

# FUNCIONES

Mikel CATENA SÁNCHEZ

*ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES EN 3º DE ESPA*

TFM 2019



Facultad de Ciencias Humanas y Sociales  
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL  
PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA



**Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato,  
Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas**

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

**Análisis de las funciones en 3º de ESPA**

Mikel Catena Sanchez

**UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA**

*NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA*



**ÍNDICE**

Introducción general .....	4
Parte I: .....	6
Las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto.....	6
Capítulo 1 Las funciones en el currículo vigente .....	11
1.1. Contenidos en Educación Primaria.....	12
1.2. Contenido en Educación Secundaria Para Adultos.....	13
1.3. Contenido en Bachillerato .....	17
Capítulo 2 Los criterios de evaluación de las funciones en el currículo vigente.....	21
2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria .....	21
2.2. Criterios de evaluación en Educación Secundaria Para Adultos .....	21
2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato .....	25
Capítulo 3 Estándares de aprendizaje evaluables de las funciones en el currículo vigente .....	31
3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria.....	31
3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Secundaria Para Adultos.....	31
3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato.....	36
Capítulo 4 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones en el currículo vigente.....	43
4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el Módulo 1 de la ESPA .....	43
4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el Módulo 2 de la ESPA .....	46
4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el Módulo 3 de la ESPA. ....	49
4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el Módulo 4 de la ESPA .....	52
4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato Científico.....	54
Capítulo 5 Análisis de la relación entre el currículo y los libros de texto.....	59
5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto .....	59
5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo .....	59
Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las .....	61
funciones en 3º de ESPA.....	61
Capítulo 6 Las funciones en el libro de texto de referencia de 3º de ESPA.....	65
6.1. Objetos matemáticos involucrados .....	65
6.2. Análisis global de la unidad didáctica .....	67
Capítulo 7 Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica .	69
7.1. Dificultades .....	69
7.2. Errores y su posible origen .....	70

Capítulo 8 Motivación de la propuesta.....	71
8.1. Motivación en las matemáticas.....	71
8.1.1. Factores influyentes en la motivación del alumno .....	73
8.1.2. Papel del docente como agente motivador .....	76
8.1.3. Modelo de desinterés hacia las matemáticas .....	78
8.2. Resultados académicos en el centro de estudio .....	78
8.3. Flipped Classroom como propuesta de mejora.....	79
8.3.1. ¿Qué es Flipped Classroom? .....	80
8.3.2. Beneficios del Flipped Classroom.....	80
8.3.3. ¿Por qué Flipped Classroom? .....	81
8.4. El uso de TIC en educación como propuesta de mejora.....	82
8.5. Motivos para elegir GeoGebra como herramienta para “Flipped Classroom” en el tema de funciones .....	83
Capítulo 9 Propuesta de mejora.....	85
9.1. Estructura del contenido .....	85
9.1.1. Concepto de función.....	86
9.1.2. Cálculo del valor $f(a)$ dada la función $f(x)$ y el número real “a”.....	90
9.1.3. Obtención de puntos del plano dada una función.....	91
9.1.4. Sistema de coordenadas.....	93
9.1.5. Representación de puntos en el plano .....	95
9.1.6. Representación aproximada de una función dada una tabla de valores ...	98
9.1.7. La función de primer grado: La recta .....	101
9.1.8. Recta que pasa por dos puntos.....	107
9.1.9. Rectas paralelas .....	111
9.1.10. Rectas perpendiculares .....	114
9.1.11. Resolución gráfica y analítica de dos rectas.....	116
Capítulo 10 Experimentación .....	119
10.1. Resultados .....	119
10.2. Necesidad de nuevos análisis de expertos y del posterior uso con estudiantes.	120
Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas .....	123
Síntesis.....	123
Conclusiones.....	123
Cuestiones abiertas .....	124
Referencias .....	125



## **Introducción general**

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo promover una mejora en el rendimiento académico de los alumnos de 3º de Enseñanza Secundaria de Personas Adultas (ESPA) (modalidad a distancia) de un centro de la comarca de Pamplona a través de un cambio de metodología. Este Instituto de Educación Secundaria es conocido por ser un centro dirigido a personas adultas en el que se imparte la Educación Secundaria en régimen presencial y a distancia tutorizada; y el Bachillerato a distancia como centro de referencia para todo el alumnado de la Comunidad de Navarra. De esta manera, se pretende incrementar la motivación por el estudio de las matemáticas y recomendar, en la mejor manera posible, un nuevo estilo de enseñanza del docente para reforzar así su papel de agente motivador.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte, se realiza un estudio longitudinal del currículo y la relación de este último con los libros de texto. Este análisis se centra en el tercer ciclo de Primaria, E.S.O. y Bachillerato. En la segunda parte se realiza una propuesta para el “Tema 4: Funciones” desarrollando una comparativa entre el contenido del libro y un instrumento nuevo generado de applets en GeoGebra que desarrolla dicho contenido. Todo ello, con el objetivo de complementar mediante la metodología “Flipped Classroom” el temario existente y facilitar la comprensión del contenido tanto en cursos presenciales como a distancia.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.



## **Parte I: Las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto**



En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a las funciones en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de matemáticas de 3º de ESPA, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.





## Capítulo 1 Las funciones en el currículo vigente

En esta parte del trabajo se analiza el currículo desde el último curso de primaria, pasando por ESPA, hasta bachillerato; centrándose en todo momento en los contenidos relacionados con las funciones. Es necesario destacar que muchos de los contenidos no aparecen expresamente en el bloque de funciones del currículo educativo, pero si están presentes en otros bloques del currículo.

Los currículos de referencia para la elaboración de esta parte del trabajo son:

- Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra.
- Orden foral 10/2018, de 25 de enero, de la Consejera de Educación, por la que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria para las Personas Adultas en la Comunidad Foral de Navarra.
- Decreto foral 25/2015, de 22 de abril, del Gobierno de Navarra, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra.

Para este análisis se han definido los siguientes descriptores, los cuales han servido de elemento vertebrador del análisis longitudinal del currículo que se realiza a continuación.

Tabla 1. Descriptores del currículo educativo. Fuente: elaboración propia.

C-	DESCRIPTOR
C-1	Álgebra de funciones
C-2	Análisis de funciones
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana
C-4	Proporcionalidad
C-5	Recogida y organización de datos
C-6	Representación gráfica de funciones
C-7	Uso de TIC

El análisis se centra en los tres elementos conformadores del currículo educativo actualmente: “Contenidos”, “Criterios de Evaluación” y “Estándares de Aprendizaje Evaluables”.

### 1.1. Contenidos en Educación Primaria

Tabla 2. Contenidos en Educación Primaria relativo a las funciones. Fuente: DECRETO FORAL 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las Enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra. 5 de septiembre de 2014, núm. 174.

EDUCACIÓN PRIMARIA		
C-	DESCRIPTOR	CONTENIDO
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana	BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Cálculo de tantos por ciento en situaciones reales
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Expresión de partes utilizando porcentajes
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Aumentos y disminuciones porcentuales.
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Proporcionalidad directa
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. La regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa, ley de doble, triple, mitad.
C-5	Recogida y organización de datos	BLOQUE V.- ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos
C-5	Recogida y organización de datos	BLOQUE V.- ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Construcción de tablas de frecuencias
C-6	Representación gráfica de funciones	BLOQUE IV.- GEOMETRÍA. Sistema de coordenadas cartesianas
C-6	Representación gráfica de funciones	BLOQUE IV.- GEOMETRÍA. La representación elemental del espacio, escala y gráficas sencillas.

## 1.2. Contenido en Educación Secundaria Para Adultos

Tabla 3. Contenido en Educación Secundaria Para Adultos relativo a las funciones. Fuente: ORDEN FORAL 10/2018, de 25 de enero, por la que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria para las Personas Adultas en la Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra. 19 de marzo de 2018, núm 55.

EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA ADULTOS					
C-	DESCRIPTOR	MÓDULO 1	MÓDULO 2	MÓDULO 3	MÓDULO 4
C-1	Álgebra de funciones	---	<p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.</p> <p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.</p> <p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (método algebraico y gráfico). Resolución. Interpretación de las soluciones.</p>	<p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y métodos gráfico.</p>	<p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Polinomios: raíces y factorización.</p>
C-2	Análisis de funciones	---	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. El concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.</p>	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. Análisis y descripción cualitativa de graficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.</p>	<p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Resolución de ecuaciones de primer y de segundo grado con una incógnita y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.</p>

				<p><b>BLOQUE III.- FUNCIONES.</b> Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.</p>	
			<p><b>BLOQUE III.- FUNCIONES.</b> Funciones lineales. Obtención de la ecuación a partir de una recta.</p>	<p><b>BLOQUE III.- FUNCIONES.</b> Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.</p>	<p><b>BLOQUE III.- FUNCIONES.</b> La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.</p>
				<p><b>BLOQUE III.- FUNCIONES.</b> Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas.</p>	
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana	---	<p><b>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.</p>	<p><b>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.</p>	<p><b>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.</p>
				<p><b>BLOQUE II.- GEOMETRÍA.</b> Teorema de Tales. Aplicación a la resolución de problemas.</p>	<p><b>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas.</p>

				<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.</p>	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.</p>
			<p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (método algebraico y gráfico). Resolución de problemas.</p>	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.</p>	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales.</p>
					<p>BLOQUE IV.- ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Gráficas estadísticas. Distinto tipo de gráficas. Análisis crítico de tablas y graficas estadísticas en los medios de comunicación.</p>
C-4	Proporcionalidad	<p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.</p>	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta.</p>	<p>BLOQUE II.- GEOMETRÍA. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales.</p>	<p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Proporcionalidad directa e inversa.</p>

					<p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.</p>	<p>BLOQUE I.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.</p>
						<p>BLOQUE II.- GEOMETRÍA. Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.</p>
C-5	Recogida y organización de datos	---	<p>BLOQUE IV.- ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.</p>	<p>BLOQUE IV.- ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos.</p>	---	---
C-6	Representación gráfica de funciones	---	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. Coordenadas cartesianas: representaciones e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenado.</p>	<p>BLOQUE II.- GEOMETRÍA. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.</p>	---	
			<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. Representaciones de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación.</p>	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES. Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica.</p>		
				<p>BLOQUE IV.- ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Gráficas estadísticas.</p>		

C-7	Uso de TIC	---	BLOQUE III.- FUNCIONES. Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.	---	---
-----	------------	-----	--	-----	-----

### 1.3. Contenido en Bachillerato

Tabla 4. Contenido en Bachillerato relativo a las funciones. Fuente: DECRETO FORAL 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra. 2 de julio de 2015, núm 127.

BACHILLERATO					
C-	DESCRIPTOR	1ºBACHILLER CIENCIAS SOCIALES	2ºBACHILLER CIENCIAS SOCIALES	1ºBACHILLER CIENTÍFICO	2ºBACHILLER CIENTÍFICO
C-1	Álgebra de funciones	BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Polinomios. Operaciones. Descomposición en factores.	---	BLOQUE III.- ANÁLISIS. Operaciones y composición de funciones. Función inversa. Funciones de oferta y demanda.	---
C-2	Análisis de funciones	BLOQUE III.- ANÁLISIS. Funciones reales de variable real. Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o gráficas. Características de una función. BLOQUE III.- ANÁLISIS. Identificación de la expresión analítica y grafica de las funciones reales de variable real: polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales e irracionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos.	BLOQUE III.- ANÁLISIS. Continuidad. Tipos de discontinuidad. Estudio de la continuidad en funciones elementales y definidas a trozos.	BLOQUE III.- ANÁLISIS. Concepto de límite de una función en un punto y el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales. Indeterminaciones. BLOQUE III.- ANÁLISIS. Continuidad de una función. Estudio de discontinuadas.	BLOQUE III.- ANÁLISIS. Límite de una función en un punto y en el infinito. Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad. Teorema de Bolzano.

		<p><b>BLOQUE III.- ANÁLISIS.</b> Idea intuitiva de límite de una función en un punto. Cálculo de límites sencillos. El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función. Aplicación al estudio de las asíntotas.</p>	<p><b>BLOQUE III.- ANÁLISIS.</b> Estudio de funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas sencillas a partir de sus propiedades locales y globales.</p>		
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana	<p><b>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS.</b> Práctica del proceso de matematización y modelización, en contextos de la realidad.</p>	<p><b>BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas en contextos reales.</p>	<p><b>BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante ecuaciones o inecuaciones. Interpretación gráfica</p>	<p><b>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS.</b> Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos.</p>
		<p><b>BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Ecuaciones lineales, cuadráticas y reducibles a ellas, exponenciales y logarítmicas. Aplicaciones.</p>	<p><b>BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Resolución de problemas de las ciencias sociales y de la economía.</p>		<p><b>BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas en contextos reales.</p>
		<p><b>BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado con dos incógnitas. Clasificación. Aplicaciones. Interpretación geométrica.</p>	<p><b>BLOQUE III.- ANÁLISIS.</b> Problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía.</p>	<p><b>BLOQUE V.- ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD.</b> Regresión lineal. Estimación. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas.</p>	<p><b>BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas.</p>
		<p><b>BLOQUE II.- NÚMEROS Y ÁLGEBRA.</b> Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas: método de Gauss.</p>			

		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS. Resolución de problemas e interpretación de fenómenos sociales y económicos mediante funciones.</p>			
		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS. Interpolación y extrapolación lineal y cuadrática. Aplicación a problemas reales.</p>			
C-6	Representación gráfica de funciones	---	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS. Representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas sencillas a partir de sus propiedades locales y globales.</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS. Representación gráfica de funciones.</p>	<p>BLOQUE IV.- GEOMETRÍA. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.</p>
C-7	Uso de TIC	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para recogida ordenada y la organización de datos.</p>	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS. Utilización de los medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la recogida ordenada y la organización de datos.</p>	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la recogida ordenada y la organización de datos.</p>	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la recogida ordenada y la organización de datos.</p>
		<p>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos</p>	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS. Utilización de los medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos</p>	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos</p>	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos</p>

		numéricos, funcionales o estadísticos.	numéricos, funcionales o estadísticos.	numéricos, funcionales o estadísticos.	numéricos, funcionales o estadísticos.
		<p><b>BLOQUE I.- PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS.</b>                  Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos tipo numérico, algebraico o estadístico.</p>			

## Capítulo 2 Los criterios de evaluación de las funciones en el currículo vigente

### 2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

Tabla 5. Criterios de Evaluación en Educación Primaria relativos a las funciones. Fuente: DECRETO FORAL 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las Enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra. 5 de septiembre de 2014, núm. 174.

PRIMARIA		
C-	DESCRIPTOR	CRITERIO DE EVALUACIÓN
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana	BLOQUE I: PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones.
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II: NUMEROS Y ÁLGEBRA: 7. Iniciarse en el uso de los porcentajes y la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana.
C-6	Representación gráfica de funciones	BLOQUE IV: GEOMETRÍA: 1. Reconocer los ejes de coordenadas en el plano. Representar pares ordenados en un sistema cartesiano.
		BLOQUE V: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD: 1. Recoger y registrar una información cuantificable, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales. Comunicando la información.

### 2.2. Criterios de evaluación en Educación Secundaria Para Adultos

Tabla 6. Criterios de Evaluación en Educación Secundaria Para Adultos relativos a las funciones. Fuente: ORDEN FORAL 10/2018, de 25 de enero, por la que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria para las Personas Adultas en la Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra. 19 de marzo de 2018, núm 55.

EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA ADULTOS					
C-	DESCRIPTOR	MÓDULO 1	MÓDULO 2	MÓDULO 3	MÓDULO 4
C-1	Álgebra de funciones	---	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 5. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2. Utilizar con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.

			<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.</p>	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.</p>	<p>BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 3. Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando ecuaciones de distintos tipos para resolver problemas.</p>
C-2	Análisis de funciones	---	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.</p>	---	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.</p>
			<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 4. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales o afín, utilizándolas para resolver problemas.</p>		<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.</p>
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana	<p>BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en</p>	<p>BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 6. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o</p>	<p>BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación</p>	---

		situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.	gráficos y contrastando los resultados obtenidos.	algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.	
				BLOQUE III.- FUNCIONES: 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.	
C-4	Proporcionalidad	---	---	BLOQUE II.- GEOMETRIA: 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	BLOQUE II.- GEOMETRIA: 1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.
				BLOQUE II.- GEOMETRIA: 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	BLOQUE II.- GEOMETRIA: 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y

					aplicando las unidades de medida
C-5	Recogida y organización de datos	---	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.</p>	---	---
C-6	Representación gráfica de funciones	---	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.</p>	<p>BLOQUE II.- GEOMETRIA: 5. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.</p>	---

			<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.</p>	
			<p>BLOQUE IV.- ESTADISTICA Y PROBABILIDAD: 1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.</p>	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.</p>

### 2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Tabla 7. Criterios de Evaluación en Bachillerato relativos a las funciones: Fuente: DECRETO FORAL 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra. 2 de julio de 2015, núm 127.

BACHILLERATO					
C-	DESCRIPTOR	1ºBACHILLER CIENCIAS SOCIALES	2ºBACHILLER CIENCIAS SOCIALES	1ºBACHILLER CIENTÍFICO	2ºBACHILLER CIENTÍFICO
C-1	Álgebra de funciones	---	---	---	BLOQUE IV: GEOMETRÍA: 2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos

					utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.
C-2	Análisis de funciones	<p><b>BLOQUE III:</b> <b>ANÁLISIS: 2.</b> Interpolar y extrapolar valores de funciones a partir de tablas y conocer la utilidad en casos reales.</p>	<p><b>BLOQUE III:</b> <b>ANÁLISIS: 1.</b> Analizar e interpretar fenómenos habituales de las ciencias sociales de manera objetiva traduciendo la información al lenguaje de las funciones y describiéndolo mediante el estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.</p>	<p><b>BLOQUE II:</b> <b>NUMEROS Y ÁLGEBRA: 4.</b> Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando recursos algebraicos (ecuaciones, inecuaciones y sistemas) e interpretando críticamente los resultados.</p>	<p><b>BLOQUE III:</b> <b>ANÁLISIS: 1.</b> Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello.</p>
		<p><b>BLOQUE III:</b> <b>ANÁLISIS: 3.</b> Calcular límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias.</p>		<p><b>BLOQUE III:</b> <b>ANÁLISIS: 1.</b> Identificar funciones elementales, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente, sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan.</p>	
				<p><b>BLOQUE III:</b> <b>ANÁLISIS: 2.</b> Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.</p>	

		<p><b>BLOQUE III: ANÁLISIS: 4.</b>                  Conocer el concepto de continuidad y estudiar la continuidad en un punto en funciones polinómicas, racionales, logarítmicas y exponenciales.</p>		<p><b>BLOQUE III: ANÁLISIS: 4.</b>                  Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.</p>	
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana	<p><b>BLOQUE I: PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 7.</b>                  Desarrolla procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.</p> <p><b>BLOQUE II: NUMEROS Y ÁLGEBRA: 3.</b>                  Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico situaciones relativas a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas y herramientas tecnológicas apropiadas para resolver problemas</p>	<p><b>BLOQUE I: PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 7.</b>                  Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.</p>	<p><b>BLOQUE I: PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 8.</b>                  Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.</p>	<p><b>BLOQUE I: PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 8.</b>                  Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.</p> <p><b>BLOQUE II: NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.</b>                  Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de</p>

		reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas en contextos particulares.			ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.
			<p><b>BLOQUE II: NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.</b>                  Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas:                  matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.</p>		
C-6	Representación gráfica de funciones	<p><b>BLOQUE III: ANÁLISIS: 1.</b>                  Interpretar y representar gráficas de funciones reales teniendo en cuenta sus características y su relación con fenómenos sociales.</p>	---	<p><b>BLOQUE III: ANÁLISIS: 1.</b>                  Identificar funciones elementales, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente, sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan.</p> <p><b>BLOQUE III: ANÁLISIS: 4.</b>                  Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.</p>	---

C-7	Uso de TIC	<p>BLOQUE I: PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 12. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.</p>	---	<p>BLOQUE I: PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.</p>	<p>BLOQUE I: PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.</p>
-----	------------	--	-----	--	--



## Capítulo 3 Estándares de aprendizaje evaluables de las funciones en el currículo vigente

### 3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

Tabla 8. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria relativos a las funciones. Fuente: DECRETO FORAL 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las Enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra. 5 de septiembre de 2014, núm. 174.

PRIMARIA		
C-	DESCRIPTOR	ESTÁNDAR
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana	BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales.
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 7.2. Calcula el porcentaje (%) que representa una parte de una cantidad dada.
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 7.3. Calcula el porcentaje de una cantidad.
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 7.4. Calcula aumentos y disminuciones porcentuales.
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 7.5. Aplica de forma correcta a regla de tres.
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 7.6. Calcula mentalmente porcentajes sencillos.
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 9.2. Plantea y resuelve problemas aritméticos de tercer nivel (datos en números decimales, fraccionarios y porcentajes y proporcionalidad directa).
C-5	Recogida y organización de datos	BLOQUE V.- ESTADISTICA Y PROBABILIDAD: 1.2. Recoge y clasifica los datos y Construye tablas de frecuencias absolutas.
C-7	Uso de TIC	BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 12.1. Utiliza herramientas tecnológicas para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas.
C-7	Uso de TIC	BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 7.7. Calcula, utilizando la tecla % de la calculadora, un porcentaje, un aumento y una disminución porcentual.

### 3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Secundaria Para Adultos

Tabla 9. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Secundaria Para Adultos relativos a las funciones. Fuente: ORDEN FORAL 10/2018, de 25 de enero, por la que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria para las Personas Adultas en la Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra. 19 de marzo de 2018, núm 55.

EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA ADULTOS					
C-	DESCRIPTOR	MÓDULO 1	MÓDULO 2	MÓDULO 3	MÓDULO 4
C-1	Álgebra de funciones	---	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 6.1. Comprueba, dada una ecuación, si un número (o números) es (son) solución de la misma.  BLOQUE III.- FUNCIONES: 2.1. Pasa de unas	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado.	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.2. Realiza operaciones de suma, resta, producto y división de polinomios y utiliza identidades notables.  BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.3.

			formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.		Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza, mediante la aplicación de la regla de Ruffini.
			BLOQUE III.- FUNCIONES: 4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal o afín existente entre dos magnitudes y la representa.		
C-2	Análisis de funciones	---	BLOQUE III.- FUNCIONES: 4.1. Reconoce y representa una función lineal o afín a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.	BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.
				BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.	BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional, asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
				BLOQUE III.- FUNCIONES: 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.	BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.3. Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad).
				BLOQUE III.- FUNCIONES: 4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir	BLOQUE III.- FUNCIONES: 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del

			de la gráfica o tabla de valores.	fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.	un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores.
					BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.
					BLOQUE III.- FUNCIONES: 2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.
				BLOQUE III.- FUNCIONES: 3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.	BLOQUE III.- FUNCIONES: 2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos.
					BLOQUE III.- FUNCIONES: 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión.
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana	---	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 5.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.1. Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana.	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 1.7. Resuelve problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directa e

			variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.		inversamente proporcionales.
			BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 6.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer grado las resuelve e interpreta el resultado obtenido.	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 3.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 3.1. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.
			BLOQUE III.- FUNCIONES: 3.3. Describe una situación a partir de la tabla o gráfica que la modeliza.	BLOQUE II.- GEOMETRÍA: 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.	
			BLOQUE III.- FUNCIONES: 3.4. Compara diferentes situaciones a partir de las tablas o gráficas que las modelizan.	BLOQUE III.- FUNCIONES: 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. BLOQUE III.- FUNCIONES: 3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.	BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, y exponenciales.
C-4	Proporcionalidad	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad	---	BLOQUE II.- GEOMETRÍA: 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para	BLOQUE I.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 1.6. Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos

		numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.		el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.	y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera.
					BLOQUE II.- GEOMETRIA: 1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos
				BLOQUE II.- GEOMETRÍA: 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.	BLOQUE II.- GEOMETRIA: 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.
					BLOQUE II.- GEOMETRIA: 2.4. Calcula medidas indirectas de longitud, área y volumen mediante la aplicación del teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos.
C-5	Recogida y organización de datos	---	BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función.	BLOQUE II.- GEOMETRÍA: 5.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.	BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial.
			BLOQUE III.- FUNCIONES: 3.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función.	BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.	BLOQUE III.- FUNCIONES: 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.
			BLOQUE III.- FUNCIONES: 3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus	BLOQUE III.- FUNCIONES: 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas	

			propiedades más características.	a funciones dadas gráficamente.	
C-6	Representación gráfica de funciones	---	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 4.1. Reconoce y representa una función lineal o afín a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.</p> <p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal o afín existente entre dos magnitudes y la representa.</p>	<p>BLOQUE III.- FUNCIONES: 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.</p>	---

### 3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato

Tabla 10. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato. Fuente: DECRETO FORAL 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra. Boletín Oficial de Navarra. 2 de julio de 2015, núm 127.

BACHILLERATO					
C-	DESCRIPTOR	1ºBACHILLER CIENCIAS SOCIALES	2ºBACHILLER CIENCIAS SOCIALES	1ºBACHILLER CIENTÍFICO	2ºBACHILLER CIENTÍFICO
C-1	Álgebra de funciones	---	---	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 6.1. Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.</p>	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 6.1. Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.</p> <p>BLOQUE IV.- GEOMETRÍA: 2.1. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y</p>

					<p>resolviendo los problemas afines entre rectas.</p> <p>BLOQUE IV.- GEOMETRÍA: 2.2. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente.</p> <p>BLOQUE IV.- GEOMETRÍA: 2.4. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones</p>	
C-2	Análisis de funciones	<p>BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 3.3. Realiza una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos y los expone con claridad.</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.2. Calcula las asíntotas de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas.</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.1. Reconoce analítica y gráficamente las funciones reales de variable real elementales.</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.1. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.</p>	
		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.1. Analiza funciones expresadas en forma algebraica, por medio de tablas o gráficamente, y las relaciona con fenómenos cotidianos, económicos, sociales y científicos extrayendo y replicando modelos.</p>		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.3. Interpreta las propiedades globales y locales de las funciones, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados.</p>		
		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 2.1. Obtiene valores desconocidos mediante interpolación o extrapolación a partir de tablas o datos y los interpreta en un contexto.</p>		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.4. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones en contextos reales.</p>		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.</p>
		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 3.1. Calcula límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias de una función.</p>		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 2.1. Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones.</p>		

		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 3.2. Calcula, representa e interpreta las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales.</p>		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 2.2. Determina la continuidad de la función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función, para extraer conclusiones en situaciones reales.</p>	
		<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 4.1. Examina, analiza y determina la continuidad de la función en un punto para extraer conclusiones en situaciones reales.</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.3. Estudia la continuidad en un punto de una función elemental o definida a trozos utilizando el concepto de límite.</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 2.3. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 4.1. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.</p>
				<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 3.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.</p>	<p>BLOQUE IV.- GEOMETRÍA: 2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.</p>
				<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 3.3. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.</p>	
C-3	Modelización de situaciones de la vida cotidiana	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 7.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.</p>	<p>BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.1. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, el sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales.</p>	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 6.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; tecnologías y matemáticas, ciencias experimentales y matemáticas, economía y matemáticas, etc.) y entre contextos</p>	<p>BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.4. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.</p>

			matemáticos (numéricos y geométricos, geométricos y funcionales, geométricos y probabilísticos, discretos y continuos, finitos e infinitos, etc.).	
	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 7.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.</p>	<p>BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 2.2. Aplica las técnicas gráficas de programación lineal bidimensional para resolver problemas de optimización de funciones lineales que están sujetas a restricciones e interpreta los resultados obtenidos en el contexto del problema.</p>		
	<p>BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 7.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.1. Modeliza con ayuda de funciones problemas planteados en las ciencias sociales y los describe mediante el estudio de la continuidad, tendencias, ramas infinitas, corte con los ejes, etc.</p>	<p>BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 4.1. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica un sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve, mediante el método de Gauss, en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.</p>
	<p>BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 3.1. Utiliza de manera eficaz el lenguaje algebraico para representar situaciones planteadas en contextos reales.</p>			
	<p>BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 3.2. Resuelve problemas relativos a las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones.</p>	<p>BLOQUE III.- ANÁLISIS: 2.1. Representa funciones y obtiene la expresión algebraica a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales y</p>		

			extrae conclusiones en problemas derivados de situaciones reales.		
		BLOQUE III.- ANÁLISIS: 5.1. Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geoméricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real.	BLOQUE III.- ANÁLISIS: 2.2. Plantea problemas de optimización sobre fenómenos relacionados con las ciencias sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.	BLOQUE II.- NUMEROS Y ÁLGEBRA: 4.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones (algebraicas y no algebraicas) e inecuaciones (primer y segundo grado), e interpreta los resultados en el contexto del problema.	
C-5	Recogida y organización de datos	BLOQUE IV.- ESTADISTICA Y PROBABILIDAD: 1.1. Elabora e interpreta tablas bidimensionales de frecuencias a partir de los datos de un estudio estadístico, con variables discretas y continuas.	---	---	---
C-6	Representación gráfica de funciones	BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 12.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.	---	BLOQUE III.- ANALISIS: 1.2. Selecciona de manera adecuada y razonada ejes, unidades, dominio y escalas, y reconoce e identifica los errores de interpretación derivados de una mala elección.	BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 13.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.
		BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.2. Selecciona de manera adecuada y razonadamente ejes, unidades y escalas reconociendo e identificando los errores de interpretación derivados de una mala elección, para realizar		BLOQUE III.- ANALISIS: 4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.	

		representaciones gráficas de funciones.			
C-7	Uso de TIC	BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 12.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.	---	BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 13.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.	BLOQUE I.- PROCESOS, METODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS: 13.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.
		BLOQUE III.- ANÁLISIS: 1.3. Estudia e interpreta gráficamente las características de una función comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados.		BLOQUE III.- ANALISIS: 4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.	BLOQUE III.- ANALISIS: 4.2. Utiliza los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de áreas de recintos limitados por funciones conocidas.



## Capítulo 4 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones en el currículo vigente

En este apartado se muestran y analizan ejercicios, problemas y cuestiones más representativos relacionados con las funciones que se presentan en los libros de texto de 3º de ESPA. Por tanto, este análisis abarca los dos cursos previos y posteriores al curso de referencia: desde el Módulo 1 de ESPA hasta 1º Bachiller Científico. El objetivo es ver en qué forma los contenidos y criterios de evaluación establecidos en los currículos oficiales se materializan en los libros de texto. Aunque los contenidos que se desarrollan en los temas de funciones se introducen antes en otros temas, este apartado está centrado en los ejercicios que aparecen como “propuestos” al final del “Tema 4: Funciones” del libro utilizado en 3º de ESPA.

Como ya se ha mencionado anteriormente, las prácticas se realizaron en el centro para adultos donde se utilizan libros de texto editados por el propio instituto. Los títulos de los libros son los siguientes:

- Matemáticas E.S.P.A. Módulo I y II.
- Matemáticas E.S.P.A Módulo III y I.
- Matemáticas I Bachillerato Científico.

El análisis está desarrollado sobre los libros citados.

### 4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el Módulo 1 de la ESPA

En esta primera mitad del libro no aparece el tema de “Funciones” expresamente, pero si aparece el “Tema 1.7: Proporcionalidad”. Es necesario decir que, siendo la proporcionalidad el eje vertebrador de la educación secundaria, los temas de “Divisibilidad”, “Sistema métrico decimal” y “Sistema hexagesimal” sirven de base para la comprensión de las funciones.

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Este tipo de ejercicios tienen como objetivo trabajar la razón de proporcionalidad.				
Ejemplos:				
<p>1.- Calcula el valor desconocido en cada caso:</p> <p style="text-align: center;">           a) <math>\frac{4}{10} = \frac{6}{x}</math>                      b) <math>\frac{9}{15} = \frac{x}{35}</math>                      c) <math>\frac{30}{45} = \frac{x}{39}</math> </p>				
<p><i>Figura 1. Ejercicio del Tema 1.7: Proporcionalidad relativo a las funciones del libro de texto del Módulo I de ESPA. Fuente: Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). Matemáticas ESPA. Módulos I y II. España: Sahats.</i></p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
<p>Descripción: Este tipo de problemas tienen como objetivo trabajar las magnitudes directa e inversamente proporcionales en contextos reales. En algunos problemas se hace referencia a la regularidad (p.e. en el 3): “si se sigue al mismo ritmo”) y en otros no (p.e. en el 4): donde no se indica que todos los alpinistas comerán la misma ración sin excepción).</p>				
<p>Ejemplos:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>3.- Un corredor da 3 vueltas a una pista polideportiva en 12 minutos. Si sigue al mismo ritmo, ¿Cuánto tardará en dar 5 vueltas?</p> <p>4.- En una expedición al Annapurna, 8 alpinistas llevan alimentos para 15 días. Después dos participantes se ponen enfermos y no pueden ir. ¿Para cuántos días tendrán alimentos los que quedan? ¿Y si ahora se unen otros 4 alpinistas al grupo?</p> <p>5.- Diez obreros construyen un dique en 8 días. ¿Cuánto tiempo invertirán en el mismo trabajo 16 obreros?</p> <p>6.- Un taller de confección, si trabajan 8 horas diarias, tarda 5 días en servir un pedido. ¿Cuánto tardará en servir el pedido si se trabajan 10 horas diarias?</p> <p>7.- Las veinte vacas de una granja consumen una carga de alfalfa en 12 días. ¿Cuánto durará la carga de alfalfa si el número de vacas aumenta a 30?</p> <p>8.- La calefacción de un colegio tiene un depósito de combustible que dura 24 días funcionando durante 4 horas al día. ¿Cuánto duraría el combustible si funcionase 6 horas al día?</p> </div> <p><i>Figura 2. Problemas del Tema 1.7: Proporcionalidad relativo a las funciones del libro de texto del Módulo I de ESPA. Fuente: Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). Matemáticas ESPA. Módulos I y II. España: Sahats.</i></p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
<p>Descripción: Este tipo de problemas tienen como objetivo trabajar los repartos proporcionales en contextos reales. En el ejercicio 34, se tiene como objetivo el reparto correspondiente del premio obtenido, sin embargo, el alumno podría decidir repartir a partes iguales el premio. En el ejercicio 37 ocurre lo mismo, se podría realizar a partes iguales el reparto, pero el objetivo es realizarlo correspondiente a la edad.</p>				
<p>Ejemplos:</p>				
<p>34.- Cuatro amigos: Rafa, Rosario, Luis y Mariví aportan respectivamente 10, 8, 7 y 5 € para comprar un décimo de lotería que vale 30 €. Afortunadamente el décimo resulta premiado con 600000 €. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?</p> <p>35.- Tres carpinteros se encargan de hacer las puertas blindadas para un edificio en construcción. El primero hace 10 puertas, el segundo 9 y el tercero 6. Por todo el trabajo han cobrado 20000 €. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno? ¿Cuánto vale cada puerta?</p> <p>36.- En una urbanización el precio de los pisos es proporcional a la superficie que tienen. Si un piso de 85 m<sup>2</sup> cuesta 180200 €. Calcula el precio de los pisos que tienen las siguientes medidas: 100 m<sup>2</sup>, 96 m<sup>2</sup> y 67 m<sup>2</sup>.</p> <p>37.- Un padre reparte cada semana 132 € entre sus tres hijos de 12, 15 y 17 años de edad, proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?</p> <p>38.- Tres obreros han recibido por un trabajo 2700 €. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si todos cobran el mismo salario y el primero ha trabajado 5 días, el segundo 9 días y el tercero 13 días?</p>				
<p>Figura 3. Problemas del Tema 1.7: Proporcionalidad relativo a las funciones del libro de texto del Módulo I de ESPA. Fuente: Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). Matemáticas ESPA. Módulos I y II. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
<p>Descripción: Este tipo de problemas tienen como objetivo trabajar los porcentajes.</p>				
<p>Ejemplos:</p>				
<p>28.- A Mario le van a subir este año su pensión de jubilación 18 € al mes. Calcula el % de subida que le van a aplicar sabiendo que su pensión actual es de 500 €.</p> <p>29.- Un vendedor de libros gana el 8% del importe de las ventas que realiza. ¿A cuánto asciende la venta realizada si gana 240 €?</p> <p>30.- En un colegio el 75% del papel que se usa es reciclado. Si un día se han usado 260 folios no reciclados. ¿Cuánto papel se ha gastado?</p> <p>31.- El salario medio mensual es de 1450 €. ¿Qué % habrá ahorrado un ciudadano si tiene 150 € a fin de mes?</p> <p>32.- Se amplía un original al 132%. ¿Cuánto medirá el ancho del original si en la fotocopia mide 20 cm?</p>				
<p>Figura 4. Problemas del Tema 1.7: Proporcionalidad relativo a las funciones del libro de texto del Módulo I de ESPA. Fuente: Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). Matemáticas ESPA. Módulos I y II. España: Sahats.</p>				

En este curso se han localizado cuatro actividades tipo, donde a excepción de uno, el resto han sido calificados como problemas. Todos ellos cumplen con el contenido y los criterios de evaluación que establece el currículo del Módulo 1 de la ESPA.

**4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el Módulo 2 de la ESPA**

En esta segunda mitad del libro aparece el tema de “Funciones” expresamente, pero antes se trabajan varios contenidos enfocados a las “Fracciones” y “Ecuaciones”. Tras el tema de “Funciones” en el tema de “Estadística” también se trabaja la organización de datos y la representación gráfica a través de datos representados en tablas. Los ejercicios tipo relacionados con el tema de “Funciones” son:

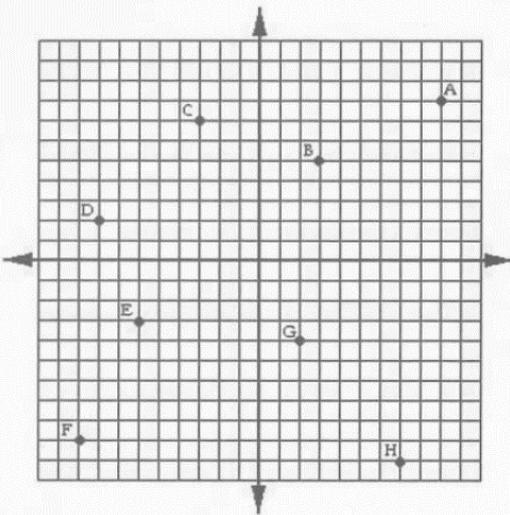
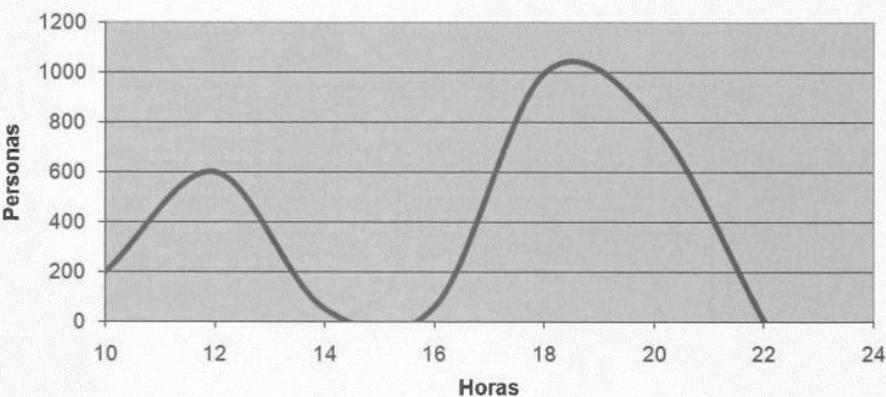
Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación																		
Descripción: Se trabajan las coordenadas cartesianas con puntos distribuidos en los cuatro cuadrantes. Por otro lado, se trabaja asignar coordenadas cartesianas a puntos representados.																						
Ejemplos:																						
1.-Sitúa los siguientes puntos en un eje de coordenadas: A (-1, 0), B (-3, -2), C (4, -2), D (5, -1), E (0, -1), F (-4, -3), G (2, 0), H (3, 5), I (-2, -5), J (5, -3)																						
2.-A partir de la representación gráfica completa la tabla:																						
			<table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;">Punto</th> <th style="width: 10%;">Coordenadas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>A</td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td></tr> <tr><td>C</td><td></td></tr> <tr><td>D</td><td></td></tr> <tr><td>E</td><td></td></tr> <tr><td>F</td><td></td></tr> <tr><td>G</td><td></td></tr> <tr><td>H</td><td></td></tr> </tbody> </table>		Punto	Coordenadas	A		B		C		D		E		F		G		H	
Punto	Coordenadas																					
A																						
B																						
C																						
D																						
E																						
F																						
G																						
H																						
3.- Representa los siguientes puntos en un eje de coordenadas A (2, 0), B (-3, -2), C (-1, 0), D (0, 4), E (-1, -2), F (0, -2), G(3, -2)																						

Figura 5. Ejercicios del Tema 2.6: Funciones relativo a las funciones del libro de texto del Módulo II de ESPA. Fuente: Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). Matemáticas ESPA. Módulos I y II. España: Sahats.

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación																																
Descripción: El objetivo de este ejercicio es la representación gráfica de una función a través de una tabla de valores.																																				
Ejemplos:																																				
<p>5.-Representa los siguientes datos en una gráfica</p> <p>a) Variación del peso de un niño durante su primer año de vida</p> <table border="1"> <tr> <td>Meses</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>10</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>Kilos</td> <td>3</td> <td>4,7</td> <td>6,7</td> <td>8</td> <td>8,9</td> <td>9,7</td> <td>10,3</td> </tr> </table> <p>b) Enfriamiento de un vaso de leche caliente cuando va pasando el tiempo</p> <table border="1"> <tr> <td>Tiempo (min)</td> <td>0</td> <td>5</td> <td>10</td> <td>15</td> <td>20</td> <td>25</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>Temperatura (grados)</td> <td>80</td> <td>68</td> <td>58</td> <td>50</td> <td>41</td> <td>32</td> <td>24</td> </tr> </table>					Meses	0	2	4	6	8	10	12	Kilos	3	4,7	6,7	8	8,9	9,7	10,3	Tiempo (min)	0	5	10	15	20	25	30	Temperatura (grados)	80	68	58	50	41	32	24
Meses	0	2	4	6	8	10	12																													
Kilos	3	4,7	6,7	8	8,9	9,7	10,3																													
Tiempo (min)	0	5	10	15	20	25	30																													
Temperatura (grados)	80	68	58	50	41	32	24																													
<p>Figura 6. Ejercicio del Tema 2.6: Funciones relativo a las funciones del libro de texto del Módulo II de ESPA. Fuente: Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). Matemáticas ESPA. Módulos I y II. España: Sahats.</p>																																				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de este ejercicio es la representación gráfica de la recta a través de su expresión analítica.				
Ejemplos:				
<p>6.-Representa las siguientes rectas:</p> <p>a) <math>y = 2</math></p> <p>b) <math>y = -2</math></p> <p>c) <math>y = x</math></p> <p>d) <math>y = 2x - 1</math></p> <p>e) <math>y = -2x - 1</math></p>				
<p>Figura 7. Ejercicio del Tema 2.6: Funciones relativo a las funciones del libro de texto del Módulo II de ESPA. Fuente: Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). Matemáticas ESPA. Módulos I y II. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
<p>Descripción: El objetivo de este ejercicio traducir expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. La dificultad de este problema reside en la comprensión del enunciado por parte del alumno y existe el riesgo de que el alumno no logre entender la diferencia entre ambas máquinas.</p>				
<p>Ejemplos:</p> <p>16.- En el instituto hay una fotocopidora donde cada fotocopia sale a 0,05 euros. También hay una multcopista que necesita un cliché electrónico para poder hacer las copias, que vale 0,60 euros; el papel para cada copia cuesta 0,01 euros. Resuelve estas cuestiones:</p> <p>a) Halla la ecuación que permite calcular el valor de las copias que hacemos en cada máquina.</p> <p>b) Construye las tablas de valores del coste de 10, 20, 30 y 50 copias en cada una.</p> <p>c) Representálas gráficamente.</p> <p>d) ¿Cuándo es más rentable la multcopista? ¿Cuándo da igual utilizar una que otra porque cuesta el mismo dinero?</p>				
<p>Figura 8. Problema del Tema 2.6: Funciones relativo a las funciones del libro de texto del Módulo II de ESPA. Fuente: Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). Matemáticas ESPA. Módulos I y II. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
<p>Descripción: El objetivo de este tipo de ejercicios es interpretar a través de una gráfica el comportamiento de la aplicación. En él se relacionan los valles y picos de las gráficas con los valores mínimos y máximos de una función.</p>				
<p>Ejemplos:</p> <p>22.- El supermercado "EROSKI" no cierra a medio día y quiere saber si eso es rentable. Para ello, ha realizado la gráfica que representa la afluencia de público un día de la semana, resultando ésta:</p>  <p>a) ¿Es rentable para Eroski abrir al mediodía?</p> <p>b) ¿Cuáles son las horas de más afluencia de personas (máximos)?</p> <p>c) ¿Cuáles son las horas de menos afluencia de personas (mínimos)?</p> <p>d) ¿En qué tramos la gráfica es creciente? ¿Y decreciente?</p>				
<p>Figura 9. Problema del Tema 2.6: Funciones relativo a las funciones del libro de texto del Módulo II de ESPA. Fuente: Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). Matemáticas ESPA. Módulos I y II. España: Sahats.</p>				

En este Módulo 2 se encuentran todos los contenidos que refleja el currículo, a excepción de ejercicios referidos al uso de TIC y a ejercicios de obtención de la ecuación a través de la expresión gráfica.

### 4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el Módulo 3 de la ESPA

En la primera mitad del libro de este módulo aparece el tema de “Funciones: La recta”, pero antes se trabajan las ecuaciones algebraicas con el objetivo de afianzar los contenidos de las funciones. Los ejercicios tipo referentes a las funciones en la primera parte del libro Matemáticas E.S.P.A. Módulo III y IV son:

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de este ejercicio es trabajar el concepto teórico de función donde asigna a un conjunto real de números otro conjunto real.				
Ejemplos:				
1.-Dada la función $f(x) = 2x$ , calcula $f(2)$ , $f(-2)$ , $f(3)$ y $f(0)$ .				
2.-Dada la función $f(x) = 3x + 1$ , calcula $f(1)$ , $f(2)$ , $f(-2)$ y $f(0)$ .				
3.-Dada la función $f(x) = -x - 2$ , calcula $f(5)$ , $f(-1)$ , $f(2)$ y $f(4)$ .				
4.-Dada la función $f(x) = x - 2$ , calcula $f(2)$ , $f(0)$ y $f(-2)$ .				
5.-Dada la función $f(x) = 6x$ , calcula $f(0)$ , $f(-1)$ y $f(-2)$ .				
6.-Dada la función $f(x) = 5$ , calcula $f(1)$ , $f(2)$ y $f(0)$ .				
<p><i>Figura 10. Ejercicios del Tema 4: Funciones: La recta relativo a las funciones del libro de texto del Módulo III de ESPA. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.</i></p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación														
Descripción: El objetivo de este ejercicio es la representación aproximada de una función a través de los datos organizados en tablas.																		
Ejemplos:																		
7.-Representa la gráfica de la función a la que corresponde la siguiente tabla de valores:																		
a)																		
<table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>-1</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	x	0	1	2	3	-1	-2	y	3	4	5	6	2	1				
x	0	1	2	3	-1	-2												
y	3	4	5	6	2	1												
b)																		
<table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>-1</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>-1</td><td>-3</td></tr></table>	x	0	1	2	3	-1	-2	y	1	3	5	7	-1	-3				
x	0	1	2	3	-1	-2												
y	1	3	5	7	-1	-3												
c)																		
<table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>-1</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>	x	0	1	2	3	-1	-2	y	0	1	4	9	1	4				
x	0	1	2	3	-1	-2												
y	0	1	4	9	1	4												
Figura 11. Ejercicio del Tema 4: Funciones: La recta relativo a las funciones del libro de texto del Módulo III de ESPA. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.																		

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: Similar al ejercicio anterior el objetivo de este tipo de ejercicios es la representación de la recta a través de su expresión analítica.				
Ejemplos:				
8.-Representa gráficamente las siguientes rectas:				
a) $y=2x$ b) $y=-3x$ c) $y=x+4$ d) $y=-2x+1$ e) $y=3x-2$ f) $y=-x+3$ g) $y=-3x+1$				
h) $y=4x+1$ i) $y=-2x-2$ j) $y=-3x+5$ k) $y=x/2$ l) $y=-x/2$ m) $y=x/3$ n) $y=-x/3$				
o) $2y=-2x+4$ p) $2y=x+3$ q) $y=-2x+1$ r) $3y=-6x$ s) $x+y-1=0$ t) $x=2$ u) $y=3$				
Figura 12. Ejercicio del Tema 4: Funciones: La recta relativo a las funciones del libro de texto del Módulo III de ESPA. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de estos ejercicios es calcular la expresión analítica de una recta que pasa por dos puntos.				
Ejemplos:				
<p>13.-Calcula la ecuación de la recta que pasa por P(2,3) y por Q(3,-1).</p> <p>14.-Calcula la ecuación de la recta que pasa por P(-2,1) y por Q(0,3).</p> <p>15.-Calcula la ecuación de la recta que pasa por P(-2,1) y su pendiente es 3.</p> <p>16.-Calcula la ecuación de la recta que pasa por P(2,3) y su ordenada en el origen es -2.</p>				
<p>Figura 13. Ejercicios del Tema 4: Funciones: La recta relativo a las funciones del libro de texto del Módulo III de ESPA. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de este tipo de ejercicios es trabajar el cálculo de la expresión analítica de una recta paralela o perpendicular a otra.				
Ejemplos:				
<p>11.-Dada la recta de ecuación <math>y = 3x + 8</math>, se pide:</p> <p>a) Ecuación de la recta paralela a la dada que pasa por el punto (-2, 3).</p> <p>b) Ecuación de la recta que pasa por el punto (-3,0) y es perpendicular a la dada.</p> <p>12.-Dada la recta <math>\frac{x+5}{2} = y - 2</math>. Calcula la ecuación de la recta paralela a la dada que pasa por el punto (-1,5).</p>				
<p>Figura 14. Ejercicios del Tema 4: Funciones: La recta relativo a las funciones del libro de texto del Módulo III de ESPA. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de este tipo de ejercicios es dar un significado gráfico a la resolución de sistemas a través de la resolución y analítica de dos rectas.				
Ejemplos:				
<p>9.-Resuelve gráfica y analíticamente:</p> <p>a) <math>\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}</math>      b) <math>\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}</math>      c) <math>\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 5x - y = -1 \end{cases}</math>      d) <math>\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}</math></p> <p>e) <math>\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - 2x + 2 = 0 \end{cases}</math>      f) <math>\begin{cases} 3y + 8x - 1 = 0 \\ y = 5 - 2x \end{cases}</math>      g) <math>\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + y = -2 \end{cases}</math>      h) <math>\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 4x + y = 14 \end{cases}</math></p>				
<p>Figura 15. Ejercicio del Tema 4: Funciones: La recta relativo a las funciones del libro de texto del Módulo III de ESPA. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.</p>				

En los ejercicios de este módulo, destacan las representaciones de la recta, ya sea su expresión analítica o su representación gráfica a partir de la tabla de valores. Además, se observa la existencia de ejercicios tipo como el de resolución de sistemas de ecuaciones (ya sea gráficamente o analíticamente) o el cálculo de rectas definidas por dos puntos.

Por otro lado, destacan las ausencias referidas a la interpretación de gráficas relacionadas con fenómenos cotidianos, así como el concepto genérico y representación de funciones cuadráticas.

#### 4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el Módulo 4 de la ESPA

En la segunda parte del libro aparece el “Tema 8: Otras funciones”, pero también se trabajan conceptos relacionados con las funciones con otros temas: “Ecuaciones de segundo grado”, “Trigonometría” y “Estadística discreta”.

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de este tipo de ejercicio es trabajar la representación gráfica de las funciones cuadráticas, exponenciales, racionales y otros tipos.				
Ejemplos:				
<p>1.-Representa las siguientes parábolas:</p> <p>a) <math>y = -2x^2 + 5x - 1</math>   b) <math>y = 2x^2 - 8x + 2</math>   c) <math>y = x^2 - 10x + 21</math>  d) <math>y = x^2 + 6x - 4</math>   e) <math>y = x^2 + 3x + 2</math>   f) <math>y = (x - 3)^2</math></p> <p>2.- Representa las siguientes parábolas y halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas:</p> <p>a) <math>y = x^2 - 4</math>   b) <math>y = 2x^2 - 8</math>   c) <math>y = x^2 + 6x - 4</math>   d) <math>y = x^2 + 9</math></p> <p>4.-Representa las siguientes funciones racionales:</p> <p>a) <math>f(x) = \frac{2x+3}{2x-8}</math>   b) <math>f(x) = \frac{6x}{3x-9}</math>   c) <math>f(x) = \frac{-5}{2x-1}</math>   d) <math>f(x) = \frac{3x+1}{x+3}</math></p> <p>5.-Representa las siguientes funciones exponenciales:</p> <p>a) <math>f(x) = 5^x</math>   b) <math>f(x) = 2^{x+1}</math>   c) <math>f(x) = 3 \cdot 7^x</math>   d) <math>f(x) = \frac{11^x}{2}</math></p> <p>6.-Representa las siguientes funciones radicales:</p> <p>a) <math>f(x) = \sqrt{3x-6}</math>   b) <math>f(x) = \sqrt{x-1}</math>   c) <math>f(x) = \sqrt{5x}</math>   d) <math>f(x) = \sqrt{2x+3}</math></p>				
<p>Figura 16. Ejercicio del Tema 8: Otras funciones relativo a las funciones del libro de texto del Módulo IV de ESPA. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de estos ejercicios es trabajar los puntos de corte con el eje de coordenadas de la función de manera analítica.				
Ejemplos:				
<p>9.-Obtén los puntos de corte con los ejes de coordenadas de:</p> <p>a) <math>f(x) = \frac{x+1}{x+2}</math>   b) <math>f(x) = \sqrt{2x-1}</math>   c) <math>f(x) = 3^{x-2}</math>   d) <math>f(x) = x^2 - 4x</math></p> <p>10.- Obtén los puntos de corte con los ejes de coordenadas de:</p> <p>a) <math>f(x) = x(x^2 - 2x)(x^2 - 3)(\sqrt{2x} - 3)</math>  b) <math>f(x) = (x+1)(x-1)(\sqrt{2x})</math>  c) <math>f(x) = x(x^2 + 2x)(x^2 - 9)(\sqrt{3x} - 5)</math>  d) <math>f(x) = x^5 \left( \frac{x+1}{2x-1} - 3 \right) (x^2 - x)(\sqrt{2x} - 3) \cdot 5</math>  e) <math>f(x) = x^8 (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 3x - 4) \left( \frac{1}{x} - 3 \right)</math>  f) <math>f(x) = x(x^2 - 5x)(x^2 + 3x) \left( \frac{2x+1}{x-2} - 1 \right)</math>  g) <math>f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+5)(x-4)^{20}</math>  h) <math>f(x) = (x-1)^{18} (x+1)^{19} (x-3)^{20} (x+3)^{21}</math>  i) <math>f(x) = \left( \frac{2x-2}{x-3} - 3 \right) \left( \frac{3x-1}{2x+2} - 4 \right) \left( \frac{x+3}{x-3} - 3 \right)</math>  j) <math>f(x) = \left( \frac{3x-2}{x-4} - 1 \right) \left( \frac{2x-1}{x+2} - 3 \right) \left( \frac{x+3}{4x-3} + 3 \right)</math></p>				
<p>Figura 17. Ejercicios del Tema 8: Otras funciones relativo a las funciones del libro de texto del Módulo IV de ESPA. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de este tipo de ejercicio es la resolución gráfica y analítica de sistemas de ecuaciones entre funciones cuadráticas y lineales.				
Ejemplos:				
<p>3.-Resuelve gráfica y analíticamente:</p> <p>a) <math>\begin{cases} y = x^2 - 4x - 2 \\ x + y = 8 \end{cases}</math>   b) <math>\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 3x + 2 \end{cases}</math>   c) <math>\begin{cases} x = 2y + 10 \\ y = x^2 - 4x \end{cases}</math>   d) <math>\begin{cases} y = -1 \\ y + x^2 = 2x + 5 \end{cases}</math>  e) <math>\begin{cases} y = x + 3 \\ 3x^2 - y = -2 \end{cases}</math>   f) <math>\begin{cases} y = x + 3 \\ y = (x + 3)^2 \end{cases}</math></p>				
<p>Figura 18. Ejercicio del Tema 8: Otras funciones relativo a las funciones del libro de texto del Módulo IV de ESPA. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.</p>				

En este tema de “Otras funciones” se trabaja: la representación de las funciones cuadráticas, racionales o polinómicas de orden mayor a dos, la resolución gráfica y

analítica y los puntos de corte con los ejes. Sin embargo, en ningún momento se hace referencia a ejercicios donde sea necesario el uso de TIC.

### 4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato Científico

En el libro de 1º de Bachillerato científico MATEMÁTICAS I aparecen los siguientes temas relacionados directamente con las funciones:

- “Tema 7: Limite y continuidad de funciones”
- “Tema 9: Aplicaciones de la derivada”

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de este tipo de ejercicios es el cálculo de límites en todo el tipo de funciones impartidas en el contenido hasta este curso.				
Ejemplos:				
1.- Calcular, si existen, los siguientes límites:				
a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 1}$	b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$	c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^5 - 1}$	d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$	
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$	f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$	g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$	h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{1 - \sqrt{x-2}}$	
i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{3x-6}$	j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 - x^2 + 5x + 3}$	k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$	l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$	
m) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5} - x)$	n) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x-3}$	o) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$	p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{2-x}}$	
q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$	r) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$	s) $\lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{1}{x^2-5x+6}}$	t) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1)^{\frac{2}{x^2-1}}$	
4) $\lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{4}{x+1}}$	v) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 8)^{\frac{2}{x^2-5x+6}}$	w) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1}}{2^{x-2} + 9 \cdot 3^x}$	x) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1}}{3^{x-2} + 9 \cdot 8^x}$	

Figura 19. Ejercicio del Tema 7: Limite y continuidad de funciones relativo a las funciones del libro de texto del Bachillerato Científico de 1º de Bachiller. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2018). Matemáticas I. Bachillerato científico. España: Sahats.

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de estos ejercicios es el estudio de continuidad y el cálculo de dominio de las funciones.				
Ejemplos:				
<p>2.-Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos donde cambia el comportamiento de la función:</p> <p>a) <math>f(x) = \begin{cases} x+1 &amp; \text{si } x \leq 1 \\ x-1 &amp; \text{si } x &gt; 1 \end{cases}</math></p> <p>b) <math>f(x) = \begin{cases} 3-2x &amp; \text{si } x &lt; 2 \\ x-1 &amp; \text{si } x \geq 2 \end{cases}</math></p> <p>c) <math>f(x) = \begin{cases} x^2 &amp; \text{si } x \leq 0 \\ x+1 &amp; \text{si } x &gt; 0 \end{cases}</math></p> <p>d) <math>f(x) = \begin{cases} 2x+3 &amp; \text{si } x \leq 3 \\ -x^2+1 &amp; \text{si } x &gt; 3 \end{cases}</math></p> <p>e) <math>f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} &amp; \text{si } x \neq -2 \\ -4 &amp; \text{si } x = -2 \end{cases}</math></p> <p>f) <math>f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-5} &amp; \text{si } x \neq 5 \\ 7 &amp; \text{si } x = 5 \end{cases}</math></p> <p>g) <math>f(x) = \begin{cases} x+1 &amp; \text{si } x &lt; 0 \\ 2 &amp; \text{si } 0 \leq x &lt; 2 \\ x &amp; \text{si } x \geq 2 \end{cases}</math></p> <p>h) <math>f(x) = \begin{cases} x &amp; \text{si } x &lt; 3 \\ 2x+1 &amp; \text{si } 3 \leq x &lt; 5 \\ 4 &amp; \text{si } x \geq 5 \end{cases}</math></p> <p>i) <math>f(x) = \begin{cases} x^2+2 &amp; \text{si } x &lt; -1 \\ 0 &amp; \text{si } x = -1 \\ -2-x &amp; \text{si } x &gt; -1 \end{cases}</math></p> <p>j) <math>f(x) = \begin{cases} x+\frac{3}{2} &amp; \text{si } x &lt; -2 \\ \frac{1}{x} &amp; \text{si } -2 \leq x &lt; 0 \\ 2x &amp; \text{si } x \geq 0 \end{cases}</math></p> <p>7.-Calcula el dominio de:</p> <p>a) <math>f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)(x+1)(x^2-9)}</math></p> <p>b) <math>f(x) = \log((x^2-1)(x+2)(x-3)(x+4))</math></p> <p>c) <math>f(x) = \frac{7}{(x-1)(x^2+x)(x^2+2x+1)}</math></p> <p>d) <math>f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)x^{20}}</math></p>				
<p>Figura 20. Ejercicios del Tema 7: Limite y continuidad de funciones relativo a las funciones del libro de texto del Bachillerato Científico de 1º de Bachiller. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2018). Matemáticas I. Bachillerato científico. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de este tipo de ejercicios es la representación gráfica de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.				
Ejemplos:				
<p>10.-Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y ayúdate para que calcules el <math>\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)</math> si:</p> <p>a) <math>f(x) = \ln x</math></p> <p>b) <math>f(x) = \log_{1/3} x</math></p> <p>c) <math>f(x) = e^x</math></p> <p>d) <math>f(x) = a^x</math></p> <p>e) <math>f(x) = \operatorname{sen} x</math></p> <p>f) <math>f(x) = \operatorname{cos} x</math></p> <p>g) <math>f(x) = \operatorname{tg} x</math></p> <p>h) <math>f(x) = \operatorname{csc} x</math></p> <p>i) <math>f(x) = \operatorname{sec} x</math></p> <p>j) <math>f(x) = \operatorname{ctg} x</math></p> <p>k) <math>f(x) = \operatorname{arcsen} x</math></p> <p>l) <math>f(x) = \operatorname{arccos} x</math></p> <p>m) <math>f(x) = \operatorname{arctg} x</math></p> <p>n) <math>f(x) = \operatorname{arccsc} x</math></p> <p>o) <math>f(x) = \operatorname{arcsec} x</math></p> <p>p) <math>f(x) = \operatorname{arcctg} x</math></p>				
<p>Figura 21. Ejercicio del Tema 7: Limite y continuidad de funciones relativo a las funciones del libro de texto del Bachillerato Científico de 1º de Bachiller. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2018). Matemáticas I. Bachillerato científico. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de estos ejercicios es trabajar el cálculo de funciones compuestas e inversas.				
Ejemplos:				
<p>3.-Sean <math>f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}</math>, <math>g(x) = \frac{x+3}{x-3}</math>, <math>h(x) = 2x+1</math>, calcula:</p> <p>a) <math>(f \circ g)(x)</math>   b) <math>(f \circ h)(x)</math>   c) <math>(f \circ f)(x)</math>   d) <math>(g \circ f)(x)</math>  e) <math>(g \circ g)(x)</math>   f) <math>(g \circ h)(x)</math>   g) <math>(h \circ f)(x)</math>   h) <math>(h \circ g)(x)</math>  i) <math>(h \circ h)(x)</math>   j) <math>f^{-1}(x)</math>   k) <math>g^{-1}(x)</math>   l) <math>h^{-1}(x)</math></p>				
<p>Figura 22. Ejercicio del Tema 7: Limite y continuidad de funciones relativo a las funciones del libro de texto del Bachillerato Científico de 1º de Bachiller. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2018). Matemáticas I. Bachillerato científico. España: Sahats.</p>				

Actividad tipo:	Ejercicio	Problema	Cuestión	Situación
Descripción: El objetivo de este tipo de ejercicios es poner en práctica todo lo trabajado en los ejercicios anteriores para el análisis y representación de funciones: Dominio, puntos de corte, simetrías, asíntotas, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.				
Ejemplos:				
<p>2.-Representa las siguientes funciones:</p> <p>a) <math>f(x) = x^3 - x</math>   b) <math>f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}</math>   c) <math>f(x) = x \cdot e^x</math>  d) <math>f(x) = \frac{1}{x^2-1}</math>   e) <math>f(x) = (x+1)^3</math>   f) <math>f(x) = \frac{x^2}{2x-2}</math>  g) <math>f(x) = e^x + e^{-x}</math>   h) <math>f(x) = \frac{1-x}{x^2}</math>   i) <math>f(x) = e^{x^2}</math>  j) <math>f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}</math>   k) <math>f(x) = \frac{x^3}{2(x^2-4)}</math>   l) <math>f(x) = x^3 - x^2 + x</math></p>				
<p>Figura 23. Ejercicio del Tema 9: Aplicaciones de la derivada relativo a las funciones del libro de texto del Bachillerato Científico de 1º de Bachiller. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2018). Matemáticas I. Bachillerato científico. España: Sahats.</p>				

En el primer curso de bachiller (tanto científico como de ciencias sociales) los ejercicios tipo son prácticamente los mismos. La mayor diferencia es que en Bachiller social aparecen problemas contextualizados en situaciones cotidianas (así como la función de oferta y demanda), y en cambio, en el libro de Bachillerato científico no aparecen.

El análisis en este curso es más extenso y profundo que en cursos anteriores. Los ejercicios trabajan el cálculo de límites, la continuidad y la discontinuidad, la

representación de funciones, la composición de funciones, el cálculo de derivadas y el cálculo de la recta tangente y normal a un punto.

Nuevamente, el uso de TIC desaparece de los ejercicios.



## **Capítulo 5 Análisis de la relación entre el currículo y los libros de texto**

### **5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto**

Se ha podido observar durante el análisis del currículo que todos los descriptores tienen una continuidad en el tiempo y que, en todos ellos, se profundiza cada vez más con el paso de los cursos. Esto es una estructura esperable puesto que a medida que el alumno avanza, construye los nuevos contenidos sobre los que ya domina.

Es cierto que existe una fuerte relación entre los contenidos y los criterios de evaluación. En muchas ocasiones, los criterios de evaluación hacen referencia a más de un contenido simultáneamente; y en otras muchas, el criterio de evaluación se centra en un contenido muy específico. Sin embargo, a pesar de que la estructuración del currículo oficial sea consistente, es necesario remarcar su obsolescencia ante la falta de criterios de evaluación directamente ligados al uso de recursos informáticos en el bloque de funciones. Es cierto que aparecen en el bloque de estadística del Módulo 2 de la ESPA y en los cursos de bachillerato, todos ellos enmarcados en el Módulo 1. No se observa presencia de recursos informáticos en ninguno de los otros bloques, lo que demuestra una notable desactualización del currículo educativo, pero a su vez, brinda una gran oportunidad de mejora en este campo.

Este vacío también se localiza en los libros de texto donde en ningún caso, se ha encontrado un ejercicio ligado al uso de recursos informáticos. Esto implica que el docente sea el responsable de trabajar el contenido y evaluar a través del uso de recursos informáticos; obligándolo a encontrar el material fuera del libro de texto o a elaborarlo por el mismo.

Finalmente, se resalta la numerosa presencia de problemas contextualizados en situaciones reales, por lo que se puede decir que el currículo y los libros de texto están en total consonancia respecto a este punto. Es entendible que la gran cantidad de problemas en el contexto real viene motivada, en su mayoría, por el contexto sociocultural del centro. La aplicación de los contenidos matemáticos en contextos cotidianos para los alumnos puede ayudar a no perder durante el curso a aquellos alumnos que encuentran grandes dificultades en los contenidos puramente teóricos y abstractos. Se puede afirmar que la mayor densidad de problemas se da en los primeros cursos de ESPA y que disminuye en los libros de texto del Módulo 4 y Bachillerato (especialmente científico).

### **5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo**

El eje vertebrador de los libros de texto del centro educativo ha sido el currículo educativo de la Comunidad Foral. Pese a ser coherente en su mayoría, es posible encontrar ciertas ausencias, muy repetidas a lo largo de los distintos cursos.

La estructura de los libros de texto es coherente con la línea del currículo. En éste, se introducen conceptos base para posteriormente profundizar en aquellos conceptos que ya

se conocen, pero de manera más amplia. Un ejemplo claro puede ser la ampliación de tipos de función que se imparten a lo largo de los cursos, desde la función más simple (como la función lineal) hasta las más complejas (como son las trigonométricas).

Sin embargo, es importante recalcar que, pese a que la estructura genérica de los libros de texto está alineada con el currículo, la estructuración interna de los temas relacionados con las funciones precisa de estandarización. Esto es debido a que no se encuentra una repetición en el desarrollo de éstos.

En cuanto a las incoherencias de los libros de texto con el currículo, uno de los puntos más importantes es que carece de ejercicios que trabajen el uso de TIC. Además, cabe destacar que el concepto de función cuadrática es introducido en el libro de texto del Módulo 4, cuando el currículo lo requiere en el Módulo 3. Sumado a esto, existe la falta de problemas en contextos reales en el Módulo 4 y 1º de Bachiller.

En conclusión, los contenidos trabajados en el Bloque de Funciones y Análisis son continuos y consistentes a lo largo de toda la Educación Secundaria Para Adultos. Todo ello gracias a una gran variedad de actividades que incluyen los libros de texto.

## **Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las funciones en 3º de ESPA**



En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se diseña una propuesta de mejora referente al “Tema 4: Funciones” de la asignatura de matemáticas de 3º de ESPA.

Esta parte se divide en cuatro capítulos. En los dos primeros se estudia el contenido de funciones en el libro de texto de referencia y se establecen los posibles errores y dificultades previsibles en el aprendizaje.

Posteriormente, en el penúltimo capítulo se realiza una propuesta dinámica y complementaria al actual “Tema 4: Funciones” del libro de texto analizado. Esta propuesta se basa en la creación de applets a través de GeoGebra. Finalmente, en el último capítulo se desarrolla la experimentación piloto de dicha propuesta con el docente del centro y autor del libro de texto.

El objetivo final será evaluar la propuesta como complemento al libro, así como identificar puntos de mejora que permitan hacer de esta propuesta proyecciones reales de implementación.



## Capítulo 6 Las funciones en el libro de texto de referencia de 3º de ESPA

En este capítulo se realizará un análisis de las funciones en el libro de texto de referencia utilizado en el centro. El libro se titula “MATEMÁTICAS E.S.P.A. Módulos III y IV (2ª edición)”, y es de la editorial “Sahats”. Este libro alberga el contenido de dos Módulos e incluye el “Tema 4: Funciones: La recta”. En los siguientes apartados se realiza un análisis del tema mencionado.

El análisis del tema se realizará tomando como referencia el artículo “Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta” de Godino, Font y Wilhelmi (2006). En el primer apartado se resumen los principales elementos o componentes (objetos matemáticos previos y emergentes) implicados en la práctica matemática estudiada. En el segundo apartado, se analizan las unidades del libro de forma global.

### 6.1. Objetos matemáticos involucrados

A continuación, se presentan los principales objetos matemáticos involucrados en el aprendizaje de funciones en 3º de ESPA. Se debe tener en cuenta que los objetos están relacionados entre sí, aunque se analicen de manera separada a través de tablas.

Tomando como referencia el texto de Godino, Font y Wilhelmi (2006) los tipos de objetos que se estudian a continuación de modo tabular son: lenguaje, conceptos, procedimientos, situaciones, propiedades y argumentos.

Tabla 11. Lenguaje como objeto matemático relativo a las funciones en el libro de texto de 3º de ESPA. Fuente: elaboración propia.

<b>LENGUAJE</b>
<b>VERBAL</b>
Función, conjunto, variable, valor, puntos, plano, coordenadas, abscisa, ordenada, sistema coordenado, bidimensional, eje, intersección, origen, semieje, cuadrante, paralela, perpendicular, punto de corte, representación, grado, recta, dar valor a, pendiente, ordenada en el origen, significado geométrico, creciente, decreciente, explícita, pasa por, ecuación, sistema de ecuaciones, sustituir, resolver, gráfica, resolución gráfica, resolución analítica.
<b>GRÁFICO</b>
Representación tabular, representación gráfica de los cuadrantes, representación gráfica de puntos, representación gráfica de funciones
<b>SIMBÓLICO</b>
x, y, expresiones algebraicas de funciones, $f(a)$ , $P(a,b)$ , a, b, “+”, “-”, “.”, “=”, “(, ”)

Tabla 12. Situaciones como objeto matemático relativo a las funciones en el libro de texto de 3º de ESPA. Fuente: elaboración propia.

<b>SITUACIONES</b>
<b>PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS</b>
<i>No se encuentra ningún problema o ejercicio contextualizado.</i>
<b>PROBLEMAS DESCONTEXTUALIZADOS</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcular el valor de la función en un punto <math>x</math> concreto</li> <li>- Representar una función a través de una tabla de valores</li> <li>- Representar una función a través de su expresión analítica</li> <li>- Resolver sistemas de ecuaciones gráfica y analíticamente.</li> <li>- Cálculo de la expresión analítica y su posición en el plano de la recta que pasa por dos puntos.</li> </ul>

Tabla 13. Conceptos como objeto matemático relativo a las funciones en el libro de texto de 3º de ESPA. Fuente: elaboración propia.

<b>CONCEPTOS</b>
<b>PREVIOS</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Concepto básico de función.</li> <li>- Concepto intuitivo de tendencia de la función</li> <li>- Concepto intuitivo de máximo y mínimo</li> </ul>
<b>EMERGENTES</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Concepto teórico de función</li> <li>- La pendiente de la recta como razón proporcional entre “<math>x</math>” e “<math>y</math>”.</li> <li>- Tendencia de la recta asociada al signo de la pendiente.</li> <li>- Rectas paralelas y perpendiculares.</li> <li>- Representación gráfica dada expresión explícita o implícita.</li> </ul>

Tabla 14. Procedimientos como objeto matemático relativo a las funciones en el libro de texto de 3º de ESPA. Fuente: elaboración propia.

<b>PROCEDIMIENTOS</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Interpretación y representación de los puntos en el plano</li> <li>- Resolución de sistemas de ecuaciones de manera analítica.</li> <li>- Representación aproximada de funciones por tabla de valores.</li> <li>- Interpretación y representación de la función lineal</li> <li>- Traducción de un enunciado a lenguaje algebraico</li> <li>- Obtención de información de una expresión gráfica en un valor dado</li> <li>- Obtención de los puntos en el plano dada una función.</li> <li>- Representación de los puntos en el plano.</li> <li>- Representación aproximada de una función dada una tabla de valores.</li> <li>- Asignación de valores a “<math>x</math>” en la expresión explícita para representar la función.</li> <li>- Análisis de la pendiente a través de la expresión explícita e implícita de la recta.</li> <li>- Cálculo de la expresión de una recta que pasa por dos puntos.</li> <li>- Cálculo de rectas paralelas y perpendiculares.</li> <li>- Resolución gráfica y analítica de sistema de ecuaciones con el método de los pivotes cruzados.</li> </ul>

Tabla 15. Propiedades como objeto matemático relativo a las funciones en el libro de texto de 3º de ESPA. Fuente: elaboración propia.

PROPIEDADES
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Si el punto <math>(x_i, y_i)</math> pertenece a la función, sustituyendo <math>x_i</math> en la expresión algebraica de la función, obtenemos el valor de <math>y_i</math>.</li> <li>- Una recta tiene por ecuación algebraica <math>y=ax+b</math> (y polinomio de grado 1), salvo que la recta sea constante, en cuyo caso la ecuación es de la forma <math>x=K</math> o <math>y=K</math>.</li> <li>- La pendiente de la recta es “a”.</li> <li>- La recta corta el EJE Y en el punto <math>(0, b)</math>.</li> <li>- El valor de la pendiente indica el tipo de crecimiento de la recta: si “a” es un valor positivo, la recta es creciente; si “a” es un valor negativo, entonces la recta es decreciente y si “a=0”, entonces la recta es constante.</li> </ul>

Tabla 16. Argumentos como objeto matemático relativo a las funciones en el libro de texto de 3º de ESPA. Fuente: elaboración propia.

ARGUMENTOS
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Comprobación de las propiedades en casos particulares</li> <li>- Justificación de las propiedades utilizando elementos genéricos.</li> <li>- Comprobación de que la expresión algebraica y la representación algebraica coinciden</li> <li>- Comprobación de que la resolución analítica del sistema y de la resolución gráfica coinciden.</li> </ul>

## 6.2. Análisis global de la unidad didáctica

La unidad didáctica que se analiza en el libro de texto “MATEMÁTICAS E.S.P.A. Módulos III y IV” es el “TEMA 4: FUNCIONES: LA RECTA”. Se debe anotar que la estructura que se sigue en el desarrollo de los temas a lo largo del libro no es estándar, puesto que cada tema posee una estructura propia y cada subapartado corresponde a una parte fundamental del tema.

En este caso, la estructura del tema está dividida en once subapartados:

1. Concepto de función
2. Cálculo del valor  $f(a)$
3. Obtención de puntos del plano dada una función
4. Sistemas de coordenadas
5. Representación de puntos en el plano
6. Representación aproximada de una función
7. La recta
8. Recta que pasa por dos puntos
9. Rectas paralelas
10. Rectas perpendiculares
11. Resolución gráfica y analítica de dos rectas.

Sin embargo, pese a que la estructura de la unidad no se repita en las demás unidades, sí puede considerarse estándar el desarrollo de cada subapartado. Los subapartados comienzan introduciendo conceptos relativos a las funciones o propiedades vinculadas al tema, para posteriormente introducir al menos un ejemplo que representa lo introducido en el mismo. A excepción de los subapartados referentes a la representación gráfica (subapartados 4., 5. y 6.), ninguno hace uso de gráficas o dibujos para introducir el

contenido teórico. Sin embargo, en todos los ejemplos resueltos de cálculo y representación de rectas, se hace uso de la representación gráfica.

Al final del tema se encuentran 22 ejercicios propuestos para trabajar todos los conceptos impartidos. En ningún caso están identificados ni por subapartado ni por dificultad. Se debe destacar a modo de ausencia que en este caso no exista ningún problema contextualizado en la vida cotidiana siendo, a pesar de ser éste el eje central del “Bloque 3: Funciones” del currículo.

## Capítulo 7 Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

Tras el análisis de la unidad didáctica del libro de texto de “MATEMÁTICAS E.S.P.A. Módulos III y IV” se procederá a estudiar las dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica.

El objetivo de realizar un análisis previo es identificar las dificultades y errores que pueden encontrar los alumnos durante el estudio del tema y de esta forma diseñar e implementar actividades que les faciliten alcanzar los contenidos establecidos en el currículo. Hay que tener presente en todo momento que la imposibilidad de obtener un “feedback” real por parte de los alumnos dificulta la mejora continua de las actividades, pues no existe la posibilidad de introducir las mejoras propuestas por éstos.

### 7.1. Dificultades

El alumnado del centro donde se han realizado las prácticas y donde se ha desarrollado la propuesta tiene un perfil de alumnado diferente a lo que podemos encontrar en un centro de Educación Secundaria ordinario. Dado que es un centro de educación de personas adultas, encontramos perfiles muy diversos, con diferentes edades y características.

Entre el alumnado de este centro podemos encontrar diferencias en varios niveles. Por un lado, partimos de perfiles psicológicos distintos con motivaciones e intereses personales variados. Por otro lado, al ser un centro orientado a personas adultas, las motivaciones con las que llegan son diversas y los alumnos presentan entre ellos altas diferencias en el dominio de contenidos previos.

El hecho de que no todos los alumnos dispongan de una misma trayectoria previa genera una gran dificultad a la hora de alinear a todos los alumnos con el contenido., puesto que para lo que algunos pueden ser obvio, para otros son conceptos tan oxidados que reciben el tratamiento de “nuevo”. Por esta razón, lo que debería ser un tema de ampliación de conceptos algebraicos que se suponen integrados, se convierte en un océano de dudas cuando esos conceptos previos no están asentados.

Además, cabe destacar que inicialmente el desarrollo de esta propuesta será costoso debido a que los alumnos podrían no estar familiarizados con GeoGebra. Sin embargo, una vez los alumnos conozcan la herramienta, esta dificultad desaparecería.

Por último, se añaden las propias dificultades que se pueden encontrar en un centro como el del presente trabajo:

- Dificultades derivadas de la falta de recursos, habilidades y estrategias para aprender.
- Dificultades debido a la falta de hábitos de estudio del alumnado.
- Dificultades debido a la percepción de baja utilidad y la aplicabilidad del contenido.
- Dificultades debido a las condiciones en las que se realiza el proceso: cansancio, preocupaciones laborales y familiares, otras responsabilidades, etc.

## **7.2. Errores y su posible origen**

Habiendo asistido e impartido clase a algunos alumnos de 3º de ESPA, se tiene una idea previa de los posibles errores que pueden cometer durante el desarrollo del “Tema 4: Funciones”.

El mayor porcentaje de errores se prevé que se concentre en los errores de cálculo. Es esperable que dichos errores operatorios aparezcan de forma recurrente y extensiva a lo largo de todo el proceso. Estos errores aparecerán para cualquier objeto matemático que se esté trabajando y en cualquier tipo de actividad, ya que es un obstáculo asociado a una herramienta aritmética necesaria y no a un concepto propio de la unidad didáctica. Uno de los errores más recurrentes y que ya viene repitiéndose de cursos inferiores pueden ser los errores asociados a la combinación de cálculos fraccionarios y algebraicos. Se es consciente de que este obstáculo puede provenir de una mala base de los conceptos de fracción sumado a una automatización inconsciente en la manipulación de expresiones algebraicas. Durante la manipulación simbólica de expresiones algebraicas o en la transformación de expresiones algebraicas equivalentes, el alumnado realizará la simplificación de manera incorrecta o eliminará los denominadores comunes como hace de manera automatizada en la resolución de ecuaciones.

Sumado a lo anterior, es probable que los alumnos cometan errores ligados a la incorrecta aplicación de la jerarquía de operaciones. Es probable que posteriormente, con el repaso del ejercicio logren detectarlo. Cabe pensar que el origen de estos errores sea la falta de concentración y la falta de hábito de cálculo.

Además, en base a la experiencia con los alumnos, se intuye que éstos también cometerán errores relacionados con la regla de los signos. Muchos de ellos se deberán a despistes como no aplicarla correctamente (por ejemplo, cuando un valor negativo multiplica a un paréntesis). El error también puede provenir de un obstáculo en la comprensión de los valores negativos. Estos errores se magnifican cuando el alumno debe calcular la imagen de un número negativo en una función de coeficiente negativo.

Finalmente, se prevé que los alumnos cometan errores en la identificación de características de funciones dada una expresión algebraica, la cual se puede deber a una mala comprensión de los conceptos de pendiente y/o corte en el eje de ordenada. Este obstáculo puede tener origen en el docente, por haber introducido la representación de funciones a través de tabulación en lugar de a través de la expresión general de la función.

## Capítulo 8 Motivación de la propuesta

En este capítulo se desarrollan los motivos por lo que se ha decidido desarrollar una propuesta dinámica complementaria al libro de texto utilizado en el centro en el “Tema 4: Funciones” y se justifica desde el punto de vista del autor, la importancia de introducir e impulsar propuestas como la desarrollada en este trabajo.

### 8.1. Motivación en las matemáticas

Toda persona que ha cursado la primera etapa de la educación obligatoria o la educación secundaria para adultos en su defecto reconoce un sentimiento general de rechazo, ansiedad, frustración, bajo rendimiento, así como desmotivación de los alumnos por el hecho de que la asignatura se les hace demasiado compleja y aburrida (White y Reyes, 2014).

Este rechazo a las matemáticas se asienta sobre variables de naturaleza cognitiva y emocional, muy frecuentemente entrelazadas según Goleman. El elemento vertebrador de este complejo sistema es la dificultad de las propias matemáticas y la percepción del alumno de dicha dificultad. Son estas dificultades y la complejidad de su superación lo que genera el rechazo y el aburrimiento siendo esto la mayor expresión de la relación entre lo cognitivo y lo afectivo. En la búsqueda de la razón de su rechazo, existen estudios que apoyan la existencia de un círculo vicioso *dificultad-aburrimiento-suspensión-fatalismo-bajo autoconcepto-desmotivación-rechazo-dificultad* (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004, p. 75-95).

El estudio citado anteriormente muestra que, a partir de la educación secundaria, se produce un claro descenso en el gusto por las matemáticas y un aumento en el número de alumnos a quienes no le gustan las matemáticas. El pico más bajo, es decir, el curso en el que menos gusto se muestra por las matemáticas es en el curso de 3º de ESO (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004, p. 75-95).

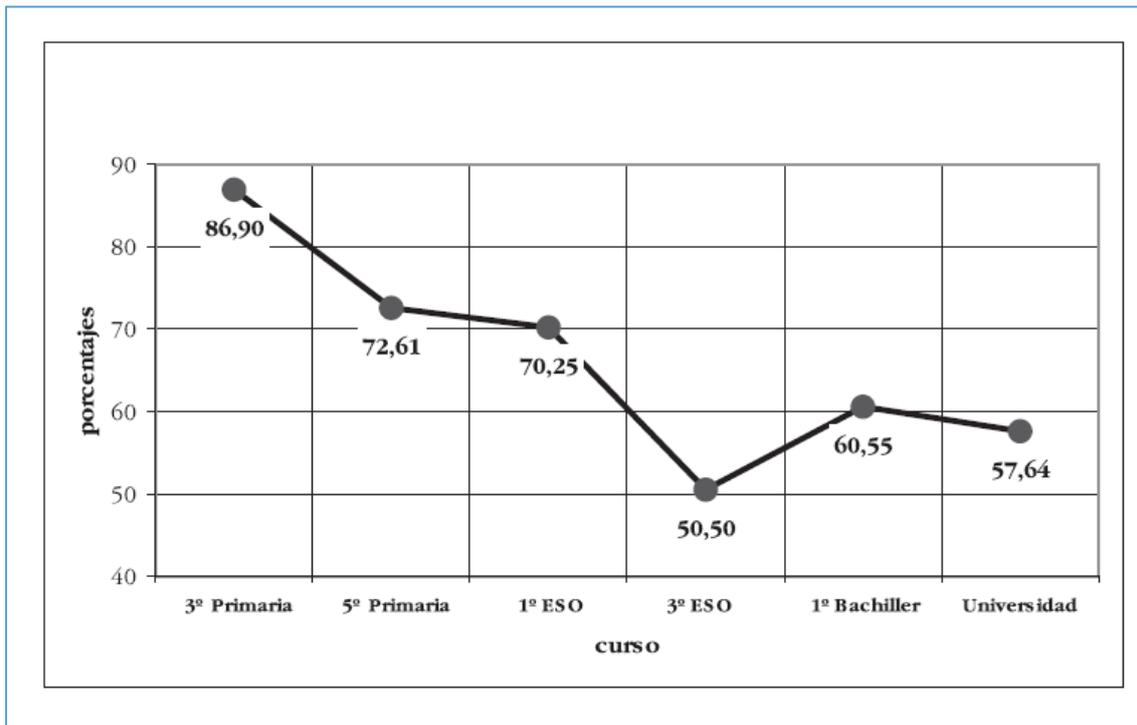


Figura 24. Gusto por las matemáticas. Fuente: Hidalgo, Maroto y Palacios (2004, p. 75-95)

Los resultados de las pruebas a gran escala PISA demuestran la falta de competencia matemática por parte de los alumnos españoles, quedando por debajo de la media de la OCDE en competencia matemática. Esto demuestra que sigue existiendo dificultades en la comprensión y aplicación de las matemáticas para la solución de problemas en la vida real (White y Reyes, 2014).

Tomando como base el estudio realizado por Hidalgo, Maroto y Palacios (2004, p. 75-95), cuando uno se pregunta dónde da comienzo este rechazo por las matemáticas, si es que la tienen, 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato la sitúan en la ESO y de esos 8 alumnos, 6 la situarían en 3º Y 4º de la ESO. Es muy importante ser consciente de que la caída en la percepción positiva de las matemáticas no la encontramos en otras asignaturas como muestra la Figura 25. Preferencias por asignaturas y niveles educativos. Fuente: Hidalgo, Maroto y Palacios (2004, p. 75-95) lo que hace pensar que la disminución en el gusto por las matemáticas es más propia de la disciplina que de la edad o del paso a niveles educativos superiores (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004, p. 75-95). Este es el motivo por el que es de vital importancia mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que está demostrado que cuando los alumnos encuentran demasiado dificultoso el contenido, su motivación decae, pues reconocen que actúan más eficazmente en trabajos de menos dificultad (White y Reyes, 2014).

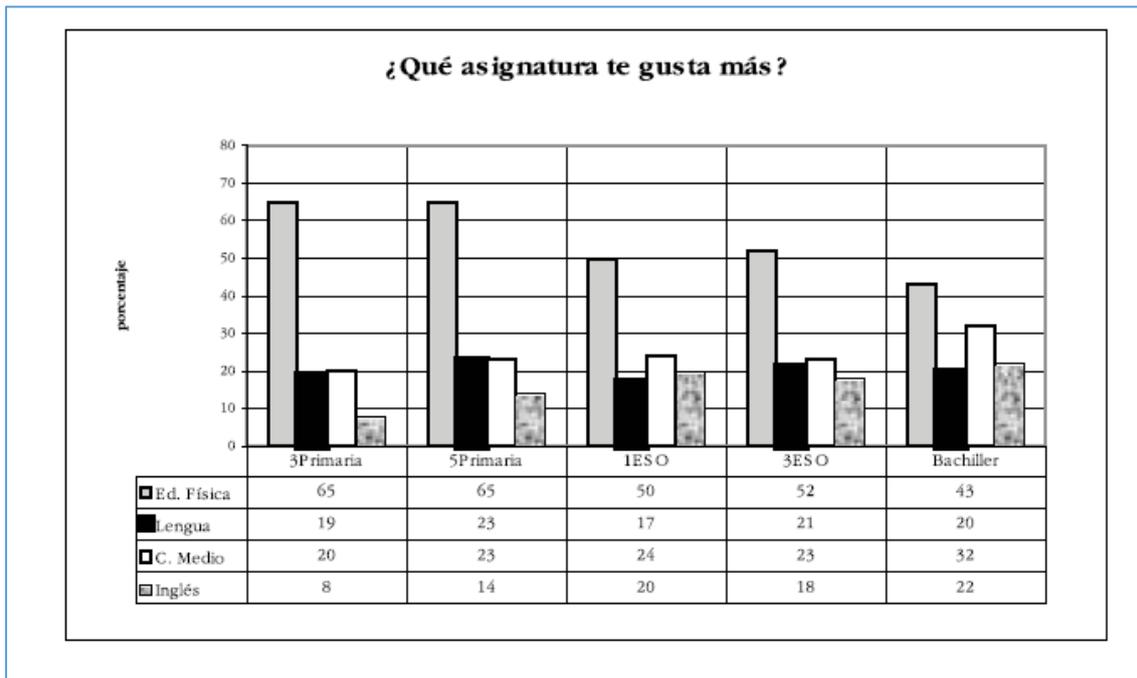


Figura 25. Preferencias por asignaturas y niveles educativos. Fuente: Hidalgo, Maroto y Palacios (2004, p. 75-95)

### 8.1.1. Factores influyentes en la motivación del alumno

Hay que ser consciente de que la falta de motivación puede manifestarse en diferentes niveles de intensidad, llegando a obstaculizar el correcto desarrollo intelectual, así como impactar directamente en el fracaso escolar. Durante la educación se pueden encontrar dos tipos de estudiantes: aquellos cuya meta es aprender y aquellos que sólo buscan aceptación. Para los alumnos que su meta es aprender, la inteligencia es una construcción y una acumulación de conocimientos. Sin embargo, los estudiantes que solo buscan la aceptación de los demás, consideran la inteligencia como algo estático, que no se puede trabajar o desarrollar y no verse capaz de resolver ciertas actividades afecta negativamente a su autoestima y motivación. En muchas ocasiones, estos últimos alumnos, consideran a la suerte la causante de obtener una buena o mala calificación, por lo que consideran el fracaso algo inevitable, trayendo como consecuencia un impacto directo en su motivación. (White y Reyes, 2007)

Los factores más influyentes en la motivación del alumnado están muy ligados a la psicología del alumno.

a) Tipo de metas y perspectiva asumida ante el estudio.

Según Woolfolk (2006, p.358), una meta es un resultado o un logro que un individuo lucha por alcanzar por lo que el tipo de meta que establezca el alumno influirá directamente en la cantidad de motivación por alcanzarla (White y Reyes, 2014).

b) Atribuciones del éxito y fracaso: expectativas de logro

La motivación de logro se define según (Hensos y Eller, 2000, p.378) como “las acciones y sentimientos relacionados con el cumplimiento de algún estándar internalizado de excelencia”. Por lo tanto, los alumnos que tienen un nivel alto de motivación de logro

suelen tener confianza en sí mismos, tienden a planear su estudio, son responsables y se esfuerzan por llevar a cabo las actividades escolares para tener éxito. Si los alumnos con alta motivación de logro fracasan en sus tareas, incrementará todavía más su motivación para mejorar y alcanzar el éxito deseado. Sin embargo, los alumnos que tienen un nivel bajo de motivación de logro actúan más eficazmente en trabajos que son de menor dificultad, pero fracasar en sus tareas hace que su motivación pueda disminuir (White y Reyes, 2014).

#### d) Manejo de la ansiedad

La ansiedad es uno de los síntomas más comunes de tensión emocional. Woolfolk (2006, p.365) define la ansiedad como una intranquilidad general, como un sentimiento de incertidumbre o una sensación de tensión. Por lo tanto, se puede decir que un alto nivel de ansiedad repercute en el aprendizaje del alumno, debido a que no pueden concentrarse y disminuye su atención. La diferencia entre un estudiante con un buen rendimiento y uno de rendimiento promedio es que, el primero puede sobrellevar la ansiedad, en cambio los segundos la sufren con mayor intensidad. (White y Reyes, 2014).

#### e) Autoeficacia, autoconcepto y autoestima.

Según Buron (1994, p.111), un estudiante eficaz y motivado es aquel que sabe qué hacer, como hacerlo y que se cree capaz de poder enfrentar cualquier reto que se le presente. La autoeficacia está estrechamente ligada a sentir el éxito como propio y a atribuir los fracasos a la falta de esfuerzo. Por el contrario, el alumno que se siente ineficaz tiende a atribuir los fracasos a su falta de habilidad personal (White y Reyes, 2014).

En referencia al autoconcepto y autoestima, son la idea que tiene el alumno de sí mismo. Las creencias sobre las propias capacidades determinan la orientación del estudiante hacia un tipo de meta (factor citado anteriormente). Además, uno de los elementos que caracteriza a los alumnos que rechazan las matemáticas sería la percepción de falta de confianza en sus posibilidades. Como puede verse en la Figura 26 esta autocompetencia disminuye según se avanzan en los cursos educativos (White y Reyes, 2014).

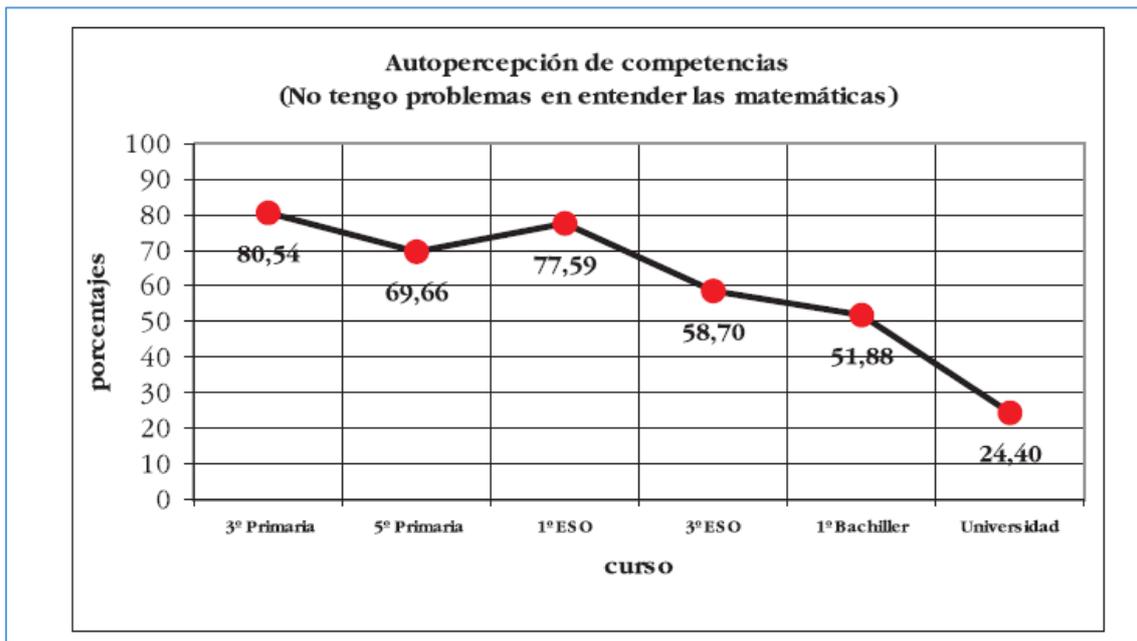


Figura 26. Autocompetencia y gusto por las matemáticas (por niveles educativos). Fuente: Hidalgo, Maroto y Palacios (2004, p. 75-95)

#### f) Persistencia y esfuerzo

González (1999, p.23) define la persistencia y el esfuerzo como los indicios más importantes del grado de motivación de un sujeto. La falta de esfuerzo y persistencia puede demostrar que el sujeto no valora o presenta interés por la tarea o bien que no confía en las posibilidades de alcanzar una meta dada (White y Reyes, 2014).

#### g) Percepción de dificultad y percepción de materia aburrida o divertida

La percepción de dificultad que se asocia a una tarea viene relacionada con el éxito o fracaso de una experiencia previa similar. Si el reto que presenta la tarea es muy alto, las personas suelen rechazar la tarea (González, 2005, p.107-128).

El mayor ejemplo de asociación de dificultad con aburrimiento es que el alumno que considera a las Matemáticas aburridas también opina que es una materia difícil y, en el otro lado, aquellos que declaran su gusto por la asignatura la consideran fácil de aprender. Como es común en estos casos, se desconoce si el aburrimiento es consecuencia de la dificultad o la dificultad causa del aburrimiento. Sin embargo, no es disparatado pensar que la ausencia de comprensión de un determinado material genera aburrimiento y rechazo, aunque siempre desde una perspectiva de mutua influencia. Según la Figura 27 se observa que en 3º de educación secundaria es donde se considera menos divertida la asignatura de matemáticas (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004, p. 75-95).

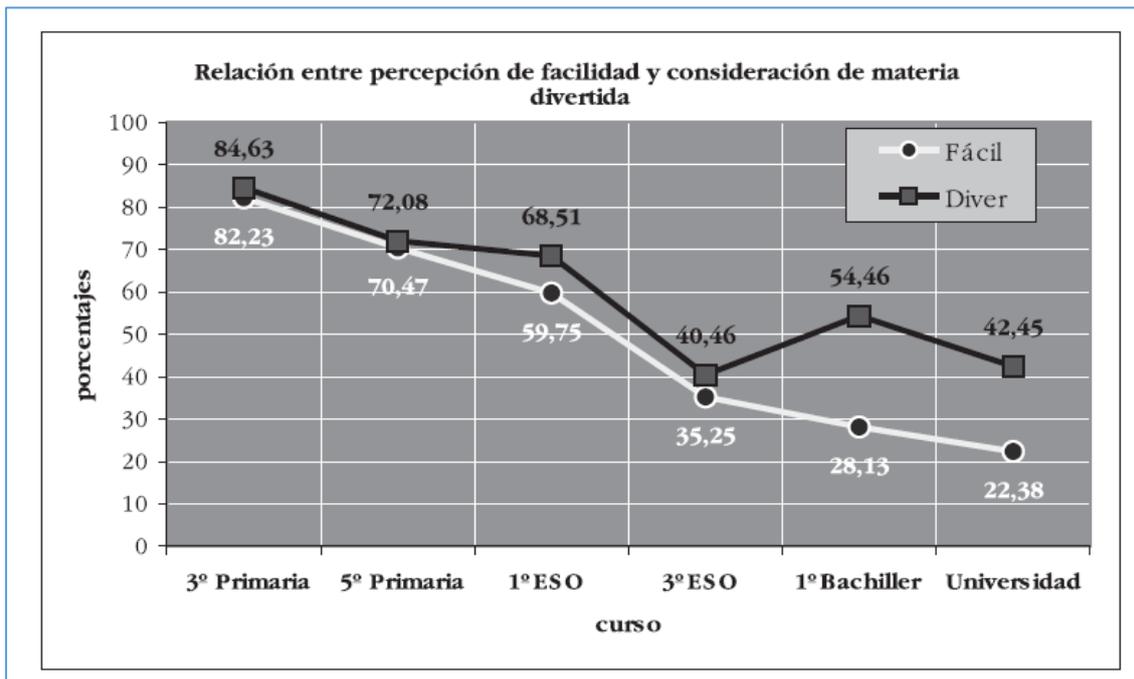


Figura 27. Dificultad y aburrimiento (por niveles educativos). Fuente: Hidalgo, Maroto y Palacios (2004, p. 75-95)

### 8.1.2. Papel del docente como agente motivador

Como ya se ha visto, numerosos factores impactan en la motivación del alumno, todos ellos intrínsecos de la personalidad del alumno. Sin embargo, se puede considerar al docente como uno de esos factores influyentes en la motivación del alumno, pero esta vez desde la perspectiva de agente motivador. Por todo ello, el docente debe ser consciente de su papel motivador en el proceso de aprendizaje.

#### a) Manejo interpersonal

De acuerdo con García (2008, p.42): “Los profesores con su estilo de enseñanza y su manera de relacionarse con los alumnos, influyen en la manera de aprender de estos, en su motivación y en sus sentimientos hacia el entorno escolar” (White y Reyes, 2014).

En la educación a distancia este factor es prácticamente nulo pues hay alumnos a los que ni siquiera se conoce personalmente, sin embargo, eso no exime al docente de generar una situación amena de aprendizaje con aquellos alumnos que deciden ir a tutorías.

#### b) Mensajes del profesor

El docente tiene la responsabilidad de elogiar a sus alumnos por medio de mensajes positivos con el objetivo de mantenerlos motivados. Díaz y Hernández (2010, p.72) señala que los cambios motivacionales en los alumnos están asociados con los mensajes que les transmite el docente y en concreto, con la información que se les da sobre su desempeño o nivel de competencia (White y Reyes, 2014).

## c) Expectativas del profesor

En algunas ocasiones los docentes centran más sus esfuerzos en favorecer aquellos alumnos que tienen alto rendimiento escolar porque generan mayores expectativas en el docente y dejan de lado aquellos alumnos en los que las expectativas son menores (White y Reyes, 2014).

## d) Organización de la clase

Según Moral (2010, p.305) la calidad del aprendizaje depende, en gran parte, de la calidad de los preparativos realizados, como pueden ser la preparación de los materiales, la planificación de las actividades. Dentro de este punto y referente a este trabajo fin de máster se encuentra un elemento clave: los apuntes del alumno. Para Mata (2005, p.122) “el objetivo de los apuntes no es otro que conservar las informaciones más importantes de una exposición a la cual ha asistido el estudiante” por ello gran parte del esfuerzo del docente debe ir enfocado a una buena planificación de la clase, permitiendo formar un ambiente de aprendizaje motivacional no solo en el sentido académico sino también en lo social y emocional. (White y Reyes, 2014).

## e) Gusto del profesor por las matemáticas

Es una opinión generalizada y cultural que cuando el alumno fracasa, una parte de culpa la tiene el profesor; sin embargo, cuando el alumno sale exitoso, lo importante es el propio alumno. El sentimiento de influencia negativa de los profesores sobre el gusto por las matemáticas aumenta a la par que lo hace el nivel educativo (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004, p. 75-95).

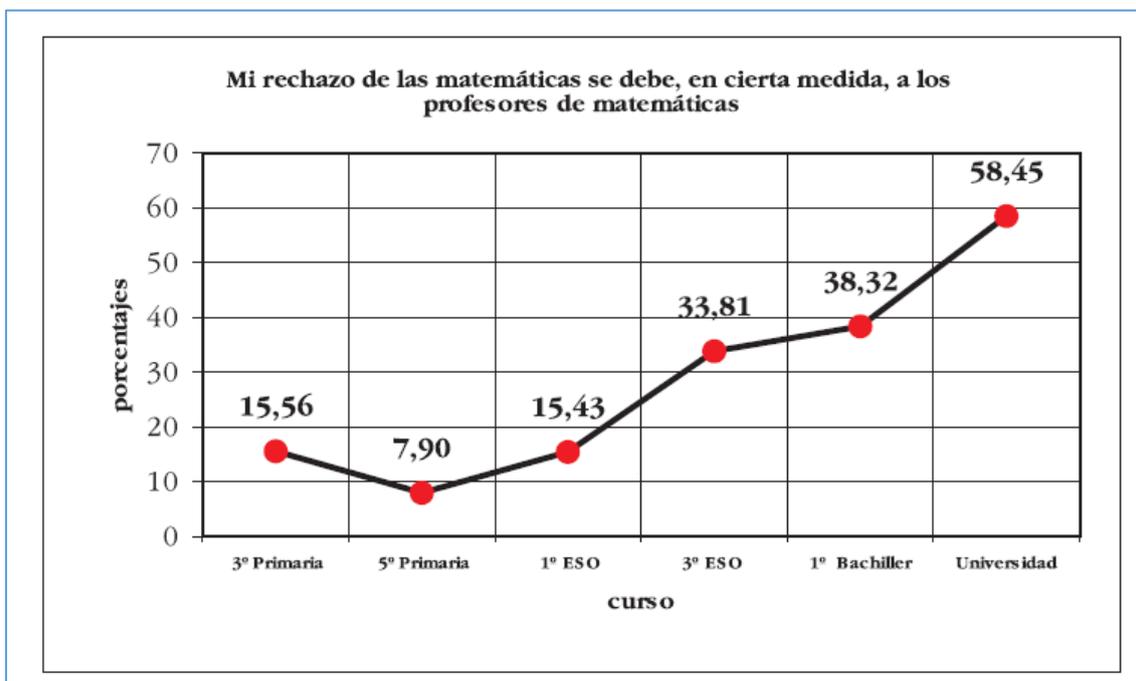


Figura 28. Importancia del profesor en el gusto por las Matemáticas (por niveles educativos). Fuente: Hidalgo, Maroto y Palacios (2004, p. 75-95).

### 8.1.3. Modelo de desinterés hacia las matemáticas

Al igual que se citaba al principio de la introducción de la existencia de un círculo vicioso *dificultad-aburrimiento-suspensa-fatalismo-bajo autoconcepto-desmotivación-rechazo-dificultad* en el artículo de González (2005, p.107-128) se desarrolla un Modelo de Desinterés hacia las Matemáticas compuesto por la interrelación entre 6 distintos factores que busca identificar y ponderar aquellos factores que dan forma a ese círculo vicioso.

1. Percepción de la actuación del (de la) profesor(a).
2. Dificultad de las matemáticas.
3. Valor o utilidad de las matemáticas.
4. Estereotipos de género de las matemáticas.
5. Desinterés hacia las matemáticas.
6. Aprovechamiento en matemáticas. Calificación promedio por evaluación del (de la) profesor(a).

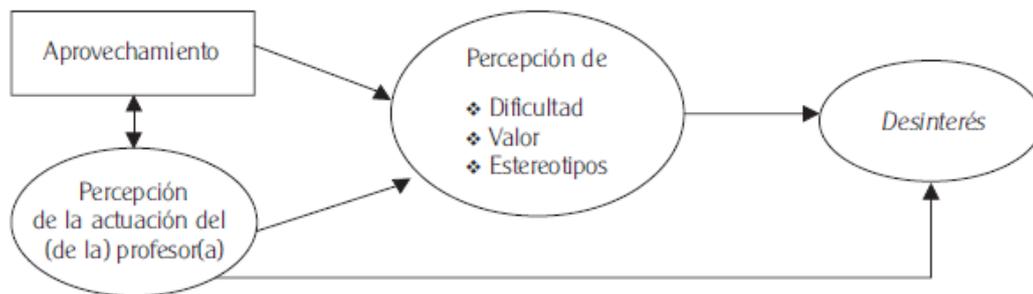


Figura 29. Modelo de desinterés hacia las matemáticas. Fuente: González (2005, p.107-128).

Los datos generales del estudio de González (2005, p.107-128) apoyan la hipótesis de la gran influencia que tienen las creencias del alumnado en su desinterés por las matemáticas. En este estudio se demuestra que a mayor es la percepción de dificultad de la materia, más negativa es la actuación del o la docente, menor el valor o la utilidad o mayores son los estereotipos de las matemáticas como dominio masculino (materia dominada generalmente por hombres), entonces, mayor es el desinterés del alumnado de secundaria por la materia.

## 8.2. Resultados académicos en el centro de estudio

Este Trabajo Fin de Máster se fundamenta en los datos obtenidos en el centro donde se ha realizado el Practicum I y II. A través de la Jefa de Estudios se tuvo acceso a los resultados de la evaluación del primer cuatrimestre del curso 2018-2019. A diferencia de la Educación Secundaria Obligatoria, la Educación Secundaria Para Adultos está

planificada en módulos con duración de un cuatrimestre, es decir, está diseñada para poder realizar los cuatro módulos en dos cursos. Esta modalidad de Educación Secundaria permite estar matriculado en varios cursos diferentes de distintas asignaturas lo que hace que el rendimiento de un curso varíe en función del alumnado. Basándonos en los datos ofrecidos por el instituto y centrándonos en la educación secundaria a distancia, se observa que donde mayor fracaso escolar existe es en 3º de ESPA.

Tabla 17. Pareto de aprobados y suspensos en la modalidad a distancia de ESPA en el centro de estudio. Fuente: elaboración propia.

<i>CURSO</i>	<i>GRUPO</i>	<i>Nº ALUMNOS</i>	<i>% Total Aprobados</i>	<i>% Total suspendidos</i>	<i>%Aprobados/Presentados</i>	<i>%Suspendidos/ Presentados</i>
ESPA 1º	E1D1	31	23%	77%	58%	42%
ESPA 2º	E2D1	37	19%	81%	64%	36%
ESPA 3º	E3D1	50	12%	88%	40%	60%
ESPA 4º	E4D1	47	21%	79%	63%	38%

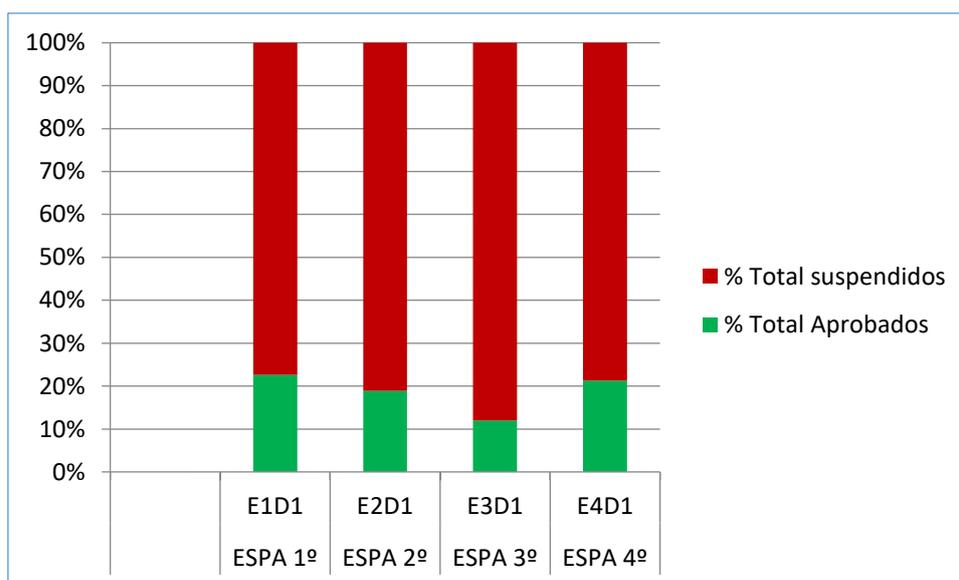


Figura 30. Resultados de la 1ª evaluación en el centro de estudio (por niveles académicos). Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 17 para el cálculo de “Total Suspendidos” se ha tenido en cuenta a los no presentados como suspendidos, sin embargo, curiosamente el instituto no lo hacía.

### 8.3. Flipped Classroom como propuesta de mejora

Con el objetivo de mejorar la foto expuesta en el punto anterior se observa la necesidad imperiosa de mejorar el rendimiento académico de la educación a distancia del centro

protagonista del trabajo. Por todo ello, se ha decidido realizar una propuesta de mejora en la metodología utilizada y aproximarla a la metodología Flipped Classroom.

### **8.3.1. ¿Qué es Flipped Classroom?**

La metodología Flipped Classroom o clase inversa consiste en que los trabajos que antes se realizaban en casa, ahora se realicen en clase y a la inversa. Esto se lleva a cabo a través de medios virtuales donde el alumno recibe la información. La transmisión de conceptos por parte del profesor y la recepción de éstos por los alumnos se sacan fuera del tiempo de clase de modo que el tiempo presencial se utiliza para la consolidación de conocimientos, interacción entre estudiantes y profesor y para realizar actividades y/o proyectos (Fornons y Palau, 2016, p.1-17).

Este uso alternativo del tiempo hace posible que el protagonismo del aprendizaje pase del docente a los alumnos. De esta manera, los alumnos piensan, participan y discuten durante las horas lectivas. En este sentido, Prieto (2013) afirma: “El aprendizaje en clase pasa de ser de recepción pasiva en el modelo tradicional a ser de participación activa en el modelo flipped” (Fornons y Palau, 2016, p.1-17).

### **8.3.2. Beneficios del Flipped Classroom**

Se ha constatado los números beneficios que aporta la aplicación del método Flipped Classroom:

1. Aumenta los resultados académicos y mejora el ambiente de trabajo y la actitud de los alumnos. (Ali, Ghazi, Shazad y Khal, 2010, p. 542-556; Bergmann y Sams, 2011; Strayer, 2007).
2. Permite mejorar el rendimiento académico de los alumnos, así como su implicación en la asignatura, el pensamiento crítico, la colaboración y el aprender a aprender (Ali, Ghazi, Shazad y Khal, 2010, p. 542-556; Bergmann y Sams, 2011; Strayer, 2007).
3. Mejora el comportamiento y la interacción entre profesor y estudiantes (Flumerfelt y Green, 2013, p.356-366).
4. Permite un aprendizaje activo por parte del alumno (Leicht, Zappe, Messner, Litzinger y State, 2012, p.19-31).

Un estudio realizado demuestra que cerca del 80% de los alumnos aprenden todos los contenidos importantes a través de la metodología Flipped Classroom. En cambio, solo el 20% de los alumnos aprenden todos los contenidos mediante el método tradicional (Bergmann y Sams, 2012, p.117).

A modo de puntos clave, la metodología Flipped Classroom aporta los siguientes beneficios (Fornons y Palau, 2016, p.1-17):

- La dinámica de la clase es cooperativa y más relajada
- El alumno adopta un rol colaborativo respecto a otros alumnos
- La motivación de los alumnos se muestra más alta.

- Aumenta la interacción entre alumno-alumno y también en la interacción alumno-profesor.
- Permite al docente adoptar un rol motivador e inductor de la búsqueda de conocimientos.

Por todo lo anterior es por lo que se puede afirmar que el beneficio de la metodología Flipped Classroom es bidireccional, pues un estudio de la Red de aprendizaje Flipped (FLN - Flipped Learning Network) en 2012 donde participaron alrededor de 500 profesores de secundaria estadounidenses que utilizaban la metodología Flipped Classroom mostró que un 88% de los profesores habían mejorado su satisfacción laboral, que el 80% de los alumnos habían mejorado sus actitudes y 67% de estos mejoraron los resultados en pruebas estandarizadas (Fornons y Palau, 2016, p.1-17).

### 8.3.3. ¿Por qué Flipped Classroom?

El motivo principal de aplicar esta metodología en este centro para adultos es poder aprovechar una plataforma ya existente (la educación a distancia) para darle todavía más herramientas a los alumnos y motivarles a seguir aprendiendo de una manera más amena, dinámica y nutritiva. Además de todo esto, es importante recalcar que también existen motivos más allá de las fronteras del centro educativo en cuestión para implementar esta metodología, principalmente dos: en primer lugar, por las cifras de abandono escolar temprano, pues en España el abandono escolar temprano es la más alta de la Unión Europea después de Malta y se encuentra en el 18,3% (Sistema Estatal de Indicadores de la Educación, 2018).

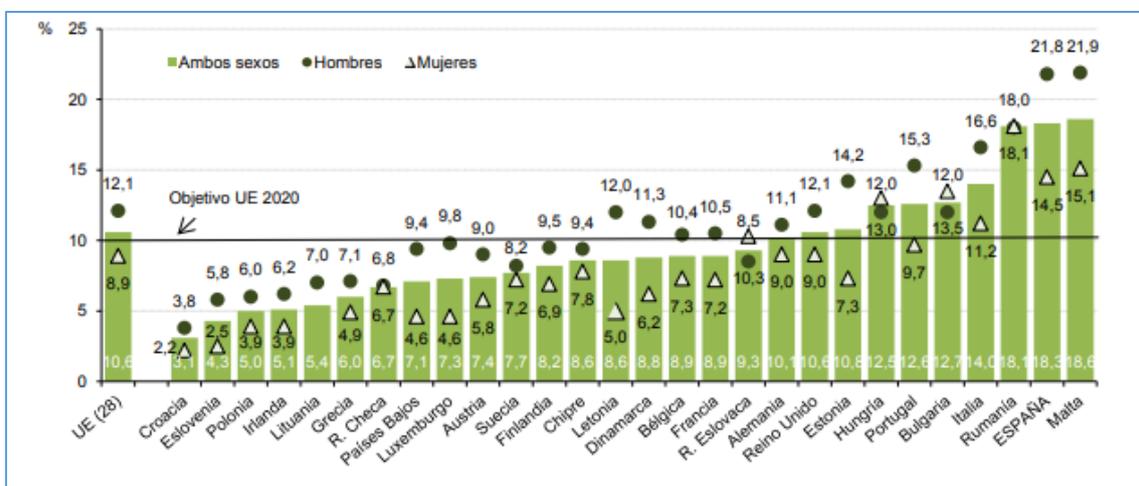


Figura 31. Porcentaje de población de 18 a 24 años que abandona de forma temprana la educación y la formación por sexo en los países de la Unión Europea en 2017. Fuente: Sistema Estatal de Indicadores de la Educación, 2018.

El segundo motivo es porque la tasa bruta de graduados en ESO en España es sólo el 79,3% (Sistema Estatal de Indicadores de la Educación, 2018).

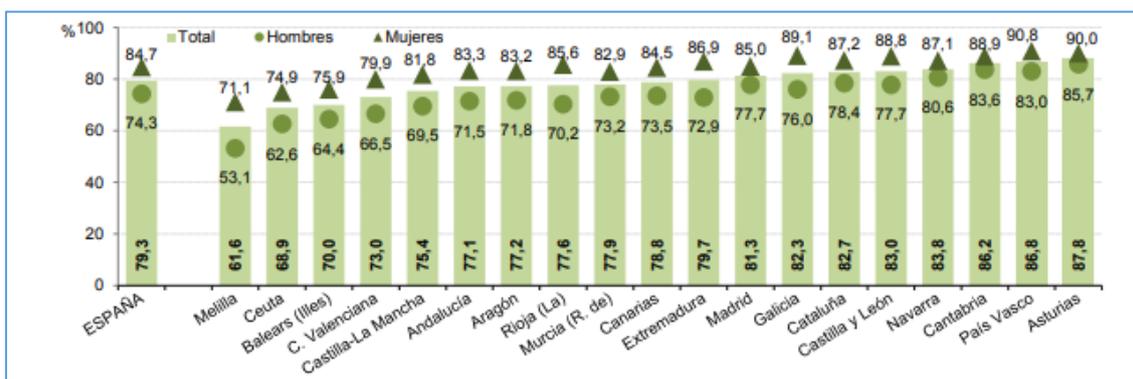


Figura 32. Tasa bruta de graduados en ESO por comunidad autónoma y sexo en España (curso 2015-2016). Fuente: Sistema Estatal de Indicadores de la Educación, 2018.

Los resultados relativos a Flipped Classroom obtenidos en estudios realizados en Estados Unidos hasta ahora, han sido esperanzadores. De 200 profesores que han aplicado esta metodología, el 85% ha detectado mejoras en el rendimiento de sus estudiantes, el 30% están mejor conectados con sus alumnos al utilizar la tecnología fuera del aula y el 25% utiliza el tiempo de clase para profundizar en un tema (Strayer, 2011).

Un estudio realizado a 533 alumnos de institutos de secundaria de Estados Unidos constato un aumento de entre un 9% y un 19% en las evaluaciones en las áreas donde se aplicaba la metodología Flipped Classroom, en relación a las evaluaciones conseguidas con la metodología tradicional (Pearson Education Inc., 2013).

Pese al estudio anterior, la mayoría de los estudios se han realizado en ámbito universitario y muy pocos en la educación secundaria, lo cual justifica más la existencia de este trabajo.

#### 8.4. El uso de TIC en educación como propuesta de mejora

Según las capacidades que ofrecen las TIC actuales, se podría deducir, que su implementación debe ocasionar numerosas ventajas en el ámbito educativo. Incluso desde la propia UNESCO (2014) se señala que las TIC tienen el potencial de mejorar el aprendizaje hasta lograr una educación nunca vista. Estas tecnologías ofrecen innumerables posibilidades de mejora en lo que respecta a la enseñanza y la educación. El potencial que guardan las tecnologías de la era digital es algo que era impensable hace décadas, y es lo que ha otorgado unas expectativas tan altas en la implementación de estas TIC.

Sin embargo, muchas de las investigaciones realizadas hasta la fecha apuntan justo lo contrario. Benavides y Pedró (2007, p. 16-69) analizan los resultados de ciertos niveles educativos antes de implementar las TIC y después de hacerlo y únicamente en un 10% de los alumnos existe una pequeña mejora, mientras el resto no presentan cambios aparentes. Otra investigación realizada por Kozma y Wargner (2006, p. 97-120), demuestra que la implementación de las TIC en distintos centros y con distintos alumnos apenas ha tenido un efecto positivo. Expone en sus resultados, como algunos alumnos han aumentado su rendimiento, como otros alumnos lo han mantenido, y como otra parte de ellos lo han disminuido.

Según Coll (2004, p. 1-24), la razón de este fracaso reside en que los docentes continúan realizando las mismas actividades que cuando no se disponía de TIC. Es con esto con lo que el autor advierte que las TIC por sí solas no tienen la capacidad de innovar, por lo que se debe centrar el esfuerzo en la formación del profesorado en los usos de estas. Es por ello por lo que hay que tener claro que es responsabilidad del docente, ya que la principal propiedad de las TIC es que por sí solas no transforman el acto educativo, sino que refuerza la acción llevada a cabo (Coll y Monereo, 2008).

Desde esta premisa, se es consciente de que con la propuesta de este trabajo tal vez no se alcance el objetivo a la primera, pero al menos se camine en la dirección correcta.

### **8.5. Motivos para elegir GeoGebra como herramienta para “Flipped Classroom” en el tema de funciones**

El uso de la plataforma “Moodle” para el Aula Virtual del centro educativo para adultos permite que el alumno tenga a su disposición de manera online todo el contenido que se trabaja durante todo el curso. De esta manera, desarrollar una propuesta dinámica con GeoGebra en el “Tema 4: Funciones” puede hacer que el alumno adquiera más competencias y pueda profundizar más en los contenidos a través de links a los applets contruidos específicamente para una mejor comprensión del libro.

Existen numerosas investigaciones que avalan los beneficios del uso de GeoGebra como herramienta educativa. Portilla (2014) expone la facilidad y sencillez de su uso además de ayudar a la interactividad del alumnado. Por otro lado, Conde (2013) a través de un experimento con alumnos de ESO y Bachiller obtiene resultados altamente positivos en el desarrollo de las competencias matemáticas, así como en la actitud y motivación del alumnado.

Además de ser un software libre y avalado por el Ministerio de Educación a través del “Proyecto Gauss”, permite al alumnado disponer de herramientas para enfrentarse a aquellas dificultades a las que se puede enfrentar a través de plataformas tradicionales. GeoGebra permite al alumno afianzar el concepto de función mediante una amplia variedad de ejemplos para trabajar dicho concepto. También facilita al alumno integrar la relación entre la representación algebraica y la representación gráfica y, de la misma manera, permite consolidar el reconocimiento de funciones de forma explícita e implícita y construir los cimientos necesarios para desarrollar en los cursos siguientes conceptos más complejos como pueden ser los límites.

Sumado a lo anterior y basado en el artículo de Lasa y Wilhelmi (2013, p.52-64) GeoGebra también permite, a través del razonamiento inductivo, concluir propiedades basándose en distintos ejemplos. De esta manera, se mantiene controlado el fenómeno de “Ilusión de transparencia” que aparece cuando el docente sólo emplea la pizarra. En este caso, debido al poco tiempo del que dispone en cada sesión, suele presentar propiedades, con un ejemplo concreto (ejemplo prototípico), suponiendo que el alumno será capaz de generalizar las propiedades a cualquier situación en otro contexto.

Existen tres momentos durante la actividad matemática en Secundaria donde hacer uso de GeoGebra es pertinente: exploración, ilustración y demostración (Lasa y Wilhelmi, 2013).

- *Momento de exploración*

Algunos modelos dinámicos en GeoGebra permiten al alumno manipular, probar, explorar...para así finalmente deducir propiedades. Permiten al alumno inferir propiedades de una construcción más allá de sus conocimientos.

- *Momento de ilustración*

Algunos modelos dinámicos permiten al alumno conocer la veracidad de una propiedad dada. Cuando un alumno observa cómo se cumple una conjetura siente la necesidad de conocer su origen, al fin y al cabo, la ilustración es una “imagen” de la propiedad.

Los applets que permiten ilustrar propiedades pueden ser usados como complemento a una pizarra ordinaria. Por ejemplo, GeoGebra permite generar rápidamente múltiples rectas de manera que se pueda ilustrar la misma propiedad en todas ellas.

En educación secundaria, debido a la falta de tiempo, material o restricción cognitiva de los alumnos, se decide ignorar la demostración formal de la propiedad, limitando la actividad a ilustrarla. Sin embargo, existen diferencias entre una construcción ilustrativa y la demostración formal de una propiedad.

- *Momento de demostración*

La forma tradicional de demostrar de manera formal cualquier propiedad ha desaparecido con la llegada de softwares dinámicos y pizarras electrónicas. Los alumnos prefieren pruebas pragmáticas en lugar de pruebas intelectuales. Cuando trabajan con un modelo dinámico, una prueba empírica puede ser suficiente para ellos, pues son capaces de construir un argumento inductivo con un número suficiente de ejemplos. Por todo ello, los estudiantes no desarrollan capacidad de demostración y no sienten la necesidad de hacerlo. Además de todo ello, GeoGebra ofrece una interfaz donde encontrar un contraejemplo es sencillo por lo que si el alumno no es capaz de encontrar un contraejemplo tiende a tomarlo como verdad. Pese a todo ello, con un buen diseño de la actividad, algunos autores defienden que a través de GeoGebra se puede llegar a realizar demostraciones formales (Lasa y Wilhelmi, 2013, p.52-64).

## Capítulo 9 Propuesta de mejora

En el presente capítulo se analiza la propuesta realizada en GeoGebra y se describe detalladamente cada actividad diseñada. Es importante recordar que la propuesta tiene como objetivo complementar al actual libro que se usa en 3º de ESPA en la asignatura de matemáticas para el “Tema 4: Funciones”. En ningún caso, se debe considerar los siguientes applets como alternativa al libro. Cada actividad trae consigo una introducción teórica al contenido y al uso del applet.

El acceso al Libro de GeoGebra se puede realizar a través del siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/cdqjcnk>

En él, se pueden encontrar actividades dinámicas, tanto explorativas como ilustrativas.

### 9.1. Estructura del contenido

La estructura del “Libro” generado en GeoGebra sigue exactamente la misma estructura que el tema del libro “Matemáticas E.S.P.A Modulo III y IV”:

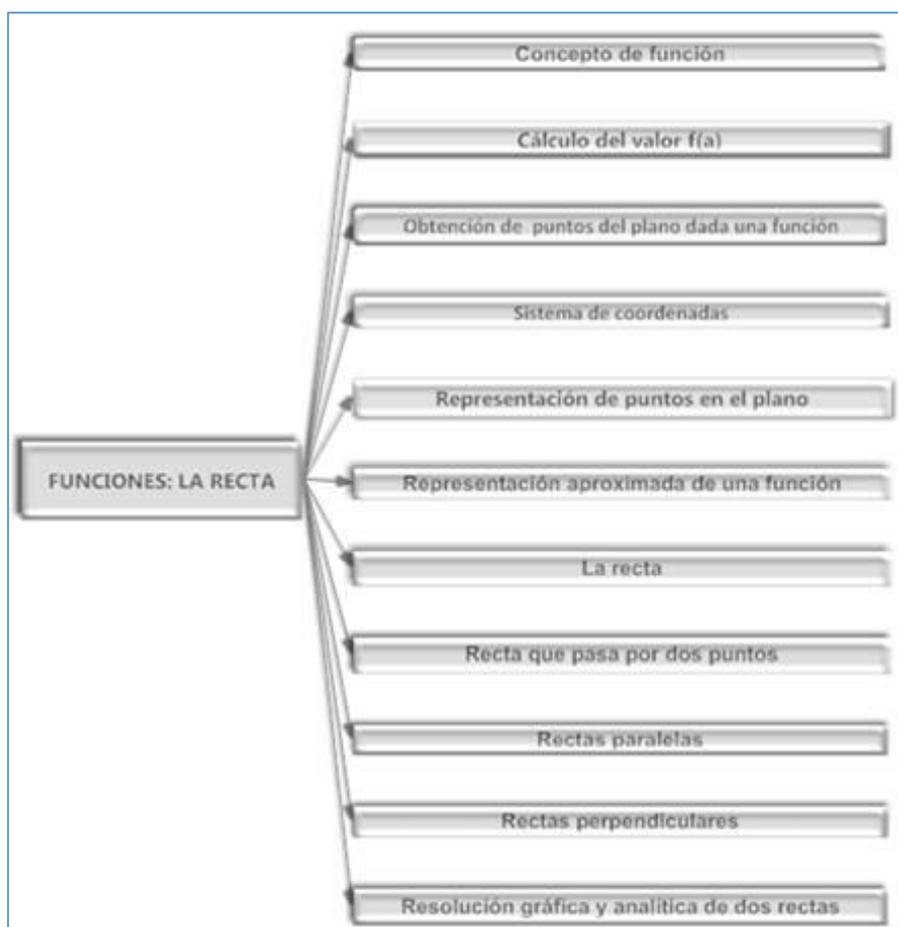


Figura 33. Índice del Tema 4: Funciones: La recta del libro de texto de 3º de ESPA utilizado en el centro de estudio: Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

El objetivo de mantener el mismo índice es mantener conectado de la manera más estrecha posible el libro con los applets desarrollados en GeoGebra. Se ha observado que

el libro no hace uso ni de colores ni de esquemas explicativos que faciliten al alumno la comprensión de los conceptos. Es por ello, que el desarrollo de este “Libro” en GeoGebra busca complementar esa perspectiva a veces excesivamente abstracta de la matemática. Sobre todo, cuando el alumno no dispone de suficientes conocimientos previos, o al menos no están asentados completamente.

Se observa que uno de los mayores problemas en el centro es que los alumnos no dominan los conceptos más básicos del contenido, de manera que su única herramienta para aprobar pasa por establecer un procedimiento y automatizar absolutamente todos los ejercicios.

Es por ello, que el objetivo principal de este trabajo y del desarrollo de los applets en GeoGebra es dar la oportunidad a los alumnos de aprender el tema de funciones con un mayor control de los conceptos clave del tema.

A continuación, se realiza una descripción del contenido que aparece en el libro de texto para posteriormente introducir los applets creados por el autor de este trabajo.

### **9.1.1. Concepto de función**

El objetivo es facilitar la comprensión del concepto de función partiendo de una definición no formal y más cercana al alumnado. Una vez explicado el concepto informal se ofrece la definición que da el libro, para finalmente llegar al concepto de lo que no es una función.

Como se observa en la siguiente captura, el libro introduce una definición matemática acompañada de dos ejemplos concretos de vida cotidiana y posteriormente da un par de consejos sobre cómo referirse a las funciones. De esta manera, se introduce un concepto tan importante como es el de “función”, en el que, a excepción de los ejemplos, los alumnos no tienen posibilidad de darle significatividad al contenido.

**1.-CONCEPTO DE FUNCIÓN**

Una **función** es una aplicación entre dos conjuntos A y B de tal manera que a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B.

**Ejemplos de funciones:**

- A los alumnos de una clase les hacemos corresponder la nota de un examen concreto. En este caso, el conjunto A serían los alumnos de la clase y el conjunto B la colección de diferentes notas que puede tener el examen y se trata de una función ya que a cada alumno de la clase le corresponde una y sola una nota del examen.
- A un conjunto de personas que disponen de DNI les hacemos corresponder su propio DNI. En este caso, la colección de personas forma el conjunto A y los diferentes números de DNI existentes en el país formarían el conjunto B, tratándose de una función ya que a cada persona del conjunto A le corresponde un único DNI.

En matemáticas estudiamos las funciones como una correspondencia entre el conjunto de los números reales, de manera que a cada elemento  $x$  real le hacemos corresponder otro elemento  $y$  real, por lo que usualmente se denominan funciones reales.

Normalmente, una función viene escrita como  $y = f(x)$ , significando que  $x$  es una variable real (y al ser variable tomará diferentes números reales),  $y$  es otra variable real,  $f$  es el nombre de la función, y los paréntesis  $()$ , significan "de". Así  $y = f(x)$ , se lee como "y es una función de f de x".

Conviene advertir que  $f(x)$  **no es**  $f$  por  $x$ , en funciones el significado que tiene la nomenclatura es que los valores que se obtengan en la función  $f$  van a depender de la variable  $x$ .

Figura 34. Concepto de función en el libro de texto de 3º de ESPA en el centro de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

Cabe pensar que el objetivo principal no se consigue con el contenido del libro. Por ello, en este apartado se decide hacer hincapié en la palabra "concepto", llevando a cabo cuatro applets que facilitan la comprensión del concepto "función" desde el principio.

El applet de la Figura 35, "MÁQUINA MÁGICA", es una actividad explorativa que busca hacer una analogía entre una función y una máquina mágica: la máquina devuelve un resultado siempre en función de lo que se introduce como valor de entrada.

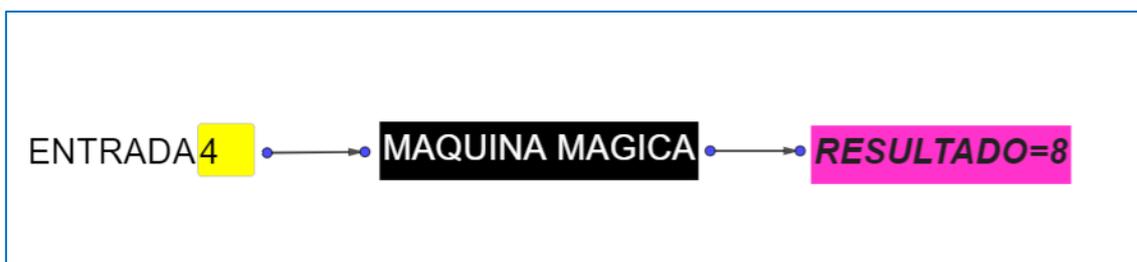


Figura 35. Applet de "Máquina mágica". Fuente: elaboración propia.

El alumno debe modificar el valor de entrada a su parecer para observar el cambio en el resultado y posteriormente contestar a unas preguntas reflexivas como las de Figura 36.

PREGUNTAS PARA REFLEXIONAR

a) ¿Qué hace la máquina con los números que introduces?

b) ¿Qué ocurre cuando metes un número negativo?

c) ¿Puede ser que para un mismo valor de ENTRADA te devuelva dos RESULTADOS distintos cada vez? Si es así, pon algún ejemplo.

d) ¿Puede ser que para distintos valores ENTRADA te devuelva un mismo RESULTADO? Si es así pon algún ejemplo.

Figura 36. Preguntas reflexivas del applet "Máquina mágica". Fuente: elaboración propia.

En caso de desarrollar esta actividad en clase, o tener la oportunidad de recoger las respuestas de los alumnos por escrito, el docente podrá evaluar los resultados esperados de la actividad.

El segundo applet llamado "CONCEPTO DE FUNCIÓN", está compuesto por dos actividades explorativas. La primera de ellas, la Figura 37 se basa en la definición ofrecida por el libro de texto, por ello se modifica el uso de "Entrada" y "Resultado" por "Conjunto A" y "Conjunto B" respectivamente.

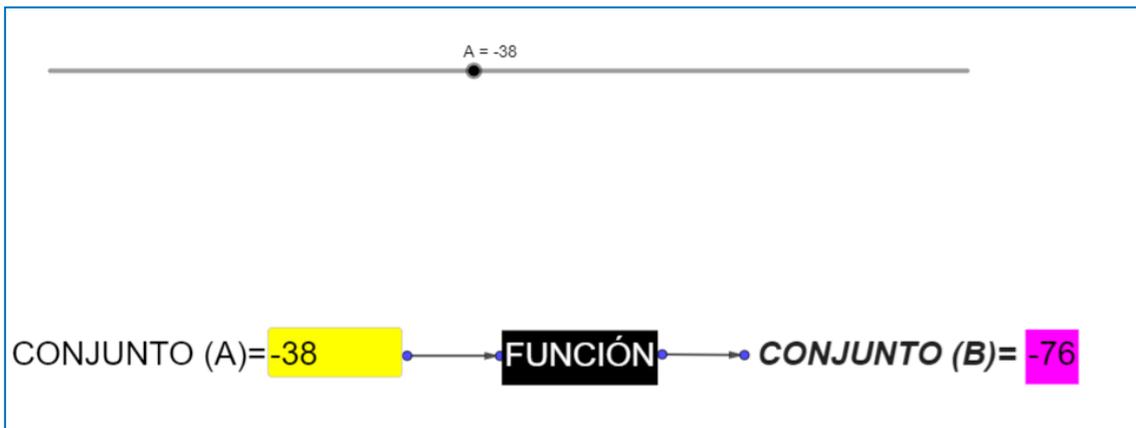


Figura 37. Applet de "Concepto de Función" para una función de primer grado. Fuente: elaboración propia.

El segundo applet, representado en la Figura 38, se introduce el concepto trabajado previamente en el que una función puede obtener dos resultados iguales con distinto valor de entrada. Para ello, sin dar explícitamente la expresión algebraica de la función, se trabaja el mismo formato de applet, pero con una función cuadrática (tal y como exige el currículo).

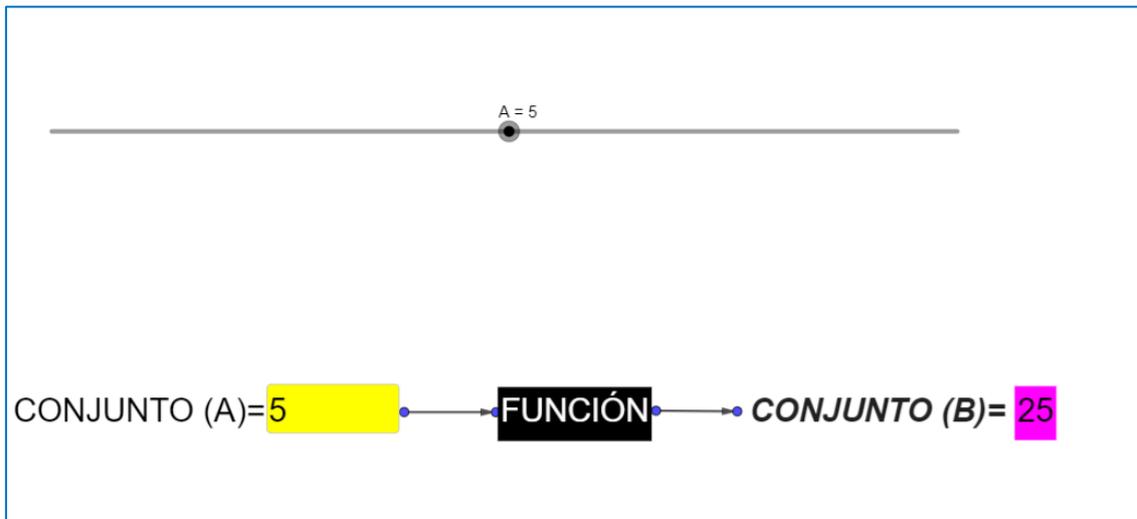


Figura 38. Applet de "Concepto de Función" para una función de segundo grado. Fuente: elaboración propia.

El tercer applet, Figura 39, llamado “*CONCEPTO DE NO FUNCIÓN*”, se diseña como actividad explorativa, donde se tiene como objetivo dejar claro al alumno aquello que no es una función. La interacción del alumno con la actividad es prácticamente igual a la de los restos de applets anteriores.

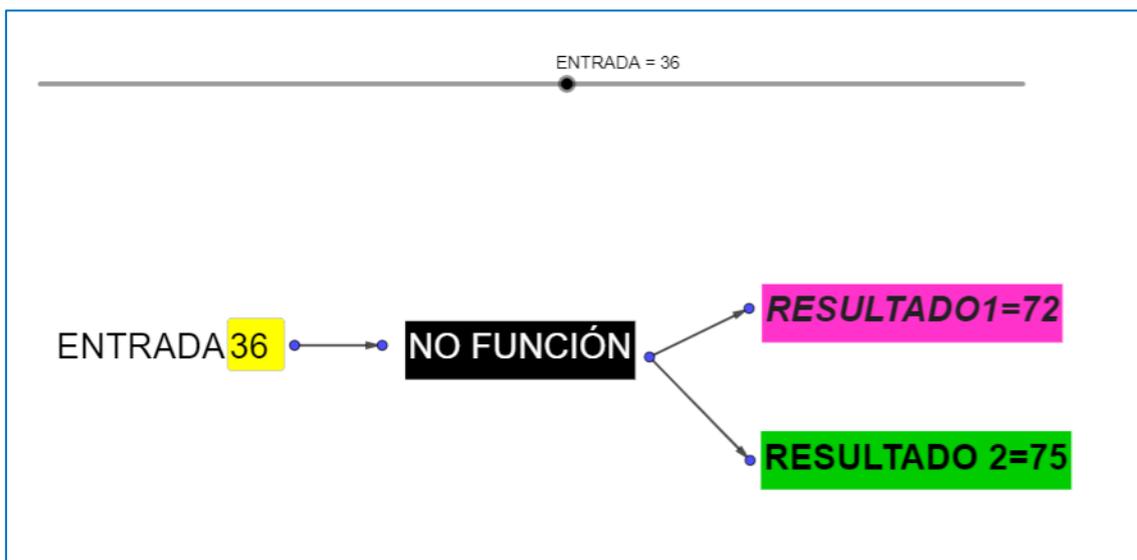


Figura 39. Applet de "Concepto de No Función". Fuente: elaboración propia.

Por último, el applet de la Figura 40, “*NOMENCLATURA FORMAL DE UNA FUNCIÓN*”, ayuda al alumno a comprender lo expresado por el libro de texto en los dos últimos párrafos, donde se habla de la nomenclatura formal de la función. Al igual que todas las actividades anteriores, el alumno se encuentra con un applet explorativo donde a través del deslizador o el campo de entrada, se puede observar como la preimagen e imagen se modifican y como corresponden a los valores de “*x*” e “*y*” respectivamente. En este caso, se consigue dar una expresión algebraica a la “*máquina mágica*” mencionada en el applet de la Figura 35 y relacionarla con la expresión formal de función.

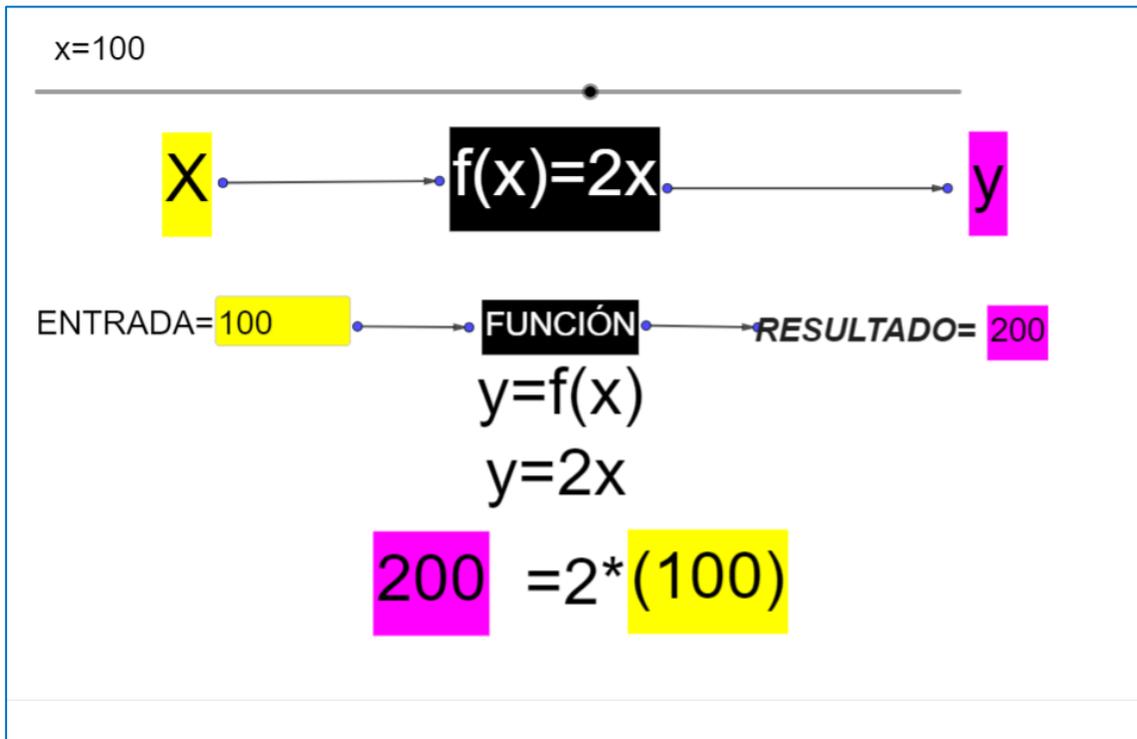


Figura 40. Applet de "Nomenclatura formal de una función". Fuente: elaboración propia.

### 9.1.2. Cálculo del valor $f(a)$ dada la función $f(x)$ y el número real "a"

El objetivo de este subapartado es mostrar al alumno el procedimiento de como calcular el valor en "a" de una función y para ello el libro de texto simplemente le muestra cómo hacerlo con tres ejemplos.

#### 2.-CÁLCULO DEL VALOR $f(a)$ DADA LA FUNCIÓN $f(x)$ Y EL NÚMERO REAL $a$

Si nos dan una función  $f(x)$ , y un número real  $a$ , calculamos el valor  $f(a)$  sustituyendo las  $x$  que aparecen en la función  $f(x)$  por el valor  $a$ . Al valor obtenido se le llama imagen de  $f$  en  $a$ .

##### Ejemplo:

Supongamos que nos dan la función  $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$  y nos piden que calculemos  $f(-1)$ ,  $f(1)$  y  $f(0)$ , entonces para calcular  $f(-1)$  sustituimos todas las  $x$  de la función por  $-1$ :

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 3, \text{ luego } f(-1) = 3.$$

$$\text{Igualmente } f(1) = 2 \cdot (1)^3 - 3(1) + 2 = 1, \text{ luego } f(1) = 1.$$

$$\text{Por último } f(0) = 2 \cdot (0)^3 - 3(0) + 2 = 2, \text{ por lo que } f(0) = 2.$$

Figura 41. Cálculo del valor  $f(a)$  dada la función  $f(x)$  y el número real  $a$ . en el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

Se considera que, en este caso, tampoco se logra trabajar el contenido de una manera que le permita al alumno dominar el proceso y entender lo que hace. Por este motivo, se ha desarrollado a través de GeoGebra el mismo contenido, pero de manera dinámica; dándole la oportunidad al alumno de modificar, casi tantas veces como quiera, la función con la que trabaja (ver Figura 42). Por todo ello, se puede considerar que estamos ante una actividad ilustrativa. Además, se aprovecha para introducir el concepto de “Imagen” y “Preimagen”.

Con lo anterior, cabe destacar el potencial de la casilla de control, la cual permite al alumno evaluar sus respuestas siempre que quiera. Esto se debe a que se muestran los cálculos de manera dinámica y continúa; facilitando así al alumno la comprensión. La expresión algebraica utilizada es una función cuadrática (cumpliendo de nuevo con el currículo)

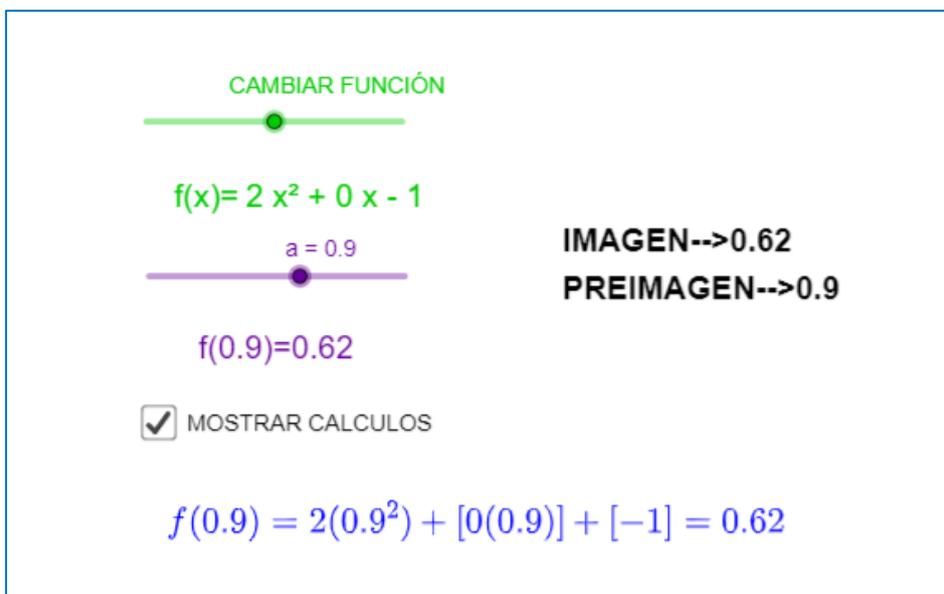


Figura 42. Applet de "Cálculo del valor  $f(a)$  dada la función  $f(x)$  y el número real  $a$ . Fuente: elaboración propia.

### 9.1.3. Obtención de puntos del plano dada una función

Al igual que en los anteriores subapartados, el libro se centra en lo procedimental en lugar de lo conceptual y es así como introduce los conceptos de coordenadas, abscisa y ordenada. Termina añadiendo un ejemplo resuelto.

**3.-OBTENCIÓN DE PUNTOS DEL PLANO DADA UNA FUNCIÓN**

Todo punto P del plano queda determinado por un par de números reales **x** e **y** que se llaman **COORDENADAS** del punto P, y se representan por el par de coordenadas **(x,y)**.

La coordenada **x** de P se llama **ABSCISA**. La coordenada **y** de P se llama **ORDENADA**.

Si nos dan una función cualquiera  $y = f(x)$ , podemos obtener distintos puntos por los que pasa la función, dándole varios valores a la **x** y calculando los valores de la **y**.

Por ejemplo si nos dan la función  $y = 2x - 3$  y decidimos darle a la **x** los valores  $-3, -2, -1, 0, 2$  y  $4$ , obtenemos los siguientes puntos que vemos en la tabla:

<b>x</b>	<b>y = 2x-3</b>	<b>Punto obtenido</b>
-3	$2(-3) - 3 = -9$	<b>(-3,-9)</b>
-2	$2(-2) - 3 = -7$	<b>(-2,-7)</b>
-1	$2(-1) - 3 = -5$	<b>(-1,-5)</b>
0	$2(0) - 3 = -3$	<b>(0,3)</b>
2	$2(2) - 3 = 1$	<b>(2,1)</b>
4	$2(4) - 3 = 5$	<b>(4,5)</b>

Figura 43. Obtención de puntos del plano dada una función en el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

Aunque a lo largo del libro de GeoGebra se pueda observar una conexión entre los subapartados anteriores y los siguientes contenidos, en el libro de texto está completamente desligados. De esta forma, al alumno puede resultarle más costoso entender los nuevos contenidos. En este caso, aprovechando la estructura que se viene utilizando, en la Figura 44 se introduce el procedimiento de calcular los puntos de una función conocida la función, pero sin perder de vista los conceptos previos. El alumno modifica el valor "x" de entrada a la función y observa como el resultado de la función en "x" y las coordenadas ordenada y abscisa están relacionados. Por todo ello, se puede decir que la actividad es ilustrativa.

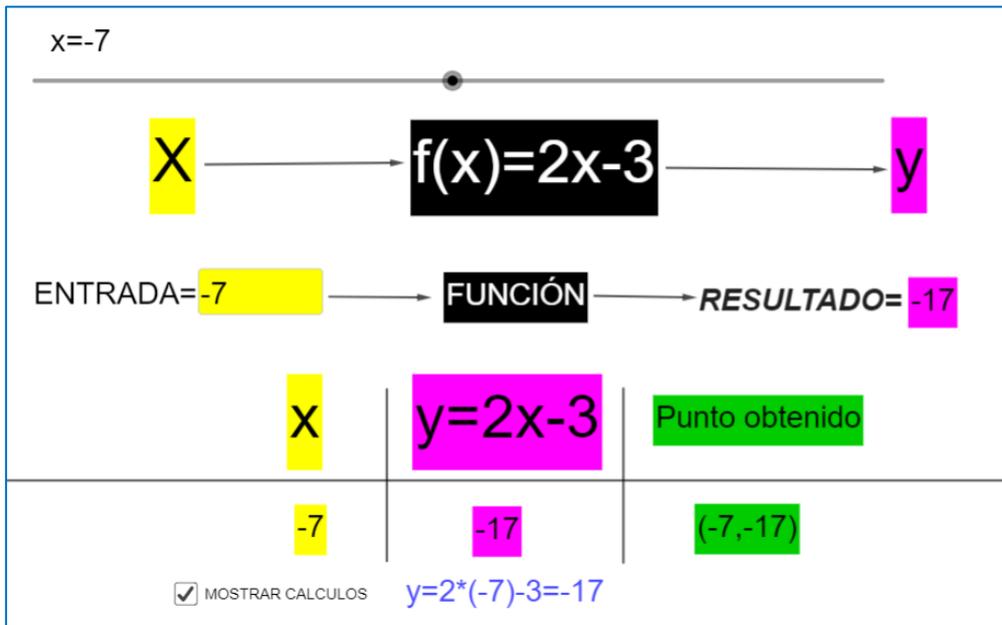


Figura 44. Applet de "Obtención de puntos del plano dada una función". Fuente: elaboración propia.

Al igual que se ha visto anteriormente, la casilla de control le permite al alumno comprobar si ha realizado correctamente los cálculos o en caso de estar en un aula presencial, permite al docente evaluar los conocimientos de los alumnos.

#### 9.1.4. Sistema de coordenadas

En este subapartado es una de las pocas veces en la que el libro se apoya en una imagen para introducir un contenido. Es cierto que el contenido a introducir es gráfico por lo que se sospecha que el uso de imágenes no tiene un fin didáctico. En este punto, el objetivo del libro de texto es introducir los ejes de coordenadas y los cuadrantes, así como las características de las coordenadas en estos cuadrantes y el punto origen.

#### 4.-SISTEMA DE COORDENADAS

Un sistema coordenado bidimensional es un sistema en el cual un punto puede moverse en todas direcciones, manteniéndose siempre en un plano.

La recta X'X recibe el nombre de EJE X y la recta Y'Y recibe el nombre de EJE Y.

La intersección entre el Eje X y el Eje Y es el punto llamado origen de coordenadas (0,0).

El origen del sistema divide a cada eje en dos semiejes:

- (a) las **ABSCISAS** ubicadas a la derecha del eje Y, respecto del origen, son positivas y las ubicadas a la izquierda son negativas.
- (b) las **ORDENADAS** ubicadas hacia arriba del eje X, respecto del origen, son positivas y las ubicadas hacia abajo son negativas.

Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes, numerados según se muestra en la figura:

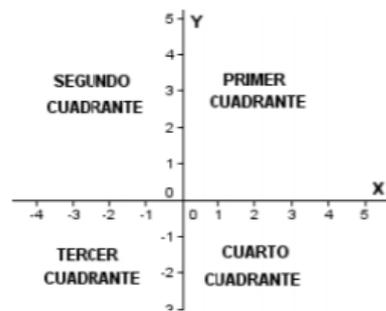


Figura 45. Sistema de coordenadas en el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

A través del applet de la Figura 46 se introducen exactamente los mismos conceptos, pero en esta ocasión se añaden dos puntos dinámicos que se desplazan a lo largo de los ejes. En el enunciado se invita al alumno a mover esos puntos (rojo y azul) y a reflexionar sobre las coordenadas ordenada y abscisa cuando el punto se encuentra en alguno de los ejes. De esta manera, a través de una actividad explorativa, el alumno es capaz de deducir que, en el eje Y la ordenada, es la única coordenada que cambia. La misma deducción puede ser aplicada al eje X y la coordenada abscisa.

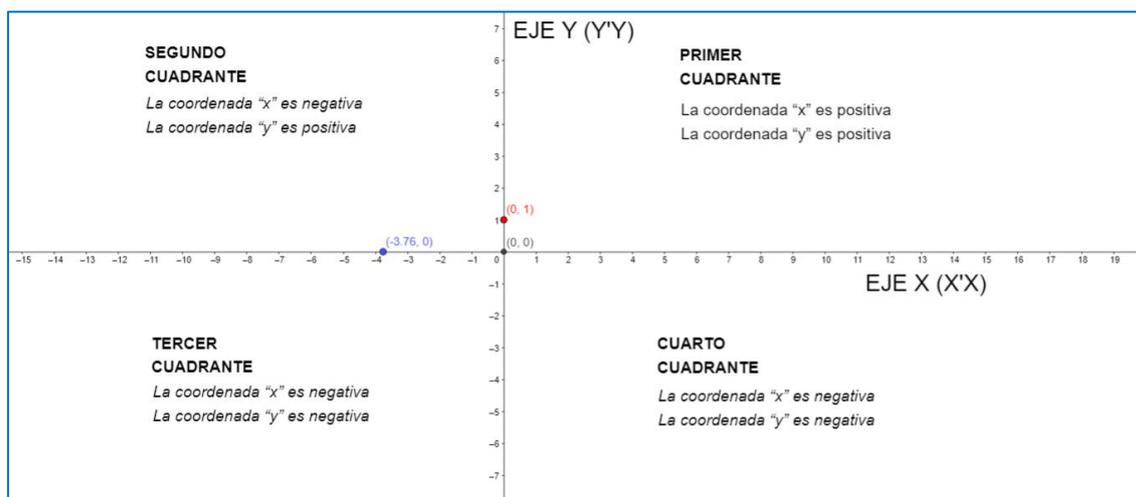


Figura 46. Applet "Sistema de coordenadas". Fuente: elaboración propia.

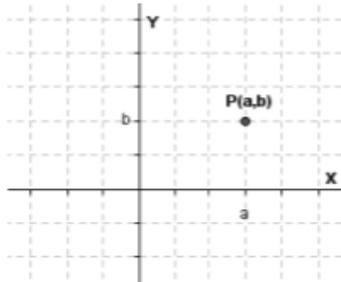
### 9.1.5. Representación de puntos en el plano

En el libro se expresa el procedimiento para dibujar un punto en un plano cartesiano lanzando paralelas por las coordenadas correspondientes. Posteriormente anota dos únicos ejemplos: un punto en el primer cuadrante y otro punto en el tercero.

### 5.-REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

El punto  $P(a, b)$  se representa en el plano trazando una línea paralela al eje Y desde el valor  $x = a$  y otra línea paralela al eje X desde el valor de la  $y = b$ . El punto de corte es P.

Fíjate en la figura:



Los puntos cuyas **ordenadas** son cero, están sobre el eje X o eje de las abscisas. Los puntos cuyas **abscisas** son cero, están sobre el eje Y o eje de las ordenadas.

#### Ejemplos:

-Para representar el punto  $P(4,3)$ , es decir  $x = 4$  e  $y = 3$ , localizamos los valores en los ejes, trazamos las paralelas a los ejes de coordenadas y se cortan en P:

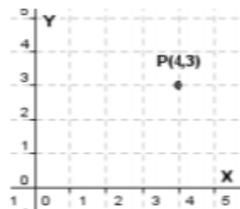


Figura 47. Representación de puntos en el plano según el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

En el caso del applet de la Figura 48 se ha diseñado de manera ilustrativa para que el alumno pueda mover el punto a su antojo por todo el plano cartesiano y que de manera dinámica le devuelva en todo momento las coordenadas del punto y el valor en el eje X y el valor en el eje Y. De esta manera el alumno es consciente de que los puntos que forman las coordenadas son los valores de “x” e “y” que toma la función.

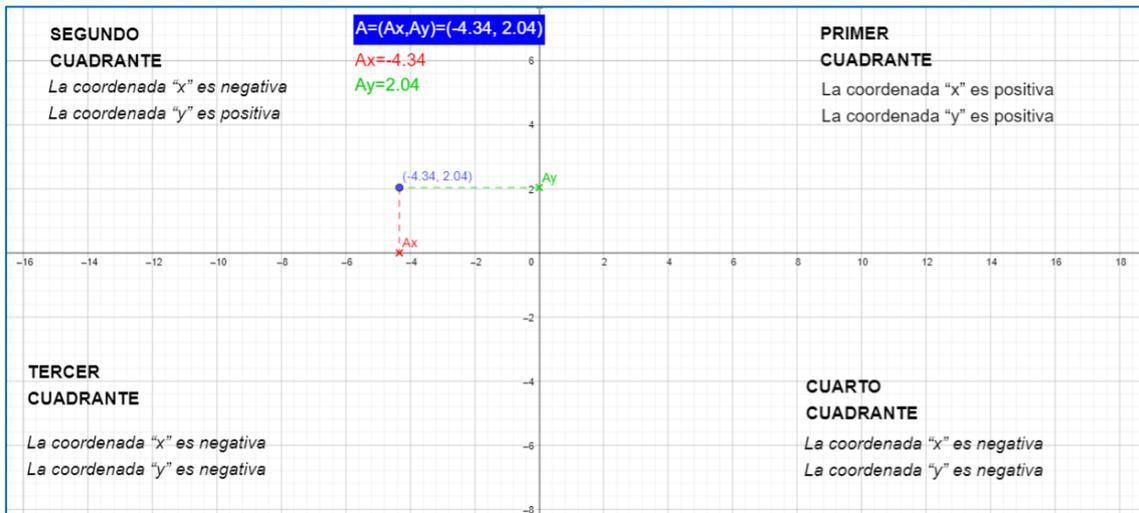


Figura 48. Applet de "Representación de puntos en el plano". Fuente: elaboración propia

Por último, para poner a prueba a los alumnos, se les da la oportunidad de hacer un ejercicio de representación de puntos como el que aparece en la Figura 49. En primer lugar, solo aparecen los puntos rojos y en caso de pulsar la casilla de control, el alumno podrá verificar la solución representada en el mismo sistema de coordenadas.

De esta manera, al igual que en los casos similares vistos anteriormente, el alumno puede evaluar su propio ejercicio en caso de trabajar a distancia o también, es el docente quien puede evaluar los conocimientos adquiridos por los alumnos.

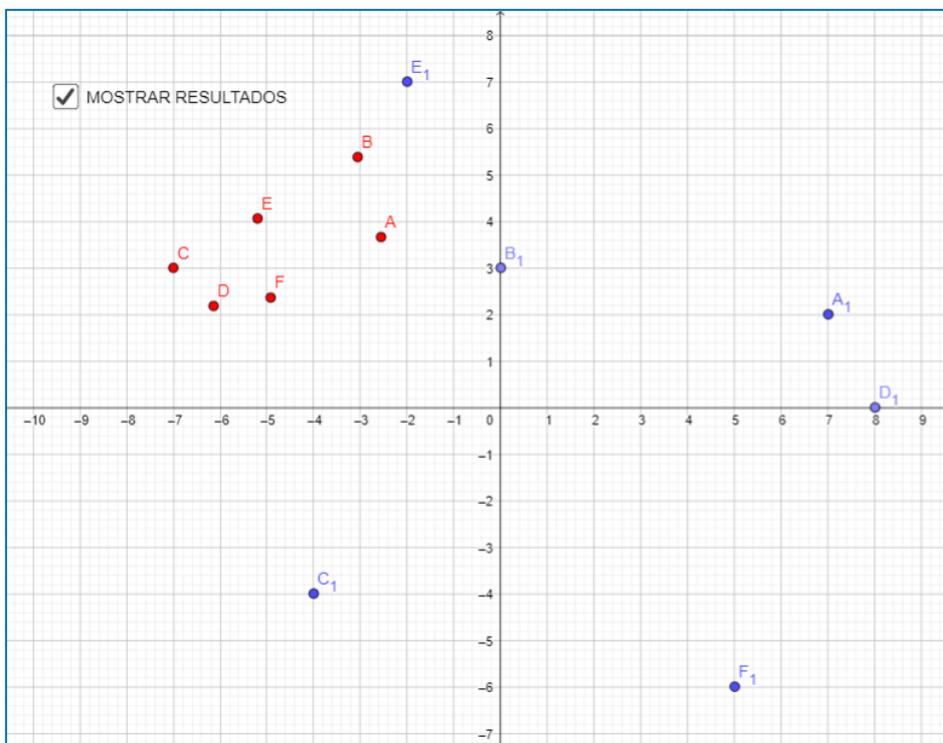


Figura 49. Applet a modo de ejercicio para representar puntos en el plano. Fuente: elaboración propia.

### 9.1.6. Representación aproximada de una función dada una tabla de valores

Al igual que en los subapartados anteriores, la representación aproximada de funciones se introduce como un mero procedimiento: unos pasos a seguir en el que en ningún momento se trabaja o se refrescan los conceptos aprendidos hasta el momento. Es decir, a través de un solo ejemplo, se desarrolla la tabla y se representa una recta.

#### 6.-REPRESENTACIÓN APROXIMADA DE UNA FUNCIÓN DADA UNA TABLA DE VALORES

Si nos dan una tabla de valores con las  $x$ , y con las  $y$ , ordenamos los datos según las  $x$ , de menor a mayor (o de mayor a menor, como desees), formamos los puntos correspondientes, los representamos en un mismo plano y los unimos. Lo que hemos obtenido es una representación aproximada de la función a la que corresponden dichos puntos.

#### Veamos un ejemplo:

Si nos piden que representemos la gráfica dada la siguiente tabla de valores de la función

<b>x</b>	1	0	-1	3	2	4	-2
<b>y</b>	2	0	-2	6	4	8	-4

Ordenamos los datos y formamos los puntos:

<b>x</b>	<b>y</b>	<b>Punto obtenido</b>
4	8	(4, 8)
3	6	(3, 6)
2	4	(2, 4)
1	2	(1, 2)
0	0	(0, 0)
-1	-2	(-1, -2)
-2	-4	(-2, -4)

Ahora los representamos en un mismo plano y los unimos:

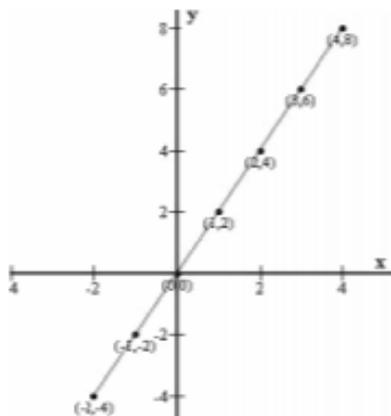


Figura 50. Representación aproximada de una función dada una tabla de valores según el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

En ninguno de los casos se hace reflexionar al alumno sobre los valores de la tabla, los cuadrantes donde se representan los puntos o la relación entre los valores de “ $x$ ” e “ $y$ ”. Por ello, en el applet de GeoGebra se desarrolla una actividad ilustrativa que permita al alumno reflexionar. En primer lugar, como se puede observar en la Figura 51 se tabulan las dos rectas “ $y=x$ ” e “ $y=-x$ ”, las cuales dividen en dos todos los cuadrantes.

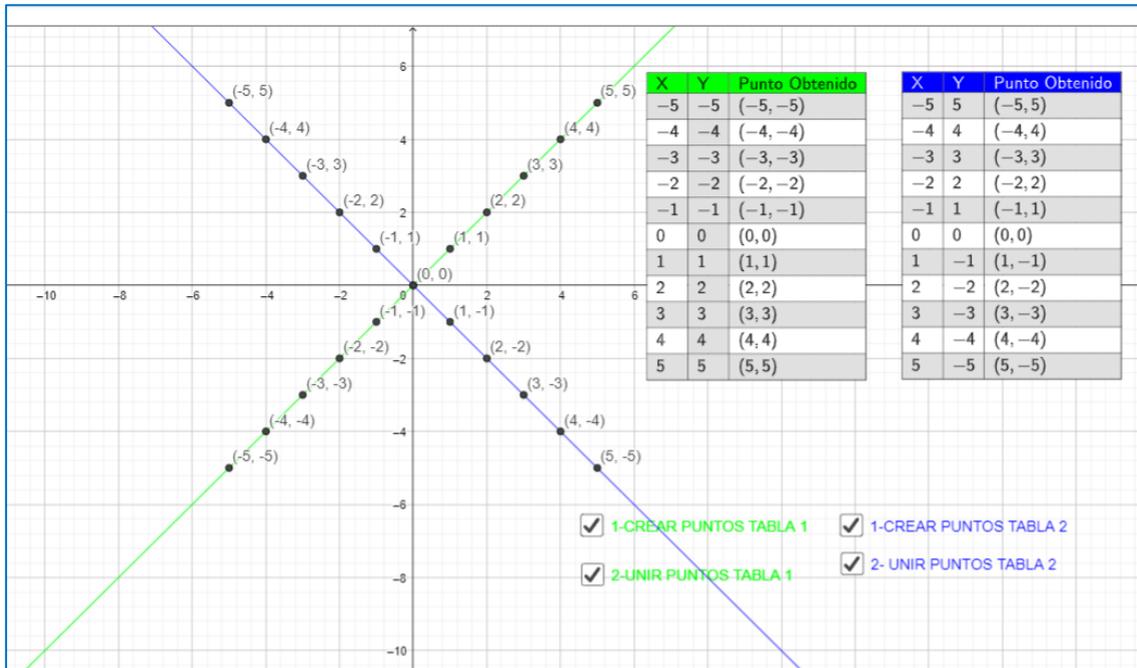


Figura 51. Applet para la tabulación de “ $y=x$ ” e “ $y=-x$ ”. Fuente: elaboración propia.

Las casillas de control permiten al alumno poder trabajarlo previamente y posteriormente evaluar su propio ejercicio.

Después, con el objetivo de recordarlo, en Figura 52 se vuelve a trabajar el significado de punto perteneciente a la recta a través de una actividad ilustrativa. A través de unos deslizadores, el alumno es capaz de observar como para cada valor distinto de “ $x$ ” existe un valor “ $y$ ” correspondiente, el cual está definido por un punto.

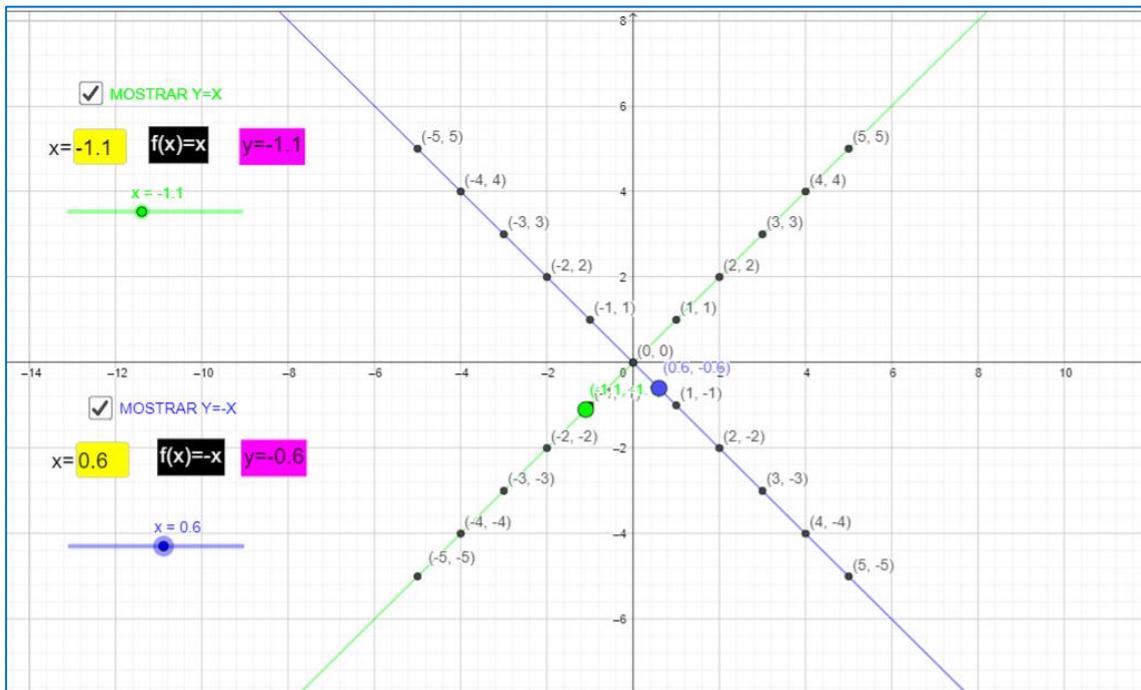


Figura 52. Applet para trabajar el significado de punto perteneciente a una recta. Fuente: elaboración propia.

A través de la tabulación de estas funciones, en la Figura 53 se hace reflexionar al alumno a través de una actividad ilustrativa sobre cómo varían los valores de la columna “y” en función de la posición de la recta sobre las rectas “ $y=x$ ” o “ $y=-x$ ”. Para ello, el alumno puede modificar los puntos pertenecientes a una recta con un deslizador mediante el que varía la pendiente de la recta que está estudiando.

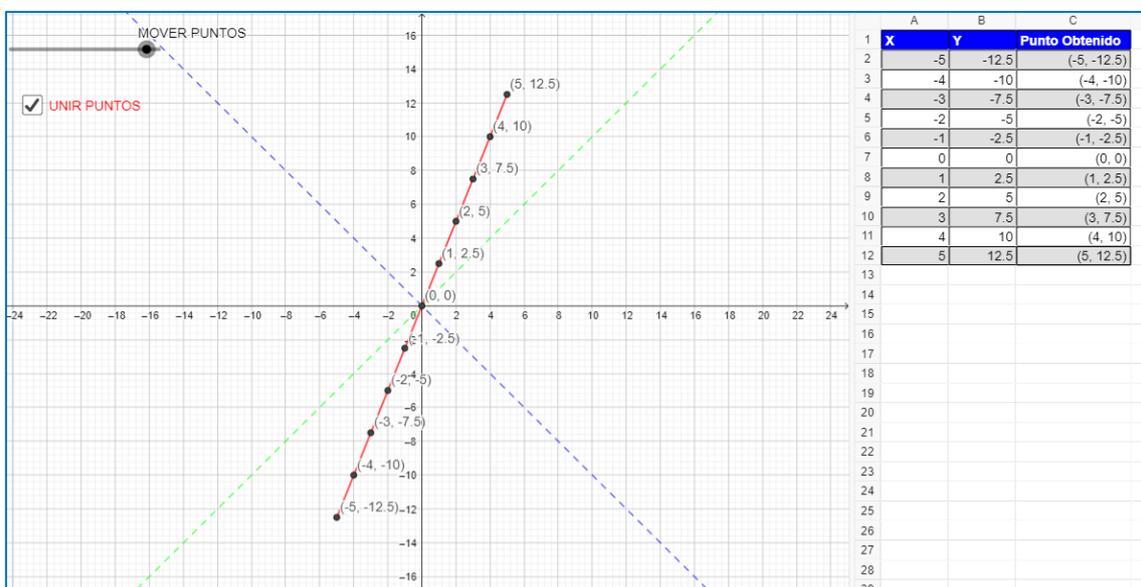


Figura 53. Applet para la representación tabular de funciones. Fuente: elaboración propia.

Como añadido al applet anterior, se incluye una casilla de control que permite al alumno unir los puntos y visualizar la representación de la recta que aparece en la tabla.

En tercer lugar y como remate a este punto, se muestra la representación de una “no función” en el applet de la Figura 54 para que los alumnos integren de manera ilustrativa

la idea. Este applet les permite observar a través de un deslizador como para a cada valor de “x” le corresponden dos resultados distintos de “y”.

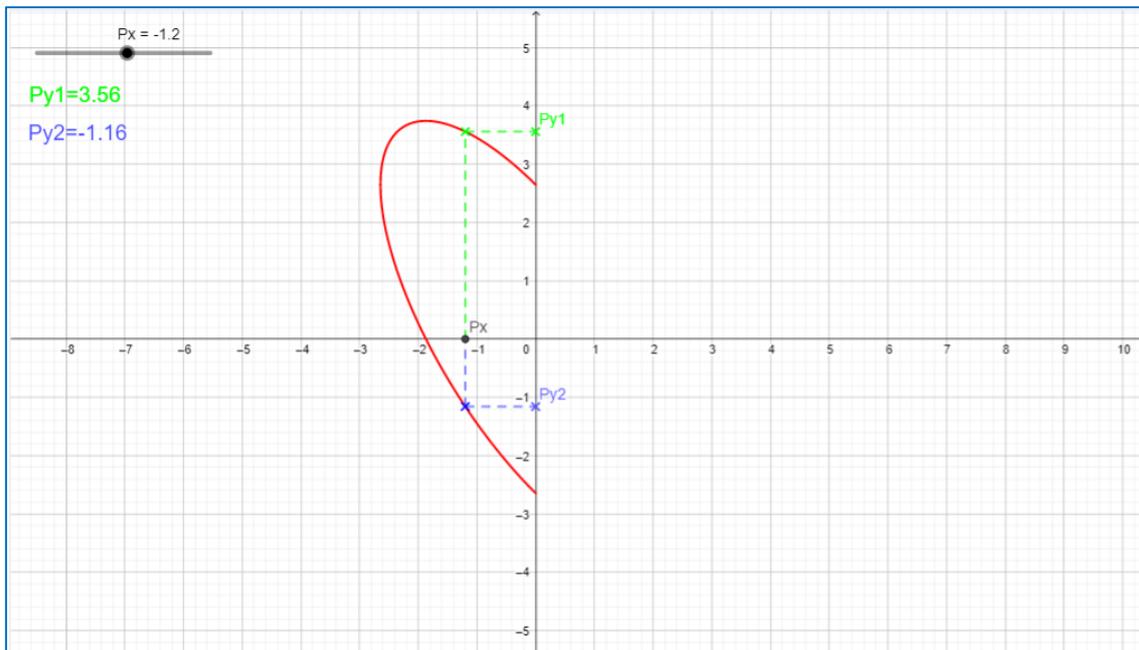


Figura 54. Applet con representación gráfica de una "no función". Fuente: elaboración propia.

### 9.1.7. La función de primer grado: La recta

Esta parte se puede considerar el punto más complejo del todo el tema y en el que la mayoría de los alumnos encuentran dificultades. En el libro de texto, pese a que no esté identificado, podemos encontrar cuatro partes teóricas diferenciadas:

- La expresión genérica de la recta y su expresión a través de tablas.
- La forma explícita de la recta.
- El valor de la pendiente.
- La representación de funciones (conociendo un punto y la pendiente)

El libro de texto comienza introduciendo la expresión general de recta y definiendo la representación gráfica de ésta con tablas de valores.

Una **recta** tiene por ecuación algebraica  $y = ax + b$  ( $y = \text{polinomio-de-grado-1}$ ), salvo que la recta sea constante, en cuyo caso la ecuación es de la forma  $x = K$  o  $y = K$ .

Para representar gráficamente una recta, basta con darle dos valores a la  $x$ , obtener los valores correspondientes de la  $y$ , representar los puntos resultantes y estirarla; sin embargo, para mayor precisión, le damos a la  $x$  tres valores y comprobamos que lo que formamos es una línea recta. Para que todos pongamos los mismos puntos, escogemos como valores de la  $x$ , el -1, el 0 y el 1.

Figura 55. Introducción a la expresión algebraica de la recta en el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

Esta primera parte de la teoría viene complementada con el applet de la Figura 56 donde se representan varias rectas en GeoGebra con el único objetivo de que el alumno pueda observar la expresión algebraica de distintas rectas. En este caso, no se puede clasificar como ilustrativa puesto que son ejemplos concretos en los que no se puede ilustrar una propiedad.

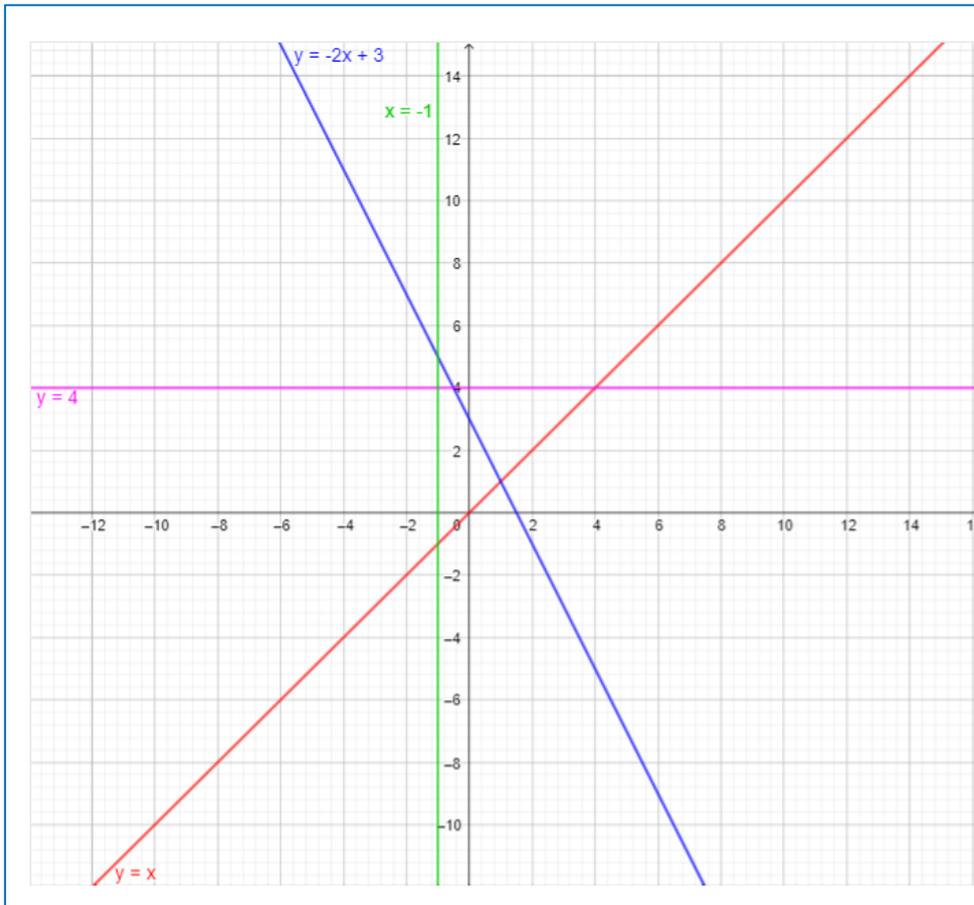


Figura 56. Representación en GeoGebra de varias rectas con su expresión algebraica. Fuente: elaboración propia.

En la segunda parte, el libro habla de la forma explícita de la función y define el valor de “a” como la pendiente y el de “b” como el valor de corte con la ordenada. En este caso, no hay lugar para la reflexión, puesto que el alumno no tiene oportunidad de observar cómo afecta la variación de esos valores a la propia recta. Para complementar esta ausencia, se ha generado un applet explorativo como el de la Figura 57 en el que el alumno puede mover la recta y observar cómo varía la expresión algebraica de ésta.

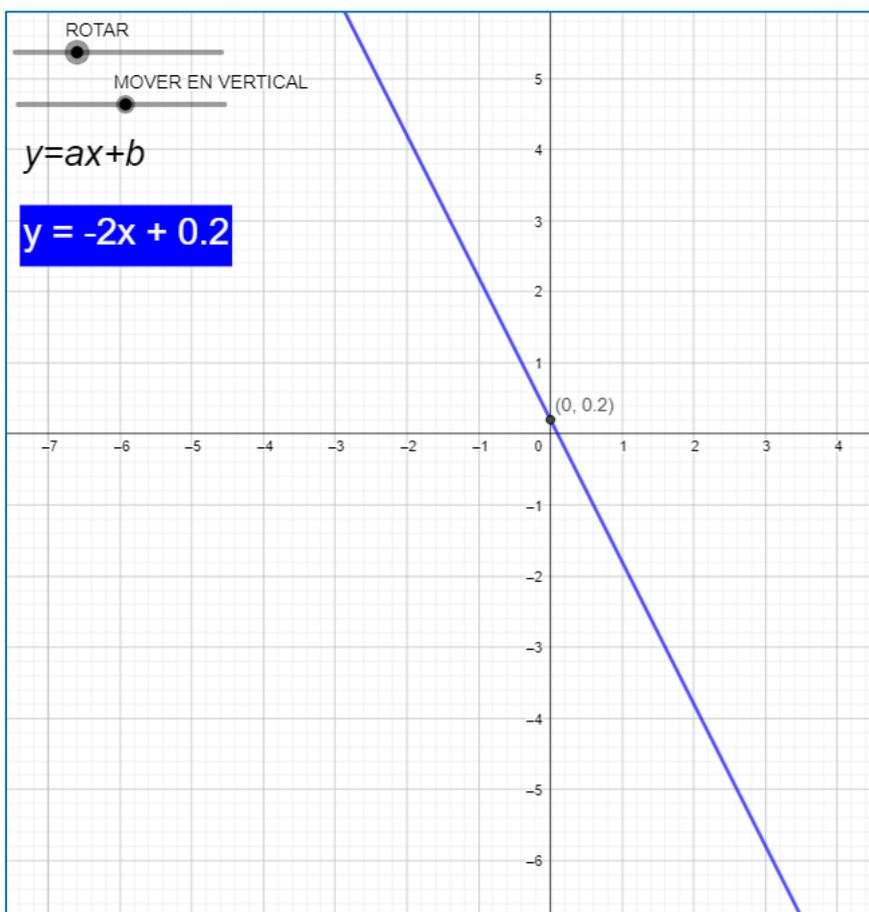


Figura 57. Applet explorativo de introducción al comportamiento de una recta en función de su expresión algebraica. Fuente: elaboración propia.

Posteriormente, debe responder a unas preguntas reflexivas como las de la Figura 58 que le harán interiorizar los conceptos trabajados y ayudará al alumno a deducir las propiedades que comparten las rectas.

**VALOR "a"**

¿Qué ocurre cuando "a" varía?

¿Qué ocurre cuando "a" se hace cero?

¿Qué ocurre cuando "a" se vuelve negativo?

¿Cuándo cambias el valor de "a" cambia el valor de "b"?

**VALOR "b"**

¿Qué ocurre cuando "b" varía?

¿Qué ocurre cuando "b" se hace cero?

¿Qué ocurre cuando "b" se vuelve negativo?

¿Cuándo cambias el valor de "b" cambia el valor de "a"?

Figura 58. Preguntas reflexivas sobre el comportamiento de una recta. Fuente: elaboración propia.

En lo referente al cálculo de la pendiente, el libro hace referencia a una relación geométrica con la altura y la base de un triángulo situado bajo la recta. Acompaña la

explicación con un dibujo ilustrativo de una recta concreta donde señala el valor de la pendiente y el de corte con la ordenada.

Geoméricamente, si dibujamos la recta y formamos un triángulo rectángulo cualquiera, cuya hipotenusa esté situada en la recta, la pendiente  $a$  es igual a la división entre el lado del triángulo paralelo al eje Y y el lado del triángulo paralelo al eje X.

Figura 59. Concepto de pendiente según el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

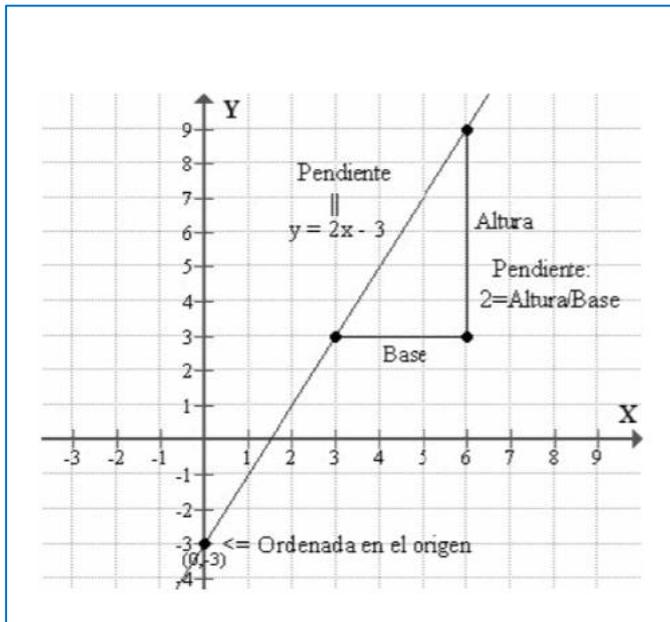


Figura 60. Representación gráfica de pendiente en el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

Sin embargo, en este caso, no se aporta una explicación más detallada del cálculo de la pendiente. Para subsanar esta ausencia, el applet ilustrativo de la Figura 61 nos permite generar un modelo genérico en el que, independientemente de la recta, podemos observar como la pendiente varía según corresponde entre dos puntos. Además, se muestra cómo se calcula la relación entre los dos puntos de manera que los alumnos interiorizan los conocimientos más básicos para ejercicios más próximos.

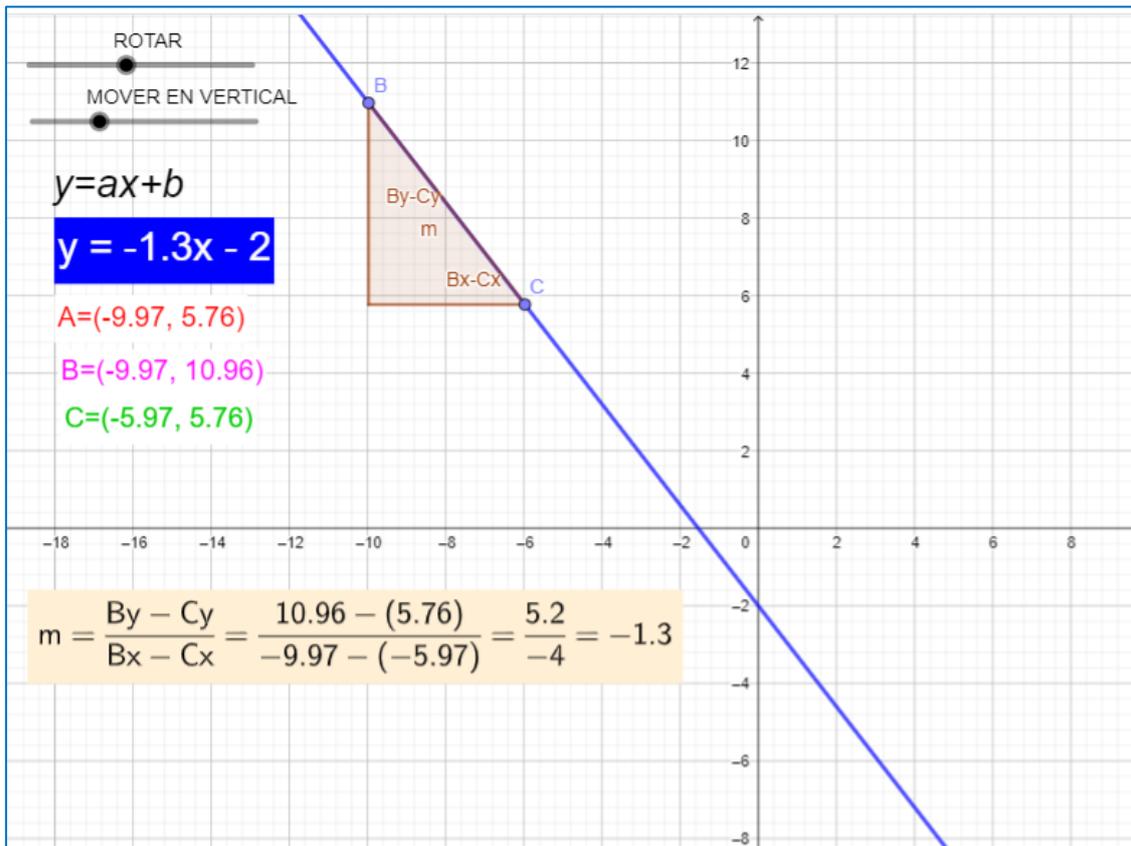


Figura 61. Applet para representar el significado geométrico y aritmético de pendiente. Fuente: elaboración propia.

Por último, en lo referente a la representación de la recta, el libro trabaja de manera muy procedimental todos los casos, asignando un paso a paso al ejercicio. En ningún caso se profundiza en la comprensión conceptual que existe detrás de cada ejercicio, identificando los datos conocidos y las incógnitas y trabajando desde los conceptos previos estudiados.

**Ejercicio 7.6:** De una recta nos dan la ordenada en el origen  $b = 2$  y nos dicen que pasa por el punto  $(1, 5)$ , calcula la ecuación de la recta.

-----

La recta tiene por ecuación  $y = a \cdot x + b$ , entonces nuestra recta tiene por ecuación  $y = a \cdot x + 2$ , por lo que debemos calcular el valor  $a$ , sabiendo que pasa por el punto  $(1, 5)$ . Luego sustituimos la  $x = 1$  y la  $y = 5$ , entonces  $5 = a \cdot 1 + 2$ , despejamos la  $a$  y obtenemos que  $a = 3$ , por lo que la ecuación de la recta que nos piden es  $y = 3x + 2$ .

Figura 62. Representación de la recta conociendo el corte en la ordenada y la pendiente según el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

**Ejercicio 7.7:** De una recta sabemos que su pendiente  $a = 1$  y que pasa por el punto  $(2, -3)$ .  
Calcula la ecuación de dicha recta.

-----

Como  $a = 1$ , la ecuación de la recta es de la forma  $y = x + b$ , por lo que debemos calcular la **b**, sustituyendo  $x = 2$ ,  $y = -3$ . Entonces,  $-3 = 2 + b$ , por lo que  $b = -5$ , luego la ecuación de la recta que nos piden es  $y = x - 5$ .

Figura 63. Representación de la recta conociendo un punto y la pendiente según el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

Como complemento a la representación de funciones, las actividades previas desarrolladas en GeoGebra le permiten al alumno identificar de manera sencilla la pendiente y el corte con la ordenada; de manera que representar una recta sea algo inmediato. Es por ello, que en este caso el planteamiento de la representación geográfica ha sido distinto, considerando oportuno hacerlo en un primer inicio a través del applet de la Figura 64 donde se representa a través de la expresión algebraica de la recta.

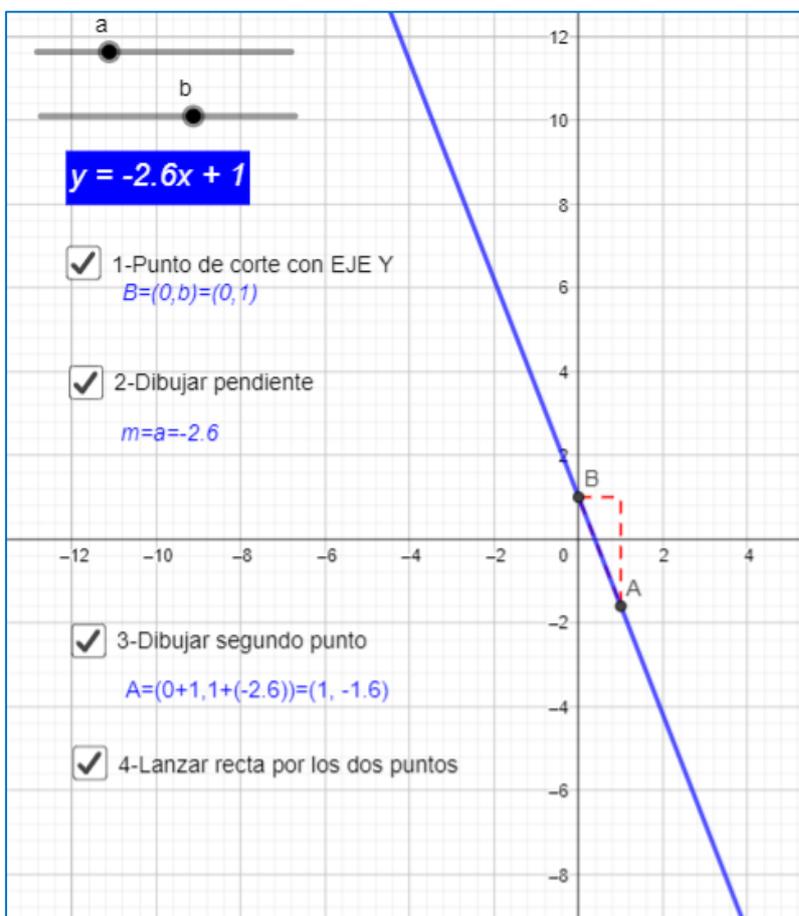


Figura 64. Applet para la representación de la recta a través de la expresión algebraica. Fuente: elaboración propia.

Las casillas de control que aparecen en el paso a paso tienen un objetivo triple. En primer lugar, permite al alumno evaluar cada paso en la representación gráfica de una recta a través de la expresión algebraica. En segundo lugar, en caso de estar en una clase presencial permite al docente introducir el contenido de manera secuenciada. Por último,

permite al alumno de manera muy ilustrativa y dinámica observar como todas las propiedades se cumplen independientemente de la recta.

### 9.1.8. Recta que pasa por dos puntos

En el libro, se busca resolver las cosas de la manera más mecánica posible, sin entrar en conceptos ni en reflexiones. De esta forma se pretende que el alumno reconozca un patrón de ejercicio y sepa que es lo que tiene que hacer.

La forma de afrontar ese tipo de ejercicios es resolviendo un sistema de ecuaciones con ambos puntos que generen la expresión de la recta, para posteriormente, representarla.

Si nos dan dos puntos, podemos hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos. En primer lugar escribimos la forma de la recta  $y = ax + b$ , sustituimos los puntos formando un sistema de ecuaciones. Resolvemos el sistema de ecuaciones, hallamos  $a$  y  $b$  y formamos la ecuación correspondiente.

*Figura 65. Procedimiento para representar una recta conociendo dos puntos según el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.*

A este caso concreto se le suman dos ejemplos idénticos en los que el libro de texto muestra el procedimiento paso a paso para resolver el ejercicio.

**Ejercicio 8.2:** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto P(1,3). Representala.

-----

Sustituimos los puntos en la ecuación  $y = ax + b$ :

Para O,  $x = 0$ ,  $y = 0$  y para P,  $x = 1$ ,  $y = 3$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ 3 = a \cdot 1 + b \end{cases} \quad \text{Resolvemos el sistema, de donde } a = 3 \text{ y } b = 0.$$

Entonces la ecuación de la recta es  $y = 3x$ .

Representamos:

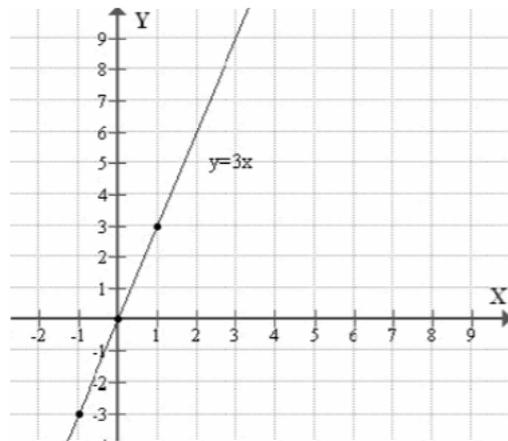


Figura 66. Ejercicio resuelto sobre la representación gráfica de la recta conociendo dos puntos. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

Por parte del autor del trabajo, se ha decidido focalizar el cálculo de la expresión de la recta en conceptos ya trabajados previamente y en los que el alumno ha ido adquiriendo destreza con el tema. Con la premisa de que sólo es necesario conocer dos puntos para definir una recta, se introducen de manera dinámica tres applets ilustrativos (según el caso) para que el alumno escoja el que mejor le convenga. Todos ellos, son actividades ilustrativas.

Los dos primeros son para cuando se conocen dos puntos de la recta. El primero, Figura 67 consiste en sustituir un punto en la expresión con previo cálculo de la pendiente.

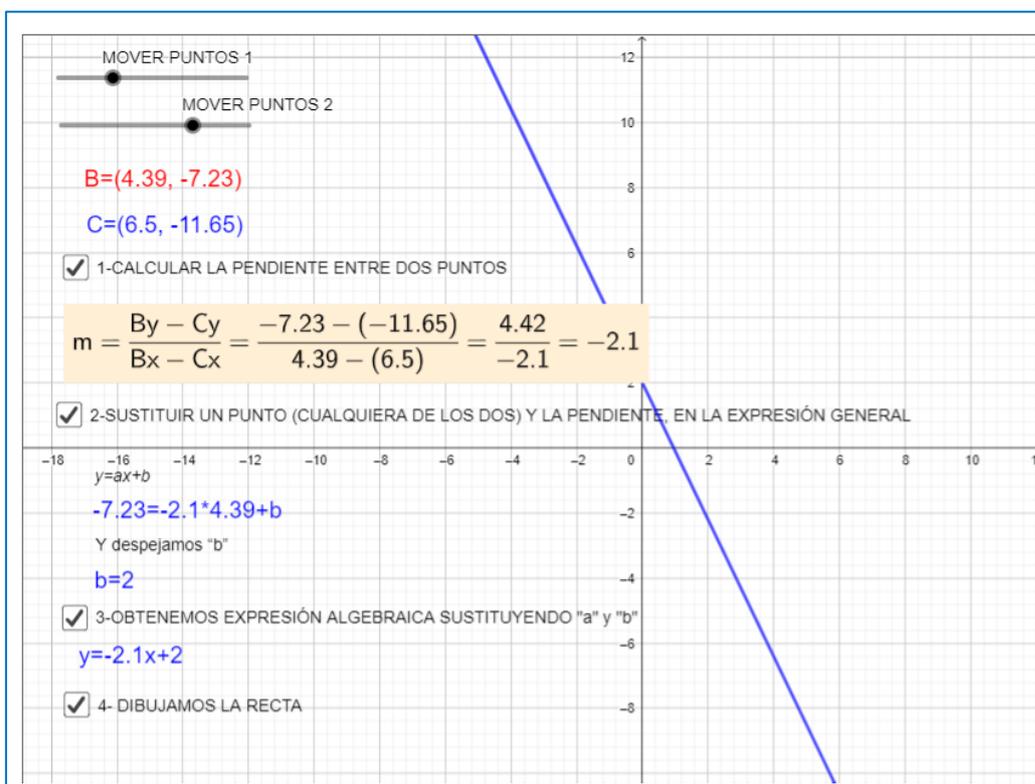


Figura 67. Applet para la representación gráfica de una recta conociendo dos puntos a través del cálculo de la pendiente. Fuente: elaboración propia.

El segundo, Figura 68, trabaja de la misma manera que lo hace el libro de texto, formando un sistema de ecuaciones.

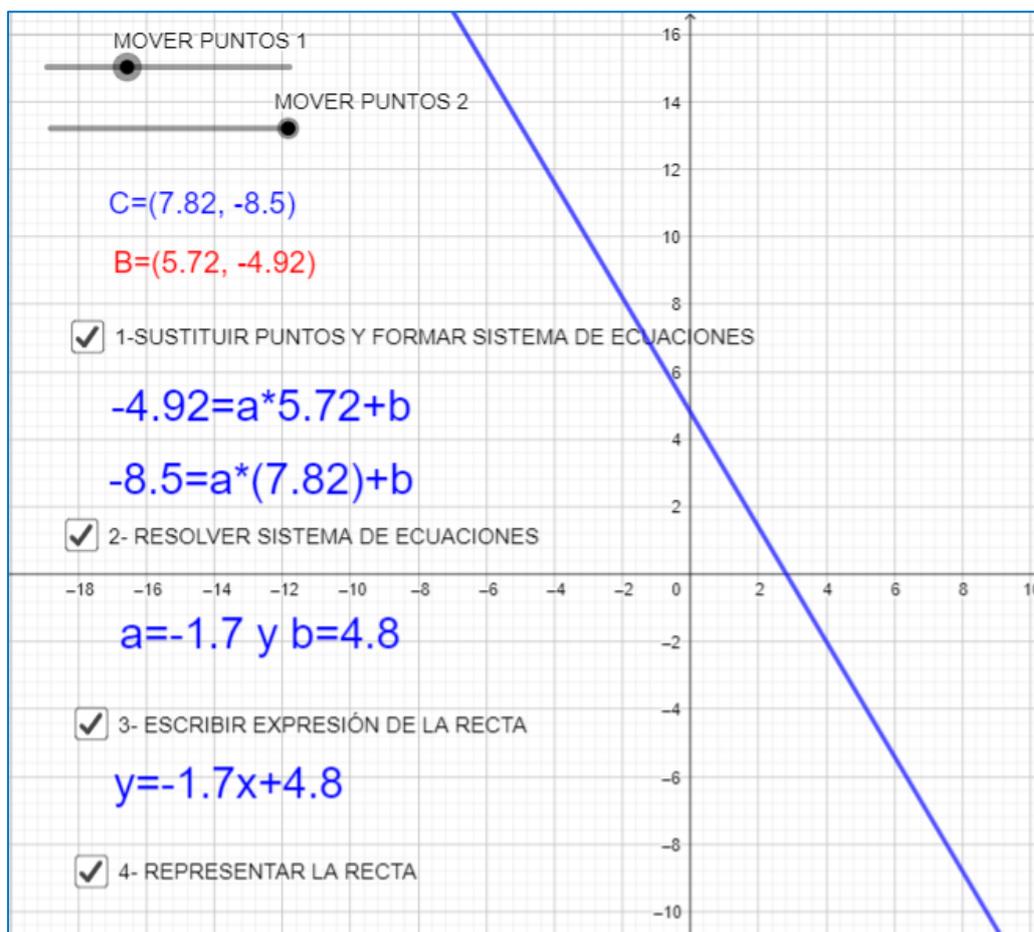


Figura 68. Applet para la representación de la recta conociendo dos puntos a través de la formación de un sistema de ecuaciones. Fuente: elaboración propia.

En ambos applets, la actividad se encuentra secuenciada de manera que logramos alcanzar los tres objetivos citados en el apartado anterior.

El tercer applet de la Figura 69 se basa en calcular la recta conociendo cualquier punto y su pendiente. De esta manera y de manera ilustrativa, el alumno puede decidir la pendiente y el punto por donde quiere que pase la recta.

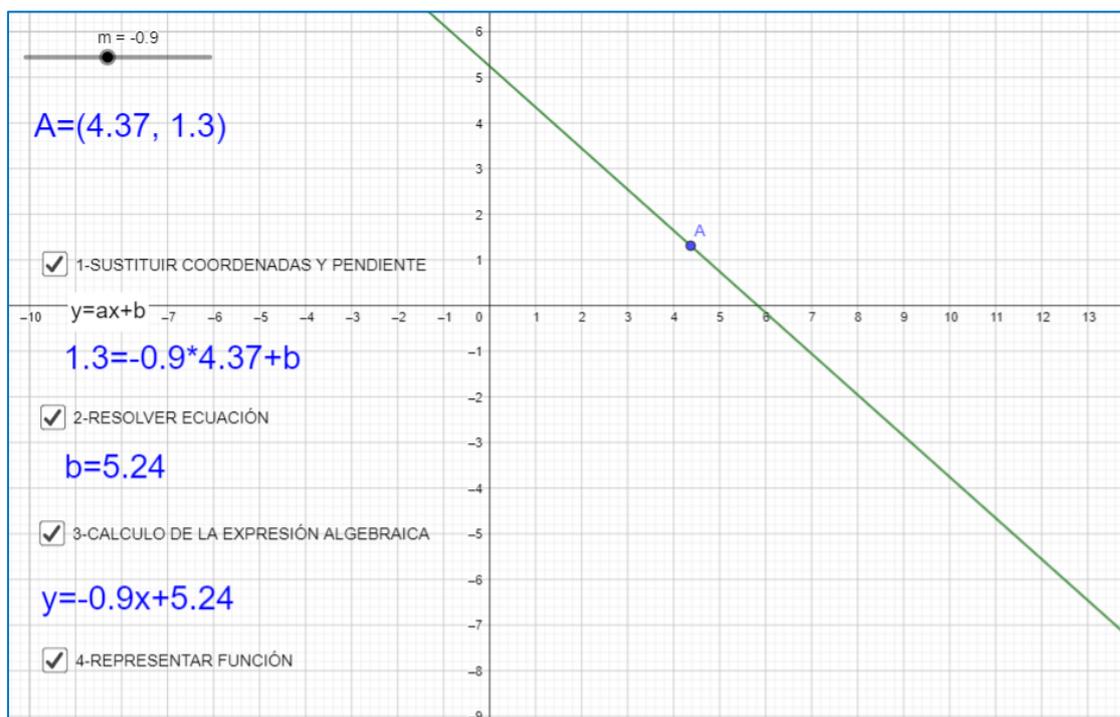


Figura 69. Applet para representar la recta conociendo un punto y la pendiente. Fuente: elaboración propia.

La ventaja que ofrece el applet de la Figura 69 frente al libro es que, primero, refresca todos los contenidos impartidos hasta el momento y segundo, le ofrece la posibilidad al alumno de generar tantos ejemplos como desee y con solución en todos los casos.

### 9.1.9. Rectas paralelas

Este subapartado, aunque no aparezca expresamente en el aula virtual para el curso de 3º de ESPA a distancia, si lo hace en el libro de texto donde simplemente el autor de éste define rectas paralelas como dos rectas con un mismo valor de pendiente.

### 9.-RECTAS PARALELAS

Dos rectas son **paralelas** cuando tienen la **misma pendiente**.

**Ejercicio 9.1:** Escribe cinco rectas paralelas a  $y = 2x - 2$ .

-----  
Como la pendiente es  $a = 2$ , basta escribir cinco rectas cuya pendiente sea 2, por ejemplo:  
 $y = 2x$ ,  $y = 2x - 1$ ,  $y = 2x + 3$ ,  $y = 2x - 4$ ,  $y = 2x + 200$

**Ejercicio 9.2:** Indica si son o no paralelas  $y = 3x - 1$  e  $y = 3x + 2$ . Representálas

-----  
Como ambas tienen la misma pendiente  $a = 3$ , son paralelas.

Formamos la tabla de valores de  $y = 3x - 1$ :

x	$y = 3x - 1$	Puntos
-1	-4	(-1,-4)
0	-1	(0,-1)
1	2	(1,2)

Formamos la tabla de valores de  $y = 3x + 2$ :

x	$y = 3x + 2$	Puntos
-1	-1	(-1,-1)
0	2	(0,2)
1	5	(1,5)

Representamos:

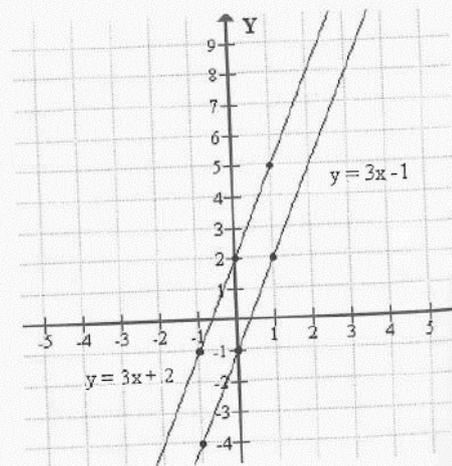


Figura 70. Rectas paralelas según el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

Pese a ser un concepto sencillo, a través de GeoGebra se ha generado un applet ilustrativo como el de la Figura 71 donde se observa como todas las rectas son paralelas al mantener la misma pendiente.

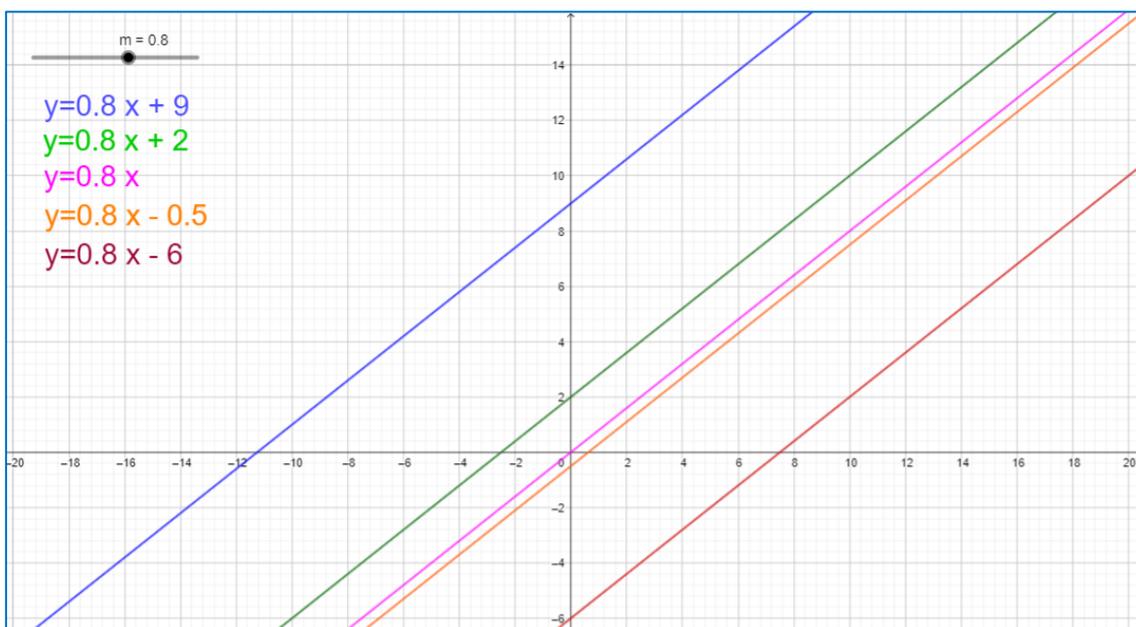


Figura 71. Applet ilustrativo de rectas paralelas. Fuente: elaboración propia.

Además, para compensar los pocos ejemplos que puede traer el libro, se ha creado el applet ilustrativo de la Figura 72 en el que el alumno puede modificar la pendiente de la recta paralela y el punto por el que pasa con solo desplazarlo. De esta manera, el alumno dispone de numerosos ejemplos para entrenar y comprobar que son correctos.

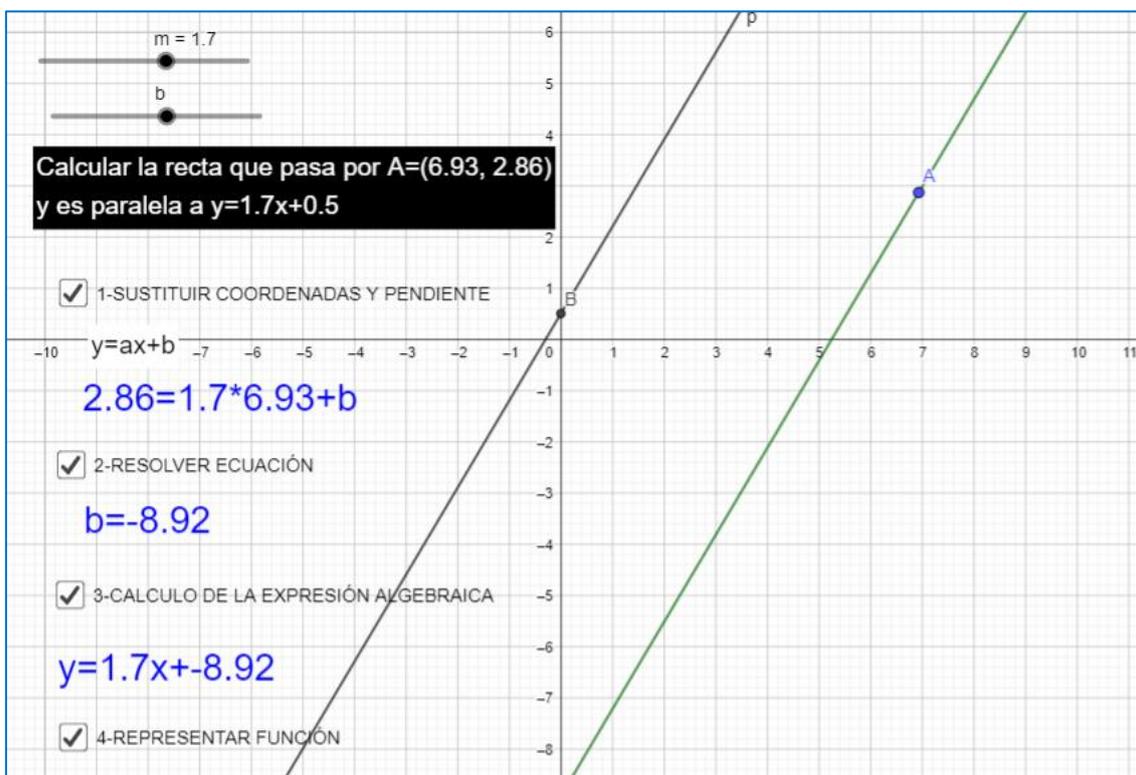


Figura 72. Applet para representar rectas conociendo una recta paralela y un punto. Fuente: elaboración propia.

### 9.1.10. Rectas perpendiculares

Al igual que el subapartado anterior, éste no aparece en el temario del aula virtual pero sí aparece en el libro de texto de referencia. Esta propiedad establece que el producto de las pendientes debe ser “-1”. Posteriormente, añade dos ejemplos donde pide calcular una recta conociendo una recta perpendicular y otra paralela.

#### 10.-RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas son **perpendiculares** (forman entre sí, un ángulo de  $90^\circ$ ), cuando **el producto de sus pendientes es -1**.

**Ejercicio 10.1:** Indica la posición en el plano de las rectas  $y = 2x - 3$  e  $y = \frac{-1}{2}x + 1$ .

Representálas.

Como el producto de sus pendientes es -1, entonces son perpendiculares.

La representación gráfica es la siguiente:

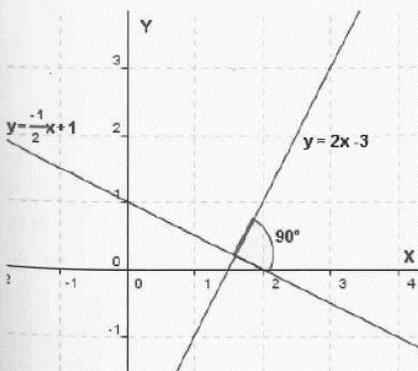


Figura 73. Rectas perpendiculares en el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.

En este caso, es importante que el alumno sea consciente de lo que es realmente perpendicular o no. Por ello, se ha generado un applet ilustrativo como el de la Figura 74 donde, de manera dinámica, se pueden mover las rectas hasta lograr que el producto entre sus pendientes sea “-1” y el alumno pueda validar que son perpendiculares.

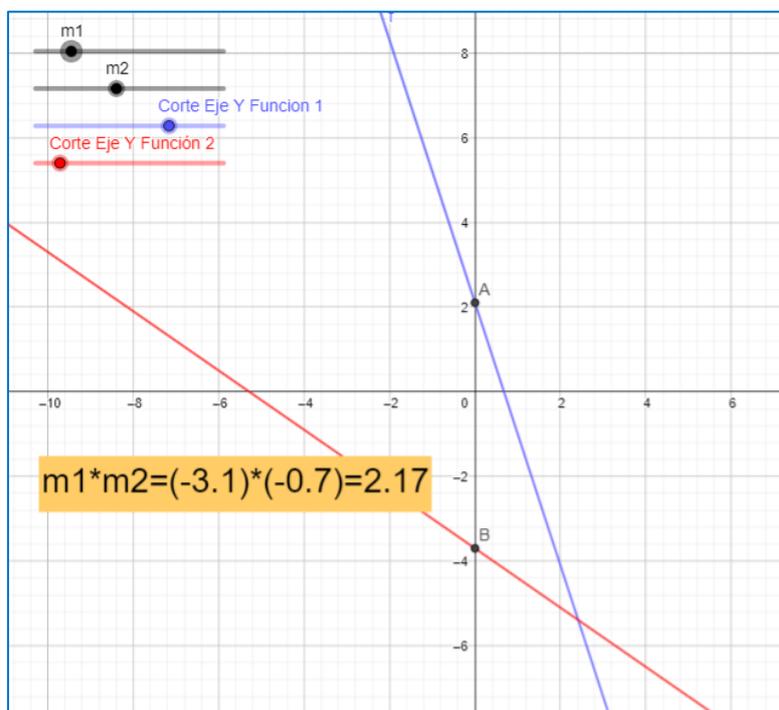


Figura 74. Applet ilustrativo de la perpendicularidad de dos rectas. Fuente: elaboración propia.

Posteriormente, al igual que en el subapartado de rectas paralelas, se genera el applet ilustrativo de la Figura 75 en el que se recogen la posibilidad de generar numerosos ejercicios (con opción de ser resueltos) para poder entrenar. A través de las casillas de control, el alumno posee el poder de evaluar el mismo sus conocimientos comparando su actividad con la solución que le proporciona la actividad.

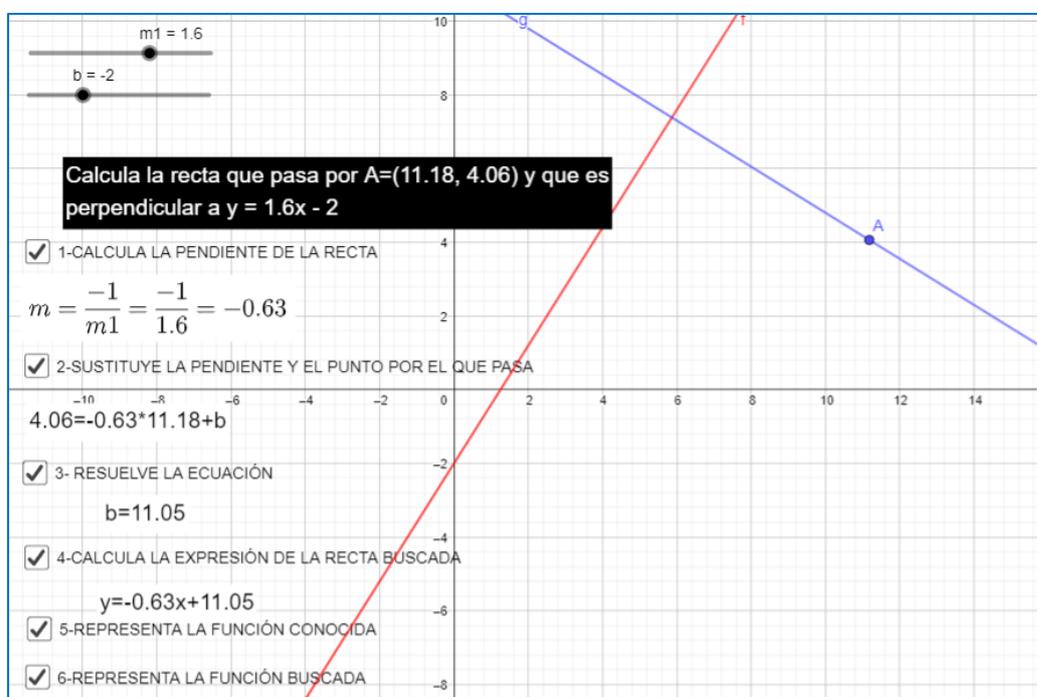


Figura 75. Applet de representación de rectas conociendo una recta perpendicular y un punto por el que pasa. Fuente: elaboración propia.

### 9.1.11. Resolución gráfica y analítica de dos rectas

El libro presenta la resolución gráfica y analítica de sistemas como el punto de corte entre dos rectas. Para ello, primero resuelve siempre analíticamente, además con lo que parece un método preestablecido de “pivotes cruzados”, y posteriormente representa ambas funciones.

#### 11.-RESOLUCIÓN GRÁFICA Y ANALÍTICA DE DOS RECTAS

En el plano, dos rectas son **paralelas** o se **cortan** en un punto.

Cuando nos piden que resolvamos **analíticamente** dos rectas no paralelas, lo que nos están pidiendo realmente es que resolvamos el sistema de ecuaciones que forman, que hallemos el valor de la  $x$  así como el de la  $y$ , que serán las coordenadas del punto donde se cortan  $P(x,y)$ . Para resolverlo analíticamente, utiliza el **método de los pivotes cruzados**: Consiste en multiplicar toda la segunda ecuación por el valor o pivote que acompaña a la  $x$  en la primera ecuación e igualarlo al producto de la primera ecuación por el valor que acompaña a la  $x$  en la primera ecuación. Del mismo modo, se puede realizar con las  $y$ .

Cuando nos piden que resolvamos **gráficamente** dos rectas, nos están pidiendo que las representemos en el plano y que indiquemos el punto **P** donde se cortan si no son paralelas.

Figura 76. Resolución gráfica y analítica de dos rectas según el libro de texto de estudio. Fuente: Munsuri Fernández, R. (2017). *Matemáticas ESPA. Módulos III y IV. España: Sahats.*

El applet ilustrativo de la Figura 77 permite al alumno visualizar como se cumple que dos rectas que no sean paralelas siempre se cortan en un punto. Y lo que se considera más importante, les permite trabajar la idea previa de en qué rangos puede encontrarse la solución, es decir, en qué cuadrante se van a cortar. De esta manera pueden establecer una idea previa de los rangos que puede tomar la solución y, en caso de equivocarse en la resolución analítica, poder darse cuenta de ello.

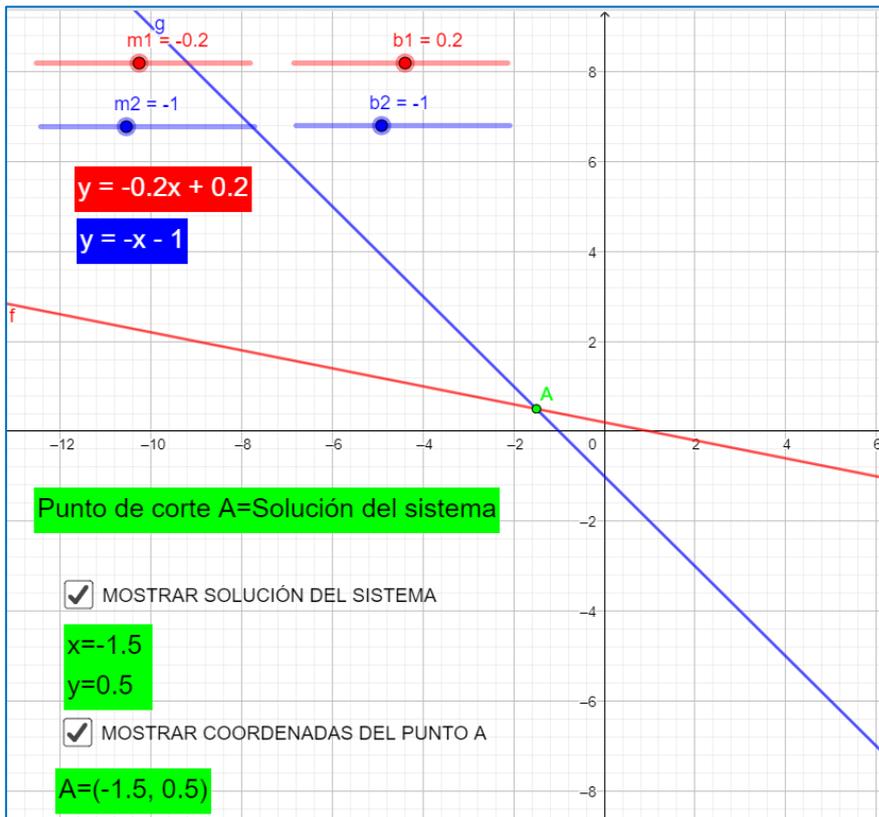


Figura 77. Applet de resolución gráfica y analítica de dos rectas. Fuente: elaboración propia.



## Capítulo 10 Experimentación

En el presente capítulo se exponen los comentarios recibidos por parte del autor del libro de texto, tanto positivos como constructivos que podían surgirle tras su experiencia de uso con el applet desarrollado en GeoGebra. Para ello, se concretó una reunión donde el autor del libro de texto pudo recrear una completa experiencia de usuario.

Este análisis de experto se basa en el conocimiento del libro de texto y su uso en el sistema didáctico, no tanto por su manejo del software dinámico GeoGebra.

### 10.1. Resultados

La prueba de experiencia de uso se realizó en el despacho del docente y autor del libro, donde durante la prueba, daba su *feedback* sobre el applet.

A continuación, se dividen en dos partes los comentarios realizados sobre la aplicación: críticas constructivas y críticas positivas.

- *Crítica constructiva*

El docente comienza la experiencia desde el primer subapartado del tema, donde se trabaja de manera muy conceptual la función. Como se ha mostrado previamente, son applets que contienen flechas, las cuales realmente son vectores, por lo que, en caso de hacer uso del *zoom*, el docente apunta a que todo el applet se desestructura. De este modo propone que se busque la manera de fijar esos vectores. Así mismo, en ese mismo punto, el docente apunta que el alumno tiene la posibilidad de eliminar alguno de los bloques, pudiendo desvirtuar el applet y no logrando así alcanzar el objetivo didáctico de éste.

En el applet de la Figura 37, el docente comenta que la definición establecida en el libro y también en el applet, no es una definición que se use en la actualidad para la introducción del tema. Recomienda comentarlo con las docentes a cargo de la asignatura en 3º de ESPA y revisar la definición utilizada. Así, sugiere una actualización tanto del libro de texto como del libro GeoGebra, de tal manera que mejoren ambos instrumentos.

En el último applet del primer subapartado, Figura 40, se busca integrar un resumen informal de todos los campos que se refieren al concepto de función. En este applet, el autor del libro realiza una observación sobre la dificultad de comprensión del tema que tienen históricamente los alumnos de este curso. Se resalta de esta forma la dificultad longitudinal observada y la posible pertinencia de contar con un instrumento que incida en ello. Así, la previsión en la utilización del libro GGB en este apartado debe partir de una expectativa baja en su manejo y comprensión.

Durante el tercer subapartado del “libro” de GeoGebra, el docente define la estructura de los applets como poco formales (“para niños”). Apunta que tal vez un matemático no aprobaría la forma de introducir los contenidos. Bien es cierto que, tras el comentario, reconoce que el dominio de los tecnicismos no es la prioridad en este tipo de centros. Se abre aquí la diferencia entre “matemáticas escolares” y “matemáticas formales”, así como el hecho de que las matemáticas son más que un lenguaje, pero que evidentemente la formalización es esencial para su progreso. El ejemplo clásico es como se impuso el

formalismo de Leibniz en detrimento del de Newton en el desarrollo del cálculo infinitesimal.

Según avanza su experiencia a través de los applets, el docente cita que, en caso de no ser un usuario conocedor del software, en ocasiones se echa de menos alguna instrucción más concreta o detallada.

En el applet de la Figura 54 el docente visualiza una oportunidad de aprovechar el contenido de curvas cónicas como ejemplos gráficos de lo que no es una función.

Como última crítica constructiva, el docente aporta que al igual que es posible personalizar los ejemplos a través de los deslizadores y el puntero, sería muy interesante registrar a través de GeoGebra las soluciones existentes en el libro, así como el solucionario de los ejercicios propuestos. De esta manera, los alumnos tendrían la oportunidad de saber si han realizado correctamente el ejercicio además de poder observar gráficamente todos los ejercicios.

- *Valoraciones positivas*

Al igual que el docente ha realizado críticas constructivas sobre el desarrollo del “Libro” en GeoGebra, también ha identificado aspectos positivos de cara a su uso por los estudiantes.

En el caso del applet de la Figura 46 el docente remarca que es muy útil que el alumno disponga de los nombres de los cuadrantes en el plano, ya que posteriormente facilita la comprensión en temas futuros como trigonometría.

Con ello, ha valorado positivamente la claridad con la que se puede ver una representación gráfica de una “no función”. Por encima de todo, ha valorado positivamente la construcción de rectas y el desarrollo “paso a paso” dinámico que permite al alumno desarrollar las competencias siempre desde la fiabilidad de no errar en los cálculos. Además, apoya que el alumno tenga la oportunidad de crear sus propios ejemplos para la construcción y cálculo de rectas, así como que se haya hecho uso de un código de colores en los temas introductorios.

Por último, tras finalizar con la experiencia de uso, el docente valora la larga inversión de tiempo que ha supuesto desarrollar todos los applets y añade que sería interesante diseñar mediante GeoGebra los contenidos correspondientes a los otros tres temas del curso.

## **10.2. Necesidad de nuevos análisis de expertos y del posterior uso con estudiantes**

La experiencia de uso no resultó ser como se esperaba, puesto que no se tuvo en cuenta la baja cualificación en el dominio de la aplicación. El docente no tuvo oportunidad de manejar la herramienta hasta el momento de la experimentación, y eso generó que el dinamismo de las actividades desapareciese. El desarrollo de los applets se ha realizado desde una situación de relativo control de la aplicación de GeoGebra, y esto trae consigo que nuevos usuarios sin experiencia en la herramienta encuentren dificultad en su manejo en los momentos iniciales.

Sumado a esto, se ha observado que durante la experiencia de uso se priorizaba la interacción el applet frente a la lectura del enunciado, lo cual hace reflexionar sobre si el alumno adoptaría la misma conducta.

En referencia a las críticas realizadas por el docente, muchas de ellas están ligadas a la ausencia de figuras explicativas o códigos de colores que faciliten o aceleren la comprensión del funcionamiento del applet. Es cierto que la responsabilidad del autor de los applets es definir desde un inicio las especificaciones del applet y su público objetivo. En este caso, la falta de estandarización en la estructura del applet hace que el usuario tenga que dedicar una parte de su tiempo al reconocimiento de la aplicación.

Como complemento a lo anterior, la valoración positiva del docente se centra en la posibilidad de ver representadas las funciones de manera dinámica y, además, poder establecer un procedimiento de manera muy visual y aclaratorio para resolver los ejercicios presentados en el libro de texto. Sumado a esto, el docente cree que el uso de un código de colores a la hora de explicar el concepto de función es muy acertado para ayudar a los alumnos a no dispersar su atención.

Finalmente, es preciso señalar que la valoración final ha sido positiva. Prueba de ello es que el centro haya incluido el material desarrollado a través de este trabajo en la plataforma virtual del instituto.



## **Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas**

### **Síntesis**

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo promover una mejora en el rendimiento académico de los alumnos de 3º de ESPA (modalidad a distancia) de un centro de Educación Secundaria Para Adultos de la comarca de Pamplona por medio de un cambio de metodología. De esta manera, se pretende incrementar la motivación por el estudio de las matemáticas y recomendar, en la mejor manera posible, un nuevo estilo de enseñanza del docente para reforzar así su papel de agente motivador.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte, se realiza un estudio longitudinal del currículo y la relación de este último con los libros de texto. Este análisis se centra en el tercer ciclo de Primaria, ESPA y Bachillerato. En la segunda parte se realiza una propuesta para el “Tema 4: Funciones” desarrollando una comparativa entre el contenido del libro y un nuevo contenido generado de applets en GeoGebra. Todo ello, con el objetivo de complementar mediante la metodología “Flipped Classroom” el temario existente y facilitar la comprensión del contenido tanto en cursos presenciales como a distancia.

### **Conclusiones**

En la parte I se ha podido observar durante el análisis del currículo que todos los descriptores tienen una continuidad en el tiempo y que, en todos ellos, se profundiza cada vez más con el paso de los cursos. Esto es una estructura esperable, puesto que a medida que el alumno avanza construye los nuevos contenidos sobre los que ya domina. Sin embargo, es necesario remarcar la falta de criterios de evaluación directamente ligados al uso de TIC en el bloque de funciones del currículo. No tener tampoco presencia en ninguno de los otros bloques demuestra una notable desactualización del currículo educativo, pero a su vez, brinda una gran oportunidad de mejora en este campo. Este vacío también se localiza en los libros de texto donde en ningún caso, se ha encontrado un ejercicio ligado al uso de TIC. A este aspecto, se le debe sumar la ausencia total de problemas contextualizados. Junto a lo anterior, se concluye que el libro de texto no logra cumplir con el currículo actual de Educación Secundaria para Adultos debido a la falta de uso de TIC y a la ausencia de contenido referente a la función cuadrática.

En la parte II, tras la experiencia de uso del autor del libro de texto, se concluye, en primer lugar, que es una necesidad prioritaria formar al profesorado en TIC, sobre todo en un software libre y potente como puede ser GeoGebra. En segundo lugar, tras la formación del profesorado se ve necesario introducir el uso de GeoGebra en las clases presenciales y a distancia como una herramienta cotidiana y familiar con la que los alumnos puedan jugar y aprender. En tercer lugar, se considera necesario introducir un apartado de “Manual de Usuario”, antes de todas las aplicaciones de forma que sirva de guía introductoria al applet para el alumno y otros usuarios.

Otra conclusión que se puede extraer del experimento es que es de vital importancia tener una estructura estándar definida dentro de las actividades de GeoGebra. De esta manera, el alumno no tendría que invertir tiempo en investigar el funcionamiento de la actividad o del objetivo cada vez que cambia de applet. Cabe destacar que el libro no dispone tampoco de una estructuración estándar dentro de sus unidades didácticas, por lo que sería

beneficioso hacer uso de un mismo índice para todos los applets, tengan objetivos distintos o no.

Tras la experiencia de uso, se ha observado que el usuario final suele hacer “*scroll*” sobre la propia aplicación de manera que todo el applet comienza a desconfigurarse. Tras darse cuenta de que el applet se puede mover, existe la tendencia a “jugar” con el “zoom” y queda en ocasiones, inmerso en el movimiento de los distintos bloques que forman el applet. Por ello, se hace visible la necesidad de bloquear los applets para que los usuarios no puedan editarlos o deformarlos por error. Esta último, debido a su rápida implementación, se ha incluido en todos los applets.

Por último, se considera necesaria la necesidad de desarrollar la aplicación desde una mayor formalidad matemática, sin perder de vista el objetivo didáctico. De esta manera, el alumno seguiría trabajando con una herramienta amena y dinámica pero construida sobre una base más fundamentada matemáticamente.

### **Cuestiones abiertas**

La primera cuestión abierta que deja este trabajo de fin de máster es: comparar y evaluar los resultados obtenidos en el tema de funciones en dos grupos diferentes. En el primero, impartiendo las clases con el uso exclusivo del libro de texto y en el segundo, con el uso del libro de texto complementado con la aplicación GeoGebra.

De manera más ambiciosa sería conveniente desarrollar el applet de GeoGebra con todas las mejoras concluidas tras el análisis de los resultados y posteriormente planificar la unidad didáctica de manera que se pueda llegar a impartir el contenido del tema completamente en ausencia del libro de texto.

**Referencias**

- Alamán, T., y Munsuri, R. (2015). *Matemáticas ESPA. Módulos I y II*. Sahats.
- Ali, R., Ghazi, S.R., Shazad, S., y Khal H.N. (2010). The impact of brain based learning on students academic achievement. Kötekli: *Interdisciplinary Journal of Contemporary Research in Business*, 2(2), 542-556.
- Benavides, F., y Pedró, F. (2007). Políticas educativas sobre nuevas tecnologías en los países iberoamericanos. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, 45, 19-69. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/41562604.pdf>
- Bergmann, J., y Sams, A. (2011). How the Flipped Classroom is radically transforming learning: *The Daily Riff*. Recuperado de <http://www.thedailyriff.com/articles/how-the-flipped-classroom-is-radically-transforming-learning-536.php>
- Bergmann, J., y Sams, A. (2012) *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. United States of America: International Society of Technology in Education.
- Buron, J. (1994). *Motivación y aprendizaje*. 2ª Ed. España: Mensajero.
- Coll, C. (2004). Psicología de la educación y prácticas educativas mediadas por las tecnologías de la información y la comunicación. México: *Revista Electrónica Sinéctica*, 25, 1-24.
- Coll, C., y Monereo, C. (2008). *Psicología de la educación virtual: aprender y enseñar con las tecnologías*. Madrid: Ediciones Morata S.L.
- Conde Serrano, R. (2013). *Idoneidad del uso del software GeoGebra para la mejora del proceso enseñanza-aprendizaje en 4º de E.S.O.* Sevilla: Re-Unir.
- Díaz, F., y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. México: McGrawHill.
- Flumerfelt, S., y Green, G. (2013). Using Lean in the Flipped Classroom for At Risk Students. Rochester: *Educational Technology & Society*, 16(1), 356-366. Recuperado de [https://www.j-ets.net/ets/journals/16\\_1/31.pdf](https://www.j-ets.net/ets/journals/16_1/31.pdf)
- Fornons Jou, V., y Palau Martín, R. F. (2016). Flipped Classroom en la asignatura de matemáticas de 3º de Educación Secundaria Obligatoria. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 55, 1-17. doi: 10.21556/edutec.2016.55.284
- García, F. (2008). *Motivar para el aprendizaje desde la actividad orientadora*. España: Secretaria General Técnica. Recuperado de <https://sede.educacion.gob.es/publiventa/PdfServlet?pdf=VP12377.pdf&area=E>
- González, R. M. (2005). Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes de secundaria. México: *Educación Matemática*, 1, 107-128. doi:10.2307/j.ctv75dbmp.7

- Henson, K., y Eller, B. (2000). *Psicología educativa para la enseñanza eficaz*. México: Thomson.
- Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A., y Palacios Picos, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación*, (334), 75-95. Recuperado de <http://www.iesezequielgonzalez.com/matematicas/archivos/shrechazomates.pdf>
- Kozma, R., y Wagner, D. (2006). Reaching the most disadvantaged with ICT: What works? ICT in non-formal and adult education: Paris: *Supporting out-of-school youth and adults*, 97-120. Recuperado de [https://www.researchgate.net/publication/237137909\\_Reaching\\_the\\_Most\\_Disadvantaged\\_with\\_ICT\\_What\\_Works](https://www.researchgate.net/publication/237137909_Reaching_the_Most_Disadvantaged_with_ICT_What_Works)
- Lasa, A., y Wilhelmi, M. (2013). Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 2(1), 52- 64. Recuperado de [file:///C:/Users/sesa405525/Downloads/Use\\_of\\_GeoGebra\\_in\\_explorative\\_explanato.pdf](file:///C:/Users/sesa405525/Downloads/Use_of_GeoGebra_in_explorative_explanato.pdf)
- Leicht, R.M., Zappe, S.E., Messner, J.I., Litzinger, T., y State, P. (2012). Employing the classroom flip to move “lecture” out of classroom. *Journal of Applications and Practices in Engineering Education*, 3(1), 19-31.
- Mata, M. (2005). *Ser padres hoy: ayuda escolar*. España: Carroggio.
- Moral, C. (2010). *Didáctica. Teoría y práctica de la enseñanza*. España: Pirámide.
- Munsuri Fernández, R. (2017). *Matemáticas ESPA. Módulos III y IV*. Pamplona: Sahats.
- Munsuri Fernández, R. (2018). *Matemáticas I. Bachillerato científico*. Pamplona: Sahats.
- Navarra. Gobierno de Navarra. (2014). *Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las Enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra*. Pamplona: Boletín Oficial de Navarra. Recuperado de <http://www.lexnavarra.navarra.es/detalle.asp?r=34404>
- Navarra. Gobierno de Navarra. (2015). *Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra*. Pamplona: Boletín Oficial de Navarra. Recuperado de <http://www.lexnavarra.navarra.es/detalle.asp?r=36133>
- Navarra. Gobierno de Navarra. (2018). *ORDEN FORAL 10/2018, de 25 de enero, por la que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria para las Personas Adultas en la Comunidad Foral de Navarra*. Pamplona: Boletín Oficial de Navarra. Recuperado de <http://www.lexnavarra.navarra.es/detalle.asp?r=39948>
- Pearson Education Inc. (2013). *Flipped Learning Model Dramatically Improves Course Pass Rate for At-Risk Students*. Recuperado de

[http://assets.pearsonschool.com/asset\\_mgr/current/201317/Clintondale\\_casestudy.pdf](http://assets.pearsonschool.com/asset_mgr/current/201317/Clintondale_casestudy.pdf)

Portilla Ciriquián, J. (2014). *Uso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de funciones gráficas en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología*. (Trabajo Fin de Máster). Facultad de Educación. Universidad Internacional de la Rioja. Recuperado de [https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2990/Juan\\_portilla\\_Ciriquian.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2990/Juan_portilla_Ciriquian.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Prieto, A. (2013). *Flipped Classroom ¿cuáles son sus ventajas? ¿Cuál es su origen?* [Publicación en un blog]. Recuperado de: <http://profesor3punto0.blogspot.com.es/2013/07/que-es-eso-de-la-flipped-classroom-para.html>

Sistema Estatal de Indicadores de la Educación. (2018). *Ministerio de Educación y Formación Profesional*. Madrid: SEIE. Recuperado de: <http://www.educacionyfp.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/estadisticas/educacion/indicadores-publicaciones-sintesis/sistema-estatal-indicadores.html>

Strayer, J. (2007). *The effects of the classroom flip on the learning environment*. Ohio: M.A. Recuperado de [https://etd.ohiolink.edu/!etd.send\\_file?accession=osu1189523914&disposition=attachment](https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file?accession=osu1189523914&disposition=attachment)

Strayer, J.F. (2011). *The Flipped Classroom: Turning the Traditional Classroom on its Head*. Knewton Webside.

UNESCO (2014). *Aprovechar el potencial de las TIC para la Alfabetización: Programas eficaces de Alfabetización y Aritmética Básica que utilizan la Radio, la TV, Teléfonos Móviles, Tabletas y Computadoras*. Hamburgo: UIL. Recuperado de <http://uil.unesco.org/fileadmin/keydocuments/Literacy/es/ICTES.pdf>

White, L.L., y Reyes, M.I. (2014). Factores que influyen en los alumnos para que no se encuentren motivados en la clase de matemáticas y qué papel juega el docente como agente motivador. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, (2). doi: 10.1016/s2007-2872(15)30007-x

Woolfolk, A. (2006). *Psicología educativa*. 9ª Ed. México: Pearson.

Director:

Miguel R. Wilhelmi, Departamento de Matemáticas

# EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA ADULTOS