TEORíA DE CLIFFORD EN EL ANILLO DE BURNSIDE

Inmaculada Lizasoain Iriso

Memoria presentada en la Universidad Pública de Navarra para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Pamplona, junio de 1995

TEORíA DE CLIFFORD EN EL ANILLO DE BURNSIDE

Inmaculada Lizasoain Iriso

Memoria presentada en la Universidad Pública de Navarra para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Pamplona, junio de 1995

Esta obra está protegida por una licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)

A mi madre.

A la memoria de mi padre.

Agradecimientos

Me resulta casi más difícil que redactar la memoria expresar en pocas líneas mi gratitud y reconocimiento hacia su director, Gustavo Ochoa.

No sólo ha sabido inspirar y orientar adecuadamente el trabajo; además, se ha involucrado en la tarea con absoluta dedicación, transmitiendo seguridad y confianza cuando el camino que convenía seguir no aparecía del todo claro. Gracias, especialmente, por haber soportado de forma admirable las continuas interrupciones a las que se ha visto sometido el trabajo.

Quiero hacer extensiva mi gratitud a Miguel Torres por su meticulosa labor de supervisión de la memoria, aportándole una perspectiva más amplia.

Y a los miembros del Departamento de Matemática e Informática por haber sabido crear un ambiente propicio para la realización de tareas como ésta, especialmente a los del área de Álgebra por la organización de seminarios y conferencias, siempre estimulantes y enriquecedores.

Gracias, en particular, a Luis Ezquerro, siempre solícito ante cualquier consulta, y a Juan José Torrens por su valiosa ayuda en mis batallas con el TEX.

Quiero recordar, también, a mis padres, que siempre me animaron a no dejar de aprender, y a Javier, mi marido, quien ha hecho suyos los desalientos

y las satisfacciones de estos cuatro años de trabajo.

Por último, debo agradecer a la Universidad Pública de Navarra la ayuda económica recibida para la realización de esta tesis.

Índice

Introducción **1**

0 Resultados previos **9**

0.1 G-conjuntos 9

0.2 Anillo de Burnside 13

0.3 Función de Möbius 18

1 Teoría de Clifford en el anillo de Burnside **21**

2 Primitividad y grado de G-conjuntos **43**

2.1 G-conjuntos débilmente primitivos 43

2.2 G-conjuntos cuasi-primitivos 62

2.3 G-conjuntos monomiales 65

3 G-conjuntos proyectivos **75**

3.1 Extensión proyectiva 75

3.2 Producto tensorial 85

Bibliografía **105**

Nota para el lector

A lo largo de la memoria, la palabra *grupo* se entenderá como grupo finito.

Introducción

Como es sabido, la teoría de Clifford para caracteres de grupos finitos estudia la descomposición en irreducibles del carácter inducido a un grupo G de uno dado en $H \leq G$, así como la del restringido a H de un carácter de G.

El desarrollo de esta teoría en el anillo de caracteres generalizados sobre $\mathbb{C}$, $R(G)$, es posible gracias a que se puede definir un producto escalar

$$[\,,\,] : R(G) \times R(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

respecto del cual el conjunto de caracteres irreducibles de G, $\{\chi_i,\ i = 1 \ldots n\}$, forma una base ortonormal.

Además, la inducción y la restricción de caracteres son adjuntas respecto de los correspondientes productos escalares, es decir, se verifica la conocida *Ley de Frobenius*:

$$[\chi_H, \theta]_H = [\chi, \theta^G]_G$$

para todo $\chi \in R(G)$ y para todo $\theta \in R(H)$, en donde χ_H denota el restringido del carácter χ a H y θ^G el inducido del carácter θ a G.

Esto permite expresar θ^G como suma de caracteres irreducibles de G, $\theta^G = \sum_{i=1}^{n} t_i \chi_i$, en donde

$$t_i = [\theta^G, \chi_i] = [\theta, (\chi_i)_H].$$

De la misma forma se expresa χ_H como suma de caracteres irreducibles de H.

Las analogías que presentan la inducción y restricción de conjuntos sobre los que actúa un grupo G con sus homónimas para caracteres hacían pensar en la posibilidad de desarrollar una *teoría de Clifford* para G-conjuntos. El marco adecuado para tal desarrollo sería el anillo de Burnside del grupo, $\Omega(G)$, $\mathbb{Z}$-módulo libre que tiene como base el conjunto de las clases de isomorfía de G-conjuntos simples, $\{[G/U]\}$, en donde (U) recorre el conjunto de clases de conjugación de G, $C(G)$, y en el que se considera, además, una operación producto definida a través del producto cartesiano de G-conjuntos.

Para poder trasladar resultados de la teoría de Clifford para caracteres al anillo de Burnside, parecía ser de utilidad el homomorfismo linealización que asocia a cada G-conjunto simple, G/U, un carácter permutación de la siguiente forma:

Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ que tiene como base los elementos de G/U. V es $\mathbb{Q}[G]$-módulo con la acción que se obtiene al extender la de G sobre los elementos de la base.

Su carácter asociado resulta ser el inducido a G del carácter trivial del subgrupo U, que se denota por $(1_U)^G$.

La aplicación que asigna a cada G-conjunto G/U el carácter $(1_U)^G$ se extiende a un homomorfismo de anillos $\rho : \Omega(G) \longrightarrow R_{\mathbb{Q}}(G)$, en donde $R_{\mathbb{Q}}(G)$ es el anillo de caracteres racionales de G, es decir, el anillo de caracteres de $\mathbb{Q}[G]$-módulos.

Thévenaz[?] define, utilizando este homomorfismo, una aplicación bilineal

$$\beta : \Omega(G) \times \Omega(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dada por

$$\beta(x, y) = [\rho(x), \rho(y)].$$

De esta forma, utilizando la ley de reciprocidad de Frobenius y la fórmula de Mackey de la teoría de caracteres, se tiene:

$$\begin{aligned} \beta(G/U, G/V) &= [(1_U)^G, (1_V)^G] = [1_U, ((1_V)^G)_U] \\ &= [1_U, \sum_{VxU} (1_{U \cap V^x})^U] = \sum_{VxU} [1_{U \cap V^x}, 1_{U \cap V^x}] \\ &= \text{card}\{\text{dobles coclases } VxU\}. \end{aligned}$$

Como el homomorfismo ρ conmuta con la inducción y la restricción de $\Omega(G)$ y $R_{\mathbb{Q}}(G)$, la forma bilineal β verifica la ley de reciprocidad de Frobenius, elemento clave de la teoría de Clifford para caracteres. Esto la hacía, en principio, adecuada a nuestro propósito de desarrollar en el anillo de Burnside una teoría de Clifford.

El problema es que dicha forma bilineal no tiene por qué ser siempre regular y no sirve para nuestro objetivo.

De hecho, Thévenaz[**?**] demuestra que la matriz A de la forma bilineal β respecto de la base canónica de $\Omega(G)$, $\{[G/U];\, (U) \in C(G)\}$, tiene como rango el número de clases de conjugación de subgrupos cíclicos de G.

Como consecuencia, obtiene que A es regular si y sólo si el grupo G es cíclico.

Había que buscar, por tanto, otra forma bilineal en $\Omega(G)$ y parecía más conveniente elegir primero una base del anillo de Burnside en la que poder

expresar cómodamente los G-conjuntos inducido y restringido de uno dado y definir después un producto escalar respecto del cual dicha base fuera ortonormal.

Un primer intento fue tomar como base de $\Omega(G)$ la formada por los elementos idempotentes del anillo, cuya expresión, dada por Gluck[?] y por Yoshida[?], utiliza la función de Möbius asociada al retículo de los subgrupos de G.

Pronto se vio que esta opción no era la más acertada y se pensó que los G-conjuntos simples serían, por su sencillez, los más adecuados para jugar en nuestra teoría el papel de los caracteres irreducibles en la teoría de Clifford.

Con esta idea, definimos un producto escalar en $\Omega(G)$ por

$$< G/U, G/V >= \begin{cases} 1 & \text{si } (U)_G = (V)_G \\ 0 & \text{si } (U)_G \neq (V)_G \end{cases}$$

respecto del cual, obviamente, la base $\{[G/U];\ (U) \in C(G)\}$ es ortonormal.

Pero con este producto escalar y la conocida inducción de G-conjuntos, la ley de reciprocidad de Frobenius dejaba de verificarse.

Se hacía necesario, por tanto, definir una nueva *inducción* que fuera adjunta de la restricción respecto del producto escalar $<\ ,\ >$ definido arriba, que denominamos *elevación*.

Con este material, comenzamos el desarrollo de nuestra teoría en el anillo de Burnside, en la que nos aparecen conceptos análogos a los de subgrupo de inercia o índice de ramificación, así como resultados formalmente parecidos a los de la teoría de caracteres para el caso $H \lhd G$, que se recogen en el Capítulo 1

de la memoria. (Ver los teoremas ?? y ??).

La obtención de estos primeros resultados justifica el estudio en mayor profundidad de la elevación . En el Capítulo 2 se definen en G-conjuntos, utilizando la elevación, conceptos que en caracteres vienen dados a través de la inducción, como los de carácter primitivo, cuasi-primitivo, grado, carácter monomial o M-grupo.

De esta forma, se define G-conjunto débilmente primitivo como un G-conjunto que no es el elevado de un H-conjunto para ningún $H \leq G$ y se estudian los grupos G en los que todo G-conjunto es débilmente primitivo (Teorema ??), así como aquéllos en los que los únicos G-conjuntos no triviales con esta propiedad son los primitivos. (Ver Teorema ??).

Para ello se utilizan, además de las técnicas propias de teoría de grupos, propiedades relacionadas con la función de Möbius del retículo de los subgrupos de G, que se muestra una vez más como una potente herramienta en el estudio de problemas relacionados con la estructura reticular del grupo.

Se define a continuación el grado de un G-conjunto simple G/U como el índice de $N_G(U)$ en G. Aunque puede parecer más natural tomar como grado el tamaño del G-conjunto, $\mid G : U \mid$, la definición elegida proporciona un concepto más adecuado de G-conjunto monomial, como el elevado de un H-conjunto de grado uno, y permite estudiar los grupos en los que todo G-conjunto es monomial. Se demuestra que estos grupos coinciden con los grupos nilpotentes (Teorema ??), a diferencia de lo que ocurre con los M-grupos (grupos en los que todo carácter es monomial).

Se estudia también un concepto análogo al de carácter monomial relativo

a un subgrupo normal N; se demuestra que, en un grupo G, los subgrupos normales N de G tales que todo G-conjunto simple es monomial relativo a N son exactamente aquéllos que dan cociente nilpotente (o equivalentemente, aquéllos que contienen al residual nilpotente o hiperconmutador). (Ver Teorema **??**).

Para terminar el trabajo, parecía interesante encontrar en G-conjuntos un resultado similar al teorema de descomposición de una representación irreducible de G como producto tensorial de representaciones proyectivas. Con ello se completaría el estudio en el anillo de Burnside de los resultados fundamentales del artículo original de Clifford[**?**].

Se hacía necesario, por tanto, definir un concepto de G-conjunto proyectivo, o mejor aún, de extensión proyectiva a G de un H-conjunto, con $H \lhd G$, y un *producto tensorial* que permitiera descomponer un G-conjunto simple.

En esta última parte del trabajo, recogida en el Capítulo 3 de la memoria, se utiliza un lenguaje distinto al de los capítulos anteriores. Conviene ver un H-conjunto de orden l como un homomorfismo ψ de H en Σ_l, o lo que es lo mismo, como una representación por permutaciones de H.

Se define extensión proyectiva de ψ a G, cuando H es normal en G, como una aplicación $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ que extiende a ψ y que además verifica, para todos $g \in G$ y $h \in H$,

$$T(ghg^{-1}) = T(g)T(h)T(g)^{-1}.$$

En el caso conocido de las representaciones proyectivas se llega a que, si R es una tal representación proyectiva de un grupo G que extiende a una representación de H irreducible, entonces, para cualesquiera g, $g' \in G$, la

matriz $R(g'g)^{-1}R(g')R(g)$ es un valor escalar. En nuestro caso, podremos asegurar nada más que $T(g'g)^{-1}T(g')T(g)$ es un elemento del centralizador en Σ_l del conjunto imagen de ψ.

Con estas ideas se establece, en primer lugar, un teorema de existencia de extensión proyectiva de un H-conjunto ordinario. (Ver Teorema **??**). Se estudian también algunos casos relevantes en los que dicha extensión es única.

A continuación, se define el *producto tensorial* de una extensión proyectiva T de un H-conjunto simple de orden l, H/U, por un G/H-conjunto ordinario de orden m, G/S, como una representación por permutaciones de G en el producto orlado $\Sigma_l \wr \Sigma_m$, que, en general, es proyectiva y cuya restricción a H da como resultado la suma de m copias de H/U.

Además, esta representación producto es G-conjunto ordinario si y sólo si la restricción de T a S es homomorfismo. (Ver Proposición **??**).

Se ve también que, en el caso en que las dos representaciones que intervienen en el producto sean ordinarias, el resultado es equivalente al del producto cartesiano entre G-conjuntos, como era deseable. (Ver Corolario **??**).

Con esta definición, se establece un teorema de descomposición de un G- conjunto simple, G/V, con restricción a H homogénea,

$$G/V = a_{UV} H/U,$$

como producto de una extensión proyectiva de H/U por el G/H-conjunto ordinario G/VH. (Ver Teorema **??**).

En el caso en que $G = HL$, producto directo, se obtiene como corolario que todo G-conjunto simple es producto tensorial de una extensión proyectiva de un H-conjunto por un L-conjunto. (Ver Corolario **??**).

Capítulo 0

Resultados previos

En este capítulo previo se introducen algunos conceptos y resultados básicos sobre G-conjuntos, anillo de Burnside y función de Möbius con el fin de hacer la memoria lo más autocontenida posible. Apenas se incluye aquí material original, salvo en algún caso por el enfoque dado, por lo que las demostraciones se presentan de forma esquemática o se suprimen.

0.1 G-conjuntos

Los contenidos de este párrafo, en su mayor parte, se encuentran desarrollados con detalle en las notas de Dress[**?**] o en el libro de Rotman[**?**].

Definiciones 0.1.1

(i) Sea G un grupo. Se llama G-conjunto de orden n *a un conjunto X de n elementos junto con una aplicación*

$$\phi : G \times X \longrightarrow X,$$

donde $\phi(g,x)$ *se denota por* $g \cdot x$, *que verifique, para todos* $g, h \in G$, $x \in X$:

(a) $hg \cdot x = h \cdot (g \cdot x)$ *y*

(b) $1 \cdot x = x$.

(ii) *Si* X *es* G*-conjunto, se llama* G-órbita *de* $x \in X$ *a*

$$Gx = \{g \cdot x;\ g \in G\}.$$

(iii) *En las mismas condiciones, se llama* estabilizador de x en G *a*

$$G_x = \{g \in G;\ g \cdot x = x\},$$

que es subgrupo de G.

Si $x_1, x_2 \in X$, *el estabilizador de* x_2 *en* G_{x_1},

$$(G_{x_1})_{x_2} = \{g \in G;\ g \cdot x_1 = x_1,\ g \cdot x_2 = x_2\},$$

se denota $G_{x_1 x_2}$.

De manera análoga se define el estabilizador de $x_1, \ldots, x_k \in X$, *que se denota* $G_{x_1 \ldots x_k}$, *como* $\{g \in G;\ g \cdot x_i = x_i,\ i = 1, \ldots, k\}$.

(iv) *Se llama* estabilizador del subconjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de X *a*

$$G_{\{x_1,\ldots,x_k\}} = \{g \in G;\ g \cdot x_i \in \{x_1, \ldots, x_k\},\ i = 1, \ldots, k\}.$$

(v) X, G*-conjunto, se dice* simple *o* transitivo *si para todos* $x, y \in X$ *existe* $g \in G$ *tal que* $g \cdot x = y$.

(vi) Se dice que dos G-conjuntos X,Y son G-isomorfos *si existe una aplicación biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para todos $g \in G$, $x \in X$. Denotaremos por $[X]$ la clase de isomorfía de un G-conjunto X.*

Es conocida la siguiente proposición.

Proposición 0.1.2 (Ver [**?**, prop.3.1 y corol.])

(i) Si X es G-conjunto transitivo, $x \in X$ y $U = G_x$, entonces X es G-isomorfo al G-conjunto G/U de clases a izquierda de U en G con la acción por multiplicación a izquierda: $g \cdot hU = ghU$.

(ii) Los G-conjuntos transitivos G/U y G/V son G-isomorfos si y sólo si los subgrupos U y V son conjugados en G.

Observación 0.1.3

Para cada G-conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, se define de forma natural la aplicación $\varphi : G \longrightarrow \Sigma_n$ dada por

$$\varphi(g)(i) = j \text{ si } \; g \cdot x_i = x_j.$$

Obviamente la definición de φ depende de la forma en que se hayan ordenado los elementos de X. Es fácil comprobar que esta aplicación es homomorfismo de grupos.

Recíprocamente, dados $\varphi : G \longrightarrow \Sigma_n$, homomorfismo de grupos, y el conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, se puede dotar a X de estructura de G-conjunto definiendo la aplicación $\phi : G \times X \longrightarrow X$ mediante

$$\phi(g, x_i) = x_j \text{ si } \; \varphi(g)(i) = j.$$

Definiciones 0.1.4

(i) Un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow \Sigma_n$ *se denomina* representación por permutaciones de G de grado n. *Se dirá que* φ *está asociada al* G*-conjunto* X *si está definida según lo expresado en la observación anterior.*

(ii) Se dice que una representación por permutaciones de G *de grado* n, φ, *es* transitiva *o* irreducible *si, para cualesquiera* $i,\ j \in \{1, \ldots, n\}$, *existe* $g \in G$ *tal que* $\varphi(g)(i) = j$.

(iii) Dos representaciones por permutaciones $\varphi, \varphi' : G \longrightarrow \Sigma_n$ *se dicen* equivalentes *si existe* $\tau \in \Sigma_n$ *tal que*

$$\tau \cdot \varphi(g) = \varphi'(g) \cdot \tau \text{ para todo } g \in G.$$

Es fácil demostrar la siguiente proposición.

Proposición 0.1.5

(i) Un G*-conjunto* X *es transitivo si y sólo si cualquier representación asociada a* X *es transitiva.*

(ii) Si φ *es una representación asociada al* G*-conjunto* X, *el estabilizador de* $x_1, \ldots, x_k$ *es*

$$\{g \in G;\ \varphi(g)(i) = i,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

(iii) Dados dos G*-conjuntos* X *y* X', $\varphi : G \longrightarrow \Sigma_n$, *una representación asociada a* X *y* $\varphi' : G \longrightarrow \Sigma_n$, *una representación asociada a* X', *se tiene:*

X *y* X' *son* G*-isomorfos si y sólo si* φ *y* φ' *son equivalentes.*

0.2 Anillo de Burnside

Una exposición detallada de las ideas básicas sobre el anillo de Burnside puede verse en Dress[?] o en tom Dieck[?].

Definición 0.2.1 *Dados dos G-conjuntos X e Y, llamaremos* suma *de ambos al G-conjunto unión disjunta $X\dot{\cup}Y$ con la acción obvia de G.*

Esta operación es compatible con la relación de isormorfía de G-conjuntos, lo que permite definir la suma de las clases de isormorfía :

$$[X] + [Y] = [X\dot{\cup}Y].$$

Dado que todo G-conjunto X se puede escribir como unión disjunta de sus órbitas, $X = \dot{\bigcup} O_i$, y que cada órbita O_i es G-isomorfa al conjunto de clases a izquierda G/U_i, donde U_i es el subgrupo estabilizador de un elemento de la órbita, podemos escribir

$$[X] = \sum_i [G/U_i],$$

o bien, agrupando G-conjuntos isomorfos,

$$[X] = \sum_{(U)_G \in C(G)} t_U [G/U], \text{con los } t_U \in \mathbb{N},$$

en donde $C(G)$ denota el conjunto de clases de conjugación de subgrupos de G y $(U)_G$ denota la clase de conjugación del subgrupo U en G. Escribiremos solamente (U) cuando no haya posibilidad de confusión.

Definición 0.2.2 *Dados U y V subgrupos de G, diremos que U es* subconjugado *de V en G, y lo escribiremos $U \underset{\sim}{\leq} V$ o $(U)_G \leq (V)_G$, si existe $x \in G$ tal que $U^x \leq V$.*

Definición 0.2.3 *El producto cartesiano de dos G-conjuntos X e Y, $X \times Y$, es un G-conjunto con la acción diagonal*

$$g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y),$$

que se llama producto de X por Y.

El producto de G-conjuntos es compatible con la relación de isormorfía, con lo que queda definido un producto de clases de isormorfía de G-conjuntos:

$$[X] \cdot [Y] = [X \times Y].$$

El conjunto de las clases de isomorfía de G-conjuntos, con las operaciones suma y producto definidas, es un semianillo conmutativo que denotaremos $\Omega^+(G)$. Ha quedado visto que

$$\Omega^+(G) = \{ \sum_{(U)_G \in C(G)} t_U[G/U], t_U \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 0.2.4 *El anillo de Grothendieck de $\Omega^+(G)$ se llama* anillo de Burnside de G *y lo denotaremos $\Omega(G)$.*

Es fácil observar que

$$\Omega(G) = \{ \sum_{(U)_G \in C(G)} t_U[G/U], t_U \in \mathbb{Z}\}.$$

El anillo de Burnside puede considerarse una construcción de tipo funtorial que, además de asociar a cada grupo G el anillo $\Omega(G)$, asocia a cada homomorfismo de grupos $H \longrightarrow G$ un homomorfismo de anillos $\Omega(G) \longrightarrow \Omega(H)$ llamado restricción y un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\Omega(H) \longrightarrow \Omega(G)$ llamado inducción.

Estos homomorfismos se encuentran descritos en Dress[?] y Ochoa[?] para un homomorfismo cualquiera $f : H \longrightarrow G$. Destacamos los siguientes casos particulares, que pueden verse en Yoshida[?]:

(i) Si $H \leq G$ y X es G-conjunto, llamamos *restringido de X a H* al H-conjunto cuyos elementos siguen siendo los de X y que resulta de considerar sólo la acción de los elementos de H. Lo denotaremos por X_H.

Es fácil ver que la restricción así definida respeta clases de isomorfía y que se puede extender por linealidad a una aplicación,

$$\mathrm{Res}_H^G : \Omega(G) \longrightarrow \Omega(H),$$

que resulta ser homomorfismo de anillos.

(ii) Si $H \leq G$ y X es H-conjunto, se construye el conjunto cociente $G \times X/\sim$, donde la relación de equivalencia viene dada por:

$(g, x) \sim (g_1, x_1)$ si y sólo si existe $h \in H$ tal que $g_1 = gh$ y $x_1 = h^{-1} \cdot x$. Dicho conjunto resulta ser G-conjunto con la acción

$$g_1 \cdot [(g, x)] = [(g_1 g, x)].$$

Lo llamaremos *inducido de X a G* y lo denotaremos X^G.

Es fácil comprobar que

$$[(H/U)^G] = [G/U] \text{ para todo } H\text{-conjunto simple } H/U$$

y que también la inducción así definida respeta las clases de isomorfía de H-conjuntos.

Extendiendo por linealidad la aplicación inducción, se obtiene un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos

$$\mathrm{Ind}_H^G : \Omega(H) \longrightarrow \Omega(G).$$

(iii) Si $N \lhd G$, entonces todo G/N-conjunto X puede ser *inflado* a un G-conjunto definiendo sobre X la acción $g \cdot x = (gN) \cdot x$.

Aparece, así, un homomorfismo de anillos

$$\mathrm{Inf} : \Omega(G/N) \longrightarrow \Omega(G),$$

que es un caso particular de la restricción: la correspondiente al homomorfismo proyección canónica de G en G/N.

Si para cada $U \leq G$, denotamos $\overline{U} = UN/N$, se tiene

$$[\mathrm{Inf}(\overline{G}/\overline{U})] = [G/UN].$$

(iv) Si $H \leq G$, $g \in G$ y $H^g = g^{-1}Hg$, se define, para cada H-conjunto X, su *conjugado* como el H^g-conjunto $g^{-1}X$ formado por los símbolos $g^{-1}x$, $x \in X$, con la acción obvia:

$$h^g \cdot g^{-1}x = g^{-1}(h \cdot x).$$

Se comprueba fácilmente que

$$[g^{-1}(H/U)] = [H^g/U^g]$$

para todo H-conjunto simple H/U.

En particular, si $H \lhd G$, el conjugado de H/U por g es isomorfo a H/U^g.

Esta conjugación respeta también las clases de isomorfía de H-conjuntos y da lugar a un homomorfismo de anillos:

$$\mathrm{Conj}_H^g : \Omega(H) \longrightarrow \Omega(H^g).$$

Este homomorfismo vuelve a ser un caso particular de la restricción cuando se considera el homomorfismo $H^g \longrightarrow H$ dado por $h^g \longmapsto h$.

Las principales propiedades de estos homomorfismos son (ver Dress[**?**] y Ochoa[**?**]):

Proposición 0.2.5 (Ley de Frobenius) *Si $H \leq G$, $x \in \Omega(H)$ e $y \in \Omega(G)$, entonces:*

$$\mathrm{Ind}_H^G(x) \cdot y = \mathrm{Ind}_H^G(x \cdot \mathrm{Res}_H^G(y)).$$

Proposición 0.2.6 (Fórmula de Mackey) *Si $H, K \leq G$, entonces*

$$\mathrm{Res}_K^G \circ \mathrm{Ind}_H^G = \sum_{HgK} \mathrm{Ind}_{K\cap H^g}^K \circ \mathrm{Res}_{K\cap H^g}^{H^g} \circ \mathrm{Conj}_H^g,$$

en donde el sumatorio recorre las dobles coclases de H y K en G y, utilizando notación funcional, consideramos que actúa primero el homomorfismo de la derecha. Es decir, si X es H-conjunto, se tiene

$$[(X^G)_K] = \sum_{HgK} [((g^{-1}X)_{K\cap H^g})^K].$$

Como consecuencia directa de la Fórmula de Mackey y observando que $G/V = \mathrm{Ind}_V^G(V/V)$, se obtiene:

Proposición 0.2.7 *Si $H \leq G$, se verifica para todo G-conjunto simple G/V:*

$$[(G/V)_H] = \sum_{VxH} [H/(H \cap V^x)],$$

en donde el sumatorio recorre las dobles coclases de V y H en G.

Utilizando este resultado junto con la Ley de Frobenius, se obtiene la siguiente expresión para el producto de G-conjuntos simples:

Proposición 0.2.8

$$[G/V \times G/W] = \sum_{WxV} [G/(V \cap W^x)],$$

en donde el sumatorio recorre las dobles coclases de W y V en G.

0.3 Función de Möbius en un poset

La referencia básica para el estudio de la función de Möbius es Rota[?]. El artículo de Hawkes, Isaacs y Ozaydin [?] da demostraciones puramente combinatorias de algunos resultados de Rota y amplía el estudio de esta función.

En lo que se refiere a la relación entre función de Möbius y anillo de Burnside, puede consultarse también Yoshida [?], Kratzer-Thévenaz [?] o Solomon [?].

Definiciones 0.3.1

(i) Llamaremos poset *a un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ que sea además localmente finito, es decir, que verifique para todos $x, y \in X$ que $\{z \in X;\, x \leq z \leq y\}$ es un conjunto finito.*

(ii) Se dice que un poset $(X, \leq)$ es semirretículo inferior *si existe el ínfimo de $\{x, y\}$, que denotamos $x \wedge y$, para todos $x, y \in X$.*

(iii) Análogamente, se dice que un poset $(X, \leq)$ es semirretículo superior *si existe el supremo de $\{x, y\}$, que denotamos $x \vee y$, para todos $x, y \in X$.*

(iv) Un poset que es semirretículo inferior y superior se denomina retículo.

(v) Si $x < y$ en un poset X, se dice que x es maximal *en y si para todo $t \in X$ con $x \leq t < y$, se tiene $x = t$.*

(vi) Si $(X, \leq)$ es un poset, se llama función de Möbius *en X a la aplicación $\mu : X \times X \longrightarrow \mathbb{Z}$ que verifica*

$$\mu(a, b) = 0 \text{ si } a \not\leq b$$

y que está definida recursivamente cuando $a \leq b$ por las ecuaciones

$$\mu(a, a) = 1$$
$$\sum_{a \leq x \leq b} \mu(a, x) = 0 \text{ si } a < b.$$

Nos interesa destacar los siguientes resultados, cuya notación y presentación ha sido adaptada a nuestras necesidades:

Proposición 0.3.2 (Ver [?, Lema 2.4]).

Si X es semirretículo inferior y x no es intersección de maximales en y, entonces $\mu(x, y) = 0$.

Proposición 0.3.3 (Ver [?, Cor. de Prop.5.4] o bien [?, Lema 2.7]).

Sea X un poset con un elemento máximo 1 y sea $a < 1$ un elemento de X tal que existe ínfimo de $\{a, x\}$ para todo $x \in X$. Entonces, para cada $b \in X$, se verifica

$$\sum_{a \wedge x = b} \mu(x, 1) = 0.$$

En esta memoria, nos interesará el poset $S(G)$ de los subgrupos de un grupo G con la relación $\subseteq$, que es un retículo ya que, dados $U, V \in S(G)$, el menor subgrupo que contiene a U y V, $\langle U, V \rangle$, es el supremo de $\{U, V\}$ y el subgrupo intersección, $U \cap V$, es el ínfimo de $\{U, V\}$.

Además, $(S(G), \subseteq)$ posee al 1 como elemento mínimo y a G como elemento máximo.

Podemos, por tanto, escribir la proposición anterior para el caso del retículo $S(G)$.

Proposición 0.3.4 *Sea $H < G$. Entonces, para cada $U \leq G$, se verifica*

$$\sum_{H \cap S = U} \mu(S, G) = 0.$$

Capítulo 1

Teoría de Clifford en el anillo de Burnside

A partir de ahora seguiremos, por comodidad, la siguiente notación. Si G es un grupo y V es un subgrupo de G, con G/V se denotará la clase de G-isomorfía del G-conjunto G/V, es decir, consideraremos G/V como elemento del anillo de Burnside de G.

En este capítulo nos proponemos desarrollar en el anillo de Burnside una teoría análoga a la teoría de Clifford sobre descomposición en suma de irreducibles de los caracteres inducido y restringido de uno dado.

Esta teoría, para caracteres complejos, explota constantemente un par de hechos bien conocidos:

(i) El conjunto de los caracteres irreducibles sobre $\mathbb{C}$ de un grupo finito G, $\mathrm{Irr}(G)$, forma una base del $\mathbb{Z}$-módulo libre $R(G)$ de los caracteres generalizados de G y esta base es ortonormal respecto del producto escalar

habitual, que viene dado por la fórmula:

$$[\alpha, \beta]_G = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)},$$

para $\alpha, \beta \in R(G)$.

(ii) Las aplicaciones restricción e inducción de caracteres son adjuntas respecto a los oportunos productos escalares, es decir,

$$[\alpha_H, \beta]_H = [\alpha, \beta^G]_G \text{ para todos } \alpha \in R(G), \beta \in R(H),$$

lo que se denomina *Ley de reciprocidad de Frobenius.*

Para poder desarrollar en el anillo de Burnside de un grupo una teoría análoga a la teoría de Clifford para caracteres, los hechos citados arriba deben tener una réplica apropiada.

Nos interesa, por tanto, definir un producto escalar en $\Omega(G)$, respecto del cual $\{[G/U];\ (U) \in C(G)\}$ sea una base ortonormal. De esta forma, los G-conjuntos simples jugarán en nuestra teoría el mismo papel que los caracteres irreducibles en la teoría de Clifford, es decir, serán los *átomos* en la descomposición del conjunto inducido o restringido de uno dado.

Sea

$$< G/U, G/V >= \begin{cases} 1 & \text{si } (U)_G = (V)_G \\ 0 & \text{si } (U)_G \neq (V)_G \end{cases}.$$

Extendiendo por $\mathbb{Z}$-bilinealidad la aplicación denotada por $<,>$ al producto $\Omega(G) \times \Omega(G)$, se obtiene de forma natural un producto escalar en el anillo de

Burnside, respecto del cual la base canónica es ortonormal. De esta forma, todo elemento $x \in \Omega(G)$ puede escribirse como

$$x = \sum_{(V)\in C(G)} t_V G/V,$$

con $t_V =< x, G/V >$, perteneciente a $\mathbb{Z}$.

Si x es G-conjunto, diremos que G/V es *componente simple* de x si $t_V \neq 0$.

Pero con este producto escalar y la conocida inducción de G-conjuntos, la ley de reciprocidad de Frobenius deja de verificarse.

Por ejemplo, si $H \leq G$ con $\mid G : H \mid = 2$, se tiene

$$< (H/H)^G, G/H >=< G/H, G/H >= 1,$$

mientras que

$$< (H/H, (G/H)_H >=< H/H, \sum_{HxH} H/H \cap H^x >=< H/H, \sum_{xH} H/H >$$

por ser $H \lhd G$. Y este último valor es 2.

La idea es, por tanto, definir una nueva *inducción* que sea adjunta de la restricción respecto del producto escalar definido arriba, para la que proponemos el nombre de *elevación*.

Definición 1.0.5 *Dado un grupo G, si H es subgrupo de G y H/U es H-conjunto simple, llamaremos* elevado de H/U a G *al G-conjunto $(H/U)\uparrow^G$ que verifica:*

$$< (H/U)\uparrow^G, G/V >_G =< H/U, (G/V)_H >_H$$

para toda $(V)_G \in C(G)$.

Notemos que la definición es correcta porque no depende del representante elegido en $(U)_H$ ni del representante elegido en cada $(V)_G$. Además, queda unívocamente determinado el G-conjunto $(H/U)\uparrow^G$.

Esta aplicación elevación se extiende por linealidad a un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos de $\Omega(H)$ en $\Omega(G)$ que verifica las siguientes propiedades inmediatas:

(i) *Ley de reciprocidad de Frobenius:*

$< x\uparrow^G, y >_G = < x, y_{\,H} >_H$ para todos $x \in \Omega(H)$, $y \in \Omega(G)$.

En efecto, puesto que el producto escalar es lineal en ambas componentes y la propiedad es válida para H-conjuntos y G-conjuntos simples por la propia definición de elevación.

(ii) *La elevación es transitiva:*

Si $U \leq H \leq K \leq G$, se verifica $((H/U)\uparrow^K)\uparrow^G = (H/U)\uparrow^G$.

En efecto, para cada G-conjunto simple G/V,

$$\begin{aligned} & < ((H/U)\uparrow^K)\uparrow^G, G/V > = < (H/U)\uparrow^K, (G/V)_K > \\ = \; & < H/U, (G/V)_H > = < (H/U)\uparrow^G, G/V > . \end{aligned}$$

Evidentemente, para cada $U \leq H \leq G$, podemos escribir

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{(V)\in C(G)} a_{UV}\, G/V$$

con los a_{UV} enteros no negativos.

Además,

$$a_{UV} = < (H/U)\uparrow^G, G/V > = < H/U, (G/V)_H >$$

y, por tanto, para cada $V \leq G$,

$$(G/V)_H = \sum_{(U)\in C(H)} a_{UV} H/U.$$

Proposición 1.0.6 *Dado un grupo G, si $U \leq H \leq G$ y $V \leq G$, se tiene*

(i) $a_{UV} = card\{VxH;\ H \cap V^x = U^h \ \text{ para algún } h \in H\}$.

(ii) Si $(U)_G \not\leq (V)_G$, *entonces* $a_{UV} = 0$.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} a_{UV} &= < H/U, (G/V)_H > = < H/U, \sum_{VxH} H/(H \cap V^x) > \\ &= \text{card}\{VxH;\ H \cap V^x \in (U)_H\} \\ &= \text{card}\{VxH;\ H \cap V^x = U^h \ \text{ para algún } h \in H\}. \end{aligned}$$

En particular, si $(U)_G \not\leq (V)_G$, $a_{UV} = 0$. □

El recíproco del apartado (ii) de la proposición **??** no es cierto en general, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.0.7 Consideremos el grupo

$$G = \langle x, y, a : x^2 = y^2 = a^3 = 1 = [x, y],\ x^a = y,\ y^a = xy \rangle \cong A_4$$

y en él los subgrupos $U = \langle x \rangle$ y $V = H = \langle xy \rangle$.

Como V es subgrupo normal de G, se verifica

$$\begin{aligned} a_{UV} &= \text{card}\{VxV;\ V \cap V^x = U^h \ \text{ para algún } h \in H\} \\ &= \text{card}\{xV;\ V \cap V^x = U\} = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, es claro que $(U)_G \leq (V)_G$. □

Otra propiedad interesante de la elevación es que se comporta bien al pasar al cociente por ciertos subgrupos normales.

Proposición 1.0.8 *Sean $N \leq U \leq H \leq G$, con $N \lhd G$. Entonces,*

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{(V)\in C(G)} a_{UV} G/V \iff (\overline{H}/\overline{U})\uparrow^{\overline{G}} = \sum_{(\overline{V})\in C(\overline{G})} a_{\overline{U}\,\overline{V}}\overline{G}/\overline{V},$$

con $a_{\overline{U}\,\overline{V}} = a_{UV}$ para todo $(V) \in C(G)$, donde la barra denota la imagen por el epimorfismo natural de G en G/N.

DEMOSTRACIÓN Las únicas clases de conjugación $(V)_G$ para las que el coeficiente a_{UV} puede ser no nulo son las que verifican $(U)_G \leq (V)_G$. También en $\overline{G}$, las únicas clases $(\overline{V})_{\overline{G}}$ que pueden aparecer en el sumatorio del enunciado con coeficiente $a_{\overline{U}\,\overline{V}} \neq 0$ son las de la forma $(\overline{U})_{\overline{G}} \leq (\overline{V})_{\overline{G}}$. Como $N \leq U$, podemos establecer una biyección entre los conjuntos $\{(V)_G \in C(G);\ (U)_G \leq (V)_G\}$ y $\{(\overline{V})_{\overline{G}} \in C(\overline{G});\ (\overline{U})_{\overline{G}} \leq (\overline{V})_{\overline{G}}\}$

Ahora, para cada $(V)_G \in C(G)$ con $(U)_G \leq (V)_G$,

$$\begin{aligned} a_{UV} &= \text{card}\{VxH;\ H \cap V^x = U^h \ \text{ para algún } h \in H\} \\ &= \text{card}\{VxH;\ \overline{H \cap V^x} = \overline{U^h} \ \text{ para algún } h \in H\} \\ &= \text{card}\{\overline{V}\,\overline{x}\,\overline{H};\ \overline{H} \cap \overline{V}^{\overline{x}} = \overline{U}^{\overline{h}} \ \text{ para algún } \overline{h} \in \overline{H}\} = a_{\overline{U}\,\overline{V}}, \end{aligned}$$

ya que $N \leq U, V, H$. □

Puede ser interesante el estudio de la matriz (a_{UV}) para $H \leq G$ fijos. Para el caso en que H sea subgrupo normal de G, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.0.9 *Dado un grupo G y dados $H \lhd G$ y $V \leq G$, si llamamos $S = H \cap V$, entonces*

$$a_{UV} = \begin{cases} 0 & si\ U \notin (S)_G \\ \frac{|N_G(S)\cdot H|}{|VH|} & si\ U \in (S)_G \end{cases}$$

Es decir,

$$(G/V)_H = \frac{\mid N_G(S)\cdot H \mid}{\mid VH \mid} \sum_{\substack{(U)\ \in\ C(H) \\ U\ \in\ (S)_G}} H/U.$$

DEMOSTRACIÓN

$$(G/V)_H = \sum_{VxH} H/(H \cap V^x) = \sum_{VHx} H/(H \cap V)^x = \sum_{VHx} H/S^x.$$

Luego $a_{UV} = 0$ si $U \notin (S)_G$.

Además, si $U = S^g$ para algún $g \in G$, se tiene:

$$\begin{aligned} a_{UV} &= \text{card}\{VHx;\ S^x \in (U)_H\} \\ &= \text{card}\{VHx;\ S^x = S^{gh} \text{ para algún } h \in H\} \\ &= \text{card}\{VHx;\ xh^{-1}g^{-1} \in N_G(S) \text{ para algún } h \in H\} \\ &= \text{card}\{VHx;\ x \in N_G(S)gH = N_G(S)Hg\} \\ &= \frac{\mid N_G(S)\cdot H \mid}{\mid VH \mid} = a_{SV}. \end{aligned}$$

□

Observemos que el cociente obtenido en la proposición **??** es entero ya que $S = H \cap V$ y, por tanto, $V \leq N_G(S)$. Además, se puede expresar de la forma

$$a_{SV} = \frac{\mid N_G(S)\cdot H \mid}{\mid VH \mid} = \frac{\mid N_G(S) \mid\mid H \mid\mid S \mid}{\mid V \mid\mid H \mid\mid N_G(S) \cap H \mid} = \frac{\mid N_G(S) : V \mid}{\mid N_H(S) : S \mid}.$$

Como consecuencia de la proposición **??**, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.0.10 *Sea H subgrupo normal de G. Si $U, W \leq H$, $V \leq G$ y $x \in G$, entonces*

(i) $(H/U^x)\uparrow^G = (H/U)\uparrow^G$.

(ii) $< (G/V)_H, H/U^x > = < (G/V)_H, H/U >$

(iii) $< H/U^x, H/W^x > = < H/U, H/W >$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar los puntos (i) y (ii), basta observar que los coeficientes a_{UV} de la expresión

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{(V)\in C(G)} a_{UV} G/V$$

sólo dependen de la clase de conjugación de V y U en G, y esto es obvio por la proposición **??**. Veamos la demostración de (iii):

$< H/U^x, H/W^x >$ es distinto de cero e igual a uno si y sólo si $U^x = W^{xh}$ para algún $h \in H$, es decir, si y sólo si $U = W^{xhx^{-1}}$ para algún $xhx^{-1} \in H$. Y esto ocurre si y sólo si $< H/U, H/W >= 1$.

□

Observación 1.0.11 *Dados un grupo G y un H-conjunto simple H/U con $H \lhd G$, observemos que G actúa por conjugación sobre el conjunto*

$$\{H/D;\ (D) \in C(H),\ D \in (U)_G\}$$

de forma transitiva. Si T es el subgrupo estabilizador de H/U por dicha acción, se tiene:

$$T = \{x \in G;\ H/U^x = H/U\} = N_G(U) \cdot H.$$

Como consecuencia, se deduce que la longitud de la órbita de H/U es $|\ G : N_G(U)H\ |$. □

Nuestro primer resultado se corresponde fielmente con el resultado central de la teoría de Clifford para caracteres. Aquí, el subgrupo T de la observación anterior juega el papel del denominado subgrupo de inercia de un caracter irreducible.

Teorema 1.0.12 (Ver [?, teor.6.11])

Dado un grupo G y dados $H \lhd G$ y $U \leq H$, si llamamos $T = N_G(U) \cdot H$, $\mathcal{A} = \{T/V;\ < (T/V)_H, H/U >\neq 0\}$ y $\mathcal{B} = \{G/V;\ < (G/V)_H, H/U >\neq 0\}$, donde los elementos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son clases de isomorfía de T-conjuntos y G-conjuntos respectivamente, entonces

(i) $(T/V)\uparrow^G = G/V$ *para todo* $T/V \in \mathcal{A}$.

(ii) La aplicación $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *dada por* $f(T/V) = G/V$ *está bien definida y es biyectiva.*

(iii) $< (T/V)_H, H/U >=< (G/V)_H, H/U > (= a_{UV})$ *para todo* $V \leq T$.

(iv) Si $G/V \in \mathcal{B}$, *eligiendo un representante adecuado de* $(V)_G$, *podemos suponer* $V \leq T$. *Entonces,* T/V *es la única componente simple de* $(G/V)_T$ *que pertenece a* $\mathcal{A}$.

Para demostrar este teorema vamos a necesitar el siguiente

Lema 1.0.13 *En las condiciones del teorema* **??**, *si* T/V *y* $T/V^x \in \mathcal{A}$ *con* $x \in G$, *entonces* V *y* V^x *son conjugados en* T.

DEMOSTRACIÓN Tomando un adecuado conjugado de V en T podemos suponer que $V \cap H = U$. Análogamente, $V^x \cap H = U$ tomando un adecuado conjugado de V^x en T. Por tanto, $U = V^x \cap H = (V \cap H)^x = U^x$ y, así, $x \in T$. $\square$

DEMOSTRACIÓN [del teorema **??**]

(i) Sea $T/V \in \mathcal{A}$. Como $< (T/V)_H, H/U > \neq 0$, podemos suponer, tomando un representante adecuado en $(V)_T$, que $V \cap H = U$. Es claro que G/V es componente simple de $(T/V)\uparrow^G$. Veamos que es la única.

Sea $< G/W, (T/V)\uparrow^G > \neq 0$. Para algún $x \in G$, se tiene $W^x \cap T = V$. Ahora, $(W^x \cap T) \cap H = V \cap H = U$. Y, por otro lado, $(W^x \cap T) \cap H = W^x \cap H$. Luego $W^x \cap H = U$. Así, $W^x \leq N_G(U) \leq T$, de donde $V = W^x \cap T = W^x$ y $G/V = G/W$ como clases de isomorfía.

Se tiene ya que $(T/V)\uparrow^G = n\, G/V$. Veamos que $n = 1$.

$$\begin{aligned} n &= < (T/V)\uparrow^G, G/V > = < T/V, (G/V)_T > \\ &= < T/V, \sum_{VxT} T/(T \cap V^x) > \\ &= \text{card}\{VxT;\ T \cap V^x = V^t \text{ para algún } t \in T\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $T \cap V^x = V^t$, entonces $V^x = V^t$ y $V^x \cap H = V^t \cap H$. Por tanto, $U^x = U^t$, con lo que $xt^{-1} \in N_G(U) \leq T$ y así $x \in T$. Es decir, $n = 1$.

(ii) Si $T/V \in \mathcal{A}$, entonces $(T/V)\uparrow^G = G/V$ y $G/V \in \mathcal{B}$, con lo que la aplicación f está bien definida. Veamos que f es suprayectiva:

Sea $G/V \in \mathcal{B}$. Tomando un adecuado conjugado de V podemos suponer que $V \cap H = U$. Así, $V \leq N_G(U) \leq T$ y $< (T/V)_H, H/U > \neq 0$, por lo

que $T/V \in \mathcal{A}$ y $(T/V)\uparrow^G = G/V$, por el apartado (i).

La inyectividad de f es consecuencia inmediata del punto (i) y del lema **??**. En efecto, supongamos que T/V y T/W son elementos de $\mathcal{A}$ con $(T/V)\uparrow^G = (T/W)\uparrow^G$. Así pues, $G/V = G/W$, o sea, $W = V^x$ para algún $x \in G$. Como T/V y T/W están en $\mathcal{A}$, se concluye del lema que V y W son conjugados en T, es decir, que $T/V = T/W$.

(iii) Por ser f biyectiva, se tiene para todo $V \leq T$ que $T/V \in \mathcal{A}$ si y sólo si $G/V \in \mathcal{B}$, es decir,

$$< (T/V)_H, H/U > \neq 0 \Longleftrightarrow < (G/V)_H, H/U > \neq 0.$$

En ese caso,

$$\begin{aligned} & < (G/V)_H, H/U > = \frac{\mid N_G(U) : V \mid}{\mid N_H(U) : U \mid} \\ = \quad & \frac{\mid N_T(U) : V \mid}{\mid N_H(U) : U \mid} = < (T/V)_H, H/U > . \end{aligned}$$

(iv) Es claro que T/V es componente simple de $(G/V)_T$. Supongamos que $T/V_1 \in \mathcal{A}$ es componente simple de $(G/V)_T$ con $T/V_1 \neq T/V$.

Entonces $< ((G/V)_T)_H, H/U >$ es mayor o igual que la suma

$$< (T/V)_H, H/U > \; + \; < (T/V_1)_H, H/U >,$$

que a su vez es estrictamente mayor que $< (T/V)_H, H/U >$ ya que, por ser $T/V_1 \in \mathcal{A}$, el segundo sumando es estrictamente positivo y esto contradice la igualdad de (iii).

□

Observación 1.0.14 En las condiciones del teorema anterior y manteniendo la notación, se tiene

$$\begin{aligned}(H/U)\uparrow^G &= \sum_{(V)\in C(G)} a_{UV} G/V = \sum_{G/V\in\mathcal{B}} a_{UV} G/V \\ &= \sum_{T/V\in\mathcal{A}} a_{UV}(T/V)\uparrow^G = (\sum_{T/V\in\mathcal{A}} a_{UV} T/V)\uparrow^G = [(H/U)\uparrow^T]\uparrow^G.\end{aligned}$$

En consecuencia, para estudiar las componentes simples de $(H/U)\uparrow^G$ y los coeficientes a_{UV} correspondientes, podemos suponer $T = G$, es decir, H/U invariante por la acción de G.

En ese caso, $\{H/D;\, (D) \in C(H),\, D \in (U)_G\}$ consta de un único elemento, H/U, y, por tanto

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{(V)\in C(G)} a_{UV} G/V$$

es tal que, para cada $(V)_G$ con $a_{UV} \neq 0$, se tiene $(G/V)_H = a_{UV} H/U$, es decir, H/U es la única componente simple de $(G/V)_H$ cuando $T = G$. □

El resultado que presentamos a continuación reproduce, aunque no tan fielmente como el teorema **??**, lo que ocurre en teoría de caracteres:

Teorema 1.0.15 (Ver [**?**, teor.6.16])

Dado un grupo G y dados un subgrupo H normal en G y un H-conjunto simple H/U tal que existe un G-conjunto G/W verificando $(G/W)_H = H/U$, si llamamos

$$\mathcal{M} = \{G/V;\, H \leq V\}\ y\ \mathcal{N} = \{G/S;\, S \underset{\sim}{\leq} W\ y\ < (H/U)\uparrow^G, G/S >\neq 0\},$$

en donde los elementos son de nuevo clases de isomorfía de G-conjuntos, entonces la aplicación ϕ dada por

$$\phi(G/V) = G/V \times G/W = G/(V \cap W)$$

define una biyección de $\mathcal{M}$ *en* $\mathcal{N}$.

DEMOSTRACIÓN Como $(G/W)_H = H/U$, podemos suponer $W \cap H = U$. Además, sabemos que

$$(G/W)_H = \sum_{WxH} H/(H \cap W^x),$$

luego $WH = G$. Ahora, si $G/V \in \mathcal{M}$, se tiene $H \leq V$ y $VW \supseteq HW = G$. Luego , por el resultado **??**, $G/V \times G/W = G/(V \cap W)$, con $V \cap W \leq W$ y $< (H/U)\uparrow^G, G/(V \cap W) > \neq 0$ ya que $(V \cap W) \cap H = W \cap H = U$. Por tanto, $G/(V \cap W) \in \mathcal{N}$. Además, ϕ está bien definida porque el producto cartesiano respeta las clases de isomorfía de G-conjuntos.

Veamos que es suprayectiva:

Si $G/S \in \mathcal{N}$, tomamos G/HS, que está en $\mathcal{M}$. Claramente, $S \leq (HS) \cap W$, tomando un adecuado representante en $(S)_G$. Además

$$| (HS) \cap W | = \frac{| HS | \cdot | W |}{| HSW |} = \frac{| H | \cdot | S | \cdot | W |}{| H \cap S | \cdot | HW |} = \frac{| S | \cdot | H \cap W |}{| U |} = | S | .$$

Así, $S = (HS) \cap W$ y $\phi(G/HS) = G/S$.

Para demostrar la inyectividad de ϕ notemos primero que, si $H \leq V$, entonces

$$V = V \cap G = V \cap WH = (V \cap W)H.$$

Ahora, si G/V y $G/V_1 \in \mathcal{M}$ con $G/(V \cap W) = G/(V_1 \cap W)$, se tiene

$$V_1 \cap W = (V \cap W)^x \quad \text{para algún } x \in G$$

y, por tanto,

$$V_1 = (V_1 \cap W)H = (V \cap W)^x H = ((V \cap W)H)^x = V^x.$$

Luego $G/V = G/V_1$ □

Observación 1.0.16 En las condiciones del teorema anterior, nos es posible conocer las componentes simples de $(H/U)\uparrow^G$ que son de la forma G/S con S subconjugado de W. El problema es que puede haber componentes simples de $(H/U)\uparrow^G$ que no sean de esta forma, como se ve en el ejemplo siguiente. □

Ejemplo 1.0.17 Consideremos el grupo

$$G = \langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = 1 = [x, y] = [x, z] = [y, z] \rangle \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

y en él los subgrupos $H = \langle x, z \rangle$, $W = \langle x, y \rangle$ y $S = \langle x, yz \rangle$.

Es claro que $G = HW$ y que $H \cap W = \langle x \rangle = U$.

Así, $(G/W)_H = H/U$ y se verifican, por tanto, las hipótesis del teorema anterior.

Como $S \cap H = U$, G/S es componente simple de $(H/U)\uparrow^G$. Sin embargo, S no es subconjugado de W. □

En las condiciones del teorema **??** y utilizando la misma notación, se puede observar que en algunos casos no hay componentes simples de $(H/U)\uparrow^G$ fuera del conjunto $\mathcal{N}$. Por ejemplo, cuando sea posible tomar $N_G(U)$ como el W del teorema, o en el caso en que los cardinales de H y G/H sean coprimos.

Corolario 1.0.18 *Sea H un subgrupo normal en G y H/U un H-conjunto simple con $N_H(U) = U$.*

(i) Si, además, H/U es invariante por G, entonces

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{\substack{(V) \in C(G) \\ H \leq V}} | G : V | \, G/(V \cap N_G(U)),$$

en donde $G/(V \cap N_G(U)) = G/(W \cap N_G(U))$ si y sólo si $(V)_G = (W)_G$.

(ii) En otro caso, se verifica

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{\substack{(V)\ \in\ C(T)\\ H\ \leq\ V}} |\ T : V\ |\ G/(V \cap N_G(U)),$$

en donde $T = N_G(U)H$ *es el estabilizador de* H/U *en* G.

DEMOSTRACIÓN

(i) Como H/U es invariante por G, se tiene $N_G(U) \cdot H = G$. Por ser además $N_G(U) \cap H = U$, se verifica $(G/N_G(U))_H = H/U$.

Por el teorema anterior, la aplicación

$$\phi : G/V \longrightarrow G/(V \cap N_G(U))$$

define una biyección entre

$$\{G/V;\ H \leq V\} \quad \text{y} \quad \{G/S; < (H/U)\uparrow^G, G/S >\neq 0\}$$

ya que, si $< (H/U)\uparrow^G, G/S >\neq 0$, entonces S es subconjugado de $N_G(U)$. Así,

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{\substack{(V)\ \in\ C(G)\\ H\ \leq\ V}} a_{U,V\cap N_G(U)} G/(V \cap N_G(U)),$$

en donde

$$\begin{aligned} a_{U,V\cap N_G(U)} &= \frac{|\ N_G(U) : V \cap N_G(U)\ |}{|\ N_H(U) : U\ |} \\ &= \frac{|\ N_G(U) \cdot V\ |}{|\ U : U\ | \cdot |\ V\ |} = |\ G : V\ |\ . \end{aligned}$$

por el comentario posterior a la proposición **??**.

(ii) H/U es invariante por la acción de T, luego, aplicando el apartado (i), se tiene

$$(H/U)\uparrow^T = \sum_{\substack{(V) \in C(T) \\ H \leq V}} \mid T : V \mid T/(V \cap N_G(U)).$$

Basta aplicar ahora el teorema **??**.

□

Corolario 1.0.19 *Sea H un subgrupo normal en G con $(\mid H \mid, \mid G/H \mid) = 1$.*

(i) Si H/U es invariante por la acción de G, entonces

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{\substack{(V) \in C(G) \\ H \leq V}} \mid G : V \mid G/(U(V \cap K)),$$

donde K es un complemento de $N_H(U)$ en $N_G(U)$.

(ii) En otro caso,

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{\substack{(V) \in C(T) \\ H \leq V}} \mid T : V \mid G/(U(V \cap K)),$$

donde T es el estabilizador de H/U por la acción de G y K es, como en (i), un complemento de $N_H(U)$ en $N_G(U)$.

DEMOSTRACIÓN

(i) Como H/U es invariante por la acción de G, se tiene $N_G(U)H = G$. Ahora,

$$G/H = N_G(U)H/H \cong N_G(U)/N_H(U).$$

Por el teorema de Schur-Zassenhaus, $N_H(U)$ admite un complemento K en $N_G(U)$ y, por cuestión de órdenes, K es un complemento de H en G.

Llamamos W a UK, que es subgrupo por ser $K \leq N_G(U)$. Además, W verifica

$$WH = UK\,H = G \text{ y}$$

$$W \cap H = UK \cap H = U(K \cap H) = U.$$

Así, $(G/W)_H = H/U$ y se verifican las hipótesis del teorema **??**.

Por tanto, las componentes simples G/S de $(H/U)\uparrow^G$ tales que $(S) \leq (W)$ son las del conjunto

$$\{G/(V \cap W);\ (V) \in C(G),\ H \leq V\}.$$

Veamos que éstas son todas, es decir, que si la componente G/S verifica $< G/S, (H/U)\uparrow^G > \neq 0$, entonces $(S) \leq (W)$:

Tomando un adecuado conjugado de S, podemos suponer $S \cap H = U$. Entonces, $S \leq N_G(U)$ y, como $U \lhd N_G(U)$, podemos pasar a $N_G(U)/U = \overline{N_G(U)}$, donde $\overline{N_H(U)}$ es un subgrupo de Hall con complemento $\overline{KU} = \overline{W}$.

Ahora $\overline{S} \cap \overline{N_H(U)} = \overline{1}$, luego $|\ \overline{S}\ |$ divide a $|\ \overline{N_G(U)} : \overline{N_H(U)}\ | = |\ \overline{W}\ |$.

Por tanto, $\overline{S}$ está contenido en un subgrupo de orden $|\ \overline{W}\ |$, que debe ser conjugado de $\overline{W}$. Así, $(S) \leq (W)$ y se tiene

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{\substack{(V) \in C(G) \\ H \leq V}} a_{U,V\cap W} G/(V \cap W),$$

en donde $V \cap W = V \cap UK = U(V \cap K)$.

Ahora, de acuerdo con lo dicho en la nota posterior a la proposición **??**, para cada $(V)_G$ con $H \leq V$,

$$a_{U,V\cap W} \quad = \quad \frac{|\ N_G(U) : U(V \cap K)\ |}{|\ N_H(U) : U\ |} = \frac{|\ N_G(U)\ |}{|\ N_H(U)\ |} \cdot \frac{|\ U\ |}{|\ U(V \cap K)\ |}$$

$$= \mid K \mid \cdot \frac{\mid U \mid \cdot \mid U \cap V \cap K \mid}{\mid U \mid \cdot \mid V \cap K \mid} = \frac{\mid K \mid}{\mid V \cap K \mid}.$$

Como, además, $V = H(K \cap V)$ y $H \cap (K \cap V) = 1$, es inmediato que $\mid V \cap K \mid = \mid V : H \mid$, luego:

$$a_{U,V\cap W} = \frac{\mid K \mid}{\mid V : H \mid} = \frac{\mid K \mid \cdot \mid H \mid}{\mid V \mid} = \mid G : V \mid .$$

(ii) Como $H \lhd T$ y $(\mid H \mid, \mid T/H \mid) = 1$, se tiene por (i)

$$(H/U)\uparrow^T = \sum_{\substack{(V) \in C(T) \\ H \leq V}} \mid T : V \mid T/(U(V \cap K)),$$

para K complemento de $N_H(U)$ en $N_T(U) = N_G(U)$. Basta aplicar ahora el teorema **??**.

□

Dado un grupo G y un factor principal abeliano de G, K/H, se puede obtener información sobre la restricción a H de K-conjuntos simples que sean G-invariantes.

Lema 1.0.20 *Sean H y K subgrupos normales de un grupo G con $H \leq K$ y sea K/V un K-conjunto simple invariante por la acción de G. Entonces, si H/U es componente simple de $(K/V)_H$, se verifican*

(i) H/U^x es componente simple de $(K/V)_H$ para todo $x \in G$.

(ii) K/U es invariante por la acción de G.

DEMOSTRACIÓN

(i) Tomando un adecuado representante de la clase de conjugación de V en K, podemos suponer que $V \cap H = U$.

Para $x \in G$, como $N_G(V) \cdot K = G$, existen $n \in N_G(V)$ e $y \in K$ tales que $x = ny$.

Así, $U^x = U^{ny} = (V \cap H)^{ny} = (V \cap H)^y = U^y$, conjugado de U en K. Como, por la proposición **??**, tenemos

$$(K/V)_H = a_{UV}^{(K)} \sum_{\substack{(D) \in C(H) \\ D \in (U)_K}} H/D,$$

es claro que H/U^x aparece como componente simple de $(K/V)_H$.

(ii) Supongamos, como en (i), que $V \cap H = U$. Así, $N_G(V) \leq N_G(U)$. Además, K/V invariante por G implica $N_G(V) \cdot K = G$.

Luego $N_G(U)K = G$ y, por tanto, K/U es invariante por la acción de G.

□

Proposición 1.0.21 *Si K/H es factor principal abeliano de un grupo G y $V \leq K$ con K/V invariante por la acción de G, entonces se da una de las dos situaciones siguientes:*

(i)

$$(K/V)_H = \sum_{\substack{(D) \in C(H) \\ D \in (V)_K}} H/D,$$

con $\mid K : H \mid$ sumandos distintos. Es decir, en este caso $V \leq H$ y la clase de conjugación de V en K, $(V)_K$, se descompone en $\mid K : H \mid$ clases de conjugación de subgrupos de H.

(ii) $(K/V)_H = \mid K : VH \mid H/U$, *donde* $U = V \cap H$.

DEMOSTRACIÓN Sea $U = V \cap H$ y T el estabilizador de H/U por la acción de G: $T = N_G(U)H$.

Por el apartado (ii) del lema anterior, K/U es invariante por la acción de G, luego

$$G = N_G(U)K = TK.$$

Como $H \leq K \cap T$ y K/H es abeliano, $K \cap T \lhd K$. Además, $K \cap T \lhd T$, por lo que $K \cap T \lhd TK = G$. De esta forma, o bien $K \cap T = H$, o bien $K \cap T = K$ puesto que K/H es factor principal de G.

Supongamos primero que $K \cap T = H$. En ese caso, $V \leq H$ y, obviamente, $U = V \cap H = V$.

Aplicando el resultado de la proposición **??**, se tiene

$$(K/V)_H = a_{U,V}^{(K)} \sum_{\substack{(D) \in C(H) \\ D \in (V)_K}} H/D,$$

en donde el número de sumandos distintos es el cardinal de la órbita de H/U en K. Como T es el estabilizador de H/U en G, $T \cap K = H$ resulta ser el estabilizador de H/U por la acción de K. Luego la órbita de H/U en K tiene $\mid K : H \mid$ elementos y éste es, por tanto, el número de sumandos distintos que aparecen en la expresión de arriba.

Igualando ahora cardinales en la misma expresión, se tiene

$$\mid K : V \mid = a_{U,V}^{(K)} \mid K : H \mid \cdot \mid H : V \mid,$$

de donde $a_{U,V}^{(K)} = 1$. Se da, por tanto, la situación (i).

Sea ahora $K \cap T = K$. En este caso, el estabilizador de H/U en K es $T \cap K = K$ y, por tanto, H/U es invariante por la acción de K, con lo que se tiene la situación (ii), donde el valor de $a_{U,V}^{(K)}$ se puede calcular igualando cardinales o por aplicación directa del resultado **??**. □

En la proposición anterior observemos que, si $V \not\leq H$, sólo puede darse la situación (ii).

Corolario 1.0.22 *Si $H \lhd G$ con $\mid G : H \mid = p$, primo, entonces, para cada G-conjunto simple G/V, se da una de las dos situaciones siguientes:*

(i)

$$(G/V)_H = \sum_{\substack{(D) \in C(H) \\ D \in (V)_G}} H/D.$$

con p sumandos distintos.

(ii) $(G/V)_H = \mid G : VH \mid H/U$, *donde* $U = V \cap H$.

DEMOSTRACIÓN Basta tomar $K = G$ en el teorema anterior. □

En el caso (ii) del corolario anterior, observemos que sólo caben dos posibilidades: $V \leq H$ $(VH = H)$ y $(G/V)_H = pH/U$, o bien $V \not\leq H$ $(VH = G)$ y $(G/V)_H = H/U$.

Veamos ahora con un ejemplo que, dados un grupo G y un subgrupo H normal en G, pueden existir G-conjuntos simples en las dos situaciones anteriores.

Ejemplo 1.0.23 Se considera el grupo

$$G = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1,\ ba = a^{-1}b \rangle \cong D_4$$

y llamamos $H = \langle a^2, b\rangle$, subgrupo normal en G de índice dos. Tomamos $V = \langle b\rangle \leq H$. Ahora, $N_G(V) = H$ y $T = H$. En este caso

$$(G/V)_H = \sum_{\substack{(D) \in C(H) \\ D \in (V)_G}} H/D = H/V + H/V^a.$$

Por otro lado, consideramos $W = \langle a^2\rangle$, subgrupo normal en G; ahora $U = W \cap H = W$ y $T = N_G(U) \cdot H = G$. Ahora, $(G/W)_H = \mid G : WH \mid H/U = 2\, H/W$. □

Capítulo 2

Primitividad y grado de G-conjuntos

El concepto de G-conjunto primitivo puede caracterizarse en términos de la inducción clásica de G-conjuntos. Si en esa caracterización sustituimos inducción por elevación, obtenemos un nuevo concepto que llamaremos G-conjunto débilmente primitivo.

De la misma manera, se obtienen en este capítulo definiciones que recuerdan a otras de teoría de caracteres y, a partir de ahí, algunos resultados sobre grupos.

Las propiedades sobre caracteres que se recuerdan en este capítulo pueden encontrarse, por ejemplo, en el libro de Isaacs[?] o en el de Curtis y Reiner[?].

2.1 G-conjuntos débilmente primitivos

Comenzamos recordando la definición de G-conjunto primitivo.

Definición 2.1.1 *Dado un grupo G, el G-conjunto transitivo, X, se dice* primitivo *si $Stab_G(x)$ es maximal en G para algún $x \in X$.*

Obsérvese que esto se puede expresar diciendo que X es G-isomorfo a un G-conjunto G/U para el que no existe ningún subgrupo H, $U < H < G$, con $(H/U)^G = G/U$.

Los G-conjuntos primitivos se pueden caracterizar también utilizando la elevación:

Proposición 2.1.2 *X, G-conjunto transitivo, es primitivo si y sólo si existe $U < G$ tal que*

$$nX = (U/U)\uparrow^G - G/G$$

para algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN Notemos que $(U/U)\uparrow^G - G/G$ siempre es G-conjunto ya que

$$< (U/U)\uparrow^G, G/G >=< U/U, (G/G)_U >=< U/U, U/U >= 1.$$

Además,

$$(U/U)\uparrow^G - G/G \neq 0 \text{ si } U < G$$

ya que G/U es siempre componente simple de $(U/U)\uparrow^G$.

$\Longrightarrow$) X es G-isomorfo a G/U para algún U subgrupo maximal de G.

Ahora,

$$(U/U)\uparrow^G = a_{UU}G/U + G/G,$$

en donde

$$a_{UU} = < U/U, (G/U)_U >=< U/U, \sum_{UxU} U/U \cap U^x >$$

$$= \quad \text{card}\{UxU;\, U \cap U^x = U\}$$

$$= \quad \text{card}\{UxU;\, U^x = U\}$$

Como $U < \cdot G$, o bien $a_{UU} = 1$ si $N_G(U) = U$, o bien $a_{UU} =\mid G : U \mid$ si $N_G(U) = G$.

Así,

$$(U/U)\uparrow^G =\mid N_G(U) : U \mid G/U + G/G$$

y, por tanto,

$$(U/U)\uparrow^G - G/G = nX, \;\; \text{con} \;\; n =\mid N_G(U) : U \mid .$$

$\Longleftarrow$) $(U/U)\uparrow^G = \sum_{(V)\in C(G)} a_{UV} G/V$, en donde

$$a_{UV} \neq 0 \;\; \text{si y sólo si} \;\; U \underset{\sim}{\leq} V.$$

Como $a_{UG} = 1$, se tiene

$$(U/U)\uparrow^G - G/G = \sum_{\substack{(V)_G \in C(G) \\ (U)_G \leq (V)_G \neq (G)_G}} a_{UV} G/V,$$

con todos los coeficientes a_{UV} mayores o iguales que 1.

Así, $(U/U)\uparrow^G - G/G = nX$, con X transitivo y $n \neq 0$, si y sólo si $X \cong G/U$ con U maximal en G.

En ese caso, $n =\mid N_G(U) : U \mid$. □

El concepto de carácter primitivo puede expresarse en términos de inducción (de caracteres) de manera análoga a la de G-conjuntos primitivos:

Definición 2.1.3 *Dado un grupo G, un carácter $\chi \in Irr(G)$ se dice* primitivo *si $\chi \neq \theta^G$ para cualquier carácter θ de un subgrupo propio de G.*

Estudiemos ahora los caracteres que verifican la propiedad análoga a la que aparece en la proposición **??**, es decir, los caracteres $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ para los que exite $U < G$ con

$$n\chi = (1_U)^G - 1_G \text{ para algún } \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Observemos en primer lugar que $(1_U)^G - 1_G$ siempre es carácter y que, además, no tiene a 1_G como componente ya que

$$[(1_U)^G, 1_G] = [1_U, 1_U] = 1.$$

Es también distinto de cero por ser $U < G$.

Proposición 2.1.4 *Dado un grupo G, si $\chi \in Irr(G)$ es tal que existe $U < G$ con*

$$n\chi = (1_U)^G - 1_G \text{ para algún } \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

entonces $n = 1$.

DEMOSTRACIÓN La demostración para el caso en que U es subgrupo maximal de G aparece en el corolario 3.5 de M.Aschbacher-R.Guralnick[**?**]. Para el caso general, observemos que $n\chi$ es la diferencia de dos caracteres permutación, por lo que χ es un carácter racional que, además, verifica

$$[\chi, 1_G] = 0.$$

Luego χ debe tomar un valor menor o igual que 1 para algún $g \in G$ y, por tanto, $n\chi(g) \leq -n$. Pero $(1_U)^G - 1_G$ sólo puede tomar valores mayores o iguales que -1, lo que lleva a contradicción si $n > 1$. □

Por tanto, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ es uno de los caracteres que estamos estudiando si y sólo si $\chi = (1_U)^G - 1_G$ para algún $U < G$.

Esto obliga a que $(1_U)^G$ sea un carácter de permutación 2-transitivo o, lo que es lo mismo, a que el número de dobles coclases de U en G sea dos, de donde se deduce inmediatamente que U es maximal en G.

A diferencia de lo que ocurre en G-conjuntos, estos caracteres $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ para los que existe $U < G$ con

$$n\chi = (1_U)^G - 1_G \text{ para algún } \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

no coinciden con los caracteres primitivos.

Por ejemplo, si $G \cong \Sigma_4$, a partir del subgrupo $U \cong D_4$, se obtiene el carácter $\chi = (1_U)^G - 1_G$, que es el carácter irreducible de grado dos de G. Pero este carácter no es primitivo ya que $\chi = \psi^G$ para el carácter lineal no trivial ψ del subgrupo $V \cong A_4$.

Por otro lado, si $G \cong A_5$, los caracteres irreducibles de grado tres son primitivos porque G no tiene subgrupos de índice tres. Sin embargo, estos caracteres no verifican la propiedad de la proposición **??** porque, si se tiene $\chi = (1_U)^G - 1_G$ con $\chi(1) = 3$, entonces $\mid G : U \mid = 4$, lo cual no es posible en $G \cong A_5$.

Volviendo a G-conjuntos, parece interesante estudiar aquéllos que verifican la *primitividad*, pero con respecto a la elevación.

Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 2.1.5 *Dado un grupo G, diremos que el G-conjunto simple G/V es* w-primitivo *o* débilmente primitivo *si no existe ningún H-conjunto simple H/U, con $U \leq H < G$, tal que $(H/U)\uparrow^G = G/V$.*

Si pretendiéramos una analogía completa con el concepto de G-conjunto primitivo en términos de inducción, habría que escribir en la definición anterior $U < H < G$, pero obtendríamos el mismo concepto puesto que $(U/U)\uparrow^G$ siempre tiene al menos dos componentes, G/U y G/G, por lo que nunca puede ser G-conjunto simple.

Notemos también que, en la definición anterior, $G/V = (H/U)\uparrow^G$ implica $V \in (U)_G$, ya que G/U siempre es componente simple de $(H/U)\uparrow^G$.

Proposición 2.1.6 *Dados un grupo G y un H-conjunto H/U con $U \leq H \leq G$, entonces*

$< (H/U)\uparrow^G, G/U >= 1$ *si y sólo si* $N_G(U) \leq H$.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} & < (H/U)\uparrow^G, G/U >= 1 \Longleftrightarrow < H/U, (G/U)_H >= 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & < H/U, \sum_{UxH} H/(H \cap U^x) >= 1 \Longleftrightarrow \text{el conjunto} \\ C \quad = & \{x \in G;\ H \cap U^x = U^h \text{ para algún } h \in H\} \text{ coincide con H.} \end{aligned}$$

En ese caso, $N_G(U) \leq H$ ya que, si $x \in N_G(U)$, se tiene $x \in C$. Y, recíprocamente, si $N_G(U) \leq H$ y $x \in C$, entonces $U^h = U^x$ para algún $h \in H$ y, por tanto, $xh^{-1} \in N_G(U)$, de donde $x \in H$. Luego $C \leq H$ y, como también $H \leq C$, se tiene la igualdad. □

Corolario 2.1.7 *El G-conjunto simple G/U es w-primitivo si y sólo si, para cada $H < G$ con $N_G(U) \leq H$, existe $S \leq G$ tal que $S \cap H = U$ con $S \neq U$.*

En particular, si $U \lhd G$, G/U es w-primitivo.

DEMOSTRACIÓN Sea G/U w-primitivo. Para cada $N_G(U) \leq H$, se tiene $< (H/U)\uparrow^G, G/U >= 1$. Si, además, $H < G$, tiene que ser $(H/U)\uparrow^G \neq G/U$. Luego existe otra componente G/S en $(H/U)\uparrow^G$ distinta de G/U. Eligiendo un representante adecuado en $(S)_G$, se verifica $S \cap H = U$.

Recíprocamente, los únicos subgrupos $H < G$ que pueden verificar la condición $(H/U)\uparrow^G = G/U$ son aquéllos para los que $N_G(U) \leq H$. Pero, por hipótesis, para cada H de esta forma existe alguna componente G/S en $(H/U)\uparrow^G$ distinta de G/U. Luego G/U es w-primitivo. □

Observaciones 2.1.8 *Dados un grupo G y un G-conjunto simple G/U,*

(i) si G/U no es w-primitivo, existe $M < \cdot G$ tal que $(M/U)\uparrow^G = G/U$.

Para demostrarlo, basta notar que, si $(H/U)\uparrow^G = G/U$, entonces también $(K/U)\uparrow^G = G/U$ para todo $H \leq K$.

En efecto $< (H/U)\uparrow^G, G/U >= 1$ implica $N_G(U) \leq H$. Luego $N_G(U) \leq K$ y, por tanto, también $< (K/U)\uparrow^G, G/U >= 1$.

Veamos que G/U es la única componente simple de $(K/U)\uparrow^G$:

Sea G/S con $< (K/U)\uparrow^G, G/S >\neq 0$. Entonces, $S \cap K = U$ para un adecuado representante de $(S)_G$. Luego

$$U \leq S \cap H \leq S \cap K = U.$$

Por tanto, $< (H/U)\uparrow^G, G/S >\neq 0$ y se tiene $U = S$.

(ii) Si $N \trianglelefteq G$ tal que $N \leq U$, entonces G/U es w-primitivo en G si y sólo si $\overline{G}/\overline{U}$ es w-primitivo en $\overline{G} = G/N$.

Para verlo, basta recordar que, si $N \leq U$ con $N \lhd G$, entonces

$$(H/U)\uparrow^G = \sum_{(V)\in C(G)} a_{UV} G/V \Longleftrightarrow (\overline{H}/\overline{U})\uparrow^{\overline{G}} = \sum_{(\overline{V})\in C(\overline{G})} a_{\overline{UV}}\overline{G}/\overline{V},$$

con $a_{\overline{UV}} = a_{UV}$ para todo $(V) \in C(G)$.

(iii) Si G/U es primitivo, entonces es débilmente primitivo.

En efecto, si U es maximal en G, G/U sólo puede ser el elevado de U/U. Pero $< (U/U)\uparrow^G, G/G > \neq 0$, por lo que $(U/U)\uparrow^G \neq G/U$ y, por tanto, G/U es w-primitivo.

El recíproco no es cierto. Basta tomar $U \lhd G$ con U no maximal en G. De esta forma, G/U es w-primitivo y no primitivo. De hecho, veremos más adelante que se pueden caracterizar los pocos grupos G en los que G/U w-primitivo con $U \notin \{1, G\}$ implica G/U primitivo. □

Veamos ahora que, si consideramos la función de Möbius, μ, en el retículo $S(G)$ de los subgrupos de un grupo G, podemos establecer alguna relación entre el valor $\mu(U, G)$ y la primitividad débil de G/U para $U \leq G$.

Proposición 2.1.9 *Dado un grupo G, si el G-conjunto simple G/U verifica $(H/U)\uparrow^G = nG/U$ para algún $H < G$ y para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(U, G) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN $(H/U)\uparrow^G = nG/U$ equivale a afirmar que la única componente simple de $(H/U)\uparrow^G$ es G/U y, por tanto, que si $S \cap H = U$, entonces $S = U$. Aplicando ahora la proposición **??**, se tiene $\sum_{H\cap S=U} \mu(S, G) = 0$. Pero el único $S \leq G$ que verifica $S \cap H = U$ es el propio U. Luego el sumatorio se reduce a $\mu(U, G)$, que, por tanto, es cero. □

El recíproco de la proposición anterior no es cierto en general, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.10 Consideremos el grupo

$$G = \langle x, y : x^4 = y^2 = 1,\ yx = x^{-1}y \rangle \cong D_4$$

y en él el subgrupo $U = 1$. Como U no es intersección de subgrupos maximales de G, se tiene, por la proposición **??**, $\mu(1, G) = 0$.

Pero, para cada $H < G$, existe $V \neq 1$ con $V \cap H = 1$, como se ve en el siguiente diagrama.

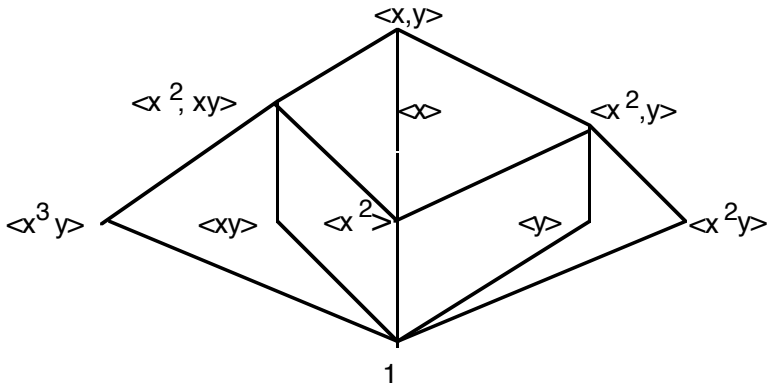

DIAGRAMA 2.1.

Luego

$(H/1)\uparrow^G \neq nG/1$ para todo $H < G$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Corolario 2.1.11 *Si $U < G$ verifica $\mu(U, G) \neq 0$, entonces el G-conjunto simple G/U es w-primitivo.*

DEMOSTRACIÓN Si G/U no es w-primitivo, existe $H < G$, con $N_G(U) \leq H$, que verifica $(H/U)\uparrow^G = G/U$. Por la proposición anterior, se tiene en tal caso $\mu(U, G) = 0$. □

Sabemos, por la proposición **??**, que $\mu(U,G) \neq 0$ obliga a que U sea intersección de maximales de G. Sin embargo, no parece que esta condición sea suficiente para asegurar que $(H/U)\uparrow^G \neq nG/U$ para todo $H < G$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, ni siquiera para poder decir que G/U es débilmente primitivo.

El ejemplo **??** prueba que el recíproco del corolario **??** no es cierto. Veamos que existe un contraejemplo con un subgrupo U que no es normal en G.

Ejemplo 2.1.12 Se considera el grupo

$$G = \langle a, b, c : a^3 = b^2 = c^4 = 1 = [a,c] = [b,c], ba = a^{-1}b \rangle \cong \Sigma_3 \times C_4$$

y en él el subgrupo $U = \langle b \rangle \cong C_2$.

De esta forma, $N_G(U) = \langle b, c \rangle \cong C_2 \times C_4$, que es maximal en G. Por tanto, basta ver $(N_G(U)/U)\uparrow^G \neq G/U$ para comprobar que G/U es w-primitivo.

Consideramos el subgrupo $V = \langle a, b \rangle \cong \Sigma_3$, que verifica $V \cap N_G(U) = U$, con $V \neq U$. Luego G/V es componente simple de $(N_G(U)/U)\uparrow^G$, por lo que $(N_G(U)/U)\uparrow^G \neq G/U$.

Además, los únicos subgrupos maximales de G que contienen a U son $\langle a, b, c^2 \rangle \cong D_6$ y $\langle b, c \rangle = N_G(U)$, cuya intersección es $\langle b, c^2 \rangle \cong C_2 \times C_2$. Luego U no es intersección de maximales de G y, por tanto, $\mu(U,G) = 0$.

El diagrama **??** de la página siguiente muestra los subgrupos de G que contienen a $U =< b >$. □

Estudiemos ahora en qué grupos G todos los G-conjuntos G/U $(U \neq G)$ débilmente primitivos son primitivos. Por supuesto, G/G es w-primitivo y no se considera primitivo, luego obviamos este caso trivial.

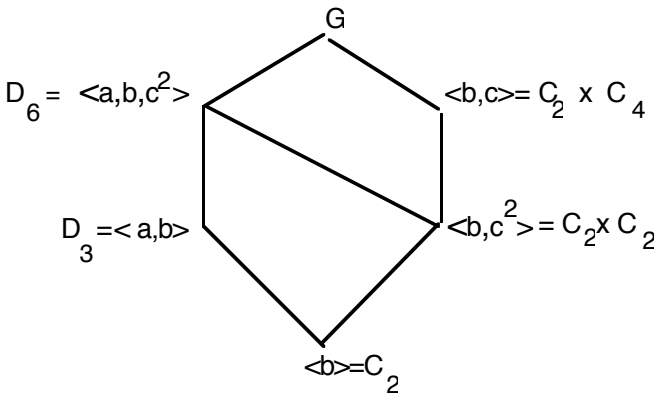

DIAGRAMA 2.2.

También $G/1$ es w-primitivo por ser $1 \lhd G$ y sólo sería primitivo si $1 < \cdot G$, es decir, si $G \cong C_p$, con p primo. Parece, por tanto, más interesante estudiar en qué grupos G todo G-conjunto simple w-primitivo y distinto de los triviales $(G/1,\ G/G)$ es primitivo.

Lema 2.1.13 *Si G es un grupo en el que todo G-conjunto simple G/U, con $U \notin \{1, G\}$, w-primitivo es primitivo, entonces la intersección de dos maximales distintos cualesquiera de G es trivial.*

DEMOSTRACIÓN Sea U un subgrupo de orden maximal entre los que son intersección de dos o más maximales distintos de G. Entonces, los únicos subgrupos que pueden contener a U son el propio G, subgrupos maximales de G o subgrupos que no sean intersección de maximales de G. Así,

$$\mu(U,G) = -\sum_{U<S\leq G} \mu(S,G) = -\mu(G,G) - \sum_{\substack{M<\cdot G \\ M>U}} \mu(M,G),$$

porque los subgrupos S que no son intersección de maximales en G verifican $\mu(S,G) = 0$. Luego $\mu(U,G) = -1 - m(-1)$, donde m es el número de maximales que contienen a U, al ser $\mu(M,G) = -1$ para cada $M < \cdot G$. De esta forma,

$\mu(U,G) = m - 1 \geq 2 - 1 = 1$. Luego $\mu(U,G) \neq 0$ y, por el corolario anterior, G/U es w-primitivo. Como estamos suponiendo que todo G/U w-primitivo no trivial es primitivo y $U < G$ no es maximal en G, se tiene $U = 1$.

Como hemos tomado U de orden maximal entre los que son intersección de dos maximales distintos de G, concluimos que la intersección de dos maximales distintos cualesquiera de G también es trivial. □

Teorema 2.1.14 *Sea G un grupo tal que todo G-conjunto w-primitivo no trivial (distinto de $G/1$ y G/G) es primitivo. Entonces, G es isomorfo a uno de los siguientes grupos, donde p y q son primos:* 1, C_p, C_{p^2}, $C_p \times C_q$, $[C_q \times \overset{(r}{\cdots} \times C_q]\, C_p$. *En el último, C_p actúa de forma irreducible y fiel sobre $C_q \times \overset{(r}{\cdots} \times C_q$ (y, por tanto, r es el orden de q módulo p).*

DEMOSTRACIÓN Sea G un grupo de los buscados distinto del trivial. Si $U \lhd G$, entonces G/U es w-primitivo. Luego, o bien U es maximal en G, o bien $U = 1$ ó $U = G$. Pueden darse los siguientes casos:

(i) Si G tiene un único subgrupo maximal, entonces G es cíclico de orden potencia de primo. Como todo subgrupo normal no trivial es maximal, se concluye $G \cong C_p$ o $G \cong C_{p^2}$, con p primo.

(ii) Si G tiene más de un subgrupo maximal y todos los subgrupos maximales son normales, entonces G es nilpotente con subgrupo de Frattini $\Phi(G) = 1$ porque $\Phi(G) \lhd G$ y $\Phi(G)$ no es maximal en G. Luego G es producto de subgrupos elementales abelianos. Pero, por el lema anterior, la intersección de dos maximales distintos cualesquiera de G debe ser trivial. Luego, $G \cong C_p \times C_q$ con p, q primos. Puede ser $p = q$.

(iii) Si G tiene algún maximal M no normal, entonces la intersección de dos conjugados cualesquiera de M es trivial por el lema anterior y, por tanto, G es un grupo de Frobenius. Así, G es producto semidirecto de M y N, donde $N = [G \setminus \bigcup_{g \in G} M^g] \bigcup \{1\}$ es el núcleo de Frobenius de G, con $\mid N \mid = \mid G : M \mid$.

De dicho núcleo se sabe que es subgrupo normal de G y que es nilpotente. Además, $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Luego G es un grupo primitivo y N es un subgrupo normal minimal que, por ser nilpotente, es abeliano: $N = [C_q \times \overset{(r}{\cdots} \times C_q]$.

Así, G es primitivo de tipo I. Además, $N \lhd G$ implica $N < \cdot G$ por ser N no trivial.

Luego $M \cong G/N \cong C_p$ y, por tanto, $G \cong [C_q \times \overset{(r}{\cdots} \times C_q]\ C_p$, donde la acción de C_p sobre el normal es irreducible y fiel. En consecuencia $p \neq q$ y, por teoría de representaciones de grupos abelianos, sabemos que, para cada par ordenado (p, q) de primos distintos, existe, salvo isomorfía, un único grupo de estas características, en el que r es el orden de q módulo p. (Ver, por ejemplo, [**?**, teor.12.4]).

Veamos que, si $G \cong [C_q \times \overset{(r}{\cdots} \times C_q]\ C_p$ con la acción de C_p sobre el subgrupo normal irreducible y fiel, entonces G es uno de los grupos buscados:

Los únicos subgrupos propios de G son los que están contenidos en $N \cong C_q \times \overset{(r}{\cdots} \times C_q$ y los subgrupos conjugados de M.

Si $U < N$, se tiene $N_G(U) = N$ y es fácil comprobar que $(N/U)\uparrow^G = G/U$. Luego G/U no es débilmente primitivo. Como N y los conjugados de

M son maximales en G, los únicos G-conjuntos w-primitivos no triviales son los primitivos. Luego G verifica las hipótesis del teorema.

□

Nos proponemos ahora estudiar los grupos G en los que todo G-conjunto simple G/U es w-primitivo.

Definición 2.1.15 *Diremos que un grupo G es un* w-grupo *si verifica dicha propiedad.*

Lema 2.1.16 *Dado un grupo G, si el G-conjunto simple G/U es w-primitivo y K es un subgrupo normal de G con $U \leq K$, entonces $N_G(U)K = G$.*

DEMOSTRACIÓN Obviamente, G/U es componente simple de $(K/U)\uparrow^G$. Si llamamos $T = N_G(U)K$, sabemos por el teorema **??** que $(T/U)\uparrow^G = G/U$. Como G/U es w-primitivo, se tiene $T = G$. □

Lema 2.1.17 *Si G es un w-grupo, entonces todo subgrupo subnormal en G es normal en G.*

DEMOSTRACIÓN Se obtiene como consecuencia de la *propiedad de Frattini* demostrada en el lema anterior.

Sea $U \lhd\lhd G$. Razonando por inducción sobre el defecto del subgrupo U en G, podemos suponer que existe $H \lhd G$ con $U \lhd H$. Por el lema anterior, $N_G(U)H = G$. Como $H \leq N_G(U)$, se tiene $N_G(U) = G$. □

Los grupos G en los que todo subgrupo subnormal en G es normal en G se denominan *t-grupos*, en donde la t hace referencia a que la normalidad es transitiva. La estructura de los t-grupos resolubles fue determinada por Gaschütz [?] y queda recogida en el siguiente resultado (ver, por ejemplo, Robinson [?, teor.13.4.4]):

Teorema 2.1.18 *Sea G un t-grupo finito resoluble y sea $L = [G', G]$. Entonces, L es el menor término de la serie central descendente de G, L es abeliano con $\mid L \mid$ impar y $(\mid L \mid, \mid G : L \mid) = 1$. Por tanto, L tiene un complemento K en G que, además, es de Dedekind.*

Como corolario de este teorema, Gaschütz [?] obtiene que todo subgrupo de un t-grupo resoluble es, a su vez, t-grupo resoluble (Ver, por ejemplo, Robinson [?, cor.13.4.7]).

Necesitaremos también el siguiente resultado sobre automorfismos potencia, es decir, automorfismos de un grupo G que dejan invariante todo subgrupo de G (Ver [?, 13.4.3]):

Lema 2.1.19 *Sea α un automorfismo potencia de P, p-grupo abeliano. Si $(\mid \alpha \mid, p) = 1$, entonces, o bien α fija todo elemento de P, o bien, α fija únicamente el elemento neutro de P.*

Utilizando estos resultados, establecemos los siguientes lemas, que necesitaremos para la caracterización de los w-grupos resolubles:

Lema 2.1.20 *Si G es un t-grupo resoluble y $L = [G', G]$, entonces*

$$Z(G) \cap L = 1.$$

DEMOSTRACIÓN Sea K un complemento de L en G. Como L es abeliano, todo subgrupo de L es normal en L y, por ser G t-grupo, es también normal en G. Por tanto, cada $k \in K$ actúa por conjugación sobre L como un automorfismo potencia de L.

Sea $p \mid\mid L \mid$, con p primo, y sea $L_p \in \mathrm{Syl}_p(L)$. Como $(\mid k \mid, p) = 1$ para cada $k \in K$, o bien k fija todo elemento de L_p, o bien, k fija sólo el elemento neutro de L_p, según el lema **??**.

Sea $x \in Z(G) \cap L_p$ y supongamos $x \neq 1$. Entonces $k \in C_G(x)$ para todo $k \in K$ y, por lo anterior, $k \in C_G(L_p)$ para todo $k \in K$. Así, $K \leq C_G(L_p)$ y, como L es abeliano, $G = C_G(L_p)$. Por tanto, $[L, G] = [L_{p'}, G]$, en donde $L_{p'}$ es el p'-subgrupo de Hall de L. Ahora, por ser $L_{p'} \lhd G$,se tiene

$$[L_{p'}, G] \leq L_{p'} < L.$$

Se llega así a una contradicción con el hecho de que L sea el menor término de la serie central descendente de G. Por tanto, $Z(G) \cap L_p = 1$ para todo primo $p \mid\mid L \mid$. Luego $Z(G) \cap L = 1$. □

Lema 2.1.21 *Si G es un t-grupo resoluble, $L = [G', G]$ y K es un complemento de L en G, entonces $N_G(K) = K$.*

DEMOSTRACIÓN Como $G = LK$, por la identidad de Dedekind se tiene $N_G(K) = N_L(K)K$. Por acción coprima de $N_L(K)$ en K, es claro que $N_L(K) = C_L(K)$ y, finalmente, como L es abeliano,

$$C_L(K) = C_L(G) = L \cap Z(G) = 1.$$

□

Teorema 2.1.22 *Sea G un grupo finito y resoluble. Entonces, G es w-grupo si y sólo si G es t-grupo y $L = [G', G]$ es producto directo de subgrupos elementales abelianos.*

DEMOSTRACIÓN

$\Longrightarrow$) Como G es w-grupo resoluble, G es t-grupo resoluble. Supongamos, por reducción al absurdo, que algún subgrupo de Sylow de L no es elemental abeliano, es decir, $L = C_{p_1}^{r_1} \times \cdots \times C_{p_s}^{r_s}$ con algún $r_i > 1$. Supongamos $r_1 > 1$ y sea $A = C_{p_1}^{r_1 - 1} \times \cdots \times C_{p_s}^{r_s}$, maximal en L. Llamamos $M = AK$, que es maximal en G y veamos $(M/K)\uparrow^G = G/K$:

Por el lema **??**, $N_G(K) = K$. Luego $N_G(K) \leq M$ y, por tanto, $< (M/K)\uparrow^G, G/K >= 1$.

Sea ahora G/S componente simple de $(M/K)\uparrow^G$. Tomando un adecuado conjugado de S, podemos suponer $S \cap M = K$. Entonces,

$$(S \cap L) \cap (M \cap L) = K \cap L = 1.$$

Pero $M \cap L = AK \cap L = A(K \cap L) = A$. Luego $(S \cap L) \cap A = 1$.

Si $S \cap L \neq 1$, entonces $(S \cap L)A = L$ por ser $A < \cdot L$; en ese caso el orden $\mid S \cap L \mid = \mid L : A \mid = p_1$ con $(S \cap L)A$ producto directo. Así,

$$L = (S \cap L)A = C_{p_1} \times C_{p_1}^{r_1 - 1} \times \cdots \times C_{p_s}^{r_s},$$

que no es isomorfo a $C_{p_1}^{r_1} \times \cdots \times C_{p_s}^{r_s} = L$, lo que nos lleva a un absurdo.

Por tanto $S \cap L = 1$, de donde $\mid S \mid$ divide a $\mid K \mid$ y, como $K \leq S$, se llega a $K = S$.

Deducimos así que la única componente simple de $(M/K)\uparrow^G$ es G/K, por lo que G/K no es w-primitivo, contradiciendo la hipótesis.

$\Longleftarrow$) Supongamos que G es t-grupo y L es producto directo de subgrupos elementales abelianos. Sea $U \leq G$.

Si $U \lhd G$, G/U es w-primitivo.

En otro caso, si existe $N_G(U) \leq H < G$ tal que $(H/U)\uparrow^G = G/U$, sabemos que $(M/U)\uparrow^G = G/U$ para cualquier M con $H \leq M < \cdot G$. Por tanto, para ver que G/U es w-primitivo, basta ver que $(M/U)\uparrow^G \neq G/U$ para todo $M < \cdot G$ con $N_G(U) \leq M$.

Podemos escribir $U = U_\pi U_{\pi'}$, donde π es el conjunto de primos divisores de $\mid L \mid$, $U_\pi \in \mathrm{Hall}_\pi(U)$, $U_{\pi'} \in \mathrm{Hall}_{\pi'}(U)$. Se tiene $U_\pi = U \cap L$ y $U_{\pi'} \underset{\sim}{\leq} K$. No hay problema en suponer, tomando un adecuado conjugado de U, que $U_{\pi'} = U \cap K$. Así, $U = (U \cap L)(U \cap K)$, con $U \cap L \lhd G$ y $U \cap K \lhd K$, por ser K de Dedekind. Luego $K \leq N_G(U)$.

Sea $N_G(U) \leq M < \cdot G$. Se tiene $K \leq M$. Luego $M = K(M \cap L)$, con $A = M \cap L$ maximal en L.

Como L es producto de subgrupos elementales abelianos, el índice de A en L es un primo p y, además, existe $B \leq L$, complemento de A en L de orden p. Luego existe $B \leq L$, complemento de A en L. Tomamos $S = BU$, que tiene sentido por ser $B \lhd G$. Ahora,

$$S \cap M = BU \cap M = (B \cap M)U = U$$

por ser $B \cap M \leq A \cap B = 1$. Luego G/S es componente simple de $(M/U)\uparrow^G$ y, por tanto $(M/U)\uparrow^G \neq G/U$. En definitiva, G/U es w-primitivo. $\square$

Como consecuencia de este teorema se obtiene que en el universo de los grupos resolubles, la propiedad de ser w-grupo se hereda para subgrupos, algo que no es fácil ver de forma directa.

Corolario 2.1.23 *Si G es w-grupo resoluble y S es subgrupo de G, entonces S es w-grupo resoluble.*

DEMOSTRACIÓN Como G es w-grupo resoluble, G es t-grupo resoluble con $L = [G', G]$ producto directo de subgrupos elementales abelianos. Por tanto, S es también t-grupo resoluble. Además, $[S', S] \leq [G', G]$; luego $[S', S]$ es también un producto directo de subgrupos elementales abelianos y, por el teorema, S es w-grupo resoluble. □

Utilizando la caracterización de Peng [**?**] de subgrupos pronormales en un grupo G resoluble, obtendremos una segunda consecuencia del teorema.

Definición 2.1.24 *Un subgrupo H se dice* pronormal en G *si, para cada elemento $x \in G$, los subgrupos H y H^x son conjugados en el subgrupo $\langle H, H^x \rangle$ generado por H y H^x.*

Teorema 2.1.25 (Peng[?]) *Sea G un grupo resoluble y $H \leq G$. H es pronormal en G si y sólo si, para cualesquiera subgrupos K, L de G con $H \leq K \leq L$ y $K \lhd L$ se verifica $N_L(H)K = L$.*

Además, Peng [**?**] demuestra el siguiente resultado:

Teorema 2.1.26 *Un grupo G es t-grupo resoluble si y sólo si todos sus subgrupos de orden potencia de primo son pronormales en G.*

Corolario 2.1.27 *Si G es w-grupo resoluble, entonces todo subgrupo de G es pronormal en G.*

DEMOSTRACIÓN Sea $H \leq G$. Y sean K, L subgrupos de G con $H \leq K \leq L$ y $K \lhd L$. Como L es w-grupo resoluble, L/H es w-primitivo y, por el lema **??**, $N_L(H)K = L$. Por el teorema **??**, H es pronormal en G. □

El recíproco de este resultado no es cierto, como vemos a continuación:

Ejemplo 2.1.28 Es fácil comprobar que, si consideramos el grupo

$$G = \langle a, b : a^9 = b^2 = 1, a^b = a^8 \rangle \cong D_9,$$

todo subgrupo es pronormal en G. Y, sin embargo, podemos encontrar un G-conjunto simple G/U que no es w-primitivo.

En efecto, sea $U = \langle b \rangle = N_G(U)$ y tomamos $H = \langle a^3, b \rangle \cong \Sigma_3$. Como $N_G(U) \leq H$, $< (H/U)\uparrow^G, G/U >= 1$. Además, no existe otra componente simple de $(H/U)\uparrow^G$ distinta de G/U porque H y G son los únicos subgrupos de G que contienen a U. Por tanto, si $S \leq G$ verifica $S \cap H = U$, entonces $S = U$, con lo que $(H/U)\uparrow^G = G/U$ y G/U no es w-primitivo. □

2.2 G-conjuntos cuasi-primitivos

En teoría de caracteres se utiliza el concepto de carácter cuasi-primitivo:

Definición 2.2.1 *Dado un grupo G, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ se dice carácter* cuasi-primitivo *si, para todo $H \lhd G$, se verifica χ_H homogéneo, es decir, $\chi_H = e\Theta$ para algún $\Theta \in \mathrm{Irr}(H)$ y para algún $e \in \mathbb{N}$.*

Por analogía podemos definir la idea de G-conjunto cuasi-primitivo:

Definición 2.2.2 *Dado un grupo G, diremos que el G-conjunto simple G/V es* cuasi-primitivo *si $(G/V)_H$ es homogéneo para todo $H \lhd G$, es decir, si $(G/V)_H = a_{UV} H/U$, en donde $U = V \cap H$.*

Es conocido que todo carácter primitivo es cuasi-primitivo. Veamos que este resultado también se obtiene para G-conjuntos con la hipótesis más débil de la siguiente proposición:

Proposición 2.2.3 *Dado un grupo G, si el G-conjunto simple G/V es débilmente primitivo, entonces es cuasi-primitivo.*

DEMOSTRACIÓN Dado $H \lhd G$, sabemos que

$$(G/V)_H = a_{UV} \sum_{\substack{(D) \in C(H) \\ D \in (U)_G}} H/D,$$

en donde $U = V \cap H$. Luego G/V es componente simple de $(H/U)\uparrow^G$ y, por el teorema **??**, $G/V = (T/V)\uparrow^G$, con $T = N_G(U)H$. Pero G/V w-primitivo implica $T = G$ y, por tanto, H/U invariante por la acción de G. Así, $(G/V)_H = a_{UV} H/U$, homogéneo. □

Es conocido el siguiente teorema:

Teorema 2.2.4 (Berger) *Si G es un grupo resoluble, entonces todo carácter cuasi-primitivo de G es primitivo .*

Sin embargo, no todo G-conjunto cuasi-primitivo es w-primitivo, ni siquiera en el caso resoluble.

Ejemplo 2.2.5 Tomamos de nuevo el grupo

$$G = \langle a, b : a^9 = b^2 = 1,\, a^b = a^8 \rangle \cong D_9$$

y en él el subgrupo $V = \langle b \rangle$. Hemos visto antes que $G/V = (H/V)\uparrow^G$, con $H = \langle a^3, b \rangle$, es decir, G/V no es w-primitivo. Es fácil comprobar que G/V es, sin embargo, cuasi-primitivo. En efecto, los subgrupos normales de G son 1,$\langle a \rangle$,$\langle a^3 \rangle$ y G. Cada uno de estos subgrupos N verifica $N_G(V \cap N)N = G$, es decir, $(G/V)_N$ es homogéneo. □

Con hipótesis más restrictivas, se obtiene un recíproco de la proposición **??**

Proposición 2.2.6 *Si G es un grupo nilpotente y G/V es un G-conjunto simple cuasi-primitivo, entonces G/V es débilmente primitivo.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que G/V no es w-primitivo. Entonces, existe $V \leq M < \cdot G$ tal que $(M/V)\uparrow^G = G/V$. Como G es nilpotente, $M \lhd G$ y, como G/V es cuasi-primitivo, ha de ser $(G/V)_M$ homogéneo, es decir,

$$G = N_G(V \cap M)M = N_G(V)M = M,$$

siendo cierta esta última igualdad por ser $< (M/V)\uparrow^G, G/V >= 1$. Se llega así a un absurdo. □

No se puede asegurar, sin embargo, que en un grupo G nilpotente todo G-conjunto cuasi-primitivo sea primitivo. Basta tomar G abeliano y $U < G$ no maximal en G.

Tampoco es cierto que los grupos nilpotentes sean los únicos grupos G en los que todo G-conjunto cuasi-primitivo es w-primitivo.

Ejemplo 2.2.7 Tomando $G \cong \Sigma_3$, todo subgrupo es normal o maximal en G, luego todo G-conjunto simple es w-primitivo. □

Veamos ahora que la propiedad de cuasi-primitivo se conserva al pasar a cociente.

Proposición 2.2.8 *Dado un grupo G y un subgrupo N normal en G, si el G-conjunto simple G/V es cuasi-primitivo, entonces el $\overline{G}$-conjunto simple $\overline{G}/\overline{VN}$ es cuasi-primitivo , donde la barra denota la imagen por el epimorfismo canónico de G en G/N.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\overline{M} \lhd \overline{G}$, de forma que $M \lhd G$ y $N \leq M$. Veamos que $(\overline{G}/\overline{VN})_{\overline{M}}$ es homogéneo; equivalentemente, $N_{\overline{G}}(\overline{VN} \cap \overline{M})\overline{M} = \overline{G}$ o, lo que es lo mismo, $\overline{N_G(VN \cap M)M} = \overline{G}$ por ser $N \leq VN \cap M$.

Como $(G/V)_M$ es homogéneo, se tiene $N_G(V \cap M)M = G$, donde

$$N_G(V \cap M) \leq N_G[(V \cap M)N] = N_G(VN \cap M)$$

por la regla de Dedekind. Así,

$$G = N_G(V \cap M)M \leq N_G(VN \cap M)M$$

y se tiene el resultado. □

2.3 G-conjuntos monomiales

En muchos aspectos de la teoría de caracteres juega un papel importante el concepto de grado ($\chi(1)$ para un carácter χ).

Se puede definir un concepto similar en G-conjuntos que da lugar a algunos resultados análogos a los de la teoría de caracteres.

Definición 2.3.1 *Dado un grupo G, llamaremos* grado *del G-conjunto simple G/V,* $\mathrm{gr}(G/V)$*, al índice* $\mid G : N_G(V) \mid$.

De esta forma, G es un grupo de Dedekind si y sólo si todo G-conjunto simple es de grado uno, resultado que se corresponde con el de que un grupo es abeliano si y sólo si todos sus caracteres irreducibles son de grado 1.

Esto justifica en parte la elección de la definición de grado de un G-conjunto simple G/V, desechando otras que pueden parecer en principio más naturales, como $\mid G : V \mid$. Los siguientes resultados, que reproducen hechos propios de la teoría de caracteres, contribuyen asimismo a justificar tal elección.

Proposición 2.3.2 (Ver [**?**, lema 6.8])

Dados un grupo G, un subgrupo H normal en G y un G-conjunto simple G/V, si H/U es un H-conjunto que verifica $< (G/V)_H, H/U > \neq 0$, entonces el grado de H/U divide al grado de G/V.

DEMOSTRACIÓN Podemos suponer, tomando un adecuado representante de $(V)_G$, que $V \cap H = U$. Así, $N_G(V) \leq N_G(U)$ y

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{gr}(G/V)}{\mathrm{gr}(H/U)} &= \frac{\mid G : N_G(V) \mid}{\mid H : N_H(U) \mid} = \frac{\mid G : N_G(V) \mid}{\mid N_G(U)H : N_G(U) \mid} \\ &= \mid G : N_G(U)H \mid\mid N_G(U) : N_G(V) \mid \end{aligned}$$

es entero. □

Proposición 2.3.3 (Ver [**?**, teor.6.9])

Sea G un grupo y π un conjunto de primos divisores de $\mid G \mid$ de forma que existe un π-subgrupo de Hall de G y el grado de G/U es un π-número para todo $U \leq G$. Entonces, el π-subgrupo de Hall es normal en G y G tiene π-complemento de Dedekind.

DEMOSTRACIÓN Sea $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Como $\mid G : N_G(H) \mid$ divide a $\mid H \mid$, se tiene $\mid G : N_G(H) \mid = 1$ y, por tanto, $H \lhd G$. Por el teorema de Schur-Zassenhaus, existe K, π-complemento de G.

Sea ahora $U \leq K$. Se tiene

$\mid K : N_K(U) \mid = \mid G : HN_K(U) \mid$ es un π'-número divisor de

$$\mid G : N_G(U) \mid = \mid G : HN_K(U) \mid \cdot \mid HN_K(U) : N_G(U) \mid,$$

que es un π-número.

Luego $\mid K : N_K(U) \mid = 1$ y, por tanto, K es de Dedekind. □

Ni siquiera cuando el conjunto π de la proposición anterior consta de un único primo p, el π-complemento tiene por qué ser normal, a diferencia de lo que ocurre en un grupo G en el que todo carácter irreducible tiene grado potencia de p.

Ejemplo 2.3.4 Tomamos $G \cong \Sigma_3$ y $p = 3$. El índice de $N_G(U)$ en G es potencia de 3 para todo $U \leq G$ y, sin embargo, el 3-complemento de G no es normal en G. □

El recíproco de la proposición anterior se obtiene en el caso de caracteres como consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 2.3.5 (Ito) *Sea G un grupo y $A \lhd G$ un subgrupo abeliano. Entonces, $\chi(1)$ divide a $\mid G : A \mid$ para todo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.*

En el caso de G-conjuntos, es necesario imponer la hipótesis adicional de que el π-complemento de G sea también normal en G.

Proposición 2.3.6 *Sea G un grupo con π-subgrupo de Hall $H \lhd G$ y tal que su π-complemento K es también normal en G y de Dedekind. Entonces, el grado de G/U divide a $\mid H \mid$ para todo $U \leq G$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $U \leq G$. Como H y K son normales en G y $(\mid H \mid, \mid K \mid) = 1$, se tiene $U = (U \cap H)(U \cap K)$. Luego

$$N_G(U \cap H) \cap N_G(U \cap K) \leq N_G(U).$$

Ahora, $K \leq N_G(U \cap K)$ por ser K de Dedekind y también $K \leq N_G(U \cap H)$ ya que

$$U \cap H = (U \cap H)(K \cap H) = [(U \cap H)K] \cap H$$

y, por tanto, $K \leq (U \cap H)K \leq N_G(U \cap H)$.

Se deduce así que

$$K \leq N_G(U \cap H) \cap N_G(U \cap K) \leq N_G(U),$$

de donde se obtiene que $\mid G : N_G(U) \mid$ divide a $\mid G : K \mid$. □

Es fácil ver que el resultado no es cierto, en general, si el π-subgrupo de Hall no es normal en G.

Ejemplo 2.3.7 Tomando de nuevo $G \cong \Sigma_3$ y $\pi = \{2\}$, se observa que el 2-complemento de G es normal en G y de Dedekind. Sin embargo, el grado de P, 2-subgrupo de Sylow de G, es $\mid G : N_G(P) \mid = 3$. □

Tampoco podemos asegurar que se verifique el resultado cuando el π-complemento K no sea normal en G:

Ejemplo 2.3.8 Tomamos ahora $G = A_4$ y $\pi = \{2\}$. El 2-subgrupo de Sylow de G, $V \cong C_2 \times C_2$, es normal en G y tiene como complemento $K \cong C_3$, que es de Dedekind, pero que no es normal en G.

Si llamamos U a un subgrupo de orden 2 de V, se tiene $N_G(U) = V$ y, por tanto, $\mid G : N_G(U) \mid = 3$, que obviamente no divide al orden de V. □

Recordemos que un carácter se dice monomial si es inducido de uno lineal.

El concepto análogo que se tendría en G-conjuntos utilizando la inducción clásica carece de interés, pues obviamente todo G-conjunto simple, G/U, es inducido de uno trivial, U/U.

Sin embargo, si utilizamos la elevación, obtenemos un concepto que nos dará cierto juego:

Definición 2.3.9 *Dado un grupo G, el G-conjunto simple G/U se dice* monomial *si es el elevado de un H-conjunto de grado 1 para algún $H \leq G$.*

Obsérvese, de nuevo, que la elección del concepto de grado vuelve a resultar más apropiada que el *tamaño* $\mid G : U \mid$, pues de esta forma ningún G-conjunto, salvo G/G podría ser monomial.

Proposición 2.3.10 *Sea $U \leq G$. Si existe $H \leq G$ tal que $(H/U)\uparrow^G = G/U$ con $\mathrm{gr}(H/U) = 1$, entonces $H = N_G(U)$.*

Demostración Sabemos que $(H/U)\uparrow^G = G/U \Longrightarrow N_G(U) \leq H$. Además, si $\mathrm{gr}(H/U) = 1$, entonces $H \leq N_G(U)$ y se tiene el resultado. □

Corolario 2.3.11 *El G-conjunto simple G/U es monomial si y sólo si verifica $G/U = (N_G(U)/U)\uparrow^G$.*

Caracterizamos a continuación los grupos G en los que todo G-conjunto simple es monomial.

Recordemos que los grupos en los que todo carácter es monomial (M-grupos) son siempre resolubles y que todo grupo superresoluble es monomial. Se obtiene aquí un resultado más preciso.

Teorema 2.3.12 *Sea G un grupo. Todo G-conjunto simple es monomial si y sólo si G es nilpotente.*

DEMOSTRACIÓN

$\Longleftarrow$) Si G es nilpotente, dado G/U, tomamos $H = N_G(U)$. Es claro que $< (H/U)\uparrow^G, G/U >= 1$. Veamos que $(H/U)\uparrow^G = G/U$. Sea G/S componente simple de $(H/U)\uparrow^G$. Podemos suponer $S \cap H = U$ para un adecuado representante de $(S)_G$. Así,

$$N_S(U) = N_G(U) \cap S = U$$

y, como S es nilpotente, debe ser $U = S$. Luego $(H/U)\uparrow^G = G/U$.

$\Longrightarrow$) Recíprocamente, supongamos que todo G-conjunto simple es monomial y que G no es nilpotente. Entonces, existe $M < \cdot G$, con M no normal en G. Así, $\mathrm{gr}(G/M) \neq 1$ y $G/M \neq (M/M)\uparrow^G$, ya que $< (M/M)\uparrow^G, G/G > \neq 0$. Luego G/M no es el elevado de ningún conjunto simple de grado uno, lo que contradice la hipótesis. □

Aunque ya tenemos caracterizados los w-grupos resolubles, podemos aprovechar este teorema para obtener el siguiente corolario inmediato.

Corolario 2.3.13 *Sea G nilpotente. G es w-grupo si y sólo si G es de Dedekind.*

DEMOSTRACIÓN Como G es nilpotente, para cada $U \leq G$, G/U es monomial, es decir, $G/U = (N_G(U)/U)\uparrow^G$. Por tanto, G/U es w-primitivo si y sólo si $U \lhd G$, de donde se concluye el resultado. □

Tomamos nuevamente como referencia un concepto de la teoría de caracteres:

Definición 2.3.14 *Dados $N \lhd G$ y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, se dice que χ es* M-carácter relativo a N *si para algún $N \leq H \leq G$ existe $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$ tal que $\psi^G = \chi$ con ψ_N irreducible.*

Pretendemos que, al igual que ocurre en caracteres, el concepto de G-conjunto monomial relativo a $N = 1$ coincida con el de G-conjunto monomial.

Definición 2.3.15 *Si G es un grupo y N un subgrupo normal de G, diremos que el G-conjunto simple G/U es* monomial relativo a N *si existe $U \leq H \leq G$, con $N \leq H$, tal que $(H/U)\uparrow^G = G/U$ y $(H/N_G(U))_N$ es simple.*

La definición más natural, exigiendo que $(H/U)_N$ sea simple en lugar de $(H/N_G(U))_N$, no parece tener demasiado interés, entre otras cosas, porque no verifica la observación (iii) siguiente:

Observaciones 2.3.16 Utilizando la misma notación que en **??**, observamos que

(i) La definición tiene sentido, ya que $< (H/U)\uparrow^G, G/U >= 1$ equivale a $N_G(U) \leq H$.

(ii) $(H/N_G(U))_N$ *es simple si y sólo si* $N_G(U)N = H$. *Luego* H *queda determinado para cada* G*-conjunto monomial relativo a* N. *Por tanto,* G/U *es monomial relativo a* N *si y sólo si* $(N_G(U)N/U)\uparrow^G = G/U$.

(iii) G/U *es monomial relativo a* $N = 1$ *si y sólo si* G/U *es* G*-conjunto monomial.*

(iv) Si $N_G(U)N = G$, *entonces* G/U *es monomial relativo a* N.

Proposición 2.3.17 *Sean* $U \leq G$ *y* $N \lhd G$.

(i) Si G/U *es* G*-conjunto monomial, entonces* G/U *es monomial relativo a* N.

(ii) Si $U \leq N$, *entonces* G/U *es monomial relativo a* N.

DEMOSTRACIÓN

(i) Como G/U es monomial, se tiene $G/U = (N_G(U)/U)\uparrow^G$. Además, $N_G(U) \leq N_G(U)N$. Luego ha de ser también $(N_G(U)N/U)\uparrow^G = G/U$, es decir, G/U monomial relativo a N.

(ii) Como $U \leq N$, podemos considerar $(N/U)\uparrow^G$, G-conjunto que tiene a G/U como componente simple. Si llamamos $T = N_G(U)N$, se tiene por el teorema **??** $(T/U)\uparrow^G = G/U$ y, por tanto, G/U es monomial relativo a N.

□

Caracterizamos ahora los grupos G en los que todo G-conjunto simple es monomial relativo a un mismo subgrupo $N \lhd G$.

Teorema 2.3.18 *Sea G un grupo y N un subgrupo normal en G. Todo G-conjunto simple es monomial relativo a N si y sólo si G/N es nilpotente.*

DEMOSTRACIÓN

$\Longrightarrow$) Para cada $S \leq G$, denotamos por $\overline{S}$ la imagen de S por el epimorfismo canónico de G en G/N.

En virtud del teorema **??**, para ver que $G/N = \overline{G}$ es nilpotente, basta probar que cualquier $\overline{G}$-conjunto simple, $\overline{G}/\overline{U}$ $(N \leq U)$ es monomial.

En efecto, dado $\overline{G}/\overline{U}$, como G/U es G-conjunto monomial relativo a N, $(N_G(U)N/U)\uparrow^G = G/U$ y, utilizando la proposición **??** para el paso al cociente, se tiene $(\overline{N_G(U)N}/\overline{U})\uparrow^{\overline{G}} = \overline{G}/\overline{U}$, con $\overline{N_G(U)N} = N_{\overline{G}}(\overline{U})$ por ser $N \leq U$.

$\Longleftarrow$) Sea G/U un G-conjunto simple y supongamos G/N nilpotente. Como $N_G(U) \leq N_G(U)N$, se tiene $< (N_G(U)N/U)\uparrow^G, G/U >= 1$. Veamos que G/U es la única componente simple de $(N_G(U)N/U)\uparrow^G$.

Si $< (N_G(U)N/U)\uparrow^G, G/S > \neq 0$, entonces, eligiendo S adecuadamente entre sus conjugados, se tiene $S \cap N_G(U)N = U$. Así, $U \leq S$ y $UN \leq SN$.

Supongamos ahora $UN < SN$.

Como G/N es nilpotente,

$$UN < N_{SN}(UN) = SN \cap N_G(UN).$$

Sea $sn \in SN \cap N_G(UN)$ $(s \in S,\ n \in N)$ con $sn \notin UN$. En particular,

$$s \in N_G(UN)N = N_G(UN).$$

Así, $U^s \leq (UN)^s = UN$ y $U^s \leq S$.

Luego

$$U^s \leq UN \cap S \leq N_G(U)N \cap S = U$$

y, por tanto, $s \in N_G(U)$.

Así, $s \in S \cap N_G(U)N = U$, en contradicción con ser $sn \notin UN$.

Luego $UN = SN$, con lo que $S \leq N_G(U)N$ y, por tanto,

$$U = S \cap N_G(U)N = S.$$

□

Capítulo 3

G-conjuntos proyectivos

En este capítulo se analizan los G-conjuntos desde un punto de vista ligeramente distinto y se definen conceptos análogos a los de representaciones algebraicas proyectivas, obteniéndose resultados que recuerdan a los de estas últimas, como el teorema de extensión proyectiva a G de un H-conjunto invariante por G, con $H \lhd G$, o el de descomposición de un G-conjunto irreducible en el *producto tensorial* de un G-conjunto proyectivo por un G/H-conjunto ordinario.

3.1 Extensión proyectiva

Comenzamos recordando algunas ideas elementales de representaciones proyectivas.(Ver, por ejemplo, [**?**, cap.11] o bien [**?**, cap.7]).

Definición 3.1.1 *Si G es un grupo y F un cuerpo, es conocido que una F-representación proyectiva de G es una aplicación $\aleph : G \longrightarrow GL(n,F)$ que verifica, para cada par $g, g' \in G$, $\aleph(g)\aleph(g') = \aleph(gg') \cdot \alpha(g,g')$ para algún escalar*

$\alpha(g, g') \in F$.

Si $H \lhd G$ y $\eta : H \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ es una $\mathbb{C}$-representación ordinaria de H que es irreducible y con carácter invariante por G, se puede construir una representación proyectiva $\aleph$ de G que extiende a η. El proceso consiste en construir una aplicación $\aleph : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\aleph \mid_H = \eta$ y que verifique $\aleph(ghg^{-1}) = \aleph(g)\aleph(h)\aleph(g)^{-1}$ para todos $g \in G$, $h \in H$. Esta condición implica que $\aleph(g'g)^{-1}\aleph(g')\aleph(g)$ es una matriz escalar y, por tanto, $\aleph$ es una representación proyectiva de G.

Para definir un concepto análogo al de representación proyectiva de G en la teoría de representaciones por permutaciones, nos basaremos en la idea anterior.

Definición 3.1.2 *Si $H \lhd G$ y $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$ es una representación por permutaciones de H, llamaremos* extensión proyectiva de ψ *a una aplicación $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ que verifique $T \mid_H = \psi$ y $T(ghg^{-1}) = T(g)T(h)T(g)^{-1}$ para todos $g \in G$, $h \in H$.*

Antes de seguir con otras definiciones básicas para nuestro estudio, vamos a trasladar algunas ideas de la teoría de G-conjuntos al lenguaje de representaciones por permutaciones, que será el que utilicemos con más asiduidad en esta sección.

Proposición 3.1.3 *Sea $\varphi : G \longrightarrow \Sigma_n$ una representación por permutaciones irreducible de G. Y sea $U = \{g \in G; \varphi(g)(1) = 1\}$ el estabilizador de la primera cifra. Entonces φ es una representación asociada al G-conjunto G/U*

de clases a izquierda de U en G. Además, existe un transversal $t = \{g_1, \ldots, g_n\}$ a izquierda de U en G tal que

$$g \cdot g_i U = g_{\varphi(g)(i)} U \text{para todo } 1 \leq i \leq n.$$

DEMOSTRACIÓN Como φ es irreducible, podemos tomar para cada $1 \leq i \leq n$ un $g_i \in G$ tal que $\varphi(g_i)(1) = i$. Es fácil ver que $\{g_1, \ldots, g_n\}$ es un transversal a izquierda de U en G y que, para cada $1 \leq i \leq n$, $g_i U = \{g \in G;\ \varphi(g)(1) = i\}$.

Para demostrar que φ es una representación asociada al G-conjunto $\{g_1 U, \ldots, g_n U\}$ de clases a izquierda de U en G, basta comprobar que

$$g \cdot g_i U = g_j U \Longleftrightarrow \varphi(g)(i) = j \text{ para todos } g \in G,\ 1 \leq i \leq n.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & g \cdot g_i U = g_j U \Longleftrightarrow g_j^{-1} g g_i \in U \Longleftrightarrow \varphi(g_j)^{-1} \varphi(g) \varphi(g_i)(1) = 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \varphi(g)\varphi(g_i)(1) = \varphi(g_j)(1) \Longleftrightarrow \varphi(g)(i) = j. \end{aligned}$$

□

Definición 3.1.4 *Dadas $\varphi : G \longrightarrow \Sigma_l$, $\varphi' : G \longrightarrow \Sigma_{l'}$ representaciones por permutaciones de G, definimos la* representación suma de φ y φ',

$$\varphi + \varphi' : G \longrightarrow \Sigma_{l+l'},$$

como

$$(\varphi + \varphi')(g)(i) = \begin{cases} \varphi(g)(i) & si\ \ 1 \leq i \leq l \\ l + \varphi'(g)(i-l) & si\ \ l+1 \leq i \leq l+l' \end{cases}$$

Observaciones 3.1.5

(i) Es fácil comprobar que la suma así definida es compatible con la equivalencia de representaciones de G. Además, si X es un G-conjunto con representación asociada φ y X' es un G-conjunto con representación asociada φ', entonces $X + X'$ tiene como representación asociada $\varphi + \varphi'$.

(ii) En el caso en que se tengan representaciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_m : G \longrightarrow \Sigma_l$, la representación suma

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_m : G \longrightarrow \Sigma_{ml}$$

se puede ver de la siguiente forma:

Identificamos el conjunto $\{1, \ldots, ml\}$ con el conjunto de pares ordenados $\{(i,j);\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq l\}$ a través de la aplicación biyectiva f dada por

$$f(k) = (i,j) \text{ si } k = (i-1)l + j$$

con $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$.

De esta forma, se puede considerar Σ_{ml} actuando sobre el conjunto

$$\{(i,j);\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq l\}$$

y se tiene

$$(\varphi_1 + \ldots + \varphi_m)(g)(i,j) = (i, \varphi_i(g)(j)).$$

(iii) Si $H \lhd G$ y $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$ es homomorfismo de grupos, podemos construir, para cada $g \in G$, el homomorfismo $\psi^g : H \longrightarrow \Sigma_l$ dado por $\psi^g(h) = \psi(ghg^{-1})$ para cada $h \in H$.

En este caso, si ψ es irreducible, sabemos que ψ es la representación asociada al H-conjunto H/U, donde $U = \{h \in H;\, \psi(h)(1) = 1\}$.

Es fácil ver que, entonces, ψ^g es también irreducible y, por tanto, es la representación asociada al H-conjunto H/V, donde

$$V = \{h \in H;\, \psi^g(h)(1) = 1\} = U^g.$$

□

Definición 3.1.6 *Dado $H \lhd G$, se dice que una representación $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$ es* invariante por G *si, para todo $g \in G$, las representaciones ψ y ψ^g son equivalentes.*

Observemos que, si $H \lhd G$, una representación $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$ irreducible es invariante por G si y sólo si el H-conjunto H/U correspondiente a ψ es isomorfo a H/U^g para todo $g \in G$. Y esto es equivalente a que los subgrupos U y U^g sean conjugados en H para todo $g \in G$, es decir, a que $N_G(U)H = G$.

Una vez presentado el lenguaje que vamos a utilizar, comenzamos el desarrollo de nuestra teoría.

Definición 3.1.7 *Sean G un grupo y $H \lhd G$. Una aplicación $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ se dice* G-conjunto proyectivo relativo a H *(o* representación proyectiva por permutaciones de G respecto de H*) de orden l si verifica*

(i) $T\,|_H$ es homomorfismo de grupos.

(ii) $T(ghg^{-1}) = T(g)T(h)T(g)^{-1}$ para todos $g \in G$, $h \in H$.

Diremos que T, G-conjunto proyectivo relativo a H, es irreducible *cuando, para todos $i, j \in \{1, \ldots, l\}$, exista $g \in G$ tal que $T(g)(i) = j$.*

Observaciones 3.1.8

(i) Dada una representación por permutaciones T proyectiva respecto de $H \lhd G$, si $T\mid_H$ es irreducible, entonces T es también irreducible. El recíproco no es cierto en general, al igual que ocurre en representaciones por permutaciones ordinarias.

(ii) Toda representación por permutaciones ordinaria de G es proyectiva respecto de cualquier $H \lhd G$.

(iii) Cualquier aplicación $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ con $T(1) = 1$ es G-conjunto proyectivo relativo a 1.

(iv) Dada una aplicación cualquiera $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ verificando $T(1) = 1$, no siempre existe el mayor subgrupo normal H de G tal que T es G-conjunto proyectivo relativo a H.

Por ejemplo, si

$$G = \langle a, b : a^2 = b^2 = 1 = [a, b]\rangle \cong C_2 \times C_2 \text{ y } l = 2,$$

definimos $T : G \longrightarrow \Sigma_2$ como $T(g) = 1$ para todo $g \neq ab$ y $T(ab) = (1, 2)$. De esta forma, T es G-conjunto proyectivo relativo a los subgrupos normales $\langle a\rangle$ y $\langle b\rangle$, pero no lo es respecto del subgrupo generado por ellos, G.

(v) Si T es G-conjunto proyectivo de orden l relativo a $H \lhd G$, entonces, para todos $g, g' \in G$, la permutación $T(g'g)^{-1}T(g')T(g)$ pertenece al centralizador en Σ_l de Im ψ, *donde $\psi = T\mid_H$.*

En efecto, utilizando la propiedad(ii) de la definición,

$$\begin{aligned} & T(g'g)\psi(h)T(g'g)^{-1} = \psi(g'ghg^{-1}g'^{-1}) \\ = \;& T(g')\psi(ghg^{-1})T(g')^{-1} = T(g')T(g)\psi(h)T(g)^{-1}T(g')^{-1}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $T(g'g)^{-1}T(g')T(g)$ conmuta con $\psi(h)$ para todo $h \in H$.

En los casos en que $C_{\Sigma_l}(\text{Im } \psi)$ sea trivial, la condición de que

$$T(g'g)^{-1}T(g')T(g) \in C_{\Sigma_l}(\text{Im } \psi)$$

obliga a que T sea homomorfismo.

En particular se tiene

(vi) *Si T es G-conjunto proyectivo de orden l relativo a $H \lhd G$ y $\psi = T\,|_H$ es H-conjunto 2-transitivo, entonces $C_{\Sigma_l}(\text{Im } \psi) = 1$ cuando $l > 2$.*

En efecto, sea $\tau \in C_{\Sigma_l}(\text{Im } \psi)$ y supongamos que, para algún $i \in \{1 \dots l\}$, $\tau(i) = j \neq i$. Tomamos $k \neq i, j$ y elegimos $\alpha \in \text{Im } \psi$ tal que $\alpha(i) = i$ y $\alpha(j) = k$. Entonces, como $\alpha^\tau = \alpha$, se tiene

$$i = \alpha(i) = \tau^{-1}\alpha\tau(i) = \tau^{-1}\alpha(j) = \tau^{-1}(k),$$

de donde se llega al absurdo $\tau(i) = k \neq j$. Luego τ es la identidad en Σ_l y, por tanto, $C_{\Sigma_l}(\text{Im}\psi) = 1$.

(vii) *Si $T, T' : G \longrightarrow \Sigma_l$ son extensiones proyectivas del H-conjunto $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$, con $H \lhd G$, entonces la permutación $T(g)^{-1}T'(g)$ pertenece a $C_{\Sigma_l}(\text{Im}\psi)$ para todo $g \in G$.*

En efecto, para todos $g \in G$ y $h \in H$,

$$T(g)\psi(h)T(g)^{-1} = \psi(ghg^{-1}) = T'(g)\psi(h)T'(g)^{-1},$$

de donde se obtiene el resultado.

También ahora, si $C_{\Sigma_l}(\text{Im } \psi) = 1$, se obtiene $T(g) = T'(g)$ para todo $g \in G$. Es decir, en ese caso, si existe extensión proyectiva de ψ, es única.

(viii) *Si $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ es G-conjunto proyectivo relativo a $H \lhd G$ y $\tau \in \Sigma_l$, entonces la aplicación $T^\tau : G \longrightarrow \Sigma_l$ definida por $T^\tau(g) = \tau^{-1}T(g)\tau$ es G-conjunto proyectivo relativo a H. Además, $T^\tau \mid_H$ y $T \mid_H$ son H-conjuntos isomorfos:*

Es claro que $T^\tau \mid_H$ es homomorfismo de grupos equivalente a $T \mid_H$. Además,

$$\begin{aligned} & T^\tau(g)T^\tau(h)[T^\tau(g)]^{-1} = \tau^{-1}T(g)T(h)T(g)^{-1}\tau \\ = \; & T^\tau(ghg^{-1}). \end{aligned}$$

Luego T^τ es G-conjunto proyectivo relativo a H.

Esta última observación nos sugiere la siguiente definición.

Definición 3.1.9 *Los G-conjuntos proyectivos $T, T' : G \longrightarrow \Sigma_l$ relativos a $H \lhd G$ se dicen* equivalentes *si existe $\tau \in \Sigma_l$ de forma que $T^\tau = T'$.*

Aunque $T, T' : G \longrightarrow \Sigma_l$ sean G-conjuntos proyectivos relativos a $H \lhd G$ con $T \mid_H$ y $T' \mid_H$ H-conjuntos isomorfos, no se puede asegurar que T y T' sean G-conjuntos proyectivos equivalentes.

Ejemplo 3.1.10 Se considera el grupo

$$G = \langle a, b : a^2 = b^2 = 1 = [a, b] \rangle \cong C_2 \times C_2$$

y en él el subgrupo $H = \langle a \rangle \cong C_2$. La aplicación $T : G \longrightarrow \Sigma_2$ dada por $T(g) = 1$ si $g \neq a$ y $T(a) = (1, 2)$ es G-conjunto proyectivo relativo a H.

También la aplicación $T' : G \longrightarrow \Sigma_2$ dada por $T'(1) = T'(ab) = 1$ y $T'(a) = T'(b) = (1, 2)$ es G-conjunto proyectivo relativo a H.

Además, $T \mid_H = T' \mid_H$. Pero T' es homomorfismo de grupos y T no lo es, luego no son equivalentes. □

El contraejemplo anterior nos permite asegurar que, dado $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$, homomorfismo con $H \lhd G$, pueden existir distintas extensiones proyectivas de ψ.

El siguiente resultado estudia la existencia de una tal extensión.

Teorema 3.1.11 *Sea $H \lhd G$ y $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$ un H-conjunto ordinario. Existe $T : G \longrightarrow \Sigma_l$, extensión proyectiva de ψ, si y sólo si ψ es invariante por G.*

DEMOSTRACIÓN

$\Longleftarrow$) Sea $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$ invariante por G. Para cada $g \in G$, ψ y ψ^g son equivalentes como representaciones de H. Luego existe en Σ_l una permutación, que denotaremos por $T(g)$, tal que

$$\psi^g(h)T(g) = T(g)\psi(h) \text{ para todo } h \in H.$$

Equivalentemente,

$$\psi(ghg^{-1})T(g) = T(g)\psi(h) \text{ para todo } h \in H.$$

Si $g \in H$, podemos tomar $T(g) = \psi(g)$. De esta forma, $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ es G-conjunto proyectivo relativo a H con $T\mid_H = \psi$.

$\Longrightarrow$) Sea $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ G-conjunto proyectivo relativo a H con $T\mid_H = \psi$. Entonces, para cada $g \in G$,

$$\psi(ghg^{-1}) = T(g)\psi(h)T(g)^{-1} \text{ para todo } h \in H.$$

Así, ψ^g y ψ son H-conjuntos isomorfos para cada $g \in G$. Luego ψ es invariante por G. □

Observaciones 3.1.12

(i) La proposición anterior, en el caso en que $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$ sea H-conjunto irreducible y $U = \{h \in H;\ \psi(h)(1) = 1\}$, afirma que existe $T : G \longrightarrow \Sigma_l$, extensión proyectiva de ψ, si y sólo si $N_G(U)H = G$.

Recordemos que, en el caso ψ irreducible y $U = \{h \in H;\ \psi(h)(1) = 1\}$, existe $T : G \longrightarrow \Sigma_l$, G-conjunto ordinario con $T\mid_H = \psi$, si y sólo si existe $V \leq G$ con $VH = G$ y $V \cap H = U$. Esta condición es más fuerte que la anterior porque $V \cap H = U$ implica $V \leq N_G(U)$ y, por tanto, $VH = G$ obliga a $N_G(U)H = G$.

(ii) Teniendo en cuenta las observaciones **??**(v) y (vii) junto con el teorema **??**, se tiene que, dado $H \lhd G$ y dada $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$, invariante por G verificando $C_{\Sigma_l}(\text{Im } \psi) = 1$, existe una extensión proyectiva de ψ que resulta ser homomorfismo de G en Σ_l y que, además, es única. Es decir, existe un único G-conjunto ordinario T con $T\mid_H = \psi$.

En el caso ψ irreducible se tiene, por ejemplo, que si H/U es H-conjunto invariante por G y 2-transitivo (es decir, $N_G(U)H = G$ y el cardinal

de las dobles coclases de U en H es igual a dos), entonces existe un único G-conjunto ordinario irreducible G/V tal que $(G/V)_H = H/U$. En particular, se puede afirmar que existe en G un subgrupo V de índice $| H : U |$.

□

3.2 Producto tensorial

En esta sección obtenemos como resultado más interesante un teorema de descomposición de un G-conjunto irreducible con restricción a $H \lhd G$ homogénea en *producto tensorial* de un G-conjunto proyectivo relativo a H por un G/H-conjunto ordinario.

Comenzamos recordando algunos conceptos relativos al producto orlado de grupos simétricos.

Definición 3.2.1 *Dados dos grupos simétricos Σ_l, Σ_m, se define el producto orlado $\Sigma_l \wr \Sigma_m$ con acción natural como el producto semidirecto*
$\Sigma_m \, [\Sigma_l \times \overset{(m}{\ldots} \times \Sigma_l]$ *con la operación producto dada por*

$$(\tau'; \sigma'_1, \ldots, \sigma'_m) \cdot (\tau; \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = (\tau'\tau; \sigma'_{\tau(1)}\sigma_1, \ldots, \sigma'_{\tau(m)}\sigma_m)$$

para todos τ, $\tau' \in \Sigma_m$; σ_i, $\sigma'_i \in \Sigma_l$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Observación 3.2.2 Podemos considerar $\Sigma_l \wr \Sigma_m$ como subgrupo de Σ_{lm} a través del monomorfismo $\alpha : \Sigma_l \wr \Sigma_m \longrightarrow \Sigma_{lm}$ definido de la siguiente forma:

Sobre el conjunto de pares ordenados $\{(i,j);\, 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq l\}$, actúa Σ_{lm} tras identificar $\{1,\ldots,lm\}$ con el conjunto de dichos pares como en el punto (ii) de la observación **??**.

Ahora, para cada $(\tau;\sigma_1,\ldots,\sigma_m) \in \Sigma_l \wr \Sigma_m$, definimos

$$\alpha(\tau;\sigma_1,\ldots,\sigma_m)(i,j) = (\tau(i),\sigma_i(j)) \text{ para todos } 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq l.$$

Es fácil comprobar que la aplicación $\alpha : \Sigma_l \wr \Sigma_m \longrightarrow \Sigma_{lm}$ así definida es monomorfismo de grupos. □

Dado un grupo G y un subgrupo H normal en G, definimos a continuación un *producto tensorial* de un G-conjunto proyectivo T de orden l por un G/H-conjunto ordinario de orden m como una representación proyectiva de G en el producto orlado $\Sigma_l \wr \Sigma_m$ que, restringida a H, sea la suma de m copias de $T\,|_H$.

Observación 3.2.3 Sea G un grupo, $H \lhd G$ y $W : G \longrightarrow \Sigma_m$ un G-conjunto irreducible con
$W(h) = 1$ para todo $h \in H$, es decir, un G/H-conjunto irreducible. Si llamamos
$S = \{g \in G;\, W(g)(1) = 1\}$, entonces $H \leq S$. Además, sabemos por la proposición **??** que podemos elegir un transversal $t = \{g_1,\ldots,g_m\}$ a izquierda de S en G tal que $W(g_i)(1) = i$ para todo $1 \leq i \leq m$. De esta forma, como se ve en la misma proposición, se tiene

$$g \cdot g_i S = g_{W(g)(i)} S \text{ para todo } 1 \leq i \leq m.$$

□

Definición 3.2.4 *Sean* $T : G \longrightarrow \Sigma_l$, *G-conjunto proyectivo relativo a* $H \lhd G$, $W : G \longrightarrow \Sigma_m$ *y* $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ *como en la observación anterior.*

Llamamos producto tensorial de T por W a través del transversal t *a la aplicación* $T \otimes_t W : G \longrightarrow \Sigma_{lm}$ *dada por*

$$T \otimes_t W(g) = \alpha[W(g); T(g^{-1}_{W(g)(1)} \cdot g \cdot g_1), \ldots, T(g^{-1}_{W(g)(m)} \cdot g \cdot g_m)],$$

donde $\alpha : \Sigma_l \wr \Sigma_m \longrightarrow \Sigma_{lm}$ *es el monomorfismo definido en la observación* **??**.

Proposición 3.2.5 *Dados* $T : G \longrightarrow \Sigma_l$, *G-conjunto proyectivo relativo a* $H \lhd G$, $W : G \longrightarrow \Sigma_m$, S *y* $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ *como en la observación* **??**, *se tiene:*

(i) $T \otimes_t W : G \longrightarrow \Sigma_{lm}$ *es G-conjunto proyectivo relativo a* H *con* $T \otimes_t W \mid_H = \sum_{i=1}^{m} \psi^{g_i^{-1}}$, *donde* $\psi = T \mid_H$.

En el caso ψ *irreducible,* $\psi = T \mid_H$ *representa la acción de* H *sobre* H/U, *donde* $U = \{h \in H; \psi(h)(1) = 1\}$, *y* $T \otimes_t W \mid_H$ *representa la acción de* H *sobre* $\sum_{i=1}^{m} H/U^{g_i^{-1}}$.

(ii) $T \otimes_t W$ *es G-conjunto ordinario si y sólo si* $T \mid_S$ *es homomorfismo de grupos.*

En ese caso, si se verifica $\psi = T \mid_H$ *irreducible, se tiene* $S = VH$, *donde* $V = \{s \in S; T(s)(1) = 1\}$ *y* $V \cap H = U = \{h \in H; \psi(h)(1) = 1\}$; *además,* $T \otimes_t W$ *es irreducible y representa la acción de* G *sobre* G/V.

DEMOSTRACIÓN

(i) Para cada $h \in H$,

$$\begin{aligned} T \otimes_t W(h) &= \alpha[W(h); T(g_{W(h)(1)}^{-1} \cdot h \cdot g_1), \ldots, T(g_{W(h)(m)}^{-1} \cdot h \cdot g_m)] \\ &= \alpha[1; T(g_1^{-1} \cdot h \cdot g_1), \ldots, T(g_m^{-1} \cdot h \cdot g_m)]. \end{aligned}$$

Como $\alpha : \Sigma_l \wr \Sigma_m \longrightarrow \Sigma_{lm}$ es homomorfismo de grupos, basta ver que

$$\begin{aligned} & (1; T(g_1^{-1} \cdot hh' \cdot g_1), \ldots, T(g_m^{-1} \cdot hh' \cdot g_m)) \\ = \; & (1; T(g_1^{-1} h g_1), \ldots, T(g_m^{-1} h g_m)) \cdot (1; T(g_1^{-1} h' g_1), \ldots, T(g_m^{-1} h' g_m)) \end{aligned}$$

para comprobar que $T \otimes_t W \mid_H$ es homomorfismo. Y esto es claro por ser $T \mid_H = \psi$ homomorfismo de grupos.

Además, $T \otimes_t W(h)(i,j) = (i, \psi(g_i^{-1} h g_i)(j)) = (i, \psi^{g_i^{-1}}(h)(j))$. Luego $T \otimes_t W \mid_H = \sum_{i=1}^{m} \psi^{g_i^{-1}}$.

En el caso ψ irreducible, si $U = \{h \in H;\, \psi(h)(1) = 1\}$, $T \mid_H$ representa la acción de H sobre H/U y $T \otimes_t W \mid_H$ representa la acción de H sobre $\sum_{i=1}^{m} H/U^{g_i^{-1}}$.

Para comprobar que $T \otimes_t W$ es G-conjunto proyectivo relativo a H, falta ver que

$$T \otimes_t W(g) \cdot T \otimes_t W(h) = T \otimes_t W(ghg^{-1}) \cdot T \otimes_t W(g)$$

para todos $g \in G, h \in H$:

$$\begin{aligned} & T \otimes_t W(g) \cdot T \otimes_t W(h) = \\ & \alpha[W(g); T(g_{W(g)(1)}^{-1} \cdot g \cdot g_1), \ldots, T(g_{W(g)(m)}^{-1} \cdot g \cdot g_m)] \cdot \\ & \alpha[1; \psi(g_1^{-1} \cdot h \cdot g_1), \ldots, T(g_m^{-1} \cdot h \cdot g_m)] \\ = \; & \alpha[W(g); T(g_{W(g)(1)}^{-1} g g_1) \psi(g_1^{-1} h g_1), \ldots, T(g_{W(g)(m)}^{-1} g g_m) \psi(g_m^{-1} h g_m)]. \end{aligned}$$

Por otro lado, $T \otimes_t W(ghg^{-1}) \cdot T \otimes_t W(g) =$

$$\begin{aligned}
& \alpha[W(ghg^{-1}); T(g^{-1}_{W(ghg^{-1})(1)} ghg^{-1} g_1), \ldots, T(g^{-1}_{W(ghg^{-1})(m)} ghg^{-1} g_m)] \cdot \\
& \alpha[W(g); T(g^{-1}_{W(g)(1)} \cdot g \cdot g_1), \ldots, T(g^{-1}_{W(g)(m)} \cdot g \cdot g_m)] \\
= \; & \alpha[W(gh); T(g^{-1}_{W(gh)(1)} \cdot ghg^{-1} \cdot g_{W(g)(1)}) \cdot T(g^{-1}_{W(g)(1)} \cdot g \cdot g_1), \\
& \ldots, T(g^{-1}_{W(gh)(m)} \cdot ghg^{-1} \cdot g_{W(g)(m)}) \cdot T(g^{-1}_{W(g)(m)} \cdot g \cdot g_m)].
\end{aligned}$$

Como $W(gh) = W(g)$, basta ver que, para cada $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
& T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i) \cdot \psi(g_i^{-1} \cdot h \cdot g_i) \\
= \; & \psi(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot ghg^{-1} \cdot g_{W(g)(i)}) \cdot T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i),
\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}
& T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i) \cdot \psi(g_i^{-1} \cdot h \cdot g_i) \cdot [T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)]^{-1} \\
= \; & \psi(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot ghg^{-1} \cdot g_{W(g)(i)}),
\end{aligned}$$

lo cual es cierto por ser T G-conjunto proyectivo relativo a H con $T\mid_H = \psi$.

(ii) $T \otimes_t W : G \longrightarrow \Sigma_{lm}$ es G-conjunto ordinario si y sólo si

$$T \otimes_t W(g'g) = T \otimes_t W(g') \cdot T \otimes_t W(g)$$

para todos $g, g' \in G$. Y, como W y α son homomorfismos, usando la definición de $T \otimes_t W$ y del producto orlado, se ve que esto es equivalente a que

$$\begin{aligned}
& T(g^{-1}_{W(g'g)(i)} \cdot g'g \cdot g_i) = \\
& T(g^{-1}_{W(g')W(g)(i)} \cdot g' \cdot g_{W(g)(i)}) \cdot T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)
\end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Pero $g \cdot g_k S = g_{W(g)(k)} S$ implica $g^{-1}_{W(g)(k)} \cdot g \cdot g_k \in S$ para todo $1 \leq k \leq m$ y para todo $g \in G$.

Luego, si $T\ |_S$ es homomorfismo de grupos, se verificará la igualdad exigida.

Recíprocamente, si suponemos $g_1 \in S$, para cada $x \in S$ existe $s \in S$ con $x = g^{-1}_{W(s)(1)} \cdot s \cdot g_1$, ya que $W(s)(1) = 1$ para todo $s \in S$. Luego, si se verifica la igualdad, tomando $i = 1$ y $g, g' \in S$, se obtiene

$$T(g_1^{-1} \cdot g' g \cdot g_1) = T(g_1^{-1} \cdot g' \cdot g_1) T(g_1^{-1} \cdot g \cdot g_1),$$

o sea, $T\ |_S$ es homomorfismo de grupos.

En definitiva, $T \otimes_t W$ es G-conjunto ordinario si y sólo si $T\ |_S$ es homomorfismo de grupos.

En este caso, si además $T\ |_H$ es irreducible, $T\ |_S$ resulta ser también irreducible porque $H \leq S$. Luego $T\ |_S$ representa la acción de S sobre un S-conjunto transitivo S/V con $V = \{s \in S;\ T(s)(1) = 1\}$ y $(S/V)_H = H/U$, lo cual obliga a que se verifique $VH = S$ y $V \cap H = U$.

Veamos ahora que, en este caso, $T \otimes_t W$ representa la acción de G sobre G/V, de donde se deducirá que es irreducible:

Como $T\ |_S$: $S \longrightarrow \Sigma_l$ es irreducible, sabemos por la proposición **??** que podemos elegir un transversal, $\{s_1, \ldots, s_l\}$, a izquierda de V en S tal que $s \cdot s_j V = s_{T(s)(j)} V$.

Ahora, $\{g_i s_j;\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, l\}$ es un transversal a izquierda de

V en G y, para cada $g \in G$, se tiene

$$g \cdot g_i s_j V = g_{W(g)(i)} \cdot g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i \cdot s_j V,$$

en donde $g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i \in S$ para todo $1 \leq i \leq m$. Luego

$$g \cdot g_i s_j V = g_{W(g)(i)} \cdot s_{T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j)} V$$

para todos $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$.

Por otra parte, $(W(g)(i), T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j)) = T \otimes_t W(g)(i,j)$, luego $T \otimes_t W$ representa la acción de G sobre G/V mediante el transversal $\{g_i s_j;\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, l\}$.

□

Observación 3.2.6 Sean T, W y S como en la definición de producto tensorial. Y sean $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ y $t' = \{g'_1, \ldots, g'_m\}$ transversales a izquierda de S en G tales que $W(g_i)(1) = W(g'_i)(1) = i$ para todo $1 \leq i \leq m$. En general, no se puede asegurar que los G-conjuntos proyectivos $T \otimes_t W$ y $T \otimes_{t'} W$ sean equivalentes, aunque siempre lo son sus respectivas restricciones a H.

En efecto, recordemos que $T\,|_H = \psi$ es siempre invariante por G, luego

$$(T \otimes_t W)\,|_H = \sum_{i=1}^{m} \psi^{g_i^{-1}} \text{ y } (T \otimes_{t'} W)\,|_H = \sum_{i=1}^{m} \psi^{g_i'^{-1}}$$

son H-conjuntos isomorfos. □

Ejemplo 3.2.7 Se considera el grupo

$$G = \langle a, b, c : a^3 = b^2 = c^2 = 1 = [a,c] = [b,c],\ a^b = a^2 \rangle \cong \Sigma_3 \times C_2$$

y definimos la aplicación $T : G \longrightarrow \Sigma_3$ por

$$T(a) = T(ac) = (1,2,3),\ T(a^2) = T(a^2c) = (1,3,2)$$

$$T(b) = T(bc) = T(a^2b) = T(a^2bc) = (1,2)$$

$$T(ab) = T(abc) = (1,3) \text{ y } T(1) = T(c) = 1.$$

Si $H = \langle a \rangle$, es fácil comprobar que T es G-conjunto proyectivo relativo a H.

Sea $W : G \longrightarrow \Sigma_2$ el homomorfismo dado por

$$W(a) = W(b) = 1 \text{ y } W(c) = (1,2).$$

Y sean $t = \{1, c\}$ y $t' = \{1, bc\}$ transversales a izquierda de $S =< a, b >$ en G.

Es fácil comprobar que

$$(T \otimes_t W)(b)(i,j) = (i, T(b)(j)) = (T \otimes_{t'} W)(b)(i,j)$$

para todos $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$.

Es decir, tanto $(T \otimes_t W)(b)$ como $(T \otimes_{t'} W)(b)$ corresponden a la permutación $(1,2)(4,5) \in \Sigma_6$ si identificamos $\{(i,j);\ 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 3\}$ con el conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$ como en el apartado (ii) de la observación **??**.

Por otro lado,

$$(T \otimes_t W)(ab)(i,j) = (i, T(ab)(j))$$

para todos $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$. Es decir, $(T \otimes_t W)(ab) = (1,3)(4,6) \in \Sigma_6$.

Sin embargo,

$$(T \otimes_{t'} W)(ab)(1,j) = (1, T(ab)(j)) \text{ para todo } 1 \leq j \leq 3 \text{ y}$$

$$(T \otimes_{t'} W)(ab)(2,j) = (2, T(a^2b)(j)) \text{ para todo } 1 \leq j \leq 3.$$

Por tanto, $(T \otimes_{t'} W)(ab) = (1,3)(4,5) \in \Sigma_6$.

Si los G-conjuntos proyectivos $T \otimes_t W$ y $T \otimes_{t'} W$ fueran equivalentes, existiría $\tau \in \Sigma_6$ tal que

$$(T \otimes_t W)(g)\tau = \tau(T \otimes_{t'} W)(g) \text{ para todo } g \in G.$$

En particular, debería ser

$$[(T \otimes_t W)(b)]^\tau = (T \otimes_{t'} W)(b)$$

o, lo que es lo mismo, $[(1,2)(4,5)]^\tau = (1,2)(4,5)$ y, por tanto,

$$\tau \in < (1,2),\ (4,5),\ (3,6),\ (1,4)(2,5),\ (1,5)(2,4) > .$$

Es fácil comprobar que ningún τ del subgrupo anterior verifica

$$[(T \otimes_t W)(ab)]^\tau = (T \otimes_{t'} W)(ab)$$

o, equivalentemente, $[(1,3)(4,6)]^\tau = (1,3)(4,5)$. Luego los G-conjuntos proyectivos $T \otimes_t W$ y $T \otimes_{t'} W$ no son equivalentes.

Proposición 3.2.8 *Sean $T : G \longrightarrow \Sigma_l$, G-conjunto proyectivo relativo a $H \lhd G$, $W : G \longrightarrow \Sigma_m$, S y $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ como en la observación* **??**, *verificando además que $T|_S$ es homomorfismo de grupos.*

(i) Si $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ y $t' = \{g'_1, \ldots, g'_m\}$ son transversales a izquierda de S en G tales que $W(g_i)(1) = W(g'_i)(1) = i$ para todo $1 \leq i \leq m$, entonces los G-conjuntos (ordinarios) $T \otimes_t W$ y $T \otimes_{t'} W$ son G-isomorfos.

(ii) Si $T|_S = \sum_{k=1}^{p} \phi_k$, donde, para cada $1 \leq k \leq p$, $\phi_k : S \longrightarrow \Sigma_{l_k}$ representa un S-conjunto irreducible S/V_k, entonces $T \otimes_t W$ representa

la acción de G sobre el conjunto $\sum_{k=1}^{p} G/V_k$ para cualquier transversal a izquierda $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ de S en G que verifique $W(g_i)(1) = i$ para todo $1 \leq i \leq m$.

DEMOSTRACIÓN

(i) Sabemos que, para cada $1 \leq i \leq m$, las clases a izquierda $g_i S$ y $g'_i S$ coinciden con el conjunto $\{g \in G;\, W(g)(1) = i\}$. Luego $g_i^{-1} g'_i \in S$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Llamamos τ a la permutación de Σ_{lm} dada por

$$\tau(i,j) = (i, T(g_i^{-1} g'_i)(j)).$$

Veamos que, para cada $g \in G$, se verifica

$$\tau(T \otimes_{t'} W)(g)(i,j) = (T \otimes_t W)(g)\tau(i,j)$$

para todos $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$:

$$\begin{aligned} & \tau(T \otimes_{t'} W)(g)(i,j) = \tau(W(g)(i), T(g'^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g'_i)(j)) \\ = \;& (W(g)(i), T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g'_{W(g)(i)}) \cdot T(g'^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g'_i)(j)). \end{aligned}$$

Como los elementos $g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g'_{W(g)(i)}$ y $g'^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g'_i$ pertenecen a S y, además, $T\,|_S$ es homomorfismo, la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned} & (W(g)(i), T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g'_i)(j)) \\ = \;& (W(g)(i), T(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i) \cdot T(g_i^{-1} g'_i)(j)) \\ = \;& (T \otimes_t W)(g)(i, T(g_i^{-1} g'_i)(j)) = (T \otimes_t W)(g)\tau(i,j), \end{aligned}$$

por ser también $g_{W(g)(i)}^{-1} \cdot g \cdot g_i$, $g_i^{-1} g_i' \in S$.

Luego los G-conjuntos $T \otimes_t W$ y $T \otimes_{t'} W$ son G-isomorfos, como queríamos demostrar.

(ii) $T\,|_S$ es el homomorfismo de S en $\Sigma_{l_1+\ldots+l_p}$ dado por

$$T(s)(j) = \begin{cases} \phi_1(s)(j) & \text{si } 1 \leq j \leq l_1 \\ \phi_k(s)(j_k) + l_1 + \ldots + l_{k-1} & \text{si } j = (*) \end{cases}$$

$(*) l_1 + \ldots + l_{k-1} + j_k$ para algunos $2 \leq k \leq p$, $1 \leq j_k \leq l_k$.

Para cada $1 \leq k \leq p$, como ϕ_k representa la acción de S sobre S/V_k, existe un transversal a izquierda $\{s_1^k, \ldots, s_{l_k}^k\}$ de V_k en S verificando $s \cdot s_{j_k}^k V_k = s_{\phi_k(s)(j_k)}^k V_k$ para todo $1 \leq j_k \leq l_k$.

Sea $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ transversal a izquierda de S en G verificando $W(g_i)(1) = i$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Entonces, para cada $1 \leq k \leq p$,

$$\{g_i s_{j_k}^k;\ i = 1, \ldots, m,\ j_k = 1, \ldots, l_k\}$$

es un transversal a izquierda de V_k en G.

Ahora, para cada $g \in G$,

$$\begin{aligned} g \cdot g_i s_{j_k}^k V_k &= g_{W(g)(i)} \cdot (g_{W(g)(i)}^{-1} g g_i) \cdot s_{j_k}^k V_k \\ &= g_{W(g)(i)} \cdot s^k_{\phi_k(g_{W(g)(i)}^{-1} g g_i)(j_k)} V_k, \end{aligned}$$

para todos $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq j_k \leq l_k$, por ser $g_{W(g)(i)}^{-1} \cdot g \cdot g_i \in S$.

Por otro lado,

$$T \otimes_t W(g)(i,j) = (W(g)(i), T(g_{W(g)(i)}^{-1} \cdot g \cdot g_i)(j))$$

$$= \begin{cases} (W(g)(i), \phi_1(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j)) & \text{si } 1 \leq j \leq l_1 \\ (W(g)(i), l_1 + \ldots + l_{k-1} + \phi_k(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j_k)) & \text{si } j = (*) \end{cases}$$

$$(*)l_1 + \ldots + l_{k-1} + j_k \text{ para algunos } 2 \leq k \leq p,\ 1 \leq j_k \leq l_k.$$

Luego $T \otimes_t W = \sum_{k=1}^{p} T_k$, donde para cada $1 \leq k \leq p$, T_k es un homomorfismo irreducible de G en Σ_{ml_k} que representa la acción de G sobre G/V_k a través del transversal $\{g_i s^k_{j_k};\ i = 1, \ldots, m,\ j_k = 1, \ldots, l_k\}$.

□

Corolario 3.2.9 *Sean $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ y $W : G \longrightarrow \Sigma_m$ G-conjuntos ordinarios irreducibles que representan, respectivamente, la acción de G sobre G/V y G/S. Entonces, el producto tensorial $T \otimes_t W$ a través de cualquier transversal a izquierda $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ de S en G verificando $W(g_i)(1) = i$ para todo $1 \leq i \leq m$ representa la acción de G sobre el producto cartesiano $G/V \times G/S$.*

DEMOSTRACIÓN Para poder aplicar la definición de producto tensorial $T \otimes_t W$ que conocemos, consideramos T como G-conjunto proyectivo relativo a $H = 1$. De esta forma, $S \geq 1$ y se verifican las condiciones exigidas para que $T \otimes_t W$ esté bien definido.

Como T representa la acción de G sobre el conjunto G/V, sabemos que $T\,|_S$ representa la acción de S sobre $\sum_{k=1}^{p} S/(S \cap V^{x_k})$, donde $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es un conjunto de representantes de las (V, S)-dobles coclases en G.

Por la proposición **??**, $T \otimes_t W$ representa la acción de G sobre el G-conjunto $\sum_{k=1}^{p} G/(S \cap V^{x_k})$, que es, de acuerdo con la proposición **??**, G-isomorfo al producto cartesiano $G/V \times G/S$. □

Definición 3.2.10 *La suma de G-conjuntos proyectivos se define de forma análoga a la de G-conjuntos ordinarios, es decir, $T_1 + T_2 : G \longrightarrow \Sigma_{l+l'}$ viene dada por:*

$$(T_1 + T_2)(g)(i) = \begin{cases} T_1(g)(i) & si\ 1 \leq i \leq l \\ l + T_2(g)(i-l) & si\ l+1 \leq i \leq l+l' \end{cases}$$

Proposición 3.2.11 (Distributividad del producto tensorial respecto de la suma en la primera componente).

Sean $T_1 : G \longrightarrow \Sigma_l$ y $T_2 : G \longrightarrow \Sigma_{l'}$ G-conjuntos proyectivos relativos a $H \lhd G$. Y sea $W : G \longrightarrow \Sigma_m$ G-conjunto irreducible con $W(h) = 1$ para todo $h \in H$. Entonces, si $S = \{g \in G; W(g)(1) = 1\}$ y $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ es un transversal a izquierda de S en G verificando $W(g_i)(1) = i$ para todo $1 \leq i \leq m$, los G-conjuntos proyectivos $(T_1 \otimes_t W) + (T_2 \otimes_t W)$ y $(T_1 + T_2) \otimes_t W$ son equivalentes.

Demostración Para cada $g \in G$, $[(T_1 \otimes_t W) + (T_2 \otimes_t W)](g)$ es una permutación de $\{1, \ldots, lm, lm+1, \ldots, lm+lm'\}$ que actúa de la siguiente forma:

(i) Si $1 \leq k \leq lm$, entonces $[(T_1 \otimes_t W) + (T_2 \otimes_t W)](g)(k) = (T_1 \otimes_t W)(g)(k)$. Ahora, $k = (i-1)l + j$ para algunos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq l$. Habíamos identificado $\{1, \ldots, lm\}$ con $\{(i,j);\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq l\}$ y, de esta forma, se tenía

$$T_1 \otimes_t W(g)(i,j) = (W(g)(i), T_1(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j)).$$

Si pensamos ahora que $(T_1 \otimes_t W)(g)$ actúa sobre $\{1, \ldots, lm\}$, debemos escribir

$$T_1 \otimes_t W(g)(k) = [W(g)(i) - 1] \cdot l + T_1(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j) \in \{1, \ldots, lm\}.$$

(ii) Si $lm + 1 \leq k \leq lm + l'm$, entonces

$$[(T_1 \otimes_t W) + (T_2 \otimes_t W)](g)(k) = lm + (T_2 \otimes_t W)(g)(k - lm).$$

Ahora, $k - lm = (i-1)l' + j$ para algunos $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l'$. Se tenía

$$T_2 \otimes_t W(g)(i,j) = (W(g)(i), T_2(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j)).$$

Luego podemos escribir

$$lm + T_2 \otimes_t W(g)(k - lm) =$$

$$lm + [W(g)(i) - 1]l' + T_2(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j) \in \{lm + 1, \ldots, lm + l'm\}.$$

Por otro lado, $[(T_1 + T_2) \otimes_t W](g)$ actúa sobre los pares

$$\{(i,j);\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq l + l'\}$$

de la siguiente forma:

$$[(T_1 + T_2) \otimes_t W](g)(i,j) = (W(g)(i), (T_1 + T_2)(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j))$$

$$= \begin{cases} (W(g)(i), T_1(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j)) & \text{si } 1 \leq j \leq l \\ (W(g)(i), l + T_2(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j - l)) & \text{si } l + 1 \leq j \leq l + l' \end{cases}$$

Si identificamos $\{(i,j);\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq l + l'\}$ con $\{1, \ldots, (l + l')m\}$ de la manera habitual, es decir, haciendo corresponder a cada par (i,j) del primer conjunto el elemento $k = (i-1)(l + l') + j$ del segundo, se tiene, para cada k de esta forma:

$$[(T_1 + T_2) \otimes_t W](g)(k) =$$

$$\begin{cases} (W(g)(i) - 1)(l + l') + T_1(g^{-1}_{W(g)(i)} g g_i)(j) & \text{si } 1 \leq j \leq l \\ (W(g)(i) - 1)(l + l') + l + T_2(g^{-1}_{W(g)(i)} g g_i)(j - l) & \text{si } l + 1 \leq j \leq l + l' \end{cases}$$

Sea ahora $\tau \in \Sigma_{lm+l'm}$ la permutación definida como sigue:

Para $1 \leq k \leq lm$, $\tau(k) = (i-1)(l+l') + j$, donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq l$ vienen dados por $k = (i-1)l + j$.

Y si $k > lm$, $\tau(k) = (i-1)(l+l') + l + j$, donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq l'$ vienen dados por $k - lm = (i-1)l' + j$.

Comprobemos ahora que

$$\tau \cdot [(T_1 \otimes_t W) + (T_2 \otimes_t W)](g) = [(T_1 + T_2) \otimes_t W](g) \cdot \tau$$

para todo $g \in G$.

(i) Sea $1 \leq k \leq lm$, con $k = (i-1)l + j$, donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq l$. Ahora,

$$\begin{aligned} & \tau \cdot [(T_1 \otimes_t W) + (T_2 \otimes_t W)](g)(k) \\ = \; & \tau[(W(g)(i) - 1)l + T_1(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j)] \\ = \; & (W(g)(i) - 1)(l + l') + T_1(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j), \end{aligned}$$

al ser $1 \leq W(g)(i) \leq m$ y $1 \leq T_1(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j) \leq l$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} & [(T_1 + T_2) \otimes_t W](g) \cdot \tau(k) \\ = \; & [(T_1 + T_2) \otimes_t W](g)[(i-1)(l+l') + j] \\ = \; & (W(g)(i) - 1)(l + l') + T_1(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j) \end{aligned}$$

porque $1 \leq j \leq l$.

(ii) Sea ahora $lm + 1 \leq k \leq lm + l'm$, con $k - lm = (i-1)l' + j$, donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq l'$:

$$\tau \cdot [(T_1 \otimes_t W) + (T_2 \otimes_t W)](g)(k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau[lm + (W(g)(i) - 1)l' + T_2(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j)] \\
&= (W(g)(i) - 1)(l + l') + l + T_2(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j).
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
&[(T_1 + T_2) \otimes_t W](g) \cdot \tau(k) \\
&= [(T_1 + T_2) \otimes_t W](g)[(i-1)(l + l') + l + j] \\
&= (W(g)(i) - 1)(l + l') + l + T_2(g^{-1}_{W(g)(i)} \cdot g \cdot g_i)(j).
\end{aligned}
$$

□

Observación 3.2.12 La definición de producto tensorial podría extenderse a un G/H-conjunto ordinario W cualquiera en la segunda componente por linealidad:

Sea $W = W_1 + \ldots + W_p$, donde, para cada $k \in \{1, \ldots, p\}$, W_k es un G-conjunto irreducible verificando $W_k(h) = 1$ para todo $h \in H$.

Si, para cada k, $S_k = \{g \in G; W_k(g)(1) = 1\}$ y $t_k = \{g_1^k, \ldots, g_{m_k}^k\}$ es un transversal a izquierda de S_k en G verificando $W_k(g_i^k)(1) = i$ para todo $1 \leq i \leq m_k$, se define el producto tensorial de un G-conjunto proyectivo T relativo a H por W a través del conjunto de transversales $\{t_1, \ldots, t_p\}$ como

$$
T \otimes_{\{t_1, \ldots, t_p\}} W = \sum_{k=1}^{p} T \otimes_{t_k} W_k.
$$

Teorema 3.2.13 (de descomposición de un G-conjunto irreducible en producto tensorial de un G-conjunto proyectivo relativo a $H \lhd G$ y un G/H-conjunto).

Sea G/V G-conjunto simple y sea $H \lhd G$ con $(G/V)_H$ homogéneo, es decir, $N_G(U)H = G$, siendo $U = V \cap H$. Entonces, existen $T : G \longrightarrow \Sigma_l$, G-conjunto proyectivo relativo a H con $T\,|_H$ representando la acción de H sobre H/U, y $W : G \longrightarrow \Sigma_m$, representación asociada al G-conjunto irreducible G/VH, tales que $T \otimes_t W$ representa la acción de G sobre G/V para cualquier transversal $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ a izquierda de VH en G verificando $W(g_i)(1) = i$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

DEMOSTRACIÓN Tomamos en primer lugar un transversal $\{g_1, \ldots, g_m\}$ a izquierda de VH en G con $g_1 = 1$. Además, podemos tomar $g_i \in N_G(U)$ para todo $1 \leq i \leq m$ por ser $V \leq N_G(U)$ y $N_G(U)H = G$.

Ahora, para cada $g \in G$, llamamos $W(g)$ a la permutación de Σ_m dada por $g \cdot g_i VH = g_{W(g)(i)} VH$ para $1 \leq i \leq m$. Es fácil comprobar que la aplicación $W : G \longrightarrow \Sigma_m$ así definida es un homomorfismo de grupos que verifica $W(h) = 1$ para todo $h \in H$.

Sea ahora $\{h_1, \ldots, h_l\}$ transversal a izquierda de U en H y sea $\psi : H \longrightarrow \Sigma_l$ el homomorfismo de grupos definido por

$$h \cdot h_j U = h_{\psi(h)(j)} U \text{ para } 1 \leq j \leq l.$$

Ahora, $\{h_1, \ldots, h_l\}$ es también transversal a izquierda de V en VH y se tiene además

$$h \cdot h_j V = h_{\psi(h)(j)} V \text{ para todo } h \in H.$$

(VH/V y H/U son isomorfos como H-conjuntos).

Si llamamos $\phi : VH \longrightarrow \Sigma_l$ al homomorfismo dado por

$$v \cdot h_j V = h_{\phi(v)(j)} V \text{ para todo } v \in VH,$$

se tiene claramente $\phi\,|_H = \psi$.

Vamos ahora a definir $T : G \longrightarrow \Sigma_l$, G-conjunto proyectivo relativo a H tal que $T\,|_{VH} = \phi$:

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\{h_1^{g_i}, \ldots, h_l^{g_i}\}$ es un transversal de $U^{g_i} = U$ en H, por lo que es también transversal de V en VH.

Dado $g \in G$, existe un único $i \in \{1, \ldots, m\}$ y un único $v \in VH$ tales que $g = g_i v$. Estos elementos $v \in VH$ y $g_i \in t$ verifican, por otra parte,

$$v \cdot h_j V = h_{j_1}^{g_i} V \text{ para algún } j_1 \in \{1, \ldots, l\}.$$

Pues bien, definimos $T : G \longrightarrow \Sigma_l$ por $T(g)(j) = j_1$.

Vamos a ver que T es G-conjunto proyectivo relativo a H con $T\,|_{VH} = \phi$:

(i) Es claro, por la definición de T, que $T\,|_{VH} = \phi$. Por tanto,

$$T\,|_H = \phi\,|_H = \psi,$$

homomorfismo que representa la acción de H sobre H/U.

(ii) Para cada $g \in G$ y para cada $h \in H$, veamos $\psi(ghg^{-1}) = T(g)\psi(h)T(g)^{-1}$.

Si $g = g_i v$, se tiene, para cada $1 \leq j \leq m$,

$T(g)^{-1}(j) = j_1$ dado por $v h_{j_1} = h_j^{g_i} v_1$, para algún $v_1 \in V$;

$\psi(h)(j_1) = j_2$ dado por $h h_{j_1} v_2 = h_{j_2}$, para algún $v_2 \in V$;

$T(g)(j_2) = j_3$ dado por $v h_{j_2} v_3 = h_{j_3}^{g_i}$, para algún $v_3 \in V$.

Ahora,

$$\begin{aligned} h_{j_3} &= (v h_{j_2} v_3)^{g_i^{-1}} = (v h h_{j_1} v_2 v_3)^{g_i^{-1}} \\ &= (v h v^{-1} h_j^{g_i} v_1 v_2 v_3)^{g_i^{-1}} = h^{g^{-1}} h_j (v_1 v_2 v_3)^{g_i^{-1}}, \text{ con} \\ &\quad (v_1 v_2 v_3)^{g_i^{-1}} \in V^{g_i^{-1}} \cap H = (V \cap H)^{g_i^{-1}} = U^{g_i^{-1}} = U = V \cap H. \end{aligned}$$

Luego $h_{j_3} \in (ghg^{-1}) \cdot h_j V$ y así, $j_3 = \psi(ghg^{-1})(j)$.

Como $T\ |_{VH}$ es homomorfismo y VH es precisamente el conjunto de los elementos g de G tales que $W(g)(1) = 1$, el producto de T por W no depende del transversal elegido. Además, podemos asegurar por el apartado (ii) de la proposición **??**, que $T \otimes_t W$ es G-conjunto ordinario. Por la misma proposición, se tiene en ese caso que $T \otimes_t W$ representa la acción de G sobre G/V, con lo que queda probado el teorema. □

Observación 3.2.14 El G-conjunto proyectivo T de la descomposición anterior puede tomarse ordinario si existe $R \leq G$ tal que $(G/R)_{VH} = VH/V$, o equivalentemente, $R \cdot VH = G$ y $R \cap VH = V$. □

Corolario 3.2.15 *Sea $G = HL$, producto directo, y sea G/V G-conjunto simple. Entonces, existen $T : G \longrightarrow \Sigma_l$, G-conjunto proyectivo relativo a H con $T\ |_H$ representando la acción de H sobre H/U, donde $U = V \cap H$, y $W : G \longrightarrow \Sigma_m$, G-conjunto irreducible con $W(h) = 1$ para todo $h \in H$ representando la acción de G sobre G/VH, tales que $T \otimes_t W$ representa la acción de G sobre G/V para cualquier transversal a izquierda $t = \{g_1, \ldots, g_m\}$ de VH en G verificando $W(g_i)(1) = i$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

(Es decir, todo G-conjunto simple se puede obtener como producto tensorial de una extensión proyectiva de un H-conjunto por un G/H-conjunto, o lo que es lo mismo en este caso, por un L-conjunto).

DEMOSTRACIÓN Como $G = HL$ es producto directo, se tiene $L \leq N_G(U)$, donde $U = V \cap H$. Por tanto, $N_G(U)H = G$ y se verifican las hipótesis del

teorema de descomposición de G-conjuntos. Aplicando el teorema, se obtiene el resultado. □

Observación 3.2.16 En algunos casos, el G-conjunto T de la descomposición anterior puede tomarse ordinario. Por ejemplo, si $(\mid H \mid, \mid L \mid) = 1$, el G-conjunto G/VL verifica $(G/VL)_{VH} = VH/V$. Luego basta tomar como T una representación de G/VL. En ese caso, además, la descomposición se reduce a la ya conocida $G/V = G/VL \times G/VH$. □

Bibliografía

[1] M.Aschbacher y R.Guralnick, *Solvable generation of groups and Sylow subgroups of the lower central series*, Journal of Algebra **77**(1982), 189-201.

[2] A.H.Clifford, *Representations induced in an invariant subgroup*, Annals of Mathematics, Vol.**38**, No.3 (1937), 533-550.

[3] C.W.Curtis e I.Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley (New York, 1962)

[4] T.tom Dieck, *Transformation groups and representation theory.* LNM **766** (Berlin-Heidelberg-New York, 1979). Math. Ann.**215** (1975), 235-250.

[5] K.Doerk y T.Hawkes, *Finite soluble groups.* Walter de Gruyter (Berlin-New York, 1992).

[6] A.Dress, *A characterisation of solvable groups*, Math. Z. **110** (1969), 213-217.

[7] A.Dress, *Notes on the theory of finite groups I: The Burnside rings of a finite group and some AGN applications*, multicopied notes, Bielefeld University (1971).

[8] A.Dress, *Operations in representation rings*, Proc. Sympos. Pure Math. **21** (1971), 39-45.

[9] W.Gaschütz, *Gruppen, in denen das normalteirlersein transitiv ist*, Journal für Mathematik. **198** (1957), 87-92.

[10] D.Gluck, *Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplicial complex*, Illinois J.Math. **25** (1981), 63-67.

[11] R.M.Guralnick, *Subgroups inducing the same permutation representation*, Journal of Algebra **81**(1983), 312-319.

[12] T.Hawkes, I.M.Isaacs y M.Özaydin, *On the Möbius Function of a Finite Group*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume **19**, Number 4, Fall (1989), 1003-1033.

[13] I.Martin Isaacs, *Character theory of finite groups*. Academic Press, Inc. (London, 1976).

[14] C.Kratzer y J.Thévenaz, *Fonction de Möbius d'un groupe fini et anneau de Burnside*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 425-438.

[15] D.M.Nicolson, *The orbit of the regular G-set under the full automorphism group of the Burnside ring of a finite group G*, Journal of Algebra **51** (1978), 288-299.

[16] G.Ochoa, *Outer plethysm, Burnside ring and β-rings*, Journal of Pure and Applied Algebra **55** (1988), 173-195.

[17] T.A.Peng, *Pronormality in finite groups*, J.London Math. Soc.(2), **3** (1971), 301-306.

[18] T.A.Peng, *Finite groups with pronormal subgroups*, Proc. Amer .Math. Soc. **20** (1969), 232-244.

[19] D.S.Robinson, *A course in the theory or groups*. Springer-Verlag (New York,1982).

[20] G.C.Rota, *On the foundation of combinatorial theory I. Theory of Möbius Functions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **2** (1964), 340-368.

[21] J.J.Rotman, *An introduction to the theory of groups*. Wm. C Brown Publishers, Dubuque (1988).

[22] L.Solomon, *The Burnside algebra of a finite group*, Journal of Combinatorial Theory **2** (1967), 603-615.

[23] J.Thévenaz, *A characterization of cyclic groups*, Arch. Math., **52** (1989), 209-211.

[24] T.Yoshida, *Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem*, Journal of Algebra **80** (1983), 90-105.