cobre, y trabajados despues segun es práctica.

Nos detendremos mas particularmente en la fabricacion de las poleas de madera.

Pueden fabricarse poleas de madera trabajando la rueda por medio de la sierra y del torno, y la caja con instrumentos cortantes como los del carpintero y el almadreñero. Esta última parte del trabajo admite una ejecucion mas ventajosa por medio de máquinas. La caja de la polea se compone de cuatro caras ó lados, que son paralelos de dos en dos, con dos planos simétricos, el uno paralelo y el otro perpendicular á los planos de las ruedas.

Trabajando estas cuatro caras como partes de cilindro circular, he aquí el ingenioso sistema imaginado por Mr. Brunel, mecánico francés. En la circunferencia de una gran rueda al aire se fijan trozos de madera, escuadrados de antemano, y que tengan la longitud, anchura y grueso correspondientes á las cajas de poleas que se quieren fabricar. Despues de haber asegurado de un modo inalterable estos trozos de madera en la circunferencia de la rueda, se la hace dar vueltas con uniformidad; y entonces, por medio de una herramienta cortante se forma en cada trozo de madera la cara que se presenta esteriormente. Así se vá labrando cada una de estas caras en forma de arco de cilindro recto circular, que tenga por eje el mismo de la rueda. Hecho esto se vuelven los trozos de madera, de suerte que sus caras esteriores queden á la parte interior, respecto al círculo que las contiene. Se mueve la rueda grande, y se labran todas las caras de los trozos de madera que están entonces á la parte esterior. Despues, colocando los trozos de madera en otra rueda de diámetro conveniente, se labran las dos caras de cada caja de polea, que estan todavía en bruto, en forma de dos arcos de cilindro circular, de diferente rádio, y conforme conviene á la figura de la caja.

En el sistema de Mr. Brunel suministra una máquina de vapor la fuerza motriz, y podría tambien suministrarla un manubrio, la fuerza del agua ó la de los hombres. Lo único que hay aquí que considerar es el sistema de la rueda y su movimiento circular.

Otro trabajo esencial es el de las mortajas de caras planas, en cada una de las cuales ha de colocarse una rodaja de la polea. El hacer estas mortajas es cosa lenta y penosa, cuando se ejecuta segun el método ordinario con una maceta y el escoplo. Es mas fácil empezar abriendo, por medio de una máquina de taladrar, un agujero cilíndrico hácia uno de los estremos, en la misma direccion de la mortaja, cuyo diámetro sea igual á la anchura de dicha mortaja; y despues con una sierra muy fina, introducida en este agujero, se corta á derecha é izquierda la madera conveniente para formar la mortaja.

Tambien puede emplearse un escoplo, al cual se comunica por medio de una fuerza continua, un movimiento de *va y ven*. Este es el método que ha preferido Mr. Hubert, sábio ingeniero de marina.

Cuando las poleas aguantan grandes presiones su eje está fuertemente comprimido por la rodaja de la polea, resultando por una parte que este eje se desgasta y desfigura, y por otra que el agujero abierto en la rodaja de la polea para el paso del eje, se ensancha igualmente, lo cual se verifica de un modo desigual si la fuerza de la materia de la rodaja no es la misma en

todos sentidos. Este inconveniente es mas notable en las poleas, cuyos ejes y rodajas son de madera, aunque se tiene cuidado de escoger para estos ejes una madera muy dura, como el box verde, y para las rodajas otra, igualmente resistente, tal como el guayaco.

Es mejor emplear metales para fabricar los ejes y las rodajas. Se hacen rodajas de hierro colado, notables por su ligereza y continuidad de todas sus partes. Lo comun es preferir los ejes de hierro y rodajas de madera, que tienen su interior cubierto de una especie de anillo de cobre, con una abertura circular, cuyo diámetro se adapta perfectamente al del eje.

El arte de escoplear las rodajas de madera para engastar los buges de cobre es un trabajo delicado, que puede hacerse con mucha mas perfeccion por los medios exactos que proporciona la mecánica, que por los aproximados del trabajo manual.

En el sistema de máquinas, inventado por Mr. Brunel, para fabricar las poleas, se notan ingeniosos medios para hacer los buges, y para vaciar ó abrir en las rodajas el sitio destinado á colocarlos.

Los buges de polea han de ajustarse con la mayor exactitud en la escopleadura preparada para recibirlos, y despues clavarse con cuidado: aun la misma forma de los buges no es indiferente. Esta forma ha de apartarse mucho de la de un círculo único, para que oponga la mayor resistencia que sea posible á girar en la rodaja, pues si girase de este modo el movimiento que adquiriese destruiría en breve la firmeza del ajuste.

Hay buges cuadrados y buges triangulares. Los de Mr. Brunel estan formados como una flor de trebol, con tres círculos, cuyos centros estan á igual distancia.

LECCION DÉCIMA.

Del torno y de las ruedas dentadas.

Un cilindro (fig. 146) ABCD y una rueda EF que tienen el mismo eje, sujetos ambos de modo que cuando dá vueltas la rueda tambien las dá él, descansa en las estremidades M,N del eje que dan vueltas en las muescas de dos apoyos, y tiene enrollada y atada una cuerda en que obra la resistencia R. La potencia está aplicada á la rueda. Todas estas piezas juntas componen el torno.

En esta máquina es fácil de averiguar la relacion que tiene la potencia con la resistencia. En efecto, el momento de la resistencia R, para que dé vueltas el tambor, ha de ser igual á esta resistencia, multiplicada por el rádio del cilindro,

El momento de la fuerza P, para que dé vueltas la rueda, ha de ser igual á la potencia P, multiplicada por el rádio de esta rueda.

Para que haya equilibrio es necesario: 1.° que estos dos momentos actúen en sentidos opuestos: 2.° que sean iguales. Por esto se dá vueltas á la rueda EF en sentido opuesto á la direccion de la resistencia ó peso R que se trata de levantar.

Propongámonos ahora determinar las cargas de los apoyos M y N en que descansan las estremidades ó gorrones del eje.

Si la potencia P pasase por el eje del cilindro, hallándose los puntos M,N en el plano de esta fuerza, se podria inmediatamente resolver P en otras dos que fuesen paralelas á ella, pasando respectivamente por M y N.

Cuando la potencia P no pasa por el eje de la rueda, la podemos concebir como en la *lec. V.*, resuelta por una fuerza AX, que no pasa por el centro de gravedad del cuerpo que ha de poner en movimiento.

Se concebirá, pues, en lugar de la potencia P: 1.° una fuerza p igual y paralela á P, y que pasa por el centro O de la rueda: 2.° dos fuerzas iguales á ½ P, dirigidas de modo que dán vueltas á la rueda en el mismo sentido, actuando en las dos estremidades de uno de sus diámetros.

Estas dos fuerzas que obran para que dé vueltas la rueda sobre su centro, sin empujarlo en ningun sentido, no empujarán por consiguiente los apoyos M y N en sentido alguno.

Las cargas P'P'' que aguantan los apoyos M,N, resultan, pues, de una fuerza p igual y paralela á P, que actúa en el centro O de la rueda en línea recta con estos apoyos.

Luego $P = P' + P''$ y $P' \times OM = P'' \times ON$, ó $P' \times MN = P \times OM$; $P \times MN = P \times ON$.

Del mismo modo se probará que con la resistencia R aguantan los apoyos MN dos cargas R'R'', tales que se verifica

$$R = R' + R'' \text{ y } R' \times IM = R'' \times IN,$$

ó $R' \times MN = R \times IM$, $R'' \times MN = R \times IN$:

siendo I el punto á donde la direccion de la resistencia R se proyecta en ángulo recto sobre el eje del cilindro.

De las igualaciones que acabamos de hallar se saca inmediatamente

$$P' = \frac{P \times OM}{MN};\ P'' = \frac{P \times ON}{MN};\ R' = \frac{R \times IM}{MN};\ R'' = \frac{R \times IN}{MN};$$

valores sencillos y fáciles de calcular.

Pasando las dos fuerzas P' y R' por un mismo punto M, y las fuerzas P'' y R'' por un mismo punto N, es fácil hallar su resultante, que es la carga total que aguantan los apoyos M, N á efecto de la potencia y la resistencia.

En el caso mas sencillo y mas comun, cuando la potencia P es paralela á la resistencia R, P′ y R′, P″ y R″ son tambien paralelas; la resultante de P′ y de R′ es P′+R′, la de P″ y R″ es P″+R″. Por manera que aguantan los apoyos la mayor carga respecto á un valor dado de la potencia y la resistencia.

Si la potencia y la resistencia no son paralelas, tampoco P′ y R, P″ y R″; y para hallar la resultante ó derivada MX′ de P′ y R′, y la NX″ de P″ y R″, nos valdrémos del paralelógramo de las fuerzas figuradas por los lados MP′, MR′, NP″, NR″.

Aplicándose siempre la potencia al plano de la rueda, la carga que aguantan los apoyos es una misma. Pero cuando la resistencia actúa al estremo de una cuerda, que se arrolla ó desarrolla sucesivamente formando una espiral sobre el cilindro del torno, obra la resistencia, ya en uno de los apoyos, ya en el otro, lo cual aumenta la carga sobre el primer apoyo para disminuir la del segundo, segun las relaciones que hemos encontrado. Así, cuando está la resistencia muy cerca de uno de los apoyos, es la carga de éste casi igual á ella, al paso que la carga del otro apoyo es casi nula. Son las mismas las cargas cuando la resistencia dista igualmente de los dos apoyos, &c.

Es, pues, necesario fabricar el torno con bastante solidez para que los apoyos aguanten la carga.

Tanto respecto al torno como á las máquinas, cuyo efecto hemos examinado anteriormente, no hemos contado con el peso de la máquina, ni con el diámetro de la cuerda, el cual hemos supuesto infinitamente pequeño. Cuando no es así, es preciso imaginarse la potencia P y la resistencia R, como aplicadas en el sentido del eje de la cuerda, y de consiguiente añadir al diámetro del cilindro y al de la rueda el rádio de la cuerda que se emplea.

Con efecto, cuando la potencia P (fig. 147) actúa en una cuerda ABP de grueso determinado, y de cuyas partes tira igualmente, siendo esta cuerda redonda, la resultante de todos los esfuerzos ejercidos en cada parte sobre cada hilo de la cuerda, ha de pasar por el centro de la misma cuerda. Puede, pues, substituirse á la fuerza P, resuelta por actuar en todos los hilos de la cuerda, la misma fuerza acumulada sobre el eje de esta cuerda. Entonces el momento de esta fuerza es igual á $(CA+Aa)\times P$, es decir, el rádio de la rueda mas el rádio de la cuerda, multiplicado por la potencia.

Si considero ahora el efecto de la cuerda IR cuando tira de uno de sus estremos una resistencia R, y el otro está arrollado en el cilindro C, se verá por las mismas razones, que el efecto de la fuerza R en este cilindro está espresado por el momento $(CI+Ii)\times R$, es decir, el rádio del cilindro, mas el de la cuerda, multiplicado por la resistencia que tira de esta cuerda.

En fin, en el caso del equilibrio de un torno que tenga CA por rádio de la rueda, CI por rádio del cilindro, Aa por rádio de la cuerda de que tira la potencia P, que actúa sobre la rueda; Ii por rádio de la cuerda de que tira la potencia R, que actúa sobre el cilindro, la condicion del equilibrio será: *el producto de la potencia por la suma de los rádios de la rueda y de la cuerda, de que tira esta potencia, ha de ser igual al de la resistencia*, por la suma de los rádios del cilindro y de la cuerda que tira de esta resistencia.

Cuando se trata de que corra grandes espacios la potencia ó la resistencia no basta formar sobre la rueda una sola hilera de vueltas de cuerda, habiendo frecuentemente dos ó tres. Es claro que á cada hilera nueva la potencia se separa sucesivamente del eje una distancia igual en cada vuelta al diámetro de la cuerda, lo cual aumenta otro tanto la distancia del centro á la direccion de la fuerza. Es preciso hacer esta correccion en el cálculo del equilibrio del torno simple, ó de un sistema cualquiera de tornos, cuando se valúa exactamente la relacion de la resistencia con la potencia.

Como no varía el grueso de las cuerdas en la posicion del centro de la rueda, respecto de la potencia y del punto del eje donde se puede concebir la resultante proyectada para actuar sobre los apoyos, tampoco la carga de estos por el grueso de las cuerdas.

Pero cuando el torno haya de ponerse en movimiento el grueso de las cuerdas añade su resistencia particular á todas las demas resistencias, la cual, segun hemos visto ya, está en razon directa de las tensiones y del cuadrado del diámetro de las cuerdas, y en razon inversa del diámetro ó del rádio, así del cilindro como de la rueda del torno. Se echa de ver por esto la importancia de fabricar para el torno cuerdas de diámetro dado, cuya fuerza sea la mayor posible.

Observemos un efecto muy notable de la potencia y de la resistencia sobre el tímpano del torno. Por la accion de la potencia P, el cilindro, ó como suele decirse el tímpano (1) del torno, procura dar vueltas en O (fig. 146), en el sentido *pp′* de esta potencia. Por la accion de la resistencia R el tímpano procura dar vueltas en I en el sentido *rr′* de esta resistencia opuesta al sentido de la potencia. Si el tímpano no está compuesto de una materia inalterable cede mas ó menos á estos dos efectos contrarios; se *tuerce*, y la torsion que esperimenta es proporcional á los momentos de la potencia y de la resistencia.

En la leccion que trata de la rosca entraremos en mas pormenores sobre el efecto de la fuerza de torsion y la figura espiral, que procura dar á las fibras rectilíneas de los tímpanos empleados en las máquinas, lo cual es de la mayor importancia para la solidéz y duracion de las piezas que se fabrican.

Efectos de la pesantéz en el torno. Cuanto digimos de los efectos del peso en las poleas se aplica fá-

(1) Nota del traductor. *El tímpano se llama tambien* abla ó cabrio, *pero los autores españoles usan mas de la primera palabra que de las otras dos. Tambien le llaman* husillo *y* tambor.

cilmente á los mismos efectos en el torno y las ruedas dentadas.

Ante todo es menester contar entre las fuerzas perdidas las que se emplean en vencer la inércia del cilindro y de la rueda: despues hay que añadir á las cargas de cada eje y de cada apoyo la carga vertical del peso de la rueda, del cilindro y de las cuerdas.

En cuanto á la cuerda que se arrolla por una punta sobre el cilindro del torno, y por la otra está asegurada á la resistencia, cuando se arrolla sobre el cilindro, su peso deja poco á poco de formar parte de la resistencia propiamente tal, y forma parte de la resistencia que opone el cilindro; todo lo cual tira á disminuir en muchos casos el valor total de la resistencia.

Para que este valor no se altere se emplea las mas veces un contrapeso pendiente al estremo de la cuerda, opuesto al de que tira la resistencia. Entonces se desarrolla contínuamente del lado del contrapeso otra tanta cuerda como la que está enrollada en el sitio en que obra la resistencia, y recíprocamente, resultando que siempre está arrollada en el cilindro la misma cantidad de cuerda. De consiguiente, la relacion de la potencia á la resistencia es la misma desde el punto en que la velocidad de los movimientos se uniforma.

La carga de los ejes y los apoyos es tanto mayor cuanto mas pesados son los cilindros y las ruedas de las máquinas de que tratamos. Luego es menester que su peso sea el menor posible para disminuir todo lo que se pueda las resistencias de las máquinas. Cuando tratemos de los rozamientos aclararemos mas este punto.

En lugar de la rueda del torno se emplea las mas veces un brazo de palanca, al cual se aplica la potencia. Cuando este brazo de palanca es recto se llama una *barra*. El manubrio es una palanca que suele ser encorvada, la cual tiene un mango á que se aplica la mano del hombre como potencia (fig. 148).

En lugar de emplear una rodaja de polea para poner en movimiento el tímpano del torno se emplean frecuentemente ruedas de clavijas y ruedas de tambor. En las de clavijas (fig. 150) suben los hombres por las clavijas, colocadas á derecha é izquierda del contorno de la rueda, como por los peldaños de una escalera. Hay movimiento cuando el esfuerzo de su peso multiplicado por la distancia del centro de la rueda á la vertical, tirada por su centro de gravedad, es mayor que el peso de la resistencia multiplicado por la distancia del eje de la rueda y del cilindro á la vertical, tirada por el centro de gravedad de la resistencia.

La ventaja de esta máquina consiste en que los hombres que suben por las clavijas estan á la mayor distancia posible de la vertical tirada por el centro de la rueda; de consiguiente, su efecto es el mayor que puede ser con una rueda dada.

Otras ruedas son anchas, huecas y tienen un camino interior por el que suben los obreros que hacen andar la máquina. Aqui se mide la relacion de la potencia á la resistencia como en el caso anterior. Este modo de aplicar la fuerza de los hombres se comprenderá mucho mejor despues de la lectura de la *lec. XI*, relativa á los planos inclinados.

En Inglaterra se hace un gran uso de los tambores, en que se aplica la potencia humana de diferentes modos. Figurémonos un tambor ó cilindro de gran diámetro, sobre cuya circunferencia esten clavados á igual distancia escaloncillos salientes, y de modo que un hombre, cuyas manos se apliquen á una barra horizontal, pueda ir subiendo cómodamente por estos escalones sin necesidad de echar pasos muy largos. Se colocan los hombres ó las mugeres empleados en mover el tambor unos al lado de otros, y todos sosteniéndose con las manos en la misma barra horizontal, mientras que moviendo los pies uniformemente se colocan alternativamente en los escalones impares para hacer dar vuelta al cilindro. Esta especie de trabajo, discurrido para ejercitar las fuerzas de los presos, se considera como uno de los mayores castigos.

Es claro que puesta en accion de este modo la fuerza de los hombres, puede emplearse en producir toda especie de efectos útiles Si se aplica la resistencia sobre la circunferencia del tímpano del tambor, la resistencia es á la potencia como la distancia del eje del tambor á la vertical tirada por el centro de gravedad de los trabajadores es al rádio del tímpano del tambor.

El cabrestante es una máquina (fig. 149) que se compone de un tímpano horizontal como el del torno, y de barras ó palancas que se introducen por una punta en las muescas trabajadas hácia las dos estremidades sobre el contorno del tímpano, mientras que los hombres hacen fuerza con las manos al otro estremo de estas barras. Aqui la potencia es á la resistencia como el rádio del tímpano, mas el rádio de la cuerda, á que está sujeta la resistencia, es á la distancia del eje al punto en que estan aplicadas las manos de los obreros.

Se usa del cabrestante á bordo de los navíos, y tambien en una especie de carros estrechos y largos que usan mucho en Francia. En estos carros el tímpano del cabrestante está colocado delante de las ruedas. Unas cuerdas arrolladas en el tímpano y sostenidas ó sujetas por una punta á la estremidad posterior del carro, van por encima de la carga. Cuando se hace fuerza con las barras ó pértigas de este cabrestante para arrollar mayor cantidad de cuerda, se obliga á esta á abrazar menor espacio y apretar la carga, de modo que no pueda aflojarse y caer por efecto de los vaivenes del carro.

El torno y el cabrestante se emplean frecuentemente en muchas operaciones de las artes. En Inglaterra en ciertos almacenes de comercio sobre el dintel de una de las ventanas altas, ó fija á un madero, hay una polea inmoble. Cuando se quieren subir ó bajar mercaderías se atan al cabo de una cuerda que pasa por la polea inmoble y viene al almacen á arrollarse en el tímpano de un torno. Este mismo torno se pone en movimiento por medio de manubrios, de ruedas, &c. Sería importante que el comercio de Francia usase mas de las máquinas simples y particularmente del torno.

La *grua* (fig. 151) es una aplicacion del torno con la que se consiguen dos objetos: subir ó bajar un peso y colocarle en un parage que no se halla en la vertical correspondiente á su posicion primitiva. Se construye un armazon que dá vueltas sobre un tímpano vertical. El estremo superior de este armazon tiene la rodaja de una polea inmoble; el inferior tiene el tímpano del torno ó cabrestante que se pone en movimiento por uno de los medios que hemos dicho antes, es decir, con barras, tambores, etc.

Si se trata por ejemplo de descargar naves y poner en tierra las mercancías que componen el cargamento, se colocan gruas en la orilla de la playa, á las que se acercan las naves; se dá vuelta al armazon de la grua hasta que el carrillo sujeto al brazo superior del armazon se halle perpendicular al punto de la nave que se vá á descargar. Se ata la mercancía al cabo de una cuerda que pasa por la polea inmoble y viene á arrollarse al cilindro del torno. En seguida se hace obrar la potencia que ha de mover este torno para subir la carga. Cuando ésta se halla á la altura que se necesita, se deja de dar vueltas al torno y se dan al armazon para que la carga quede al aplomo del suelo. Entonces se hace ceder la potencia á la resistencia, y la carga baja por su peso hasta quedar en el suelo ó en un carro que se coloca al aplomo de la carga. La mayor parte de las gruas se ponen en movimiento por la fuerza de los hombres, y algunas por la del vapor.

Hemos descrito muchas de las máquinas mas notables de este género en la 3.ª parte de nuestros viajes á la Gran Bretaña (fuerza comercial interior). Igualmente hemos dado muchas esplicaciones con dibujos geométricos de diferentes gruas, cuyas partes son todas de hierro, lo cual las hace menos voluminosas y mas duraderas.

La buena fabricacion de las gruas pide conocimientos estensos en la geometría y mecánica para dar á las diferentes partes de estas máquinas las formas y proporciones mas convenientes para que los movimientos se efectúen con exactitud y suavidad. Es indispensable que las partes movibles de la grua sean ligeras, con la solidez que es necesaria porque la fuerza de inercia de estas partes, que son muy pesadas, ocasiona una pérdida de fuerza que es muy útil economizar. Los principios que ya hemos espuesto y los que se hallan en la continuacion de este tomo, tienen las aplicaciones mas útiles á la fabricacion de las gruas, y generalmente á todas las máquinas que se reducen al torno.

La cabria es tambien una máquina que se reduce al torno. Con efecto, se compone de un tímpano horizontal, colocado cerca de la base de un triángulo, formado por un travesaño horizontal, y por dos vigas ó piernas oblícuas. En la parte superior en que se reunen las dos piernas está fija una polea. En fin, el triángulo que acabamos de describir descansa en tierra por la base y le sostiene por el vértice otra pierna inclinada en sentido opuesto á las dos primeras. Cuando se trata de subir un peso se pone la cabria de modo que este peso se halle entre las tres piernas de la máquina. Una cuerda que pasa por el carrillo sirve para atar á uno de sus cabos el peso, y por el otro se arrolla en el tímpano del torno, el cual se pone en movimiento por medio de barras ó de palancas. En lo que mas se usa la cabria es en las maniobras de artillería. Puede verse el dibujo en la *Geometría, leccion IV.*

Cuando el cabrestante (fig. 153) tiene el eje vertical, la palanca ó palancas que se emplean para ponerle en movimiento son horizontales.

El equilibrio subsiste en la cabria y el cabrestante siempre que la potencia multiplicada por la longitud del brazo de palanca, á cuyo estremo está aplicada, sea igual á la resistencia multiplicada por el rádio del cilindro, mas el rádio de la cuerda que está atada á la resistencia.

Si hay muchas palancas y muchas potencias aplicadas á cada palanca, es menester multiplicar cada potencia por la longitud de su brazo de palanca, y tomar la suma de todos estos productos. Esta suma es igual al momento de la resistencia.

El efecto del peso de la máquina en los apoyos no es el mismo en la cabria y el cabrestante. En este el tímpano es vertical, la potencia y la resistencia estan en direccion horizontal, y producen en los apoyos una carga horizontal. El peso del tímpano y de las palancas del cabrestante produce una presion vertical, no en el contorno circular destinado á recibir los gorrones del tímpano, sino en una base colocada debajo del tímpano y en la direccion del eje. Esta base comunmente es hueca como un casquete de esfera.

Se echa de ver en el cabrestante que la carga horizontal sostenida por los dos apoyos no puede provenir sino de los efectos de la potencia y de la resistencia, pues el peso de la máquina no tiene influencia alguna.

Se emplea frecuentemente el cabrestante para arrastrar pesos horizontales. Estos pesos se hacen correr sobre rodillos cilíndricos de madera ó de hierro, algunas veces sobre rodajas, ó aun sobre esferas que corren por canales abiertos al intento. Este último medio se practicó para transportar la enorme roca de granito sobre la que se erigió la estátua de Pedro I en San Petersburgo.

Las artes militares, y particularmente la artillería, se sirven tambien del cabrestante en varias maniobras en los arsenales, asi como en campaña y en los sitios.

Particularmente á bordo de los navíos es donde se hace un uso importante para las maniobras. El gran cabrestante de los navíos (fig. 152) tiene un tímpano vertical que atraviesa dos puentes y que descansa sobre una base, que ya hemos dicho que es hueca como un casquete de esfera, asegurado en el contrapuente. Este tímpano tiene en uno de los entrepuentes una pieza cónica que se asemeja á una campana. Alrededor de esta campana se dan cierto número de vueltas á la cuerda que sirve para tirar de la resistencia. Es necesario esplicar el efecto de esta forma cónica.

Hemos dicho que las líneas espirales trazadas sobre

la superficie de un cilindro, son las líneas mas cortas que pueden trazarse de un punto á otro en estas superficies. De consiguiente, las fuerzas aplicadas á las dos estremidades de una cuerda arrollada en hélice alrededor de un cilindro, segun la direccion de esta hélice, mantendrán la cuerda segun la direccion misma de esta hélice. En esta posicion, debiendo actuar tangencialmente las dos fuerzas á la hélice, son oblicuas respecto á las aristas del cilindro, ó respecto al eje. Pero en la definicion del torno y del cabrestante, segun la hemos dado, la direccion de la potencia y de la resistencia es perpendicular á la direccion de las aristas y del eje del tímpano. De consiguiente, la resistencia aplicada á la estremidad libre de una cuerda arrollada en espiral sobre el tímpano del torno ó del cabrestante, actúa segun la direccion misma de la espiral. Luego el efecto de esta fuerza es desviar la cuerda para obligarla á dejar la direccion de espiral que sigue. El efecto de la resultante es comprimir fuertemente la parte de la cuerda arrollada ya en espiral sobre el contorno del tímpano, de modo que si esta parte de la cuerda fuese compresible, la hélice se comprimiria cada vez mas, hasta que la tangente de esta hélice se hallase en la direccion de la resultante, la cual variaria de posicion.

Como en la maniobra del cabrestante se trata de hacer correr por medio de esta máquina un grande espacio á la resistencia, un espacio igual, por ejemplo, á la longitud de un cable de muchos centenares de brazas, se vé que si el cable se arrollase inmediatamente sobre la campana del cabrestante, seria preciso que diese un considerable número de vueltas sobre sí mismo, lo cual aumentaria mucho el diámetro de la campana, disminuyendo otro tanto la eficacia de la potencia.

Este inconveniente se evita por medio de una cuerda sin fin que se llama *capon*. Esta cuerda tiene de trecho en trecho varios nudos que sirven de asidero á ella para atar el cable de que se tira. El capon da cinco ó seis vueltas en espiral sobre la campana del cabrestante. A medida que se dá vuelta al cabrestante, se arrolla el capon en la campana por la parte de abajo y se desarrolla por la parte de arriba. Si la campana fuese cilíndrica, continuando este movimiento, el capon llegaria pronto á lo mas bajo de la campana, y entonces se enredaría entre la campana y la superficie del puente del navío, ó se volvería á arrollar en sentido contrario formando otra hilera de cuerdas aplicada sobre la primera. Pero si atendemos que la campana del cabrestante es de figura cónica, mas ancha por abajo, y á que segun veremos al tratar del plano inclinado, la resolucion de las fuerzas produce el efecto de que cuanto mayor es la tension del capon por la accion de la resistencia, mayor es la presion de esta cuerda para sostener la parte del capon arrollada en hélice. Esta presion llega á ser la suficiente para que de cuando en cuando las vueltas de espiral vayan subiendo hácia arriba.

Este último efecto se produce tambien porque la campana del cabrestante en lugar de ser exactamente un cono, lo cual no daria mayor facilidad en un momento que en otro para levantar la cuerda, es una superficie de revolucion, cóncava en su parte intermedia como la superficie de una campana, y de aquí saca su denominacion de campana de cabrestante. A medida que la cuerda se arrolla en esta campana, y va bajando, se encuentra sobre una parte cónica mas ancha, y, como veremos al tratar de los planos inclinados, esta oblicuidad da otra tanta energía á la tension de la cuerda para sostener todas las vueltas de espiral formadas sobre la campana y transportarlas hácia la parte superior del cabrestante. Por medio de esta ingeniosa disposicion se evita el inconveniente que hemos notado.

Por último, si á pesar de la forma de la campana, se enredase el capon bajando hasta lo último de dicha campana, encontraría unas rodajas salientes *r,r*, cuyo eje está fijo en la misma circunferencia á la base de las

campanas. Estas rodajas forman un plano inclinado I,I, que empuja al capon y le obliga á subir.

Supongamos ahora que hay varios tornos ó cabrestantes ABC, A′B′C′, A″B″C″ &c., (fig. 154 y 156) colocados de tal modo que actuando la potencia P en la cuerda del primer torno, la BA′ se arrolla por un estremo sobre el cilindro del primero, por el otro sobre la rueda del segundo; la cuerda B′A″ sobre el cilindro del segundo y sobre la rueda del tercero, y así sucesivamente; en fin, sean R,R′,R″.... las tensiones que esperimentan estas diferentes cuerdas: R,R′,R″, han de mirarse sucesivamente como potencia de segundo, de tercero, de cuarto torno.

Se tendrán, pues, las proporciones siguientes, que espresarán el estado de equilibrio.

$$P : R :: CB : CA; \quad \frac{P}{R} = \frac{CB}{CA}$$

$$R : R' :: C'B' : C'A'; \quad \frac{R}{R'} = \frac{C'B'}{C'A'}$$

$$R' : R'' :: C''B'' : C''A''; \quad \frac{R'}{R''} = \frac{C''B''}{C''A''}$$

Multiplicando á un mismo tiempo por una parte todos los primeros miembros de estas igualaciones, y por otra todos los segundos, se tendrá, pues,

$$\frac{PRR'}{RR'R''} = \frac{CB\,C'B'\,C''B''}{CA\,C'A'\,C''A''}$$

Borrando los términos que se destruyen, quedará

$$\frac{P}{R} = \frac{CB\,C'B'\,C''B''}{CA\,C'A'\,C''A''}$$

Así, *en un sistema de tornos ó cabrestantes, la potencia es á la resistencia como el producto de los radios de todos los tímpanos al producto de los radios de todas las ruedas.*

Si se quiere hacer entrar en esta valuacion el diámetro de las cuerdas habrá que decir que *hay equilibrio cuando el producto de la potencia por los rádios de todas las ruedas, aumentando á cada uno el rádio de la cuerda arrollada en la rueda correspondiente, es igual al producto de la resistencia por los rádios de todos los cilindros, aumentado cada uno con el rádio de la cuerda arrollada en el correspondiente cilindro.*

Se usa con frecuencia el sistema siguiente, para comunicar un movimiento de rotacion de un eje dado á un eje paralelo. Se fija en cada eje, Cc (fig. 155), una rodaja CA, *ca*. Estas se rodean con una cuerda sin fin A*ab*B, la que no resvala por tener algunos nudos muy próximos entre sí, que entran en las cavidades abiertas en el contorno de las rodajas. Llamando P á la potencia que pone en movimiento la rueda grande, y que actúa al estremo del brazo de palanca CD, tendremos que CD×P será el momento de la potencia. Si llamamos T la tension de las cuerdas tendremos, respecto á la rueda CAB,

$$P\times CD = T\times CA. \text{ Luego } T = P.\frac{CD}{CA}.$$

Llamando R la resistencia que actúa al estremo de un brazo *cd*, tendremos inmediatamente la condicion de equilibrio

$$R\times cd = T\times ca. \text{ Luego } T = R.\frac{cd}{ca}.$$

Pero la tension de T que ejerce la potencia es la misma que la tension T, que ejerce la resistencia.

Por consiguiente $P.\frac{CD}{CA} = R.\frac{cd}{ca}$.

Si suponemos CD = *cd*, resulta P. *ca* = R. CA; condicion de equilibrio sumamente sencilla.

En el caso de movimiento, supongamos que el brazo CD, donde se halla aplicada la potencia P, emplea

un tiempo *t* en dar una vuelta, y veamos cuántas dará el brazo *cd*, donde se halla aplicada la resistencia R, durante este tiempo.

A cada vuelta de CD da la rueda AB una entera, y cada punto A de la cuerda sin fin, anda una longitud igual á la circunferencia de esta rueda. Pero cada punto de la rueda pequeña se mueve con tanta velocidad como la cuerda sin fin, dado que la cuerda no se escurra jamás. Luego el punto *a* corre en el tiempo *t* sobre la rueda *abe* una longitud igual á la circunferencia ABE; y como la longitud de las circunferencias es proporcional á la de los rádios, la circunferencia mayor contiene á la menor *abe* tantas veces como el rádio mayor contiene el menor; y corre el punto *a* sobre la rueda pequeña un espacio igual á la circunferencia de la mayor, que dará tantas vueltas como veces contiene CA á *ca*.

Si se multiplica este número por el momento de la resistencia $= R\times cd$, se tiene

$$R\times cd.\frac{CA}{ca}\times \text{circunferencia EAB},$$ cantidad igual á $P\times CD\times$circunferencia EAB; supuesto que $P\times\frac{CD}{CA} = R\times\frac{cd}{ca}$, dá

$$P\times CD = R\times\frac{CA}{ca}.cd,$$

y de consiguiente

$$P\times CD\times \text{circunf. EAB} = R\times cd\frac{CA}{ca}\times\text{circ. EAB}.$$

Aquí se hallará todavía la igualacion que ha de subsistir siempre entre las cantidades de movimiento de la potencia y de la resistencia en el movimiento contínuo de las máquinas.

La máquina que acabo de esplicar la emplea mucho el tornero y tambien el vaciador, para repasar los cuchillos, y la hilandera en el uso con que forma el hilo.

En la rueda de la hilandera, la potencia P es el pie que actúa en un manubrio por medio de un estribo.

En los talleres en que han de producirse grandes esfuerzos se emplean comunmente correas, en lugar de la cuerda sin fin, que dá vuelta á las dos ruedas. Otras veces, en lugar de cuerdas, se emplean cadenas.

Algunas veces se hace uso de cadenas dentadas. Los eslabones de estas cadenas se reunen por medio de ejes ó pasadores salientes de uno y otro lado. Estos pasadores engranan en unas muescas, practicadas en los dos rebordes de la rueda, la cual, de consiguiente, no puede moverse independientemente de las cadenas.

Por medio de las ruedas dentadas (fig. 157) se pueden suprimir del todo estas cuerdas, estas correas, y estas cadenas, y comunicar sin intermedios el movimiento de una rueda á otra. Con efecto, comparemos las dos ruedas ABE, *abe* cuando las mueve la cuerda A*ab*B, (fig. 155), ó cuando tienen dientes que se engranan inmediatamente (fig. 157).

En uno y otro caso los puntos de ABE, *abe*, se moverán con la misma velocidad, pero ABE (fig. 157) dará vueltas de izquierda á derecha, al paso que *abe* de derecha á izquierda, mientras que las otras ruedas (figura 155) dan vueltas en el mismo sentido.

Siendo las mismas las velocidades de los puntos A y *a* (fig. 155), A dará sobre ABE una vuelta entera cuando *a* dará sobre *abe* tantas como veces contenga el rádio AC al rádio *ac*. La velocidad angular de *aeb* será pues á la de AEB como el radio CA es al rádio *ca*.

Si en lugar de seguir la cuerda sin fin la direccion de A*ab*B (fig. 155) siguiese la direccion de A*ba*B, las relaciones de las fuerzas no dejarian de ser las mismas entre la potencia, y la resistencia que la contraresta, cuando hay equilibrio. Solo habria esta diferencia en el estado de movimiento. Segun el primer método las dos

ruedas ABE*abe* darian vuelta en el mismo sentido, mientras que segun el último, en sentidos opuestos.

Con esta combinacion podemos formar un sistema compuesto, análogo al sistema de tornos (fig. 158). Fijando en el mismo eje grandes ruedas dentadas y ruedas pequeñas que se llaman rótulas (1), CA y *ca* C'A' y *c'a'* C''A'' y *c''a''*, hallaremos para la igualdad de los momentos de la potencia P y de la resistencia R, llamando R'R'' los esfuerzos que sufren los diferentes puntos de engranage.

$$\mathrm{P.CA}=\mathrm{R.}'ca$$
$$\mathrm{R.}'\mathrm{C'A'}=\mathrm{R.}c'a'$$
$$\mathrm{R.}''\mathrm{C''A''}=\mathrm{R}'''c''a''\ldots\ldots$$
$$\mathrm{P.R.}'\mathrm{R.}''\ldots\mathrm{CA,C'A',C''A''}\ldots=\mathrm{R.}'\mathrm{R.}''\mathrm{R.}'''\ldots cac'a'c''a''$$

Y borrando los multiplicadores que se destruyen

$$\mathrm{P.CA,C'A',C''A''}\ldots\ldots=\mathrm{R.}ca\,c'a'\,c''a''\ldots\ldots$$

Luego *la potencia es á la resistencia como el producto de los rádios de todos los piñones es al producto de los de todas las ruedas.*

Si se aplicase al punto de engranage de dos ruedas (fig. 158) una fuerza M en sentido del movimiento de CAE, y una fuerza N en sentido de la resistencia que esperimenta la segunda rueda *cae*, para que haya equilibrio, claro está que ambas fuerzas han de ser iguales.

---

(1) Nota del traductor. *En castellano se llama rótula á esta rueda, y asi la llaman los escritores españoles mas antiguos.* Rótula *es vocablo enteramente latino, es el diminutivo de rota; pero no se contentaban los latinos con llamar á una rueda pequeña con puntas ó dientes* rótula, *sino que decian* denticulata, rota ó rótula. *Cuando se comenzó á trasladar del francés, los traductores tropezaron con el vocablo* pignons *y tradugeron piñones, que esto es propiamente traducir, y lo demas es trasladar á un idioma los conceptos expresados en otro, cosa que algunos siglos hace que no se usa en España.*

Sea, pues, la potencia P actuando sobre AE al estremo del brazo de palanca CD, y R actuando sobre *ae* al extremo del brazo de palanca *cd*; se tendrá

$$P \times CD = M \times CO$$
$$R \times cd = M \times cO$$

Luego $P \times \frac{CD}{CO} = R \times \frac{cd}{cO}$

Segun esto, vemos: 1.° que dados CD y *cd* cuanto mas pequeña sea *c*O

tanto mayor será $\frac{P}{R} = \frac{cO}{CD} \times \frac{CA}{cO}$

2.° Que permaneciendo los mismos CD y *cd*, P y R estan en razon inversa de la relacion de los rádios CA y *ca* de las ruedas dentadas. Asi cuando la primera es doble, tripla, cuadrupla, de la segunda, la resistencia R contrabalanceada por la potencia P es igualmente doble, triple, cuadruple de esta potencia P.

Una máquina que puede referirse á la rueda dentada es la rueda de los carruages.

Todos los cuerpos de la naturaleza terminan no por superficies perfectamente unidas sino por superficies llenas de asperezas mas ó menos numerosas y mas ó menos salientes. Aun los cuerpos que nos parecen perfectamente pulimentados, mirándolos con un microscopio aparecen erizados de puntas. El efecto de estas puntas es el que determina el movimiento de las ruedas de un carruage.

Efectivamente, si la rueda fuese de un pulimento matemático, como tambien el terreno horizontal, tirando de la rueda una fuerza horizontal, ésta tocaria siempre el terreno sin esperimentar ninguna resistencia. Pero haciendo el peso que engranen las asperezas ó dientes de la rueda entre las asperezas ó dientes del terreno que queda inmóvil, la rueda dá vueltas; á cada instante una nueva resistencia hace perder á la rueda

parte de la velocidad, y en breve se detiene sino se renueva la fuerza perdida.

Yo he observado en muchos establecimientos de Inglaterra, caminos de hierro dentados sobre los que rodaban carros con ruedas dentadas. Estos caminos y estas ruedas dentadas son una imagen notable de lo que sucede entre las asperezas casi invisibles de las superficies mas ó menos unidas de las ruedas lisas y de las ruedas comunes.

Que las ruedas dentadas sean cilíndricas ó cónicas, y de consiguiente que sus ejes sean paralelos ó divergentes, la relacion de la potencia con la resistencia siempre es la de las distancias del punto en que se verifica el contacto de los dientes á los tímpanos respectivos que comunican con la potencia y la resistencia.

La fabricacion de las ruedas dentadas es una operacion del arte muy delicada que exige el uso de métodos geométricos rigorosos, los cuales se refieren á la division del círculo, (*Geometria leccion III*) á las propiedades de los cilindros (*leccion VIII*) y de los conos (*leccion IX*).

Cuando se fabrican ruedas de un diámetro considerable, la figura de los dientes es un objeto esencial que debe sujetarse á métodos geométricos. Se observa la condicion de que las ruedas den vueltas de modo que los puntos de los dientes en contacto no pueden aplicarse sino el uno contra el otro, como una rueda de carruage se aplica sobre el terreno, sin que el uno escurra ni frote sobre el otro para caminar con mas ni menos velocidad.

Tratan con mucha estension estas cuestiones algunas obras de mecánica á que nos remitimos, y entre ellas merece particular mencion el utilísimo tratado de las máquinas de Mr. Hachette.

En lugar de emplear un corto número de dientes gruesos, salientes y cortos, como se hacia en otro tiempo, vale mas multiplicar el número de dientes y hacerlos menos salientes, menos anchos y mas largos para conservarles suficiente solidez. Entonces la figura de los dientes es mucho mas fácil de trazar. Basta dar á su perfil la figura de un rectángulo, cuyos ángulos salientes se hayan hecho un poco obtusos, redondeando ligeramente las dos caras perpendiculares á la circunferencia de la rueda. La máquina va desgastando con su movimiento las partes mas salientes que no indican la teoría y se mejora por sí propia con el uso.

Así es como proceden la mayor parte de los constructores de máquinas, y aun los relojeros con las ruedas dentadas comunes: solo estas ruedas comunes están enteramente redondeadas.

Los relojeros emplean ruedas cuyos dientes tienen figuras variadas y muy diferentes. Hay algunas que están cortadas sobre el contorno de un cilindro (fig. 162). Hay ruedas que tienen los dientes puntiagudos y todos inclinados hácia el trinquete ó brazo de palanca que impide á la rueda retroceder.

Siempre que hubiese inconveniente grave ó peligro en el retroceso de un movimiento circular, hay que recurrir á este medio, á menos que no se haga uso del freno, del cual hablaremos al tratar del rozamiento en la *Leccion XIII*.

Muchas veces se emplea la combinacion siguiente: una de las ruedas dentadas se sustituye por un cilindro dentado hueco que se llama linterna (fig. 160) compuesta de varios palos colocados circularmente, cuyos ejes están igualmente separados en una circunferencia circular. Dos tablas circulares reciben en unas muescas cuadradas las puntas de estos palos escuadrados por su espiga. No siendo la linterna sino una rueda dentada, la relacion de la potencia á la resistencia se calculará por la regla general que hemos demostrado.

El *gato* (fig. 163) es una máquina en la cual el eje de la rueda dentada AB está fijo mientras que una barra recta y dentada EF se pone en movimiento por la rueda.

En el *gato simple* una cigüeña CBB′ mueve la rue-

da dentada A engranada en la barra dentada EF. En esta máquina la relacion de la potencia á la resistencia es $\frac{P}{R}=\frac{CB'}{CA}$, igualdad en la cual $\frac{CB'}{CA}$ es la relacion de los espacios corridos en un mismo tiempo por la potencia y la resistencia.

En el *gato compuesto* (fig. 164) actúa la cigüeña en un piñon, el cual engrana en una rueda. El eje de esta rueda tiene otro piñon que engrana en la barra del gato.

Llamando DD′ los rayos de la cigüeña y la rueda *dd′* los de los piñones, la condicion de equilibrio en este nuevo caso es $P\times D\times D'=R\times d\times d'$.

Así por ejemplo, si D es triple de *d* y D′ triple de *d′*, se tendrá tres veces, tres veces, P=1 vez 1 vez R, ó 9P=R. Luego una fuerza P equilibra entonces á una fuerza nueve veces mayor, mientras que con las mismas dimensiones, si la barra dentada se hubiera aplicado inmediatamente al primer piñon, la potencia P no hubiera podido equilibrar sino á una fuerza tres veces mayor. Pero es menester que la potencia P corra nueve veces mas espacio que la resistencia cuando se quiere que haya movimiento.

LECCION UNDÉCIMA.

Equilibrio sobre planos fijos; planos inclinados; caminos de hierro con sus planos inclinados.

En el equilibrio de la palanca hemos hecho entrar la consideracion de un punto fijo. En el equilibrio de la rodaja de la polea, del torno, &c., hemos considerado una línea recta ó eje fijo. Ahora vamos á examinar cuál puede ser el equilibrio de las fuerzas que obran sobre un plano fijo. Supondremos ademas este plano de un pulimento perfecto.

Para que una fuerza PC (fig. 165) impeliendo el punto material C contra un plano fijo AB, no produzca movimiento alguno, esta fuerza ha de ser perpendicular al plano.

Cuando en efecto la fuerza es perpendicular al plano fijo, como todo es simétrico en la direccion de la fuerza, y en la figura del plano considerado en todos sentidos, el punto no se halla solicitado á moverse en un sentido con preferencia á otro opuesto. De consiguiente, debe permanecer en reposo.

Si la fuerza PC es oblícua, (fig. 166) se la puede resolver en dos; la una CQ, dirigida segun el mismo plano, y la otra CP′ perpendicular á este plano; luego esta última fuerza tiene destruido su efecto por el plano; luego solo queda la fuerza CQ, la cual obrando en el sentido CA, no esperimenta resistencia alguna. De consiguiente, entonces no puede haber equilibrio.

Sea un número cualquiera de fuerzas CP,CQ,CR,... (fig. 167) impeliendo todas el punto material C contra el plano ACB. Será menester transportar estas fuerzas al estremo una de otra, sin mudar su direccion; despues cerrar con una línea recta el polígono de las fuer-

zas, y esta recta representará la resultante en magnitud y en direccion. Solo habrá equilibrio en el caso (fig. 167) en que la resultante CR′ de todas las fuerzas sea perpendicular al plano fijo. Si no hubiese equilibrio el punto material C (fig. 168) se moverá á lo largo del plano fijo; como si se hallase animado por la fuerza única C*r*, igual á la proyeccion de la resultante CR sobre el plano fijo.

En lugar de un punto material consideremos un cuerpo CEF (fig. 169) impelido contra el plano fijo por una fuerza P. Será preciso que la direccion de P pase por el punto C, si este punto es solo comun entre el plano y el cuerpo.

Supongamos en efecto que la fuerza P pase por otro punto C′ del plano fijo. Aplicando esta fuerza al punto D del cuerpo, el mas próximo al plano fijo sobre P′C′, nada impedirá á la fuerza P de impeler al punto D hasta tocar al plano, llevándose de este modo todo el cuerpo CEF; luego no habrá equilibrio.

Es preciso tambien que la fuerza PC no deje de ser perpendicular al plano fijo, para que no se resuelva en otras dos: la primera perpendicular y destruida por el plano, la segunda dirigida en el mismo sentido que el plano, y á la que nada se opondria.

Si obrasen muchas fuerzas sobre el cuerpo, su resultante pasaria por el punto C y sería perpendicular al plano fijo para que el cuerpo permaneciese en equilibrio.

Supongamos ahora que el cuerpo toque al plano fijo por dos puntos A,B, (fig. 170). Será preciso que la resultante de todas las fuerzas que solicitan el cuerpo pueda resolverse en otras dos que pasen por estos dos puntos.

En efecto, sea R*r* en proyeccion vertical (fig. 170) la resultante de todas las fuerzas; sea en proyeccion horizontal A*h*,B*h*,*rh*, la posicion de los dos puntos fijos A,B, y del punto *r*, en que la resultante encuentra al plano fijo.

Se podria primeramente tirar por B*h*, y *rh*, una recta Bh,rh,Ch, y resolver la fuerza Rr en dos fuerzas paralelas á Rr: la una P aplicada á B, la otra Q aplicada á un punto cualquiera C de BrC. Siendo la fuerza P perpendicular al plano fijo y pasando por un punto B en donde el cuerpo toca al plano, no puede alterar el equilibrio del plano. Quedaria, pues, la fuerza Q que haria dar vuelta al cuerpo, si el punto C no fuese comun á este cuerpo y al plano fijo, á menos que C no se hallase *entre* A y B. En efecto, si el punto C se hallase mas allá de A ó de B, procuraria hacer caer el cuerpo de este lado.

Póngase sobre un plano fijo un cuerpo apoyado en tres puntos A,B,C, (fig. **171**). Unamos los puntos A,B,C con las rectas AB,BC,CA. Para que el cuerpo solicitado por una fuerza cualquiera PG se mantenga en equilibrio, será preciso: **1.°** que esta fuerza sea perpendicular al plano fijo; **2.°** que el punto donde encuentra al plano fijo no se halle fuera del triángulo ABC. Sin esta circunstancia nada impediria que esta fuerza hiciese caer el cuerpo hácia el lado en que se hallase.

Si el cuerpo colocado en un plano fijo tuviese en lugar de tres puntos de apoyo un número cualquiera, sería menester unir estos puntos de dos en dos por medio de rectas, de modo que se formase un polígono cerrado completamente y sin ningun ángulo entrante. Entonces las condiciones de equilibrio de este cuerpo impelido por una fuerza cualquiera, serian: **1.°** que esta fuerza fuese perpendicular al plano fijo; **2.°** que su direccion prolongada hasta el plano fijo no cayese fuera del polígono que acabamos de formar.

Estos diferentes casos de equilibrio hallan aplicaciones importantes y numerosas cuando se hace entrar el peso de los cuerpos en la comparacion y el cálculo de los elementos de las máquinas.

Todo lo que acabamos de decir de los cuerpos colocados en planos se aplica á los cuerpos colocados en superficies de cualquier figura y compuestas de partes rectas ó curvas. Es preciso que la resultante de las fuerzas

que obran sobre el cuerpo, pueda resolverse en fuerzas que pasen por los puntos de apoyo, y sean perpendiculares á la superficie fija; es preciso ademas que esta resultante no salga fuera del polígono formado sin ángulos entrantes, por las rectas tiradas de cada punto de apoyo á los otros puntos.

Pueden observarse en las artes frecuentes aplicaciones de estos principios. Para conservar en equilibrio un punzon cuando se empuja con la mano contra una superficie cualquiera, es preciso dirigirlo perpendicularmente á esta superficie para que no se escurra; es preciso ademas que la fuerza empuje el punzon en la direccion de su cabeza á su punta, pues sin esta circunstancia caeria ó se escurriria.

Cuando se empuja un cuerpo contra un plano fijo, y toca contra este plano por mas de tres puntos, hay que hacer consideraciones que dependen de la misma naturaleza de los cuerpos, para conocer las leyes segun las cuales se efectua la reparticion de las presiones ejercidas por el cuerpo en cada uno de los puntos de contacto con el plano fijo.

Hay un caso notable en que se halla inmediatamente el valor de esta presion, y es cuando formando los puntos de contacto una figura regular sobre el plano fijo, la potencia que actua sobre el cuerpo contra el plano, se dirige de modo que pasa por el centro de esta figura. Suponiendo tambien que el cuerpo sea simétrico con relacion á los planos que pasan respectivamente por los ejes de simetría del polígono ó de la figura regular, que hemos formado con los puntos de contacto, cada uno de estos puntos sostiene igual presion. De consiguiente, la presion sostenida por cada elemento de la superficie de contacto, es igual á la potencia que empuja al cuerpo contra el plano fijo, dividida por el número de estos puntos.

En las artes se hace uso de un gran número de cuerpos, puestos sobre planos fijos, con puntos dispuestos segun las reglas de simetría que acabamos de indicar.

El hombre y todos los animales que andan, apoyan el peso del cuerpo en pies simétricos, teniendo por plano de simetría el del mismo cuerpo. De consiguiente, las presiones que se ejercen sobre cada pie son iguales. En las artes se disponen tres ó cuatro puntos de apoyo á la mayor parte de los objetos usuales. Por analogía se llaman pies las partes de los cuerpos que tocan inmediatamente con la tierra, y muchas veces se les da la figura de un pie de hombre ó de animal.

El trípode, como su nombre lo indica, es un cuerpo sostenido por tres pies. Cuando la figura tiene las condiciones de simetría que hemos manifestado, la presion que sostiene cada pie contra el plano fijo, es igual á la tercera parte de la potencia que comprime el trípode perpendicularmente contra el espresado plano fijo. Las mesas, las cómodas, las camas, y otra multitud de muebles, estan sostenidos por cuatro pies, que satisfacen á las condiciones de simetría que hemos indicado. De consiguiente, cada pie de estos productos de la industria, sostiene la cuarta parte de la presion que efectúa perpendicularmente contra el plano fijo una potencia cualquiera.

Hay objetos que descansan sobre planos fijos segun líneas continuas y regulares. En caso de que el cuerpo satisfaga las condiciones de simetría que dejamos insinuadas, todos los puntos de estas líneas sostienen una misma presion; y de consiguiente, la presion que sufre cada elemento de estas líneas, está en razon inversa de su longitud total.

En las artes se hace comunmente uso de superficies de revolucion que descansan sobre un plano fijo MN, (fig. 172) tocando en este plano, siguiendo un círculo paralelo ABC. Si la potencia que comprime la superficie contra el plano, lo hace segun el mismo eje de la superficie, es evidente que todos los puntos del círculo de contacto sostienen la misma presion. No pasaremos mas adelante en la indicacion de estas aplicaciones á las artes.

Consideremos un cuerpo BCF (fig. 173), colocado sobre dos planos fijos, (1) y (2), á los que toca en B y en C. Para que este cuerpo solicitado por la fuerza AP permanezca en equilibrio, es evidentemente necesario: 1.° que esta fuerza pueda resolverse en dos, dirigidas segun las rectas PM,PN, que pasan por los dos puntos de apoyo BC; 2.° que PM sea perpendicular al plano (1), y PN al plano (2).

Verificadas estas condiciones, la fuerza PM. quedará destruida por el plano fijo (1), y la fuerza PN por el plano fijo (2), y habrá equilibrio.

En cualquier otro caso no puede verificarse el equilibrio. En efecto, la única resistencia que produce cada plano se dirige segun la perpendicular tirada en estos planos, y que pasa por los dos puntos de apoyo del cuerpo. Luego es preciso que las dos resistencias dirigidas de este modo equilibren la potencia. Pero para que tres fuerzas esten en equilibrio, es preciso ante todo que concurran en un punto. Luego en todos los casos de un cuerpo comprimido por una fuerza contra dos planos de los que cada uno le toca en un punto, es preciso que la recta segun la que obra esta fuerza y las perpendiculares levantadas de cada punto de contacto, pasen por un mismo punto. Entonces figurando un paralelógramo sobre estas tres líneas, y tomando en la primera una diagonal igual á la potencia, se conocerán las presiones que sufre cada plano.

En el caso de un cuerpo que toca tres planos en un punto, es preciso siempre que la potencia equilibre á fuerzas aplicadas á estos puntos, segun líneas perpendiculares á estos planos, las cuales representan las resistencias que esperimentan los planos. Pero no es necesario que todas las direcciones de las resistencias concurran en un mismo punto.

Consideremos el cuerpo MN (fig. 174) solicitado por las fuerzas PQ, que coinciden en A y se mantienen en equilibrio alrededor del punto de apoyo C, contra el plano fijo XY.

Supongamos que sin mudar este punto de apoyo varía infinitamente poco la posicion de CA, es decir, que se hace girar CA alrededor de C. Tirando las perpendiculares CD,CE, sobre AP,AQ, podremos considerar á DCE como una palanca encorvada. Segun lo demostrado en la palanca, veremos inmediatamente que el espacio D*d*, corrido por el punto *d*, y el espacio E*e* corrido por el punto E, cuando el cuerpo varía infinitamente poco, son recíprocamente proporcionales á las fuerzas P y Q que les corresponden, es decir, que se tiene

$$P:Q::Ee:Dd. \text{ De donde.... } P\times Dd=Q\times Ee.$$

Asi que todavia es esta una aplicacion *del principio de las velocidades virtuales.*

Hallándose todos los cuerpos animados á cada instante de la fuerza de gravedad, se ve que los cuerpos colocados en planos necesitan para permanecer en equilibrio satisfacer las condiciones que acabamos de demostrar. Suponiendo que ninguna otra fuerza solicite ó retenga un cuerpo colocado en un plano fijo para que permanezca en equilibrio, es preciso de consiguiente que este plano sea perpendicular á la direccion de la gravedad, es decir, á la vertical.

Asi es que el plano fijo debe ser horizontal para que un cuerpo se mantenga en equilibrio, cuando este cuerpo no se halla solicitado ni sujeto por ninguna otra fuerza.

Tal es la razon por la que se hace en las artes tanto uso de los planos fijos y horizontales. Los pisos de nuestras habitaciones son horizontales, para que los muebles que se coloquen en ellas permanezcan en equilibrio: para que nosotros mismos no propendamos á escurrirnos y caer de un lado con preferencia al otro. Por un motivo análogo, las mesas, los armarios, &c., presentan tambien planos horizontales.

Pasando siempre la resultante del peso de un cuerpo por su centro de gravedad, esta resultante ha de satisfacer á todas las condiciones de equilibrio que he-

mos manifestado, para que un cuerpo abandonado á su peso y colocado en un plano horizontal, permanezca en equilibrio. Asi:

1.° Cuando un cuerpo colocado en un plano no le toca mas que un punto, es preciso que la vertical tirada por este punto pase por el centro de gravedad del cuerpo.

2.° Cuando el cuerpo toca en dos puntos al plano fijo, es preciso que la vertical tirada por el centro de gravedad de este cuerpo, pase por la línea recta que reune los dos puntos de contacto entre el cuerpo y el plano fijo.

3.° Cuando el cuerpo toca en mas de dos puntos al plano fijo, es menester que la vertical tirada por el centro de gravedad de este cuerpo no toque al plano fijo en un punto que se halle fuera del polígono formado sin ángulos entrantes, por las rectas que unen unos con otros los puntos de contacto del cuerpo y del plano fijo.

Volvamos al caso de un cuerpo sostenido por un solo punto y en equilibrio. Es fácil ver que todo cuerpo esférico ABC (fig. 175), y de una materia homogénea, goza de esta propiedad, á saber, que colocado en un plano horizontal, se halla necesariamente en equilibrio. En efecto, el centro de gravedad de este cuerpo se confunde con su centro de figura. Todo rádio GPC es perpendicular al plano horizontal MN que toca la esfera en este mismo punto C. Luego la recta GPC perpendicular al plano horizontal MN, es vertical. Luego la fuerza GP, equivalente al efecto del peso de este cuerpo, sobre MN cumple con todas las condiciones necesarias al equilibrio.

Consideremos un cuerpo ABC (fig. 176) formado haciendo girar una elipse alrededor de su eje mayor. Si este cuerpo se pone en un plano horizontal de modo que el eje mayor AB esté horizontal, habrá equilibrio. En efecto, el centro de gravedad G de este cuerpo (suponiéndole homogéneo) se confunde aqui lo mismo que en la esfera con el centro de figura; y la vertical PGC, tirada por el centro, pasa por el punto C en que el cuerpo toca al plano horizontal.

Asimismo habria equilibrio si se pusiese el cuerpo ABC de modo que el eje mayor AGB (fig. 177) fuese vertical; pues pasando la resultante del peso de este cuerpo por el centro G, pasaria igualmente por el punto A.

Pero entre estos dos casos de equilibrio hay una diferencia muy notable. Si mudamos algun tanto la posicion de este cuerpo (fig. 176), inmediatamente va á ponerse en movimiento para volver á la posicion de equilibrio; pero si se muda un poco de posicion (fig. 177), el cuerpo va á separarse cada vez mas y á caer.

El primer equilibrio es *estable*, el segundo es *instable* (1). Se llama *estabilidad* ó *instabilidad* la fuerza

con la cual procuran los cuerpos acercarse ó apartarse de su posicion de equilibrio cuando la han perdido.

Tratemos de medir la fuerza que restituye á su estado de equilibrio, ó que separa de él el cuerpo que consideramos.

Empecemos por la primera posicion. Supongamos que se inclina un poco el eje mayor AB (fig. 178) de modo que no sea ya el punto C sino el punto D el que toque al plano horizontal. Entonces ya no representa PGC la direccion de la resultante del peso del cuerpo, sino $P'Gd$.

Ahora bien, la fuerza $P'=P$ obra para hacer girar el cuerpo AB alrededor del punto de apoyo D, con un brazo de palanca igual á Dd; luego el momento con que el peso del cuerpo procura hacer bajar la parte GAC y subir la parte BCG, es igual á $P\times Dd$. Pero quedando el mismo el peso P del cuerpo, cuanto mas

(1) *Los resultados anteriormente espuestos nos facilitan resolver el siguiente problema.*

Colocados dos cuerpos ABC,abc, (*fig.* 180) *en el plano MN de modo que AG*,ag, *sean verticales, no tendrán mas que un equilibrio instable. Se pregunta qué condiciones han de verificarse para que ABC*,abc, *separados de su posicion de equilibrio, pero apoyados uno sobre otro en un punto D, esten en equilibrio. Supongamos para mayor sencillez, que los dos cuerpos sean exactamente iguales y se hallen igualmente inclinados; sea P su peso.*

Cada uno tocará al otro segun un plano vertical, y ejercerán uno sobre otro una misma presion $X=x$. *Sean ahora G,E,g,e, las verticales que bajan de los centros de gravedad G,g de estos cuerpos. Sean C,c los puntos de contacto de estos cuerpos con el plano MN. El momento del peso P será respecto al cuerpo BCD,* $P\times CE$, *y respecto al cuerpo* bcd, $P\times ce$. *Estos dos momentos serán iguales. Pero representando X,x la presion mutua de los dos cuerpos levantados de los dos puntos de apoyo C,c, las perpendiculares CX',cx', sobre estos cuerpos, se tendrá* $X\times CX'=x\times cx'$ *por momento resultante de esta presion.*

Es preciso, pues, en el caso de equilibrio que se tenga

$$P\times CE=X\times CX'=P\times ce=x\times cx'.$$

Si hubiese tres cuerpos en vez de dos, se resolveria el problema del mismo modo. Poniendo en equilibrio los momentos $P\times CE$ *de cada cuerpo con la presion ejercida sobre este cuerpo por los otros tres.*

Los soldados resuelven este problema de un modo práctico cuando colocan tres fusiles en pavellon. Si cada uno de estos fusiles se colocase en equilibrio en el ángulo c de la culata, no habria estabilidad; pero cruzando las bayonetas de modo que el estremo de cada arma ejerza una presion contra las otras dos, se verifica el equilibrio estable. Seria muy fácil calcular las presiones que ejercen sobre cada fusil los otros dos, para que haya equilibrio en esta posicion.

se separa este cuerpo de la posicion primitiva, mayor es dD y mayor el momento $P \times dD$; de consiguiente, mayor la energía con que el cuerpo procura volver á su posicion primitiva, y abandonándole asimismo volverá naturalmente á su posicion de equilibrio. Este equilibrio es *estable*.

Levantemos la vertical DgO hasta la recta CGP que es vertical en la posicion de equilibrio; tiremos en seguida la horizontal Gg. Tendremos $Dd = Gg$, por consiguiente $P \times Gg$ igual al momento con que el cuerpo procura recobrar su posicion primitiva. Suponiendo que el ángulo GOg sea infinitamente pequeño, se podrá mirar Gg como igual al arco descrito entre OGC, OgD del punto O como centro, y con OG por rádio.

El punto O es el que los geómetras llaman el *metacentro* del cuerpo ACB. De consiguiente, cuando el equilibrio es estable el *metacentro* está siempre encima del centro de gravedad. Para un grado constante de inclinacion de la nueva vertical OD sobre la primitiva OC, el arco Gg es proporcional al rádio; luego el momento $P \times Gg$ es tambien proporcional al rádio GO, igual á la distancia del centro de gravedad y del metacentro. Así esta distancia sirve para indicar la medida de la estabilidad de los cuerpos.

Volvamos al segundo caso. Supongamos que despues de haber puesto el cuerpo ACB sobre el estremo A de su eje mayor se haya alterado algo su estado de equilibrio, como se ve en la (fig. 179), en la cual es D el nuevo punto de contacto del cuerpo con el plano horizontal. Tirando la vertical Gd cae fuera de los puntos A y D, y se tiene por medida de la fuerza con la cual procura tirar del cuerpo el peso P, á fin de derribarlo, $P \times Dd = P \times Gg$.

Tanto en este caso como en el anterior, si el ángulo GOg es sumamente pequeño, se puede considerar Gg como un arco cuyo centro es O. Entonces para una inclinacion dada de AB, respecto á la vertical, el rádio OG es proporcional á la distancia $Gg = Dd$.

El punto O es todavía lo que hemos llamado el *metacentro*. Pero este metacentro en vez de estar encima se halla debajo del centro de gravedad. Por lo demas, su distancia al centro de gravedad es tan propia para servir de medida á la *instabilidad*, como en el caso de la (fig. 178) lo era para medir la *estabilidad* del cuerpo ACB colocado sobre el plano MN.

Si el metacentro O y el centro de gravedad G se confundiesen, sería preciso que las verticales OD y Gd se confundiesen tambien. Pero entonces la vertical que pasa por el centro de gravedad G pasaria asimismo por el punto de apoyo D, y la distancia Dd sería nula; así el momento $P \times Dd = o$. Luego no habria esfuerzo para hacer mover el cuerpo, el cual permaneceria en equilibrio.

Ultimamente, cuando el metacentro se confunde con el centro de gravedad, el equilibrio subsiste despues de haberse trastornado ó movido el cuerpo, lo mismo que antes; y el equilibrio se llama *indiferente*. Cuando el metacentro está encima del centro de gravedad, si se trastorna el estado de equilibrio del cuerpo, éste procura recobrar su primera posicion, y el equilibrio es *estable*. Cuando el metacentro está debajo del centro de gravedad, si se trastorna una vez el estado del equilibrio del cuerpo, procura éste separarse cada vez mas, y entonces el equilibrio es *instable*.

En fin, en todos estos casos la medida de la estabilidad ó la instabilidad se halla por el producto del peso del cuerpo por la distancia del centro de gravedad al metacentro, el cual es aquí el *centro* de curvatura del arco AD, trazado sobre el cuerpo, entre A y D.

Por esto las propiedades de la estabilidad de los cuerpos que oscilan en planos fijos se refieren á las de la curvatura de las superficies. (*Véase Geom. lecc. XV.*) Así como partiendo de un punto fijo es simétrica la curvatura de un cuerpo respecto á dos direcciones situadas en ángulo recto, del mismo modo la estabilidad de un cuerpo en un plano horizontal es simétrica respecto á dos direcciones situadas en ángulo recto. Una de estas direcciones pertenece á la mayor y otra á la menor estabilidad. Las estabilidades intermedias son iguales cuando se toman respecto á dos ejes horizontales que forman un mismo ángulo con la direccion de la mayor estabilidad, y formando tambien por consiguiente un mismo ángulo con la direccion de la menor estabilidad &c.

La teoría de la estabilidad de los cuerpos cuya posicion de equilibrio se trastorna algun tanto, presenta aplicaciones de suma importancia para la riqueza y la vida de los ciudadanos, y para el honor y la fuerza del estado. Cuando los bajeles guardan en la mar un equilibrio estable navegan con seguridad en beneficio de las artes ó de la defensa del pais. Al contrario, desde el punto en que este equilibrio se hace instable, el bajel tira á caer, á zozobrar y á sumergir consigo todos los marineros y soldados que le tripulan. La teoría de la estabilidad de los bajeles tiene relaciones íntimas con los principios que acabamos de esponer (1). Pero para ser completa necesita de otros principios fundados en la fuerza de los fluidos. *Véase tom. III. Fuerzas motrices.*

Despues de haber considerado el equilibrio de un cuerpo en un plano horizontal, es menester considerar

(1) *Desde 1820 estoy esponiendo todos los años estos principios en mi curso, y manifiesto cómo puede llegarse á la investigacion de las condiciones de equilibrio de los cuerpos flotantes. Pongo aquí esta advertencia porque el apreciable autor de los anales de matemáticas, al cual no era conocido este hecho, ha presentado como una simplificacion que yo habia omitido, una cosa aproximada, y que no he insertado en mi memoria sobre la estabilidad de los cuerpos flotantes.* Aplicaciones de Geometría, *en cuarto, impresas en Paris en casa de Bachelier.*

el estado de este cuerpo en un *plano inclinado*. Llámase asi todo plano que no es horizontal ni vertical.

Se mide su inclinacion por el ángulo que forma con un plano horizontal, y la *Geom. Lecc. VII* reduce facilmente la medida del ángulo de dos planos á la medida del ángulo formado por dos rectas. La primera recta está en el plano horizontal, la segunda en el plano inclinado, y las dos se tiran de un mismo punto perpendicularmente á la interseccion de los dos planos.

Representemos el plano horizontal por una horizontal MN (fig. 181), y el plano inclinado por la recta AC, que forma con MN el mismo ángulo que el plano inclinado con el plano horizontal.

Pongamos un cuerpo cualquiera X sobre CA. Si este cuerpo no se halla sujeto por alguna fuerza estraña, podrá resolverse su peso GP en dos fuerzas G*q*, G*p*, la una paralela y la otra perpendicular al plano inclinado. El efecto de esta se destruirá si la perpendicular G*p* no cae fuera del polígono que se forma reuniendo con rectas todos los puntos de contacto. Asi podremos aplicar á la fuerza G*p* todas las consideraciones que hemos espuesto sobre el equilibrio *estable*, *instable* é *indiferente* de los cuerpos apoyados en planos horizontales.

En cuanto á la fuerza G*q*, como que obra paralelamente al plano CA, no esperimenta ninguna resistencia por parte de este plano; de consiguiente, si no se halla contrariada por ninguna fuerza estraña, hará escurrir el cuerpo á lo largo del plano inclinado.

El espacio que correrá este cuerpo en el plano, es al espacio que correria en el mismo tiempo, si cayese libremente segun GP, como la fuerza G*q* que le tira paralelamente á AC, es á la fuerza GP que le tira verticalmente.

Ya se mueva el cuerpo en virtud de la fuerza G*q*, ó bien esté sujeto por una fuerza G*q'* igual y que obre en sentido contrario, es preciso, si se quiere que haya equilibrio, que la perpendicular G*p* caiga sobre el punto en que el cuerpo toca al plano inclinado AC, si no hay mas que un solo punto de contacto. Si hay muchos, es menester que la perpendicular Gp caiga en el polígono formado sin ángulos entrantes, uniendo uno con otro los puntos, en los cuales el cuerpo toca al plano inclinado. Esta teoría tiene una aplicacion muy útil en la estabilidad de los carruages asi parados como en movimiento.

Cuando un cuerpo G (fig. 182) se mantiene en equilibrio sobre un plano inclinado AC por una sola fuerza GQ paralela á este plano, es preciso resolviendo GP, peso del cuerpo, en Gp y Gq:

1.° Que la fuerza Gp que se supone que obra solo perpendicularmente á AC, mantenga en equilibrio el cuerpo G, al cual se supone sin peso. 2.° Que pasando Gq por el centro de gravedad G, se tenga,

fuerza Q: fuerza P:: Gq: GP.

Si tiramos NO perpendicular al plano horizontal MN, los triángulos ANO y PGq serán semejantes, y se tendrá AO:NO::GP:Gq=GQ, es decir: *el peso del cuerpo es á la fuerza GQ, que le equilibra, como la longitud AO del plano inclinado*, es á su altura NO.

Si la fuerza GQ (fig. 183) fuese horizontal, sería menester que la resultante Gp de GQ y de GP pasase por el punto p de contacto del cuerpo y el plano, lo cual daria la proporcion GP:GQ=Pp::MN:NO; es decir: el peso del *cuerpo es á la potencia que le equilibra como la base del plano inclinado es á su altura*. Estos teoremas de tan sencilla esplicacion, tienen un uso contínuo en la mecánica.

Concluiremos esta leccion con un estracto de nuestros *viajes á la Gran Bretaña, fuerza comercial y caminos públicos*, presentando lo mas esencial que hemos dicho sobre los *caminos con carriles de hierro* y *sobre los planos inclinados* tal como se usan en la Gran Bretaña. Estos caminos y estos planos pueden ser muy ventajosos para los establecimientos de artes.

El diseño de los caminos de carriles de hierro se presenta bajo dos puntos de vista muy diferentes: 1.° cuando todos los transportes se efectúan segun una sola direccion: 2.° cuando se efectúan igualmente en las dos direcciones opuestas.

En el primer caso, lo mas sencillo es subir verticalmente con máquinas todos los bultos que hay que transportar hasta la parte mas alta del camino inclinado, desde la cual no tienen que hacer los carros mas que bajar.

Cuando se trata solo de bajar para llevar cargamentos hasta los rios, á los canales ó á los caminos reales, cualquiera que sea la distancia, es fácil que el transporte sea muy ventajoso por medio de buenos carriles de hierro. Hé aqui lo que nosotros podríamos hacer con el mejor éxito, beneficiando ó aprovechando las maderas necesarias á la marina y á las construcciones civiles, en los sitios altos y distantes de los rios, no pudiéndose llegar sin mucho gasto por caminos ordinarios á las corrientes de agua que permiten la conduccion. Este es un objeto de la mayor importancia para nuestra fuerza naval, nuestro comercio marítimo y otros infinitos ramos de nuestra industria.

¿Cuál es la pendiente mas ventajosa para los caminos ordinarios? Aquella que permite á los carros cargados tomar un movimiento uniforme en virtud de solo el efecto de su peso. Siguiéndola un caballo que tire de una hilera de carros no necesita ejercer mas fuerza que la necesaria para vencer la inercia de las masas que transporta y los pequeños obstáculos que algunas ligeras desigualdades pudieran presentar en el camino.

El número de carros cargados de que ha de tirar un caballo, es igual al mayor número de carros vacíos que el mismo puede subir por el propio camino. Asi cuanto mas considerable sea la inclinacion del camino, menos carros bajará el caballo en cada viaje. Esto indica que hay una cierta pendiente mas ventajosa que todas las demas; y ésta es la que sin pérdida alguna emplea toda la fuerza del caballo, tanto á la subida como á la bajada. Cuanto mas pesado sea un carro cargado, menor es la inclinacion, segun la cual empieza á bajar por sí mismo, y mayor por consiguiente el número de carros vacíos que el caballo puede subir por esta inclinacion. Bajo este punto de vista, es pues ventajoso el servirse de carros grandes. Deben preferirse los que se emplean en las cercanías de Newcastle que llevan 2500 kilogramas y pesan 1500 kilogramas, á aquellos que se usan en las inmediaciones de Glasgow, no llevando mas que 600 kilogramas, y pesan 300.

La caja de estos carros es un tronco de pirámide cuadrangular, ancha y descubierta por la parte superior. La anchura y la longitud de su fondo son respectivamente 1,metro 6 y 2 metros; la longitud de la base superior es de 2,metros 8 á 3 metros. En fin, los lados inclinados al horizonte algo mas de 45º, tienen 1,metro 6 de anchura. El fondo del carro tiene una *tronera* para descargar, colocada hácia la estremidad que cae frente á las naves que han de cargarse. La tronera está cerrada por medio de dos grapas de hierro, que dan vuelta en unos goznes y vienen á parar sobre la superficie inclinada anterior del carro, en la cual encajan en un anillo. Un mismo clavo atraviesa los dos ojos de estos anillos cuando se quiere cerrar la tronera. Sacando la clavija y quitando las dos grapas de hierro, se abre la tronera por efecto de la carga que sostiene, y ésta baja por entre las cuatro ruedas.

En la parte anterior y posterior del carro hay unos ganchos para fijar á voluntad la *cuerda de tiro*. Las ruedas de hierro colado tienen de 6 á 7 decímetros de diámetro: su anchura horizontal es de 15 á 16 centímetros; y presentan un reborde que queda dentro del camino de hierro; en fin, la anchura del camino es de 14 á 15 decímetros.

Voy ahora á describir muchas particularidades de un camino de carriles muy notable, que viene á concluir á las orillas del Wear, cerca de Sunderland.

La mina de carbon de donde viene este camino dista cerca de diez kilómetros del punto de embarque. El terreno que media en toda esta longitud no tenia grandes pendientes; sin embargo, cuando se han hallado montecillos algo *empinados* se ha hecho un corte para atravesarlos. El camino concluye en la rivera escarpada del Wear, por un arrecife horizontal que se dirige al primer piso de un vasto almacen construido en la *cresta* de esta costa. Este almacen, que tiene de largo cerca de 50 metros y unos 25 ó 30 de ancho, se eleva á lo menos 40 metros sobre el nivel medio de las aguas del rio; consta de tres partes longitudinales, separadas por dos hileras de pilastras. Los tres suelos del primer piso tienen cada uno un camino de hierro, que va de un estremo á otro del almacen. Entre los apoyos de hierro de este camino hay abiertas unas ventanas equidistantes, á manera de escotillas. Los carros que llegan cargados de la mina, entran pues en el primer piso; llegan á unas mesetas circulares y giratorias, que tienen respectivamente su centro en cada uno de los tres caminos de hierro. Los carros hacen un cuarto de conversion sobre estas mesetas circulares, y despues se los conduce á brazo por los caminos longitudinales de este piso, hasta el aplomo de una de las ventanas, para hacer caer el carbon en el punto del piso bajo que se desea. Cada una de las tres partes ó galerías de este piso bajo contiene un nuevo camino de hierro, que sale del almacen y baja hasta el Wear. Dos de los tres caminos que salen del almacen, se reunen en uno, que mas abajo se reune al tercero; despues se dividen en dos y se vuelven á reunir antes de llegar á su término. Los carros cargados y conducidos hasta el principio de la bajada, pasan primero por un puente de cien metros de luz, construido sobre un profundo barranco; en seguida atraviesan una roca en la estension de cerca de 40 metros.

El puente de madera construido sobre el barranco reune la valentía á la ligereza. Es un sistema muy sencillo de troncos plantados verticalmente, con traviesas y puntales oblícuos para darles solidez. La plataforma del puente se compone de piezas longitudinales, revestidas con tablones de navíos deshechos.

Cuando un carro sube el otro baja; y se hallarian en la mitad del camino sino hubiese mas que uno, pero en este parage hay dos; y así para cruzarse los dos carros siguen un camino diferente, y depues cada uno toma el que el otro acaba de dejar.

El intervalo entre los dos caminos presenta de distancia en distancia rodillos gruesos, cuyo eje horizontal es perpendicular á la direccion del camino; y estos sostienen la cuerda que sirve para contener los carros á la bajada y tirar de ellos á la subida.

En lo mas bajo del camino llegan los carros á una esplanada, encima del sitio en que se colocan los barcos que se quieren cargar de carbon. En medio de la direccion del camino de hierro, hay en esta esplanada tres aberturas, que son las bocas de otros tantos embudos de hierro, inclinados cerca de 45 grados.

La parte inferior del embudo es móvil alrededor de un gozne que la une al fondo de la parte superior. Los rebordes de la parte móvil encajan en los de la parte fija; lo cual evita que se pierda nada de carbon hácia la izquierda y hácia la derecha. Una compuerta vertical, que se sube ó baja á arbitrio por medio de una palanca, sirve para cerrar la parte fija del embudo. A los dos lados del embudo hay dos palancas que dan en lo alto de un balcon de madera que sale hasta el aplomo de la compuerta. La cuerda que asegura cada palanca se arrolla en el cilindro de una cábria puesta en el balcon; con este cilindro se alza ó baja la parte móvil del embudo. Por este medio se coloca siempre la estremidad inferior de la parte móvil á la distancia conveniente de la escotilla por donde se carga el barco, aun cuando éste se eleve con el flujo ó se baje con el reflujo.

Planos inclinados. Se llaman asi las partes de camino cuya pendiente muy fuerte exige el auxilio de máquinas para subir ó bajar los carros. La estructura de estos carros es semejante á la de las demas partes de los caminos de hierro.

Hé aqui el mecanismo por cuyo medio he visto subir los carros por los planos inclinados de las cercanías de Newcastle, en Inglaterra.

En lo alto del plano inclinado hay un edificio pequeño, compuesto de dos paredes, colocadas una á la izquierda y otra á la derecha del camino, y cubiertas por el mismo techo. Bajo este techo está colocada sobre vigas transversales una gran rueda horizontal de madera. Esta rueda tiene una canal ó carril en que se arrolla una cuerda algo mas larga que la bajada que ha de correr el carro cargado. Debajo de esta cuerda y sobre el contorno de la rueda, se fija un freno semejante al de los molinos holandeses, y un solo hombre le mueve con una palanca. Este freno se mantiene á la altura conveniente por medio de cadenas verticales que penden de las vigas del edificio. Cuando un carro cargado llega al principio de la bajada, el hombre que le conduce halla otro carro vacío recientemente traido; desengancha la punta de la *cuerda de tiro* que habia servido para subir este último, y pasa el gancho que hay á la punta de la cuerda por la argolla de hierro puesta á la trasera del carro cargado que se quiere bajar.

Antes de concluirse estas operaciones ya ha venido del embarcadero al pie de la bajada un carro vacío; allí, hallando su conductor un carro cargado, lo desengancha para poner su caballo, y despues fija la cuerda de tiro al carro vacío, y echa á andar.

Concluidos á la vez estos preparativos, el conductor del carro cargado que debe bajar, lo suelta en la cuesta y monta gallardamente á un lado del carro, cogiendo la palanca que sirve de freno á una de las ruedas. Esta palanca tiene á su estremidad un arco de círculo de madera, del mismo rádio que la rueda, contra la cual ha de frotar cuando se quiere mitigar la velocidad del carro. Cuando el conductor llega á lo último de la bajada, da una voz para que pare: inmediatamente

el vigilante del gran freno, que está bajo el edificio, pone en movimiento este freno. En seguida se repiten las mismas operaciones con otros dos carros, uno vacío y otro cargado.

Segun los principios que acabamos de esponer, un caballo empleado en un camino de hierro debe emplear toda su fuerza para subir un número de carros que no podrá ser fraccionario. Si la situacion del terreno obliga á variar las pendientes, es preciso hacer de modo que cada pendiente sea la que conviene á cierto número de ellos. Asi los carriles han de componerse de líneas rectas, que formen un polígono rectilíneo, ó á lo menos de líneas curvas, que cada una tenga la misma inclinacion en toda su longitud. Por otra parte, solo por medio de esperimentos bien hechos pueden despues determinarse los diferentes grados de inclinacion en que se ha de caminar.

Para no perder tiempo en enganchar y desenganchar inutilmente, basta que se dé á cada parte del camino de pendiente constante la longitud necesaria para formar una parada. El número de caballos que sirvan para el transporte, ha de ser en razon inversa del número de carros vacíos que puedan subir, y del tiempo que empleen en andar el espacio de esta parada, ya al ir, ya al volver. Por este medio, el mismo número de carros andará en el mismo tiempo todas las partes del camino, y en ninguna parte tendrán que esperar los caballos ni los conductores á los que les siguen ó les preceden.

Es importante sobre todo trazar el camino con tal habilidad, que no se suba nunca para volver á bajar, á no ser que el terreno haga indispensables estas alternativas. A veces se evitan estas bajadas y subidas, formando al través de los barrancos estrechos y profundos algunas enmaderaciones hechas con valentía y ligereza, que han de mirarse como verdaderos puentes. Estas enmaderaciones tienen una superficie horizontal, por la cual pasa el carril.

Sería fácil continuar los carriles sobre puentes colgados con cadenas de hierro (1).

(1) *Mr. Stevenson propone abrir paso por los barrancos estrechos y profundos que atraviesan la direccion de los caminos de hierro que ha proyectado, por medio de un bastidor de suspension, sobre el cual se colocarán los carros. El bastidor marchará con el au-*

En los sitios en que el terreno solo presente undulaciones poco notables, se podrán, segun los casos, formar caminos horizontales ó paradas de pendientes constantes: 1.º Por medio de escavaciones ó de terraplenes bien entendidos, á fin de abreviar la longitud del camino; 2.º por medio de rodeos ó sesgos generales que satisfagan la condicion del menor gasto en la construccion del camino, para conseguir de antemano ventajas determinadas en los transportes. En este punto rigen los mismos principios, respecto á toda especie de caminos.

Una propiedad particular de los carriles destinados á conducir cargamentos siempre en la misma direccion, es que por medio de un plano inclinado se pueden subir inmediatamente á toda la altura necesaria para no tener mas que bajar al punto de llegada, siguiendo la pendiente mas económica.

Si la cantidad total de transportes es la misma á la ida que á la vuelta, no han de combinarse las pendientes á espensas de un lado para favorecer el opuesto. La única condicion que debe tratarse de verificar, es rebajar los puntos altos y suavizar todas las rampas, sin hacer por esto el camino muy largo ni dispendioso. Regularmente se hacen en ambos lados dos caminos de hierro, el uno para ir y el otro para volver.

Pasemos á la estructura de los carriles de hierro. Se distinguen dos especies, segun la figura del carril. Los *tramways*, ó *plates-ways*, *carriles planos*, se componen de platabandas de hierro colado. Encima sale un reborde á lo largo de la parte esterior del carril; debajo hay un *refuerzo* que da bastante solidez á la platabanda para que resista sin romperse el peso de las ruedas de los carruages. Los *edge-ways*, *carriles de relieve*, constan de una platabanda puesta de canto, gruesa y redondeada por la parte superior; la rueda del carro tiene una canal como la de una garrucha que encaja en la barra redondeada. Los carriles planos tienen la gran desventaja de que el rozamiento es mucho mayor por efecto de la tierra, el polvo, la arena, ó las piedrecillas que caen y se detienen en lo llano del carril. Los de relieve estan libres de tan grave inconveniente. Ademas, en igualdad de circunstancias, son capaces de sostener

xilio de poleas, á lo largo de un plano inclinado, compuesto de cadenas ó barras de hierro, puestas á lo largo de una á otra orilla del barranco.

los pesos mas considerables, y asi es que se emplean con preferencia en ciertos acarreos: especialmente se han adoptado en el país de Gales. En las cercanías de Newcastle se emplean todavía generalmente los carriles planos.

Las barras que componen los carriles de relieve son de hierro forjado, de 4 centímetros de ancho; el grueso vertical, siempre mayor que su anchura, es proporcionado á los pesos que tiene que sufrir. No solo tiene menos rozamiento el camino en relieve, sino que resiste cargas mayores que el carril plano; ya en razon de su forma, ya por estar hecho de una materia menos frágil.

Mr. Stevenson recomienda un carril de relieve que pueda sostener dos toneladas, comprendido el carro; el hierro de este camino pesaria 60 kilogramas por metro corriente de doble carril concluido. En rigor bastarian unas dimensiones menores; pero para un camino público los carriles deben ser mas sólidos que lo estrictamente necesario: asi se evitan composturas frecuentes sin aumentar el trabajo de la primera colocacion.

Segun las noticias que ha recogido Mr. Gallois, basta dar á cada barra de un carril plano $1,^{\text{metr}}20$ de longitud (1). Dos barras y sus apoyos pesan de 40 á 50 kilogramas en los carriles de relieve destinados á los carros grandes; 25 kilogramas en los carriles planos destinados al transporte que se hace con caballos con carros pequeños; y 18 kilogramas, solamente si el transporte se verifica únicamente con carros tirados por hombres.

La colocacion y consolidacion de los mismos carriles son un objeto

(1) *Esta dimension y todas las demas, varian segun la naturaleza de los sitios y la clase de los transportes: hé aqui otra noticia que debo tambien á Mr. Gallois, autor de una memoria muy interesante sobre los caminos de hierro. Las barras colocadas de canto en los caminos de relieve tienen 89 centímetros de largo y 33 milímetros de ancho: pasan por travesaños de madera ó de fundicion, empotradas ó sostenidas tambien por dados de piedra. Las barras de los carriles llanos tienen $1,^{\text{metr}}2$ de longitud, y $0,^{\text{metr}}8$ de anchura por la parte sobre la cual corre la rueda; el grueso de esta parte es $= 0,^{\text{metr}}0\,15$. El reborde tiene $0,^{\text{metr}}0\,54$ de alto y $0,^{\text{metr}}0\,1$ de grueso medio.*

muy esencial en la construccion de los caminos de hierro. Efectivamente, supongamos que á causa de malas disposiciones, ó de un defecto en las localidades, se hunden algunos apoyos no mas que 2 centímetros por el esfuerzo que hagan sobre ellos las ruedas de los carros cargados. En estas partes una barra de carril puede tomar facilmente $\frac{1}{50}$ de pendiente. Entonces para tirar del carro se necesitará el doble de la fuerza empleada cuando el camino era horizontal.

En los principios, á pesar de todas las ventajas que puede proporcionar el sistema de los carriles de hierro, quedó sin fruto real por que no se supieron vencer las dificultades de este género (1). Se perdieron sumas considerables por haber puesto por apoyos piedras blandas y deleznables, que colocadas al rapo del suelo, estaban sujetas á todas las variaciones de la temperatura y de la higrometría de la atmósfera.

Para remediar este inconveniente se ha tomado el partido de sostener los carriles con barrotes transversales de hierro *colado;* los puntos de contacto de las piezas de carril estan enclavijados en las estremidades de estos barrotes.

Parece que el uso del hierro forjado presenta muchas mas ventajas para los caminos que el hierro colado. Los carriles forjados no estan como los de hierro colado, espuestos á romperse por el choque de los carros cuando saltan por efecto de alguna piedrecilla que haya caido en el carril. Hace mas de ocho años que está sirviendo un camino de hierro forjado en la maniobra de Findall Fell, en Cumberland, donde hay tambien dos caminos de hierro colado: el primero está en mucho mejor uso, y al mismo tiempo se ha hallado mas económía en su construccion y conservacion. Los esperimentos comparativos hechos con este objeto en Escocia, han conducido al mismo resultado.

Hé aquí como calcula Mr. Stevenson en uno de sus proyectos la anchura de un camino doble de hierro.

Dos entrecarriles de $1,^{met}3$.	$2,^{met}6$.
Distancia entre los dos caminos.	$2,^{met}2$.
Márgen de cada lado para el sendero de conduccion, los arroyos, los guardaruedas, etc., $1,^{met}15$.	$2,^{met}3$.
Total.	$6,^{met}11$.

(1) *Es menester tambien confesar que la naturaleza y la solidez del suelo tienen una gran influencia en la solidez del camino.*

El interior ó terreno entre cada par de carriles, puede formarse de piedras menudas cubiertas de arena. En cuanto al sendero destinado para los conductores, se consolida según las localidades, con arena, escorias, carbon, fosil, etc.

Hay una tercera especie de caminos, cuyos carriles de hierro son del todo llanos sin ningun reborde ni moldura, y colocados en medio de una calle comun ó de un empedrado, al nivel de esta calle ó de este empedrado. Este sistema conviene particularmente á la circulacion en las calles y plazas de una ciudad donde se cruzan á cada instante, y en diversas direcciones, carruages de todas formas y de todos tamaños. Se ha hecho uso de estos carriles en la ciudad de Glasgou, en la gran rambla que conduce al estanque ó embarcadero del canal de *Forth-et-Clyde*, en el puerto *Dundas*. Subiendo esta rambla un buen caballo, puede arrastrar hasta tres toneladas, y trabajar diariamente con tonelada y media de carga.

Se ha propuesto emplear los carriles planos de que hablamos, en los grandes caminos y particularmente en las *ramblas* muy inclinadas. Este medio dispensaría de tomar caballos de refuerzo al llegar á estas *ramblas*, ó de tener que descargar en parte los carruages para subir cuestas, en las cuales caminaría un carruage tan facilmente como por un camino horizontal ordinario.

La fig. 184 (a) (b) (c) representa por menor el *molinete* colocado enfrente de los rebordes de un camino de hierro. La fig. 185 representa un camino doble de hierro con las ruedas y los ejes de dos carros. La fig. 186 representa un camino doble de hierro, al cual cruza otro camino.

LECCION DUODÉCIMA.

Del tornillo ó rosca, de la torsion, de las cuerdas, de la cuña, y demas instrumentos análogos.

Para comprender esta leccion es preciso repasar con atencion la leccion XII (*Geometría*), que trata de las líneas y de las *superficies espirales*.

Recapitulemos en pocas palabras las propiedades geométricas de estas líneas y superficies. La hélice ó espiral cilíndrica, es una curva trazada en la circunferencia de un cilindro, de modo que en todos los puntos forme el mismo ángulo con las aristas de este cilindro. Cuando el cilindro está situado de modo que sus aristas son verticales, la hélice forma en todos los puntos el mismo ángulo con la vertical, y su inclinacion es constante.

Si se supone que una recta, cuya inclinacion sea tambien constante, se mueve á lo largo de la hélice, formando siempre el mismo ángulo con esta curva, va á formar una superficie espiral. El plano tangente á esta superficie espiral está igualmente inclinado respecto á la vertical, en todos los puntos de la hélice.

Si se quiere que un cuerpo baje ó suba á lo largo de la hélice, apoyándose en la superficie espiral, se moverá como lo haria á lo largo de un plano inclinado, sobre una recta, cuya inclinacion fuese la misma de la hélice, por tener este mismo plano la inclinacion de todos los planos tangentes á la superficie espiral.

Sea AM *ob*, (fig. 187) el desenvolvimiento del cilindro sobre el cual se ha formado la *rosca* con el filete triangular (fig. 188), ó cuadrangular (fig. 189). Cada vuelta del filete se desenvuelve (fig. 187) segun una recta cuya longitud es constante, $bB = cC = dD = \ldots$

Un cuerpo pesado al que se sujetase á bajar ó subir por una de estas rectas, por ejemplo, por mM, si se hallaba en equilibrio por una potencia P horizontal, nos daria esta proporcion: *La potencia P es al peso del cuerpo, como la altura* mo *del paso de la rosca es á oM que iguala á la circunferencia del cilindro en que está trazado el filete.*

Espuestos estos preliminares, examinemos el uso que se hace de la rosca. Se la combina con la tuerca que presenta en hueco el mismo cilindro, y el mismo filete que la rosca. Unas veces se fija á esta tuerca una rueda con clavijas para hacerla dar vueltas como se verifica con la rueda de la cábria; y otras se fijan en la misma tuerca una ó muchas palancas semejantes á las barras de la cábria ó del cabrestante.

Otras veces se limitan á dejar la cabeza de la tuerca en forma cuadrada; y despues con una llave que tiene la forma de un cuadrado hueco de la misma dimension se encaja la tuerca para darle vueltas, ya en un sentido, ya en otro.

Segun hemos hecho observar, *Geom. lecc. XII*, hay roscas y tuercas vueltas á la derecha (fig. 188 y 189) y son las de mas uso, y otras á la izquierda. Una rosca vuelta en un sentido no puede entrar en una tuerca de sentido contrario.

Se forman dos sistemas de roscas y de tuercas.

1.° *Sistema de tuerca fija*. En este sistema se hace adelantar ó atrasar la rosca, dando vueltas en una tuerca que no adelanta ni atrasa. Entonces la potencia se fija en una de dos estremidades de la rosca. Esta estremidad, que regularmente es cuadrada, se llama *cabeza de la rosca.*

2.° *Sistema de rosca fija*. En este sistema la rosca tiene que dar vuelta sin adelantar ni retroceder, y la tuerca se mueve á lo largo de la rosca.

En estos dos casos, como tambien en el equilibrio del plano inclinado, al cual hemos asimilado el equilibrio de la rosca, *la potencia y la resistencia á que* *puede equilibrar, se hallan en razon inversa de los espacios corridos en el mismo tiempo por las dos fuerzas.*

Pero cuando la potencia da una vuelta completa alrededor del eje, corre una circunferencia que tiene por rádio la distancia del eje á esta potencia; y en el mismo tiempo, obrando la resistencia paralelamente al eje, anda un paso de la rosca. Luego *la potencia multiplicada por la circunferencia que corre alrededor del eje de la rosca, es igual á la resistencia multiplicada por el paso de la rosca.*

Asi cuanto menor es el paso de la rosca, y mayor el brazo de palanca, á cuyo estremo obra la potencia, con mas facilidad puede verificarse el equilibrio de una gran resistencia, con una potencia dada.

Cuando la rosca y las tuercas no se han fabricado con la mayor exactitud, queda en ciertas partes un vacío entre la rosca y la tuerca; en otras es preciso que los filetes en relieve se compriman, ó que los filetes huecos se ensanchen para que pueda verificarse el movimiento. Asi es que los instrumentos que se usan para formar las roscas, exigen una estraordinaria exactitud en sus formas y movimientos.

Hay dos especies de acciones que se ejercen sobre la rosca y su tuerca, cuando se las sujeta al esfuerzo de una potencia para vencer una resistencia.

La primera especie de accion tira á romper el filete de la rosca, por la fuerza de presion que obra paralelamente al eje; fuerza igual á la misma resistencia que produce la rosca, ya tirando ó empujando. Esta fuerza se resuelve en tantas partes como puntos de contacto pueden concebirse entre la rosca y la tuerca. La parte de la resistencia, transmitida en cada uno de estos puntos, está en razon inversa de la superficie de los filetes, apreciada perpendicularmente al eje; superficie proporcional á lo que sobresalen los filetes respecto á una misma longitud de dichos filetes. Pero lo que han de sobresalir los filetes tiene un término que no puede traspasarse sin esponerse á romperlos al menor choque. Cuando el perfil de estos filetes es un triángulo, se prefiere comunmente el triángulo cuyos tres lados son iguales. Cuando el perfil del filete es un rectángulo, se le da tanto de ancho como de grueso, es decir, se forma un cuadrado. Las dos roscas formadas de este modo se distinguen diciendo, que la primera es una *rosca de filete ó cordon triangular* (*fig.* 188), y la segunda una *rosca de filete ó cordon cuadrado* (*fig.* 189).

Cuando las roscas no tienen que resistir mas que esfuerzos moderados, ni vencer mas que resistencias moderadas, se hacen de madera. Ha de elegirse una especie de madera como el box, la haya, el peral, cuyas diferentes partes tienen entre sí la union suficiente en el sentido longitudinal. Sin embargo, estas roscas estan espuestas á que los filetes ó cordones se mellen facilmente, lo cual es un grave inconveniente á que no estan sujetas las roscas de metal.

Las roscas metálicas tienen ademas la gran ventaja de poder sufrir una resistencia dada bajo un volúmen mucho menor.

Sería dificil enumerar por menor todas las aplicaciones que se hacen de la rosca en el uso de las máquinas. Sirven particularmente para ejercer grandes presiones: tal es la rosca aplicada á la prensa del encuadernador para comprimir las hojas de los libros.

Las máquinas que en Francia llaman *verrins*, tienen tambien por objeto ejercer grandes presiones. En estas máquinas la tuerca es fija y se prolonga como un tronco de pirámide cuadrada, cuya base descansa en tierra. La rosca se pone en movimiento por medio de uno ó dos brazos de palanca. (*Véase la fig.* 190).

Siempre que se necesita tener fuertemente comprimidos uno contra otro dos cuerpos sólidos, se les atraviesa con una clavija ó clavo trabadero (fig. 191), que por un lado tiene una cabeza saliente, y por el otro cierto número de vueltas de filete de rosca. Cuando se ha introducido en el agujero preparado de antemano, la clavijita que ha de atravesar los dos cuerpos que se quieren unir, se pone una tuerca alrededor de la rosca, se aprieta esta tuerca con una llave cuadrada. Por este medio se unen en la carpintería civil y naval gran número de piezas importantes.

Hay roscas formadas de filetes elásticos ó independientes, como son ciertos resortes ó muelles de carruages, que se llaman *muelles espirales*. *Véanse las lecciones XIV y XV*.

Como la rosca puede considerarse como un cilindro dentado, se hace uso de este cilindro para comunicar movimiento á las ruedas dentadas. Tal es el sistema de la *rosca sin fin*.

Se hace uso de la rosca sin fin en un gran número de máquinas, por ejemplo, en la rueda del asador. La rosca sin fin puede combinarse con la cábria, el cabrestante, &c.

La rosca se combina con la rueda dentada por engargantamiento, segun se vé en la (fig. 192). Por este medio se comunica el movimiento de un eje bc paralelo al plano de proyeccion á otro eje representado por el punto o y perpendicular á este plano.

Sea F la fuerza aplicada al manubrio cpp', al estremo de un brazo de palanca cp; sea f la fuerza transmitida en m por la rosca sin fin á la rueda dentada cuyo rádio es igual á mo. En fin, sea R la resistencia que actúa al estremo del brazo de palanca no, tendremos

$$1.^{\circ}\ f=\frac{\text{Circunf. descr. por el manubrio}}{\text{Por el paso de la rosca.}}\times F;\quad 2.^{\circ}\ R=\frac{mo}{no}f.$$

$$\text{Luego } R=\frac{mo}{no}\times\frac{\text{Circunf. descr. por el manubrio}}{\text{Paso de la rosca.}}\times F,$$

igualdad que da ó indica la relacion de la potencia á la resistencia.

El segundo género de accion que ejercen sobre la rosca y su tuerca la potencia y la resistencia tira á producir la torsion de la rosca y la torsion de la tuerca. Para formarnos una idea exacta de esta especie de accion, consideremos un manojo de prismas iguales entre sí, como las fibras vejetales, formando un tímpano por su reunion.

Supongamos que se quiera torcer este tímpano aplicando á sus estremidades dos fuerzas Ff (fig. 193), que sean perpendiculares á la direccion de las fibras, y que tiren á dar vuelta en sentidos contrarios. Si el tímpano no es enteramente rígido (y no se conoce ninguno que tenga una rigidez perfecta) va á ceder á la accion de las dos fuerzas. Una de sus bases va á girar en el sentido de derecha á izquierda, mientras la otra girará de izquierda á derecha. Supongamos que este tímpano presenta en toda su longitud un mismo grado de resistencia. Supongamos ademas, que se han trazado diferentes secciones, formadas de planos paralelos á las bases, y á igual distancia; la primera habrá girado respecto á la segunda, el mismo ángulo que la segunda respecto á la tercera; que la tercera respecto á la cuarta, y así sucesivamente. Luego los puntos que formaban antes en cada base una fibra rectilínea, forman una espiral por efecto de las dos fuerzas, que obran en sentidos contrarios en diferentes puntos de la longitud del tímpano. Esta deformacion se llama *torsion*.

Si en lugar de ser las fibras adherentes, tienen libertad de resbalar una contra otra, ó al menos no se hallan sujetas sino por el rozamiento, entonces la torsion de un cilindro ó *manojo* formado por la reunion de estas fibras, es la que se produce en la fabricacion de las cuerdas.

Puede preguntarse cuál es la resistencia que oponen á la torsion los tímpanos que se diferencian en el diámetro, pero que son de la misma sustancia. Para resolver fácilmente esta cuestion, es preciso concebir dos cilindros sumamente delgados é iguales, es decir, cuya delgadez sea igual, que difieran de diámetro, y tengan además la misma longitud. Apliquemos tangencialmente á estos cilindros y en el plano de sus bases, fuerzas que procuren hacerlos girar en sentidos contrarios, y de consiguiente torcerlos. Para un mismo ángulo de torsion de las fibras dirigidas segun las aristas de estos cilindros, se necesitará la misma fuerza, á fin de torcer fibras del mismo volúmen. Pero el número de estas fibras es proporcional á la circunferencia de las bases. Luego 1.º para torcer los dos cilindros huecos sumamente delgados, de modo que sus fibras formen el mismo ángulo con su direccion primitiva, es preciso emplear fuerzas proporcionales á las circunferencias de las bases, y de consiguiente á los rádios de los cilindros.

Supongamos que se tiene un tímpano macizo y cilíndrico, dividido mentalmente en cilindros huecos de grueso igual y todos concéntricos; supongamos además que se comunica la misma torsion á todos estos cilindros, de modo que cada uno de sus puntos, situados en una seccion perpendicular al eje, conserve su posicion relativa. Es fácil conocer que despues de la torsion el ángulo que forman las fibras con su primitiva direccion, será proporcional á la distancia de estas fibras al eje. Por efecto de la torsion, cada fibra ejerce, para destorcerse, un esfuerzo proporcional al rádio del cilindro en que se halla, y le ejerce respecto al eje, con un brazo de palanca igual á este mismo rádio. De consiguiente, la fuerza que es preciso emplear para la torsion de cada fibra, es proporcional al cuadrado de su distancia al eje. De aquí se sigue que la fuerza total necesaria para dar á los cilindros un grado de torsion tomado por unidad, es proporcional á la suma de los momentos de inercia de su base respecto al eje; es decir, proporcional á la superficie de la base del cilindro, multiplicada por el cuadrado del rádio.

Luego si los rádios son

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Los números 1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000 indicarán la relacion de las fuerzas que pueden produ-

cir un mismo grado de torsion en los diversos cilindros de una longitud *dada* entre las fuerzas que les solicitan á la torsion.

Sean dos cilindros de diferente rádio r, R (fig. 194 y 195), solicitados á la torsion, el primero por las fuerzas iguales f, f', el segundo por las fuerzas iguales F, F′. Siendo iguales las distancias mqMQ, cuando se tenga

$$f : F :: \text{Superficie } mns \times r^2 : \text{Superf. MNS} \times R^2,$$

los ángulos de torsion mon, MON, serán iguales: o, O son los centros de las bases: luego,

$$mn : MN :: r : R.$$

Si se quisiere tomar MN′ $= mn$, y torcer el cilindro grueso de modo que se hiciese llegar á QN′ la fibra QM, formaria con su direccion primitiva MQ, el mismo ángulo que la fibra qn con la direccion primitiva mq. Sea F la fuerza necesaria para torcer el cilindro mayor segun la direccion QN′; y se tendrá

$$F : F' : MN : MN' :: R : r, \text{ de lo cual resulta } F' = F \cdot \frac{r}{R};$$

$$\text{pero } F = f \cdot \frac{\text{Superf. MNS}}{\text{Superf. } mns} \times \frac{R^2}{r^2},$$

$$\text{luego } F' = f \times \frac{\text{Superf. MNS}}{\text{Superf. } mns} \times \frac{R}{r}.$$

Si la inclinacion qn es bastante para producir la separacion ó desunion de las fibras del cilindro pequeño, la misma inclinacion QN′ dada por la fuerza F, producirá el mismo efecto sobre el cilindro: de consiguiente *las fuerzas fF que producen la rotura de los cilindros de diferente diámetro, son proporcionales á la superficie de las bases multiplicada por el rádio de estas bases*: resultado sumamente sencillo.

Por medio de las proporciones que acabamos de indicar, será fácil, conocida la resistencia de que es capaz un tímpano de una dimension determinada calcular la resistencia que ofrecerá un tímpano de la misma naturaleza, pero de diferentes dimensiones. Se comprende tambien cuán importantes son estos resultados para determinar las dimensiones que han de tener los tímpanos de las máquinas; por ejemplo, los de la cábria y del cabrestante, los tímpanos que se emplean en comunicar la fuerza de las máquinas hidráulicas de las de vapor, &c.

La fuerza de torsion de las maderas varía segun el estado de la atmósfera, y la naturaleza de cada especie de árboles. Cuando el tiempo es mas húmedo, las maderas resisten mas á la torsion, y al contrario, cuando el tiempo es seco, ceden con mas facilidad á las fuerzas que las solicitan á torcerse. Este resultado que parece opuesto á las ideas comunmente recibidas se halla demostrado por numerosos esperimentos que he hecho acerca de la torsion de las maderas, y que no puedo reproducir aquí.

Torsion de las cuerdas. Ahora podemos dar una de las aplicaciones mas importantes que presentan las propiedades de las espirales.

Segun lo espuesto en la *leccion XII de Geometría*, se ha visto que cada uno de los hilos de que se compone una cuerda, se dobla formando una espiral por efecto de la torsion, y que todas estas espirales tienen por eje comun el mismo eje de la cuerda, es decir, la línea que se halla á igual distancia de todos los puntos de la circunferencia de la cuerda, suponiéndola recta. Todos los hilos que se hallan igualmente distantes del eje, tienen una misma longitud, entre dos secciones hechas perpendicularmente al eje. Pero los hilos situados á diferentes distancias del eje, no tienen la misma longitud, y esta crece, á medida que aumenta la distancia al eje. Para formarse sobre este particular una idea exacta, sean ABCD, ABC′D′, ABC″D″ &c. (fig. 196) rectángulos de modo que con una altura AB igual á la

altura del paso comun de las otras espirales, formadas por los hilos, las longitudes AD, AD′, AD″.... representan la longitud de las circunferencias de las diferentes capas de los hilos que forman la cuerda. Si desde el punto B se tiran las oblícuas BD, BD′, BD″.... estas oblícuas representarán la longitud de las partes del hilo, que dá una vuelta completa de espiral sobre las circunferencias que pertenecen á los puntos D, D′, D″ &c. Todas estas oblícuas son desiguales, y tanto mas largas cuanto mas se apartan de la línea AB perpendicular á AD.

Si se hubiese tomado primero un manojo de hilos paralelos, y si segun el antiguo ó anterior método se hubieran torcido todos estos hilos juntos sin permitir que resbalasen unos en otros, hubiera sido preciso que el hilo del centro representado por AB se hubiese comprimido, y que el hilo de la circunferencia esterior, representado por BD se hubiese estirado: de modo que entre las dos secciones AD y BC las dos partes del hilo que eran primitivamente de la misma longitud, se hallasen reducidas á AB y BD. Para que los hilos que componen una cuerda fabricada segun el método antiguo, se mantengan en equilibrio y la cuerda conserve su forma, es necesario: 1.° que una porcion de los hilos interiores se compriman; 2.° que todos los hilos esteriores y los inmediatos á ellos se alarguen; 3.° que la resistencia á la estension se halle en equilibrio con la resistencia á la compresion.

Supongamos que se tire de una cuerda, fabricada de este modo, por fuerzas aplicadas á sus dos cabos, el efecto de estas fuerzas será actuar para alargar la cuerda: hallándose las fibras del centro comprimidas, resulta que las fuerzas aplicadas á la cuerda, procurarán hacerlas recobrar su estado primitivo; y lejos de hallar resistencia en estos hilos, se hallarán al contrario favorecidas por la compresion á que estaban sujetas: de suerte que no quedarán mas que las fibras esteriores y las inmediatas á ellas para oponerse á la estension de la cuerda.

Asi es que con el método antiguo de fabricar las cuerdas solo una parte de los hilos de cada cuerda se opone á la estension y á la rotura, y se oponen desigualmente. Por consecuencia, si no son capaces de cierto grado de tension, cuando por efecto de otras fuerzas llegan á su último grado los hilos que se hallan al esterior de la cuerda, se rompen antes de que los hilos interiores hayan llegado al punto de su mayor resistencia. Rotos los primeros hilos esteriores, debe tambien romperse la capa que se halla inmediata y mas distante del centro, y asi sucesivamente hasta lo mas interior de la cuerda.

Meditando sobre estas resistencias sucesivas se ha reconocido la ventaja que resultaria de que los hilos que componen una cuerda se hallasen estendidos con igualdad al tiempo de fabricar dicha cuerda. Por este medio todos los hilos resistirian á la vez á la tension. Se concibe que este efecto sería tanto mas eficaz cuanto mas gruesa fuese la cuerda; pues entonces sería tanto mayor la diferencia de tension entre los hilos esteriores y los interiores.

Tal es el principio segun el que han imaginado los ingleses sus nuevas máquinas para fabricar las járcias; máquinas que he sido el primero que las he dado á conocer en Francia, y que en seguida han reproducido nuestros mas hábiles ingenieros con modificaciones que les pertenecen, y que han producido resultados de gran importancia para la marina francesa.

Con las máquinas que el Sr. Baron Lair y Mr. Hubert han hecho fabricar en los puertos de Brest y de Rochefort, se hacen cuerdas ó járcias que tienen mucha mas fuerza que las antiguas; con lo cual es mucho mas ligero el aparejo de los navíos. Conservando á las cuerdas la misma fuerza, puede disminuirse el diámetro, y de consiguiente tambien las dimensiones de las poleas empleadas en la maniobra de estas cuerdas, lo cual alivia mucho la arboladura de los bajeles.

Es de desear que nuestros puertos de comercio adopten estos nuevos principios para fabricar cuerdas, pues en ellas hallarán á un mismo tiempo las ventajas de la economía y de la fuerza.

De la cuña. Se llama *cuña* un prisma triangular, que tiene un ángulo cortante EF (fig. 197), y se emplea para separar dos cuerpos ó dos partes del mismo cuerpo. Este ángulo se llama el *corte* de la cuña. La superficie ABCD, opuesta al corte se llama la *cabeza*: se da el nombre de *caras* á las dos superficies ADEF, BCEF, á la derecha é izquierda del corte.

La cuña se emplea en una infinidad de artes para cortar los cuerpos ó para hendirlos; nuestros cuchillos, tigeras, sables, hachas &c., son otras tantas cuñas empleadas en los usos de la paz y de la guerra. Tambien deben considerarse como cuñas las garlopas de carpintero, las palas, azadones &c. La cuña es pues una de las máquinas mas importantes de que podemos tratar.

Sea una cuña ABC (fig. 198), que tira á separar con la fuerza P, el punto E sujeto por una sola fuerza G, y el punto F sujeto por una sola fuerza K. Averigüemos las condiciones de equilibrio de este sistema.

Por de contado sea la que quiera la fuerza P, si las fuerzas GK no son respectivamente perpendiculares á las caras de la cuña AC, BC, los puntos E, F, se escurrirán á lo largo de las caras AC, BC, y de consiguiente se romperá el estado de equilibrio. Luego 1.° G es perpendicular á AC, y K á BC; 2.° para que las tres fuerzas P, G, K, que obran sobre una cuña ABC, puedan equilibrarse, es preciso que las tres fuerzas concurran en un mismo punto O, y que una de ellas pueda considerarse como la resultante de las otras dos.

Figurando sobre OG, OK, y OP prolongado, el paralelógramo $Onpq$, será menester tener

Fuerza P: fuerza G: fuerza K :: Op : On : $Oq=np$,

que es la condicion del equilibrio de la cuña.

Los tres lados del triángulo Onp son respectivamente perpendiculares á los tres lados del triángulo ABC; luego se tiene

Fuerza P: fuerza G: fuerza K:: AB: AC: BC.

Cuando los dos lados AC, BC de la cuña son iguales (fig. 199) es preciso que las resistencias G y K, proporcionales á estos lados, sean tambien iguales entre sí. Este caso se presenta muy comunmente en la práctica: asi, las dos caras de los cuchillos, de las hachas y de los sables, son en general simétricas. Entonces la potencia es á la resistencia, que se esperimenta para repeler cada cara, como el ancho de la cabeza de la cuña, es á la longitud de la cara.

Cuanto mas agudas son las cuñas, mas largas son sus caras, quedando lo mismo la cabeza, ó mas estrecha es la cabeza quedando las caras las mismas. Hé aquí por qué se hace equilibrio con una potencia dada á una resistencia tanto mayor cuanto mas aguda es la cuña; y para destruir una resistencia dada bastará una potencia tanto menor cuanto mas aguda sea la cuña.

Si en lugar de una sola fuerza EG, ó FK, aplicada á cada punto E, ó F, hubiese dos, la resultante de estas fuerzas es la que habia de ser perpendicular á la superficie AC, ó BC, correspondiente; sería la cosa mas fácil resolver este nuevo problema.

Juntemos los puntos de aplicacion E y F (fig. 199) de las resistencias E, G, FK por medio de una recta gEFk; proyectemos en seguida EG, FK, sobre la línea gEFk, por medio de las perpendiculares Gg, Kk. Entonces Eg y Fk, representarán las fuerzas que tiran á separar uno de otro los puntos E, F.

Cuando los lados AC, BC, son iguales (fig. 199), las resistencias EG, FK son iguales, la línea EF forma el mismo ángulo con las direcciones EG y FK; luego entonces Eg y Fk, resistencias laterales, son iguales entre sí.

Supongamos que ademas de la fuerza P (fig. 187) perpendicular al corte EF, se halla impelida la cuña por una fuerza Q paralela á este corte. La cuña se introducirá como si no esperimentase mas que la accion de la fuerza P; y se moverá en el sentido del corte como si no esperimentase mas que la accion de Q.

Hé aquí lo que indica la teoría, tratándose de cuerpos cuyas diferentes partes tuviesen una continuidad perfecta, pero en la naturaleza no tienen los cuerpos esta continuidad. Es preciso considerar sus asperezas sumamente pequeñas, y muchas veces imperceptibles á la vista, como cuñitas salientes, introducidas en la superficie.

Cuando se aprieta la cuña sobre un cuerpo mas ó menos compresible, este cuerpo cede á la presion; y la resistencia aumenta otro tanto, porque se multiplican los puntos de contacto, entre la cuña y el cuerpo.

Cuando se hace resbalar la cuña sobre un cuerpo, cada una de las asperezas de su superficie, es, como hemos dicho, una cuña particular, que procura introducirse en este cuerpo, con toda la ventaja de la potencia sobre la resistencia, que puede darse por la forma mas ó menos aguda de estas asperezas. La potencia se emplea, pues, de un modo mas ventajoso en este sistema que haciendo entrar la cuña por medio de una fuerza perpendicular á la direccion de su corte. La esperiencia demuestra el efecto de esta gran ventaja en una multitud de operaciones de las artes.

Podemos hacer palpable esta esplicacion citando una máquina en que se hallan las asperezas colocadas espresamente por la industria. Esta máquina es la *sierra*. Figurémonos una hoja metálica ABCD (fig. 202), cuyo lado CD esté cortado de modo que presente una série de ángulos iguales a, a, a &c. Empleemos alternativamente dos fuerzas iguales Q, R, para tirar y empujar la sierra sobre un cuerpo MN, mientras otra fuerza P, la cual (muchas veces no es mas que el peso de la sierra) obra en una direccion perpendicular. Esto nos dará la idea de la *cuña compuesta* de que se hace uso para serrar las maderas, los metales, y otras muchas sustancias.

Si se quisiesen dividir estas maderas ó estos metales con una hoja metálica ABCD (fig. 192) inmóvil y sobre la cual se hiciese obrar un peso sumamente considerable, por lo regular sería imposible dividir el cuerpo. Pero con una suma muy moderada de esfuerzos se consigue dividirlo con un movimiento de *va y ven* como el de la sierra.

No es indiferente la figura de los ángulos salientes, *a, a, a,* á los cuales se llama *los dientes de la sierra*, pues varía segun la naturaleza y la dureza de las sustancias.

Cuando se trata de serrar cuerpos muy duros se cuida de que los dientes sean pequeños, y de consiguiente aproximados, hallándose cada uno de ellos destinado á separar, en cada movimiento de la sierra, una parte poco considerable del cuerpo muy duro. Cuando al contrario, se trata de serrar cuerpos poco resistentes, se aumentan las dimensiones de los dientes, y muchas veces, en lugar de darles la forma de un triángulo rectilíneo, se les da una figura encorbada, segun se ve en la fig. 203.

La sierra que se emplea para dividir la piedra y el mármol (fig. 201) tiene dientes preparados artificialmente. Es meramente una lámina de acero que se tira y empuja sobre la pieza que se quiere dividir. Se suplen los dientes de la sierra con arena silícea, cuyos ángulos agudos hacen oficio de cuñas; y para serrar el granito, se sustituye á la arena el esmeril. La hoja de la sierra no necesita ser muy dura, y puede ser de hierro. Ademas puede introducirse, con mas habilidad que comunmente se hace, la arena ó el esmeril hasta el corte de la sierra.

No solo se forman cuñas dentadas de corte rectilíneo, sino otras cuyo corte es circular, y otras cuyo corte presenta curvas muy variadas.

Las sierras circulares (fig. 204) tienen la circunferencia llena de dientes semejantes, 1.° á los de la (figura 202) para serrar cuerpos muy duros: 2.° á los de la (fig. 203) para serrar cuerpos poco resistentes. La fabricacion de las sierras circulares exige mucha habilidad en el temple de los metales que se emplean; pero no tratamos ahora de esplicar esta operacion. Las sierras pequeñas circulares se hacen comunmente con una sola hoja de acero montada en un eje de hierro.

La *sierra bracera* tiene el inconveniente de todas las máquinas cuyos movimientos son alternativos. Cada vez que retrocede se pierde en la operacion el tiempo empleado en este retroceso: pero ningun instante se pierde en el movimiento de la sierra circular, la cual obra contínuamente y siempre en el mismo sentido.

Para que las sierras circulares produzcan un efecto muy ventajoso, es preciso que tengan una velocidad sumamente considerable. Entonces se observa que basta apretar muy poco contra la sierra el cuerpo que se quiere serrar para verlo dividido con una rapidez y facilidad singulares. Las sierras circulares que se usan, tienen su eje dispuesto paralelamente á la superficie horizontal de un banco, embutido en este banco; de manera que el plano de la sierra sea perpendicular al plano de dicho banco. Cuando se quieren formar reglas ó prismas cuyas caras estan todas á escuadra, se disponen las piezas de madera que se quieren cortar, de modo que una de sus caras se mueva sobre el plano del banco, mientras que otra cara se mueve tangencialmente á una guia puesta paralelamente al plano de la rueda, y á la distancia conveniente. Adelantando la pieza de madera que se quiere cortar, es evidente que el plano de la sierra traza una seccion paralela á la superficie plana que está apoyada contra la guia. Esta misma superficie despues de cortada, se aplica luego contra la guia, y sirve para formar otra nueva superficie en la pieza que se quiere cortar. Asi es como se consigue formar reglas cuadradas ó rectangulares de dimensiones dadas. Este trabajo es muy ventajoso cuando hay que cortar gran número de reglas teniendo el mismo escuadrado.

Los arsenales de la marina y de la artillería, y todos los grandes talleres de construcciones, pueden hacer un uso utilísimo de las sierras circulares que empiezan á establecerse en Francia, á donde yo he sido el primero que las ha traido de Inglaterra.

Diremos una palabra de las sierras grandes circulares que se emplean para cortar las maderas de chapear ó embutir, como la caoba. Supóngase una rueda de unos seis metros de diámetro, formada por unos rádios muy delgados en el sentido perpendicular al plano del eje, muy anchos en el sentido mismo del eje, empezando desde él, y disminuyendo de anchura al paso que se acercan á la circunferencia de la rueda. A esta circunferencia abrazan varios arcos que son unas hojas de acero dentadas, y cuya continuidad forma la sierra circular. Esta rueda grande se pone en movimiento por medio de una máquina de vapor. El trozo de caoba que ha de cortarse está sujeto en un carretoncillo cuya velocidad progresiva es proporcional á la de la rueda. A medida que esta da vueltas va penetrando en el trozo de madera del cual separa una hoja de cerca de dos milímetros de grueso. Esta hoja se dobla un poco al desprenderse, segun la forma cóncava que presenta una superficie de revolucion compuesta de hojas metálicas, ó de láminas ligeras aseguradas en los rayos de las ruedas. Asi es como se cortan hojas para chapear, de anchura algunas veces de metro y medio. La mejor sierra de este género que se ha establecido hasta ahora, se debe á Mr. Brunel que la ha construido en sus talleres de Battersea, cerca de Londres. Véanse respecto á las sierras de Inglaterra, nuestros *Viajes á la Gran Bretaña*.

Hay gran número de instrumentos que son verdaderas sierras, por ejemplo, las hoces, las guadañas, las limas &c. Para afilar las hoces y las guadañas (fig. 205 y 206) se van haciendo en su circunferencia interior ABC varias incisiones, que presentan cuñas muy aproximadas, y cuyo corte forma en todas partes el mismo ángulo con la circunferencia de la hoz ó de la guadaña. Cada tallo de paja ó de heno que se halla en con-

tacto con el instrumento, va cortándose sucesivamente á muy poca profundidad por cada uno de los dientes, formados como se ha dicho. Cuando el movimiento es muy rápido se disminuye la resistencia, de suerte que los tallos vejetales B se cortan sin romperse; al paso que para cortarlos con un movimiento perpendicular al eje, hubiera sido precisa mucha mas fuerza. Aqui es evidente la analogía entre la accion de la guadaña, de la hoz, y de la sierra circular.

Se han fabricado sables cuyo corte es dentado; y esta arma cruel que solo conviene á pueblos bárbaros, puede producir un gran efecto.

La cimitarra de los pueblos del Oriente, se pone en accion segun el sistema de la sierra circular. En vez de herir perpendicularmente al corte, el asiático mantiene el sable en la misma direccion que ha de mover la mano derecha, para llegar al objeto que quiere dividir. Cada uno de los puntos del corte adelanta y pasa sucesivamente por la herida, y de consiguiente las asperezas imperceptibles del corte obran en este caso como los dientes de una sierra. Asi se observa que las heridas causadas por la cimitarra son mucho mas anchas y profundas que las que podrian hacerse hiriendo con un solo golpe, y llevando el corte del arma perpendicular á la superficie que se trata de cortar.

Las limas y las escofinas (fig. 207 y 208) son superficies llenas de cuñitas iguales, y regularmente colocadas en quincunce, es decir, cortadas segun inclinaciones que forman un ángulo de 45 grados con el eje de la lima ó de la escofina. Cuando se hace pasar esta lima por una superficie cualquiera, cada una de las cuñas traza un surco en la superficie del cuerpo que se quiere pulimentar; la multitud de estos surcos iguales acaba presto por presentar el aspecto de continuidad que conviene al pulimento. Entonces se cuida de emplear sucesivamente limas, cuyos dientes sean cada vez menores, y cada vez mas numerosos, y hé aquí como se disminuye por grados el ancho y profundidad de los surcos abiertos en la superficie de los cuerpos que se han de pulimentar, viniendo á quedar estos surcos tan multiplicados que sus cavidades no son perceptibles á la vista, de modo que la superficie limada se nos presenta como perfectamente pulimentada.

Debe advertirse que no se ha de pasar siempre la lima en el mismo sentido, sino en diferentes direcciones, de cuyo modo se cruzan los surcos, y se quitan sus asperezas.

Las limas y escofinas, cuyos dientes no esten á iguales distancias, y no sean de idénticas dimensiones, no podrán pulimentar con igualdad en todas sus partes la superficie de un cuerpo dado. Es pues preciso procurar una exactitud geométrica en la fabricacion de las limas y escofinas, si se quiere lograr por su medio un buen pulimento.

Las cardas han de considerarse como una especie de limas ó escofinas, formadas por cuñas muy largas y paralelas. Estas cuñas están como los dientes de las limas, dispuestas en quincunce; pero no se emplean para quitar las asperezas que presenta la superficie de un cuerpo, sino que sirven para quitar filamentos segun determinadas direcciones, con el fin de penetrar en el tejido irregular que presentan estos filamentos, y dividirlos en hilos mas finos, y últimamente para llevárselos consigo por efecto de la presion.

Las cardenchas que se usan para sacar el pelo á los paños, obran tambien á manera de cuñas. Lo mismo sucede en las almohazas con que se limpian los caballos, y que constan de una porcion de láminas dentadas, dirigidas paralelamente, y puestas en movimiento por una fuerza comun. Al mismo género pertenecen los peines que empleamos en nuestros cabellos. Los rallos (fig. 209), los cepillos, las escobas, obran de un modo análogo á la sierra, como tambien los paños que se usan para frotar los muebles y para concluir de lustrar ó pulimentar las superficies.

La rastra, el rastrillo, obran tambien de un mo-

do análogo para igualar la superficie de los terrenos. No continuaré la enumeracion de los instrumentos de esta especie.

Para pulimentar los productos de la industria, se emplean cuerpos cuyas moléculas presentan naturalmente cuñas agudas y muy duras. Asi es que se aplica la piedra pomez y la piedra arenisca para pulimentar superficies. Esta última sirve particularmente para afilar los instrumentos; y las innumerables cuñas que erizan su superficie cristalizada, sirven para labrar las superficies contínuas de los instrumentos cortantes. Hay piedras de amolar en las que la superficie que ha de trabajar es plana, y otras en que es circular.

Las muelas de los molinos no sirven para aplastar los granos, sino para abrirlos y reducirlos á harina por medio de una accion análoga á la de la cuña; merced á las canales practicadas en la superficie plana de las muelas.

Despues de haber examinado las cuñas, cuya forma es prismática, debemos considerar las de forma cónica ó piramidal, como son los punzones, los clavos y un gran número de armas é instrumentos usados en las artes militares y civiles. Supongamos que se quiere introducir un punzon ó un clavo de forma cónica ó piramidal (fig. 210 y 211) en un cuerpo que resiste á esta introduccion. Si la resistencia es proporcional á lo que se separa cada parte del cuerpo penetrado y á la cantidad de puntos que se les obliga de este modo á separarse, se puede demostrar que el esfuerzo necesario para introducir el clavo y el punzon, es proporcional al momento de inercia de la parte del punzon ó del clavo, que se supone introducida; tomando este momento respecto al eje del clavo ó del punzon, considerado como una pirámide ó como una cuña.

Una multitud de instrumentos empleados en las artes, se refieren á la cuña piramidal ó cónica, el asador, la espada, la bayoneta, las agujas, los alfileres, los instrumentos del grabador, del escultor, &c. La naturaleza ha provisto á los animales de cuñas variadas en su forma y destinadas al ataque, asi como á la defensa; como son los dientes, los cuernos, las uñas, las garras &c. Nos limitamos á indicar estas innumerables aplicaciones.

Se han hecho ingeniosas combinaciones de las diferentes especies de roscas y de cuñas. Cada una de estas dos máquinas facilita el equilibrar una resistencia grande con una potencia pequeña, y combinándolas se puede conseguir el equilibrio con una potencia todavia mucho menor respecto á la resistencia.

Entre estas máquinas compuestas, unas sirven para penetrar en los cuerpos á la manera del punzon y del clavo, y otras para cortarlos. Imaginemos una cuña cónica, muy prolongada, doblemos en espiral el eje de esta cuña, y hallaremos que se ha formado la máquina conocida con el nombre de *tira-buzon* ó de *saca-trapos*, segun el destino que se le da, de penetrar en un tapon, ó en los tacos de una arma de fuego.

Para averiguar la relacion de la potencia y de la resistencia en esta especie de máquina, es preciso observar primero, que considerándola como una rosca, la potencia es á la resistencia como la circunferencia descrita por esta potencia es al paso de la rosca. Considerando despues la punta del *tira-buzon* ó *saca-trapos* como un punzon, la potencia es á la resistencia, como la longitud de esta cuña, suponiéndola recta, es á la superficie de su base, multiplicada por el cuadrado del rádio de esta base. El producto de las dos proporciones, que acabamos de hallar, es la de la potencia á la resistencia. Pero es preciso observar que el rozamiento absorve gran parte de la potencia; pero apesar de esta disminucion, la potencia queda todavía mucho mas considerable que la resistencia.

La segunda especie de combinacion de la rosca y de la cuña, es mas importante y de un uso mucho mas estenso que la primera: comprende los taladros, las barrenas, &c. (fig. 212 y 213).

Supongamos que se fija una cuña á lo largo de la arista de un cilindro, y que se comunica á este cilindro un movimiento circular. En cada instante podrá considerarse esta cuña animada por una fuerza aplicada á su corte; fuerza cuyo efecto será tanto mas considerable, cuanto mas agudo sea el ángulo de la cuña respecto al cuerpo que se trata de cortar.

Supongamos ahora que en lugar de una arista rectilínea, tengamos una arista contorneada en espiral: entonces el corte de la cuña en lugar de cortar perpendicularmente al movimiento que se le comunica, corta oblícuamente el cuerpo sobre que ha de obrar, produciendo el efecto de una cuña rectilínea, dirigida oblícuamente, á la manera de las cimitarras. Se observa aqui que la potencia se aumenta tanto mas respecto á la resistencia, cuanto mayor es el ángulo que forma la espiral de su corte con la arista del cilindro sobre que está contorneada esta espiral. Asi, cuando se quieren fabricar taladros muy fuertes, se tiene cuidado de hacer muy agudo su corte, y que al mismo tiempo forme un gran ángulo con la arista del cilindro que sirve de eje al instrumento.

Los taladros y las barrenas ofrecen vacíos considerables en el intermedio de cada paso de rosca que presenta su filete cortante. A medida que el instrumento corta el cuerpo que se trata de horadar, se desprenden partes que toman una figura espiral y que se adelantan en el vacío practicado entre las vueltas del filete. Sin embargo, debe observarse que estas partes como no ocupan mas que cierta porcion del cilindro total, cortado por el taladro ó la barrena, es preciso que se vayan comprimiendo ó alargando á medida que se cortan; y esta compresion perjudica al efecto del instrumento. A fin de que no sea muy considerable, se saca de cuando en cuando la barrena ó el taladro para separar las virutas desprendidas y se renueva la operacion con mas facilidad.

Mr. Stephen Price ha hecho una ingeniosa aplicacion de la rosca y de la cuña en la máquina llamada *tundidora*, porque sirve para tundir los paños. Esta máquina, introducida en Francia por M. M. Poupard, ha recibido notables mejoras por M. John Collier. Imagínese un corte como el de una nabaja de afeitar rodeando en espiral muy prolongada el contorno de un cilindro hueco; tangencialmente al cilindro que corre el corte de las hojas espirales se coloca una hoja fija, recta y paralela al eje de este cilindro. Debajo de esta hoja, y muy cerca, para dejar solamente paso al paño que se ha de tundir, se halla un apoyo paralelo tambien á la hoja fija, y al eje del cilindro. El paño bien estendido se halla tirado por un estremo y arrollado sobre un liston ó plegador, al paso que en el otro estremo se va desarrollando de un cilindro particular. A medida que el paño va pasando entre el apoyo y la hoja fija, encuentra con una hoja espiral que adelantándose segun su oblicuidad á lo largo de la hoja fija, corta todos los pelos salientes de la tela. Cuando una espiral ha pasado ya por casi todo el ancho del paño, otra espiral empieza á tundir de nuevo el mismo paño, cuyo movimiento ha de ser mucho mas lento que el de las hojas espirales.

LECCION DÉCIMATERCIA.

Del rozamiento en las máquinas.

Si fuesen los cuerpos de un pulimento perfecto podrian deslizarse unos sobre otros sin esperimentar la menor resistencia por efecto de su contacto. Entonces todas las relaciones tan sencillas y fáciles que hay entre las potencias y las resistencias, se verificarian sin alteracion alguna, en cada una de las especies de máquinas cuya descripcion hemos dado ya. Pero la superficie de los cuerpos está muy distante de presentar este pulimento perfecto, de que hemos formado idea, y que dejaria á los cuerpos moverse unos sobre otros, sin que las asperezas de sus superficies resistiesen para retardar este movimiento. Llámase rozamiento esta especie de resistencia.

Si se quiere, pues, encontrar el valor real del efecto de las potencias aplicadas á las máquinas, es menester saber valuar la intensidad de los rozamientos, y añadir esta nueva resistencia á todas aquellas cuyo valor relativo da á conocer la teoría.

Varios físicos y geómetras han indagado á su vez las leyes del rozamiento teórica y prácticamente. Amontons, Muschembroeck, Camus y Bossut han tratado esta cuestion; pero estaba reservado al célebre Coulomb el completar las indagaciones posibles, sobre este particular, por medio de esperimentos ingeniosísimos, y de deducciones sacadas con toda la sagacidad que se podia esperar de un talento privilegiado.

Debe aconsejarse á las personas que se propongan perfeccionar las artes, que tomen por modelo el trabajo de Coulomb sobre la teoría de las máquinas simples, con relacion al rozamiento de las partes sólidas, y rigidez de las cuerdas. Alli verán que por medio de una buena direccion dada á la reunion de esperimentos que se intentan hacer, se pueden establecer bases que hagan despues fáciles y sencillos los cálculos, que nunca podrán dar una teoría general, sin el auxilio de estos esperimentos.

Antes de examinar el efecto de dos superficies, que resbalan una sobre otra, consideremos un cuerpo puesto en un plano muy poco inclinado. Segun la teoría del plano inclinado, debería el cuerpo, por efecto de su gravedad, bajar con una velocidad acelerada, que sería respecto de la velocidad acelerada del mismo cuerpo, cayendo libremente, y segun la vertical, como la altura del plano inclinado á su longitud. Sin embargo, sucede que este cuerpo permanece en reposo. Todos los dias vemos papeles, libros, plumas, escribanías, puestas sobre un pupitre inclinado, sin que estos objetos desciendan á lo largo del plano. Es evidente que entonces la resistencia del rozamiento vence á la potencia de la gravedad. Si se inclinase mas el plano, sobre el cual estan los cuerpos en reposo, por el rozamiento se llegaría á la posicion en que los cuerpos empezasen á moverse, y entonces empezaría á vencer el peso del cuerpo á la resistencia del rozamiento.

Pudiera emplearse este medio para juzgar del grado de rozamiento que presentan las diversas especies de cuerpos cuando se les hace mover unos contra otros deduciendo de ello muchas consecuencias importantes.

Por ejemplo, para que los cuerpos empiecen á moverse sobre un plano inclinado, es menester dar á dicho plano, cuando los espresados cuerpos están colocados en él hace algun tiempo, mayor inclinacion que cuando se han colocado inmediatamente sobre un plano de un declive dado.

Por consiguiente, cuando los cuerpos permanecen cierto tiempo en un plano material, adquieren cierta adherencia que presenta mas obstáculos que vencer.

Preferimos á este método el que ha seguido Coulomb. Hé aquí su aparato.

En un banco sólido (fig. 214) estan fijos dos maderos MM, MM, paralelos y muy próximos uno á otro. Estos maderos esceden por las dos puntas á la longitud del banco. Entre las estremidades salientes de una punta hay una rodaja de polea R cuyo eje se apoya sobre los maderos. Las estremidades salientes de la otra punta, tienen una cábria horizontal TT.

Los dos maderos MM tienen una tabla ancha y gruesa PP perfectamente pulimentada, á la cual esceden en longitud como metro y medio. Sobre esta tabla PP resbalan los cuerpos cuya resistencia á moverse, causada por el rozamiento, se desea conocer. Estos cuerpos son tablas labradas en forma de platillos de un peso de brazos iguales (fig. 216), que tienen á los estremos opuestos dos ganchos CC, de los cuales uno sirve para agarrar el cabo de una cuerda que se arrolla en el tímpano de la cábria (fig. 214). El otro sirve para asir el cabo de una cuerda que pasa por la garganta de la rodaja de la polea. Esta cuerda sostiene unas veces un platillo de un peso de brazos iguales B (fig. 214) que se carga con el peso que se quiere, para hacer variar la potencia; y otras veces una palanca L (fig. 215) que obra sobre esta cuerda, por medio de un peso, como el brazo de una romana.

Para proceder con método empieza Coulomb colocando sobre el madero de prueba la rastra (fig. 216 ó 217, 218 ó 219) que debe deslizarse sobre el madero, y lo deja en reposo durante cierto tiempo.

La rastra (fig. 216) y el madero primeramente empleados son uno y otro de madera de roble. Con esta clase de madera, cuando se deja la rastra en reposo sobre el madero del esperimento por uno, dos ó tres segundos, &c., ó hasta diez, se encuentra que es necesaria una fuerza sucesivamente mayor para poner en movimiento la rastra. Pero la fuerza que se debe emplear al cabo de un minuto para empezar á mover la rastra, es decir, la fuerza de presion, se halla respecto de la fuerza de resistencia del rozamiento, en una relacion que varía solamente entre 221 : 100, y 246 : 100, aunque las presiones varíen desde 37 hasta 1230 kilog.

Para hallar el efecto que puede resultar del rozamiento de una superficie mas ó menos estensa, se han clavado debajo de la rastra dos reglas de roble TT (figura 217). Estas reglas redondeadas en forma de cilindro en la parte que toca al madero de prueba, reducen la superficie que roza á muy poco ancho: la direccion de las reglas es por otra parte paralela á la del movimiento comunicado á la rastra. Aquí no se ha podido encontrar ninguna diferencia entre las resistencias del rozamiento, cuando la rastra se ponia en movimiento inmediatamente despues de haberla colocado en el madero de prueba, ó cuando habia transcurrido algun tiempo.

Con presiones que variaban de 400 á 1300 kilog. por metro cuadrado, no ha variado la relacion de la presion con la fuerza necesaria para vencer el rozamiento sino entre 236 : 100 y 240 : 100. Esta relacion puede considerarse como casi constante. Observamos por otra parte que era visiblemente igual al límite superior de la relacion de las presiones á los rozamientos, cuando la rastra rozaba con toda la superficie de la base contra el madero de prueba. Si se toman, en uno y en otro caso, los valores medios de los diversos esperimentos, no se halla $\frac{1}{73}$ de diferencia.

Cuando las presiones son muy pequeñas, hay irregularidades bastante grandes, pero cuando las cargas son considerables, desaparecen las anomalías, y la relacion de las presiones á la resistencia del rozamiento llega á ser casi constante, cualquiera que sea la estension de la superficie en contacto.

Despues de haber examinado el rozamiento del roble sobre el roble, se hizo rozar abeto con roble, sustituyendo con reglas de abeto las de roble colocadas bajo la rastra.

Cuando se hace mover la rastra, muy poco tiempo despues de colocada sobre el madero de prueba, la resistencia del rozamiento es la menor posible, pero al cabo de diez segundos solo, es tan grande la resistencia como al cabo de una hora.

Cuando la resistencia del rozamiento ha llegado á su límite relativo, por efecto de una carga muy grande, la relacion de la presion á esta resistencia, viene á ser la de 150 : 100.

Se han fijado sobre el madero de prueba dos listones ó reglas de abeto, sobre las cuales se hace deslizar la rastra empleada en los esperimentos que acabamos de describir. Al hacer rozar así abeto con abeto se encuentra que la menor resistencia opuesta por el rozamiento, se verifica cuando se hace mover la rastra inmediatamente despues de colocada sobre el madero de prueba; pero al cabo de 10 segundos es tan fuerte la resistencia como al cabo de una hora. Aquí la relacion de las presiones á las resistencias, varía como 185 : 100 en una presion pequeña, y como 177 : 100 en una presion grande.

Por último se ha hecho rozar álamo negro con álamo negro, siempre con reglas clavadas debajo de la rastra. La madera de álamo, que al tacto, dice Coulomb, parece suave y afelpada, engrana mucho mas lentamente que las demas maderas. El aumento de rozamiento es notable por espacio de muchos segundos, y no llega al máximo con una presion de 22 kilog., sino despues de un reposo de mas de un minuto. Con una presion que el físico hizo variar desde 22 hasta 830 kilógramos, halló por relaciones de la presion á la resistencia de rozamiento, 214 : 100 y 218 : 100, relaciones de diferencia tan corta, que se las puede considerar como idénticas en todos los resultados de la práctica.

Presentemos ahora bajo un mismo punto de vista las relaciones medias deducidas de los esperimentos anteriores, entre el peso de la rastra y su carga, y la resistencia del rozamiento que resulta de este peso.

Cuando se roza

Roble con roble.	234: 100.
Roble con abeto.	150: 100.
Abeto con abeto.	178: 100.
Alamo con álamo. . . .	218: 100.

En todos los esperimentos cuyos resultados acabamos de espresar, las maderas que resbalan unas sobre otras, lo hacian en la misma direccion del hilo de la madera.

En los esperimentos subsiguientes se ha dirigido el hilo de las reglas TT, clavadas debajo de las rastras, perpendicularmente al hilo de la madera del madero de prueba (fig. 218). Entonces se ha visto que era necesario mas tiempo de reposo para que la resistencia del rozamiento llegase al máximo. Por lo demas, se ha visto que las presiones, desde 25 kilog. solamente hasta 825 no cesaban de estar en relacion casi constante con la resistencia del rozamiento; cuando roza roble con roble, poniendo en contacto al través los hilos de la madera, esta relacion es

385: 100 en las presiones cortas.
367: 100 en las presiones grandes.

En las mismas circunstancias es mas ventajoso que rozen las maderas formando ángulo recto los hilos de las piezas que se tocan, que el hacer que resbalen segun el hilo de ambas piezas.

Cuando rozan metales con madera (fig. 219), es menester que los dos cuerpos estén mas tiempo en contacto, para que la resistencia del rozamiento llegue al máximo. Es menester cuando menos cuatro ó cinco horas en vez de un minuto, que bastaria si rozasen madera con madera, para que no parezca que la resistencia se aumenta mas en cada instante. Se necesita mucho mas tiempo para que una resistencia semejante deje enteramente de aumentarse.

Despues de cuatro dias de reposo respecto á presiones que varien de 26 á 825 kilogramos, la relacion de las presiones á la resistencia del rozamiento, varía de 530: 100 á 486: 100.

El cobre dá resultados análogos respecto al tiempo en que llega al máximo la resistencia del rozamiento, y respecto á la relacion de la presion á esta resistencia, relacion que es de 500: 100.

Despues de haber hecho resbalar metales sobre madera, se clavaron en el madero de prueba (fig. 220) unas reglas de hierro, pulimentadas con el mayor esmero; y sobre estas reglas resbalaban otras de hierro, fijas debajo de la rastra.

En este caso el rozamiento presenta desde el primer momento toda la resistencia de que es capaz.

En una presion de

		Presion.	Resistencia del rozamiento.
Hierro con hierro	25 kilog.	340 :	100.
	225 kilog.	363 :	100.

Así que pueden considerarse aquí las resistencias causadas por el rozamiento casi como proporcionales á las presiones.

Lo mismo respecto del hierro que roza con el laton. *La relacion de las presiones á la resistencia del rozamiento respecto á una presion....*

Hierro contra laton.	de 25 kilog. es de. . . .	360 :	100.
	de 225 kil.	400 :	100.

Si roza el hierro con el laton, reduciendo las superficies en contacto á las menores dimensiones posibles, por ejemplo, poniendo en las reglas de hierro de la rastra cuatro clavos de cobre de cabeza redonda, clavados por debajo de la rastra, se tendrá la relacion bajo una presion.....

	Presion.	Resistencia del rozamiento.
de 43 kilog. . .	590 :	100.
de 425 id. . . .	600 :	100.

De este esperimento se deduce una observacion importante. La primera vez que se movió la rastra con clavos de cobre sobre reglas de hierro era la relacion de 500: 100. Pero al cabo de cierto número de veces, habiéndose pulimentado mas el hierro y el cobre por el rozamiento mútuo, fue esta relacion de 600: 100. Por consiguiente la resistencia del rozamiento habia disminuido. Asi las piedras, polvos y demas medios que se emplean para dar el pulimento, no suavizan ni rompen enteramente las asperezas que erizan las superficies de los cuerpos, pero estas mismas asperezas desaparecen por el uso á impulso de las grandes presiones, y rápidos movimientos de las máquinas.

En una multitud de artes se hace uso de algunos cuerpos grasos que se llaman *untos*, para disminuir la resistencia del rozamiento de dos superficies, cuando han de resbalar una sobre otra. El aceite, sebo, manteca y grasa de cualquiera especie, son las sustancias empleadas comunmente en este uso, é importa saber hasta qué punto disminuyen la resistencia estas sustancias. Coulomb se servia del unto de sebo puro.

Con esta especie de unto no llega la resistencia al máximo sino despues de mucho tiempo. Al cabo de cinco ó seis dias llega á ser esta resistencia quizá 14 veces mayor que en el primer momento, si la superficie en contacto es de consideracion con respecto á la presion; pero cuando esta superficie es de corta estension, la relacion de las presiones á las resistencias llega pronto al máximo.

En los esperimentos anteriores estaba el unto recientemente dado; en los siguientes habia servido hacia ocho dias; estaba muy terso pero menos untuoso que al principio. Se ha visto que la duracion del reposo tiene constantemente la mayor influencia en la resistencia del rozamiento; y ademas se ha observado que siendo el mismo el reposo, presenta menos resistencia este unto que el dado recientemente.

Coulomb hizo despues rozar unas reglas de cobre fijas en la rastra con reglas de hierro fijas en el madero

de prueba, y ademas untadas con una capa de sebo fresco, de dos milímetros de grueso. Entonces hubo aumento de la resistencia del rozamiento en los primeros instantes de reposo; pero al cabo de poco tiempo, llegó al máximo la resistencia del rozamiento.

Si se prescinde de la cohesion de las dos superficies en contacto, cohesion que es constante, se vé que haciendo mover inmediatamente la rastra, la resistencia que proviene del rozamiento, es proporcional á las presiones en la relacion de 100: 1,110. Llegando á ser despreciable el efecto de la cohesion por estas cargas, se nota que entonces produce el unto una gran ventaja; pues sin él, una presion de 600 kilog. no mas, produce 100 de resistencia; al paso que con el unto de sebo se necesita 1,110. kilog. de presion para producir 100 de resistencia, causada por el rozamiento. Por último, cuando las superficies están untadas de sebo, la relacion de las presiones á las resistencias del rozamiento no varía, cualquiera que sea la estension de las superficies en contacto, con tal que no sean de un tamaño muy desproporcionado á la presion. Por lo demas esta presion podrá ser tan corta como se quiera, sin que varíe la relacion.

Si no se hace mover la rastra mas que en el momento en que la resistencia del rozamiento ha llegado al máximo se hallará por relacion, deducido el efecto de la cohesion,

910: 100 en presiones pequeñas.
990: 100 en presiones grandes.

Cuando se sustituye el unto de aceite de oliva al de sebo, la resistencia del rozamiento casi llega al máximo desde el primer instante, é iguala á $\frac{1}{6}$ de la presion, pero llega del sesto al séptimo cuando se emplea unto añejo. El sebo fresco es, pues, el unto mas ventajoso para poner entre el cobre y el hierro.

No basta conocer la fuerza necesaria para vencer la resistencia al movimiento de un cuerpo en reposo sobre una superficie; es menester saber cómo varía esta resistencia, segun se aumenta la velocidad dada al cuerpo; y para esto se emplea el mismo aparato, solamente sustituyendo á la romana (fig. 214) que servia para dar al cuerpo el primer grado de movimiento, la cuerda y el platillo (fig. 215) con pesos que puedan comunicar al cuerpo una velocidad mas rápida. El rozamiento se produce en seco y sin unto. Se hace mover la rastra sobre el madero de prueba, cargando por grados esta rastra con pesos capaces de comunicarle una velocidad cada vez mayor.

Cuando estaba la rastra colocada sobre el madero de prueba, y cargado con un peso, cuyo efecto se queria conocer, se cargaba sucesivamente el platillo con diferentes pesos, y se movia la rastra, ya con martillazos no muy fuertes, ya empujándola por detrás con una palanca. Uno de los bordes longitudinales del madero tenia una graduacion muy exacta; de suerte que la estremidad de la rastra al pasar por esta graduacion indicaba los espacios corridos. En fin, la duracion de los movimientos se estimaba por un medio cuyo uso he aconsejado yo para todos los esperimentos algo exactos que haya que hacer; y es una péndola en que las oscilaciones duren medio segundo cada una.

Se observaba la fuerza necesaria para empezar el movimiento de la rastra, empleábase despues una fuerza media, y finalmente una grande. Se observaba tambien el tiempo necesario para que anduviese la rastra dos espacios de 66 centímetros.

Se ha visto generalmente que el tiempo que gasta la rastra en andar el primer espacio es algo mas que doble del tiempo que gasta en andar el segundo. Pero un cuerpo, puesto en movimiento por una fuerza aceleratriz constante, y que ande dos espacios consecutivos iguales, emplea para esto ciertos tiempos que están entre sí :: $\sqrt{10.000} : \sqrt{20.000} :: 100 : 142$. La rastra emplea, pues, 100 unidades de tiempo en correr la 1.ª

parte del espacio, y 142 unidades de tiempo en correr esta 1.ª parte, mas la 2.ª, que por consiguiente no gasta mas que 42 unidades de tiempo.

Así, el movimiento de la rastra solicitada por una fuerza aceleratriz constante, como la de la gravedad de los pesos, es constantemente acelerada; lo cual exige que las resistencias del rozamiento no destruyan en cada instante sino una cantidad proporcional de la fuerza añadida por la gravedad. Luego *la resistencia que proviene del rozamiento es una cantidad constante, cualquiera que sea la velocidad de los cuerpos en contacto.*

Sin embargo, cuando las superficies en contacto son muy grandes, el rozamiento se aumenta perceptiblemente con las velocidades. Al contrario, cuando las superficies en contacto son muy pequeñas, el rozamiento disminuye un poco con las velocidades. Pero estas leves irregularidades de los casos estremos, nada perjudican á la bondad del resultado que acabamos de presentar, en la mayor parte de los casos que se ofrecen en la práctica.

Con cálculos muy sencillos, aunque largos de referir aquí, determina así Coulomb la relacion de las presiones con los rozamientos que de ellas resultan, en seis esperimentos en que las velocidades variaban hasta el caso de esceder á las mayores presiones producidas en la práctica.

Rozamiento de una superficie de 1055 centímetros cuadrados, cargada de este modo.

ENSAYOS.	PRESION.	RELACION.
1.°	25 kil.	5,7.
2.°	188.	9,4.
3.°	291.	9,5.
4.°	825.	9,4.
5.°	1.788.	9,2.
6.°	6.588.	10,4.

En estos esperimentos el hilo de la madera de roble de la rastra tenia la misma direccion que el hilo de la madera del madero de prueba; en seguida se dirigió el hilo de la madera de la rastra perpendicularmente al de la madera del madero. Entonces se vió que la relacion de la presion al rozamiento casi no variaba, ya fuesen de consideracion las superficies en contacto, ó ya estuviesen reducidas á listas muy estrechas, tales como los filos de cuchillos embotados. Coulomb dá una esplicacion muy ingeniosa de esta diferencia. Hela aquí. "Cuando las reglas labradas en forma de cuña, y fijas debajo de la rastra, resbalan segun el hilo de la madera, cada punto del madero de prueba, tocado por el estremo de las reglas, permanece comprimido el tiempo que la rastra emplea en andar su longitud: como la rastra tiene 4 decímetros de longitud, si el movimiento es, por ejemplo, de 4 decímetros por segundo, cada punto del madero estará comprimido cuatro segundos. Así, aunque las desigualdades de las superficies, á causa de su coherencia mútua, oponen cierta resistencia á la mudanza de figura que les hace tomar la compresion, este tiempo de 4 segundos es suficiente para desnaturalizar y condensar en parte estas superficies. Por consiguiente, cuando la rastra, sostenida en ángulos redondeados, resvale segun el hilo de la madera, el rozamiento será proporcionalmente menor con las presiones grandes que con las pequeñas. Pero cuando las reglas labradas en forma de cuña, descansan al través de la rastra, al moverse esta, cada punto del madero fijo no está comprimido mas que un instante, que es el del paso del ángulo. Este instante no es tan largo que en él cedan perceptiblemente las asperezas de la superficie: luego el rozamiento ha de sér aquí lo mismo que en el caso en que las superficies tienen una estension limitada. Efectivamente, no variando en uno y otro caso la figura de las asperezas sino de un modo imperceptible, han de penetrar sin obstáculo alguno."

Todos los resultados que acabamos de presentar pertenecen al rozamiento de roble con roble. Rozando abeto con abeto, y álamo con álamo, se halla por relacion de la presion al rozamiento.

Abeto con abeto.	6: 1.
Alamo con álamo.	10: 1.

Las maderas puestas en contacto con los metales obran de un modo enteramente diverso de las maderas puestas en contacto con las maderas.

Fíjanse primero debajo de la rastra unas reglas de hierro para que rocen contra el madero de prueba, que es de roble. Con velocidades insensibles se ha visto, que cualquiera que fuere la presion, el rozamiento es casi un tercio de esta presion. Se ha encontrado que la presion de la rastra es respecto á la fuerza que hace andar un pie por segundo á la rastra, como 6 es á 1.

Esta gran diferencia de relacion, cuando las velocidades se aumentan, no se verifica respecto á las superficies pequeñas de contacto, comprimidas con pesos considerables, sino en maderas que acaban de salir de las manos del operario. Despues de un rozamiento de muchas horas, la velocidad cesa de influir casi enteramente en el rozamiento.

En los esperimentos de que acabamos de hablar estaban untados los cuerpos en contacto. Los únicos untos convenientes para disminuir el rozamiento de las maderas son el de sebo y el de manteca rancia: el de aceite solo puede emplearse en los metales. Siendo los untos unos cuerpos blandos, si suavizan el rozamiento de las superficies, es porque rellenan las cavidades, porque interpuestos en las superficies las mantienen á cierta distancia una de otra. Hé aquí porque en las presiones muy grandes los untos mas blandos son siempre los peores. Cuando las superficies en contacto están reducidas á ángulos redondeados, los untos disminuyen muy poco el rozamiento de la rastra. Cuando la rastra, teniendo una gran superficie en contacto, pasa dos ó tres veces sobre el mismo sebo, se nota tambien que el sebo se aplica al madero, penetra en los poros de la madera, y solo se opone imperfectamente al engranado de las partes. Ademas, en muchos ensayos repetidos sin renovar los untos, se ha notado un aumento de rozamiento muy considerable. Antes de referir los esperimentos hechos, untando las maderas en cada ensayo, debemos hablar de una causa, orígen muchas veces de la mayor incertidumbre en los resultados.

Cuando el madero y la rastra salen de manos del obrero, á pesar de todo el cuidado que se tiene de alisar bien las superficies pulimentándolas, ya con garlopa, ya con lija, ó ya estregándolas muchas veces una con otra, se nota que untándolas presentan al principio muchas desigualdades en el rozamiento. Estas desigualdades son tanto mas notables cuanto mas estensas son las superficies, y menor la presion, y aumentan muy perceptiblemente los rozamientos, á proporcion que crecen las velocidades. Estos hechos siguen leyes inciertas, y no hay teoría alguna que pueda dar razon de ellos. Mas cuando valiéndose de un unto de sebo ó de manteca rancia resbala la rastra por muchos dias consecutivos y con grandes cargas, se encuentra que el rozamiento es casi siempre proporcional á la presion, y el aumento de las velocidades no aumenta la relacion sino de un modo imperceptible.

Para determinar los efectos de un unto de sebo, renovado en cada ensayo, sobre roble rozando con roble, se hacia uso de una rastra empleada ocho dias en los esperimentos sobre el rozamiento. Habíanse hecho con untos de sebo renovados frecuentemente mas de 200 esperimentos, bajo presiones de muchos quintales por decímetro cuadrado.

Los cincuenta primeros esperimentos presentaron muchas irregularidades, pero los demas fueron menos inciertos, y la rastra y el madero de prueba parece que habian adquirido todo el pulimento que admite el roble. Hé aquí el resultado de seis esperimentos hechos en una superficie de contacto de 13 decímetros cuadrados.

1.° esperimento. . . $\frac{\text{Presion.}}{\text{Rozamiento.}}=\frac{3250}{115}=27{,}6$

2.° . . . . $=\frac{1650}{64}=25{,}8$

3.° . . . . $=\frac{850}{36}=23{,}6$

4.° . . . . $=\frac{450}{21}=21{,}5$

5.° . . . . $=\frac{250}{13{,}5}=18{,}5$

6.° . . . . $=\frac{50}{6{,}5}=7{,}7$

El resultado se complica aqui por dos causas; una la resistencia constante que proviene de la cohesion de las partes de sebo y de la estension de las superficies; y otra que proviene solo del rozamiento. Si se quita esta cantidad constante se tendrá

1.° esperimento. . . $\frac{\text{Presion.}}{\text{Rozamiento.}}=\frac{3250}{113}=28{,}7$

2.° . . . . $=\frac{1650}{59}=27{,}9$

3.° . . . . $=\frac{850}{31}=27{,}4$

4.° . . . . $=\frac{450}{16}=28{,}1$

5.° . . . . $=\frac{250}{8{,}5}=29{,}4$

6.° . . . . $=\frac{50}{1{,}75}=28{,}6$

Los pormenores en que hemos entrado bastan para manifestar el espíritu de los esperimentos de Coulomb; esperimentos que estendió sucesivamente al rozamiento de las varias especies de maderas con maderas; despues de maderas con metales, y por último, de metales con metales dados de unto. Reasumamos:

1.° El rozamiento de las maderas resbalando en seco sobre maderas, opone despues de un tiempo suficiente de reposo, una resistencia proporcionada á las presiones, la que aumenta perceptiblemente en los primeros instantes de reposo, pero regularmente despues de algunos minutos llega al máximo ó límite.

2.° Cuando las maderas resbalan en seco sobre maderas, con una velocidad cualquiera, el rozamiento es tambien proporcional á las presiones, pero su intensidad es mucho menor que la resistencia esperimentada cuando se hacen esfuerzos para separar las superficies despues de algunos minutos de reposo. Se vé, por ejemplo, que la fuerza necesaria para separar y hacer resbalar dos superficies de roble, despues de algunos minutos de reposo, es respecto de la fuerza necesaria para vencer el rozamiento, cuando las superficies han adquirido un grado cualquiera de velocidad, como 95: 22,2 ó 100: 23.

3.° El rozamiento de los metales sobre metales sin unto es igualmente proporcional á las presiones; pero su intensidad es la misma, ya sea que se quieran separar las superficies, despues de un tiempo cualquiera de reposo, ó ya se quiera mantener una velocidad uniforme cualquiera.

4.° Las superficies heterogéneas, como madera y metal, que resbalan una sobre otra sin unto, dan por sus rozamientos resultados muy diferentes de los que preceden, porque la intensidad de su rozamiento, teniendo en consideracion el tiempo de reposo, crece con lentitud y no llega á su límite hasta despues de cuatro ó cinco dias, y algunas veces mas. Pero en los metales llega en un instante, y en las maderas en algunos

minutos. Este aumento es tambien tan lento, que la resistencia del rozamiento en las velocidades imperceptibles, es casi igual á la que hay que vencer para mover ó separar las superficies despues de tres ó cuatro segundos de reposo. Aun hay mas: en las maderas que resbalan sin unto sobre maderas, y en los metales sobre metales, la velocidad influye muy poco en el rozamiento. Pero aqui crece el rozamiento muy perceptiblemente, á medida que se aumenta la velocidad. De suerte que el rozamiento crece casi en progresion aritmética, cuando la velocidad crece en progresion geométrica. Hé aquí pues la teoría de Coulomb.

El rozamiento no puede provenir sino del encaje recíproco de las asperezas de las superficies: la coherencia debe influir muy poco, supuesto que hallamos que el rozamiento es en todos los casos casi proporcional á las presiones, é independiente de la estension de las superficies: luego la coherencia obrará necesariamente segun el número de los puntos de contacto, ó segun la estension de las superficies. Hallamos sin embargo que siempre hay alguna coherencia, y hemos tenido cuidado de determinarla en las diferentes clases de esperimentos que han precedido. La hemos encontrado de cerca de ocho kilog. por metro cuadrado en las superficies de roble sin unto; pero en la práctica la resistencia que proviene de esta coherencia puede despreciarse, siempre que cada metro cuadrado esté cargado con muchos millares de kilog.

En los hechos que acabamos de esponer no están desnaturalizadas las superficies por ningun unto; asi la variedad de los fenómenos no puede proceder sino de alguna diferencia propia de las partes constituyentes de las maderas y metales: las maderas se componen de fibras prolongadas, de partes flexibles y elásticas; al contrario los metales, se componen de partes angulares, globulosas, duras é inflexibles; de suerte que ningun grado de presion ni de tirantez puede mudar la figura de las partes que cubren la superficie de los metales; en tanto que las fibras ó especie de pelos de que están formadas las maderas pueden doblarse mas fácilmente en todos sentidos.

Asi, pues, para servirnos de una comparacion sencilla, concibamos que las fibras de la superficie de las maderas entran unas en otras, como podrian hacerlo las cerdas de dos cepillos. Si se quisiera conseguir el grado de tirantez necesaria para hacer que resbale uno de los cepillos sobre el otro, sería menester exáminar la posicion de las cerdas en el momento en que pasado cierto tiempo de reposo, se hiciese un esfuerzo para separar los cepillos; y la posicion diferente en que se encontrasen las cerdas, cuando al resbalar uno sobre otro, tuviesen los cepillos un movimiento respectivo, cualquiera que fuese.

Supongamos que cuando se coloca una tabla bien pulimentada sobre otra, las fibras de que están erizadas sus superficies entran libremente unas en otras. Si se quiere hacer resbalar la tabla superior sobre la inferior, las fibras de las dos superficies se doblarán mútuamente, hasta tocarse, sin que por eso se desencajen. En esta posicion, tocándose mútuamente las fibras, no pueden inclinarse mas, y dependiendo el ángulo de su inclinacion del grueso de las fibras, será el mismo bajo cualquier grado de presion. De consiguiente se necesitará en todos los grados de presion una fuerza proporcional á la presion, para que las fibras que resbalan, segun esta inclinacion, puedan desencajarse.

Pero si se separa la rastra, y se continúa haciéndola resbalar, todas las fibras se desencajarán, y al efectuarlo quedará un vacío entre las fibras cercanas de la misma superficie; luego estas se inclinarán unas sobre otras hasta tocarse, y tomarán consiguientemente una inclinacion mayor que la anterior, pero que no dejará de ser la misma para todos los grados de presion. Así que en las superficies en movimiento el rozamiento ha de ser tambien proporcional á las presiones: no se hallarán variedades en esta teoría, sino cuando las superficies en contacto estén reducidas á sus mínimas dimensiones, porque entonces viniendo á ceder las partes interiores de las superficies por las enormes presiones que esperimentan, podrán aun inclinarse las fibras, como en efecto lo hemos observado al hacer deslizar segun el hilo de la madera, la rastra puesta sobre dos ángulos de roble redondeados.

Esplícase con facilidad por esta teoría una observacion que hemos hecho: cuando las reglas de roble en que descansa la rastra resbalan en el sentido de su longitud, los puntos del madero fijo que están bajo estas reglas, hallándose comprimidos todo el tiempo que la rastra gasta en andar su longitud, es suficiente este tiempo para que las superficies cedan y las fibras se inclinen mas que si solo se tocasen sus estremidades. Pero cuando los ángulos de la rastra están colocados á la estremidad y al través de la misma, entonces, no estando sometidos sino un instante á la compresion los puntos de contacto con el madero fijo, no tienen tiempo para ceder de un modo sensible, y la relacion de la presion al rozamiento es la misma, tanto en las presiones grandes como en las pequeñas.

No estando los metales compuestos de fibras ni de partes flexibles, no variará la situacion de las cavidades de su figura en ninguna circunstancia; de consiguiente, ya esté la rastra en movimiento, ya en reposo, la intensidad del rozamiento será siempre la misma, por depender de la figura de las moléculas elementales, que constituyen las superficies, y de la inclinacion del plano tangencial en los puntos de contacto.

Cuando las maderas resbalan sobre metales, entonces las fibras elásticas de la madera amoldándose á lo largo de las paredes de las cavidades, penetran en estas cavidades; luego como estas fibras son flexibles y elásticas, no se introducen sino lentamente en estas mismas cavidades; así la resistencia que proviene del rozamiento se aumentará á medida que sea mayor el tiempo de reposo que preceda al esfuerzo para hacer que resbalen las superficies. Pero si suponemos la rastra en movimiento, las fibras que cubren la superficie de la madera, encontrando las asperezas del metal, se doblarán para vencer la parte superior de estas asperezas. Esta dobladura necesariamente habrá de ser tal, que la reaccion de la elasticidad de las fibras sea proporcional á la presion: así en las velocidades imperceptibles, el rozamiento se verá que es tambien proporcional á la presion, como lo ha probado la esperiencia; cuando la rastra se mueva con una velocidad cualquiera, como las cavidades de las superficies del metal tienen estension relativa al grueso de las fibras de la madera, despues de haber pasado estas por cima de las puntas de las asperezas de las superficies metálicas, volverán en parte á enderezarse como los *manojos de resortes;* y será necesario que se doblen de nuevo para vencer la aspereza siguiente. Cuanto mayor sea la velocidad, mas veces será necesario que se doblen las fibras; así el rozamiento debe crecer siguiendo una ley de la velocidad, pero sin embargo se doblarán en un ángulo menor, á medida que se aumente la velocidad; porque al pasar de una punta á otra no tienen tiempo las fibras para volverse á enderezar enteramente.

En el rozamiento de las maderas y de los metales untados con sebo, hallándose las superficies en contacto reducidas á ángulos redondeados, hemos visto que caminando las reglas al través del hilo de la madera, cesaba de influir la velocidad en el rozamiento. Parece que en esta clase de rozamiento pega el sebo las fibras de la madera unas contra otras, y les hace perder en parte la elasticidad: hé aqui una observacion interesante relativamente á esto. Haciendo rodar una polea de guayaco sobre un eje de hierro sin unto alguno, ha visto Coulomb que en los primeros 20 minutos, siendo nueva la polea, se aumentaba el rozamiento con la velocidad, segun leyes análogas á las que se han encontrado para la madera y el hierro, en el movimiento de la rastra. Sin embargo, despues de dos horas de rozamiento contínuo, con una rotacion rápida, habian perdido las fibras de la madera la mayor parte de la elasticidad, y el incremento de la velocidad no aumentaba casi nada el rozamiento. Este efecto se produce con mucha mayor prontitud untando el eje con sebo; pues pasado un minuto de movimiento de rotacion, bajo una presion de 600 libras, una polea de guayaco con eje de hierro untado de sebo, tuvo siempre el mismo rozamiento con un grado cualquiera de velocidad.

Si se compara la resistencia del rozamiento de un cuerpo que tenga un peso dado, el cual camine apoyándose sobre otro, sin dar vueltas, con la resistencia que presenta el primero que gira sobre el segundo, se verá que en el segundo caso la resistencia es mucho menos considerable que en el primero. Por ejemplo, haciendo rodar madera sobre madera, la resistencia es á la presion en un rodillo pequeño como 1,000 es á 16 ó 18, y en un rodillo grande como 1,000 es á 6. Haciendo resbalar sin rodar madera sobre madera, sería la relacion de 1,000 á 200, ó de 1,000 á 300, segun la naturaleza de la madera. Luego haciendo rodar un cuerpo redondo sobre otro plano en vez de arrastrarlo sin dar vueltas, resulta una ventaja diez ó doce veces mayor.

He aquí lo que hace tan precioso el uso de las ruedas en las operaciones de las artes. Supongamos que un carruage con 1,000 kilog. de peso ande sobre ruedas; si estas estuviesen fijas en el eje y hubiesen de rozar contra el terreno, suponiendo tambien que fuesen sobre carriles de madera, y no tuviesen llantas, la resistencia del rozamiento sería de 200 kilog; mas si la rueda puede dar vueltas se reducirá inmediatamente esta resistencia á 6 kilog. lo mas. Supongamos ahora que el eje tenga un diámetro que sea la 50.ª parte del de la rueda: cuando la rueda dá una vuelta completa, cada uno de los puntos del cubo que se halla en contacto con el eje corre una superficie 50 veces menor que la misma circunferencia de la rueda. De consiguiente la velocidad del cubo que roza con la superficie del eje, será la quincuagésima parte de la velocidad de la rueda en los puntos que tocan al terreno. Con las mismas circunstancias, el rozamiento esperimentado por la rueda contra el eje, será pues la quincuagésima parte del que sería si el carruage se transformase repentinamente en rastra y resvalase sobre hierro. Por esto se puede ver cuanto disminuyen las ruedas la resistencia causada por el rozamiento, principalmente cuando se embuten en el cubo bujes de cobre para hacer mas suave el rozamiento contra el hierro del eje. Entonces casi no queda ya otra resistencia notable que vencer que la de las asperezas del terreno, y su cohesion con la circunferencia de la rueda; resistencia que se disminuye considerablemente en los caminos de hierro.

Cuando los hombres tienen que conducir fardos muy pesados para cargarlos en carros, los hacen resvalar sobre rodillos ó esferas, fig. 221.

En Escócia he visto subir navíos del mar sobre un plano inclinado, colocándolos en carretillas con ruedas pequeñas que rodaban sobre un camino de hierro. Muy pocos hombres bastaban para subir de este modo las naves de mayor peso.

Acabamos de ver por qué medios se consigue disminuir las resistencias del rozamiento. Hay otros casos en que se necesita aumentar todo lo que se pueda la resistencia que proviene del rozamiento, por ejemplo, cuando pasan los carruages de un camino horizontal á otro cuesta abajo con mucha inclinacion, importa el impedir que adquieran una celeridad que podria llegar á ser peligrosa. Para esto se pueden hacer dos cosas: primera, impedir que den vueltas las ruedas, dejándolas que rocen contra el terreno; mas la resistencia del rozamiento que entonces esperimentan, gasta rápidamente las llantas y las deja muy pronto inservibles. Remédiase este inconveniente por medio de una zapatilla metálica S, (fig. 222), que abraza el contorno de la llanta, y viene á colocarse entre ella y el terreno, sostenida la zapatilla por una cadena enganchada en el juego delantero del carruage. Este medio ofrece todavía un inconveniente. Cuando el terreno presenta algunas desigualdades de consideracion, como una piedra ó un hoyo de gran dimension, puede suceder que se salga la rueda de la zapatilla, en cuyo caso se renueva el peligro.

Es mas sencillo tener un arco de círculo de madera ó de metal, colocado detras de una de las ruedas grandes (fig. 223), de modo que se pueda acercar á esta rueda por medio de un tornillo de presion. Cuando se aumenta esta presion causa una resistencia de rozamiento proporcional, y muy luego pierde la rueda casi todo el movimiento. Este medio con que se puede disminuir ó aumentar el movimiento de las ruedas, segun se quiera, es preferible bajo muchos aspectos, y le han adoptado casi todas las diligencias y carruages.

En las grandes máquinas, y particularmente en los molinos de viento, es muy importante poder detener repentinamente ó al menos moderar á discrecion el movimiento de la máquina. Esto se hace con un freno A. B. C., (fig. 224). Se llama así un gran arco de círculo de madera que tiene esteriormente una abrazadera de hierro. Uno de los estremos de este arco está fijo y el otro atravesado por un brazo pequeño de palanca. Cuando se hace fuerza sobre el brazo grande de esta palanca, se obliga al freno á acercarse á una rueda grande que participa del movimiento general de la máquina. Ejércese contra esta rueda una presion muy considerable, y la resis-

tencia que causa esta presion basta para producir el efecto deseado. Los esperimentos de Coulomb, pondrán en disposicion de conocer en todos los casos, con una presion dada, las resistencias que provienen del rozamiento de los frenos de que se quiera hacer uso.

La grua es una máquina á la cual importa adaptar el freno; pues si los operarios no pudiesen hacer suficientes esfuerzos para mover el peso que han de subir, tomaria esta máquina un movimiento retrógrado acelerado que produciria accidentes de mucha gravedad. Pónese tambien aquí el freno á una gran rueda circular, como acabamos de esplicar respecto de los molinos, y el efecto producido por este freno tiene toda la eficacia que se puede desear.

En los magníficos almacenes de los *Docks* de Londres tienen un freno las cabrias empleadas para almacenar ó sacar las mercaderías. Cuando se quieren bajar estas mercaderías se aflojan repentinamente los manubrios de la cabria, y baja el fardo con toda la velocidad que puede adquirir por su peso. Un operario está con atencion y tiene con una mano el brazo largo de la palanca que ha de obrar sobre el freno, sigue con la vista el fardo que baja, y cuando le ve llegar á menos de un metro del terreno ó carro en que ha de quedar, se cuelga repentinamente de la palanca, y entonces se detiene el fardo repentinamente.

LECCION DÉCIMACUARTA.

De las presiones, de las tensiones, y de la elasticidad en general.

Hasta aquí hemos examinado la accion de las fuerzas, ya para comprimir, ya para estender los cuerpos, suponiendo que estos conservasen siempre las mismas dimensiones; pero esta hipótesis está distante de la realidad de las cosas. La mayor parte de los cuerpos, sometidos á fuerzas que los comprimen, disminuyen de dimension en el sentido en que se ejerce la compresion. Con respecto á esto hay mucha diversidad entre diferentes sustancias.

Ciertos cuerpos parece que ceden sin resistencia á la menor compresion, y cuando han sido comprimidos una vez, conservan las dimensiones á que los ha reducido la compresion. Estos cuerpos se llaman *cuerpos blandos.*

Otros cuerpos ceden con facilidad á la compresion; pero al punto que la fuerza comprimente deja de obrar, las dimensiones que habian disminuido por efecto de esta fuerza, se aumentan y se acercan mas ó menos á las dimensiones primitivas. Llámanse *cuerpos elásticos* los que tienen esta propiedad.

Los cuerpos serian perfectamente elásticos, si volviesen á tomar exactamente sus dimensiones primitivas, con la misma celeridad con que las habian perdido; pero la naturaleza no presenta cuerpos que sean perfectamente elásticos.

Despues de haber hecho sufrir á un cuerpo una compresion, dejémosle recobrar todo lo que pueda sus dimensiones primitivas, suprimiendo la fuerza compri-

mente. Hagamos obrar otra vez esta fuerza, y el cuerpo se volverá á comprimir, y por lo comun se comprimirá mas que la primera vez. Generalmente tambien recobrará las primeras dimensiones en menor grado que cuando se suprimió por primera vez la fuerza comprimente. Por manera que la accion repetida de las fuerzas comprimentes disminuye cada vez mas la elasticidad de los cuerpos. Sin embargo, muchos cuerpos no pierden cada vez sino una parte imperceptible de la elasticidad, y son capaces de hacer mucho tiempo el mismo efecto á pesar de la accion intermitente y muy multiplicada de las fuerzas comprimentes.

Los cuerpos elásticos por compresion prestan á las artes servicios numerosos, repartiendo igualmente presiones comunicadas por una fuerza que no obra sino segun la direccion de una recta. Si se trata, por ejemplo, de trasladar á una hoja de papel ó de lienzo el grabado hecho en una lámina, se coloca debajo de la hoja de papel ó tela un cuerpo elástico por compresion; otro sobre la lámina, y se pone encima un cuerpo duro y plano, que reciba la accion de la fuerza por uno ó muchos puntos. Transmitida esta fuerza al través del cuerpo duro, comprime sucesivamente las partes salientes de los dos cuerpos elásticos. A medida que va comprimiendo las partes mas salientes, se pone en contacto con un número mayor de partes, y al cabo aprieta un número tan grande de ellas que en todos los puntos de la superficie en contacto con la lámina por una parte, y con la hoja de papel ó tela por otra, se encuentra aplicada una porcion de la fuerza comprimente bastante considerable para que la tela ó papel, que son tambien cuerpos compresibles, penetren en las cavidades de la lámina que ha de producir el estampado.

Podrian citarse en un gran número de artes otros usos análogos de los cuerpos elásticos ó blandos empleados en repartir uniformemente presiones, que ejercidas sobre un solo punto, romperian ó deformarian el cuerpo que se tratase de comprimir.

Cuando se quieren pulimentar ó tallar cuerpos metálicos sin que la superficie padezca, se coloca entre esta y las *orejas* de la bigornia que se emplea, un cuerpo blando, como madera, plomo, cobre, &c., que reparte la presion en un número considerable de puntos de la superficie del cuerpo que se trabaja, y por este medio no se le daña.

En los embalages, cuando se quieren envolver juntos objetos cuya superficie se tema echar á perder, se han de envolver en cuerpos elásticos: despues se puede apretar fuertemente el embalage con cuerdas; porque la presion de estas cuerdas se reparte entre las envolturas compresibles que se emplean, y llega muy dividida á los diferentes puntos de los cuerpos embalados.

En la leccion que trata de los choques examinaremos algunos efectos análogos respecto á los cuerpos elásticos destinados á transmitir, ó mas bien á amortiguar los movimientos bruscos.

Si se supone que algunas fuerzas obran en sentidos contrarios para separar una de otra las diversas partes de un cuerpo, estienden, aumentan mas ó menos la dimension de este cuerpo en el sentido de la recta que une los puntos de aplicacion de las fuerzas dirigidas en sentidos contrarios. Ciertos cuerpos ceden casi sin esfuerzo á la accion de las potencias estensivas, y una vez alargados no recobran sus dimensiones primitivas, que es la propiedad de los cuerpos blandos. Hay otros cuerpos cuyas dimensiones vuelven poco á poco á su estado primitivo, cuando dejan de obrar las fuerzas estensivas, que son los cuerpos elásticos. Hay ademas otros cuerpos que tienen en alto grado la propiedad de recobrar sus dimensiones primitivas, ora se les comprima, ora se les estienda. En fin los hay que vuelven mucho mas completamente á sus primeras dimensiones, cuando se los comprime que cuando se los estiende, y otros, cuando se los estiende que cuando se los comprime.

En toda especie de artes es un estudio importante en cuanto á las primeras materias y á las materias elaboradas, el de las propiedades relativas á la elasticidad, á fin de escoger siempre la clase de materia mas á proposito para cada género de trabajo. Pudiera reducirse este estudio á esperimentos exactos que no se han hecho hasta aqui sino con un corto número de sustancias, y en pocos casos.

Las cuerdas de cáñamo, de seda, de algodon &c. y los alambres resisten muy poco á la compresion, porque la pequeñez de su diámetro es mucha comparativamente á su longitud; pero resisten mas á la tension segun el grado de fuerza y de elasticidad de cada uno. Esta elasticidad les da todo su valor en las operaciones de las artes.

Cuando se trata, por ejemplo, de trasmitir un movimiento de rotacion de una rodaja á otra, ó de un tambor á otro, se hace pasar por la canal de las rodajas ó por el contorno de los tambores ó tímpanos una cuerda ó una correa á la cual se da cierto grado de tension. Esta tension se reparte uniformemente en todos los puntos de la cuerda ó correa que obra en cada uno de estos puntos para recobrar su dimension primitiva; cosa que no puede hacer sin apretar el contorno de la rodaja ó del tambor. Despues cuando se pone en movimiento una de las rodajas ó de los tambores, la resistencia causada por el rozamiento se lleva la cuerda ó correa sobre la circunferencia de esta primer rodaja ó del primer tambor, y la presion ejercida por la cuerda ó correa sobre la segunda rodaja ó el segundo tambor produce un rozamiento que comunica el movimiento á esta segunda rodaja ó á este segundo tambor. Y como la elasticidad que se opone á las tensiones disminuye por grados con el uso, las cuerdas y correas que se emplean, si bien resisten á cada instante en virtud de su elasticidad, resisten cada vez menos á medida que se van alargando gradualmente, por lo que se buscan los medios de evitar este alargamiento. (*V. Geom. lec. III.*)

Cuando algunas cuerdas estan muy tirantes y se las pulsa entre sus puntos estremos, al abandonarlas despues toman un movimiento de vaiven, mas ó menos rápido, conocido con el nombre de *vibracion*. En este movimiento agitan vivamente el aire que las rodea, y esta agitacion produce el sonido. Se ha observado que aumentando por grados la tension de una misma cuerda los sonidos que produce cuando se la hace vibrar van siendo mas altos y pasan asi por grados del grave al agudo. Entre la infinita variedad de sonidos que se pueden producir de este modo, hay cierto número que agrada á nuestro oido, pudiendo formar parte de un sistema de música. Se ha determinado por la esperiencia cuáles han de ser las relaciones entre las tensiones de una misma cuerda, es decir, qué pesos han de emplearse para producir la tension que dá los sonidos musicales. Por manera que la determinacion de los sonidos en la música es el resultado de un esperimento mecánico.

Empleando una misma sustancia se ha notado que en una longitud dada son tanto mas graves los sonidos cuanto mayor es el diámetro de la cuerda, y se han determinado las relaciones entre lo alto ó agudo de los sonidos y el diámetro de las cuerdas de varias sustancias. Los instrumentos de cuerda se componen de cierto número de ellas metálicas ó formadas con tripas, cuya dimension y longitud están combinadas de tal modo que producen la sucesion de los sonidos musicales entre límites dados. Solo podemos indicar aquí este uso.

Conservando la misma cuerda una tension constante, si se disminuye su longitud, los sonidos que puede producir son mas agudos, y al contrario, son mas graves cuando se aumenta esta longitud.

Los registros de los instrumentos de cuerda son palancas que sirven para apretar un punto fijo en ciertas partes intermedias de las cuerdas, á fin de disminuir su longitud. Asi se hace que produzca sucesivamente una misma cuerda sonidos mas ó menos altos, y se aumenta mucho la riqueza de cada instrumento.

Despues de haber considerado la elasticidad de los hilos independientemente unos de otros, pasaremos á tratar de la elasticidad de los hilos combinados. Los hilos que se emplean para fabricar las telas son mas ó menos

elásticos. Esta misma elasticidad facilita mucho la fabricacion. Compréndese en efecto que si los hilos de la urdimbre estuviesen todos igualmente tirantes, y si al principio no pudiesen mudar de dimensiones sin romperse, se romperían á cada ligera desigualdad que causasen las dimensiones ó los movimientos del telar que se emplea para fabricar las telas. Por el contrario, los hilos que pueden ceder á las fuerzas que los estiran súbitamente y recobrar en seguida sus dimensiones primitivas, no se rompen sino por accidentes estraordinarios.

Si las telas que usamos en nuestros vestidos, no estuviesen compuestas de hilos elásticos, no formarian mas que superficies desenvolvibles, suponiéndolos inestensibles, ó superficies que jamás volverían á su primera figura, suponiéndolos enteramente blandos. Mas por medio de la elasticidad, ciertas partes de las telas pueden adquirir dos curvaturas, ya en el mismo sentido ó ya en sentido opuesto, pudiendo seguir asi las inflexiones de la superficie del cuerpo humano en los diversos movimientos de nuestros miembros. Y como el volúmen de estos miembros y su curvatura, particularmente en las articulaciones, varía repentinamente, es necesario que las telas se presten á estos movimientos y recobren despues su forma primitiva, y esto es lo que hacen en virtud de su elasticidad.

Hay ciertas partes de nuestros vestidos que necesitan apretarse ó sostenerse con una fuerza que no esceda nunca de ciertos límites. Si hiciésemos uso de los tegidos inestensibles para ejercer estas compresiones, nos molestarian en los movimientos del cuerpo que procuran aumentar las dimensiones de los contornos de que se trata. Hé aquí por que los cinturones, ligas, guantes, medias, zapatos, y en general todas las partes de nuestro vestido, que ciñen la piel, son de materias elásticas. Infiérase por el tormento que nos causan unos zapatos con poca elasticidad, la ventaja que tiene para nosotros esta propiedad de la materia.

Si en lugar de emplear hilos rectos y paralelos para formar superficies elásticas, superficies que no tienen consiguientemente mas que la estensibilidad de cada hilo, formamos tejidos en que los hilos sigan una direccion tortuosa; éstos podrán tener una longitud mucho mayor que la distancia rectilínea que separa sus estremidades, y el tejido formado de este modo podrá estenderse mucho mas que el ordinario con la misma fuerza. Si se hace que cese la accion de esta fuerza, el tejido vuelve á su ser. Se han fabricado asi tejidos de punto de aguja, cuya facilidad en estenderse y comprimirse los hace eminentemente á propósito para cubrir exactamente los miembros de nuestro cuerpo, cuya forma y dimensiones varían mucho cuando nos movemos. Un efecto análogo al punto de aguja hacen los hilos metálicos ó alambres arrollados en forma espiral. Estas espirales permiten un desenvolvimiento entre sus estremidades, mucho mas considerable que la distancia rectilínea de dichas estremidades: luego una misma fuerza empleada, ya sea para comprimir, ya para estender un alambre arrollado en esta forma, debe alargarle ó encogerlo mucho mas que si se obrase sobre un solo alambre tirante. De aqui el uso de los hilos metálicos arrollados en espiral para los elásticos de los tirantes, muelles de coches, y otros usos semejantes en un gran número de máquinas.

Las cuerdas arrolladas en espiral tienen por esta razon un grado de elasticidad diferente del que gozan los mismos hilos en línea recta; elasticidad preciosa en las máquinas y principalmente en los aparejos de las naves.

En las iglesias de las aldeas se figuran grandes cirios con unos cilindros de hierro batido, muy largos y pintados de blanco. En estos cilindros se ponen bugías comunes, debajo de las que hay una larga espiral de alambre que está muy comprimida cuando la bugía está entera, pero á medida que ésta se vá consumiendo, la espiral la empuja, y sube de modo que la mecha encendida está siempre en el mismo punto sobre la base superior del cilindro que figura el cirio.

Hasta aqui se ha procurado determinar principalmente la resistencia de que son capaces las maderas antes de romperse por una accion perpendicular á sus fibras ó por la presion de pesos que obren en el mismo sentido de estas fibras.

Es necesario conocer este estremo, este límite de la fuerza de las maderas, para emplear siempre materiales de una fuerza mayor que los esfuerzos á que hayan de resistir, en las construcciones y en las máquinas en que entren como elementos; pero es menester alejarse bastante de este límite, y cuando se hayan de hacer otras de larga duracion, es necesario alejarse todavia mas, porque el tiempo disminuye incesantemente la fuerza de las maderas, y otras mil causas concurren á deteriorar sus cualidades primitivas.

Hay otra clase de investigaciones no menos útiles, y quizá mas, y sin embargo creo que son las que menos se han hecho; á saber, determinar las resistencias comparadas de las maderas, cuando se las somete á fuerzas capaces de alterar muy poco su figura y de esperimentar, si puede decirse asi, su *resistencia virtual.*

Cuando construimos edificios, máquinas, naves, suponemos que las piezas de una dimension considerable, y por otra parte poco cargadas, conservan la figura que les ha dado un dibujo exacto; pero no es asi. En la naturaleza las fuerzas menores tienen sus efectos determinados, aunque sean á veces demasiado pequeños para la percepcion de nuestros sentidos; muchas veces estos efectos insensibles individualmente, se acumulan hasta el punto de producir los resultados mas notables; citaremos solamente un ejemplo.

El mayor edificio de madera que podemos construir es sin duda un navío tal como debe ser en el dia para entrar en línea en nuestras escuadras. Cuando un navío de primer órden está puesto en las gradas del astillero, sus últimos barraganetes se elevan hasta el remate de las casas mas altas: debe dar habitacion á mil hombres, contener víveres para seis meses, y toda la artillería de una gran plaza fuerte; asi la solidez de su construccion debe corresponder á la inmensidad de objetos que ha de contener. Sus paredes de madera tienen de grueso casi tanto como las paredes esteriores de las casas comunes. Las ligazones, los puntales de todo género están combinados con inteligencia; el hierro, el cobre, están prodigados para mantener la trabazon de todas las partes. ¿Quién creeria que con medios tan poderosos y tan bien dispuestos no quedase asegurada la forma del navío de un modo invariable? Sin embargo, no es así: apenas se le bota al mar, cuando la desigualdad de accion producida en un sentido por los pesos acumulados hácia las estremidades y la repulsion del agua concentrada hácia el medio del navío, encorvan á la vez en toda su longitud esta gran máquina y hacen tomar á la quilla la forma de un arco, que en una cuerda de 60 metros ha presentado algunas veces medio metro de sagita y aun mas.

Esta alteracion de forma es sin duda enorme, muda poderosamente la estabilidad del navío é influye en todas sus demas cualidades. Sin embargo, si quisiésemos saber cuál debia ser la sagita de un arco que tuviese dos metros de cuerda con la curvatura que acabamos de indicar, hallaríamos que el nuevo arco tendria por sagita menos de *dos décimos de milímetro*, es decir, un tamaño casi imperceptible en una longitud igual cuando menos á nuestra mayor estatura.

Esta alteracion apenas perceptible de las maderas, es la que primeramente me propuse apreciar. He querido valuar primero su resistencia á cualquiera mudanza de estado en el momento en que dicha resistencia empieza á manifestar sus efectos, es decir, en el momento en que los cuerpos alteran infinitamente poco su forma en virtud de los pesos que sostienen. Se verá sin duda con algun interés que las leyes y las anomalías observadas en los esperimentos hechos en grande sobre el rompimiento de las maderas, es decir, del punto en que su deformacion llega á ser la mayor posible, no son

mas que una consecuencia necesaria de las variaciones estremadamente pequeñas que sus menores inflexiones ofrecen al observador.

Voy á presentar aqui el resúmen de las indagaciones que he hecho acerca de la *flexibilidad*, *fuerza* y *elasticidad* de las maderas, por medio de esperimentos ejecutados en 1811 en el arsenal de *Corcire*; esperimentos que he vuelto á hacer mas en grande en 1813 en el arsenal de Tolon, despues en 1816 y 1817 en el arsenal de Dunquerque. La memoria relativa á los esperimentos hechos en Corcire se publicó en el diario de la escuela politécnica, tomo 10. La fig. 233 representa el aparato empleado en los esperimentos de Tolon; la fig. 226 el de los esperimentos de Corcire.

En un gran banco (fig. 226) hice fijar dos puntos de apoyo horizontales y á nivel, distantes dos metros entre sí; hice dar la forma de un paralelipípedo á unos pedazos de roble, de ciprés, de haya y de abeto ó pino.

Estos paralelipípedos de poco mas de dos metros de largo descansaban á su vez en los apoyos S, S, cuya menor distancia era casi la misma que la de estos paralelipípedos, los cuales escedian muy poco en cada lado, lo suficiente solamente para que la pieza al encorvarse no se acortase hasta el punto de caer entre los puntales.

Cargué estos paralelipípedos, que llamaré simplemente *reglas*, con pesos colocados á igual distancia entre los dos apoyos, tomando entonces cada regla cierta curvatura.

Es evidente que cada arista ABC, DEF de la regla se encogió (fig. 2), siguiendo una curva situada en un plano vertical y simétrico, respecto al plano vertical EB, tirado por el punto medio en que se aplicó la carga y perpendicularmente al mismo plano de la flexion.

Tal era la curva cuyos elementos era menester determinar, teniendo siempre en consideracion la cara cóncava de la regla encorvada.

En los numerosos esperimentos que he hecho, he observado constantemente que cuando los pesos son poco considerables, las sagitas GB de los arcos ABC, formados con la regla encorvada, son proporcionales á estos mismos pesos.

Pero cuando las sagitas son muy pequeñas respecto á la cuerda constante de muchos arcos, la curvatura de estos es directamente proporcional á las sagitas correspondientes; de lo cual he deducido el siguiente teorema que ya habia suministrado la teoría.

La flexion de las maderas producida por pesos muy pequeños es proporcional á estos pesos, midiendo esta flexion por la sagita GB de su arco ABC, es decir, por la depresion ó descenso del punto *medio de la regla.*

Luego cuando una misma pieza de madera está cargada entre los mismos apoyos con pesos diferentes, estos pesos son recíprocamente proporcionales al rádio de curvatura de la regla en su punto medio, y la misma curvatura es proporcional á estos pesos muy pequeños.

Despues de haber determinado así la relacion de la fuerza virtual de la flexion con el peso que produce esta flexion, convenia averiguar si subsiste la misma ley cargando el cuerpo con pesos mas considerables; ó si no se conserva cuál es la alteracion que supone esta ley.

He tomado las cuatro clases de madera mas usadas en las artes que son las que he nombrado. El roble y el abeto habia quizá 23 años que estaban cortados, pues procedian del navío ruso *el Miguel* que deshice en 1810, y podria tener entonces 20 años de construccion.

Estas maderas no conservaban toda su fuerza primitiva, pero como se trataba de hallar las leyes que rigen en la fuerza y la elasticidad de las maderas, por relaciones generales, independientes del vigor absoluto de las fibras leñosas, y aun independientes del género y especie de árboles, eran estas maderas tan propias para nuestro objeto como si estuviesen recientemente cortadas. Por lo demas, el ciprés y haya tenian poco mas de un año de cortadas, y su elasticidad nos presentó las mismas propiedades que las maderas, que segun acabamos de decir, tenian 25 años de cortadas; lo cual demuestra claramente nuestro aserto.

Trabajáronse cuatro reglas ó paralelipípedos que tenian como hemos dicho algo mas de dos metros de longitud, y se les dió tres centímetros de escuadrado. Colocóse sucesivamente cada regla sobre los apoyos; despues se cargó en el medio con 4 kilogramas, en seguida 8, 12, 16.... hasta 28 kilogramas. En nuestra memoria se hallan adjuntas tablas que muestran 1.° las sagitas del arco tomado por las reglas: 2.° las primeras diferencias de estas sagitas.

Examinando estas tablas se observa al instante que 8 kilogramas hacen encorvar la regla el duplo solamente de la flexion producida por 4 kilogramas; proporcion que debe subsistir respecto á las presiones pequeñas.

En las tablas relativas á todas las maderas en el roble, ciprés, haya y abeto se nota en seguida que las diferencias primeras de las sagitas van siempre aumentando.

A la verdad presentan algunas ligeras anomalías; pero inmediatamente despues de una diferencia muy débil, se presenta otra en sentido contrario que la escede tanto mas.

Como los errores no son mas que de *décimos de milímetro*, si se empleasen maderas trabajadas con la mayor perfeccion y se recurriese á los medios de observar, que yo no tenia entonces á mi disposicion, se obtendrian resultados tales que las diferencias *segundas* (1) serian constantes, ó al menos no esperimentarian mas que variaciones enteramente imperceptibles.

Así que podemos considerar las diferencias segundas de las dimensiones como constantes cuando los pesos que cargan á una misma pieza crecen con diferen-

(1) *Llámanse así las diferencias de las simples diferencias, ó diferencias primeras de una série de números.*

cias primeras constantes. Esta ley tan sencilla es sin embargo tan conforme con la esperiencia, que si formamos en el roble, por ejemplo, el desenvolvimiento regular de los términos que espresa, los resultados nunca diferirán de las observaciones en cuatro décimos de milímetro. La flexion total que hemos producido es igual sin embargo á 406 de estos décimos: no es dificil esplicar esta ligera anomalía.

Al encorvarse la regla forma un arco mas largo que su cuerda, es pues necesario que cuando se encoja resbale mas ó menos por los puntales. Estos apoyos eran aristas de madera, y á lo largo de ellas resbalaban las fibras esteriores de la regla, no de un modo contínuo, sino por medio de resaltos pequeños, mas ó menos perceptibles. Recordemos siempre que estábamos en un país en que de todo se carecia, hasta de balanzas de la exactitud necesaria para pesar diez milésimas, y esto si llegaban; y se verá que ninguna de las cortas diferencias de observacion y de cálculo pasa del límite asignado á la exactitud de las operaciones.

Despues hemos querido ver el resultado de las mismas fórmulas respecto de la carga bastante considerable de 80 kilógramos. Comparando los resultados con los hallados en una carga de 4 kilog. solamente, hemos reconocido que guardando proporcion, el ciprés es el que tiene menor sagita en la carga grande; en seguida el roble; despues el abeto, y por último el haya.

De lo cual sacamos esta notable consecuencia: *"Aun cuando la resistencia virtual de una clase de madera fuese muy grande, si las diferencias segundas fuesen considerables en esta clase con una carga bastante grande, al cabo esta madera se encogeria mas que la de otra clase, cuya resistencia virtual á la flexion fuese no obstante menor."*

Sabido es que el haya es eminentemente elástica: de ella hace el tornero el arco regulador de sus vueltas. En la marina los mejores remos, los que sufren sin romperse mayores esfuerzos, choques mas violentos, son

los remos de haya: y es porque siendo considerables en el haya las diferencias segundas, esta grande flexion de que es capaz el haya con cargas dadas, le permite ceder sin trabajo á los choques violentos y la hace poco quebradiza.

Observemos por el contrario que el ciprés poco flexible y muy quebradizo tiene las diferencias segundas casi imperceptibles; no son ni la tercera parte de las del haya.

He determinado los pesos específicos de las cuatro especies de madera sujetas á los esperimentos precedentes; el órden de estos pesos es tambien el de las resistencias á la flexion. De aqui resulta respecto á las maderas una consecuencia importante. *"De las naves, cuya armazon sea del mismo volúmen, la que esté construida con la madera mas pesada, hará menos arco que la construida con la madera mas ligera;"* pues en igualdad de circunstancias el arco de los buques es proporcional á la flexibilidad virtual.

Luego las naves del Báltico y de Holanda deben formar mas arco que las del Mediterráneo: asi lo confirma la esperiencia.

Pero segun los mismos cálculos *"de dos naves cuya armadura tenga el mismo peso, pero que sean de diferentes maderas, la nave construida de la madera mas ligera será aquella cuyo arco tenga menos curvatura, y que por lo mismo presente mayor solidez."*

El célebre don Jorge Juan parece que vizlumbró esta verdad cuando queria que se construyesen las naves con las maderas mas ligeras, las maderas resinosas, y no de roble.

Por lo demas, todos los esperimentos anteriores al presentar los elementos de la resistencia virtual, darán los medios de calcular, y por ellos los de lograr resultados comparables, sin recurrir á los costosos esperimentos de la ruptura de las piezas. Por este medio se conocerán mejor las calidades de las maderas que convienen á las diversas labores de las artes en general y particularmente á las de las construcciones navales, y se podrán fijar para cada navío las dimensiones de las piezas de un modo menos arbitrario. Estas operaciones examinadas con mas detencion, conducirán á resultados ventajosos.

Despues de haber multiplicado los esperimentos, respecto á las piezas de una misma forma, hemos considerado que habia gruesos y anchuras diferentes, y hemos llegado á este resultado constante:

"La resistencia á la flexion es proporcional al cubo de los gruesos." Ya hemos demostrado teóricamente esta verdad esperimental.

Cuando se encorva un paralelipípedo de madera, las fibras interiores se comprimen y las esteriores se alargan, de modo que se encuentra una fibra intermedia de una longitud invariable. Esta fibra permanece igual cualquiera que sea la curvatura que se dé al paralelipípedo.

Para demostrar el efecto de la dilatacion ó contraccion de las fibras, imaginó Duhamel un esperimento ingenioso. Serró por medio, perpendicularmente á la direccion de las fibras, las tres cuartas partes del grueso de la pieza: despues metió en la hendidura de la sierra una cuña muy delgada y de una madera aun mas dura que el roble. Sostenida despues la pieza por los dos estremos y estando encima la cara en donde se hallaba la hendidura de la sierra, se cargó peso sobre esta pieza, y aunque serrada en las tres cuartas partes, solo una cuarta parte de las fibras pudo resistir por su estension; de modo que la pieza habia conservado toda su fuerza. Cuanto menos adelantada estaba la hendidura de la sierra, mayor era la fuerza; y menor en el caso contrario. Cuando se haya determinado por la esperiencia la posicion precisa de la fibra invariable, será fácil deducir la relacion de las fuerzas necesarias para producir una dilatacion ó contraccion dadas en las fibras de una misma pieza de madera. Los esperimentos que hemos hecho en Tolon y en Dunquerque, se dirigian en gran parte á hacer indagaciones de este género, que algun dia publicaremos.

Despues de haber cargado las piezas con pesos únicos, los cargamos con pesos uniformemente repartidos en toda su longitud. Hallamos que con el mismo peso acumulado enmedio de una pieza ó repartido uniformemente por toda su estension, los sagitas ó descensos son entre sí como *diez y nueve á treinta*, ó simple y rigurosamente como *cinco á ocho*: esta relacion subsiste, ya sea respecto de las maderas de una clase diferente, ya respecto de las maderas de diferentes dimensiones.

Si se toma pues por unidad el peso de una pieza prismática, duplicando los cinco octavos de la sagita que adquiera, cuando se la sostenga horizontalmente por los dos estremos, se tiene la sagita que adquirirá cuando se la cargue un peso igual al suyo y acumulado enmedio. Este principio proporciona un medio sencillo de pesar sin balanza los maderos muy pesados y muy largos, con tal que su grueso sea constante.

Segun lo que acabamos de esponer, es muy fácil considerar un peso único cargando sobre el medio de una pieza como un peso uniformemente repartido á lo largo de esta pieza, y recíprocamente; consideracion de muy frecuente utilidad en las artes.

He determinado la flexion de las piezas teniendo en consideracion la distancia de los apoyos; lo cual me ha conducido á este resultado: *"Dos piezas de igual escuadrado se encorvan formando arcos cuyas sagitas son proporcionales á los cubos de las distancias de los apoyos."* Recordemos tambien que entre los mismos apoyos las sagitas son recíprocamente como los cubos de los gruesos.

Combinando estos dos principios con el de que en flexiones poco considerables las sagitas son directamente proporcionales á las cargas, se llega á este resultado singular.

Sean dos piezas de madera semejantes, es decir, con dimensiones homólogas proporcionales, y además supongámoslas de la misma especie: sostengámoslas por sus estremidades, y las sagitas de los arcos que tomen en virtud de su propio peso, serán directamente proporcionales á los cuadrados de las longitudes de las piezas. Por consiguiente *"cualquiera que sea la magnitud absoluta de estas piezas, tendrán todas un solo y mismo rádio de curvatura en el medio."* Este resultado seria el mismo aunque se cargasen las piezas con pesos acumulados ó repartidos, pero proporcionales al peso mismo de estas piezas.

Tiene este resultado aplicacion frecuente á las operaciones de las artes; porque en los edificios, en las máquinas de una misma clase son ordinariamente todos sus elementos proporcionales. Si queremos comparar dos naves construidas con los mismos materiales y cuyas dimensiones parciales sean tambien proporcionales á las de estas naves, deduciremos de aquí que el *arco de las naves, siendo las mismas todas las demas circunstancias, ha de tener en el punto en que la flexion es mayor un rádio de curvatura constante, cualquiera que sea el tamaño absoluto de las naves."*

Ahora debe verse, por qué las naves grandes, prescindiendo de cualquiera otra causa, tienen á proporcion mucho mas arco que las pequeñas: porque la sagita del arco se aumenta como el cuadrado de las dimensiones principales de la nave. Así, en el caso que hemos citado de un barco de 60 metros de largo que tomase un arco de medio metro; una nave pequeña de un metro de largo, semejante á la primera, no tomaria por sagita de su arco mas que un 3600 avos de medio metro en vez de un 60 avo: simple relacion de las longitudes.

Paso á esplicar el rompimiento *de las maderas.*

Las maderas no son capaces mas que de cierta compresion y estension, fuera de la que se rompen ó abren.

Las fuerzas que han de emplearse para romper las maderas no tienen ninguna relacion necesaria con las fuerzas que producen la flexion. Así, hay algunas espe-

cies de vegetales que oponen muy poca resistencia á la flexion y mucha á romperse, como son el cáñamo entre las plantas, y entre los árboles el haya, el olmo, el nogal, el abeto &c. Otras especies, por el contrario, oponen mucha resistencia á la flexion y proporcionalmente mucha menos á romperse, como son el ciprés y la caoba &c., lo cual forma otra clase de maderas. Otras, en fin, presentan á la vez mucha resistencia á la flexion y á romperse, como el pino de córcega y el roble, el mas rígido y fuerte de todos los vejetales corpulentos de Francia.

Estas consideraciones físicas son de grande importancia en las artes, pues sirven para elegir las diversas especies de vegetales con las condiciones que se necesiten. Así en los edificios que hayan de durar largo tiempo, y cuyos materiales hayan de alterarse un poco, las partes que han de resistir grandes esfuerzos serán de vegetales fuertes y rígidos, por lo que se preferirá el roble, y despues los árboles que oponen mas resistencia á la flexion, como son los de la última clase. Pero estos deberán preferirse para las obras ligeras, cuyo principal objeto sea el lucimiento, y que destinándose á los placeres del lujo, no tengan que resistir á grandes esfuerzos. Por último, los de la primera clase se reservarán para las obras en que sea la principal circunstancia la elasticidad de las maderas; los carros y carruages de toda especie, los utensilios de arar, los mástiles de los bájeles, los remos de los barcos ligeros &c.

Sometiendo á la esperiencia y al cálculo estas dos clases de fuerzas de los vegetales para oponerse á la flexion ó al rompimiento se conocerán completamente las propiedades de las maderas. Entonces se podrá decidir con certeza en cada ocasion qué especie conviene emplear. El que esta eleccion sea fundada no es tan facil como parece si no se emplea para fijarla mas que la rutina.

Veamos cuál es la fuerza de las maderas para resistir al rompimiento. Cuando se toma una pieza de madera ABCDF, (fig. 225) para encorvarla en ABCDEF (fig. 226) la fibra esterior ABC se alarga, y la fibra interior DEF se acorta. Si se han trazado cierto número de rectas 11, 22, 33 de escuadra sobre la cara ACDF (fig. 225) cualquiera que sea la flexion que se haga esperimentar á la pieza de madera, las líneas 11, 22, 33, no cesan de ser rectas y estar á escuadra con los contornos ABC, DEF (fig. 226). Luego las fibras de la madera al encorvarse no han resvalado unas sobre otras: por ejemplo, toda la parte de las fibras de la madera comprendida en el espacio 1221, (fig. 225) está tambien comprendida en el espacio 1221 (fig. 226).

Las fibras esteriores que se alargan y las fibras interiores que se acortan, se separan por una fibra MNO, que no esperimenta dilatacion ni contraccion, á la cual hemos llamado *fibra invariable.*

La dilatacion de las fibras por fuera de la fibra invariable MNO es proporcional á su distancia á esta fibra. La contraccion desde la invariable MNO para adentro es proporcional á su distancia á esta fibra.

En la memoria citada página 415 hemos deducido de estos principios las propiedades matemáticas de las resistencias de las maderas á la flexion y á romperse.

Maderas de una misma naturaleza y fuerza encorvadas segun una curva cualquiera, se rompen cuando su fibra esterior llega á cierta estension, cuya relacion es constante con la longitud de esta fibra.

Supongamos que un pedazo de madera encorvada en un contorno cualquiera aumenta ó disminuye de grueso, sin dejar de tener este contorno en la direccion de su fibra esterior. Cuando el grueso del pedazo de madera se duplique, triplique ó cuadruplique &c. el alargamiento de la fibra esterior se duplicará, triplicará, cuadruplicará &c. Luego si la curvatura del contorno ABC se disminuye en la misma relacion que aumenta el grueso de la pieza de madera, el grado de alargamiento de la fibra esterior permanecerá siendo el mismo.

Cuando se encorva una pieza de madera ABC (fig.

227) sostenida con dos puntales A, C, y solicitada por una fuerza F, igualmente distante de A y C, hemos hecho ver que el rádio de curvatura de ABC en B, medio de este contorno, es proporcional al cubo de la distancia AC de los dos apoyos A, C, siendo las mismas las demas circunstancias.

En las flexiones sumamente pequeñas el rádio de curvatura R de ABC es proporcional á $\frac{AC^2}{GB}$, siendo GB la sagita de ABC. Así $R=\frac{AC^2}{CB}$ y $GB=\frac{AC^2}{R}$

Por otra parte la fuerza F es proporcional á GB: luego F es proporcional á $\frac{AC^2}{R}$

Pero la fuerza necesaria para la flexion está en razon directa de la sagita GB é inversa del cubo de AC, distancia de los apoyos. Luego siendo n un número constante,

$$F=n\frac{GB}{AC^3}, \text{ y } F\times AC=n\frac{GB}{AC^2}$$

Respecto de otra pieza de madera abc (fig. 228) del mismo grueso que ABC, (fig. 227) se tendrá del mismo modo $r=\frac{ac^2}{gb^2}$, y $f\times ac=n.\frac{gb}{ac^2}$

Habiendo de ser R igual á r en el punto de rompimiento es menester que $\frac{AC^2}{GB}=\frac{ac^2}{gb}$, y por consecuencia que $n\times\frac{GB}{AC^2}=n\times\frac{gb}{ac^2}$, luego $F\times AC=f\times ac.$

Es decir *"que encorvándose una pieza de madera entre dos apoyos, cuya distancia varie, se verifica el rompimiento por efecto de una fuerza que se aumenta al* *paso que la distancia de los apoyos se disminuye recíprocamente."*

Considerando á la vez el grueso B E y la distancia A C, siendo m un número constante, se encuentra respecto á la fuerza F, que produce la flexion,

$$F = m.\ GB.\frac{BE^3}{AC^3} = m.\frac{GB}{AC^2}.\frac{BE^3}{AC}.$$

Cuando maderas de diferentes gruesos llegan al punto que produce el rompimiento, el rádio R está en razon directa del grueso de las piezas. Así, siendo p un número constante

$$R = p \times BE.\ \text{Luego}\ F = \frac{m}{p}.\frac{BE^2}{AC}$$

Luego *"cuando AC distancia de los apoyos permanece la misma, la fuerza F que produce el rompimiento está en razon del cuadrado de los gruesos."*

Estas propiedades son generales en los paralelipípedos elásticos que se rompen en virtud de flexiones muy pequeñas, madera, hierro, cobre, piedra &c. De esto se han sacado consecuencias importantes para las artes.

En vez de emplear como otras veces costaneras y alfardas cuadradas, se ha visto que es mas preferible el hacerlas delgadas horizontalmente y muy anchas verticalmente.

Comparemos por ejemplo dos alfardas de la misma longitud entre los apoyos que tengan de ancho y grueso el uno 1 y 9 (fig. 229) y el otro 3 y 3 (fig 230).

La resistencia de la última será proporcional á su ancho 3, multiplicado por 9, cuadrado de este ancho. Así, $3 \times 9 = 27$ representará la resistencia que esta alfarda cuadrada opone al rompimiento. La resistencia que la alfarda delgada y de igual volumen opone al rompimiento se representará por $1 \times 9 \times 9 = 81$. Luego la alfarda delgada es tres veces tan fuerte como la cuadrada.

Siempre que algunas piezas de madera, hierro &c. de un edificio ó máquina hayan de resistir á la flexion, y

por consiguiente al rompimiento en cierto sentido, se les deberá dar el mayor grueso posible á espensas del ancho en el sentido perpendicular.

Segun este sistema es como se han construido armazones de madera á la Filibert-Delorme, ingeniero célebre y el primero que lo puso en práctica. Colócanse hileras de tablas cuyos estremos están trabados con clavijas de tornillo; únense estas hileras para componer pisos muy ligeros y sin embargo muy fuertes, á fin de sostener las bóbedas, techos &c.

Cuando se necesita resistir á la flexion ó al rompimiento en dos sentidos perpendiculares uno á otro, se concilia la fuerza con la economía, con el uso de piezas cuyo perfil tiene la forma de una cruz griega, (fig. 231) ó de un I (fig. 232), cuyas estremidades presentan rebordes salientes muy marcados. Estos principios tienen una multitud de aplicaciones á la construccion de las máquinas de madera ó de metal.

Supongamos ahora que se emplean piezas redondeadas, siendo la resistencia al rompimiento proporcional á las anchuras y al cuadrado de los gruesos, será proporcional al diámetro multiplicado por el cuadrado del diámetro, es decir, al cubo del diámetro de los cilindros macizos circulares que se someten á la flexion y por consiguiente al rompimiento.

Los cilindros huecos presentan grandes ventajas para resistir al rompimiento por la felíz disposicion de su forma. La naturaleza tambien nos presenta numerosos ejemplos de cilindros, los cuales emplea siempre que necesita ejercer grandes resistencias con la menos materia posible. Las plumas de las aves son cilindros huecos en la parte que ha de sostener, como brazos pequeños de palancas, toda la resistencia de los enérgicos músculos destinados á mover las alas, y la ligereza de las plumas comparada á su fuerza es tan grande que se ha hecho un proverbio.

Las artes se han apoderado de esta propiedad: se han hecho columnas huecas de hierro fundido, las cuales ademas de la ventaja de resistir igualmente en todos sentidos, tienen la de reunir la fuerza y la ligereza, mucho mas que si con el mismo peso se las biciese macizas.

Hácense armazones de camas militares de estraordinaria ligereza, y sin embargo muy sólidas, empleando cilindros huecos de cobre para los largueros, traveseros &c.

LECCION DÉCIMAQUINTA.

Del choque de los cuerpos.

Hemos considerado las resistencias imperceptibles que se oponen á cada instante al movimiento de los cuerpos en contacto y frotando unos con otros. Ahora debemos considerar otra especie de resistencia, la que se verifica cuando dos cuerpos en movimiento, y separados primero por un intervalo cualquiera, se encuentran repentinamente, que se llama *choque* ó *percusion.*

Todos los cuerpos de la naturaleza cuando están aislados y sometidos á la accion de una ó muchas fuerzas, obedecen á estas fuerzas del mismo modo. Con tal que tengan una misma masa adquieren una misma velocidad, cuando están solicitados al movimiento por fuerzas iguales.

Pero cuando dos cuerpos se encuentran pueden presentar fenómenos muy diferentes, resultantes de su choque.

Los cuerpos llamados *sólidos* son los únicos que pueden conservar en el choque la forma primitiva. Llámanse cuerpos duros aquellos que tienen la propiedad de no perder por el choque la figura primitiva, y cuerpos blandos los que mudan de forma por el choque ó por la presion.

Cuando por medio de la presion ó el choque se quieren separar varias partes de un cuerpo blando, se esperimenta siempre una resistencia mas ó menos considerable. Para separar las diversas partes de un cuerpo líquido, no se esperimenta por decirlo así ninguna especie de resistencia.

En fin hay cuerpos, como el aire atmosférico y los gases de cualquiera especie, que han menester una compresion constante para que sus diversas partes no se repelan mútuamente ni se separen unas de otras una cantidad cuyos límites no conocemos todavia.

Volvamos á la primera especie de cuerpos que acabamos de enumerar. Entre los cuerpos duros, unos no esperimentan ni aun momentáneamente deformacion. Estos son los cuerpos que se podrian llamar *perfectamente duros*. Otros esperimentan momentáneamente cierta deformacion que desaparece inmediatamente despues: estos son los cuerpos *perfectamente elásticos*. En fin, hay otra especie de cuerpos que no recobran mas que en parte la figura que tenian antes del choque ó de la presion, estos son los cuerpos *blandos* y los cuerpos *imperfectamente elásticos*.

Para mayor sencillez supondremos primero que solo dos cuerpos A, *a* (fig. 233) se mueven segun la recta *Gg*, que pasa por el centro de gravedad G, *g* de estos cuerpos, y que en el instante del choque su punto de contacto C está colocado en esta recta GC*g*.

En el momento del choque las fuerzas de que están animados los dos cuerpos obran segun la misma recta GC*g*, su resultante es igual á su suma ó á su diferencia, segun que estén dirigidas en el mismo sentido ó en sentidos contrarios.

Si los dos cuerpos son iguales en masa y estan animados de una misma velocidad opuesta se equilibrarán; porque siendo iguales las fuerzas motrices por una y otra parte, su diferencia es *cero*.

Supongamos que los dos cuerpos difieren en su masa ó su velocidad. Estando representada la unidad de fuerza por el espacio que hace correr á la unidad de masa en la unidad de tiempo, se tiene por número total que esprese la fuerza matriz de un cuerpo, el número de unidades de masa de que se compone, multiplicado por el número de unidades de espacio que corre en la unidad de tiempo.

Por ejemplo, si tomásemos por unidad de fuerza la que puede transportar un kilógramo á un metro de distancia en un segundo, veriamos al momento que la fuerza que en el mismo tiempo transporta diez kilógramos á un metro, ó un kilógramo á diez metros, es diez veces mas considerable; veriamos igualmente que la fuerza que en el mismo tiempo haria correr diez metros á diez kilógramos seria cien veces mas considerable &c.

Estimando asi la fuerza motríz de los cuerpos animados por un movimiento uniforme, por su peso multiplicado por el espacio corrido en la unidad de tiempo, es decir, por su peso multiplicado por su velocidad, se tiene lo que se llama *cantidad de movimiento de los cuerpos*.

Si se llama M y m á las masas de G y g, V y v á las velocidades de que estan animadas, se tiene MV, y mv por su cantidad de movimiento, es decir por las fuerzas que las animan: representarémos á MV por Q y á mv por q.

Si los dos cuerpos se mueven en sentido contrario, la diferencia de las dos fuerzas motrices, diferencia $=$ $MV - mv$ será pues la fuerza aplicada á mover la masa $M+m$.

Supuesto que esta fuerza es igual á la masa multiplicada por la velocidad, la velocidad es igual á la fuerza dividida por la masa. Luego la velocidad con que los dos cuerpos van á moverse es $\dfrac{MV-mv}{M+m} = \dfrac{Q-q}{M+m}$

En el choque, cuyos efectos acabamos de examinar, la cantidad total de movimiento antes del choque es $MV+mv$; despues del choque esta cantidad no es mas que $MV-mv$; luego la cantidad de movimiento perdida por el choque es igual á $2\,mv$.

Así, cuando dos cuerpos dirigidos en sentido contrario vienen á chocarse, á no ser elásticos, si se halla la cantidad de movimiento de que está animado cada uno de ellos, la cantidad de movimiento, destruida por el choque, es igual al duplo de la menor de las dos cantidades.

"Si se quiere que no haya fuerza alguna perdida en

el movimiento de las máquinas, es menester que jamás haya choque entre las diversas partes de estas máquinas, cuyos movimientos se dirijen en sentidos contrarios." Este es un principio general que nunca se debe olvidar en la construccion y movimiento de las máquinas. Todo resalto, todo movimiento destemplado tiene el inconveniente de disminuir instantáneamente la cantidad de movimiento de que se puede disponer, y de alterar la solidez y duracion de la máquina.

Si los dos cuerpos se mueven en el mismo sentido, en el momento del choque, la fuerza aplicada á mover la masa $M+m$ será $MV+mv$, y la velocidad con que los dos cuerpos se muevan, será $\frac{MV+mv}{M+m}=\frac{Q+q}{M+m}$

"Hagamos ver por medio de una aplicacion este modo de valuar la distribucion de las fuerzas en el choque de los cuerpos duros. Supongamos que el cuerpo G tiene una masa representada por 3 kilógramos, y el cuerpo *g* una masa representada por un kilógramo. Supongamos tambien que G corre dos metros por segundo en tanto que *g* no corre mas que un *metro*: la cantidad de movimiento de G será $MV=3\times2=6$: la de *g* será $mv=1\times1=1$.

Esto supuesto, si dos cuerpos se mueven en sentido contrario, se tendrá $MV-mv=6-1=5$, y $M+m=3+1=4$. Luego la velocidad comun de los dos cuerpos despues de su choque será $\frac{5}{4}$, es decir, que los dos cuerpos correrán cada uno $\frac{5}{4}$ de metro por segundo despues del choque. Si el cuerpo pequeño tuviese una velocidad de seis metros por segundo, se tendria $mv=1\times6=6$. Luego entonces $MV=mv$, $MV-mv=o$; por consiguiente habria equilibrio.

Cuando se quiere destruir repentinamente el movimiento de un cuerpo, se puede hacer de tres maneras. 1.° Lanzando á su encuentro un cuerpo de la misma masa y que se adelante con la misma velocidad. 2.° Lanzando con mas velocidad un cuerpo mas ligero. 3.° Lanzando mas lentamente un cuerpo mas pesado.

Las operaciones de las artes nos ofrecen á cada momento ejemplos de estas diversas especies de equilibrio producidos por efecto del choque con un palo, una maza, un martillo, una raqueta, poco pesados relativamente á la masa de un objeto inanimado, ó de un animal que se lanza sobre nosotros. Empleando mayor velocidad, podemos amortiguar completamente el movimiento del animal ó del objeto, y aun muchas veces hacerlo volver atras ó caer. Asi vemos niños que derriban en la rapidez de su carrera á personas grandes mucho mas pesadas que ellos, pero que andan con lentitud. Asi un carruaje ligero, pero animado de una gran velocidad, vuelca por efecto del choque á un carruaje mas pesado, pero que camina mas lentamente.

De estas leyes del choque de los cuerpos se han deducido consecuencias importantes para el arte de la guerra. Nos contentarémos con citar una sola (1).

(1) *En las cargas de caballería se forman masas de uno á dos órdenes. Se hace que adelanten estas masas con una velocidad creciente hasta que chocan contra las masas de caballería ó infantería que se les oponen. Veamos lo que pasa en este momento.*

El lado en que la masa, es decir, la suma del peso de los caballos, arneses, caballeros y armas, multiplicada por la velocidad presenta mayor cantidad de movimiento, sobrepuja necesariamente, y comunica á los dos cuerpos, acometedor y acometido, una cantidad de movimiento igual á la diferencia de las cantidades de movimiento dividida por la suma de las masas.

Supongamos que el cuerpo cargado aguarda sin moverse, ó como dicen á pie firme al que acomete. Siendo la cantidad del movimiento del cuerpo acometido igual á la masa multiplicada por una velocidad, que es cero, esta cantidad de movimiento será nula, y jamás podrá equilibrar á la del que acomete.

Hasta aquí hemos considerado como puntos materiales los cuerpos que se chocan. Cuando se considera su

---

La esperiencia tambien ha demostrado constantemente que la caballería compuesta de los caballos y hombres mas fuertes y pesados jamás puede sostener á pie firme el choque de la caballería mas ligera. Pero tomando una velocidad media puede ponerse en equilibrio y aun atropellar á los caballos y hombres pequeños que se arrojan á ella con gran velocidad. Así todo el secreto de las cargas de caballería está en conseguir en el momento del choque el mayor grado posible de velocidad. Veamos por qué medio se logra.

La composicion de los movimientos en el momento del choque no depende sino de la masa y la velocidad en este momento. Cualquiera que haya sido antes esta velocidad, basta que sea la misma en el momento del choque para producir el mismo efecto. Por ejemplo, si quiero amortiguar el movimiento de un cuerpo grave que cae de C en P, fig. 2, con una velocidad acelerada, poco importa en el momento en que llega á P, la velocidad que tuviese en p′, p″, p‴.... si tiene la misma cantidad de movimiento en este punto P, que si se hubiese movido constantemente con su velocidad primitiva, en vez de haber empezado por una velocidad imperceptible aumentada por grados. Así el choque del mazo sobre una estaca es el mismo que si el mazo hubiese tenido siempre la misma velocidad que en el instante del choque.

Luego hay en el choque una grande economía de fuerzas empezando por un movimiento lento para aumentar sucesivamente la velocidad, de modo que no se llegue al máximo de esta velocidad hasta el instante del choque.

He aquí precisamente la economía de fuerzas que se efectua en las cargas de caballería. Se corre al paso ó á trote corto la mayor parte de la distancia que

estension y su figura, veamos cuáles son las circunstancias de su equilibrio y de su movimiento.

---

se trata de pasar antes del choque, córrese al trote largo otra parte del espacio, otra al galope, y por fin, la última parte al mayor galope que puedan los caballos, sin cesar de moverse con el conjunto que por su agregacion forma como una masa sola.

Entonces el choque es absolutamente el mismo que si los caballos hubiesen tomado desde el principio de la carrera la velocidad que adquirieron al fin; pero no hubieran podido correr un espacio largo con esta velocidad, pues rendidos los caballos se habrian puesto incapaces de nuevos esfuerzos.

Esta aplicacion del principio del choque de los cuerpos á los movimientos de la caballería parece muy evidente, y que solo la comun inteligencia bastaria para conocerla; sin embargo han sido menester siglos para descubrirla.

Habia ya 300 años que los romanos hacian la guerra antes que hubiesen apreciado toda la influencia de la velocidad de los caballos sobre el poder de los choques que puede producir la caballería. Al contrario, por haber aplicado bien este principio destrozaban en cualquier encuentro los caballos ligeros de los Numidas á la caballería pesada de los Romanos.

Como la poca velocidad de esta última la privaba de estas calidades esenciales, preferian los caballeros romanos, en las grandes ocasiones, echar pie á tierra, y combatir con toda la cantidad de movimiento que pueden producir en un tiempo dado unos hombres escogidos, y no cansados por la marcha ni por la carrera.

Entre los modernos se hallará, hasta el siglo último, la misma ignorancia de los principios del choque de los cuerpos, aplicados á los movimientos de la caballería, y ganadas las mas célebres batallas de Federico por una dichosa aplicacion de estos principios.

Supongamos que los dos cuerpos M, m (fig. 235) se mueven en el mismo sentido, ó en sentido contrario, segun la direccion de la recta Gg, que reune sus centros de gravedad. Supongamos por último que en los puntos C, c, sobre G g, la superficie de los dos cuerpos sea perpendicular á G g; la fuerza con que el cuerpo m herirá á M se destruirá por la superficie de M; recíprocamente la fuerza con que el cuerpo M choque á m quedará destruida por la superficie de m, si los dos cuerpos tienen la misma cantidad de movimiento.

Supongamos ahora (fig. 236) que las superficies de los dos cuerpos son oblícuas con relacion á G g, pero paralelas en G c, sobre G g, recta que reune los dos centros de gravedad de M y m.

La (fig. 237) representa estos cuerpos en contacto en el momento del choque. Sean AC, aC, dos porciones de G g representando las cantidades de movimiento de que estan animadas M y m. Tiremos BCb perpendicular á la direccion comun de la superficie de M y de m en C, despues AB, Ab, perpendiculares á BCb.

Despues del choque: 1.° Estos dos cuerpos M m se moverán en línea recta en el sentido de Gg con una velocidad comun representada por $\frac{AC + aC}{M + m}$; 2.° M, m darán vuelta alrededor de sus centros de gravedad con una velocidad respectivamente igual á CB — cb y cb — CB, dividida por el momento de inercia de M y m.

Por esto se ve que los dos cuerpos se separarán despues del choque, siempre que su superficie no sea per-

Estos principios se aplican igualmente á los combates de la infantería y de los ejércitos en general, particularmente en el sistema de guerra por grandes masas; pero no es esta ocasion de detenerse mucho tiempo sobre estas aplicaciones que deben reservarse para las escuelas puramente militares.

pendicular á la recta tirada por su centro de gravedad.

Un caso todavia mas complicado que nos basta indicar aquí, sería el de la (fig. 238), en el cual el punto de contacto de los dos cuerpos, en el instante del choque, no se encontrase en la recta que une los centros de gravedad Gg.

Despues de haber considerado las circunstancias del choque en el caso en que dos cuerpos se dirigen segun una misma recta, se puede preguntar cuáles serian las circunstancias del choque, si dos cuerpos se dirigiesen segun líneas, que formasen ángulo al encontrarse en un punto A (fig. 239). Sean P y Q las dos fuerzas que representen las cantidades de movimiento de que están animados los cuerpos. Al construir el paralelógramo ABDC cuyos lados AB, AC son proporcionales á P y Q, la diagonal AD representará la cantidad de movimiento que anime á los dos cuerpos que se encuentran en A; y la direccion comun que seguirán estos cuerpos despues del choque, si no son elásticos. Llamando M, m, á la masa de los cuerpos, su velocidad despues del choque será dada por $\frac{AD}{MV + mv}$, representando AD una cantidad de movimiento.

Las leyes de la comunicacion del movimiento serian las mismas si los cuerpos, en vez de moverse segun una misma recta, siguiesen cada uno la misma curva contínua. En efecto, en el tiempo infinitamente pequeño que precede al choque, corren estos cuerpos un espacio que se confunde con una recta pequeña tanjente á la curva en el punto en donde se efectua el choque.

Asi, si tomo por ejemplo dos péndulos simples P, p, (fig. 240), de igual longitud, cualesquiera que sean las masas de estos péndulos, las leyes del choque serán las mismas, cuando se choquen en la posicion en que los hilos esten verticales uno á otro; porque los cuerpos P, y p llegan á esta posicion corriendo el uno á QPg, el otro gp, tangentes en Pp á la misma recta Tt.

Si subimos á la misma altura en Q y q las masas iguales P y p bajarán al mismo tiempo y con la misma velocidad á la posicion P y p en donde se chocarán; pero aquí las masas multiplicadas por las velocidades son iguales por una y otra parte; habrá pues equilibrio, y los cuerpos no se moverán despues del choque.

Si una de las masas es mayor habrá movimiento en el sentido de la mayor, segun la *ley* dada por la fórmula $\frac{MV-mv}{M+m}$

Examinemos ahora el choque de un cuerpo que se mueve en línea recta contra un cuerpo que se mueve dando vueltas sobre sí mismo.

Supongamos que un cuerpo M, (fig. 241) que tenga en G su centro de gravedad da vueltas alrededor de un eje C representado por el punto C; hemos demostrado (leccion 7.ª) que hay otro punto c en la prolongacion de la recta CG, tal que se puede suponer á cada instante, la masa entera del cuerpo M concentrada en c, y ademas animada por toda la cantidad de movimiento que tiene el cuerpo, sin que se altere la velocidad angular de este cuerpo. Admitamos que el cuerpo M, en su movimiento encuentra un obstáculo m, y que en el punto A en que este cuerpo encuentra el obstáculo: 1.º La superficie del cuerpo y la del obstáculo sean perpendiculares á la línea cA, perpendicular á Cc. Todo el movimiento del cuerpo será destruido por el obstáculo que se supone inmovil. Así el cuerpo permanecerá en reposo por efecto de la percusion, aun cuando en el momento del choque dejase de estar fijo el eje C. Llámase el punto C *centro de percusion.*

Si el obstáculo inmovil, cuya resistencia está representada por F, es tal que la distancia CD sea mayor que Cc (fig. 242) ó menor (fig. 243), entonces el eje de rotacion esperimenta una reaccion por efecto del choque.

El cuerpo M solicitado por las fuerzas F y f tira á doblarse ó romperse entre C y D (fig. 242); entre C, c (fig. 243). Se tiene segun el equilibrio de las fuerzas paralelas

$$f \times Cc = F \times CD.$$

Además, la accion F′ ejercida por el eje en virtud del choque, es igual á $f-F$ (fig. 242) y $F-f$ (fig. 243).

Así, siempre que el choque es producido segun una recta AF que no está á una distancia de C = Cc, el eje fijo C esperimenta la reaccion del choque. Si C D (fig. 242) es mayor que C c, la reaccion del choque empuja el eje fijo en sentido contrario á la rotacion del cuerpo M. Si CD es menor que Cc, la reaccion del choque empuja al eje fijo en el sentido mismo de la rotacion del cuerpo M. Estos resultados se aplican inmediatamente á las operaciones de las artes.

Empléanse frecuentemente *martillos* y *martinetes* á los que le comunica un movimiento de rotacion para producir choques. Para que el eje C, (fig. 244) de un martinete no esperimente ninguna reaccion en el choque, es menester que se verifiquen todas las condiciones de la (fig. 241).

Así, siendo m el cuerpo colocado sobre el yunque, y A el punto en que pega el martinete la recta A F perpendicular en A á la superficie del martinete, debe pasar por el centro c de percusion, siendo la misma recta C c perpendicular á A c.

Cuando el operario maneja un martillo de mano (fig. 245) si no se han verificado las condiciones de que acabamos de hablar, la mano esperimenta una reaccion, á veces dolorosa. Segun que el punto en que se efectua el choque se halle mas ó menos distante del eje de rotacion del martillo, se halla la mano rechazada en sentido contrario, ó solicitada en el mismo sentido del movimiento que comunica.

Empléase el choque directo de un cuerpo para poner en movimiento un péndulo que ha de oscilar alrededor de un eje. Tal es el efecto producido en los esperimentos hechos con el *péndulo balístico.*

Imagínese un zoquete de madera M. (fig. 246) rodeado de aros de hierro, y suspendido por varillas tambien de hierro del eje C.

Tírese una bala m en el péndulo M, esforzándose para lanzarlo segun la recta que pasa por el centro de percusion c. Si se consigue el objeto no se produce reaccion alguna sobre el eje de rotacion C, y la velocidad angular del péndulo es igual á $m \times C\,c$, dividido por el momento de inercia del péndulo que contiene la bala. Ya he dado la descripcion de estos esperimentos. (Viages por la gran Bretaña, 1.ª parte, fuerza militar).

Cuando se conoce el momento de inercia del péndulo, las masas M m y la distancia C c, se infiere, por una operacion muy sencilla de la velocidad de M, la de m, en el momento del choque. Este medio se emplea para medir con gran exactitud la velocidad de los proyectiles: cosa muy importante en la balística.

Acabamos de ver que hay destruccion de fuerzas, siempre que estas obran en sentidos opuestos. Luego si es importante no perder fuerzas, en cuyo caso están casi todas las máquinas, se necesita evitar todo lo posible en estas máquinas los choques producidos por movimientos en sentidos contrarios.

Por el mismo motivo se han de evitar los rozamientos que en vez de contínuos é imperceptibles se ejecutan con sacudimientos y reacciones en que hay siempre algunos choques perjudiciales; y como se manifiestan con crujidos y dislocaciones, se debe inferir que casi no hay mas máquinas perfectas que aquellas cuyos movimientos se ejecutan con regularidad, suavidad, sin ruido, y sin conmociones.

El cuidado que se debe tener en evitar los choques en los engranages es tambien muy importante.

Supongamos (fig. 247) que en el momento en que el diente D de la rueda O impele el diente d de la rueda o se escapa, que el diente D′ no haya cojido todavia el diente d' del piñon: inmediatamente este piñon queda libre, y si es solicitado por alguna fuerza, toma un movimiento retrógrado hasta que d' encuentra á D′. Luego hay choque en sentido opuesto y por consiguiente cantidad perdida de movimiento. Es menester por re-

gla general que el diente D′ haya cogido el diente d' antes que se separen los dos dientes D y d.

Voy á presentar algunas observaciones que hice sobre los choques pequeños, que resultan *del movimiento* en las naves, por tener aplicacion á cualquiera otra especie de máquinas (1).

Como hemos visto por lo que precede, decimos en nuestra memoria, cuando el navío está en reposo, no deja por eso de sufrir una contraccion su parte inferior, y su parte superior una dilatacion. El efecto de esto es: 1.º alargar ó estrechar las fibras de la madera; 2.º destruir la trabazon de la carpintería, y 3.º doblar ó romper los clavos y clavijas que aseguran estas piezas.

A medida que se aumentan los momentos de las fuerzas deformadoras, se aumentan estos efectos de un modo análogo. Mas despues no disminuyen en la misma relacion, cuando disminuyen estos momentos, porque las deformaciones que acabamos de indicar, se producen en cuerpos imperfectamente elásticos.

Asi, cuando el arco disminuye, los clavos y clavijas se vuelven á enderezar muy poco; las trabazones desunidas no se reunen sino en parte; en fin las fibras alargadas no se retiran bastante y las contraidas no vuelven á tomar su total primitiva longitud.

No hay conexion íntima entre los elementos del edificio, y este defecto de conexion produce efectos de una energía estraordinaria en la armadura de las naves.

El desencage de estos elementos permite á cada uno de ellos tomar un movimiento libre mas ó menos considerable con relacion á aquellos á que estuvo antes unido invariablemente. La reunion de estos movimientos es lo que se llama juego del enmaderado.

(1) *Estas observaciones forman parte de la 5.ª* Memoria de las aplicaciones de la Geometría.

Supongamos que un edificio que tiene *juego* en sus diversas partes esté solicitado por cualesquiera potencias deformadoras; su primer efecto será dislocar los elementos de este edificio, segun las direcciones que puedan tomar en virtud de su juego. Estos elementos no oponen á la primera dislocacion sino la resistencia de su inercia. Hasta entonces la cantidad de fuerzas vivas de que está animado el sistema, no se disminuye nada.

Pero cuando cada elemento esperimenta de este modo una dislocacion libre, adquiere cierta velocidad, y cuando esperimenta una resistencia eficaz por las otras partes del sistema, esta velocidad produce un choque.

Entonces no es solo por la presion por lo que obran los elementos del edificio unos sobre otros para alargarse ó acortarse, sino porque el choque aumenta prodigiosamente la energía de la fuerza perturbadora. Por esto, siendo las mismas las demas circunstancias, y con las mismas fuerzas deformadoras, debe aumentarse sin cesar el *juego* de las piezas y producir efectos cada vez mas peligrosos.

Los choques de que hablamos se comunican por una velocidad, por decirlo asi, imperceptible, cuando resultan de las variaciones lentas efectuadas en el cargamento de la nave; pero son violentos y rápidos en las perturbaciones producidas por las fuerzas de la naturaleza.

No deben aplicarse á la estructura de una nave las ideas que pudieran formarse de la estructura de un edificio establecido sobre un suelo firme, y sin que ninguna potencia deformadora coopere con su accion á la del peso de los elementos de este mismo edificio. Se debe considerar principalmente la nave cuando flota en un mar mas ó menos agitado, cuando está combatido por vientos mas ó menos fuertes, mas ó menos constantes, mas ó menos violentos.

Entonces se reconoce que los momentos en que se

produce el arco del navío varían por decirlo asi á cada instante; acuden hácia la popa y hácia la proa alternativamente positivos ó negativos. Debe mirarse una nave combatida por el mar y los vientos como un reptil que nadando por la superficie de un mar undoso, se encorva y enrosca sin cesar en el plano vertical de su camino, y se adelanta formando asi una línea sinuosa.

Las leyes del choque de los cuerpos duros sin elasticidad son las mismas que las de los cuerpos blandos, y la deformacion que sufren las diversas partes de estos cuerpos, no alteran nada la composicion del movimiento en el instante de la percusion. No sucede asi en el choque de los cuerpos elásticos.

Cuando dos cuerpos perfectamente elásticos y de la misma masa se encuentran con la misma velocidad, en vez de equilibrarse y permanecer en reposo, cada uno de ellos no solo aniquila la fuerza del otro, sino que trasmite á éste toda su propia fuerza. En consecuencia, ambos retroceden con la misma velocidad que tenian antes del choque, y no se cambian las cantidades de movimiento. Esta propiedad de los cuerpos elásticos, iguales en masa y velocidad, subsiste cuando estas masas y velocidades varían, de modo que antes ó despues del choque, la suma de las cantidades de movimiento es siempre la misma.

Presentemos algunas aplicaciones de este principio: Supongamos que el cuerpo en reposo A (fig. 248) encuentra al cuerpo B, de la misma masa M con la velocidad V. La cantidad de movimiento es *cero* para A, MV para B, y por consiguiente MV para los dos cuerpos. Entonces B comunica á A toda la cantidad de movimiento MV; pero A no puede comunicar á B mas que una cantidad de movimiento igual á *cero*, es decir, nula. Luego B pierde toda su cantidad de movimiento, sin recibir nada y queda en reposo; en tanto que A que ha tomado toda la cantidad de movimiento de B y que tiene la misma masa, se mueve con la misma velocidad que tenia B.

Supongamos ahora que haya (fig. 249) tres cuerpos elásticos iguales en masa A,B,C, de los cuales C sea el único que esté en movimiento: que C al pegar contra B le comunique toda la cantidad de su movimiento, y se quede en reposo: B comunique lo mismo á A toda esta cantidad de movimiento y quede en reposo. Luego A se moverá con toda la cantidad de movimiento que tenia el cuerpo C.

El mismo resultado se hallaría si hubiese 4, 5, &c. cuerpos iguales, de los cuales solo el último estuviese en movimiento: siempre los cuerpos intermedios quedarian en reposo como el último despues del choque; al paso que solo el primero se adelantaria con toda la cantidad de movimiento del último.

Se hace palpable esta verdad mecánica por medio de esferas ó bolas de marfil A,B,C, (fig. 250), suspendidas con hilos para formar una especie de péndulos.

1.° Cuando se separan dos bolas una á la derecha y otra á la izquierda de la vertical trazada por el punto de suspension, y se las deja caer al mismo tiempo; llegan á la vertical en el mismo momento y con la misma velocidad; despues retroceden cada una con la misma velocidad.

Si el marfil fuese perfectamente elástico y la operacion se hiciese en el vacío, las bolas volverian á subir exactamente á la altura de donde habian partido, y volviendo á caer al mismo tiempo de esta altura se chocarian otra vez con la misma velocidad; lo cual produciria un movimiento perpétuo. Pero el marfil no es un cuerpo perfectamente elástico ni le hay en la naturaleza. Las bolas pues suben menos á cada choque, y al cabo de cierto número de oscilaciones se terminan completamente sus cantidades de movimiento.

2.° Si se suspenden tres bolas de marfil que se toquen naturalmente y se eleva la primera A á P (figura 250), y despues se la deja caer, en el mismo instante la bola intermedia B queda en reposo y la última bola C sube á G, á la altura del punto P. En seguida vuelve

á caer y comunica su movimiento al través de B á la bola A, que vuelve á subir á P, para volver á bajar como la primera vez, &c.

Un resultado análogo se produce cuando hay 4, 5, 6 bolas, y en general un número cualquiera.

No basta considerar el choque directo de los cuerpos, es necesario conocer las leyes de su choque oblícuo.

Para simplificar la cuestion en lo posible, supongamos que uno de los dos cuerpos sea fijo y plano siendo el otro esférico.

En el momento en que la esfera S, (fig. 251) impelida por la fuerza oblícua AO encuentra en C el plano fijo, procura dar vueltas alrededor de C, con una fuerza igual á AO$\times$CF, siendo CF perpendicular á AOF. Formemos en el rectángulo AHOK, cuyos lados OK,AH son paralelos al plano MN, y cuyos lados AK,OH son perpendiculares á este plano.

Estando resuelta la fuerza AO en OH y OK, si la esfera y el plano son cuerpos sin elasticidad, no queda mas que OK; y la fuerza OH que representa la presion de la esfera sobre el plano fijo queda destruida por este plano.

La esfera animada por la fuerza KO paralela al plano MN llega á moverse haciendo esperimentar al plano MN una frotacion causada por la presion OH. Hemos visto (*leccion XIII*) como pueden apreciarse los efectos de esta resistencia.

El rozamiento impedirá á la esfera resbalar á lo largo de MN; rodará sobre este plano como una rueda sobre el terreno; y si el plano es igualmente terso por todas partes, la resistencia que causa el rozamiento será la misma con la misma presion que causa OH.

Si el cuerpo que choca en el plano no tuviese un contorno circular, rodaria este plano, pero de modo que su centro de gravedad se elevaria y bajaria alternativamente, lo cual produciria resistencias desiguales mas ó menos complicadas, que nos basta indicar aqui.

Estas resistencias desiguales nos manifiestan que para transmitir á lo largo del plano fijo esfuerzos continuados con regularidad, es necesario emplear siempre cuerpos de contornos circulares, como esferas, cilindros, conos, y en general las superficies de revolucion.

Si en vez de un cuerpo duro fuese un cuerpo blando el que viniese á chocar con el plano fijo, la cuestion se haria mas complicada: sería necesario conocer la forma que tomaria el cuerpo blando despues del choque. Por fortuna este caso tiene pocas aplicaciones útiles en las artes mecánicas.

No sucede lo mismo en el choque de los cuerpos elásticos. Cuando un cuerpo A perfectamente elástico choca en un plano fijo MN (fig. 252), la fuerza AO que lo anima se descompone en otras dos: OH que empuja perpendicularmente al plano MN, y OK que obra paralelamente á este plano: ésta sin esperimentar mas obstáculo continúa su accion despues del choque. Luego el cuerpo se mueve siempre con la misma velocidad paralelamente al plano fijo MN. La fuerza OH obrando perpendicularmente á MN debe estar sometida á las leyes del choque directo de los cuerpos elásticos. Luego 1.°: toda la fuerza OH debe transmitirse al plano fijo y restituirse por la reaccion de este cuerpo, la cual es siempre igual á la accion.

El cuerpo elástico volverá á subir animado de una fuerza igual á OH pero dirigida en sentido contrario. Por consiguiente, si un cuerpo elástico O llega animado de un movimiento uniforme rectilíneo, de modo que en un tiempo dado pase de OK paralelamente al plano fijo, y de HO perpendicularmente á este plano, despues del choque el cuerpo se adelantará en un mismo espacio de tiempo hácia OK′=OK paralelamente al plano fijo y á OH perpendicularmente á este plano. Luego la diagonal OA′ que representará la direccion y la magnitud del espacio corrido, será la diagonal de un paralelógramo rectángulo HOK′A′ igual á HOKA. Luego los ángulos AOH, A′OH son iguales entre sí.

Asi, cuando un cuerpo perfectamente elástico viene

á dar en un plano fijo, bajo un ángulo que se llama *de incidencia*, conserva toda su velocidad y toma una direccion nueva que lo aleja del plano bajo un ángulo llamado *de reflexion*, igual al ángulo de incidencia.

Ya hemos dicho que el marfil es uno de los cuerpos que mas se acercan á ser perfectamente elásticos: asi cuando una bola de marfil viene á dar contra un plano, rechaza conservando su velocidad, y de manera que el ángulo de reflexion es igual con corta diferencia al ángulo de incidencia. El juego de villar está fundado en el conocimiento de esta ley del choque de los cuerpos elásticos.

Supongamos por ejemplo que la tronera C (fig. 253) esté colocada de tal modo con relacion á las bolas A y B que tirando 1.°: la recta CBE hasta la banda MN; 2.° la línea AE, se tiene el ángulo MEB=NEA. Impeliendo la bola A hácia el punto E, rechazará siguiendo la direccion EB, dará directamente á B y permanecerá en reposo, y B marchará con toda la velocidad de A en el momento del choque en la direccion BC que conduce á la tronera. Las mas veces la bola B no va en la direccion rectilínea CBE que conduce á la tronera. Asi se ve en la (fig. 254). Entonces es menester que la bola A, despues de haber sido lanzada á E, y rechazada de modo que AEN=MEA′, llegue á una posicion A′ para chocar con la bola B de modo que vaya á la tronera C (1).

Se ve pues que el juego de villar exige una vista muy ejercitada en juzgar de direcciones y ángulos, y una mano no menos esperta en seguir las indicaciones de la vista.

En el siglo XVII hizo uso el célebre Vauban de un modo de disparar el cañon que participa de la reflexion

(1) *Esta condicion se verificará si la recta DOY, tangente á las dos bolas en su punto de contacto, es tal que los ángulos formados por esta recta y por BC, A′E, son iguales.*

de los cuerpos elásticos. Tirando balas con una carga mediana, y bajo la direccion AB (fig. 255), poco elevada sobre el horizonte, la bala A atraida á la tierra por su peso cae en A′, bajo un ángulo algo mayor que BAN: entonces refleja la bala bajo un ángulo B′A′N casi igual á BAN, y cae luego otra vez para levantarse de nuevo. Si en la línea AN hay varios obstáculos que destruir, se les pega tantas veces cuantas se producen asi choques y reflexiones ó rebotes. No solo se obtienen reflexiones sucesivas cuando se hieren con la bala cuerpos duros, como murallas de piedra ó de madera, plazas fuertes y navíos, sino aun cuando se hiere la tierra de los revestimientos y el campo raso ó el hielo como han hecho en Austerlitz nuestros guerreros; pero lanzando sobre un fluido cuerpos elásticos que hieran la superficie de este fluido, bajo un ángulo pequeño de incidencia, se producen semejantes reflexiones ó rebotes.

Esto lo saben bien los niños cuando lanzan sobre el agua piedras planas. Estas piedras saltan y producen hasta 7, 8 y 10 reflexiones segun se las arroja con mas ó menos fuerza y destreza.

La luz que da en los cuerpos nos presenta uno de los mas hermosos é importantes ejemplos de la reflexion de los cuerpos elásticos. En esta caida el ángulo de reflexion es siempre igual al ángulo de incidencia, y nuestros mejores instrumentos no sirven mas que para convencernos de la perfecta elasticidad de este cuerpo.

Hemos visto que en el choque los cuerpos duros y los cuerpos blandos esperimentan una pérdida de fuerza, si son las direcciones en sentido opuesto, pérdida que no esperimentan los cuerpos perfectamente elásticos, y que solo esperimentan en parte los cuerpos imperfectamente elásticos.

Esta ventaja de los cuerpos elásticos respecto de los cuerpos duros y de los blandos, los hace de un uso muy ventajoso en la mecánica. Si se considera, por ejemplo, el movimiento de los carruages cuyas ruedas sin cesar esperimentan choques mas ó menos grandes contra las

partes salientes de los caminos, se encontrará mucha ventaja en conducir sobre resortes la caja de los carruages ó su carga. En virtud de estos resortes, parte de la fuerza horizontal que se perderia por el choque, se conserva y sirve por consiguiente para el movimiento progresivo del carruage. En cuanto á la parte de fuerza que impele de abajo arriba al carruage, en virtud de los resortes ó muelles que se doblegan en el momento en que la fuerza que impele de abajo arriba empieza á obrar, el centro de gravedad del carruage se encuentra mas ó menos levantado; pero cuando pasa el obstáculo, cuando las ruedas, despues de haber subido, bajan, el resorte suspendiendo la caja ó la carga del carruage, hace que el centro de gravedad recobre su altura primitiva, con relacion á las ruedas.

Asi por efecto de los resortes, el centro de gravedad de los carruages debe esperimentar movimientos de subida y bajada menos violentos y menos estensos. Este efecto es en estremo notable cuando se comparan los sacudimientos de un carruage no suspendido y de otro con muelles, particularmente cuando la velocidad progresiva del carruage llega á ser considerable. Este efecto no solo es ventajoso para disminuir el cansancio de los viajeros, sino tambien para preservar á los productos de artes que se transportan de movimientos violentos y de los choques que pudieran dañarlos y hacerles perder mucho de su valor. Suspendiendo estos productos de artes sobre muelles al transportarlos en carruages, se logran las dos ventajas de conservar mejor los objetos y de transportarlos con una fuerza mucho menor. Espuestos estos principios hace algunos años en nuestro curso del conservatorio han llegado ya á popularizarse. Se ve ya en Paris un gran número de carruages destinados á la conduccion de objetos quebradizos suspendidos por muelles. Este uso se aumenta de dia en dia, y producirá los dos beneficios de transportar mayor peso con las mismas caballerías, y evitar las desgracias que suelen ocurrir en la conduccion.

Estos resortes no tienen solo las dos ventajas de disminuir el trabajo del carruage y el traqueteo de la carga; disminuyen tambien los violentos choques que en el camino sufre el carruage, y asi le conservan mas.

La elasticidad de las cuerdas los hace muy á propósito para resistir choques violentos, haciendo aquellas el oficio de muelles, como se ve en las cuerdas atadas por un estremo á la cabeza de los mástiles y por otro al borde de un navío. Cuando el viento choca ó sacude repentinamente en las velas con una fuerza nueva, esta fuerza produce el efecto de alargar por grados las cuerdas que estan al lado del viento, hasta el punto en que la resistencia gradual que oponen estas cuerdas, unida á la resistencia creciente que ofrece la estabilidad de la nave, á medida que se inclina por efecto del viento, da un total equivalente á la impulsion del viento. Si esta impulsion disminuye despues, la fuerza elástica de las cuerdas les hace recobrar por grados su estension primitiva. Los mástiles que en virtud de su elasticidad se habian doblado á medida que se alargaban las cuerdas, se enderezan en virtud de esta elasticidad, y el sistema es capaz de una resistencia nueva cuando vuelve á empezar la accion violenta del viento.

Importa mucho, antes de emplear las cuerdas para sostener los mástiles, como los estais y obenques, estirarlas mucho. En efecto, en la primera época de su servicio estan sujetas á alargar mucho á causa de las fuerzas que les tiran en sentido longitudinal, sin recobrar su longitud primitiva cuando cesan de obrar estas fuerzas. Es pues necesario conocer el límite de esta especie de alargamiento antes que se logre de la fuerza elástica de las cuerdas el importante servicio que se debe esperar de ellas.

Yo he visto romperse todos los mástiles superiores del navío de tres puentes, *el Comercio de Paris*, en un temporal entre la isla de Córcega y Africa; porque esta nave, recientemente aparejada, tenia sostenidos los mástiles con cuerdas que aun no habian esperimentado

todo el alargamiento que se necesitaba destruir para que su fuerza de elasticidad pudiese obrar como resistencia útil y suficiente.

Cuando se quieren establecer á bordo morteros muy pesados para arrojar bombas de un peso considerable, para amortiguar el choque que se produce en el momento del tiro de la bomba que impele violentamente al mortero contra la nave, se tiene cuidado de colocar debajo de la cubierta un lecho de cuerpos elásticos. Este lecho, cediendo por grados á la enorme presion que transmite el mortero, impide los detrozos ó roturas que pudieran sobrevenir al maderado de la nave.

Cuando se coloca una bigornia sobre un piso de mampostería que solo tiene dureza sin elasticidad, se observa que los choques multiplicados del martillo sobre la bigornia, producen el efecto de romper muy pronto las piedras sobre que descansa la bigornia. Si se tiene cuidado de poner bajo la bigornia un cuerpo elástico, tal como un zoquete de madera, queda sin lesion la parte de fábrica sobre que descansa la madera.

Cuando se sirven los operarios de un martillo con la cabeza de hierro y el mango de madera, el choque producido por la cabeza del martillo transmite al mango vibraciones que llegarian á cansar mucho la mano del operario; particularmente en un trabajo tal como el de los caldereros y hojalateros, en que el martillo da golpes precipitados en superficies vibrantes. En este caso debe procurarse dar al puño del mango mas grueso que á la parte que ajusta con la cabeza del martillo. Por este medio, pasando las vibraciones al transmitirse por secciones que empiezan teniendo muy poca superficie, la cual va siendo cada vez mas estensa, estas vibraciones van teniendo cada vez menos energía, y al fin el operario apenas llega á sentirlas.

TABLA
DE MATERIAS.

Páginas.

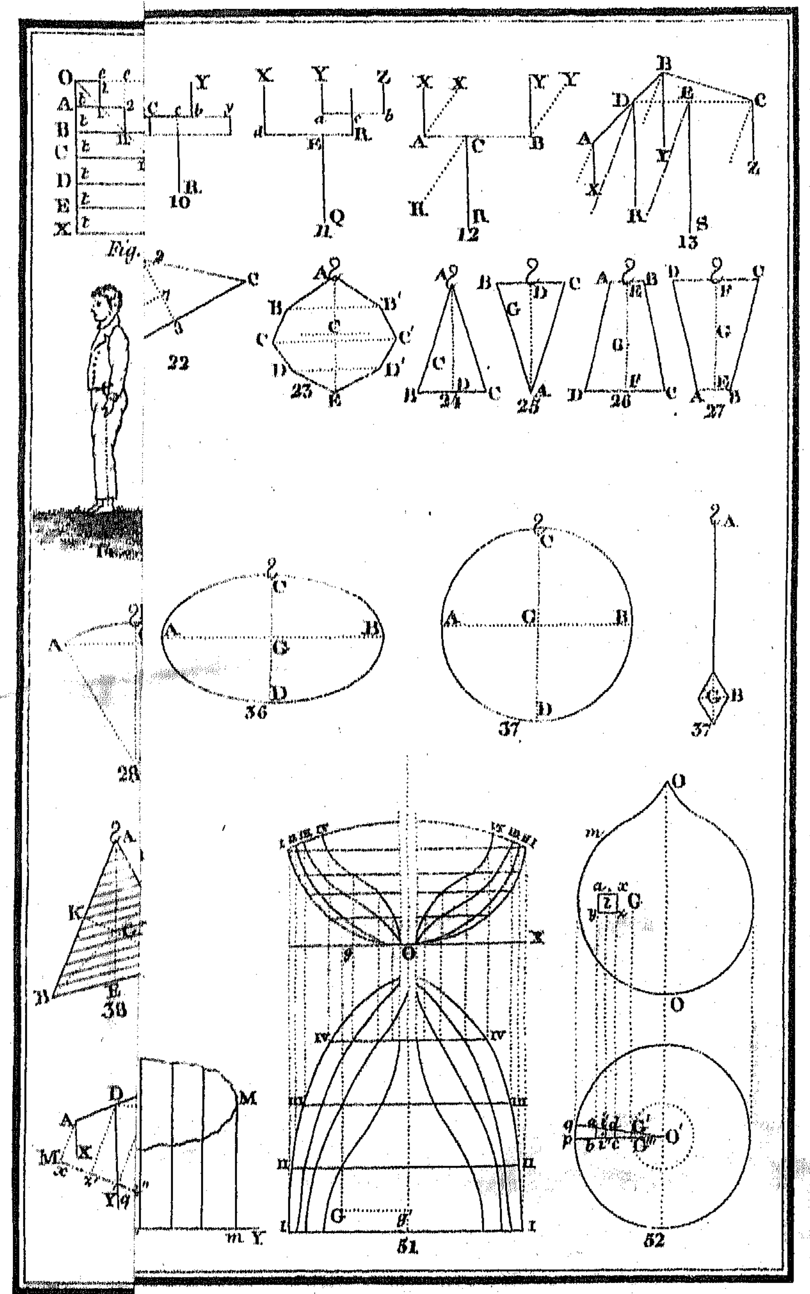


Fig.
10
12
13
22
23
24
25
26
27
28
36
37
37
38
51
52

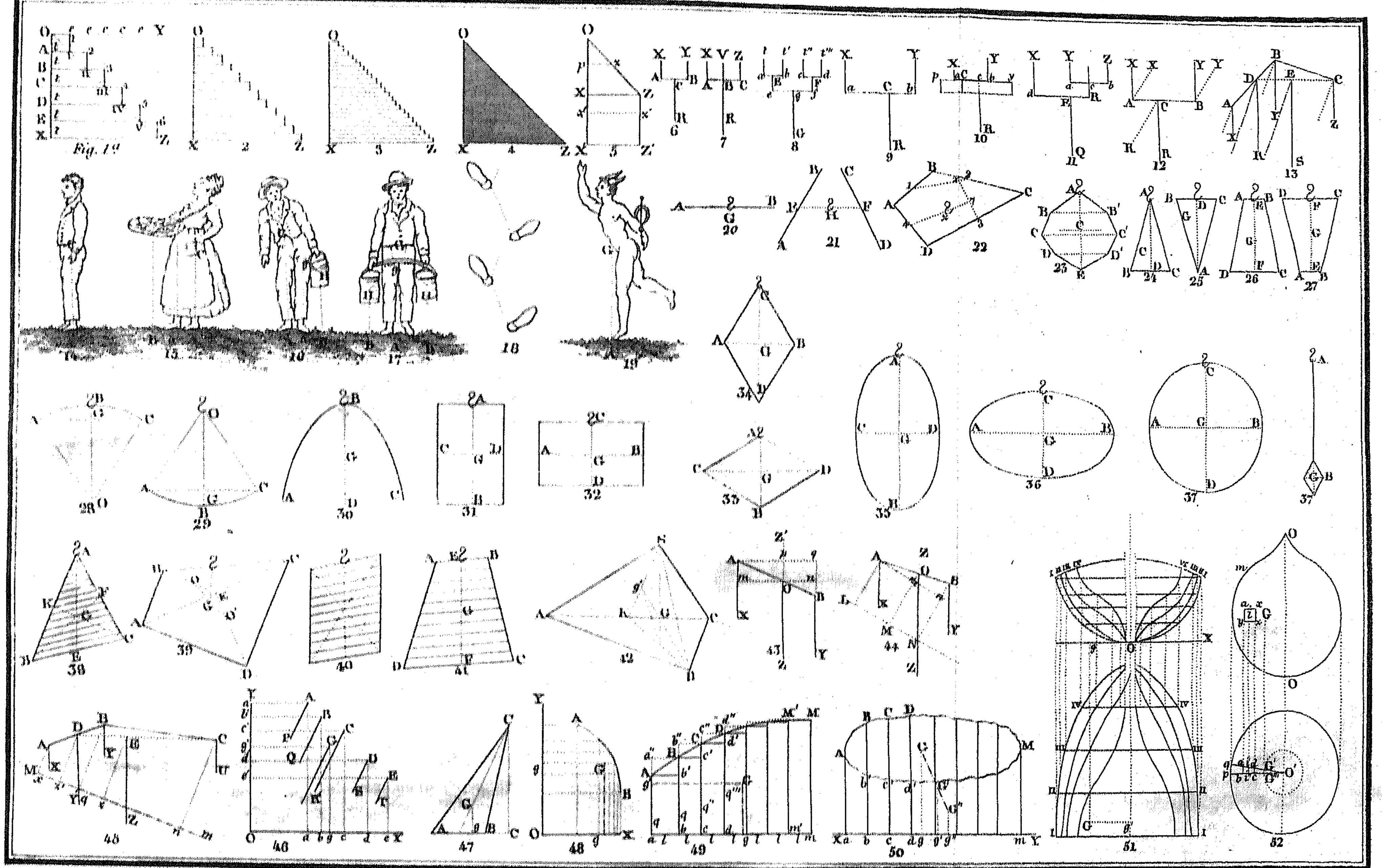
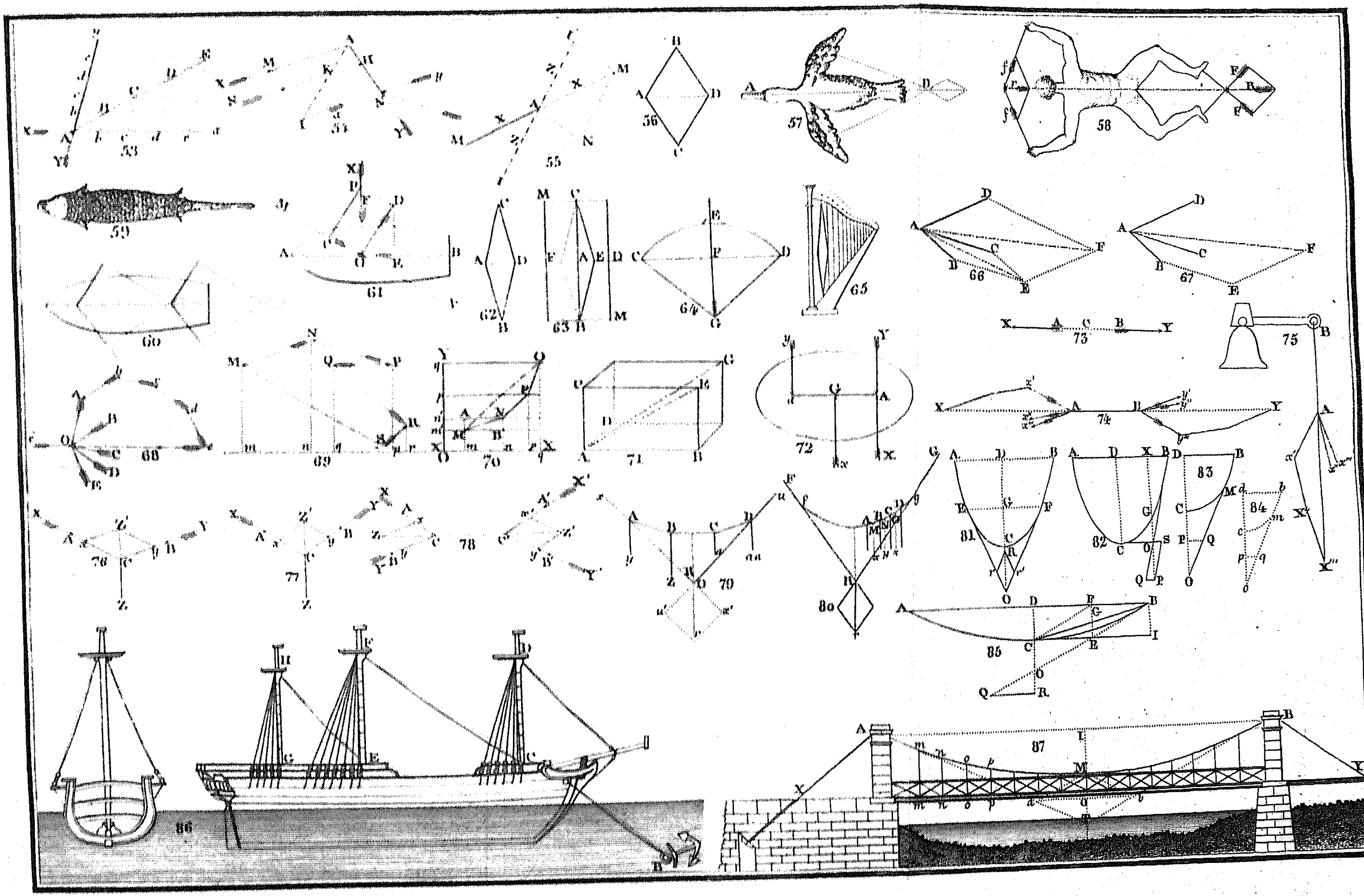
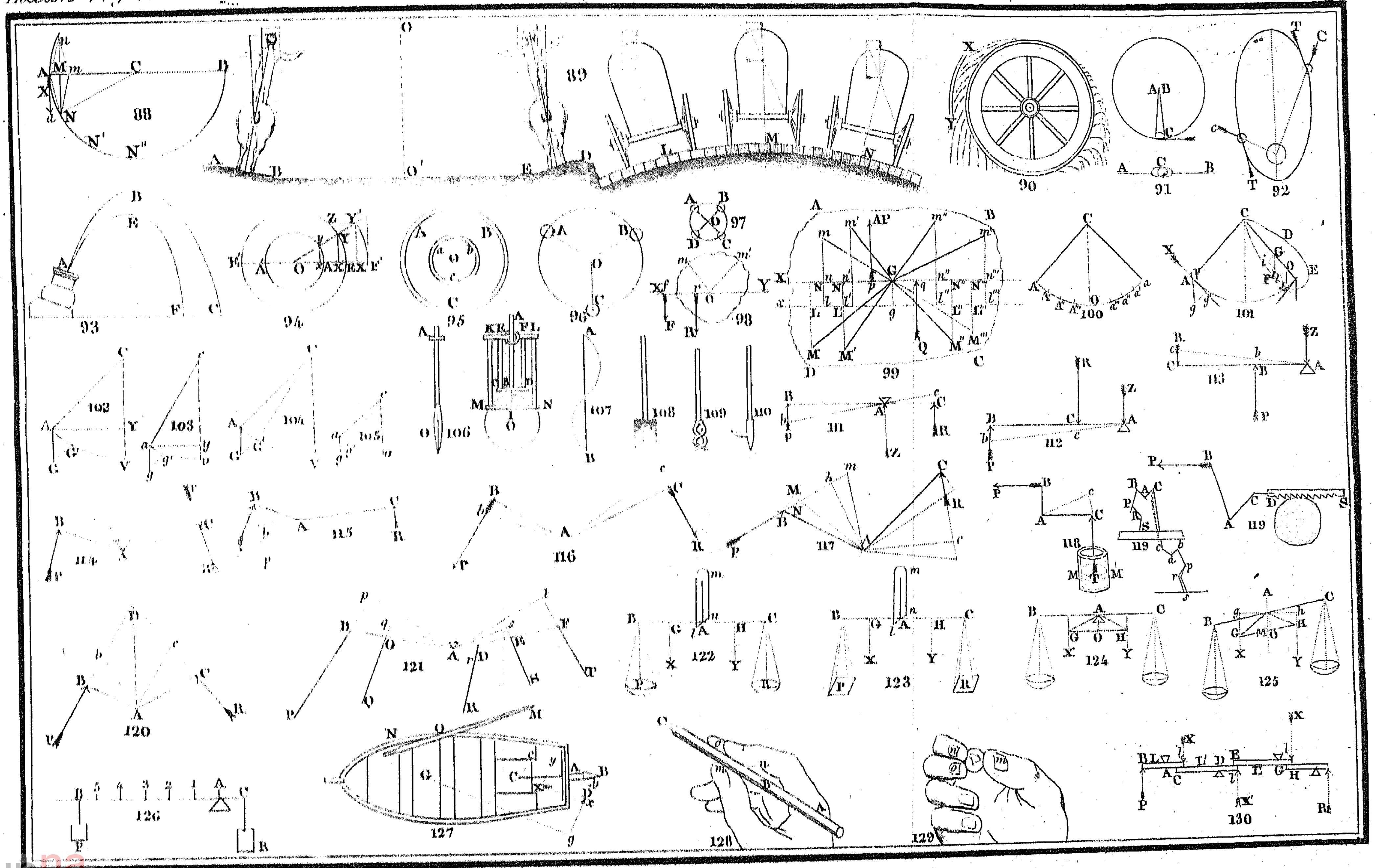
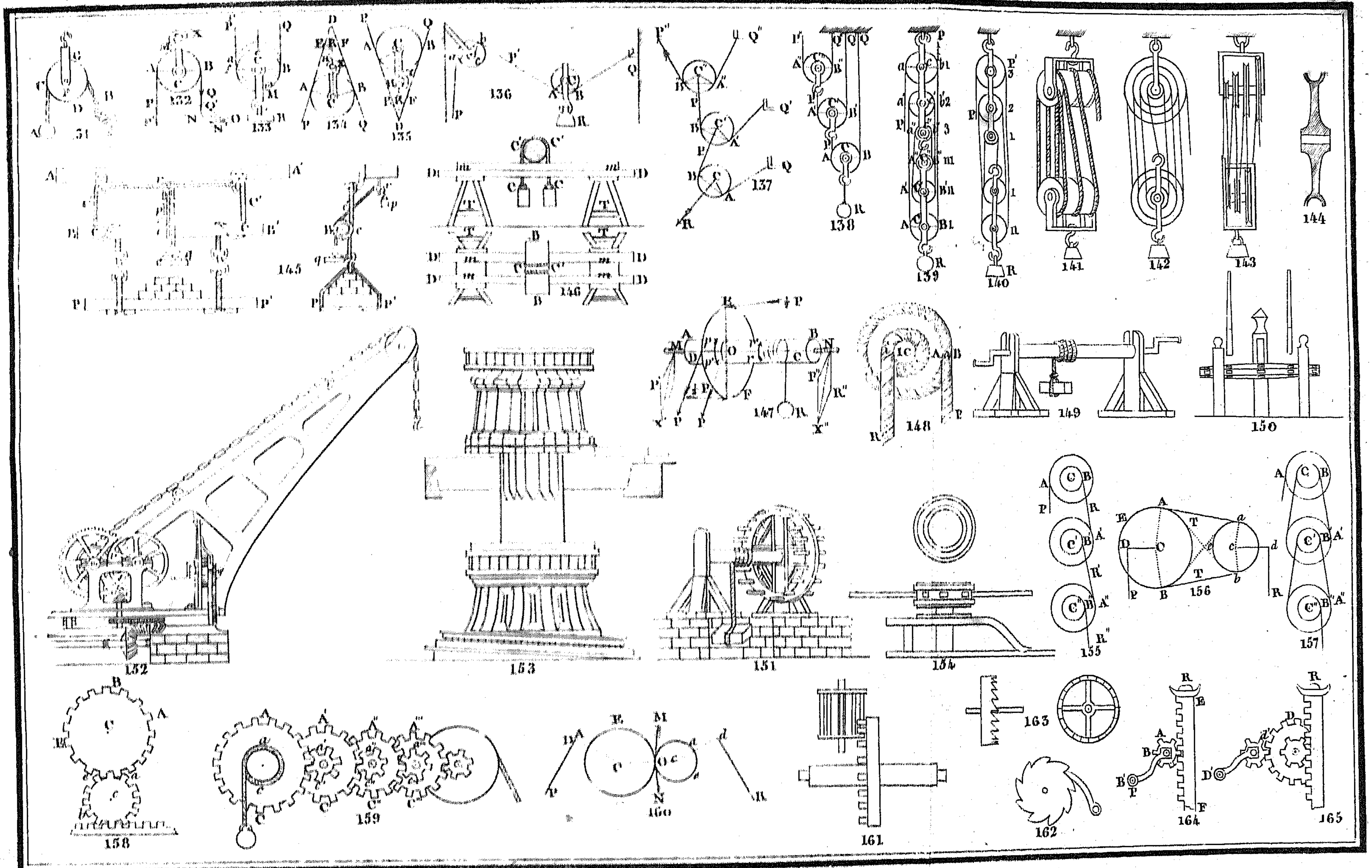
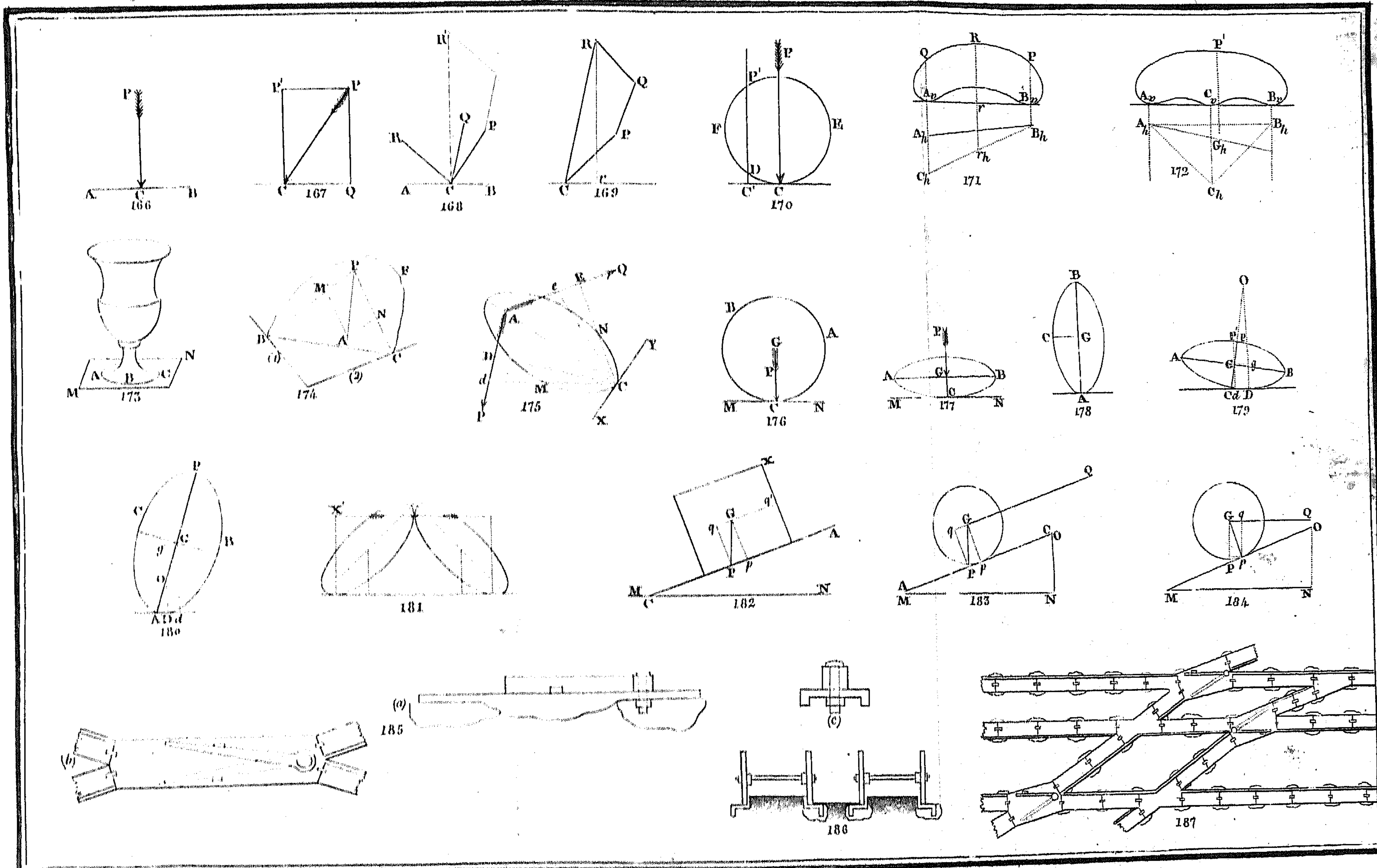


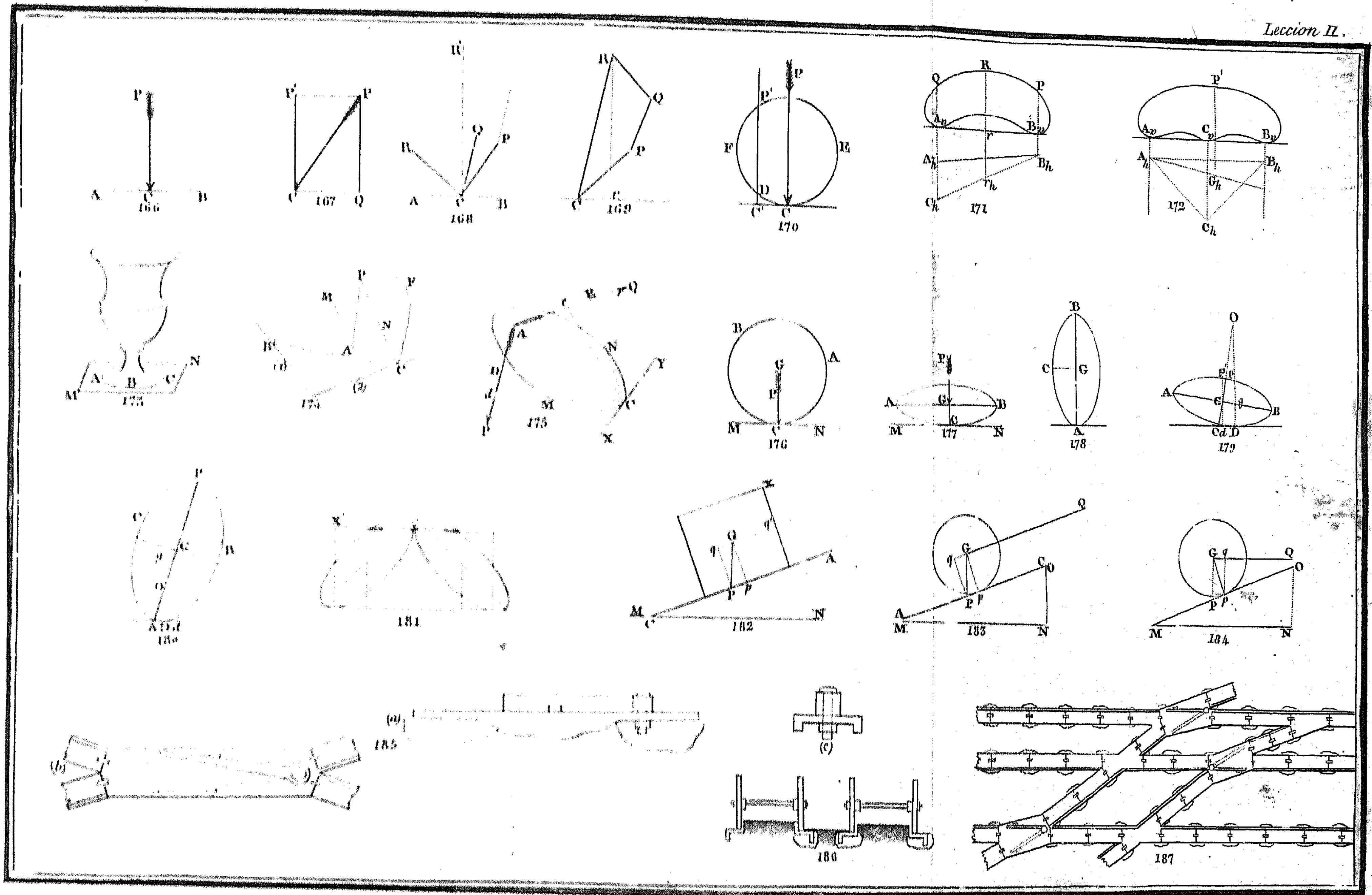
Fig. 1ª
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52

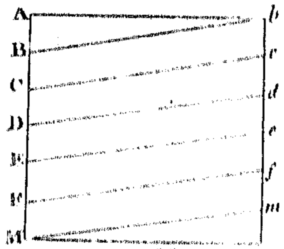



88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130

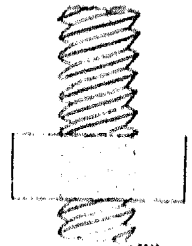

131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165

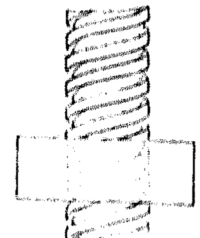

166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187


166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187

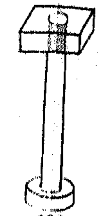


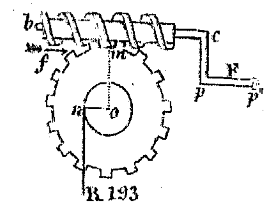
188

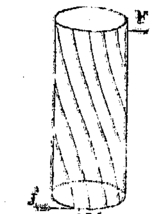

189

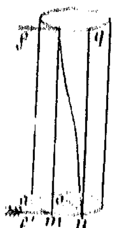

190

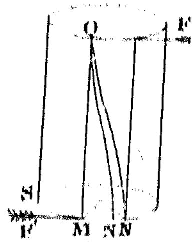

191

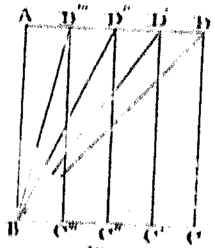

192

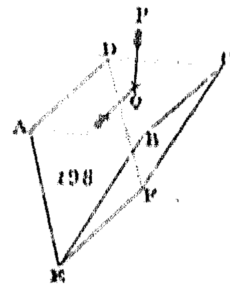

193

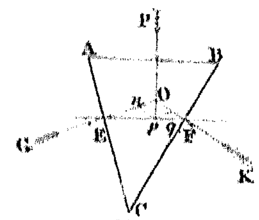

194

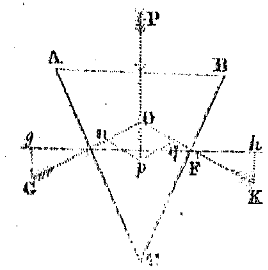

195

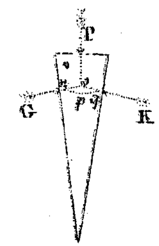

196

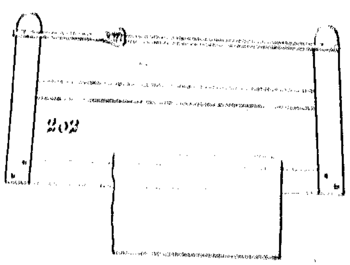

197


198

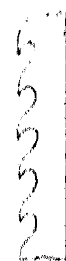

199

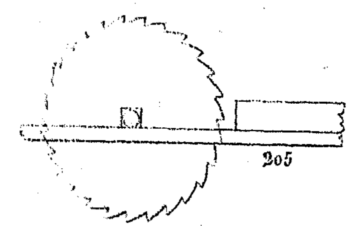

200

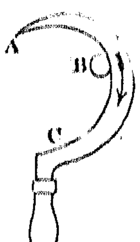

201

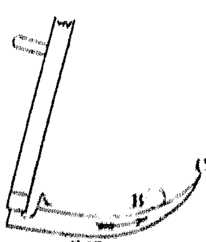

202

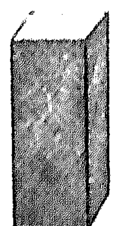

203

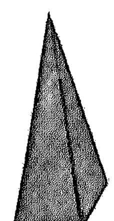

204

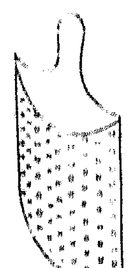

205

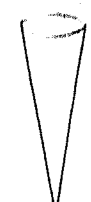

206

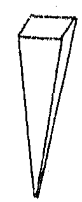

207


208


209

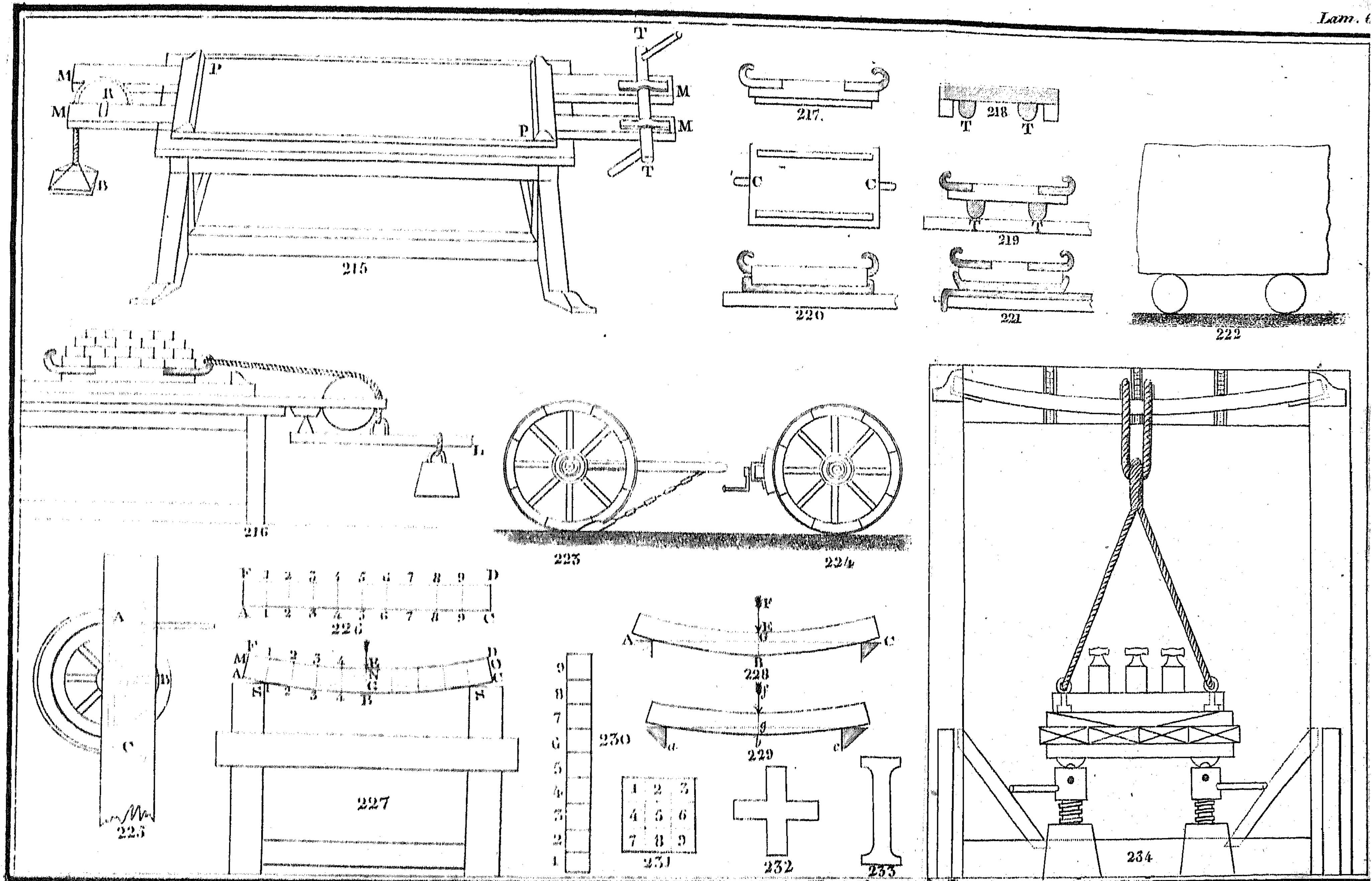

210

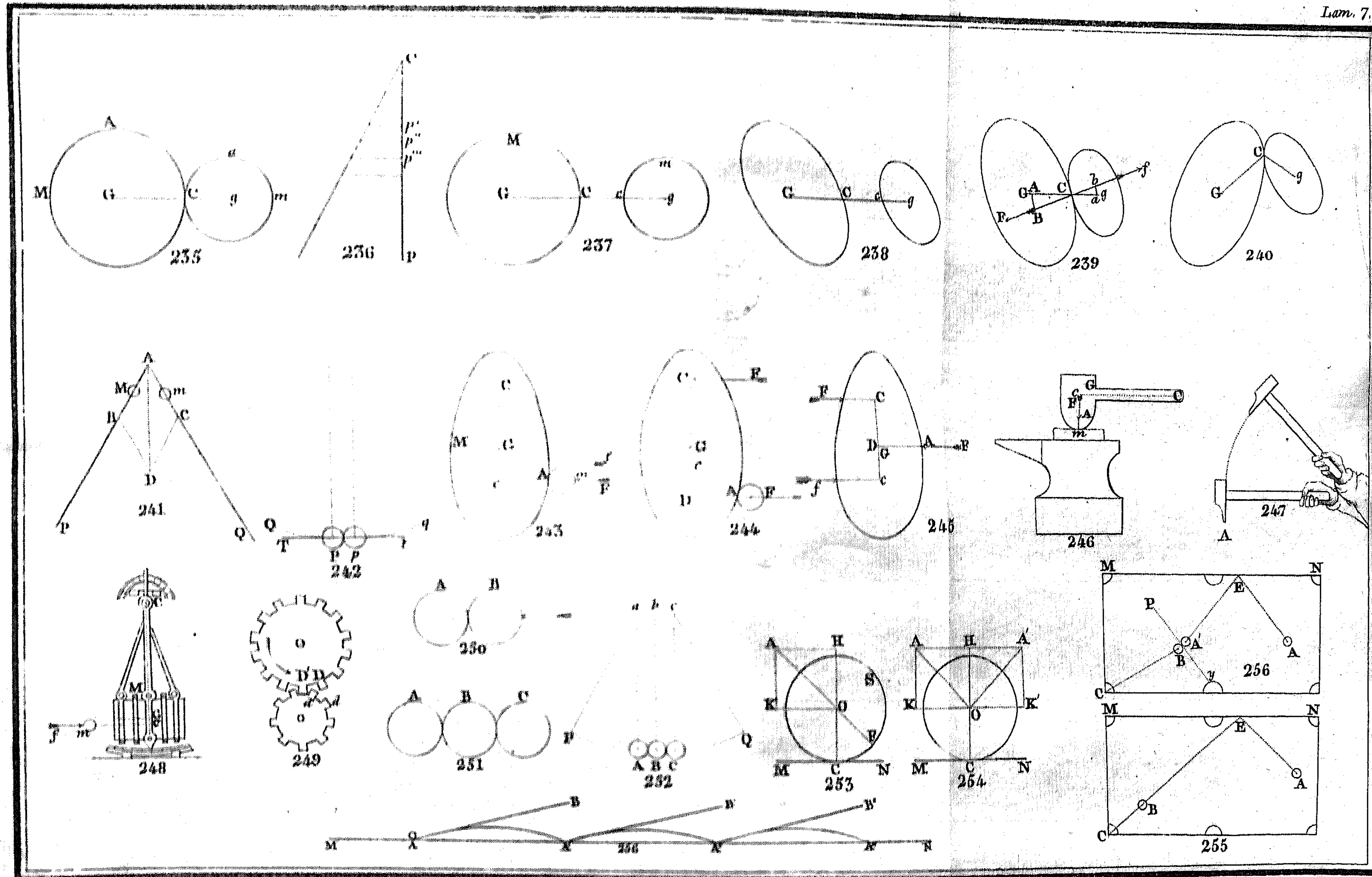

211


212


213


214


215
216
217.
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234


235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256