

# Batxilergoko matematikan konpetentzia digitala lantzeko proposamen bat

Elisabete Alberdi Celaya<sup>1</sup> Euskal Herriko  
Unibertsitatea UPV/EHU

Judit Muñoz Matute<sup>2</sup>, Euskal Herriko Unibertsitatea  
UPV/EHU

[elisabete.alberdi@ehu.es](mailto:elisabete.alberdi@ehu.es)

[judith.munozmatute@gmail.com](mailto:judith.munozmatute@gmail.com)



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

NAZIOARTEKO  
BIKAINASUN  
CAMPUSA

CAMPUS DE  
EXCELENCIA  
INTERNACIONAL

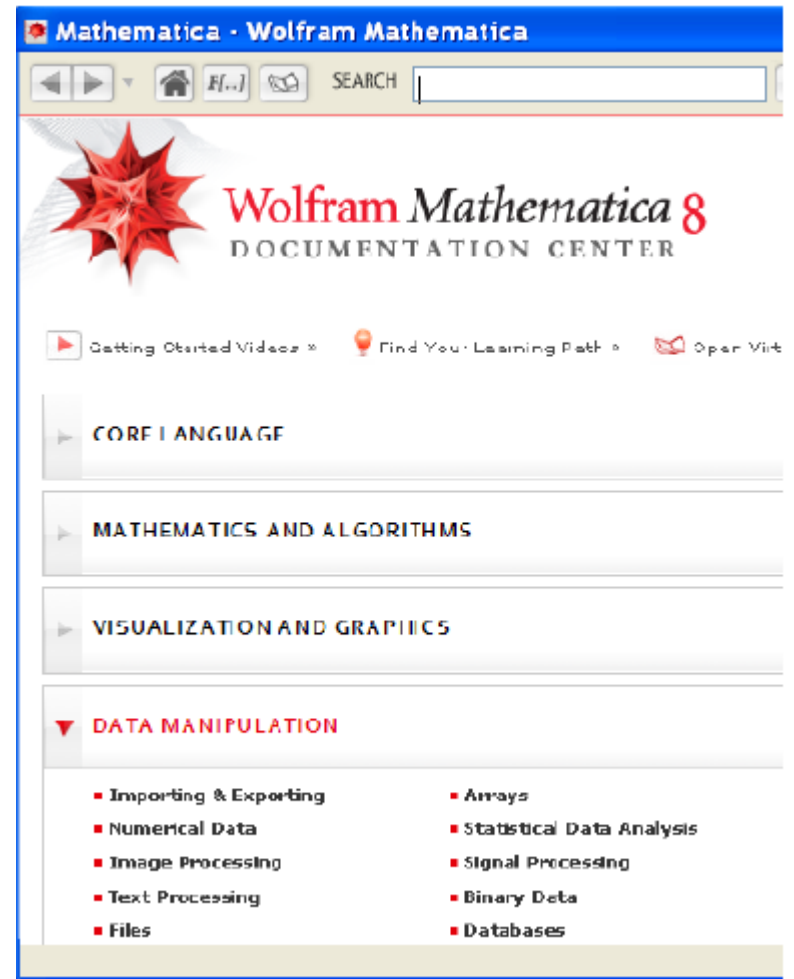
# Aurkibidea

- Laburpena
- Mathematica software-a
- Konpetentziak
- Edukiak
- Konpetentzia digitalareekin lotutako ebaluazio irrizpideak
- Proposatutako aktibitateak- Adibideak
- Ondorioak

Matematiketako irakasle bezala, eskuartean izaten dugun erronka nagusienetako bat ikasleengan matematika ikasgaiarako interesa sortzea izaten da. Batxilergoko kurrikuluma, ikasleak etapa hau bukatzean bereganatuta izan behar dituen gaitasun edo kompetentzien multzo bezala aurkezten zaigu. Bi eratako kompetentziak bereizten dira: batetik hezkuntza kompetentzia orokorrak eta bestetik, oinarrizko kompetentziak. Hezkuntza kompetentzia orokorrak dira era arduratsuan bizi izaten ikastea, komunikatzen ikastea, e.a. eta batxilergoko ikasgai guztietan lantzen dira. Oinarrizko kompetentzien artean, besteak beste, informazio tratamendua eta kompetentzia digitala dago eta guk honexetan zentratu nahi izan dugu, matematikak erakargarriago egiteko aukera bat ikusten dugulako.

Lan honetan Matematika II ikasgaiako unitate didaktikoetan kompetentzia digitala nola landu aztertu da. Matematika II ikasgaiari dagozkion helburuak lortu diren ala ez ebaluatzeko irizpideei so egin diegu, zehazki kompetentzia digitalarekin lotutakoei. Hauetako ebaluazio irizpide bakoitza zein unitate didaktikorekin lotuta dagoen identifikatu da eta software matematikoa lagun irizpide hori gainditzera bideratutako ekintzak planteatu dira.

- Gaur egun hainbat konputazio-baliabide eskuragarri. Adibidez, *Mathematica*
- *Mathematica* software-a kalkulu sinbolikorako programa da,
- grafikoak egiteko tresna boteretsua da.
- Programa interaktiboa da eta ekintza bat exekutatzean honen erantzuna berehalakoa da.
- Oinarrizko eragiketak egiten ditu, erlaziozko operatzaileekin lan egiten du ( $<$ ,  $>$ , e.a.), deribatuak kalkulatzen ditu, integral mugatuak eta mugagabeak egin ditzake, ekuazio aljebraikoak ebaz ditzake, funtzioen limiteak kalkulatu ditzake, e.a.



## ▼ Programa interaktiboa

### ★ Input/Output

Ekintza bat exekutatzean erantzuna berehalakoa da:

In[1]:= 1 + 1

Out[1]= 2

In[2]:= %

Out[2]= 2

## ▼ Kalkulu sinbolikorako tresna ahaltzua

### ★ Oinarrizko eragiketa aritmetikoak egiten ditu

$\{5 - 1, 2 * 5, 2 \times 5, 25, 2^5, 13 / 3, \sqrt{9}\}$

$\{4, 10, 10, 25, 32, \frac{13}{3}, 3\}$

Parentesiak erabiltzen dira eragiketetan lehentasunak adierazteko.

$(4 + 3 / 2 - 7) ^ 2 / 3$

$\frac{3}{4}$

$((4 + 3) / (2 - 7)) ^ (2 / 3)$

$\left(-\frac{7}{5}\right)^{2/3}$

$(4 + 3 / 2 - 7) ^ (2 / 3)$

$\left(-\frac{3}{2}\right)^{2/3}$

$((4 + 3 / 2 - 7) ^ 2) ^ (1 / 3)$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}$

### ★ Erlaziozko operatzaileak

$2 \geq 4$

False

$3 == 3$

True

### ★ Deribatuak kalkula ditzake

Aldagai bakarreko funtzio baten deribatua:

$D[\text{Log}[x], x]$

$\frac{1}{x}$

### ★ Batuketa

$\text{Sum}[1 / 2^n, \{n, 1, 5\}]$

$\frac{31}{32}$

$\text{Sum}[a^n, \{n, 1, 5\}]$

$a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$



## ★ Integrazioa

```
Integrate[Sin[x]^2, x]
```

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin[2x]$$

```
Integrate[Sin[x]^2, {x, 0, Pi}]
```

$$\frac{\pi}{2}$$

## ★ Ekuazio aljebraikoen ebazpena

```
Solve[x^5+2=0, x]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow (-2)^{1/5} \right\}, \left\{ x \rightarrow -2^{1/5} \right\}, \left\{ x \rightarrow -(-1)^{2/5} 2^{1/5} \right\}, \left\{ x \rightarrow (-1)^{3/5} 2^{1/5} \right\}, \left\{ x \rightarrow -(-1)^{4/5} 2^{1/5} \right\} \right\}$$

## ★ Funtzioen limiteen kalkulua

```
Limit[x + 4, x → 2]
```

$$6$$

```
Limit[e^x, x → ∞]
```

$$\infty$$

## ★ Programan aurrez definitutako funtzioak eta konstanteak ditu

Ikusi: Function Navigator/Mathematics and Algorithms

Funtzio trigonometrikoetako angelua beti radianetan erabili behar da.

```
{Pi, E, e^0, pi/2, I, I^2, i^2}
```

```
{pi, e, 1, pi/2, i, -1, -1}
```

```
{Sin[pi/3], Sin[60 Degree], Log[E], Exp[1], Exp[Log[x]]}
```

```
{sqrt(3)/2, sqrt(3)/2, 1, e, x}
```

```
{Abs[-6], Abs[0], Abs[6]}
```

```
{6, 0, 6}
```

```
{Sign[-2.5], Sign[2.5], Sign[0]}
```

```
{-1, 1, 0}
```

```
{Floor[-2.5], Floor[2.5], Floor[0]}
```

```
{-3, 2, 0}
```

## ▼ Zenbakizko kalkulagailua

### ★ Noiz egiten du kalkulu sinbolikoa eta noiz zenbakizko kalkulua?

1 zenbakia idazten dugunean, 1 zenbaki zehatza dela ulertzen du. Automatikoki era sinbolikoan egin dezake lana eta funtzio esponentzialaren propietateak erabiltzen ditu

```
Exp[1]
```

e

1. zenbakia idazten dugunean, 1.0 zenbakia *Mathematica*-rentzat ez da 1 zenbaki zehatza. *Mathematica*-k lehenengo 10 hamartarrak zeroren berdinak dituen 1 zenbakia dela ulertzen du eta zenbaki-eran egiten du lana

```
Exp[1.]
```

2.71828

```
ArcSin[1 / 2]
```

$$\frac{\pi}{6}$$

```
ArcSin[0.5]
```

0.523599



## ▼ Goi-mailako programazio lengoia

### ★ Zenbakizko kalkulurako azpi-programak ditu

```
NSolve[x^5+2==0,x]
```

```
{ {x → -1.1487}, {x → -0.354967 - 1.09248 i}, {x → -0.354967 + 1.09248 i},  
  {x → 0.929316 - 0.675188 i}, {x → 0.929316 + 0.675188 i} }
```

```
FindRoot[x^5 + 2 == 0, {x, 0.5}]
```

```
{x → -1.1487}
```

```
Integrate[Sin[x]^2, {x, 0, Pi}]
```

```
 $\frac{\pi}{2}$ 
```

```
NIntegrate[Sin[x]^2, {x, 0, Pi}]
```

```
1.5708
```

```
NIntegrate[1/Log[x], {x, 2, 10}]
```

```
5.12044
```

### ★ Mathematica-rekin programatzerakoan dauden zenbait elementu

```
a=2;
```

```
If[a<1,2^2,b=Table[3+i,{i,1,3}]];
```

```
Print["b=",b]
```

```
b={4, 5, 6}
```

```
For[i = 0, i < 4, i++, Print[i]]
```

```
0
```

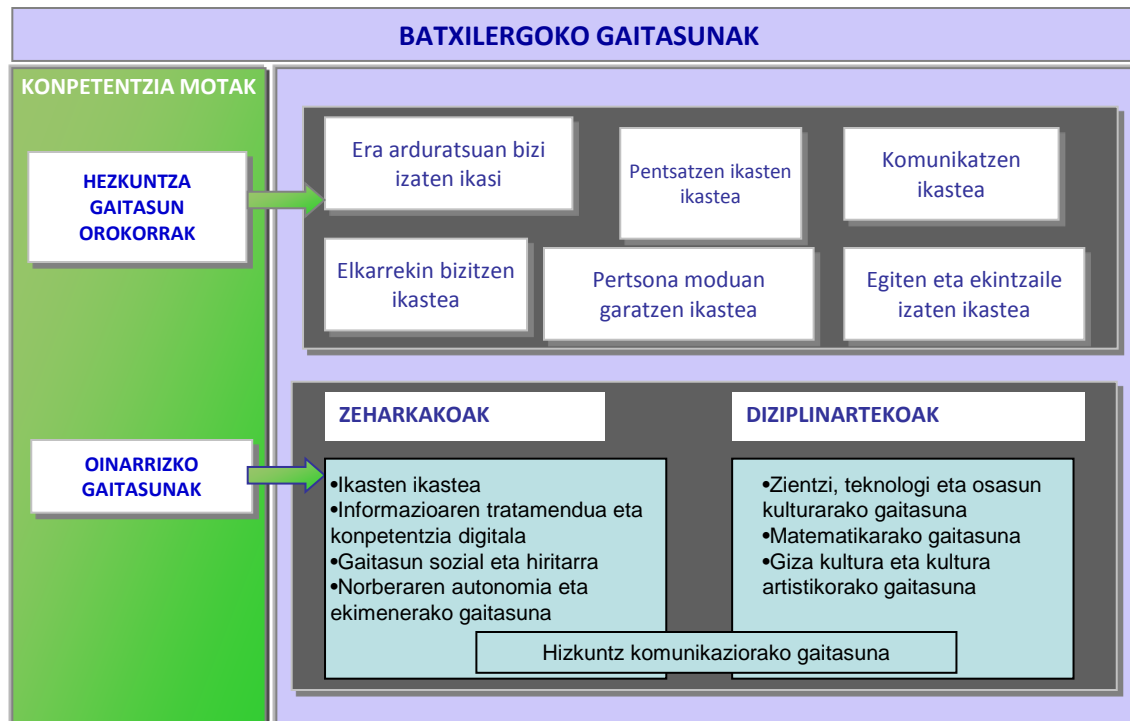
```
1
```

```
2
```

```
3
```



**Batxilergoko kurrikulum berria, ikasleak etapa hau bukatzean bereganatuta izan behar dituen gaitasun edo konpetentzien multzo bezala aurkezten zaigu.**



Ikasgai honetako edukiak 4 eduki multzotan banatzen dira:

**M1: Eduki komunak.** Multzo honen barnean hauek lantzen dira: problemen ebazpena; kalkulagailu eta programa informatikoen erabilera eta matematikari loturiko hainbat jarrera, hala nola, matematika-hizkuntzari balioa ematea, metodo matematikoak erabiltzeko erraztasun eta malgutasuna, prozesuen eta emaitzen etengabeko berrikustea eta talde lanari behar duen balioa ematea.

**M2: Aljebra.** Multzo honetako azpimultzo nagusiak bi dira: matrizeak eta determinanteak; ekuazio linealetako sistemen ebazpena.

**M3: Geometria.** Multzo honetako azpimultzoak hauek dira: bektoreak eta eragiketak; espazioko geometria.

**M4: Analisia.** Multzo honetako azpimultzoak hiru dira: funtzio baten limiteak eta jarraitasuna; deribatua; integrala.

UD1: Ikasgaiaren aurkezpena	M1: Eduki komunak	M4: Analisisia
UD2: Limiteak		
UD3: Jarraitasuna		
UD4: Funtzioen adierazpena		
UD5: Deribatua		
UD6: Deribatuaren aplikazioak		
UD7: Funtzio deribagarrien teoremak		
UD8: Integral mugagabea		
UD9: Integral mugatua		
UD10: Matrizeak		
UD11: Determinanteak		
UD12: Ekuazio linealetako sistemak		M3: Geometria
UD13: Espazio afina		
UD14: Espazio euklidearra		
UD15: Espazio metrikoa		

Ikasgaiari dagozkion irakaskuntza emaitzak lortu diren ala ez ebaluatzeko ebaluazio irizpideak aurkezten dira batxilergoko kurrikulumean. Ebaluazio irizpide hauetako zeintzuek dauden zehazki konpetentzia digitalarekin lotuta aztertu da eta hauetako bakoitza zein unitate didaktikorekin lotuta dagoen adierazi da:

- Ea software egokia erabiltzen duen determinanteak kalkulatzeko eta ekuazio-sistemak ebazteko: UD11 eta UD12.
- Ea software egokia erabiltzen duen ekuazio-sistema linealak ebazteko eta eztabaidatzeko: UD12.
- Ea kalkulagailu grafikoa edo ordenagailua artez erabiltzen dituen zuzenen eta planoen ekuazioak marrazteko eta analizatzeko: UD15.
- Ea funtzio jakin baten deribatua kalkulatzeko duen eta, horretarako, ea dagozkion propietateak eta eragiketak aplikatzen dituen, eta software egokia erabiltzen duen: UD5.
- Ea software egokia erabiltzen duen funtzio jakin baten azterketa xehea egiteko: UD6.
- Ea software egokia erabiltzen duen integralak kalkulatzeko eta eremuen azalera grafikoki adierazteko: UD8 eta UD9.
- Ea tresna matematiko egokiak erabiltzen dituen (tartean, kalkulagailua eta ordenagailua): UD2- UD15 (bitarteko guztiak).

Matematika II ikasgaiaren erabilgarri diren zenbait aktibitate proposatu ditugu. Ondoko gaiekin lotutako ekintzak proposatu ditugu hain zuzen:

1. Matrizeak eta determinanteak.
2. Ekuazio- linealetako sistemen eztabaida eta ebazpena.
3. Zuzenen eta planoen marrazketa eta analisisia.
4. Deribatua.
5. Funtzio esplizitu jakin baten azterketa eta adierazpen grafikoa.
6. Integralen kalkulua eta eremuen azalera edota biraketa gorputzak grafikoki adieraztea.

## Matrizeen definizioa:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

`{1, 2}, {3, 4}`

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

`{1, 5}, {2, 6}, {2, 1}, {8, 0}`

`MatrixForm[a]`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

## Matrizeekin eragiketak:

Matrizeen batuketa:

`a + b`

`{{2, 3}, {3, 3}}`

`a + b // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

`d = a + b // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

`d + a`

`{{1 +  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ , 2 +  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ }, {3 +  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ , 4 +  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ }}`

## Matrizeekin eragiketak:

Matrizea bider eskalarea idazteko erak: bider ikurra erabilia (\*) edo erabili gabe.

```
2 a // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

```
2 * a // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrizeen arteko biderketa:

```
a.b // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

## Matrizeekin zenbait agindu:

Matrize baten iraulia :

```
Transpose[a] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrize baten determinantea :

```
Det[a]
```

-2

Matrize baten alderantzizkoa :

```
Inverse[a] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
Inverse[{{1, 2}, {2, 4}}]
```

Inverse::sing: Matrix {{1, 2}, {2, 4}} is singular.  $\Rightarrow$

```
Inverse[{{1, 2}, {2, 4}}]
```



## 2. Ekuazio- linealetako sistemak

### 2.1. Ekuazio linealetako sistemen definizioa

Ekuazio linealetako sistema bat zerrenda bat definituz egin daiteke. Zerrendako elementu bakoitza ekuazio linealetako sistemako ekuazio bakoitza izango da. Eta ekuazio bakoitza noiz betetzen den kalkulatu nahi dugunez, berdintza bikoitza erabiltzen da ekuazio bakoitza gai askeekin berdintzeko. Adibidez, sistema hau definituko dugu:

$$\begin{aligned}2x + \quad -z &= 2 \\x + y + 2z &= 1 \\-y + z &= 0\end{aligned}$$

```
Clear["Global`*"]
```

```
sistema = {2 x - z == 2, x + y + 2 z == 1, -y + z == 0}
```

```
{2 x - z == 2, x + y + 2 z == 1, -y + z == 0}
```

"Thread" agindua erabilia: Kasu honetan lehendabizi koefizienteen matrizea eta gai askeen bektorea definitu beharko dira. Esaterako, goiko sistemaren kasuan:

```
a = {{2, 0, -1}, {1, 1, 2}, {0, -1, 1}};
a // MatrixForm
b = {2, 1, 0}
```

```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```

```
{2, 1, 0}
```

Edo beste era honetan:

"Thread" agindua erabilia: Kasu honetan lehendabizi koefizienteen matrizea eta gai askeen bektorea definitu beharko dira. Esaterako, goiko sistemaren kasuan:

```
a = {{2, 0, -1}, {1, 1, 2}, {0, -1, 1}};
a // MatrixForm
b = {2, 1, 0}
```

```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```

```
{2, 1, 0}
```

Ondorengo idazten dugunean bi zerrendaren arteko ekuazioa (kasu honetan berdintza) definitzen dugu:

```
a . {x, y, z} == b
```

```
{2 x - z, x + y + 2 z, -y + z} == {2, 1, 0}
```

"Thread" aginduak "bi zerrendaren arteko ekuazioa" bihurtzen du "ekuazioek edo berdintzek osatutako zerrendan".

```
ekuazioak = Thread[a . {x, y, z} == b]
```

```
{2 x - z == 2, x + y + 2 z == 1, -y + z == 0}
```

Parametrorik gabeko sistema:

Linear Solve

Sistema bateragarri determinatu baten kasua:

Adibidez, sistema hau ebatziko dugu :

$$2x + \quad -z = 2$$

$$x + y + 2z = 1$$

$$-y + z = 0$$

```
a = {{2, 0, -1}, {1, 1, 2}, {0, -1, 1}}; b = {2, 1, 0};
```

Sistema bateragarri determinatua da :

```
MatrixRank[a]
```

```
3
```

```
LinearSolve[a, b]
```

```
{1, 0, 0}
```

Soluzio bakarra → Sistema Bateragarri Determinatua  $(x, y, z) = (1,0,0)$ .

### Parametrodun sistema:

Ondorengo sistema emanik:

$$ax + 4y + az = -1$$

$$x + 4ay + z = 1$$

$$x - (4a-2)y + 2z = 3$$

a) Eztatidatu emandako sistema a parametroaren arabera Rouché-Fröbeius-en teorema erabilita

b) Ebatzi sistema posible denean

EBAZPENA

```
Clear["Global`*"]
```

a) atala:

Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua definitzen dira:

```
matkoef = {{a, 4, a}, {1, 4 a, 1}, {3, -(4 a - 2), 2}}; MatrixForm[matkoef]
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & 2 - 4a & 2 \end{pmatrix}$$

```
matzab = {{a, 4, a, -1}, {1, 4 a, 1, 1}, {3, -(4 a - 2), 2, 3}}; MatrixForm[matzab]
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a & -1 \\ 1 & 4a & 1 & 1 \\ 3 & 2 - 4a & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Koefizienteen matrizea karratua denez, bere determinantea zero egiten duten "a" parametroaren balioak kalkulatu dira:

## 2. Ekuazio- linealetako sistemak

### Parametrodun sistema (jarraipena):

```
Det[matkoef] // Factor
```

```
-4 (-1 + a) (1 + a)
```

```
Solve[Det[matkoef] == 0]
```

```
{{a -> -1}, {a -> 1}}
```

1. kasua:  $a \neq -1$  eta  $a \neq 1 \rightarrow h(A) = h(A|b) = 3 =$  ezezagun kopurua  $\rightarrow$  Sistema Bateragarri Determinatua.

2. kasua:  $a = -1$ : Koefizienteen matrizearen eta matrize hedatuaren heinak kalkulatu ditugu:

```
a = -1;
```

```
MatrixRank[matkoef]
```

```
2
```

```
MatrixRank[matkoef] == MatrixRank[matzab]
```

```
True
```

$h(A) = h(A|b) = 2 <$  ezezagun kopurua  $\rightarrow$  Sistema Bateragarri Indeterminatua

3. kasua:  $a = 1$ : Kalkula ditzagun bi matrizeen heinak:

```
a = 1; MatrixForm[matkoef]
```

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

```

```
MatrixRank[matkoef] == MatrixRank[matzab]
```

```
False
```

$h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3 \rightarrow$  Sistema Bateriaezina



## 2. Ekuazio- linealetako sistemak

### Parametrodun sistema (jarraipena):

b) atala:

1. kasua:  $a \neq -1$  eta  $a \neq 1 \rightarrow h(A) = h(A|b) = 3 =$  ezezagun kopurua  $\rightarrow$  Sistema Bateragarri Determinatua.

```
Clear[a]; MatrixForm[matkoef]
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & 2-4a & 2 \end{pmatrix}$$

Sistema  $a$  parametroaren menpekoa denez, Reduce agindua erabilia ebazten da:

```
sol = Reduce[matkoef.{x, y, z} == {-1, 1, 3}, {x, y, z}]
```

$$\left( a = -1 \ \&\& \ y = \frac{1-x}{14} \ \&\& \ z = -\frac{9}{7}(-1+x) \right) \ || \ \left( (-1+a)(1+a) \neq 0 \ \&\& \ x = \frac{-3+8a}{2(-1+a)} \ \&\& \right. \\ \left. y = \frac{1}{70}(-19-24a+x+6ax) \ \&\& \ z = \frac{1}{35}(53+8a-47x-2ax) \right)$$

```
sol = {ToRules[sol]};
```

Eta emaitza hauxe da:

```
x /. sol[[2]]
```

$$\frac{-3+8a}{2(-1+a)}$$

Simplify agindua erabiltzen dugu emaitza ahalik eta gehien sinplifikatzeko :

```
x = x /. sol[[2]] // Simplify
```

$$\frac{3-8a}{2-2a}$$

```
y = y /. sol[[2]]
```

$$\frac{1}{70} \left( -19 + \frac{3-8a}{2-2a} - 24a + \frac{6(3-8a)a}{2-2a} \right)$$

Beratu kasu honetan Simplify aginduak zenbat sinplifikatzen duen adierazpena :

```
y = y /. sol[[2]] // Simplify
```

$$\frac{1}{4(-1+a)}$$

```
z = z /. sol[[2]] // Simplify
```

$$\frac{1-8a}{2(-1+a)}$$

Beraz, emaitza hauxe da:  $x = \frac{3-8a}{2-2a}$ ,  $y = \frac{1}{4(-1+a)}$ ,  $z = \frac{1-8a}{2(-1+a)}$ .

## 2. Ekuazio- linealetako sistemak

Sistema bateragarri indeterminatu baten kasua:

Adibidez, sistema hau ebatziko dugu :

$$2x + y - z = 2$$

$$x + y + 2z = 1$$

$$3x + y + z = 3$$

```
a = {{2, 0, -1}, {1, 1, 2}, {3, 1, 1}}; b = {2, 1, 3};
```

```
MatrixRank[a]
```

```
2
```

Matrize zabaldua idazten dugu :

```
m = {{2, 0, -1, 2}, {1, 1, 2, 1}, {3, 1, 1, 3}};
```

```
MatrixRank[m]
```

```
2
```

```
LinearSolve[a, b]
```

```
{1, 0, 0}
```

LinearSolve aginduak ekuazio linealetako sistemako emaitza bat aurkitzen du. Beraz, sistema bateragarri indeterminatua denean ez dizkigu emaitza guztiak kalkulatu. Solve erabili beharko da kasu honetan, aurrerago ikusiko dugun moduan.

- Sistema bateragarri indeterminatua denean :

```
Solve[{2 x + y + z == 5, 2 x - y + 2 z == 5, 2 y - z == 0}, {x, y, z}]
```

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

```
{{{y -> 5/3 - 2 x/3, z -> 10/3 - 4 x/3}}}
```



### 3. Zuzenen eta planoen marrazketa eta analisisia

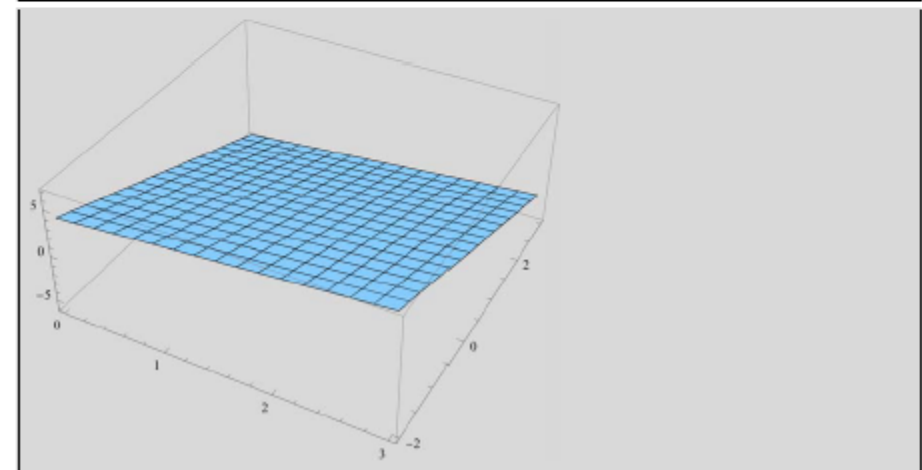
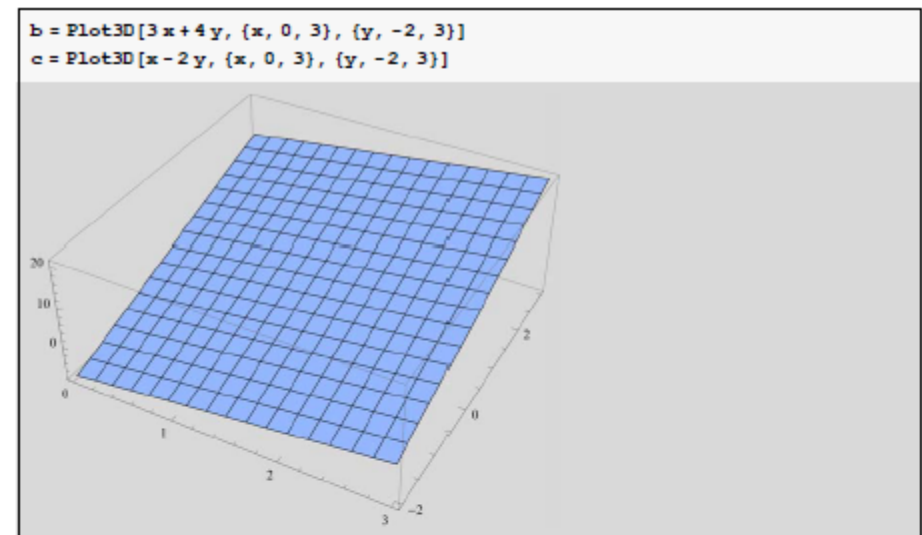
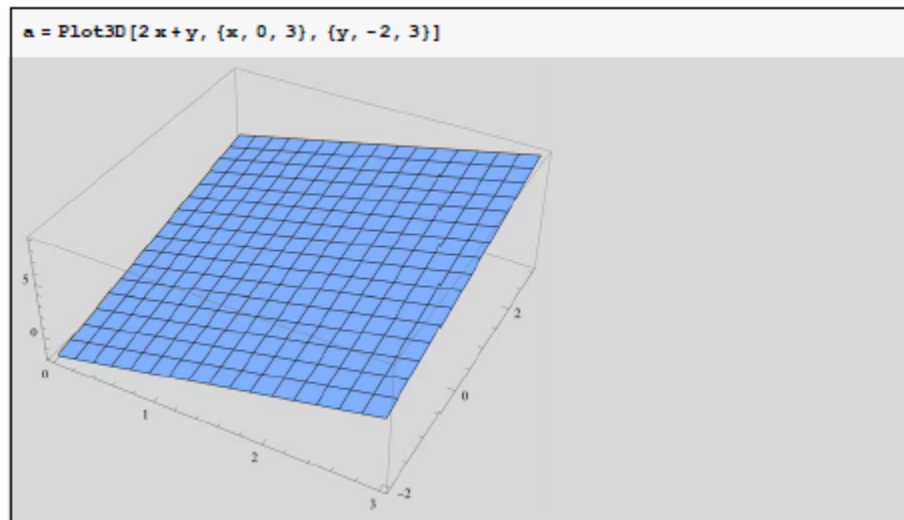
Planoak espazioan irudikatzen:

Honela, beste bi plano hauek ere irudika ditzakegu:

$$b: 3x + 4y - z = 0$$

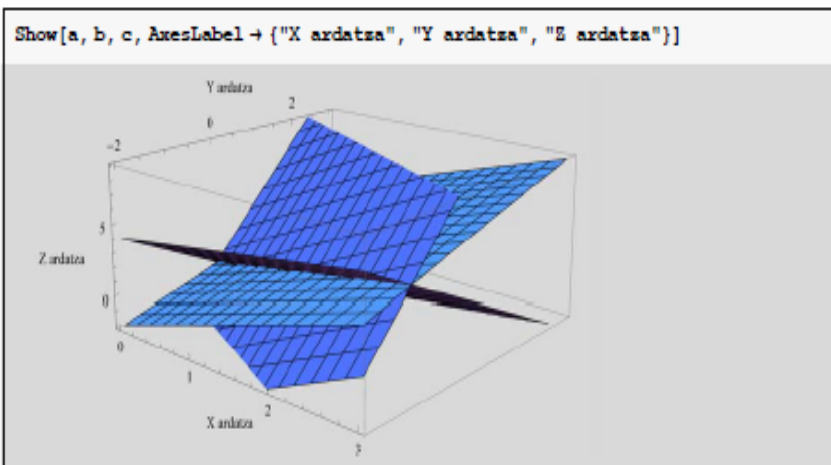
$$c: x - 2y - z = 0$$

a:  $2x + y - z = 0$  ekuazioa honela irudikatuko dugu Plot3D erabilita :



### 3. Zuzenen eta planoen marrazketa eta analisisia

Zuzen baten mozten diren hiru plano:



Ikus daitekeenez, 3 planoak zuzen batean mozten dira. Askatzen ari garen sistemaren emaitza zuzena dela egiazta daiteke:

```
sistema = {2 x + y - z == 0, 3 x + 4 y - z == 0, x - 2 y - z == 0};
```

```
Solve[sistema, {x, y, z}]
```

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

```
{{y -> -x/3, z -> 5x/3}}
```

Hiru plano paralelo:

3 plano paralelo:

Hiru plano hauek paraleloak dira, hau da, sistema bateraezina da:

$$2y - z = 8$$

$$4y - 2z = 17$$

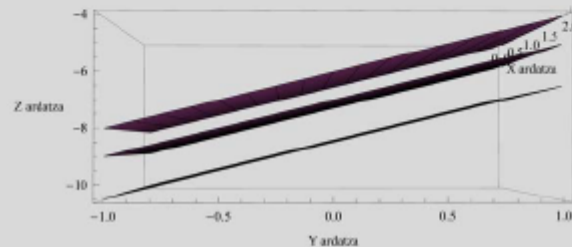
$$6y - 3z = 21$$

```
Clear["Global`*"]
```

```
Solve[{2 y - z == 6, 4 y - 2 z == 17, 6 y - 3 z == 21}, {x, y, z}]
```

```
{}
```

```
Plot3D[{2 y - 6, (4 y - 17) / 2, (6 y - 21) / 3}, {x, 0, 2},  
{y, -1, 1}, AxesLabel -> {"X ardatza", "Y ardatza", "Z ardatza"}]
```





## 4. Deribatua

### ★ Deribazioa

Aldagai bakarreko funtzio baten deribatua

$$f[x_] = x^2;$$

$$D[f[x], x]$$

$$2x$$

$$f'[x]$$

$$2x$$

$$f''[x]$$

$$2$$

$$D[f[x], \{x, 2\}]$$

$$2$$

Deribatu partzialak

$$g[x_, y_] = x^2 + y^2;$$

$$D[g[x, y], x]$$

$$2xy^2$$

$$D[g[x, y], y]$$

$$2x^2y$$

$$D[g[x, y], \{y, 2\}]$$

$$2x^2$$

$$\partial_{x,y} g[x, y]$$

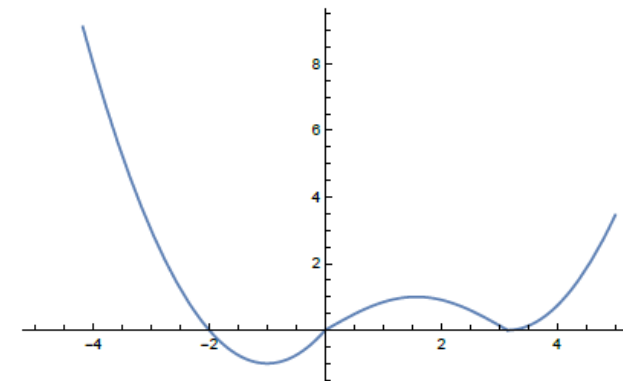
$$4xy$$

(\*\*\*\*Zatikako funtzio baten deribatua\*\*\*\*)

$f[x_] = \text{Piecewise}[\{\{x^2 + 2x, x \leq 0\}, \{\text{Sin}[x], 0 < x < \pi\}, \{(x - \pi)^2, x \geq \pi\}\}]$

$$\begin{cases} 2x + x^2 & x \leq 0 \\ \text{Sin}[x] & 0 < x < \pi \\ (-\pi + x)^2 & x \geq \pi \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

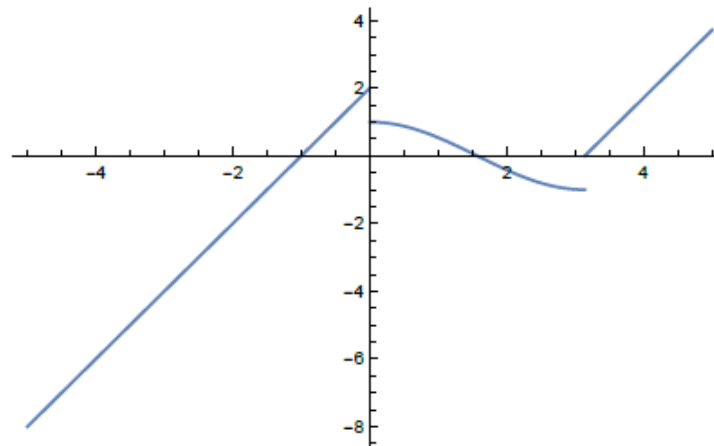
Plot[f[x], {x, -5, 5}]



$f'[x]$

$$\begin{cases} 2 + 2x & x < 0 \\ \text{Cos}[x] & 0 < x < \pi \\ -2(\pi - x) & x > \pi \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

Plot[f'[x], {x, -5, 5}]



$f'[0]$

Indeterminate



## 5. Funtzio esplizituen grafikoak

Mathematica-n Plot funtzioa erabilia egiten da funtzio esplizituen adierazpen grafikoa eta bere sintaxia hau da:

**Plot[funtzioa, {x,xmin,xmax}],**

xmin eta xmax x aldagaiak balioak hartuko dituen tarteko muturrak izanik.

Funtzio bat baino gehiago irudikatzeko:

**Plot[{funtzioa\_1, funtzioa\_2, ... funtzioa\_n}, {x,xmin,xmax}]**

Plot aginduak aukera ezberdinak eskaintzen ditu grafikoaren kolorea, lodiera, marra mota zehazteko. Agindu berean funtzio bat baino gehiago irudikatu nahi ditugunean hauetako bakoitzerako zehaztu beharko ditugu aukera hauek.

Horretaz gain grafikoari markoa jartzea (**Frame**), grafikoaren hondoa koloreztatzea (**Background**), ardatzen izenak gehitzea (**AxesLabel**), grafikoari izenburua jartzea (**PlotLabel**) edota grafikoei etiketak eranstea (**Epilog**) ere posiblea da.

```
In[2]= f1[x_] = x2 - 1;
```

```
f2[x_] = x3 + 2;
```

```
In[4]= Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, -3, 3},
```

```
PlotStyle -> {{RGBColor[0, 0.5, 1], Thickness[0.005], Dashing[0.02]},  
{RGBColor[1, 0, 1], Thickness[0.01]}},
```

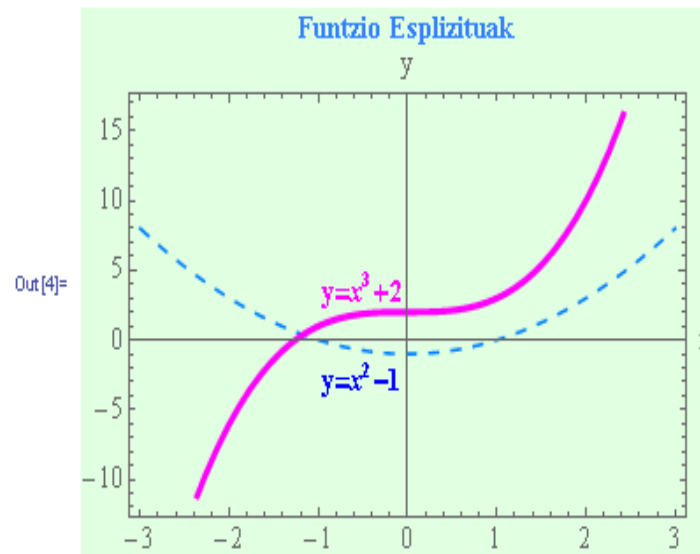
```
Epilog -> {Text[Style["y=x3+2", 14, Magenta, Bold], {-0.5, 3.5}],
```

```
Text[Style["y=x2-1", 14, Blue, Bold], {-0.5, -3}]}},
```

```
Background -> LightGreen, Frame -> True, AxesLabel -> {"x", "y"},
```

```
PlotLabel -> Style["Funtzio Esplizituak", 15, Bold,
```

```
RGBColor[0.2, 0.5, 1]]]
```



## 5. Funtzio esplizituen grafikoak

```
f[x_] = x^3 / (x^2 - 1);
```

```
FunctionDomain[f[x], x]
```

```
x < -1 || -1 < x < 1 || x > 1
```

```
(*simetria*)
```

```
f[-x]
```

$$-\frac{x^3}{-1+x^2}$$

```
(*Asintota bertikalak*)
```

```
Limit[f[x], x → -1, Direction → 1]
```

```
-∞
```

```
Limit[f[x], x → -1, Direction → -1]
```

```
∞
```

```
Limit[f[x], x → 1, Direction → 1]
```

```
-∞
```

```
Limit[f[x], x → 1, Direction → -1]
```

```
∞
```

```
(*Puntu singularrak*)
```

```
f'[x]
```

$$-\frac{2x^4}{(-1+x^2)^2} + \frac{3x^2}{-1+x^2}$$

```
Solve[f'[x] == 0]
```

```
{x → 0}, {x → 0}, {x → -√3}, {x → √3}
```

```
f[0]
```

```
0
```

```
f[-Sqrt[3]]
```

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

```
f[Sqrt[3]]
```

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

```
Reduce[f'[x] > 0]
```

```
x < -√3 || x > √3
```

```
Reduce[f'[x] < 0]
```

```
-√3 < x < -1 || -1 < x < 0 || 0 < x < 1 || 1 < x < √3
```



## 5. Funtzio esplizituen grafikoak

(\*Inflexio puntuak\*)

$f''[x]$

$$\frac{8x^5}{(-1+x^2)^3} - \frac{14x^3}{(-1+x^2)^2} + \frac{6x}{-1+x^2}$$

`Solve[f''[x] == 0]`

`{x -> 0}, {x -> -i sqrt(3)}, {x -> i sqrt(3)}`

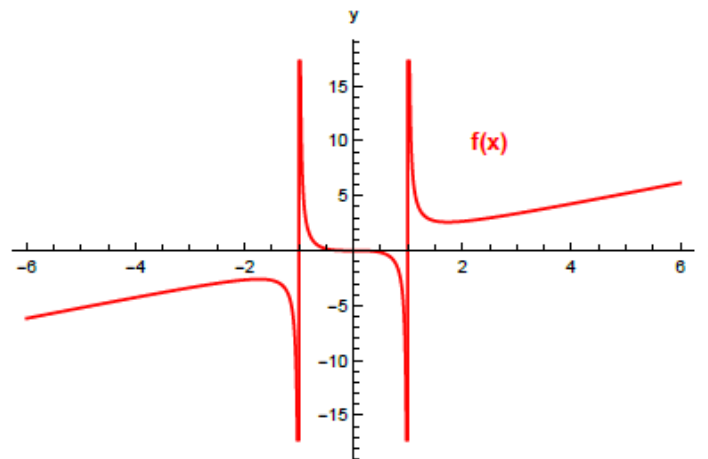
(\*Beraz, funtzio honek bi asintota bertikal ditu x=

1 eta x=-1.  $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$  puntua maximo bat da,

$(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$  minimo bat eta (0,0) inflexio puntu bat.\*)

(\*Adierazpen grafikoa\*)

```
Plot[f[x], {x, -6, 6}, AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotStyle -> {Red},  
Epilog -> Text[Style["f(x)", Bold, 12, Red], {2.5, 10}]]
```



## 6. Integral mugagabea eta mugatua

### ★ Integrazioa

Integral mugagabeak kalkulatzeko dituzten

```
Integrate[Sin[x]^2, x]
```

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin[2x]$$

$$\int \sin[x]^2 dx$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin[2x]$$

```
Integrate[f[x], x]
```

$$\frac{x^3}{3}$$

```
Integrate[g[x, y], x]
```

$$\frac{x^3 y^2}{3}$$

(\*Azalera baten kalkulua eta adierazpen grafikoa\*)

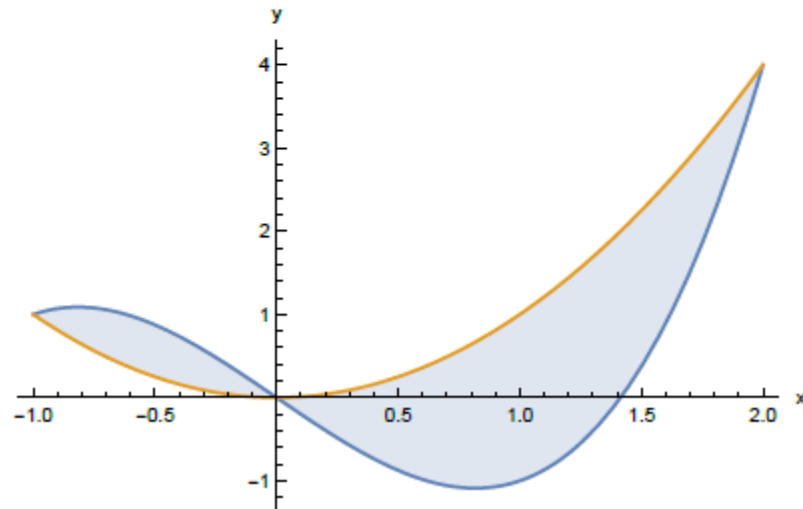
```
f1[x_] = x^3 - 2 x;
```

```
g[x_] = x^2;
```

```
Integrate[Abs[f1[x] - g[x]], {x, -1, 2}]
```

$$\frac{37}{12}$$

```
Plot[{f1[x], g[x]}, {x, -1, 2}, Filling -> {1 -> {2}}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```



## 6. Integral mugagabea eta mugatua

Esfera, zilindro edo konoak marrazteko koordinatu esferikoak edota zilindrikoak erabiltzea posiblea da.

Edota Mathematica-n bereziki definiturik dauden ondoko funtzioak erabilia ere marraz daitezke:

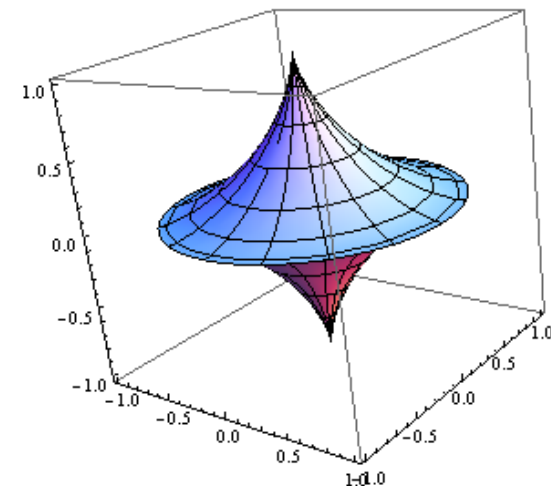
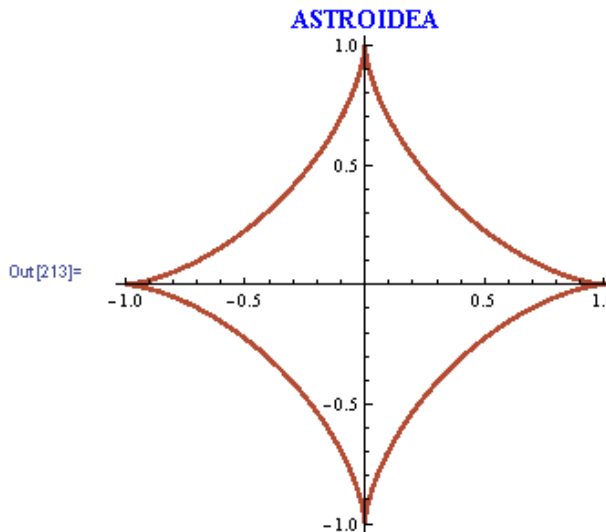
**Sphere**[zentrua, erradioa],  
**Cylinder**[{ardatzaren 1. Puntua, ardatzaren 2. Puntua}, erradioa],

**Cone**{oinarriaren zentrua, muturra}, erradioa].

**Biraketa gorputzak irudikatzeko RevolutionPlot3D** erabil daiteke:  
**RevolutionPlot3D**[[{f<sub>x</sub>, f<sub>z</sub>}, {t, t<sub>min</sub>, t<sub>max</sub>}]  
non x eta z osagaiak dituen kurba bat OZ ardatzaren inguruan biratzean sortzen den biraketa gainazala sortzen duen.

```
In[210]:= astroidea = ParametricPlot[{Cos[t]^3, Sin[t]^3}, {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic,  
PlotStyle -> {RGBColor[0.7, 0.3, 0.2], Thickness[0.01]},  
PlotLabel -> Style["ASTROIDEA", Bold, Blue, 14]}];
```

```
In[212]:= biraketaastroidea = RevolutionPlot3D[{Cos[t]^3, Sin[t]^3}, {t, -Pi/2, Pi/2},  
AspectRatio -> Automatic];  
GraphicsArray[{astroidea, biraketaastroidea}]
```



- *Mathematica* software-ak kalkuluak, adierazpen grafikoak eta abar luzea egiteko aukera eskaintzen du, eta hezkuntza zein ikerketa eremuan oso erabilia da. *Mathematica* kalkulu sinbolikorako programa da eta grafikoak egiteko potentzial handia izateaz gain, Batxilergoko Matematika II ikasgaiko unitate didaktikoetan konpetentzia digitala lantzeko baliagarria da. Lan honetan zenbait adibide erakutsi ditugu. Era berean, nahiko era errazean, agindu soil batzuek erabilia Matematika II-ko gainontzeko unitate didaktikoak lantzeko adibideak sor daitezke.

## ERREFERENTZIAK

- Bartle, R. eta Herbert, D.R. (1996). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Limusa.
- Trott, M. (2005). *The Mathematica Guide Book for Symbolics*. Springer-Verlag.
- Wolfram, S. (2004). *The Mathematica Book, 5th ed.* Wolfram Media, Inc.

# ESKERRIK ASKO ZURE ARRETAGATIK

eman ta zabal zazu  
  
Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

NAZIOARTEKO  
BIKAINASUN  
CAMPUSA  
CAMPUS DE  
EXCELENCIA  
INTERNACIONAL