PROBABILIDAD

Asier POZO MOLINO

COMPARATIVA DE LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN SECUNDARIA EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL Y DE SINGAPUR

TFM 2020

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

COMPARATIVA DE LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN SECUNDARIA EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL Y DE SINGAPUR.

Asier Pozo Molino

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la enseñanza de la probabilidad en dos países distintos, con currículos y métodos distintos.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se realiza un trabajo teórico, el cual se basa en el estudio de los currículos y libros de texto de matemáticas, sobre todo a nivel de ESO, en el que se analizan y se comparan los países de España y Singapur en diferentes aspectos, viendo así las debilidades y fortalezas de cada uno. Se realizan además sugerencias de mejora en algunos aspectos.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I: La probabilidad en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la probabilidad en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cinco capítulos. En el primer, segundo y tercer capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo vigente que hacen referencia a la probabilidad en cada uno de los grados. En el cuarto se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de cuarto curso de ESO (de la editorial SM/Savia), así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el quinto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1.

1. La probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo se muestra mediante tablas, separadas en subapartados según el ciclo de enseñanza en el que se ven, cuáles son los contenidos relativos a la probabilidad, objeto de estudio del presente trabajo, que aparecen en los distintos currículos de enseñanza.

Tanto estos contenidos como los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables que aparecen en los siguientes capítulos, se extraen de la normativa de educación en Navarra. En concreto, del Decreto Foral 23/2007, de 19 de marzo, por el que se establece el **currículo** de las enseñanzas del **segundo ciclo de la Educación Infantil** en la Comunidad Foral de Navarra; del Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el **currículo** de las enseñanzas de **Educación Secundaria Obligatoria** en la Comunidad Foral de Navarra; y del Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril, del Gobierno de Navarra, por el que se establece el **currículo** de las **enseñanzas del Bachillerato** en la Comunidad Foral de Navarra.

La estructura de las tablas es la misma para todas, en la primera columna aparecen los descriptores, y en las siguientes columnas los cursos. Tanto en 3º y 4º de ESO cómo en 1º y 2º de Bachiller se analizan ambas ramas, las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, por ello estas tablas tienen mayor número de columnas.

Los descriptores utilizados son los siguientes: C1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso; C2: Sucesos y espacio muestral; C3: Cálculo de probabilidades; C4: Probabilidad condicionada; C5: Experimentos compuestos; C6: Variable aleatoria; C7: Distribuciones de probabilidad discretas; y C8: Distribuciones de probabilidad continuas. La raya discontinua indica que no hay como tal un contenido relativo a ese descriptor, en el currículo.

Los contenidos son literales, aparecen igual que en el currículo respectivo, y la letra en cursiva indica que ese mismo contenido aparece también en otro descriptor o descriptores (en otra fila de la tabla) por corresponder a estos también.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

CONTENIDOS/ CURSO	5º PRIMARIA	6º PRIMARIA
DESCRIPTOR		
C1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	Carácter aleatorio de algunas experiencias.	Carácter aleatorio de algunas experiencias. *Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.*
C2: Sucesos y espacio muestral.	--------	--------

C3: Cálculo de probabilidades.	--------	Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.
C4: Probabilidad Condicionada.	--------	--------
C5: Experimentos compuestos.	--------	--------
C6: Variable aleatoria.	--------	--------
C7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	--------
C8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	--------

1.2. Contenidos en ESO

CONTENIDOS/ CURSO	1º ESO	2º ESO
DESCRIPTOR		
C1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	--------	Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. *Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.*
C2: Sucesos y espacio muestral.	--------	Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
C3: Cálculo de probabilidades.	--------	Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.
C4: Probabilidad	--------	--------

Condicionada.		
C5: Experimentos compuestos.	--------	--------
C6: Variable aleatoria.	--------	--------
C7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	--------
C8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	--------

CONTENIDOS/ CURSO	3º ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)	3º ESO (M. orientadas a las enseñanzas aplicadas)	4º ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)	4ºESO (M. orientadas a las enseñanzas aplicadas)
DESCRIPTOR				
C1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	Experiencias aleatorias. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.	--------	Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.	Azar y probabilidad.
C2: Sucesos y espacio muestral.	Sucesos y espacio muestral.	--------	*Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.* *Utilización de* ***tablas de contingencia y diagramas de árbol*** *para la asignación de probabilidades.*	Diagrama en árbol. **Probabilidad simple** y compuesta.
C3: Cálculo de probabilidades.	Cálculo de probabilidades mediante la	--------	Introducción a la combinatoria: combinaciones,	Cálculo de probabilidades mediante la

	regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones; factorial de un número.		variaciones y permutaciones. **Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace** y otras técnicas de recuento. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la **asignación de probabilidades**.	Regla de Laplace. *Frecuencia de un suceso aleatorio.* *Diagrama en árbol.*
C4: Probabilidad Condicionada.	--------	--------	Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes e independientes.	Sucesos dependientes e independientes.
C5: Experimentos compuestos.	--------	--------	Probabilidad simple y compuesta. Experiencias aleatorias compuestas. *Utilización de tablas de contingencia y* ***diagramas de árbol*** *para la asignación de probabilidades.*	*Probabilidad simple y* ***compuesta****.* *Diagrama en árbol.*
C6: Variable aleatoria.	--------	--------	--------	--------
C7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	--------	--------	--------
C8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	--------	--------	--------

1.3. Contenidos en Bachillerato

CONTENIDOS/ CURSO	1º BACHILLER	1º BACHILLER (M. aplicadas a	2º BACHILLER (Matemáticas II)	2º BACHILLER (M. aplicadas a

	(Matemáticas I)	las ciencias sociales I)		las ciencias sociales II)
DESCRIPTOR				
C1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	--------	Axiomática de Kolmogorov.	Axiomática de Kolmogorov.	Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov.
C2: Sucesos y espacio muestral.	--------	Sucesos.	--------	--------
C3: Cálculo de probabilidades.	--------	Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.	Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.	Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.
C4: Probabilidad Condicionada.	--------	Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.	Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. *Teoremas de la probabilidad total y de Bayes.* Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.	Probabilidad condicionada. *Dependencia e independencia de sucesos.* Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.
C5: Experimentos compuestos.	--------	Experimentos simples y compuestos.	Experimentos simples y compuestos.	Experimentos simples y compuestos. Dependencia e independencia de sucesos.
C6: Variable	--------	Variables	Variables	--------

aleatoria.		aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica. Variables aleatorias continuas. Función de densidad y de distribución. Interpretación de la media, varianza y desviación típica.	aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica.	
C7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.	Cálculo de probabilidades en una distribución binomial. *Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.*	--------
C8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.	Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.	--------

2. Los criterios de evaluación de la probabilidad en el currículo vigente

Para este capítulo, los criterios de evaluación que aparecen proceden de los currículos de enseñanza establecidos por las normas vigentes ya mencionadas.

Los descriptores son, naturalmente, los mismos, y se utiliza la nomenclatura CE (Criterio de Evaluación). Además, se añade aquí un descriptor nuevo, CE9: Vocabulario adecuado.

Se recuerda que la letra cursiva indica que ese mismo criterio de evaluación aparece en otro descriptor o descriptores de la misma tabla, y que las rayas discontinuas indican ausencia.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

CRITERIOS DE EVALUACIÓN/ CURSO	5º PRIMARIA	6º PRIMARIA
DESCRIPTOR		
CE1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	3. Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.	*3. Observar, hacer estimaciones y constatar que hay sucesos imposibles, posibles o seguros, o que se repiten.* *4. Identificar, y resolver problemas de la vida diaria, conectando la realidad y los conceptos estadísticos y de probabilidad, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.*
CE2: Sucesos y espacio muestral.	*3. Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.*	3. Observar, hacer estimaciones y constatar que hay sucesos imposibles, posibles o seguros, o que se repiten.
CE3: Cálculo de probabilidades.	--------	4. Identificar, y resolver problemas de la vida diaria, conectando la realidad y los conceptos estadísticos y de probabilidad, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y

		reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.
CE4: Probabilidad Condicionada.	--------	--------
CE5: Experimentos compuestos.	--------	--------
CE6: Variable aleatoria.	--------	--------
CE7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	--------
CE8: Distribuciones de probabilidad continuas.		
CE9: Vocabulario adecuado.	--------	--------

2.2. Criterios de evaluación en ESO

CRITERIOS DE EVALUACIÓN/ CURSO	1º ESO	2º ESO
DESCRIPTOR		
CE1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	--------	1. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad. 2. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.
CE2: Sucesos y espacio muestral.	--------	---

CE3: Cálculo de probabilidades.	--------	*1. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas* ***al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria****, o* ***el cálculo de su probabilidad.*** *2. Inducir la noción de probabilidad* ***a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios****, sea o no posible la experimentación.*
CE4: Probabilidad Condicionada.	--------	---
CE5: Experimentos compuestos.	--------	---
CE6: Variable aleatoria.	--------	---
CE7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	---
CE8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	---
CE9: Vocabulario adecuado.	--------	---

CRITERIOS DE EVALUACIÓN/ CURSO	3º ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)	3º ESO (M. orientadas a las enseñanzas aplicadas)	4º ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)	4ºESO (M. orientadas a las enseñanzas aplicadas)
DESCRIPTOR				
CE1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	--------	--------	1. Resolver diferentes situaciones y **problemas de la vida cotidiana** aplicando los conceptos del cálculo de	*1. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e*

			probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.	***interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación***.
CE2: Sucesos y espacio muestral.	4. Estimar la posibilidad de que ocurra un **suceso** asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace **o los diagramas de árbol,** identificando los elementos asociados al experimento.	--------	*2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace,* ***los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias***.	*3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con* ***técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia***.
CE3: Cálculo de probabilidades.	*4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo,* ***calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace*** *o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento.*	--------	2. Calcular probabilidades simples o compuestas **aplicando la regla de Laplace**, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.	3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.
CE4:	--------	--------	--------	--------

Probabilidad Condicionada.				
CE5: Experimentos compuestos.	*4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a […] o* ***los diagramas de árbol,*** *identificando los elementos asociados al experimento.*	--------	*2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace,* ***los diagramas de árbol****, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.*	*3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.*
CE6: Variable aleatoria.	--------	--------	--------	--------
CE7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	--------	--------	--------
CE8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	--------	--------	--------
CE9: Vocabulario adecuado.	--------	--------	--------	1. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

CRITERIOS DE EVALUACIÓN/	1º BACHILLER (Matemáticas	1º BACHILLER (M. aplicadas	2º BACHILLER (Matemáticas	2º BACHILLER (M. aplicadas a

CURSO	I)	a las ciencias sociales I)	II)	las ciencias sociales II)
DESCRIPTOR				
CE1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	--------	*3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones* ***en contextos relacionados con las ciencias sociales****.*		*1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples […] toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.*
CE2: Sucesos y espacio muestral.	--------	*3. Asignar probabilidades a […] utilizando la regla de Laplace en combinación con* ***diferentes técnicas de recuento*** *y […] en contextos relacionados con las ciencias sociales.*	*1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con* ***diferentes técnicas de recuento*** *y la axiomática de la probabilidad), así como a*	*1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples […] en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol…*

			sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos ***relacionados con el mundo real.***	
CE3: Cálculo de probabilidades.	--------	3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.	1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de **Laplace** en combinación con diferentes técnicas de recuento y la **axiomática de la probabilidad**), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real.	1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia, la axiomática de la probabilidad, el teorema de la probabilidad total y aplica el teorema de Bayes para modificar la probabilidad asignada a un suceso (probabilidad inicial) a partir de la información obtenida mediante la experimentación (probabilidad final), empleando los resultados numéricos obtenidos en la

				toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.
CE4: Probabilidad Condicionada.	--------	--------	*1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (**Teorema de Bayes**), en contextos relacionados con el mundo real.*	*1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples […] el teorema de la probabilidad total y aplica el **teorema de Bayes** para modificar la probabilidad…*
CE5: Experimentos compuestos.	--------	*3. Asignar probabilidades a […] utilizando la regla de Laplace en combinación con **diferentes técnicas de recuento** y […] en contextos relacionados con las ciencias sociales.*	1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en **experimentos** simples y **compuestos** (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la	*1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en **experimentos simples y compuestos** utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, **diagramas de***

			probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real.	***árbol*** *o tablas de contingencia, […]*
CE6: Variable aleatoria.	--------	--------	--------	--------
CE7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	4. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.	2. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.	--------
CE8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	*4. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.*	*2. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.*	--------

CE9: Vocabulario adecuado.	--------	5. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando…	3. Utilizar el **vocabulario adecuado** para la descripción de situaciones relacionadas con el azar.	--------

3. Estándares de aprendizaje evaluables de la probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo, al igual que en los anteriores, los estándares de aprendizaje evaluables que aparecen proceden de los currículos de enseñanza establecidos por las normas vigentes ya mencionadas.

Los descriptores son, naturalmente, los mismos, y se utiliza la nomenclatura EAE (Estándar de aprendizaje evaluables). Además, al igual que en los criterios de evaluación, se añade aquí un descriptor, el CE9: Vocabulario adecuado.

Se recuerda que la letra cursiva indica que ese mismo criterio de evaluación aparece en otro descriptor o descriptores de la misma tabla, y que las rayas discontinuas indican ausencia.

3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES/ CURSO	5º PRIMARIA	6º PRIMARIA
DESCRIPTOR		
EAE1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	3.1. Identifica situaciones de carácter aleatorio.	*3.2. Calcula, de forma intuitiva, la probabilidad de que ocurra un suceso en fenómenos aleatorios sencillos.* 3.3. Efectúa conjeturas y estimaciones en juegos de azar sencillos.
EAE2: Sucesos y espacio muestral.	--------	3.1. Determina todos los posibles sucesos que pueden darse en fenómenos aleatorios.
EAE3: Cálculo de probabilidades.	3.2. Resuelve problemas muy sencillos de azar y probabilidad.	3.2. Calcula, de forma intuitiva, la probabilidad de que ocurra un suceso en fenómenos aleatorios sencillos. *3.3. Efectúa conjeturas y estimaciones en juegos de azar sencillos.* 3.4. Resuelve problemas sencillos de azar y probabilidad
EAE4: Probabilidad Condicionada.	--------	--------
EAE5: Experimentos	--------	--------

compuestos.		
EAE6: Variable aleatoria.	--------	--------
EAE7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	--------
EAE8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	--------
EAE9: Vocabulario adecuado.	--------	--------

<u>3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO</u>

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLE/ CURSO	1º ESO	2º ESO
DESCRIPTOR		
EAE1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	--------	1.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas. 1.3. Distingue los conceptos de posible y probable y gradúa o cuantifica la mayor o menor probabilidad de los resultados esperados en un experimento aleatorio. *2.4. **Realiza predicciones** sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación.* 2.5. Utiliza la probabilidad para elegir **la opción más adecuada** en situaciones o juegos de azar sencillos.
EAE2: Sucesos y espacio muestral.	--------	2.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera **todos los resultados posibles**, apoyándose en **tablas**, recuentos o **diagramas en árbol sencillos**. 2.2. Distingue entre **sucesos elementales** equiprobables y no equiprobables.
EAE3: Cálculo de probabilidades.	--------	1.2. Calcula la **frecuencia relativa** de un suceso mediante la experimentación. *2.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera **todos los resultados posibles**, apoyándose en tablas, recuentos o*

		diagramas en árbol sencillos. 2.3. Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace y la expresa en forma de fracción y como porcentaje. 2.4. Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio **a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación**.
EAE4: Probabilidad Condicionada.	--------	--------
EAE5: Experimentos compuestos.	--------	--------
EAE6: Variable aleatoria.	--------	--------
EAE7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	--------
EAE8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	--------
EAE9: Vocabulario adecuado.	--------	--------

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLE/ CURSO	3º ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)	3º ESO (M. orientadas a las enseñanzas aplicadas)	4º ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)	4ºESO (M. orientadas a las enseñanzas aplicadas)
DESCRIPTOR				
EAE1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	4.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas. 4.4. **Toma la decisión correcta** teniendo en cuenta las probabilidades	--------	1.2**. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio**, utilizando la terminología adecuada para	*1.2. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.*

	de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.		describir sucesos. *1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y* ***problemas de la vida cotidiana****.* 1.4. Formula y comprueba conjeturas s obre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. 2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas.	
EAE2: Sucesos y espacio muestral.	*4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace,* ***enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales****.*	--------	*2.1. Aplica la regla de Laplace y* ***utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias****.* 2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos **utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia**.	3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, **diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos**.
EAE3: Cálculo de probabilidades.	4.3. **Asigna probabilidades** a sucesos en experimentos aleatorios sencillos	--------	1.3. Aplica **técnicas de cálculo de probabilidades** en la resolución de	1.2. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos

	cuyos resultados son equiprobables, **mediante la regla de Laplace**, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales.		diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. 2.1. **Aplica la regla de Laplace** y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias. *2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente***,** *los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.*	aleatorios y simulaciones. 3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos. 3.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas.
EAE4: Probabilidad Condicionada.	--------	--------	2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.	--------
EAE5: Experimentos compuestos.	*4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios […] enumerando los sucesos elementales, tablas o* ***árboles*** *u otras estrategias personales.*	--------	2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.	*3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente,* ***diagramas de árbol*** *o tablas de contingencia para el recuento de casos.* *3.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o*

				consecutivas.
EAE6: Variable aleatoria.	--------	--------	--------	--------
EAE7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	--------	--------	--------
EAE8: Distribuciones de probabilidad continuas.	--------	--------	--------	--------
EAE9: Vocabulario adecuado.	4.2. Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.	--------	*1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio,* ***utilizando la terminología adecuada*** *para describir sucesos.* 1.5. Utiliza un **vocabulario adecuado** para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. 3.1. Utiliza un **vocabulario adecuado** para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar.	1.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística.

3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLE/ CURSO	1º BACHILLER (Matemáticas I)	1º BACHILLER (M. aplicadas a las ciencias sociales II)	2º BACHILLER (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)	2º BACHILLER (Matemáticas II)

DESCRIPTOR				
EAE1: Interpretación y noción de la probabilidad, y su uso.	--------	5.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística.	*1.1. Calcula […] la **axiomática de Kolmogorov** y diferentes técnicas de recuento.*	*1.1. Calcula […] la **axiomática de Kolmogorov** y diferentes técnicas de recuento.* 1.4. Resuelve una situación relacionada con la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en función de la probabilidad de las distintas opciones.
EAE2: Sucesos y espacio muestral.	--------	--------	1.2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. *1.1. Calcula la probabilidad de sucesos […] y **diferentes técnicas de recuento**.*	*1.2. Calcula probabilidades de sucesos a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.* *1.1. Calcula la probabilidad de sucesos […] y **diferentes técnicas de recuento**.*
EAE3: Cálculo de probabilidades.	--------		1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas	1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las

			derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. *1.3.* ***Calcula la probabilidad*** *final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.*	fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. 1.2. **Calcula probabilidades de sucesos** a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. *1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.*
EAE4: Probabilidad Condicionada.	--------	--------	1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la **fórmula de Bayes.**	1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la **fórmula de Bayes**.
EAE5: Experimentos compuestos.	--------	--------	*1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.* *1.1. Calcula la probabilidad de sucesos […] y* ***diferentes técnicas de recuento****.*	*1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.*

EAE6: Variable aleatoria.	--------	--------	--------	--------
EAE7: Distribuciones de probabilidad discretas.	--------	4.2. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica y las aplica en diversas situaciones. 4.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida.	2.1. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. 2.2. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica. 2.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida.	--------
EAE8: Distribuciones	--------	4.4. Calcula probabilidades de	2.4. Calcula probabilidades	

de probabilidad continuas.		sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica, y las aplica en diversas situaciones. *4.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida.*	de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica. *2.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida.*	
EAE9: Vocabulario adecuado.	--------	5.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística.	3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.	--------

4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la probabilidad en el currículo vigente

En el presente capítulo se muestran los ejercicios, problemas y cuestiones tipo de los libros de texto y su relación con el currículo vigente. Para mostrar esta relación, los ejercicios se han organizado de modo que se muestran los ejercicios siguiendo los estándares de aprendizaje evaluables del currículo, mostrando así los ejercicios tipo que sirven para cumplir cada estándar. El estándar de aprendizaje correspondiente se indica en la descripción del ejercicio, y, en general, se han escogido dos actividades para mostrarlo, aunque hay casos en los que se han escogido más de dos actividades, cuando se ha considerado adecuado para mostrar algo más. Para que haya presencia de ambas ramas de las matemáticas, pero a su vez no alargar el capítulo en exceso, se muestran los ejercicios tipo de la rama de académicas para la ESO y de la rama de ciencias sociales para bachiller.

4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2ºESO

Tipo: Ejercicio

Descripción: Los ejercicios con los que se trata el estándar de aprendizaje "1.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas" son de modo que se pregunta al alumno si es aleatorio o determinista cada experimento de una lista. Aparecen tanto en 2ºESO como en 3ºESO, y los hay como ejercicios resueltos también.

Ejemplo:

2. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

a) Tirar un tótem al aire y que caiga de pie.

b) Anotar el horario de salida del tren de la estación.

c) Reproducir una canción de una lista de música.

d) Extraer una carta de la baraja y medir su anchura.

e) Lanzar un dado jugando al parchís.

Ilustración 1.- Ejercicio 2, pág. 268. Libro 2º ESO.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Para trabajar el estándar de aprendizaje "1.2. Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación" se encuentran varios ejercicios, la idea es que se repita n veces y se obtengan las frecuencias relativas. Luego, conforme aumenta el número de experimentaciones, se aprovecha para el concepto de probabilidad mediante la ley fuerte.

Ejemplo:

45. Se sospecha que una moneda está trucada. Los resultados de obtener cara y cruz en sucesivos lanzamientos han sido:

Lanzamientos	10	20	40	80	160
N.º de cruces	5	9	16	26	52

a) Representa en unos ejes cartesianos la frecuencia relativa de las caras respecto del número de lanzamientos.

b) ¿Cuál sería la probabilidad de "salir cara"?

c) ¿Está trucada la moneda?

Ilustración 2.- Ejercicio, pág. 279. Libro 2º ESO.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Los ejercicios con los que se trata el estándar de aprendizaje "1.3. Distingue los conceptos de posible y probable y gradúa o cuantifica la mayor o menor probabilidad de los resultados esperados en un experimento aleatorio"

Ejemplo:

29. En la lotería nacional los números van del 00000 al 99999. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles no:

a) Es más difícil que salga el 44444 que el 32578.

b) Es más difícil que salga un número que tenga todas las cifras iguales que uno que tenga todas diferentes.

c) Es preferible comprar un número grande como el 54980 antes que uno pequeño como el 00232

d) Salen más veces los números que terminan en 5.

Ilustración 3.- Ejercicio; pág. 277. 2ºESO.

Tipo: Ejercicios; problemas.

Descripción: Los ejercicios, con los que se trata el estándar de aprendizaje "2.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos", pueden ser distintos en cuanto a que pueden pedir que el alumno use un diagrama de árbol o tabla, darla directamente en el ejercicio, o no pedir su uso.

Igualmente se puede pedir "el espacio muestral" o "todos los resultados posibles".

Predomina sobre los demás el ejercicio en el que se pide el espacio muestral utilizando un diagrama de árbol o tabla de doble entrada, sin darla en el enunciado (ver primer ejemplo a continuación); en 3º ESO también ocurre así.

Ejemplo:


5. Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos utilizando una tabla de doble entrada o un diagrama de árbol.

a) Lanzar dos dados y sumar los resultados.

b) Extraer tres bolas de la siguiente urna.

Ilustración 4.- Ejercicio; pág.269. 2º ESO.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Si en el estándar de aprendizaje 2.1. entendemos "describir experimentos aleatorios sencillos" cómo obtener y describir sucesos de su espacio de sucesos, entonces el ejercicio tipo es el que sigue a continuación, donde se da un experimento y se pide describir sus sucesos.

Ejemplo:


36. Se lanza una bola en una ruleta de 36 números, numerados del 1 al 36.

Describe los siguientes sucesos.

a) A = "Salir par y múltiplo de 6".

b) B = "Salir primo o múltiplo de 5".

c) C = "Salir lo contrario que en B".

Ilustración 5.- Ejercicio; pág.278. 2º ESO.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: El estándar de aprendizaje "2.2. Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.".

Ejemplo:

50. En un juego de mesa se dispone de la siguiente ruleta.

Calcula las probabilidades de:

a) Que la aguja caiga en la zona amarilla.

b) Que la aguja no caiga en la zona verde.

Ilustración 6.- Ejercicio, pág. 280. 2ºESO.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Son muchos los ejercicios con los que se trata el cálculo de la probabilidad. En cuanto al estándar de aprendizaje “2.3. Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace y la expresa en forma de fracción y como porcentaje”, el ejercicio tipo con el que se trabaja es aquel en el que se da un experimento simple y se pide el cálculo de la probabilidad de varios sucesos.

Sin embargo, no se pide explícitamente expresar su cálculo en forma de fracción y como porcentaje.

Ejemplo:

23. De una baraja española se extrae una carta. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Un tres.

b) El rey de bastos.

c) Un rey que no sea de bastos.

d) Una sota o un caballo.

Ilustración 7.- Ejercicio; pág.275. 2º ESO.

Tipo: Problema.

Descripción: Los ejercicios con los que se trata el estándar de aprendizaje “2.4. Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación”.

Ejemplo:

26. En un juego para dos jugadores Elsa y Benito lanzan dos dados y se anota su suma.

Elsa gana si la suma sale un número par y Benito si sale un número impar.

a) ¿Es justo el juego?

b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?

c) Calcula las probabilidades de cada uno si en lugar de sumar los resultados de los dados los multiplican, y Elsa sigue apostando a que sale par y Benito a que sale impar.

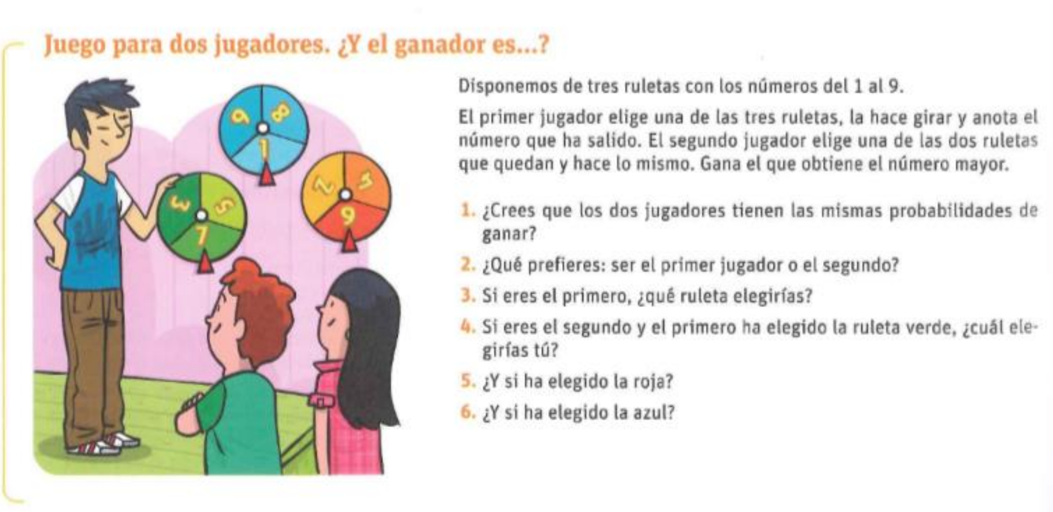
Ilustración 8.- Problema; pág. 275. 2ºESO.

Tipo: Cuestión.

Descripción: En lo referente al estándar de aprendizaje “2.5. Utiliza la probabilidad para elegir la opción más adecuada en situaciones o juegos de azar sencillos”, no se encuentra con facilidad un ejercicio que pida explícitamente al alumno elegir entre varias opciones la más adecuada. Este estándar de aprendizaje se puede relacionar en realidad con el anterior.

Un ejercicio que trabaja muy bien este estándar es el que se muestra a continuación.

Ejemplo:



Juego para dos jugadores. ¿Y el ganador es...?

Disponemos de tres ruletas con los números del 1 al 9.

El primer jugador elige una de las tres ruletas, la hace girar y anota el número que ha salido. El segundo jugador elige una de las dos ruletas que quedan y hace lo mismo. Gana el que obtiene el número mayor.

1. ¿Crees que los dos jugadores tienen las mismas probabilidades de ganar?
2. ¿Qué prefieres: ser el primer jugador o el segundo?
3. Si eres el primero, ¿qué ruleta elegirías?
4. Si eres el segundo y el primero ha elegido la ruleta verde, ¿cuál elegirías tú?
5. ¿Y si ha elegido la roja?
6. ¿Y si ha elegido la azul?

Ilustración 9.- Cuestión; pág. 282. 2ºESO.

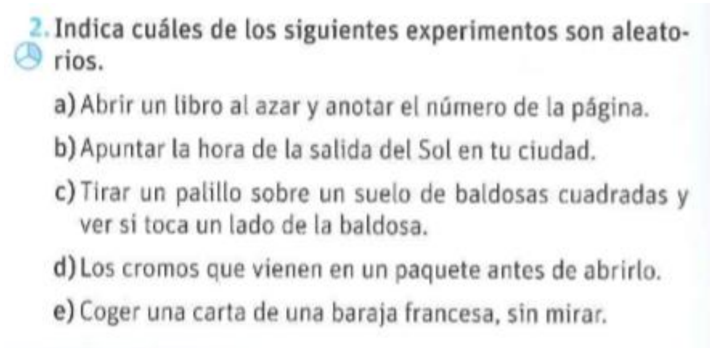
4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3ºESO

En 3ºESO únicamente se ve la probabilidad en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

Tipo: Ejercicio

Descripción: El estándar de aprendizaje “4.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas” se trabaja con ejercicios que son de modo que se dan varios experimentos y se pregunta si es aleatorio o determinista cada experimento. El ejercicio tipo es cómo en 2ºESO.

Ejemplo:



2. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

a) Abrir un libro al azar y anotar el número de la página.

b) Apuntar la hora de la salida del Sol en tu ciudad.

c) Tirar un palillo sobre un suelo de baldosas cuadradas y ver si toca un lado de la baldosa.

d) Los cromos que vienen en un paquete antes de abrirlo.

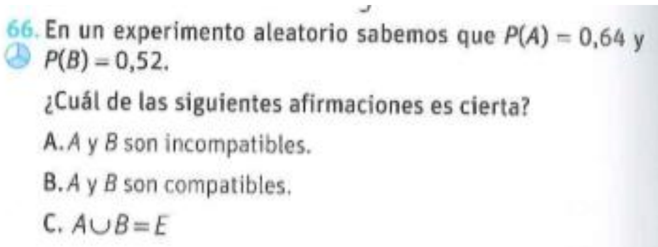
e) Coger una carta de una baraja francesa, sin mirar.

Ilustración 10.- Ejercicio, pág. 296. Libro 3º ESO.

Tipo: Ejercicios.

Descripción: Para el estándar de aprendizaje “4.2. Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar”. Este estándar está implícito en todos los ejercicios porque si no los escriben bien, no pueden resolverlos.

Ejemplo:



66. En un experimento aleatorio sabemos que $P(A) = 0{,}64$ y $P(B) = 0{,}52$.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

A. A y B son incompatibles.

B. A y B son compatibles.

C. $A \cup B = E$

Ilustración 11.- Ejercicio, pág. 312. Libro 3º ESO.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: El estándar de aprendizaje “4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales”, aparece en ejercicios tanto de experimentos simples como de compuestos. En algunos es muy útil el uso de una tabla de doble entrada y en otros en cambio un diagrama de árbol.

Aunque en la mayor parte de estos ejercicios no se pide enumerar los sucesos elementales (sólo el cálculo de probabilidades de sucesos), hay otros ejercicios que precisamente piden el espacio muestral únicamente. Entre ambos tipos de ejercicios se cumple este estándar de aprendizaje.

Ejemplo:

46. Se consideran 10 boletos numerados del 1 al 10. Se extrae uno al azar. Calcula las probabilidades de que:

a) Sea par.

b) Sea mayor que 7.

c) Sea múltiplo de 3 o menor que 7.

d) Sea múltiplo de 3 y menor que 7.

Ilustración 12.- Ejercicio, pág. 311. Libro 3º ESO.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: El estándar de aprendizaje "4.4. Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre" aparece en varios ejercicios dónde aparece al menos un apartado en el que el alumno debe escoger una opción. Aunque este estándar de aprendizaje aparecía también en 2ºESO (enunciado de otro modo), en 3ºESO tiene mucha más presencia en los ejercicios que en el curso anterior.

Ejemplo:

49. En un concurso hay dos bolsas. En la bolsa uno hay 3 bolas verdes y 2 rojas y en la bolsa dos hay 7 bolas verdes, una blanca y 5 bolas rojas. Tienes que elegir una bolsa y sacar una bola roja para ganar un premio. ¿Qué bolsa elegirías? Razona la respuesta.

Ilustración 13.- Ejercicio, pág. 311. 3ºESO.

56. EMPRENDE

En un juego para dos jugadores, cada uno dispone de 3 fichas: una de ellas con una cara verde y la otra roja, otra, con una cara verde y otra azul, y la tercera, con una cara roja y la otra azul. Se tiran las 3 fichas a la vez. Gana el jugador 1 si coinciden los colores de dos fichas cualesquiera, el jugador 2 si los tres colores son diferentes.

a) ¿Qué jugador eliges ser, el 1 o el 2?

b) Juega con un compañero y comprueba tu estrategia.

Ilustración 14.- Ejercicio, pág. 311. 3ºESO.

4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4ºESO

No se van a mostrar los ejercicios tipo para algunos de los estándares de aprendizaje de 4ºESO que son muy parecidos o iguales a los de cursos anteriores, pues los ejercicios tipo son parecidos. Los ejercicios que se muestran en este apartado corresponden con ejercicios de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Estándar de aprendizaje "1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana"; se pueden encontrar varios ejercicios que pueden ser útiles para la vida.

Ejemplo:

15. Una industria fabrica dos tipos de tornillos *A* y *B*.

- Produce al día 600 del tipo *A* y 800 del tipo *B*.
- El 4 % de los de tipo *A* y el 5 % de los de tipo *B* salen defectuosos.

Si se selecciona un tornillo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

Ilustración 15.- Ejercicio, pág. 278. 4º ESO.

Tipo: Cuestión.

Descripción: De los ejercicios relacionados con el estándar de aprendizaje "1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones", hay que decir que salvo en alguna cuestión, no se encuentran ejercicios en los que se pida al alumno hacer una conjetura para comprobarla después, sino que predomina en los ejercicios el pedir directamente el cálculo de la probabilidad de un suceso.

En cuanto a las simulaciones, así como en 2º y 3º se podía encontrar un apartado dedicado a la probabilidad experimental y la simulación, con sus ejercicios, en 4º no aparecen ejercicios así.

Ejemplo:

Ejemplo ▸ Una forma de echar a suertes, es tomar tres palitos donde uno es más corto que los otros. Una persona los sujeta en la mano y oculta uno de los extremos, mientras los otros van sacando uno a uno los palos. ¿Quién tiene ventaja, el que saca en primer lugar, en segundo o el último?

Se define el suceso C = "sacar el palo corto" y $\overline{C}$ a su contrario. Las probabilidades de sacar el palo corto de cada persona son:

- 1.ª persona: $P(C_1)=\frac{1}{3}$
- 2.ª persona: Solo lo puede sacar si el primero ha sacado palo largo. Como quedan uno largo y uno corto: $P(C_2)=P(\overline{C}_1)\cdot P(C/\overline{C}_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.
- 3.ª persona: Solo es posible si el primero y el segundo han sacado palo largo, es decir, $P(C_3)=1-P(C_1)-P(C_2)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Los tres tienen las mismas probabilidades, se trata, por tanto, de "un juego justo".

Ilustración 16.- Cuestión, pág.280. 4º ESO

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Estándar de aprendizaje “2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia”. Estos ejercicios son generalmente con o sin reemplazamiento. Las tablas de contingencia se utilizan mucho en los cálculos de probabilidades condicionadas.

Ejemplo:

10. Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 azules. Se extraen dos bolas sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color si devolvemos la primera bola a la bolsa? ¿Y si no lo hacemos?

Ilustración 17.- Ejercicio, pág. 276. 4ºESO.

Tipo: Ejercicios.

Descripción: Los ejercicios relacionados con el estándar de aprendizaje “2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada” requieren o es muy útil en ellos el uso de la tabla de contingencia.

Ejemplo:

47. En un congreso de médicos hay 200 congresistas. De ellos, 130 son morenos y 80 tienen los ojos castaños, de los cuales 50 son morenos. Se selecciona al azar a un asistente. Haz una tabla de contingencia y calcula la probabilidad de que:

a) Sea moreno y con los ojos castaños.

b) No tenga los ojos castaños y no sea moreno.

Ilustración 18.- Ejercicio, pág. 285. 4ºESO.

13. En una ciudad el 25 % de las mujeres y el 40 % de los hombres usan gafas. Halla la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, sea una mujer y use gafas.

Ilustración 19.- Ejercicio, pág. 277. 4ºESO.

Tipo: Problema.

Descripción: “2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas”.

Ejemplo:

Un juego con trampa

lén y Carlos han descubierto un nuevo juego:

Se introducen tres fichas en un sombrero.

Una de ellas tiene las dos caras blancas, otra las dos caras rojas y la tercera una blanca y otra roja.

Uno de ellos extrae una ficha, mira solo una de sus caras y le muestra el color al otro jugador.

rlos apuesta a que la ficha es la que tiene las dos caras iguales, y Belén, a que es la que ene las caras diferentes.

rece que los dos jugadores tienen las mismas posibilidades de acertar, ya que si la cara e se ha visto es roja la cara oculta o es roja también, en cuyo caso sería la ficha de dos ras rojas, o por el contrario, es blanca, y entonces la ficha extraída sería la blanca-roja.

¿Tienen los dos jugadores las mismas probabilidades de ganar?

En caso contrario, ¿por cuál de las dos opciones apostarías? Calcula la probabilidad de ganar de cada jugador.

Ilustración 20.- Problema, pág. 288. 4ºESO.

4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1ºBACHILLER

Aunque no aparece en el currículo de 1º de bachiller, la probabilidad aparece en el libro de texto de referencia escogido, de 1º de bachiller. Por ello, se muestran los ejercicios con los que se cumplen los estándares de aprendizaje del currículo de 2º de bachiller.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Estándar de aprendizaje “1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento”. Ejercicio en el que el alumno debe calcular una probabilidad, para la cual puede utilizar una técnica de recuento como el diagrama de árbol; y la probabilidad del suceso contrario, la cual es una consecuencia de la axiomática de Kolmogorov.

Este ejercicio también sirve para el siguiente estándar de aprendizaje “1.2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral”.

Ejemplo:

13. Se lanza dos veces un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6. Calcula:

a) La probabilidad de obtener algún 6.

b) La probabilidad de no obtener ningún 6.

Ilustración 21.- Actividad, pág. 255.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Ejercicio en el que el alumno tiene que aplicar el teorema de Bayes para obtener la probabilidad que se pide, viéndose así el estándar “1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes”.

Ejemplo:

28. Tenemos dos bolsas de caramelos. La primera contiene
PAU 15 caramelos de naranja y 10 de limón y la segunda 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo.

a) Halla la probabilidad de que el caramelo sea de naranja.

b) Si el caramelo elegido es de limón, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la segunda bolsa?

Ilustración 22.- Actividad pág. 263.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Ejercicio en el que el alumno debe obtener la probabilidad de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial. Estándar de aprendizaje "2.2. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica".

Ejemplo:

5. El Ayuntamiento de una ciudad ha comprobado que el 23 % de los ciudadanos acude a las piscinas municipales. Si se escoge al azar una muestra de 15 personas de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas haya acudido a las piscinas municipales?

Ilustración 23.- Actividad, pág. 277.

Tipo: Ejercicio.

Descripción: Ejercicio en el que el alumno debe obtener la probabilidad, teniendo una variable que se le dice que sigue una distribución normal. Estándar de aprendizaje "2.4. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica.".

Ejemplo:

8. En una panadería se cortan panecillos con un peso que
PAU se ajusta a una distribución normal de media 100 gramos y desviación típica 9 gramos.
¿Cuál es la probabilidad de obtener un panecillo cuyo peso oscile entre 80 gramos y la media?

Ilustración 24.- Actividad, pág. 280.

Tipo: Cuestión.

Descripción: Cuestión en el que el alumno ve lo que debe comprobar para poder aproximar la binomial por una normal y calcular la probabilidad. Estándar de aprendizaje "2.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida".

Ejemplo:

3. PAU Se sabe que el 10% de los habitantes de una ciudad va regularmente al teatro. Se toma una muestra al azar de 100 habitantes de esta ciudad. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que al menos el 13% de ellos vayan regularmente al teatro?

Ilustración 25.- Actividad, pág. 281.

4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2ºBACHILLER

En el libro de texto de referencia escogido se ven en segundo de bachiller los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis. Cómo ya se ha dicho antes, los contenidos y los estándares de aprendizaje que aparecen en el currículo de este curso aparecen en el libro de texto de referencia en el curso anterior, donde se ha visto ya que se trabajan todos mediante los distintos ejercicios (véase apartado anterior).

5. Resultados

En este capítulo se comentan las ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto, así como la coherencia existente entre ambos, currículo y libros de texto.

5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

En primer lugar, hay que remarcar el hecho de la discontinuidad que existe al ver los contenidos de probabilidad a lo largo de los cursos. Esta discontinuidad aparece en 1º de ESO, donde el currículo (y por ello el libro de texto de referencia tampoco lo hace) no incluye contenidos de probabilidad (solamente aparece la estadística), cuando en el currículo de primaria, la probabilidad sí aparece en 5º y 6º curso. Esta discontinuidad puede hacer que el alumnado olvide aún más los contenidos vistos en primaria respecto a la probabilidad, y por ello ser un perjuicio para su aprendizaje. Por ello, es muy importante la labor del profesor para no olvidar en primero de ESO incluir juegos de azar en los que se contabilice en tablas las frecuencias de resultados.

En cuanto a 3º y 4º de ESO, en matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, en 3º hay una discontinuidad, pues no aparecen contenidos de la probabilidad en el currículo.

Además de estas discontinuidades en el currículo de la ESO, se puede encontrar una otra discontinuidad en bachiller. Esta se da solo en el caso del bachiller de ciencias, puesto que en el caso del bachiller de sociales sí aparece en el currículo la probabilidad. Esta ausencia puede resultar en un perjuicio para el aprendizaje del alumnado como ya se ha comentado.

Además de estas discontinuidades, se puede ver a grandes rasgos, en las tablas de los capítulos anteriores, lo siguiente. Vemos que en general las tablas aparecen en un principio llenas de contenidos, criterios de evaluación o estándares de aprendizaje evaluables al principio de las mismas (en la parte superior, en sus primeras filas) y vacías más abajo. Conforme se va avanzando a cursos superiores, las tablas van siendo más completas, con presencias en las filas inferiores, pero sin dejar de estar completas, en general, en las superiores.

Se puede ver cómo el concepto de variable aleatoria, solo aparece en bachiller. Esto es debido a que es un concepto complejo, requiere la idea de función, y no de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Es muy abstracto, y con ello el concepto de distribución de probabilidad. La razón es que la probabilidad básica no requiere de grandes herramientas matemáticas (ESO), pero cuando empieza a necesitar conceptos difíciles (función, derivada, integral) ya requiere niveles de cálculo a nivel de bachiller.

Con el último descriptor, CE9 y EAE9, relativo al uso de un vocabulario adecuado, sucede al revés, pues en los primeros cursos no se exige, lo cual es lógico pues el alumnado está aprendiendo aún los conceptos, y en los cursos siguientes (ya desde 3º de ESO) aparece en los estándares de aprendizaje hasta el último curso (2º bachiller).

Otros descriptores como el C6 y el C7, relativos a las variables aleatorias y distribuciones de probabilidad, no aparecen hasta bachiller, pero, como se ha dicho, la aparición de nuevos descriptores, y con ello nuevos contenidos, no hace que desaparezcan los anteriores (sigue apareciendo Laplace, la frecuencia relativa, etc.), tanto a nivel de contenidos como de estándares (salvo el C1, que ya se ha comentado).

Los contenidos en cuanto al cálculo de probabilidades (descriptor C3) son progresivos, apareciendo por primera vez en 6º de primaria como una "iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso", continuando en 2º de ESO como un cálculo de la frecuencia relativa, "Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación", y ya pasando a la regla de Laplace en 3º.

Se ve con facilidad cómo se repiten muchos de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, y de forma literal, en Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I y Matemáticas II (ver por ejemplo tabla *1.3 Contenidos en Bachiller,* comparando las columnas relativas a Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I y Matemáticas II).

No hay muchas cosas que dejen de aparecer en el currículo a lo largo de los cursos. Así, se puede ver cómo se especifica en los criterios de evaluación de los distintos cursos que el alumno sepa identificar y resolver problemas y situaciones de la vida diaria (conectando así la realidad y los conceptos matemáticos); y cuando el criterio de evaluación de un curso no habla de problemas "*vida diaria*" o "*vida cotidiana*", habla de "*contextos relacionados con las ciencias sociales"* (en el caso de bachiller de ciencias sociales). Sin embargo, se puede encontrar una ausencia en este caso, en 2º de ESO, donde no aparece esto.

Otro aspecto relacionado con el uso de la probabilidad es la toma de decisiones o formulación de conjeturas, y se puede encontrar esto en todos los cursos ya desde 6º de primaria.

El uso de técnicas de recuento como diagramas de árbol, tablas, etc., también aparece a lo largo de todos los cursos, donde en bachiller, aunque no aparezca en los contenidos o en los estándares de aprendizaje evaluables, lo encontramos en los criterios de evaluación. Aunque el uso que se da a los diagramas de árbol, va cambiando, y van abandonándose al ir avanzando en el sistema educativo. Al principio se utiliza para contar, y esto se abandona en cuarto. El diagrama de árbol para Bayes aparece en bachiller como visualización de las probabilidades iniciales y las verosimilitudes.

Es remarcable el hecho de que no se encuentre en el currículo, más allá de 2º de ESO, la experimentación o simulación por parte del alumnado. En este curso aparece con el contenido *Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.* (ver C3, tabla 2º ESO).

5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Respecto a la coherencia entre libros de texto y currículo, antes de analizar esto con los distintos ejercicios tipo que aparecen en el capítulo anterior se pueden remarcar varios aspectos.

Se ha mencionado cómo en el currículo aparece el vocabulario, tanto en estándares de aprendizaje evaluables como en criterios de evaluación (incluso en contenidos, en el caso de 4º ESO), de un modo que se considera adecuado, por aparecer en cursos posteriores (a partir de 3º ESO). Sin embargo, en 2º de ESO ya podemos encontrar en el libro de texto la teoría explicada con un vocabulario técnico y menos accesible o fácil para el alumnado, utilizando también notación matemática.

Algo más destacable es el hecho de que en el libro de texto de referencia (editorial SM) para 5º curso de primaria no aparece la probabilidad y se encuentran solo contenidos relativos a la estadística, aunque la probabilidad sí aparece en el currículo para ese curso. De forma inversa, encontramos una discrepancia entre currículo y libro de texto en 4º curso de ESO, donde contenidos que no aparecen en el currículo, sí que aparecen sin embargo en el libro de texto; estos contenidos son el teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total.

Respecto a los ejercicios del libro de texto de referencia, se puede ver cómo se han organizado en función de los estándares de aprendizaje evaluables en el capítulo anterior. De este modo se puede ver cómo todos los estándares de aprendizaje evaluables están presentes en los ejercicios de los libros de cada curso. Sin embargo, hay que decir que en algunos casos son pocos los ejercicios que trabajan un estándar de aprendizaje concreto, y son muchos los ejercicios que trabajan otro estándar de aprendizaje; pero esto no es necesariamente un aspecto negativo.

Podemos además ver discrepancias entre los ejercicios y el currículo, aunque sean las menos, por ejemplo, en los estándares de aprendizaje o criterios de evaluación relacionados con la "vida cotidiana", esto es, aquellos tales como "*Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana*". Esto es así porque la mayoría de los ejercicios, problemas y cuestiones del libro de texto están relacionados con unos pocos experimentos concretos (lanzamiento de dados, extracción de bolas, extracción de cartas de una baraja, o lanzamiento de monedas). Hay que decir, sin embargo, que todos los problemas de azar pueden reducirse a uno de estos experimentos, y que es un elemento importante en la didáctica de la probabilidad, reducir cualquier enunciado a una de esas situaciones.

Parte II: Análisis teórico comparativo de la enseñanza de la probabilidad en secundaria en España y Singapur

Esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster en un trabajo teórico, y se analiza y se compara cómo se aborda la enseñanza de la probabilidad en el currículo (brevemente) y en los libros de texto de matemáticas, de primaria y ESO, para dos países, España y Singapur.

El análisis se divide en varios capítulos. El primer capítulo, de esta segunda parte, es referente a los currículos de matemáticas de ambos países, que son la base de la enseñanza y permite ver la base de la diferencia entre ambos países; además en este capítulo se trata el tema del desarrollo cognitivo en los niños, pues es un factor que afecta al momento de aparición de la probabilidad en un currículo de enseñanza.

En los siguientes capítulos se hace una comparación en diferentes aspectos entre ambos países en cuanto a la enseñanza de la probabilidad. En el segundo capítulo se da una imagen global y superficial de las diferencias entre ambos y sus líneas de aprendizaje. En el tercer capítulo se realiza un análisis de la evolución de la probabilidad a lo largo de los cursos en ambos países, lo que permite compararlos en ese aspecto. Finalmente, en el cuarto capítulo se una comparación más profunda de la forma de transmitir la probabilidad en cada país, haciendo un análisis de cada uno. Tras esto se dedica un capítulo para mostrar las conclusiones extraídas a lo largo de los capítulos del trabajo.

En definitiva, en esta parte del Trabajo Fin de Máster se pretende hacer un análisis comparativo entre los libros de texto de España y los de Singapur (y, más brevemente, entre los currículos), pues estos son la guía y base para muchos profesores, y marcarán la forma en la que se enseña en uno y otro país. Se pueden ver así las diferencias más significativas y quedarse con lo bueno de uno y otro modelo. Todo ello para el tema que atañe al trabajo: la probabilidad. Se ha escogido Singapur por tener un modelo bastante diferente al de España y que se considera que es acertado en muchos de sus planteamientos, y su estudio permitirá aprender del mismo.

6. Currículos de matemáticas de España y Singapur.

Lo primero que se debe conocer para poder comprender las diferencias existentes entre Singapur y España respecto a la enseñanza de las matemáticas es que el currículo en Singapur es muy distinto al currículo de España. Esto hará que los libros de texto de uno y otro país también difieran significativamente.

Mientras en España los currículos de primaria y secundaria contienen, en distintas columnas, tanto contenidos como criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, en Singapur es muy diferente. Como se puede ver en la siguiente ilustración, el currículo de Singapur no tiene estas columnas y es mucho más breve y abierto, mientras el de España es específico y detallado. Por ello, en Singapur se encuentran ejercicios que no están establecidos de algún modo por el currículo (en España ya se ha visto, en la primera parte del trabajo, que se puede encontrar un tipo de ejercicio para cada estándar de aprendizaje especificado en el currículo).

3 Statistics and Probability	

Data analysis	Include:
	• interpretation and analysis of:
	  * dot diagrams
	  * stem-and-leaf diagrams
	• mean, mode and median as averages
	• purposes and use of mean, mode and median
	• calculation of the mean for grouped data

Probability	Include: • probability as a measure of chance • probability of single events (including listing all the possible outcomes in a simple chance situation to calculate the probability)

Bloque 5. Estadística y probabilidad

Matemáticas. 2º ESO		
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**

Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.	1. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad. 2. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación	1.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas. 1.2. Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación. 1.3. Distingue los conceptos de posible y probable y gradúa o cuantifica la mayor o menor probabilidad de los resultados esperados en un experimento aleatorio. 2.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos. 2.2. Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. 2.3. Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace y y la expresa en forma de fracción y como porcentaje. 2.4. Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación. 2.5. Utiliza la probabilidad para elegir la opción más adecuada en situaciones o juegos de azar sencillos.

Ilustración 26.- Comparación de currículos de Singapur (arriba) y España (abajo), en 2º curso de secundaria (rama N(A) en el caso de Singapur).

Ya se ha mostrado una parte del currículo de Singapur a modo de ejemplo para poder ver las diferencias con el currículo de España; sin embargo, para entender las diferencias en la enseñanza de uno y otro país, es importante ver lo que el currículo de Singapur dice más allá de cada curso o bloque.

En Singapur se sigue un marco concreto para las matemáticas. Este marco se refleja o ilustra con un pentágono que contiene, en su centro, la **resolución de problemas matemáticos**. Se considera que el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas matemáticos depende de cinco componentes interrelacionados, a saber, conceptos, habilidades, procesos, actitudes y metacognición (las cinco aristas del pentágono). Esto explica la diferencia principal entre los libros de texto de Singapur y de España; **en Singapur el eje vertebrador es la resolución de problemas matemáticos**, y mediante este se adquieren tanto los conceptos como las habilidades (así como las actitudes, los procesos y la metacognición; está última se puede traducir como un "aprender a aprender", o como dice el currículo, "pensar en pensar"). Todo se articula en torno a la resolución de problemas; esta sirve para adquirir las habilidades, procesos, conceptos, etc., y estos a su vez, para resolver los problemas.

Así, en Singapur no se van a encontrar en sus libros de texto recuadros remarcando y explicando los conceptos matemáticos a adquirir, y ejercicios rutinarios para que adquieras un concepto concreto, sino que se llegará a estos mediante los problemas. **En Singapur se va de lo manipulativo a lo formal**.

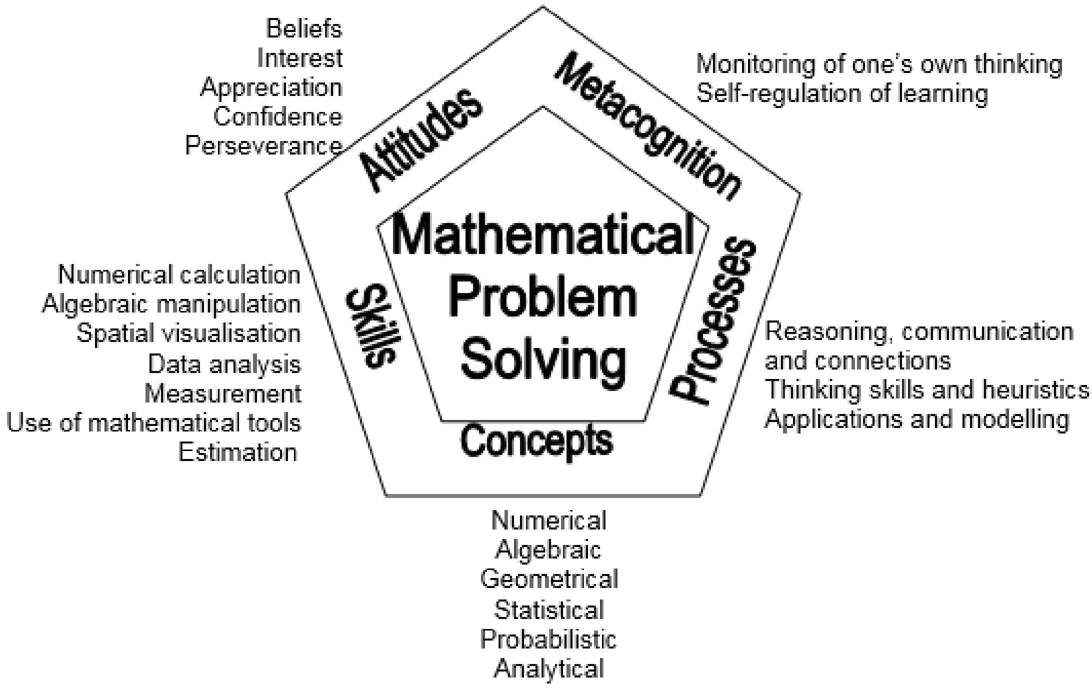


Ilustración 27.- El pentágono que aparece en el currículo de Singapur, tanto en el de primaria como en el de secundaria, como marco de la enseñanza de las matemáticas.

Además, el currículo hace hincapié en que esa adquisición de esas cinco aristas del pentágono sea "en una amplia gama de situaciones, incluidos problemas no rutinarios, abiertos y del mundo real".

Hay que remarcar el hecho de que, en Singapur, a diferencia de como sucede en España, no hay varias editoriales de libros de texto, sino que se tienen los libros de texto oficiales únicamente.

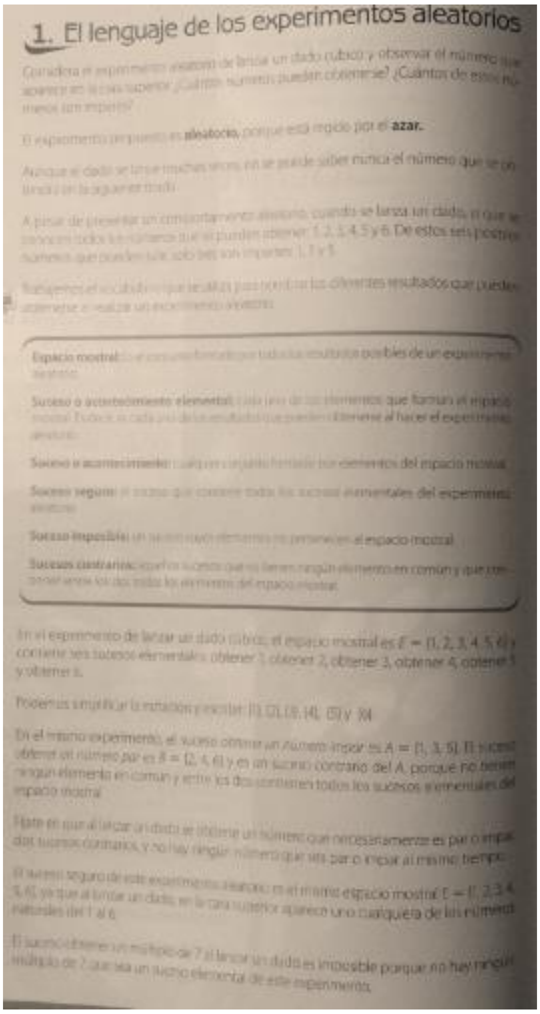
Siendo esto así, para la comparativa entre ambos países se toman, naturalmente, los libros de texto oficiales de Singapur, y en el caso de España, se toman en este trabajo, como libros de texto de referencia, los libros de la editorial SM.

6.1. Libros de texto en España.

Al tomarse para el caso de España los libros de texto de SM, se podría pensar que la comparación de la enseñanza de la probabilidad entre Singapur y España que se ha hecho en el presente trabajo fin de máster es únicamente válida para este caso concreto, pero lo cierto es que los libros de texto de la editorial SM son representativos de la mayoría de los libros de texto que se utilizan en España para las matemáticas. Hay que tener en cuenta que algunas editoriales tales como Santillana, Anaya, SM, Vicens Vives o Mcgraw-Hill ya cubren la mayor parte de los libros de texto que se utilizan en los centros educativos en España.

En diferentes libros de texto de matemáticas de otras editoriales que se han consultado, se puede ver que más o menos mantienen una estructura similar: misma estructura con la explicación de la teoría en primer lugar y, tras un ejemplo, los ejercicios propuestos;

lenguaje con notación; ver sucesos y sus definiciones antes de empezar con la probabilidad; probabilidad definida con Laplace; uso de cuadros con la explicación de los conceptos; etc. Se muestra a continuación como ejemplo, una página del libro de secundaria de la editorial Mcgraw-Hill.



1. El lenguaje de los experimentos aleatorios

Ilustración 28.- Una página del libro de 3º de ESO de la editorial McGraw-Hill; se ve como se explica primero la teoría, utilizando recuadros en los que se definen los conceptos, y se utiliza notación matemática desde un inicio.

Esto no quiere decir, por supuesto, que absolutamente todos los libros de texto en España tengan está misma estructura. Se puede citar como ejemplo el libro de 2º de ESO de la editorial Almadraba.

En resumen, al realizar el trabajo se han consultado varios libros de texto de matemáticas de secundaria, y en ellos se ha encontrado una misma estructura y forma de proceder; en general, **en el caso de España los libros están diseñados de modo que en primer lugar se muestra la teoría**, luego se muestran uno o dos ejemplos **y finalmente unos ejercicios propuestos** (sin su resolución y sin dar las soluciones) que el alumnado debe resolver.

6.2. Desarrollo cognitivo y probabilidad.

Dado que **en los currículos de los dos países se encuentra una diferencia en cuanto al curso**, y por tanto la edad, en la **que el alumnado empieza a ver la probabilidad**, cabe aquí ver unas pequeñas pinceladas sobre el **desarrollo cognitivo** en el ser humano. En concreto, de la teoría constructivista de Piaget.

Aunque exista esta diferencia entre los dos países, **ambos coinciden** en situar el comienzo de la impartición de los temas de la probabilidad en cursos no muy avanzados (primer y segundo ciclo de primaria), en los que se imparten otras áreas de las matemáticas. Esto se debe al hecho de que la probabilidad requiere de ciertas capacidades que se van desarrollando conforme se crece.

Según Piaget, el desarrollo de la inteligencia es un proceso con tres grandes periodos: sensoriomotor (hasta los 2 años), operaciones concretas (desde los 2 años hasta los 11 años), y el de operaciones formales (a partir de los 11-12 años). Según la teoría de Piaget, en el pensamiento formal (en el periodo de las operaciones formales) se adquiere la capacidad de **pensar en abstracto**, los alumnos pueden despegarse de la realidad y pensar de forma abstracta; la capacidad para concebir "**lo posible**", **el adolescente empieza a concebir "lo que podría ser" además de lo que "es"**, ya no parte de lo real y lo concreto, sino de lo posible y hasta de lo ideal (por ejemplo la combinatoria requiere poder disociar factores, es decir, que se aíslen unos elementos de otros para determinar cuál es su papel en el resultado final); y la lógica proposicional, una lógica verbal que permite afirmar la verdad o falsedad de los enunciados sin pensar en su correspondencia con la realidad (por ejemplo, si nos plantan la proposición "la ficha que tengo en la mano es verde y no es verde" podemos afirmar que es falsa sin necesidad de ver materialmente la ficha, mientras un niño que se encuentra en el período de las operaciones concretas para poder contestar necesitaría ver cómo es la ficha).

Así pues, se puede ver cómo estas capacidades que se adquieren en el desarrollo cognitivo del niño o adolescente, tienen una relación con la probabilidad o directamente son necesarias para la correcta comprensión y adquisición de los conceptos y contenidos de la probabilidad.

Cabe decir que una de las críticas que recibió esta teoría de Piaget es que la edad de adquisición no era tan temprana como Piaget había supuesto; además, algunos teóricos ponen en tela de juicio que los cambios en los sistemas cognoscitivos del niño sean tan fundamentales, decisivos, cualitativos y graduales como propuso él.

7. Línea de aprendizaje. comparación España y Singapur.

En este capítulo se pretende dar una visión global de las diferencias en los libros de texto de España y Singapur. Antes de empezar a profundizar en las diferencias entre uno y otro país, **conviene tener una noción de las diferencias en la línea de aprendizaje**, ver cuáles son los objetivos y los contenidos que aparecen en uno y otro, efectivamente, en sus respectivos libros de texto.

Esto se va a hacer primero para 2º curso de secundaria y luego para 4º. Esto es así debido a que, aunque en España sí (en el caso de las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, en el caso de las aplicadas no), en Singapur no aparece la probabilidad en 3º. Y en España los contenidos de 3º vuelven aparecer en 4º; aunque se hablará de 3º también cuando se considere, aunque no aparezca en los cuadros comparativos de ambos países.

Se debe recordar que, como ya se ha explicado, el currículo de Singapur es diferente al de España, no hay currículo de contenidos en Singapur, sino que van apareciendo ejemplos que permiten finalmente formalizar los contenidos.

7.1. 2º Curso secundaria

En primer lugar, los **objetivos de transmisión de los contenidos** de uno y otro país son distintos.

En los libros de Singapur aparecen los objetivos de transmisión de los contenidos que se tienen para ese tema y en ese curso, los conceptos y las cosas que el alumnado va a aprender a lo largo del tema. Aparecen en la primera página del tema y son los siguientes:

Significado de la probabilidad. Definición de “experimento”, “resultado”, “suceso”. Cálculo de probabilidad (experimentos simples).

Estos objetivos y los contenidos que se ven son algo menores en Singapur que en España, para el mismo curso. Esto se puede ver en las siguientes ilustraciones.

La siguiente ilustración (ver Ilustración 29) muestra un resumen de lo que el libro pretende conseguir para ese curso, y de los contenidos que se tratan. La segunda ilustración recoge las mismas tablas, pero en estas no hay una secuenciación, y se ponen una junto a la otra para poder visualizar las diferencias entre ambos países, que se han remarcado con un color distinto. Estas tablas se han elaborado en este trabajo para permitir una primera imagen global de la diferencia entre lo que se ve en los libros de texto de Singapur y España.

En la primera ilustración se puede observar cómo en segundo curso en Singapur solamente se ven **experimentos simples**, mientras en España ya se tocan los **experimentos compuestos** también. También se observa que en España se ven la **unión y la intersección de sucesos**, y los **sucesos compatibles e incompatibles**, mientras que en Singapur no. Además, las **técnicas de recuento**, tales como la tabla de doble entrada o el diagrama de árbol, tampoco se aparecen en Singapur para este curso. En este país, sin embargo, se ve y experimenta más con la **probabilidad experimental**, que en el caso de España.

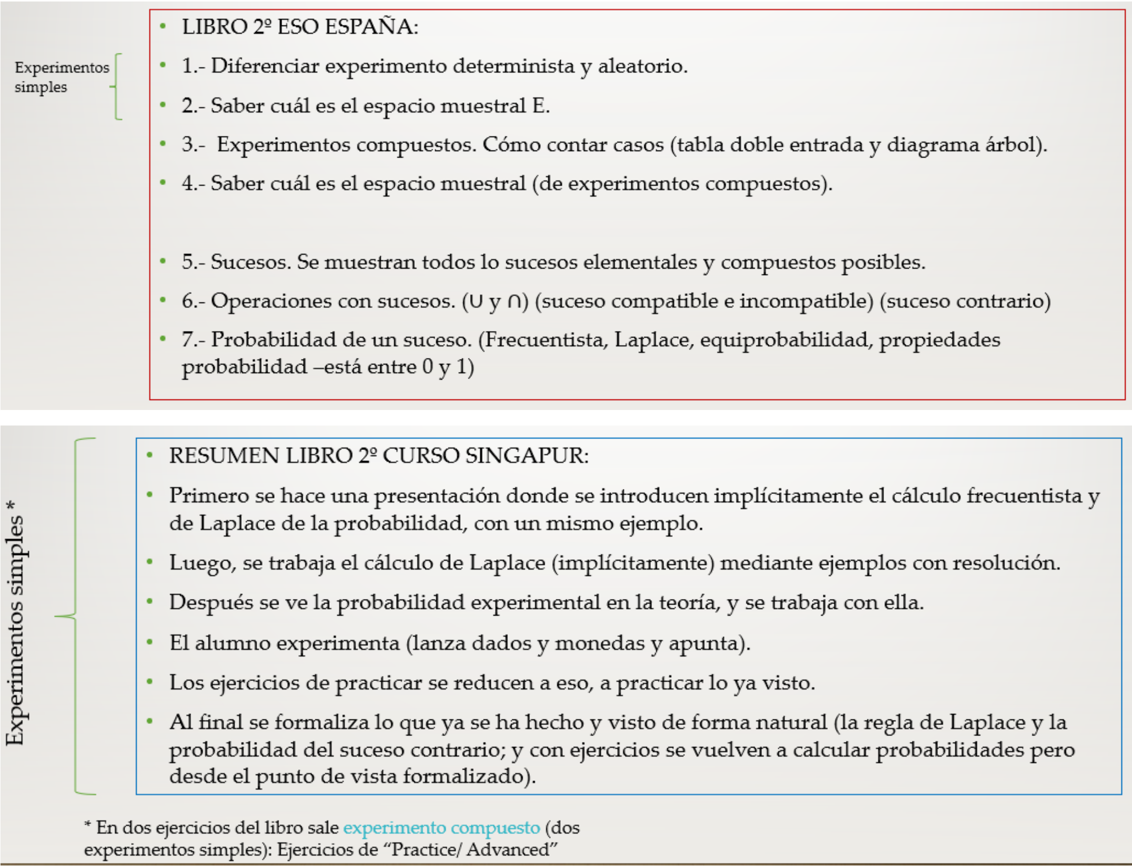


Ilustración 29.- Resumen de lo que se ve y de lo que se pretende que el alumno aprenda, en el libro de España y de Singapur, en 2º curso de secundaria. El resumen aparece en el mismo orden en el que van apareciendo en los libros.

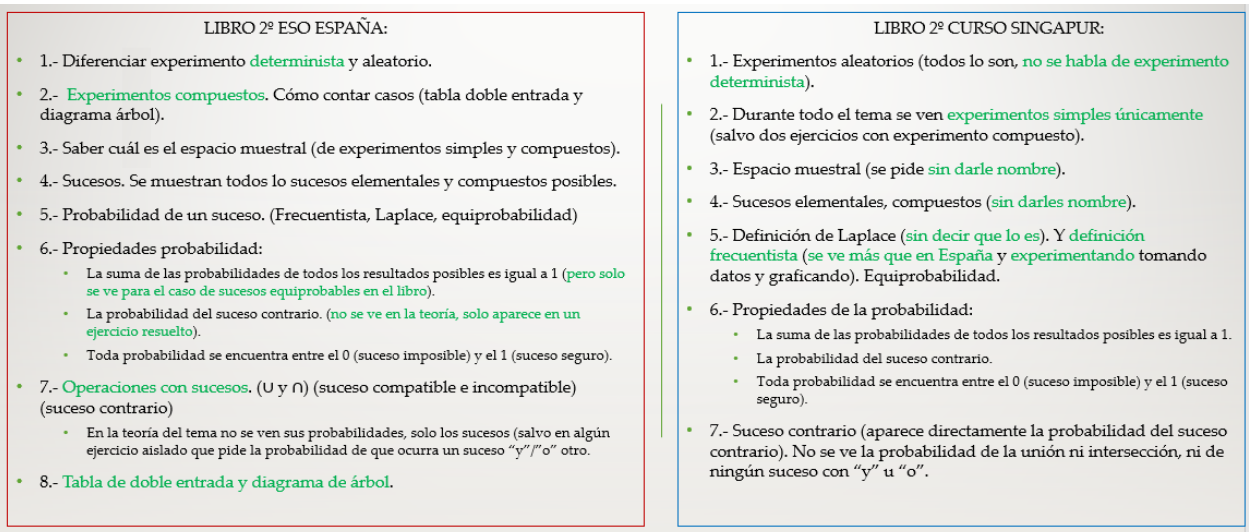


Ilustración 30.- Las mayores diferencias entre España y Singapur, en cuanto a los contenidos que aparecen en sus respectivos libros de 2º curso de secundaria. En los cuadros rojo y azul aparecen las diferencias resaltadas en color verde. Los números en la tabla no indican un orden, sirven para comparar ambos países.

En Singapur se trabaja con muchos elementos de probabilidad sin formalizarlos previamente, en definitiva, se modeliza el experimento aleatorio como en España sin utilizar el vocabulario propio de la probabilidad “espacio muestral”, “suceso”, “Laplace”, etc.

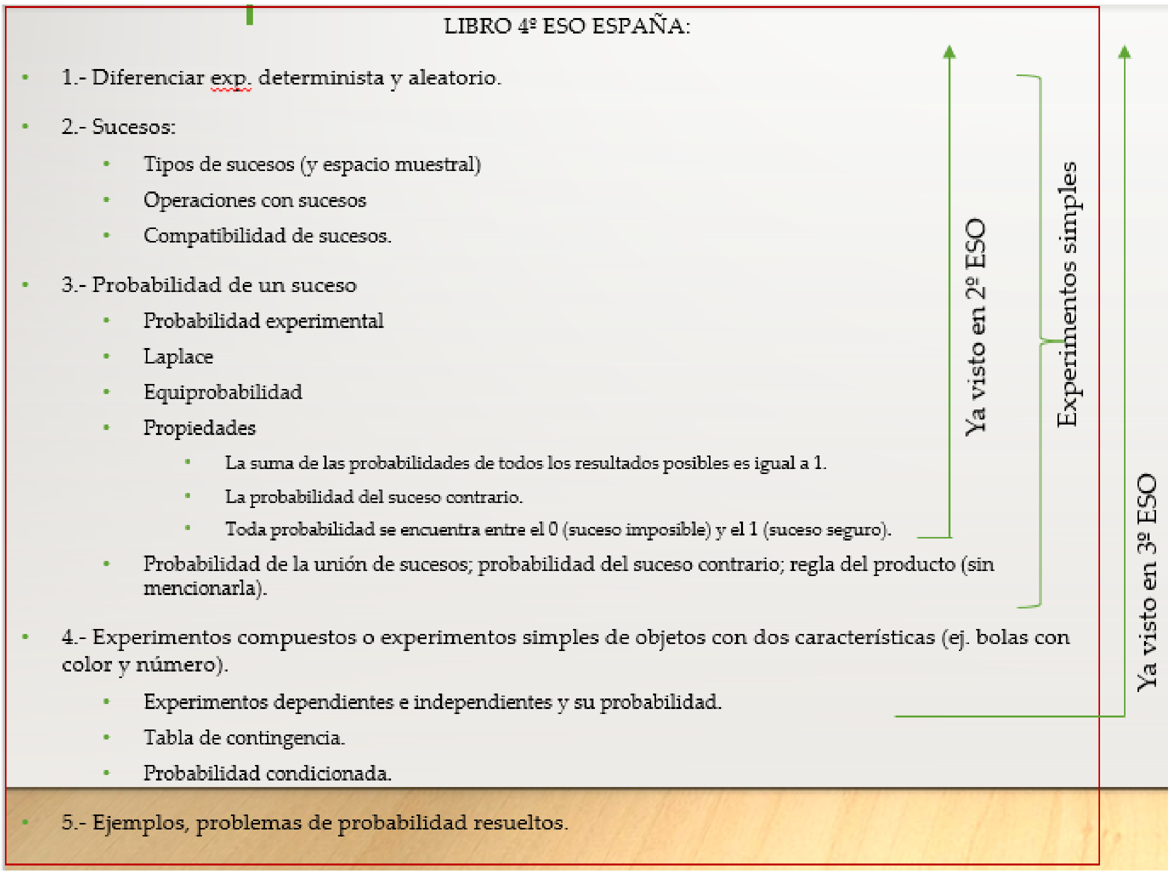
En el currículo español se utilizan de manera habitual dos herramientas para la visualización de los problemas: diagramas de árbol y tablas de doble entrada. Las tablas de doble entrada son habituales desde los primeros cursos de primaria y se utilizan para visualizar los problemas de probabilidad en donde se entremezclan distintas variables en una población: altura/ peso... Los diagramas de árbol tienen un uso abundante en toda la didáctica de la probabilidad en España con distintos fines: combinatoria, visualización del espacio muestral, del experimento compuesto, y cálculo con la regla del producto (probabilidad condicionadas). En Singapur también son muy útiles los diagramas de árbol, pero no se empiezan a ver hasta cuarto curso de secundaria, junto a los experimentos compuestos. Igual sucede con las tablas de doble entrada, que en segundo curso en Singapur no aparecen más allá de en un ejercicio aislado.

7.2. 4º Curso secundaria

En cuarto curso de secundaria, se ven en Singapur los contenidos que sí se habían visto en 2º ESO en España y no en el libro de 2º curso de Singapur, cómo es el diagrama de árbol, la tabla de doble entrada, los sucesos incompatibles o los experimentos compuestos; y, aunque en muy pequeña medida, se empieza a usar algo la simbología, por ejemplo, utilizando letras mayúsculas para denotar un suceso (en lugar de escribirlo con palabras).

Además, se ven también en cuarto curso en Singapur otros contenidos que en España se introducen en el libro de 3º ESO, como son la probabilidad de la unión, la regla del producto (aunque solo se formaliza, solo aparece la fórmula para el caso de experimentos independientes; sin embargo, se usa también en experimentos dependientes en el libro. En España sucede de forma similar), o los experimentos dependientes e independientes. Sin embargo, igualmente hay una diferencia de contenidos, pues en España se ve la **probabilidad condicionada** y en Singapur no se ve en el mismo curso; la probabilidad condicionada naturalmente aparece de forma implícita en Singapur, pero no se habla de la misma ni se extrae su fórmula de la regla del producto. La **tabla de contingencia** también aparece en la teoría del libro en España, mientras que en Singapur solamente aparece en un par de ejercicios aislados (en 2º aparece en un ejercicio al final del todo, pág. 285, ej. 4. En 4º aparece en un ejercicio para practicar, pág. 155, ej. 4, que, aunque no aparece la tabla, se podría utilizar para resolverlo).

Estas diferencias pueden apreciarse en las siguientes ilustraciones. La primera ilustración contiene un cuadro a modo de resumen para cada país, mostrando qué se ve en el tema de probabilidad de 4º curso. La segunda ilustración toma estos mismos cuadros para, remarcando con otro color, resaltar las diferencias entre ambos países.



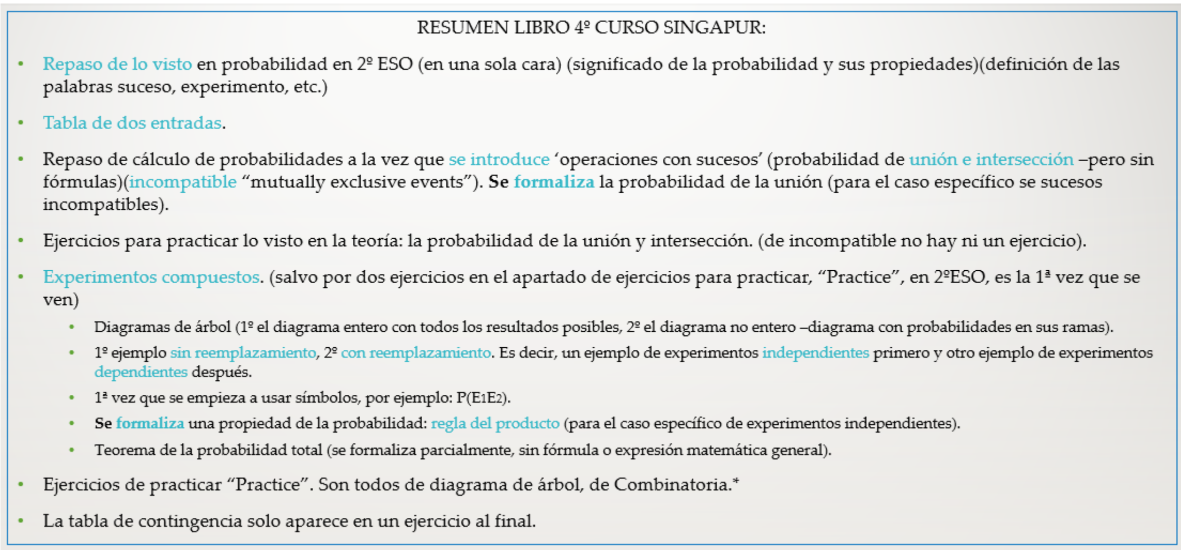
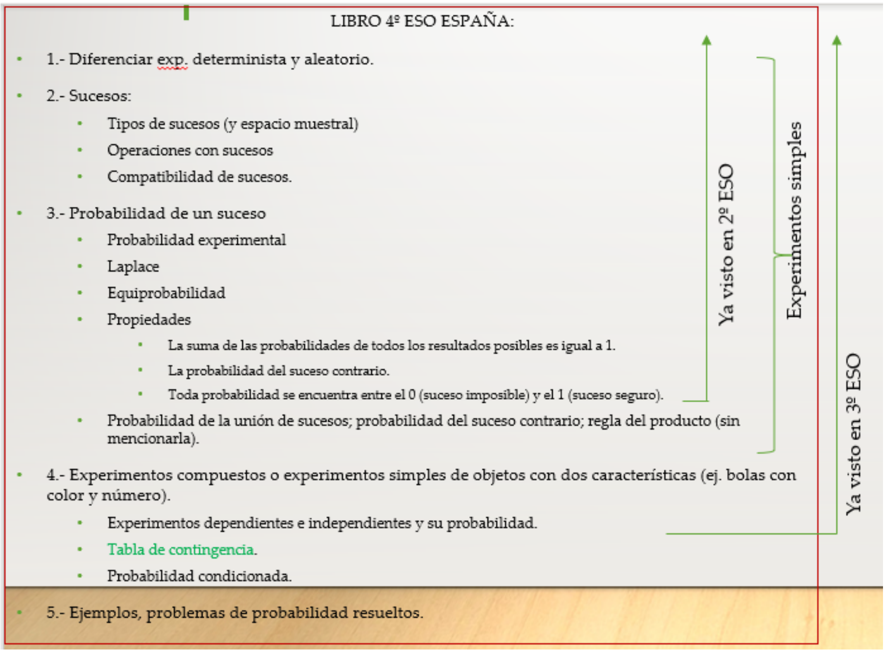
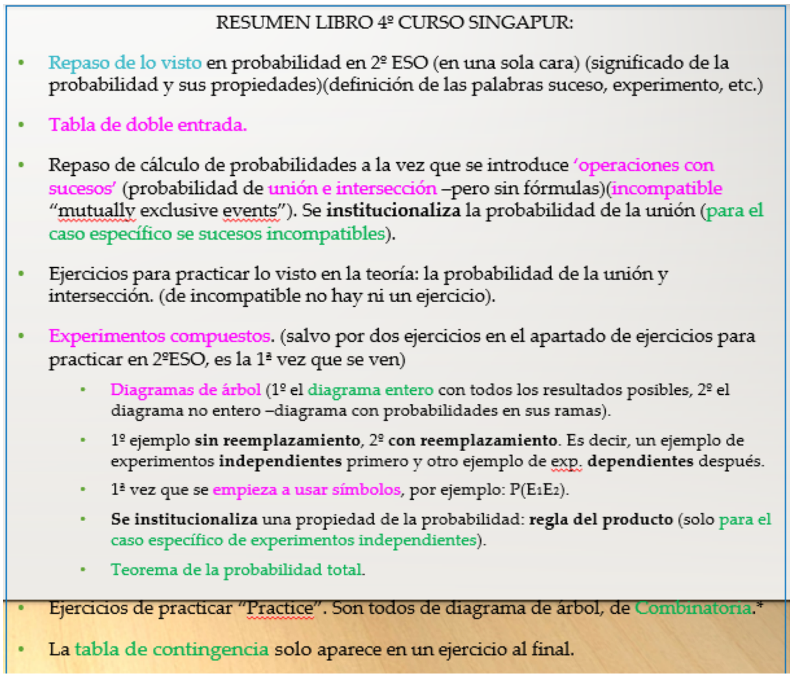


Ilustración 31.- Cuadros resumen de los contenidos en los libros de texto de Singapur (abajo) y España (arriba) para el curso de 4º de secundaria.



LIBRO 4º ESO ESPAÑA:

- 1.- Diferenciar exp. determinista y aleatorio.
- 2.- Sucesos:
  - Tipos de sucesos (y espacio muestral)
  - Operaciones con sucesos
  - Compatibilidad de sucesos.
- 3.- Probabilidad de un suceso
  - Probabilidad experimental
  - Laplace
  - Equiprobabilidad
  - Propiedades
    - La suma de las probabilidades de todos los resultados posibles es igual a 1.
    - La probabilidad del suceso contrario.
    - Toda probabilidad se encuentra entre el 0 (suceso imposible) y el 1 (suceso seguro).
  - Probabilidad de la unión de sucesos; probabilidad del suceso contrario; regla del producto (sin mencionarla).
- 4.- Experimentos compuestos o experimentos simples de objetos con dos características (ej. bolas con color y número).
  - Experimentos dependientes e independientes y su probabilidad.
  - Tabla de contingencia.
  - Probabilidad condicionada.
- 5.- Ejemplos, problemas de probabilidad resueltos.



RESUMEN LIBRO 4º CURSO SINGAPUR:

- Repaso de lo visto en probabilidad en 2º ESO (en una sola cara) (significado de la probabilidad y sus propiedades)(definición de las palabras suceso, experimento, etc.)
- Tabla de doble entrada.
- Repaso de cálculo de probabilidades a la vez que se introduce 'operaciones con sucesos' (probabilidad de unión e intersección –pero sin fórmulas)(incompatible "mutually exclusive events"). Se **institucionaliza** la probabilidad de la unión (para el caso específico se sucesos incompatibles).
- Ejercicios para practicar lo visto en la teoría: la probabilidad de la unión y intersección. (de incompatible no hay ni un ejercicio).
- Experimentos compuestos. (salvo por dos ejercicios en el apartado de ejercicios para practicar en 2ºESO, es la 1ª vez que se ven)
  - Diagramas de árbol (1º el diagrama entero con todos los resultados posibles, 2º el diagrama no entero –diagrama con probabilidades en sus ramas).
  - 1º ejemplo **sin reemplazamiento**, 2º **con reemplazamiento**. Es decir, un ejemplo de experimentos **independientes** primero y otro ejemplo de exp. **dependientes** después.
  - 1ª vez que se empieza a usar símbolos, por ejemplo: $P(E_1E_2)$.
  - **Se institucionaliza** una propiedad de la probabilidad: **regla del producto** (solo para el caso específico de experimentos independientes).
  - Teorema de la probabilidad total.
- Ejercicios de practicar "Practice". Son todos de diagrama de árbol, de Combinatoria.*
- La tabla de contingencia solo aparece en un ejercicio al final.

Ilustración 32.- Comparación entre los contenidos en el libro de 2º curso de España y de Singapur, respectivamente. Las palabras en rosa indican los contenidos que en 2º curso se habían visto en España pero no en Singapur. En verde las diferencias que hay entre ambos países.

De la **comparación** entre estás ilustraciones y las ilustraciones anteriormente mostradas referentes al segundo curso de secundaria, se extraen las siguientes conclusiones: en ambos países la probabilidad de un experimento compuesto se calcula solo después de 2º curso. En **España** se ven los **experimentos compuestos** en 2º para mostrar las técnicas de recuento y para el cálculo del espacio muestral, y en 4º ya se calculan sus probabilidades; en **Singapur** a la vez que se ven los experimentos compuestos se enseñan las técnicas de recuento en 4º, y se calculan a su vez sus probabilidades, además de ver la regla del producto, los experimentos dependientes y el teorema de la probabilidad (sin formalizar).

En **España** el **concepto de incompatibilidad**, los **sucesos unión e intersección**, suceso contrario, etc., se ven en un apartado o capítulo de "sucesos", sin calcular la probabilidad, en segundo curso; solo se utilizan estos conocimientos para calcular su probabilidad en el siguiente curso. En **Singapur** estos conceptos se ven en el cálculo de probabilidades (de forma natural, pues se ven a través de un ejemplo en el que este concepto aparece ya al que luego se le pone nombre; e igualmente como un suceso, pero al ver probabilidad). Además, en Singapur se ven los sucesos (suceso elemental, espacio muestral, etc.) al final, tras formalizar la probabilidad después de tratar con ellos para calcular probabilidades.

7.3. Conclusión

Así pues, atendiendo a lo dicho, y sin entrar a profundizar del todo en las diferencias entre ambos países, pues esto se va haciendo a lo largo de las siguientes páginas de este trabajo fin de máster, se puede señalar a ahora mismo que **las mayores diferencias en contenidos entre uno y otro país** son las siguientes:

En principio parece que en España se ven más contenidos que en el caso de Singapur, sobre todo siendo tres los cursos en los que se ve la probabilidad en secundaria en España, frente a los dos cursos en Singapur; y es cierto que en España se ven más contenidos, pero en realidad son pocos más que en Singapur. En segundo curso hay contenidos que en Singapur no se llegan a tocar y en España sí se ven o se empiezan a ver, como por ejemplos los experimentos compuestos. Sin embargo, prácticamente en 4º curso en Singapur se ven los contenidos que no se habían visto y sí habían aparecido en España (ya sea en 2º o en 3º de ESO). Por lo que **los contenidos que se ven en ambos países son casi los mismos** (con salvedades cómo que no se ve la fórmula de la probabilidad condicionada) y en **España se ve la probabilidad en tres años** en la ESO, mientras que en **Singapur son solo dos** y en primaria no ven probabilidad.

Es remarcable el hecho de que **en España se ven contenidos que no llegan a ser útiles** como tal, entendiendo como útil en este caso un contenido que sirva para calcular una probabilidad. Se ve el espacio muestral de experimentos compuestos o los sucesos y las operaciones con sucesos, pero estos no serán vistos cómo útiles por el alumnado, que tiene que calcularlos por el simple hecho de calcularlos (no se explica que le servirán para calcular las probabilidades, y en el caso de los experimentos compuestos solo le servirán después de un año, pues en segundo los cálculos de las probabilidades se hacen sólo con experimentos simples). Mientras que el cálculo de la probabilidad sí tiene un sentido para el alumnado que ve la utilidad de conocer la probabilidad de perder en la ruleta de la suerte, la probabilidad de ganar la lotería, de que le toque un as jugando al póker, etc.

8. Comparación en la evolución a lo largo de los cursos.

En este capítulo se analiza cómo es la progresión en la enseñanza de la probabilidad en cada país, cómo son los cambios que se dan de un curso al siguiente. Se puede comparar así ambos países, viendo las fortalezas y debilidades de cada uno

8.1. Evolución España

En el caso de España, como se va a ir viendo, la evolución en la enseñanza de la probabilidad tiene algunas discontinuidades, y sobre todo mucha repetición de contenidos en diferentes cursos.

El primer curso en el que se imparte la probabilidad en la ESO es en 2º. En el currículo de primaria en España la probabilidad aparece en 5º de primaria y también en 6º de primaria. Así pues, la primera discontinuidad respecto a la impartición de este tema, la probabilidad, aparece en la ESO. A continuación, se recuerdan las discontinuidades que es dan en secundaria, ya mencionadas en la primera parte de este trabajo:

En el primer curso de la ESO, pues los alumnos no ven nada de probabilidad durante ese año. Para el caso de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, hay otra discontinuidad en 3º de ESO, donde no se ve la probabilidad. La siguiente discontinuidad se da en 1º de bachiller para el caso del bachiller de ciencias, pues el alumnado solo ve estadística ese año; en el caso del bachiller de ciencias sociales, sí se ve probabilidad en ambos cursos.

8.1.1. 2º ESO:

En primer lugar, se puede ver cómo es la evolución, cómo es el cambio del último curso en que el alumnado vio algo de probabilidad, a este curso. El **repaso** que se hace **de los contenidos vistos en 6º de primaria** en este caso es el siguiente:

En cuanto a las **experiencias de azar y no de azar** se hace un repaso y se vuelven a hacer ejercicios parecidos, la diferencia está en que ahora se pone un nombre a las experiencias que sí y que no son de azar (experimento aleatorio y experimento determinista) y se cambia la palabra experiencias por experimentos. Esto se hace sin advertir al alumnado y **sin definir que es un experimento**, lo cual puede confundir al alumno. Además, se introduce el concepto de **espacio muestral**, el cual ya aparecía en 6º de primaria solo que no se le daba nombre ni una forma de escribirlo (con la letra E, y con sus elementos separados por comas y entre llaves). Es muy remarcable el hecho de que el concepto de espacio muestral se presente como un conjunto, cuando el lenguaje conjuntista no se ha introducido en otros bloques y no aparece en el currículo; en el presente trabajo se considera esto como una posible traba a la comprensión del alumnado, y es algo que en el caso de Singapur no sucede.

En cuanto al **resto de contenidos** vistos en 6º de primaria, **casi se puede decir que no se repasan** y desde luego **no aparecen al principio del libro de 2º ESO** que es donde debería aparecer un repaso. En 6º de primaria se veía, aunque muy brevemente, el significado de la probabilidad, con una definición breve y con las ideas de experiencias de azar "muy probables", "poco probables" e "igual de probables".

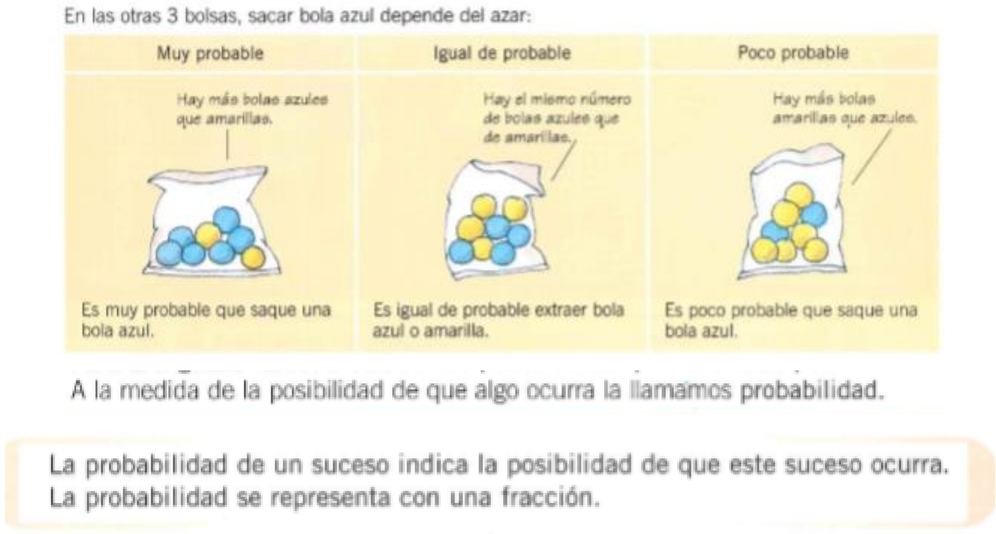
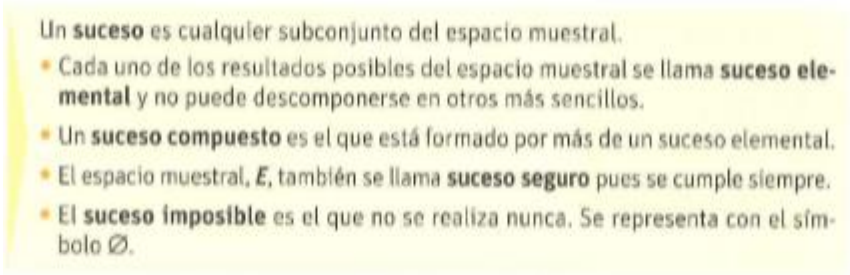


Ilustración 33.- Significado de la probabilidad que se da en el libro de 6º primaria, SM.

Sí se ve de nuevo el *suceso seguro* y el *suceso imposible*, pero no como repaso al principio, sino junto a otros conceptos (como suceso elemental y compuesto).



Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

- Cada uno de los resultados posibles del espacio muestral se llama **suceso elemental** y no puede descomponerse en otros más sencillos.
- Un **suceso compuesto** es el que está formado por más de un suceso elemental.
- El espacio muestral, ***E***, también se llama **suceso seguro** pues se cumple siempre.
- El **suceso imposible** es el que no se realiza nunca. Se representa con el símbolo ∅.

Ilustración 34.- En 2º de ESO se pasa directamente a definir conceptos como el suceso compuesto o suceso elemental. Estos no se habían visto previamente en primaria.

En cuanto al **cálculo de probabilidades** (el último contenido de probabilidad que se ve en 6º de primaria), en 2º ESO **no se repasa tampoco**, se ve primero la probabilidad como límite de la frecuencia relativa (esto no aparece en 6º de primaria) y después la regla de Laplace como una fórmula directamente. En 6º de primaria el cálculo de probabilidades se hace como número de casos favorables entre casos posibles, pero sin darle nombre y sin ponerla como fórmula.

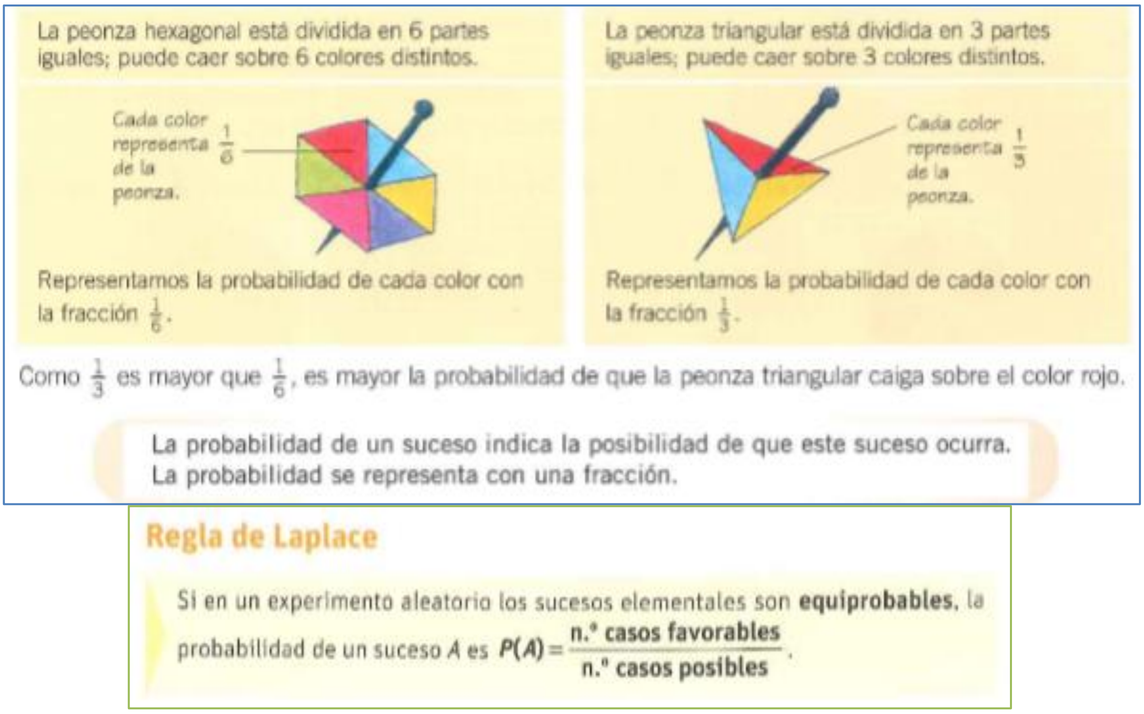
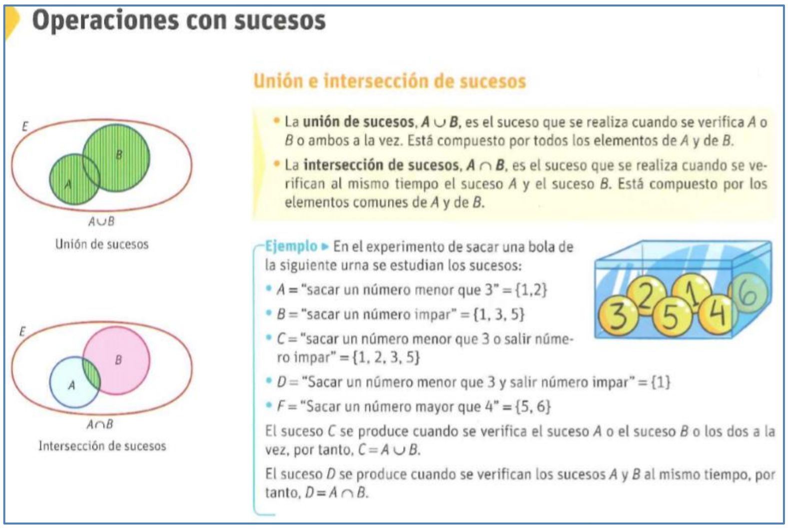


Ilustración 35.- Cálculo de probabilidades en 6º de primaria y en 2º de ESO; España. Son formas muy diferentes de ver la probabilidad para un niño que está empezando a aprenderla.

En conclusión, respecto a **la evolución** que se da de 6º de primaria a 2º ESO, se puede decir que esta **es abrupta**, pues **no se repasan los contenidos que se han visto previamente** de modo que el alumnado los reconozca, los recuerde, y amplíe su conocimiento a partir de ahí. Además, **se introduce vocabulario completamente nuevo para el alumnado** (experimento, espacio muestral, suceso elemental, suceso compuesto, experimento compuesto, compatible e incompatible, complementario, etc.), **y mucho lenguaje matemático** (mucha simbología: $\bar{A}$, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$, A^c, etc., el uso de llaves, llamar a los sucesos con una letra, …). Y **la incorporación de conceptos nuevos es bastante grande**.

8.1.2. 3ºESO:

En el libro de 3º de la ESO SM, al igual que ocurre con el de 2º, **no hay un** apartado o capítulo como tal que sea **repaso** de lo visto anteriormente, de los contenidos de probabilidad vistos el curso anterior. En lugar de esto, el libro de 3º ESO **es casi una copia idéntica** del libro de 2º ESO al que luego se añaden capítulos nuevos que no aparecían en el libro de 2º.



Operaciones con sucesos

Unión e intersección de sucesos

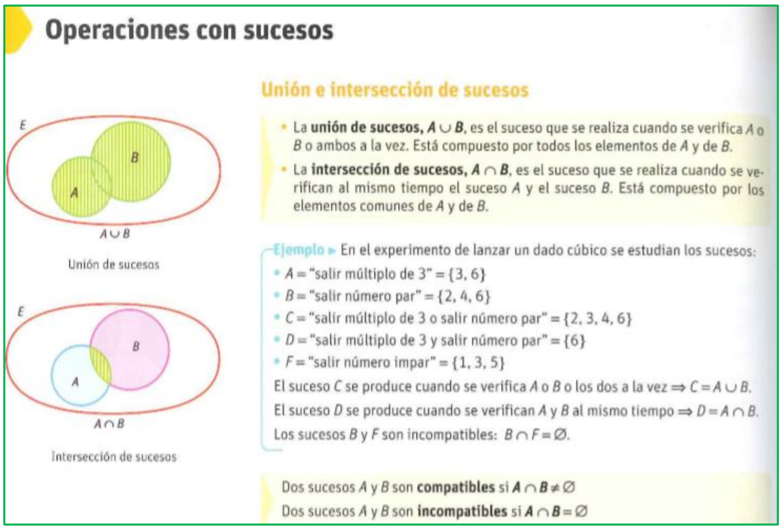
- La **unión de sucesos**, $A \cup B$, es el suceso que se realiza cuando se verifica A o B o ambos a la vez. Está compuesto por todos los elementos de A y de B.
- La **intersección de sucesos**, $A \cap B$, es el suceso que se realiza cuando se verifican al mismo tiempo el suceso A y el suceso B. Está compuesto por los elementos comunes de A y de B.

Ejemplo ▸ En el experimento de sacar una bola de la siguiente urna se estudian los sucesos:

- A = "sacar un número menor que 3" = {1,2}
- B = "sacar un número impar" = {1, 3, 5}
- C = "sacar un número menor que 3 o salir número impar" = {1, 2, 3, 5}
- D = "Sacar un número menor que 3 y salir número impar" = {1}
- F = "Sacar un número mayor que 4" = {5, 6}

El suceso C se produce cuando se verifica el suceso A o el suceso B o los dos a la vez, por tanto, $C = A \cup B$.

El suceso D se produce cuando se verifican los sucesos A y B al mismo tiempo, por tanto, $D = A \cap B$.



Operaciones con sucesos

Unión e intersección de sucesos

- La **unión de sucesos**, $A \cup B$, es el suceso que se realiza cuando se verifica A o B o ambos a la vez. Está compuesto por todos los elementos de A y de B.
- La **intersección de sucesos**, $A \cap B$, es el suceso que se realiza cuando se verifican al mismo tiempo el suceso A y el suceso B. Está compuesto por los elementos comunes de A y de B.

Ejemplo ▸ En el experimento de lanzar un dado cúbico se estudian los sucesos:

- A = "salir múltiplo de 3" = {3, 6}
- B = "salir número par" = {2, 4, 6}
- C = "salir múltiplo de 3 o salir número par" = {2, 3, 4, 6}
- D = "salir múltiplo de 3 y salir número par" = {6}
- F = "salir número impar" = {1, 3, 5}

El suceso C se produce cuando se verifica A o B o los dos a la vez $\Rightarrow C = A \cup B$.

El suceso D se produce cuando se verifican A y B al mismo tiempo $\Rightarrow D = A \cap B$.

Los sucesos B y F son incompatibles: $B \cap F = \varnothing$.

Dos sucesos A y B son **compatibles** si $A \cap B \neq \varnothing$

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$

Ilustración 36.- Capítulo de *Operaciones con sucesos* en 2º y 3º ESO, respectivamente. Un ejemplo de la repetición de contenidos y de la forma de verlos que existe entre los libros de un curso y los del siguiente, en España.

Esto, lejos de ser una exageración es algo muy real, y se puede ver como **los mayores cambios** en estos capítulos del libro de 3º respecto del de 2º **son los siguientes**:

Los ejemplos que se dan en la teoría cambian a veces, usando un dado cúbico en lugar de una urna con bolas, por ejemplo, pero **este cambio no supone ninguna diferencia y no aporta nada**. El capítulo “Experimentos compuestos” en lugar de aparecer en el primer capítulo aparece en el cuarto capítulo. El número de actividades o ejercicios que aparece tras cada capítulo de teoría disminuye en número (siendo 6 o 7 actividades en el libro de 2º y 2 o 3 en el de 3º), pero sin presentar ninguna diferencia, ni en complejidad ni en ningún otro aspecto (de hecho se puede ver cómo algún ejercicio de 3º es igual, casi idéntico, a alguno de 2º; ver Ilustración 37).

15. En el experimento de lanzar un dado cúbico considera-mos los sucesos:

A = "salir un número par"

B = "salir un número menor que 3"

$C = \{1, 2, 5\}$

$D = \{3\}$

Halla:

a) $A \cup B$ c) $B \cup C$ e) $\bar{B}$

b) $A \cap C$ d) $C \cap D$ f) $\overline{C \cup D}$

10. Al lanzar un dado cúbico se consideran los sucesos:

A = "salir un número par" $C = \{1, 2, 5\}$

B = "salir un número menor que 3" $D = \{2\}$

Halla los siguientes sucesos:

a) $A \cup B$ b) $A \cap C$ c) $B \cup C$ d) $\overline{A \cup D}$

Ilustración 37.- Ejercicios de 2º ESO (izq.) y de 3º ESO (drcha.). Se puede observar que son casi idénticos.

Además de esto, los únicos cambios son la introducción del concepto "espacio de sucesos" y la expresión para calcular el número de sucesos que componen este espacio de sucesos. **De modo que se vuelve a ver todo lo visto en 2º ESO y los pequeñísimos cambios introducidos no aportan nada e incluso pueden conseguir lo contrario** utilizando algo menos los dibujos (ver Ilustración 36) y haciendo así el texto de la teoría menos atractivo para el alumnado. O al mostrar la probabilidad experimental (pág. 300), donde el ejemplo muestra peor, en mi opinión, esta definición de la probabilidad, al no mostrar la frecuencia relativa con un número de lanzamientos significativamente distinto.

En conclusión, **los contenidos de 3º ESO son los mismos contenidos que hay en 2º ESO** y son vistos de la misma forma casi idéntica (**las 5 primeras páginas** del tema son dedicadas a esto). Así **los alumnos lo que hacen es volver a ver los mismos conceptos**. Y luego **se amplía a nuevos contenidos en la misma medida** (5 páginas del libro también, destinadas a esto). Teniendo en cuenta el hecho de que la probabilidad y la estadística se sitúan en el último lugar en los libros de texto, y que muchas veces, debido a la **falta de tiempo en el curso**, se pueden y de hecho **se suelen quedar sin ver** del todo, no parece que el hecho de que haya el doble de páginas (debido a que se vuelven a ver todos los contenidos ya vistos en 2º) vaya a ayudar en este sentido. Por tanto, en este trabajo fin de máster, se cree que **sería mucho más adecuado introducir un capítulo de repaso de lo visto en 2º, breve y sin tantas páginas**, siendo más bien un resumen; y que a continuación se amplíen ya los conocimientos con esos nuevos contenidos. Además, **se propone la supresión del último apartado**, "Factorial de un número natural. Permutaciones", pues además de que se volverá a ver el año siguiente en el capítulo de "Combinatoria", este apartado tiene mucho más sentido ahí, junto al resto de técnicas de contar.

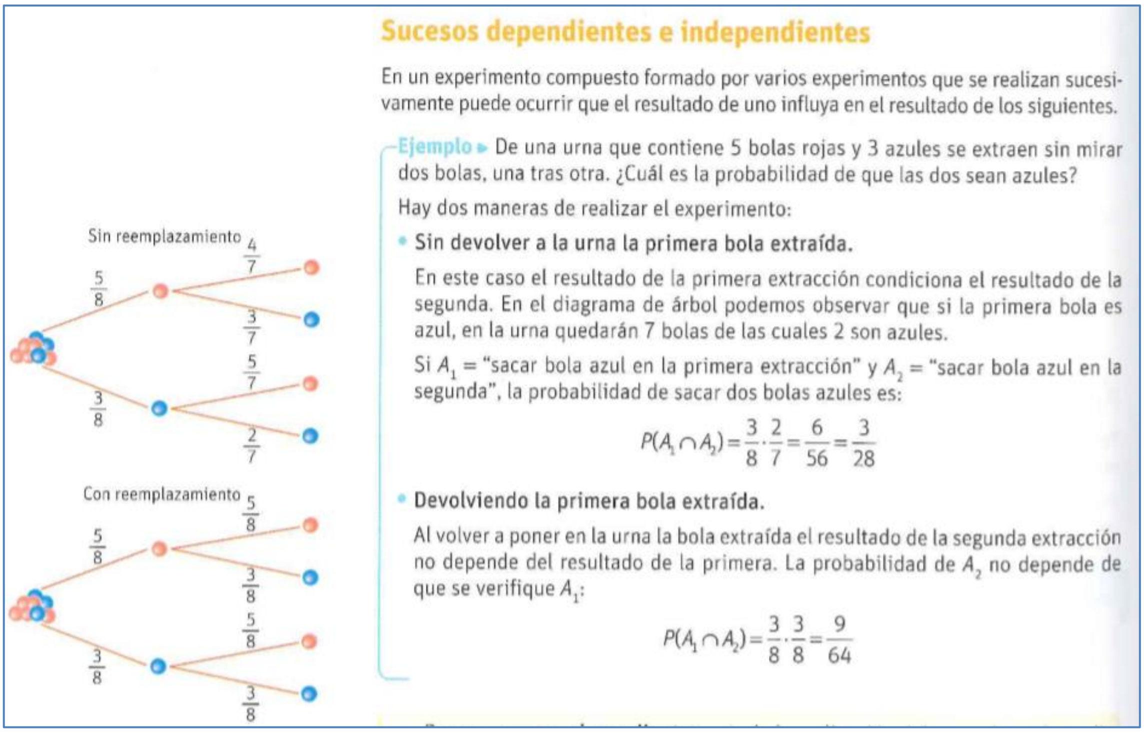
8.1.3. 4ºESO:

Al analizar la evolución de la enseñanza de los contenidos que se da de 3º de ESO a 4º, vemos que **es muy parecida a la evolución que se da de 2º a 3º** y que ya la hemos analizado y comentado. **Igualmente, en 4º se ven de nuevo los contenidos vistos en 3º**:

Los tres primeros apartados de 3º (*Experimentos aleatorios*, *Sucesos*, y *Operaciones con sucesos*) se ven en 4º del mismo modo, pero en dos páginas en lugar de tres y con cuatro ejercicios en lugar de ocho; el apartado 4 (*Experimentos compuestos. Técnicas de recuento*) desaparece; el apartado 5 (*Probabilidad. Regla de Laplace*) se ve del mismo modo, incluso con dos ejercicios más que en el curso pasado; el siguiente apartado (*Probabilidad de experimentos compuestos*) aparece igual también, salvo con alguna diferencia que, a juicio de este trabajo fin de máster, **no es en beneficio sino en detrimento** (ver Ilustración 38).

Se cree así pues en el libro de 4º no se utiliza el diagrama de árbol en el ejemplo del experimento compuesto con y sin reemplazamiento (dependiente e independiente), además de que no se pregunta la probabilidad de la intersección (que salga la primera carta un as y la segunda también), sino la probabilidad de cada una por separado (probabilidad de salir la primera carta un as y probabilidad de salir la segunda carta un as); a lo que se une el hecho de que no se menciona la regla del producto.

Sin embargo, el hecho de que en este mismo ejemplo se señale como probabilidad condicionada a la probabilidad que lo es, y se represente con su símbolo **sí es una mejoría** respecto al libro de 3º.



Sucesos dependientes e independientes

En un experimento compuesto formado por varios experimentos que se realizan sucesivamente puede ocurrir que el resultado de uno influya en el resultado de los siguientes.

Ejemplo ▸ De una urna que contiene 5 bolas rojas y 3 azules se extraen sin mirar dos bolas, una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean azules?

Hay dos maneras de realizar el experimento:

- **Sin devolver a la urna la primera bola extraída.**

  En este caso el resultado de la primera extracción condiciona el resultado de la segunda. En el diagrama de árbol podemos observar que si la primera bola es azul, en la urna quedarán 7 bolas de las cuales 2 son azules.

  Si A_1 = "sacar bola azul en la primera extracción" y A_2 = "sacar bola azul en la segunda", la probabilidad de sacar dos bolas azules es:

  $$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

- **Devolviendo la primera bola extraída.**

  Al volver a poner en la urna la bola extraída el resultado de la segunda extracción no depende del resultado de la primera. La probabilidad de A_2 no depende de que se verifique A_1:

  $$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

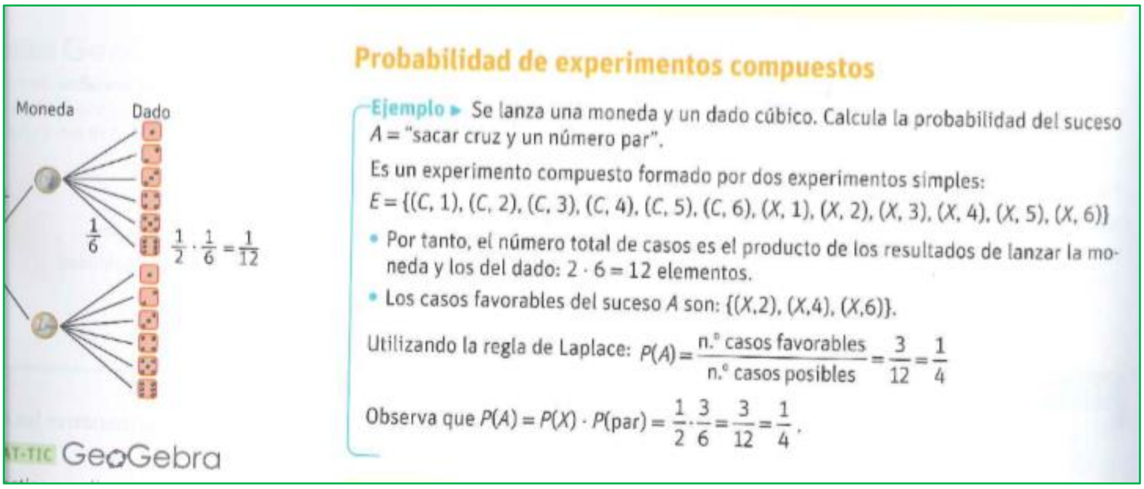


Ilustración 38.- En el libro de 3º (arriba) sí se utiliza un diagrama de árbol para cada tipo de experimento, y se muestra la probabilidad de la intersección; en el libro de 4º (abajo), no.

La conclusión sobre la evolución que se da, es la misma que la que se ha sacado para 3º de ESO y se propone lo mismo**: se vuelve a ver casi toda la teoría de un modo casi idéntico al curso anterior**, **el tema queda muy extenso** y conlleva tiempo de clase para verlo entero, estando **los nuevos contenidos situados al final** y existiendo la posibilidad de que **deje de verse algo por la falta de tiempo al final** del curso escolar; **se propone** de nuevo en este trabajo fin de master **la síntesis de todos los contenidos ya vistos en cursos anteriores**, en un breve apartado titulado *Repaso*, situado **al principio del tema**.

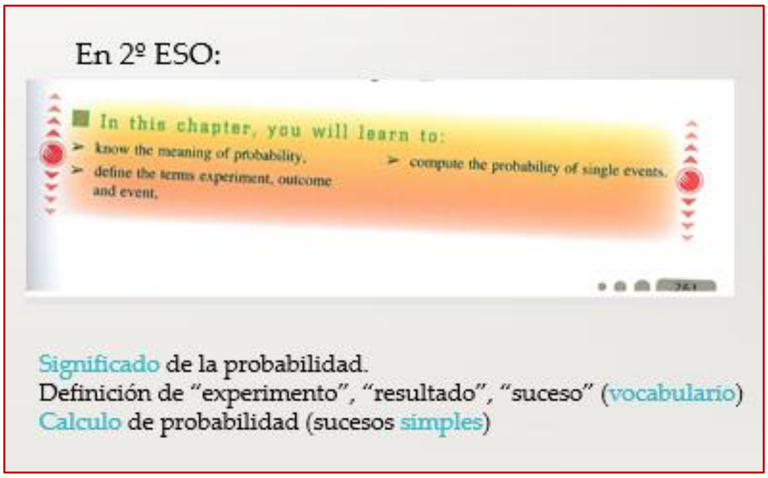
8.2. Evolución Singapur

En el caso de Singapur es diferente a España, no hay una repetición excesiva de lo visto en el anterior curso, y se tiene un capítulo breve de repaso. La probabilidad únicamente aparece en el currículo de secundaria, en primaria no. Al nivel equivalente a la ESO, la probabilidad aparece en el currículo en 2º curso y en 3º y 4º, siendo que estos dos últimos aparecen unidos en el currículo. Sin embargo, en los libros oficiales de Singapur, la probabilidad aparece únicamente en 2º y 4º curso.

8.2.1. 4º Curso secundaria:

Como se acaba de comentar, en Singapur hay una **discontinuidad** a la hora de ver la probabilidad en secundaria, pues se comienza en 2º curso, pero **en 3º no se ve la probabilidad**. El tema en el libro de 4º curso de secundaria en Singapur comienza con un **apartado destinado a repasar** los conceptos de probabilidad vistos en 2º de curso, que, como se ha dicho ya, es el último curso en el que se vio la probabilidad. **Este repaso es breve**, de apenas una página (ver Ilustración 40), y pronto se empiezan a ver nuevos conceptos; sin embargo, el tema está diseñado de modo que **a la vez que se van viendo estos nuevos contenidos, se van repasando los contenidos vistos en 2º curso**. Tras el repaso, se ve la tabla de doble entrada y se introduce la probabilidad de la unión y de la intersección y el concepto de sucesos incompatibles ("mutually exclusive events", en el libro), a la vez que se repasa el cálculo de probabilidades visto en 2º.

Los objetivos del tema, o los conceptos que el alumnado aprenderá a lo largo del tema, vienen especificados en la primera página del tema en todos los cursos. Si se comparan estos objetos, se ve que son complementarios y no se solapan, a diferencia de como ocurre en España (ver Ilustración 39). En el repaso inicial del libro de cuarto curso se repasan rápidamente todos los contenidos que aparecen como objetivos al comienzo del libro de 2º curso.



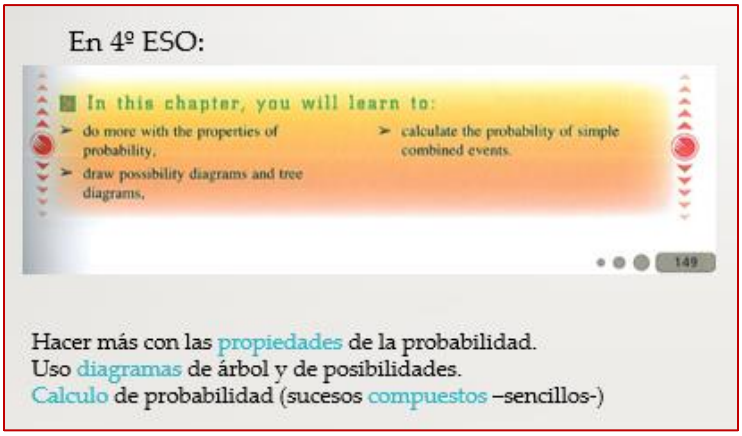


Ilustración 39.- Los objetivos de cada tema aparecen al principio del mismo. En el repaso inicial del libro de cuarto curso se repasan rápidamente todos los contenidos que aparecen como objetivos al comienzo del libro de 2º curso.

.1 A Review of Probability Concepts

Recall that **probability** measures the **likelihood** of an event occurring. In other words, probability is he **chance** that something will happen. For example, if the probability of rain tomorrow is 30%, it is ess likely to rain than not to rain but the chance it will rain is still 3 out of 10. A 30% probability that t will rain can also mean that for the next few days, given similar conditions, it will rain 30% of the ime.

The following are some properties of probability.

- The probability of an outcome is a measure of the fraction of time that the outcome is expected to happen. This can often be calculated by taking the number of ways that the outcome can happen divided by the total number of possible outcomes.
- Every probability is a number between 0 and 1. If the outcome has a probability of 0, it means that the outcome can never happen – it is an impossible outcome.
  If an outcome has a probability of 1, the outcome is sure to happen. Most probabilities are between 0 and 1, rarely equal to 0 or 1.
- The sum of the probabilities of all possible outcomes is 1.
- Probability of an event not happening = 1 – probability of the event happening

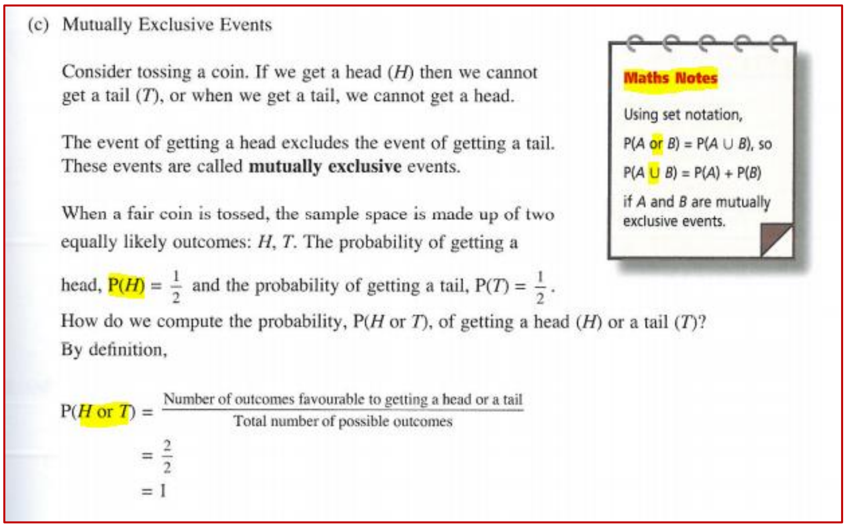
Any problem on probability uses certain terms to define it. These terms were first defined in *Mathematics Matters Book 2*. They are summarised below.

Term	Definition
Experiment	An activity which is under consideration such as tossing a coin or throwing a die.
Outcome	One of the possible results of an experiment. For example, when a coin is tossed, there are two possible outcomes: head (H) or tail (T).
Event	A set of outcomes of an experiment satisfying a given condition.

Ilustración 40.- Parte del capítulo de repaso al principio del tema en Singapur, 4º curso de secundaria.

A esto se suma un avance progresivo en los contenidos, por ejemplo, viendo en segundo curso los experimentos simples únicamente, y cuando el alumnado ya se ha familiarizado y trabajado con estos, se introducen los experimentos compuestos, ya en cuarto curso. No solo el avance de los contenidos es progresivo, a esto, y al hecho de que se hace un repaso al principio se le suma la forma en la que se van viendo los contenidos, por ejemplo, en el uso del vocabulario. Como se puede ver en la ilustración siguiente (ver Ilustración 41), en Singapur no se pasa a utilizar notación matemática de repente, sino que se va explicando e introduciendo progresivamente (aunque es verdad que no se llega a utilizar mucho):

$$\text{Probability of obtaining 6 dots} = \frac{\text{Number of ways to obtain 6 dots}}{\text{Total number of outcomes}} = \frac{1}{6}$$



(c) Mutually Exclusive Events

Consider tossing a coin. If we get a head (H) then we cannot get a tail (T), or when we get a tail, we cannot get a head.

The event of getting a head excludes the event of getting a tail. These events are called **mutually exclusive** events.

When a fair coin is tossed, the sample space is made up of two equally likely outcomes: H, T. The probability of getting a head, $P(H) = \frac{1}{2}$ and the probability of getting a tail, $P(T) = \frac{1}{2}$.

How do we compute the probability, $P(H \text{ or } T)$, of getting a head (H) or a tail (T)?

By definition,

$$P(H \text{ or } T) = \frac{\text{Number of outcomes favourable to getting a head or a tail}}{\text{Total number of possible outcomes}}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

Maths Notes

Using set notation,

$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B)$, so

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

if A and B are mutually exclusive events.

Ilustración 41.- Introducción progresiva de un vocabulario y notación más formal. Arriba libro de 2º curso, pág. 279; abajo libro de 4º curso, pág. 153. Se ve cómo al principio la probabilidad de un evento se escribe por completo con palabras, sin embargo, se va pasando a escribirlo como P(H), siendo H un suceso; o cómo se explica que U es el símbolo utilizado para representar un "o".

En conclusión, se considera que la evolución en Singapur es más adecuada que en España. No hay una repetición casi idéntica de los contenidos y de la forma de verlos en cada curso (ya se ha visto que en España sí sucede esto, ver Ilustración 36; en Singapur en cambio, se puede ver en los objetivos al principio del tema de cada libro, que esto no sucede, ver Ilustración 37 o Ilustración 39), y sin embargo el capítulo de repaso breve que sí aparece en Singapur (ver Ilustración 40) permite al alumnado recordar los conocimientos que ya tenía del tema de la probabilidad, sin hacer este tema excesivamente largo en cada curso. Además, aunque en ambos países existe una discontinuidad (un curso sin ver la probabilidad), el paso de un curso a otro es más progresivo en el caso de Singapur y más abrupto en el de España (al pasar de primaria a secundaria por no repasar lo visto en primaria, y por meter lenguaje matemático formal de repente, cómo el lenguaje conjuntista; y al pasar de los sucesos a la probabilidad sin una explicación o contexto).

9. Comparación entre España y Singapur en la forma de transmitir los contenidos.

Ya se ha visto una comparativa de la línea de aprendizaje de ambos países, la diferencia entre los contenidos que se ven de forma general, y como es el progreso en la enseñanza de la probabilidad a lo largo de los cursos en cada país. En este capítulo se realiza una comparación centrando la atención en la forma en la que se transmiten los contenidos, y profundizando más en las diferencias (algunas de ellas anteriormente mencionadas de forma sucinta), mostrando estas diferencias con ejemplos y mediante ilustraciones. Esta comparación se hace por separado para cada curso, segundo y cuarto de secundaria. Para el primer caso, centrándose en cuatro aspectos distintos: cómo se introduce la probabilidad y cómo se acerca ésta al alumnado; cómo se trabaja la probabilidad experimental y la probabilidad como límite de la frecuencia relativa; la formalización de los conceptos de probabilidad; y los ejercicios para practicar la teoría. En el segundo caso, centrándose en cinco aspectos o contenidos: las definiciones, vocabulario y la probabilidad; la probabilidad de la unión; los diagramas de árbol; la regla del producto; y el teorema de la probabilidad total, aunque este no corresponda a nivel de ESO en el currículo de España.

Para cada aspecto, se analiza primero el caso de Singapur, seguidamente el de España, y tras ello se infiere una conclusión de la comparación entre ambos.

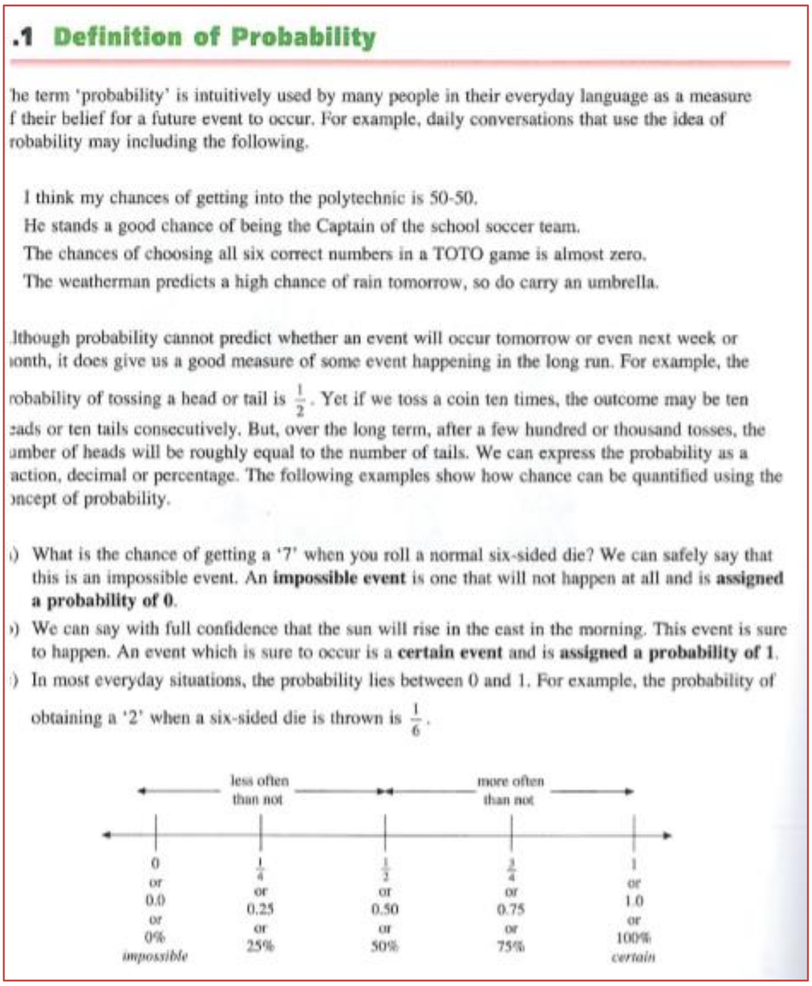
<u>9.1. 2ºESO:</u>

<u>9.1.1. Introducción al concepto de probabilidad. noción y sentido de la misma.</u>

La introducción del concepto probabilidad es muy distinta en ambos países. Hay que remarcar que este punto es importante en secundaria, pues el alumnado no está familiarizado con la probabilidad o casi la ve por primera vez (en España sí que se ha visto en primaria, pero como se ha explicado, a esas edades los niños aún están desarrollando capacidades que pueden ser requeridas para la correcta compresión de la probabilidad; además, en cualquier caso, existe un año de discontinuidad como ya se ha comentado).

El libro de **Singapur empieza, directamente, con la probabilidad** (ver Ilustración 42). En primer lugar, se define la probabilidad, para lo que se utilizan frases que un alumno de 2ºESO puede escuchar en la **vida diaria**. Además, se da una **noción** de lo que es la probabilidad antes de definirla, y cuando se define, se hace utilizando dos definiciones, la de **Laplace** y con la **probabilidad experimental**, en un mismo ejemplo (y a su vez se ve con el mismo ejemplo la ley de los grandes números); aunque no se habla de definición ni se señala esto, no se habla de Laplace ni de “probabilidad experimental”, pero sí se está definiendo implícitamente la probabilidad. El hecho de que se defina con naturalidad y con las dos definiciones simultáneamente puede ser beneficioso para el alumnado.

Finalmente se muestra cómo la probabilidad solo puede estar entre 0 y 1, a la vez que se muestra con la otra forma de expresarlo, que es **el porcentaje**; esto puede ayudar puesto que generalmente puede ser más sencillo tener una **noción** mayor del porcentaje, del 0 al 100, debido a que es algo que se utiliza también **coloquialmente en el día a día** (por ejemplo es fácil escuchar a alguien decir “estoy cien por cien seguro de que va a ocurrir lo que te digo”).



.1 Definition of Probability

he term 'probability' is intuitively used by many people in their everyday language as a measure f their belief for a future event to occur. For example, daily conversations that use the idea of robability may including the following.

I think my chances of getting into the polytechnic is 50-50.
He stands a good chance of being the Captain of the school soccer team.
The chances of choosing all six correct numbers in a TOTO game is almost zero.
The weatherman predicts a high chance of rain tomorrow, so do carry an umbrella.

lthough probability cannot predict whether an event will occur tomorrow or even next week or ıonth, it does give us a good measure of some event happening in the long run. For example, the robability of tossing a head or tail is $\frac{1}{2}$. Yet if we toss a coin ten times, the outcome may be ten ɜads or ten tails consecutively. But, over the long term, after a few hundred or thousand tosses, the ımber of heads will be roughly equal to the number of tails. We can express the probability as a action, decimal or percentage. The following examples show how chance can be quantified using the ɔncept of probability.

ı) What is the chance of getting a '7' when you roll a normal six-sided die? We can safely say that this is an impossible event. An **impossible event** is one that will not happen at all and is **assigned a probability of 0**.

ı) We can say with full confidence that the sun will rise in the east in the morning. This event is sure to happen. An event which is sure to occur is a **certain event** and is **assigned a probability of 1**.

) In most everyday situations, the probability lies between 0 and 1. For example, the probability of obtaining a '2' when a six-sided die is thrown is $\frac{1}{6}$.

Ilustración 42.- Singapur, libro de 2º, pág.262. Introducción a la probabilidad.

El **concepto de probabilidad** continúa introduciéndose en Singapur **a través de los ejemplos resueltos** (ejemplos como los de ilustraciones siguientes, "*Example 1*" y "*Example 3*", por ejemplo), pero **no como fórmula**, sino que **sale a consecuencia de calcular la probabilidad** en esos ejemplos.

Es **en** uno de estos **ejemplos** (ver Ilustración 49, "*Example 1*") donde se muestran **de forma natural** la propiedad de la probabilidad: la suma de la probabilidad de un suceso y la probabilidad del suceso contrario es igual a uno. Se puede encontrar, además, antes de uno de los ejemplos (ver Ilustración 43), una breve frase que ánima a tener un conocimiento de la probabilidad, y a su vez a ser conscientes de que en los juegos de los casinos quien gana siempre es la casa; esto es importante pues corresponde a la **educación** que los niños sean conscientes de cosas como esta (transversalidad de conocimientos).

With the advent of the Integrated Resorts (IR) in Singapore – which come with two first class casinos – gambling and risk taking are gaining currency among the population as more gaming and gambling activities are legalised. The lure to make it big financially through gambling will not benefit gamblers who have little or no knowledge of probability. Gambling in all its forms always favours the house (casino).

EXAMPLE 3

In the casino game of Roulette, there are 37 pockets arranged around a wheel. 36 pockets are coloured red and black alternately and the numbers in the red and black pockets are arranged randomly. There is also a green pocket with the number '0'. The wheel is spun in one direction while a ball is spun in the opposite direction. The pocket that the ball finally falls into is noted.

(a) Find the probability of the ball falling into a red pocket.

(b) In 100 games, how many times would the ball fall into a red pocket?

Ilustración 43.- Libro de 2º curso de secundaria Singapur; pág. 265.

El libro de España, por el contrario, no comienza con la probabilidad. El libro empieza diferenciando experimentos aleatorios de deterministas, y enseñando técnicas de recuento con experimentos compuestos, a lo cual siguen los sucesos y operaciones con estos; todo ello **sin hablar de la probabilidad** y sin ni si quiera mencionarla, **sin decir que se están viendo esos conceptos** (los sucesos, por ejemplo) **para luego calcular probabilidades con ello**. Se llegan a ver las operaciones con sucesos y a utilizarse diagramas de Venn antes de mencionar por primera vez la palabra *probabilidad*. Todo esto se ve en la siguiente ilustración (ver Ilustración 44), compuesta por imágenes que muestran los tres primeros capítulos del libro, en el tema de la probabilidad:

1 Azar y determinismo

Sabías que...

Julio Cesar, al cruzar el río Rubicón para marchar sobre Roma, dijo: "*Alea jacta est*": La suerte (el dado) está echada.

La palabra *aleatorio* tiene su raíz en el término latino *aleam* que significa dado o suerte.

La palabra *azar* tiene origen árabe. Los árabes marcaban una de las caras del dado con una flor de azahar.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y descubre el azar a través del parchís.

Si un vehículo circula a una velocidad de 80 km/h de manera constante, podemos conocer con antelación el tiempo que tardará en recorrer una cierta distancia utilizando las leyes de la física.

En cambio, cuando lanzamos una moneda al aire, no podemos conocer el resultado de antemano.

Un experimento es **determinista** cuando podemos predecir su resultado.

Un experimento es **aleatorio** cuando:

- Se puede realizar tantas veces como queramos.
- No se puede predecir el resultado concreto antes de realizarlo.

El **espacio muestral**, ***E***, es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Ejemplo ▸ Al extraer una bola del bombo de la figura se puede obtener un número del 0 al 9.

El espacio muestral es:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Experimentos compuestos. Técnicas de recuento

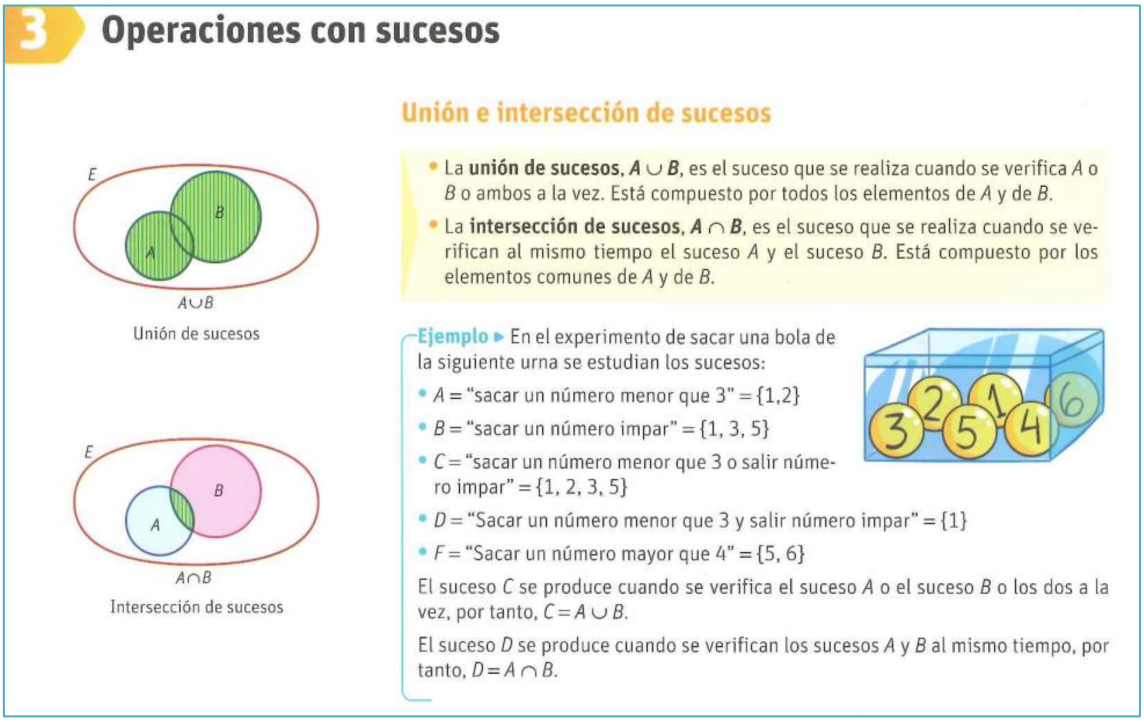
En ocasiones, un experimento aleatorio está formado por varios experimentos simples, como por ejemplo, lanzar una moneda y un dado a la vez o extraer más de una carta de una baraja.

Un **experimento compuesto** es el que está formado por la combinación de varios experimentos simples.

2 Sucesos

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

- Cada uno de los resultados posibles del espacio muestral se llama **suceso elemental** y no puede descomponerse en otros más sencillos.
- Un **suceso compuesto** es el que está formado por más de un suceso elemental.
- El espacio muestral, ***E***, también se llama **suceso seguro** pues se cumple siempre.
- El **suceso imposible** es el que no se realiza nunca. Se representa con el símbolo ∅.



3 Operaciones con sucesos

Unión e intersección de sucesos

- La **unión de sucesos, $A \cup B$**, es el suceso que se realiza cuando se verifica A o B o ambos a la vez. Está compuesto por todos los elementos de A y de B.
- La **intersección de sucesos, $A \cap B$**, es el suceso que se realiza cuando se verifican al mismo tiempo el suceso A y el suceso B. Está compuesto por los elementos comunes de A y de B.

Ejemplo ▸ En el experimento de sacar una bola de la siguiente urna se estudian los sucesos:

- A = "sacar un número menor que 3" = {1,2}
- B = "sacar un número impar" = {1, 3, 5}
- C = "sacar un número menor que 3 o salir número impar" = {1, 2, 3, 5}
- D = "Sacar un número menor que 3 y salir número impar" = {1}
- F = "Sacar un número mayor que 4" = {5, 6}

El suceso C se produce cuando se verifica el suceso A o el suceso B o los dos a la vez, por tanto, $C = A \cup B$.

El suceso D se produce cuando se verifican los sucesos A y B al mismo tiempo, por tanto, $D = A \cap B$.

Ilustración 44.- Comienzo del libro de 2º de ESO del tema de probabilidad; los tres primeros capítulos. Se ve cómo no se menciona la palabra probabilidad ni se explica al alumnado qué se está viendo, porqué, y que relación tiene con el tema, la Probabilidad.

Si bien no se da esta explicación en los primeros capítulos, tampoco se da en el siguiente, el capítulo 4 (ver Ilustración 45), en el que ya se habla de *probabilidad*, directamente, sin una explicación previa y sin relacionar el capítulo con los anteriores (con los conceptos que el alumnado acaba de ver; esto es, sucesos, operaciones con sucesos, etc.). Sin ningún contexto y sin situar al alumnado, la teoría del libro empieza a hablar de la probabilidad experimental con un ejemplo de lanzamiento de monedas; y de la regla de Laplace, con ejemplo cualquiera. Así, **el paso de la teoría de los sucesos a la probabilidad se hace de forma abrupta**, **como si la probabilidad fuera otro apartado ajeno al anterior**.

Además, **no se presenta** la probabilidad **de forma natural** y dando **una noción** de la misma antes de nada, por el contrario, se presenta al alumnado una fórmula (en el caso de Laplace), y una tabla con frecuencias relativas (en el caso de la probabilidad experimental) directamente y sin un pequeño contexto previo; junto a algunas **propiedades** de la probabilidad **sin explicar por qué estas son así** (por qué la probabilidad se encuentra entre el 0 y el 1).

Regla de Laplace

Si en un experimento aleatorio los sucesos elementales son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A es $P(A) = \frac{\textbf{n.° casos favorables}}{\textbf{n.° casos posibles}}$.

Ejemplo ▸ David ha escondido una moneda debajo de uno de los vasos sin que Ana vea donde se oculta. ¿Qué probabilidad tiene de acertar Ana si puede elegir dos vasos?

Hay 5 vasos para elegir, por tanto el número de casos posibles es 5.

Ana puede elegir 2 vasos, por tanto el número de casos favorables de Ana es 2.

La probabilidad de que gane Ana es: $P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Ten en cuenta

La **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que se verifica el suceso.

La **frecuencia relativa** de un suceso es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de veces que se repite el experimento y es un número entre 0 y 1.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y simula el lanzamiento de un dado.

Observa los resultados obtenidos al lanzar una moneda 50 y 500 veces:

50 lanzamientos

Suceso		
Fr. absoluta	28	22
Fr. relativa	$\frac{28}{50} = 0{,}56$	$\frac{22}{50} = 0{,}44$

500 lanzamientos

Suceso		
Fr. absoluta	253	247
Fr. relativa	$\frac{253}{500} = 0{,}506$	$\frac{247}{500} = 0{,}494$

No es lo mismo que exista una diferencia de 6 unidades entre las frecuencias absolutas de los dos sucesos al realizar el experimento 50 veces que al hacerlo 500 veces, pues al aumentar los lanzamientos la frecuencia relativa correspondiente a salir cara o cruz se aproxima 0,5.

La **probabilidad de un suceso A, $P(A)$**, es el número al que se aproxima la frecuencia relativa de A, al repetir el experimento indefinidamente.

- Es un número comprendido entre 0 y 1.
- La probabilidad del suceso imposible es 0.
- La probabilidad del suceso seguro es 1.

Ilustración 45.- Página 274, libro 2º ESO, capítulo 4. Definición de Laplace y probabilidad experimental. Introducción de la probabilidad (paso de sucesos a la probabilidad de sucesos). Abajo del todo, propiedades de la probabilidad sin explicar de dónde salen o porqué son así.

Como a lo largo de todos los cursos, en el libro de España de 2º ESO, el concepto que se trata de transmitir al alumnado aparece **compartimentado**, separado **y con el nombre** del concepto como título. Así, aparecen **las dos definiciones** de la probabilidad, pero **de forma separada**, no se explican o mencionan en un mismo ejemplo, **ni se habla de la relación existente entre las mismas**. Esto puede verse también en la ilustración anterior (ver Ilustración 45).

Además, como ya se ha mencionado en el apartado de la evolución, esto ocurre a la vez que se **introduce vocabulario nuevo y ajeno** al alumnado, como *espacio muestral*, *suceso compuesto*, *suceso elemental*, etc., y lenguaje matemático **desde el principio** (ver Ilustración 46). Esto puede provocar que **el alumno no vea el sentido a lo que está calculando**, y que el uso de vocabulario nuevo desde el principio, sin contextualizar, lo desubique. De hecho, se presentan al alumnado conceptos que luego no se utilizan en este curso para calcular la probabilidad (y esto es lo que da un sentido a aprender esos conceptos) cómo los sucesos compatibles e incompatibles o la unión y la intersección de sucesos.

Un experimento es **determinista** cuando podemos predecir su resultado.

Un experimento es **aleatorio** cuando:

- Se puede realizar tantas veces como queramos.
- No se puede predecir el resultado concreto antes de realizarlo.

El **espacio muestral**, ***E***, es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Un **experimento compuesto** es el que está formado por la combinación de varios experimentos simples.

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

- Cada uno de los resultados posibles del espacio muestral se llama **suceso elemental** y no puede descomponerse en otros más sencillos.
- Un **suceso compuesto** es el que está formado por más de un suceso elemental.
- El espacio muestral, ***E***, también se llama **suceso seguro** pues se cumple siempre.
- El **suceso imposible** es el que no se realiza nunca. Se representa con el símbolo $\varnothing$.

- La **unión de sucesos**, $A \cup B$, es el suceso que se realiza cuando se verifica A o B o ambos a la vez. Está compuesto por todos los elementos de A y de B.
- La **intersección de sucesos**, $A \cap B$, es el suceso que se realiza cuando se verifican al mismo tiempo el suceso A y el suceso B. Está compuesto por los elementos comunes de A y de B.

Dos sucesos A y B son **compatibles** si $A \cap B \neq \varnothing$

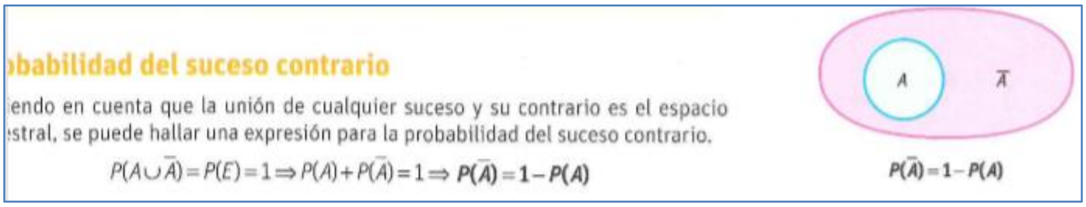
Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$

El **suceso contrario** o **complementario** de un suceso A, $\overline{A}$ o A^c, está compuesto por los elementos del espacio muestral que no están en A.

Si en un experimento aleatorio todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad se dice que son **sucesos equiprobables**.

Ilustración 46.- Vocabulario y notación que va apareciendo a lo largo de las páginas del libro de texto de 2º ESO.

En España en 2ºESO no aparece la **propiedad de la probabilidad** que dice que la suma de la probabilidad de un suceso y la probabilidad del suceso contrario es igual a uno. Sí aparece que la intersección de un suceso y su contrario no tiene ningún elemento en común, de lo cual se puede extraer la propiedad mencionada, y así se hace en 3ºESO (ver Ilustración 47), sin embargo, se hace **sin ejemplo alguno**, lo cual **puede dificultar la comprensión del alumno**.



›babilidad del suceso contrario

¦endo en cuenta que la unión de cualquier suceso y su contrario es el espacio ›stral, se puede hallar una expresión para la probabilidad del suceso contrario.

$$P(A \cup \overline{A}) = P(E) = 1 \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow \mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

Ilustración 47.- Probabilidad del suceso contrario, pág. 272, 3º ESO.

De modo que se concluye que, si se compara la forma de introducir al tema de la probabilidad al alumnado, queda claro que **Singapur** l**o hace de un modo más natural, intuitivo y aplicable** que **España**, que por el contrario lo hace **de forma abrupta, mecánica, y pasando primero por conceptos** de los cuales no se explica su razón de verlos en el tema de la probabilidad, ni su utilidad para calcular probabilidades (ver Ilustración 48). Es cierto que, en España, podemos ver como el libro de 6º de primaria da una mejor noción de lo que es la probabilidad, pero, como ya se ha dicho, en el libro de 2ºESO no se hace ningún repaso de la misma. Así pues, **se concluye que un alumno encontrará más facilidades para comprender la probabilidad en Singapur**, aunque **en España encontrará la ventaja de poder diferenciar cada concepto distinto, y volver al mismo para recordarlo**, gracias a que todos ellos tienen nombre y aparecen bien diferenciados en el libro (ver Ilustración 49). En las siguientes ilustraciones se puede ver una comparación entre ambos países en los aspectos ya citados.

Regla de Laplace

Si en un experimento aleatorio los sucesos elementales son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A es $P(A) = \dfrac{\text{n.° casos favorables}}{\text{n.° casos posibles}}$.

Ejemplo ▸ David ha escondido una moneda debajo de uno de los vasos sin que Ana vea donde se oculta. ¿Qué probabilidad tiene de acertar Ana si puede elegir dos vasos?

Hay 5 vasos para elegir, por tanto el número de casos posibles es 5.

Ana puede elegir 2 vasos, por tanto el número de casos favorables de Ana es 2.

La probabilidad de que gane Ana es: $P(A) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

.1 Definition of Probability

'he term 'probability' is intuitively used by many people in their everyday language as a measure f their belief for a future event to occur. For example, daily conversations that use the idea of robability may including the following.

I think my chances of getting into the polytechnic is 50-50.
He stands a good chance of being the Captain of the school soccer team.
The chances of choosing all six correct numbers in a TOTO game is almost zero.
The weatherman predicts a high chance of rain tomorrow, so do carry an umbrella.

.lthough probability cannot predict whether an event will occur tomorrow or even next week or ıonth, it does give us a good measure of some event happening in the long run. For example, the robability of tossing a head or tail is $\frac{1}{2}$. Yet if we toss a coin ten times, the outcome may be ten :ads or ten tails consecutively. But, over the long term, after a few hundred or thousand tosses, the ımber of heads will be roughly equal to the number of tails. We can express the probability as a action, decimal or percentage. The following examples show how chance can be quantified using the ɔncept of probability.

ı) What is the chance of getting a '7' when you roll a normal six-sided die? We can safely say that this is an impossible event. An **impossible event** is one that will not happen at all and is **assigned a probability of 0**.

ı) We can say with full confidence that the sun will rise in the east in the morning. This event is sure to happen. An event which is sure to occur is a **certain event** and is **assigned a probability of 1**.

) In most everyday situations, the probability lies between 0 and 1. For example, the probability of obtaining a '2' when a six-sided die is thrown is $\frac{1}{6}$.

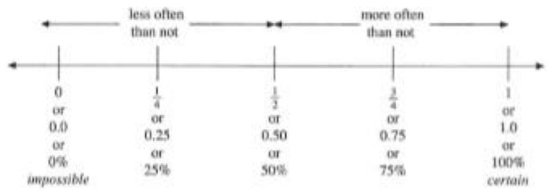
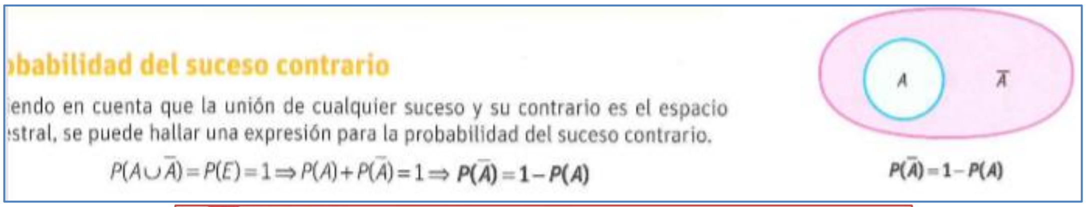


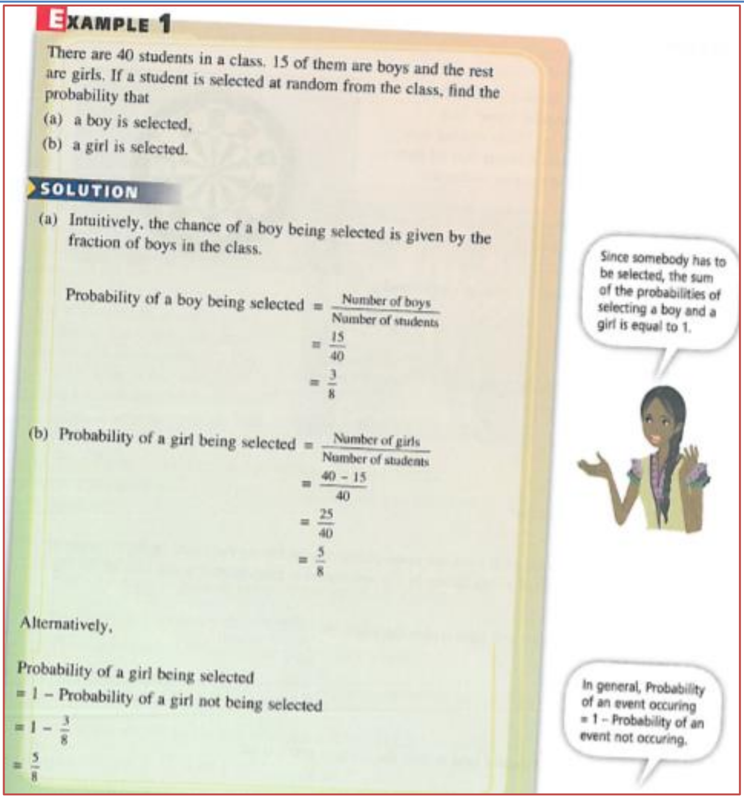
Ilustración 48.- Comparación de cómo se introduce la probabilidad, arriba en España (pág. 274) y a abajo en Singapur (pág.262). Puede verse cómo en España se presenta directamente la fórmula de Laplace, antes de que los alumnos lleguen a preguntarse cómo se calcula la probabilidad.



ɔbabilidad del suceso contrario

iendo en cuenta que la unión de cualquier suceso y su contrario es el espacio ɪstral, se puede hallar una expresión para la probabilidad del suceso contrario.

$$P(A \cup \overline{A}) = P(E) = 1 \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow \mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$



EXAMPLE 1

There are 40 students in a class. 15 of them are boys and the rest are girls. If a student is selected at random from the class, find the probability that

(a) a boy is selected,

(b) a girl is selected.

SOLUTION

(a) Intuitively, the chance of a boy being selected is given by the fraction of boys in the class.

Probability of a boy being selected $= \dfrac{\text{Number of boys}}{\text{Number of students}} = \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$

(b) Probability of a girl being selected $= \dfrac{\text{Number of girls}}{\text{Number of students}} = \dfrac{40-15}{40} = \dfrac{25}{40} = \dfrac{5}{8}$

Alternatively,

Probability of a girl being selected

$= 1 -$ Probability of a girl not being selected

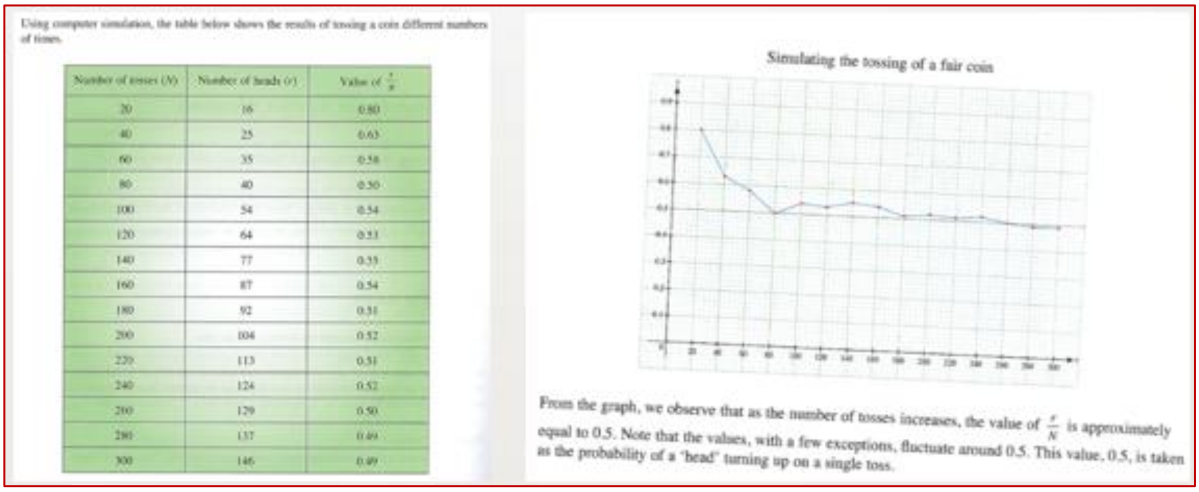
$= 1 - \dfrac{3}{8}$

$= \dfrac{5}{8}$

Ilustración 49.- Comparación de como se muestra una propiedad de la probabilidad, arriba en España (pág.301 3ºESO) y abajo en Singapur (pág. 263). En singapur se hace de un modo natural y con un ejemplo, en España en cambio sin contexto y con lenguaje matemático, aunque dando un nombre a la propiedad.

9.1.2. Probabilidad experimental

Tras presentar la probabilidad y poner ejemplos para empezar a familiarizarse con el cálculo de probabilidades, el libro en **Singapur** pasa a trabajar con la probabilidad experimental y la ley de los grandes números. Esto se hace de una forma adecuada, en tanto que por una parte se muestran **tablas de datos** con distintos números de veces (repeticiones) que se realiza un experimento, y la frecuencia absoluta y la relativa para cada caso, y además se muestra la **gráfica** que resulta con estos datos y que muestra muy visualmente la ley de los grandes números (ver Ilustración 50). Y por otra parte se pide a **los propios alumnos que sean ellos quienes experimenten** físicamente (ver Ilustración 51), realizando experimentos repetidamente, tomando datos en una tabla (algo que ya han trabajado previamente desde pequeños en estadística), y **hagan su propia gráfica**. Y de este modo el **alumno comprueba y ve por sí mismo** cómo se cumple lo que le dice la teoría.


Using computer simulation, the table below shows the results of tossing a coin different numbers of times.

Number of tosses (N)	Number of heads (r)	Value of $\frac{r}{N}$
20	16	0.80
40	25	0.63
60	35	0.58
80	40	0.50
100	54	0.54
120	64	0.53
140	77	0.55
160	87	0.54
180	92	0.51
200	104	0.52
220	113	0.51
240	124	0.52
260	129	0.50
280	137	0.49
300	146	0.49

From the graph, we observe that as the number of tosses increases, the value of $\frac{r}{N}$ is approximately equal to 0.5. Note that the values, with a few exceptions, fluctuate around 0.5. This value, 0.5, is taken as the probability of a "head" turning up on a single toss.

Ilustración 50.- En Singapur se utilizan tablas y gráficos para mostrar cómo es la definición frecuentista de la probabilidad, además el alumnado lo experimenta por sí mismo y realiza su propia gráfica.

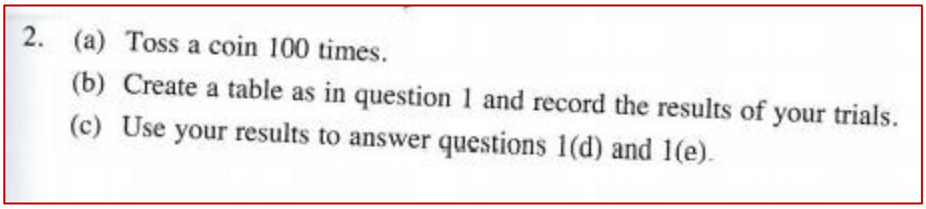

2. (a) Toss a coin 100 times.
(b) Create a table as in question 1 and record the results of your trials.
(c) Use your results to answer questions 1(d) and 1(e).

Ilustración 51.- Ejercicio en el que se pide al alumnado realizar un experimento repetidamente y anotar los datos en una tabla. Libro de 2º curso, pág. 269; probabilidad experimental.

Sin embargo, se encuentra que el libro no aprovecha aquí para mostrar la relación entre la definición frecuentista y la probabilidad como límite de la frecuencia relativa; **se sugiere** pues, **en el presente trabajo**, **la introducción de un apartado** (ver Ilustración 52) que pida en primer lugar el resultado esperado (el alumno lo calculará cómo casos favorables entre posibles) y otro al final que pida al alumno comparar el resultado finalmente obtenido experimentando (probabilidad calculada con frecuencia relativa y viendo su evolución) con el resultado esperado, para diferente número de repeticiones. De este modo el alumnado podrá tener una visión más completa del concepto de probabilidad.

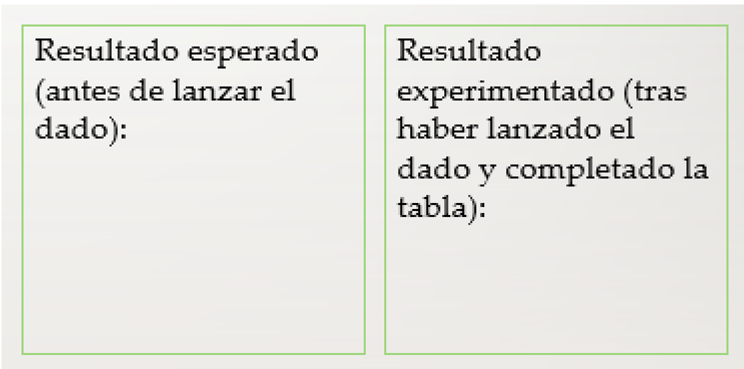


Ilustración 52.- En el libro de Singapur se podrían añadir estas preguntas para que el alumnado relacione las dos definiciones de la probabilidad.

En España por su parte, al igual que sucedía con la definición de Laplace, se muestra la probabilidad como probabilidad experimental, cómo el límite de la frecuencia relativa, **sin una introducción o un contexto previo**, colocando una tabla directamente (ver Ilustración 53).

Ten en cuenta

La **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que se verifica el suceso.

La **frecuencia relativa** de un suceso es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de veces que se repite el experimento y es un número entre 0 y 1.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y simula el lanzamiento de un dado.

Observa los resultados obtenidos al lanzar una moneda 50 y 500 veces:

50 lanzamientos

Suceso		
Fr. absoluta	28	22
Fr. relativa	$\frac{28}{50}=0{,}56$	$\frac{22}{50}=0{,}44$

500 lanzamientos

Suceso		
Fr. absoluta	253	247
Fr. relativa	$\frac{253}{500}=0{,}506$	$\frac{247}{500}=0{,}494$

No es lo mismo que exista una diferencia de 6 unidades entre las frecuencias absolutas de los dos sucesos al realizar el experimento 50 veces que al hacerlo 500 veces, pues al aumentar los lanzamientos la frecuencia relativa correspondiente a salir cara o cruz se aproxima 0,5.

La **probabilidad de un suceso *A*, *P*(*A*)**, es el número al que se aproxima la frecuencia relativa de *A*, al repetir el experimento indefinidamente.

- Es un número comprendido entre 0 y 1.
- La probabilidad del suceso imposible es 0.
- La probabilidad del suceso seguro es 1.

Probabilidad experimental. Simulación

La **probabilidad experimental** de un suceso es el número al que se aproximan las frecuencias relativas de ese suceso cuando el experimento se ha repetido muchas veces o cuando el número de datos es suficientemente grande.

Ejemplo ▸ Estos son los resultados obtenidos al tirar varias chinchetas:

Chinchetas	50	100	500	1000
Punta arriba	32	71	355	695

¿Qué probabilidad asignarías al suceso "caer con la punta hacia arriba"?

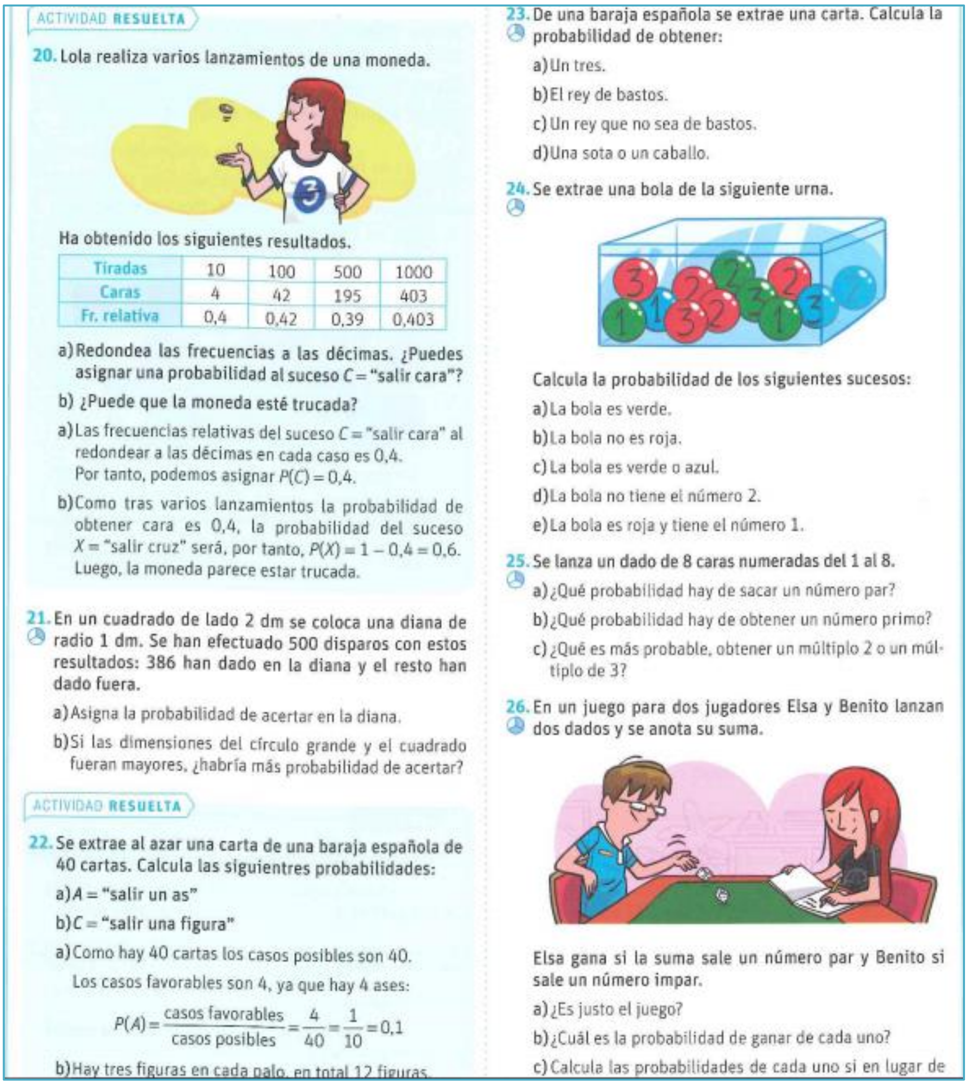
Calculamos las frecuencias relativas en cada caso:

$$\frac{32}{50}=0{,}64\,;\quad \frac{353}{500}=0{,}706\,;\quad \frac{71}{100}=0{,}71\,;\quad \frac{695}{1000}=0{,}695$$

Al aumentar el número de lanzamientos de chinchetas las frecuencias se van acercando a 0,7. Por tanto: $P(\text{punta arriba}) = 0{,}7$.

Ilustración 53.- En España se trabaja poco la definición frecuentista de la probabilidad. Arriba el libro de 2ºESO (pág. 274), abajo el de 3º ESO (pág. 304); no hay mucha diferencia entre los mismos en este apartado.

La tabla sirve para mostrar la ley de los grandes números, aunque **sería deseable que esta fuera más amplia** (con más datos, con diferentes números de repeticiones), de modo que se pudiera ver mejor ese acercamiento de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica calculada con Laplace; igualmente **ayudaría una gráfica** como la de Singapur. Los ejercicios para trabajar esa parte de la teoría correspondiente a la probabilidad experimental son menos en proporción con los ejercicios para trabajar la regla de Laplace (ver Ilustración 54).


ACTIVIDAD RESUELTA

20. Lola realiza varios lanzamientos de una moneda.

Ha obtenido los siguientes resultados.

Tiradas	10	100	500	1000
Caras	4	42	195	403
Fr. relativa	0,4	0,42	0,39	0,403

a) Redondea las frecuencias a las décimas. ¿Puedes asignar una probabilidad al suceso C = "salir cara"?

b) ¿Puede que la moneda esté trucada?

a) Las frecuencias relativas del suceso C = "salir cara" al redondear a las décimas en cada caso es 0,4. Por tanto, podemos asignar $P(C) = 0{,}4$.

b) Como tras varios lanzamientos la probabilidad de obtener cara es 0,4, la probabilidad del suceso X = "salir cruz" será, por tanto, $P(X) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Luego, la moneda parece estar trucada.

21. En un cuadrado de lado 2 dm se coloca una diana de radio 1 dm. Se han efectuado 500 disparos con estos resultados: 386 han dado en la diana y el resto han dado fuera.

a) Asigna la probabilidad de acertar en la diana.

b) Si las dimensiones del círculo grande y el cuadrado fueran mayores, ¿habría más probabilidad de acertar?

ACTIVIDAD RESUELTA

22. Se extrae al azar una carta de una baraja española de 40 cartas. Calcula las siguientres probabilidades:

a) A = "salir un as"

b) C = "salir una figura"

a) Como hay 40 cartas los casos posibles son 40. Los casos favorables son 4, ya que hay 4 ases:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

b) Hay tres figuras en cada palo, en total 12 figuras.

23. De una baraja española se extrae una carta. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Un tres.

b) El rey de bastos.

c) Un rey que no sea de bastos.

d) Una sota o un caballo.

24. Se extrae una bola de la siguiente urna.

Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) La bola es verde.

b) La bola no es roja.

c) La bola es verde o azul.

d) La bola no tiene el número 2.

e) La bola es roja y tiene el número 1.

25. Se lanza un dado de 8 caras numeradas del 1 al 8.

a) ¿Qué probabilidad hay de sacar un número par?

b) ¿Qué probabilidad hay de obtener un número primo?

c) ¿Qué es más probable, obtener un múltiplo 2 o un múltiplo de 3?

26. En un juego para dos jugadores Elsa y Benito lanzan dos dados y se anota su suma.

Elsa gana si la suma sale un número par y Benito si sale un número impar.

a) ¿Es justo el juego?

b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?

c) Calcula las probabilidades de cada uno si en lugar de

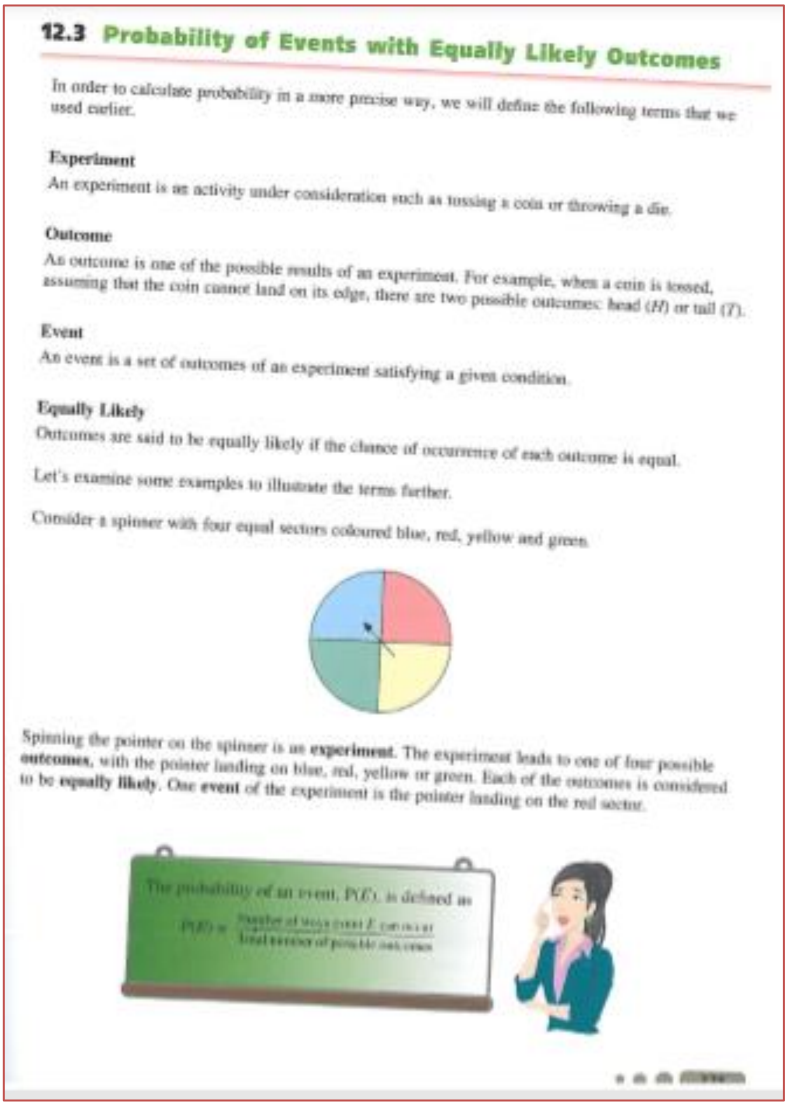
Ilustración 54.- Libro de 2º ESO, pág. 275. Hay 2 ejercicios (20 y 21) que versan sobre la probabilidad experimental, frente a 5 ejercicios (el resto) sobre la regla de Laplace.

Se concluye así que en **Singapur** se **trabaja más y mejor el concepto de la probabilidad experimental**, y que el alumnado puede ver algo mejor la probabilidad como límite de la frecuencia relativa, así como la ley de los grandes números.

9.1.3. Formalización de los conceptos

Cómo se ha mencionado anteriormente de forma sucinta, una de las mayores diferencias entre el método de enseñanza de la probabilidad en Singapur y en España, es la **formalización** de los conceptos. Esto es, **cómo la teoría se formaliza y se presenta ya de un modo más riguroso y matemático**, poniendo nombre a los conceptos, definiéndolos, etc.

En **Singapur** se ha trabajado con la probabilidad y se han resuelto ejercicios de probabilidad (con la frecuencia relativa, probabilidad experimental…), es **después de ello** cuando se definen los términos que se han estado utilizando antes: *Experimento, Resultado, Suceso, y Equiprobabilidad*; y se muestra la probabilidad con una fórmula. También se muestra una propiedad que ya había aparecido de forma natural en un ejercicio (la probabilidad del suceso contrario), que ahora se enmarca para que el alumnado la tenga presente (ver Ilustración 55).



12.3 Probability of Events with Equally Likely Outcomes

In order to calculate probability in a more precise way, we will define the following terms that we used earlier.

Experiment

An experiment is an activity under consideration such as tossing a coin or throwing a die.

Outcome

An outcome is one of the possible results of an experiment. For example, when a coin is tossed, assuming that the coin cannot land on its edge, there are two possible outcomes: head (*H*) or tail (*T*).

Event

An event is a set of outcomes of an experiment satisfying a given condition.

Equally Likely

Outcomes are said to be equally likely if the chance of occurrence of each outcome is equal.

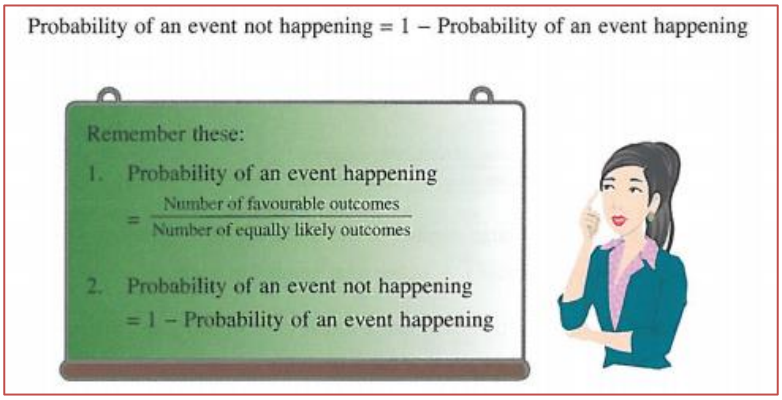
Let's examine some examples to illustrate the terms further.

Consider a spinner with four equal sectors coloured blue, red, yellow and green.

Spinning the pointer on the spinner is an **experiment**. The experiment leads to one of four possible **outcomes**, with the pointer landing on blue, red, yellow or green. Each of the outcomes is considered to be **equally likely**. One **event** of the experiment is the pointer landing on the red sector.

The probability of an event, $P(E)$, is defined as

$$P(E) = \frac{\text{Number of ways event } E \text{ can occur}}{\text{Total number of possible outcomes}}$$



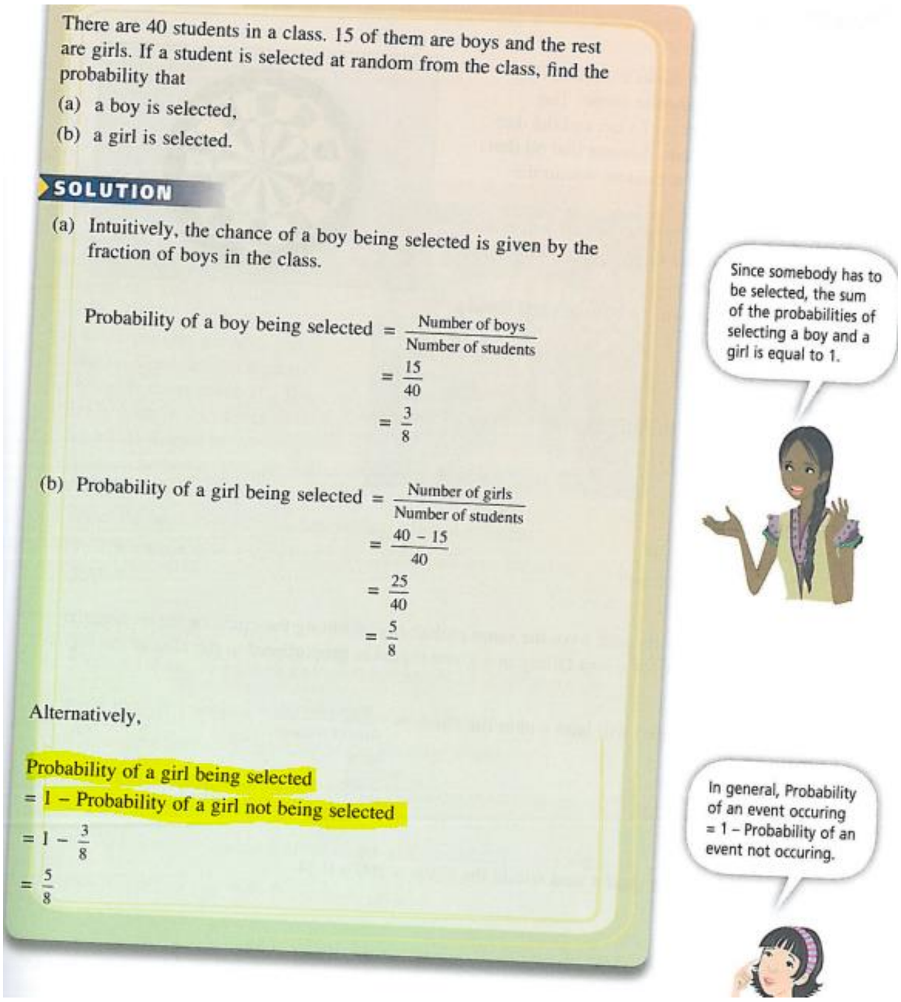
Probability of an event not happening = 1 – Probability of an event happening

Remember these:

1. Probability of an event happening $= \dfrac{\text{Number of favourable outcomes}}{\text{Number of equally likely outcomes}}$
2. Probability of an event not happening = 1 – Probability of an event happening

Ilustración 55.- Pág. 275, formalización de los conceptos de probabilidad ya trabajados con los ejemplos a lo largo del tema, al final del mismo.

Es decir, **en Singapur se ve la probabilidad y todo lo que ésta conlleva de forma natural y accesible para el alumnado**, con lenguaje no matemático y fácil de comprender; **y después** de ver y trabajar con conceptos implícitamente y mediante ejemplos (ver Ilustración 55 e Ilustración 56), **estos son formalizados**.



There are 40 students in a class. 15 of them are boys and the rest are girls. If a student is selected at random from the class, find the probability that

(a) a boy is selected,

(b) a girl is selected.

SOLUTION

(a) Intuitively, the chance of a boy being selected is given by the fraction of boys in the class.

$$\text{Probability of a boy being selected} = \frac{\text{Number of boys}}{\text{Number of students}} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

(b) $$\text{Probability of a girl being selected} = \frac{\text{Number of girls}}{\text{Number of students}} = \frac{40-15}{40} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

Alternatively,

Probability of a girl being selected

= 1 − Probability of a girl not being selected

$= 1 - \frac{3}{8}$

$= \frac{5}{8}$

Ilustración 56.- Uno de los ejemplos que se utilizan en Singapur cómo forma de llegar a la teoría del tema. Tras hacer estos ejercicios, se hace una formalización matemática los conceptos utilizados y trabajados.

La ventaja y el sentido de esta forma de proceder es que se definen los conceptos después de utilizarlos, por lo que **esos conceptos ya tienen un sentido para los alumnos**, solo que no le habían puesto un nombre. Y la fórmula de la probabilidad (regla de Laplace) y la probabilidad del suceso contrario, no la han utilizado para aplicarla mecánicamente (ver por ejemplo Ilustración 56), sino que han pensado cuál era la probabilidad en cada ejercicio. Y, sin embargo, al formalizarla al final, se consigue que el alumno la tenga presente y sea consciente de que así es como ha obtenido la probabilidad en los diferentes problemas (salvo en aquellos en los que se estaba tratando con la otra definición de la probabilidad, como límite de la frecuencia relativa).

Habiendo empezado por la probabilidad y una vez vista y habiendo trabajado con ella, es entonces cuando se empieza a hablar de *sucesos* en el libro de Singapur, y se empieza a pedir su obtención. Estos aparecen en ejercicios para practicar, en dónde se piden cosas tales como el espacio muestral (sin utilizar este nombre u otro para el mismo, pidiendo todos los resultados posibles) o sucesos compuestos, antes de pedir su probabilidad (ver Ilustración 57). Así, los sucesos tienen un sentido para el alumnado, que sabe que obtiene un suceso para luego calcular la probabilidad.

ivity 12C

For each of the following experiments, first list the equally likely and favourable outcomes. Then find the probability.

(a) Experiment: A die is rolled. List the possible outcomes.
Find the probability that the die
(i) shows an even number,
(ii) shows an odd number,
(iii) does not show an even number,
(iv) shows a number less than 7,
(v) shows a number greater than 6.

(b) Experiment: Draw one slip of paper at random from a box containing 10 slips numbered one to ten. List all the possible outcomes.
Find the probability that the slip
(i) has an even number,
(ii) has an odd number,
(iii) does not have an even number,
(iv) has a number greater than 10,
(v) has a number less than 5,
(vi) has a number less than or equal to 5.

EXAMPLE 6

An unbiased six-sided die is rolled and the number of dots on its top face is noted. Find each of the following.

(a) All possible outcomes.
(b) The event of obtaining an even number of dots.
(c) The event of obtaining an odd number of dots.
(d) The event of obtaining a prime number of dots.
(e) The probability of obtaining six dots.
(f) The probability of obtaining an even number of dots.
(g) The probability of obtaining three or more dots.

Ilustración 57.- Actividad 12C (arriba) y ejemplo 6 (abajo) de las páginas 278 y 279, respectivamente. El alumnado debe obtener el espacio muestral y algunos sucesos, y esta acción ya tiene un sentido para él, pues lo utiliza para calcular probabilidades.

Esto sucede al revés en España, donde, como ya se ha dicho, vemos que primero se definen conceptos como el espacio muestral, los tipos de sucesos, etc., y se empieza a trabajar (se explica en la teoría y se hacen ejercicios) primero con los sucesos y más adelante se pasa a la probabilidad. Y en lugar de formalizar al final, en España se empieza y se parte de las fórmulas y conceptos ya presentados y luego únicamente se trabaja con ellos, se usan para resolver los ejercicios.

De modo que, en cuanto a la **formalización de los conceptos**, **es al revés en un país y en el otro**, donde en Singapur se hace que el alumnado trabaje con la probabilidad y al final formaliza los conceptos que los alumnos han ido viendo mientras trabajaban la probabilidad; mientras que en España se empieza desde este punto. El problema de esta segunda forma (la de **España**) es que **los alumnos no descubren la probabilidad**, y en su lugar se habla de conceptos que los alumnos aprenden antes de llegar a usarlos. En Singapur en cambio, solo se pone nombre a aquello que ya han visto y conocen, de modo que no lo olviden y de modo que quede claro y fijado en las mentes del alumnado (ver Ilustración 58). De cualquier modo, no se puede decir que la forma que se utiliza en **España** no tenga **ventajas**, y se puede decir a su favor que esa forma puede permitir que el alumno sea consciente de lo que está utilizando, puesto que ya tiene un nombre y ha sido definido desde el principio. Aun así, **en el presente trabajo se entiende que es**

más adecuado el modo en que está hecho en Singapur, dado que los estudiantes son niños, y están viendo la probabilidad por primera vez (para alguien que ya conoce la probabilidad, como un estudiante del máster y futuro profesor, el libro de España puede ser más adecuado para sí mismo, pero no para preadolescentes).

Carlos, Esther y Jesús están jugando a un juego de mesa que consiste en desplazarse por un tablero y contestar una serie de preguntas en función del número que se obtenga al lanzar un dado tetraédrico.

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

- Cada uno de los resultados posibles del espacio muestral se llama **suceso elemental** y no puede descomponerse en otros más sencillos.
- Un **suceso compuesto** es el que está formado por más de un suceso elemental.
- El espacio muestral, E, también se llama **suceso seguro** pues se cumple siempre.
- El **suceso imposible** es el que no se realiza nunca. Se representa con el símbolo $\varnothing$.

Si un vehículo circula a una velocidad de 80 km/h de manera constante, podemos conocer con antelación el tiempo que tardará en recorrer una cierta distancia utilizando las leyes de la física.

En cambio, cuando lanzamos una moneda al aire, no podemos conocer el resultado de antemano.

Un experimento es **determinista** cuando podemos predecir su resultado.

Un experimento es **aleatorio** cuando:

- Se puede realizar tantas veces como queramos.
- No se puede predecir el resultado concreto antes de realizarlo.

El **espacio muestral**, E, es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Sucesos equiprobables

Si en un experimento aleatorio todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad se dice que son **sucesos equiprobables**.

Ejemplo ▸ El espacio muestral al lanzar un dado es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La probabilidad de sacar 1 es la misma que la de 2, que la de 3... Como hay seis resultados posibles, la probabilidad de cada uno es:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Observa que $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

Los sucesos son equiprobables.

12.3 Probability of Events with Equally Likely Outcomes

In order to calculate probability in a more precise way, we will define the following terms that we used earlier.

Experiment

An experiment is an activity under consideration such as tossing a coin or throwing a die.

Outcome

An outcome is one of the possible results of an experiment. For example, when a coin is tossed, assuming that the coin cannot land on its edge, there are two possible outcomes: head (H) or tail (T).

Event

An event is a set of outcomes of an experiment satisfying a given condition.

Equally Likely

Outcomes are said to be equally likely if the chance of occurrence of each outcome is equal.

Let's examine some examples to illustrate the terms further.

Consider a spinner with four equal sectors coloured blue, red, yellow and green.

Spinning the pointer on the spinner is an **experiment**. The experiment leads to one of four possible **outcomes**, with the pointer landing on blue, red, yellow or green. Each of the outcomes is considered to be **equally likely**. One **event** of the experiment is the pointer landing on the red sector.

Ilustración 58.- Comparación en la formalización de los conceptos. En Singapur (abajo), tras ver la probabilidad y que los alumnos trabajen con ella, se hace una formalización de los conceptos y se pone nombre a aquello que los alumnos han visto y han estado utilizando. En España (arriba), por el contrario, se parte de los conceptos formalizados ya, y los ejercicios son para aplicar estos conceptos.

9.1.4. Ejercicios para practicar la teoría

En cuanto a los **ejercicios para practicar la teoría**, en el libro de **Singapur** se puede ver algo de **variedad** en los mismos, se pueden encontrar **ejercicios de distinta índole**. Entre los ejercicios se encuentran por ejemplo el de un vendedor que observa las compras que realizan los últimos 1000 compradores que llegan a su tienda, o el de una fábrica de bombillas y la probabilidad de que una bombilla sea defectuosa. Así pues, se puede al menos entre ver otra utilidad o aplicaciones de la probabilidad, como lo es, por ejemplo, su uso en los procesos de control de calidad de un producto (una aplicación de la probabilidad en la vida cotidiana como medio para pronosticar).

2. In a light bulb factory, it is found that the probability of a bulb being defective is 0.12. Estimate how many defective bulbs there would be in
   (a) 1000 bulbs,
   (b) 5000 bulbs,
   (c) 10 000 bulbs,
   (d) 100 000 bulbs.

(AMPLE 4

iopkeeper observed 1000 shoppers who walked into his shop over a od of time. He found that 650 of them made purchases while the rest not buy anything. Using the above observation, estimate

the probability that a person who walked into the shop would not make a purchase,

the number of people who would be making purchases when 200 shoppers entered the shop.

LUTION

Number of shoppers who did not make a purchase $= 1000 - 650$
$= 350$

Total number of shoppers is 1000.

Probability that a shopper will not make a purchase

$$= \frac{\text{Number of shoppers who did not make a purchase}}{\text{Total number of shoppers}}$$

$$= \frac{350}{1000}$$

$$= 0.35$$

Probability that a shopper will make a purchase

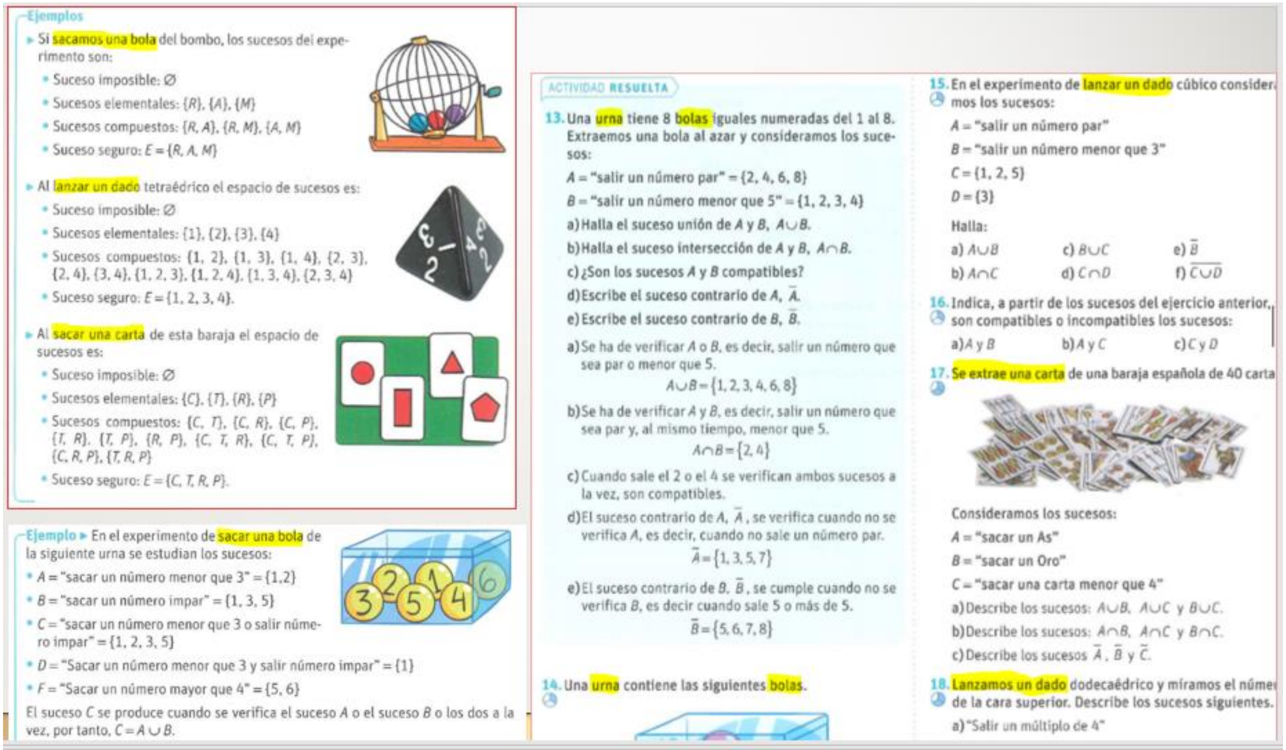
$$= \frac{\text{Number of shoppers who made purchases}}{\text{Total number of shoppers}}$$

$$= \frac{650}{1000}$$

$$= 0.65$$

Ilustración 59.- Ejercicios del libro de 2º curso de secundaria en Singapur; ejercicio 2 de la pág. 273 y ejemplo 4 de la pág. 272, respectivamente. Los ejercicios son más variados en Singapur y esto permite ver otras utilidades del cálculo de probabilidades.

En el libro de **España**, por el contrario, **casi todos los ejercicios y ejemplos se pueden clasificar en cuatro tipos**: los que usan lanzamientos de monedas, los de extraer cartas de una baraja, los consistentes en lanzar uno o más dados (ya sean cúbicos o tetraédricos), y aquellos en los que se debe sacar una bola de una urna (o de una esfera de bingo). En la siguiente ilustración (ver Ilustración 60) puede verse esto, tanto en las imágenes de cartas, bombos, urnas, bolas, dados y monedas, cómo resaltado en amarillo en los enunciados.



Ejemplos

- Si sacamos una bola del bombo, los sucesos del experimento son:
  - Suceso imposible: $\varnothing$
  - Sucesos elementales: $\{R\}, \{A\}, \{M\}$
  - Sucesos compuestos: $\{R, A\}, \{R, M\}, \{A, M\}$
  - Suceso seguro: $E = \{R, A, M\}$
- Al lanzar un dado tetraédrico el espacio de sucesos es:
  - Suceso imposible: $\varnothing$
  - Sucesos elementales: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
  - Sucesos compuestos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$
  - Suceso seguro: $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Al sacar una carta de esta baraja el espacio de sucesos es:
  - Suceso imposible: $\varnothing$
  - Sucesos elementales: $\{C\}, \{T\}, \{R\}, \{P\}$
  - Sucesos compuestos: $\{C, T\}, \{C, R\}, \{C, P\}, \{T, R\}, \{T, P\}, \{R, P\}, \{C, T, R\}, \{C, T, P\}, \{C, R, P\}, \{T, R, P\}$
  - Suceso seguro: $E = \{C, T, R, P\}$.

Ejemplo ▸ En el experimento de sacar una bola de la siguiente urna se estudian los sucesos:

- A = "sacar un número menor que 3" $= \{1, 2\}$
- B = "sacar un número impar" $= \{1, 3, 5\}$
- C = "sacar un número menor que 3 o salir número impar" $= \{1, 2, 3, 5\}$
- D = "Sacar un número menor que 3 y salir número impar" $= \{1\}$
- F = "Sacar un número mayor que 4" $= \{5, 6\}$

El suceso C se produce cuando se verifica el suceso A o el suceso B o los dos a la vez, por tanto, $C = A \cup B$.

ACTIVIDAD RESUELTA

13. Una urna tiene 8 bolas iguales numeradas del 1 al 8. Extraemos una bola al azar y consideramos los sucesos:

A = "salir un número par" $= \{2, 4, 6, 8\}$

B = "salir un número menor que 5" $= \{1, 2, 3, 4\}$

a) Halla el suceso unión de A y B, $A \cup B$.

b) Halla el suceso intersección de A y B, $A \cap B$.

c) ¿Son los sucesos A y B compatibles?

d) Escribe el suceso contrario de A, $\overline{A}$.

e) Escribe el suceso contrario de B, $\overline{B}$.

a) Se ha de verificar A o B, es decir, salir un número que sea par o menor que 5.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

b) Se ha de verificar A y B, es decir, salir un número que sea par y, al mismo tiempo, menor que 5.

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

c) Cuando sale el 2 o el 4 se verifican ambos sucesos a la vez, son compatibles.

d) El suceso contrario de A, $\overline{A}$, se verifica cuando no se verifica A, es decir, cuando no sale un número par.

$$\overline{A} = \{1, 3, 5, 7\}$$

e) El suceso contrario de B, $\overline{B}$, se cumple cuando no se verifica B, es decir cuando sale 5 o más de 5.

$$\overline{B} = \{5, 6, 7, 8\}$$

14. Una urna contiene las siguientes bolas.

15. En el experimento de lanzar un dado cúbico considera- mos los sucesos:

A = "salir un número par"

B = "salir un número menor que 3"

$C = \{1, 2, 5\}$

$D = \{3\}$

Halla:

a) $A \cup B$ c) $B \cup C$ e) $\overline{B}$

b) $A \cap C$ d) $C \cap D$ f) $\overline{C \cup D}$

16. Indica, a partir de los sucesos del ejercicio anterior, son compatibles o incompatibles los sucesos:

a) A y B b) A y C c) C y D

17. Se extrae una carta de una baraja española de 40 carta

Consideramos los sucesos:

A = "sacar un As"

B = "sacar un Oro"

C = "sacar una carta menor que 4"

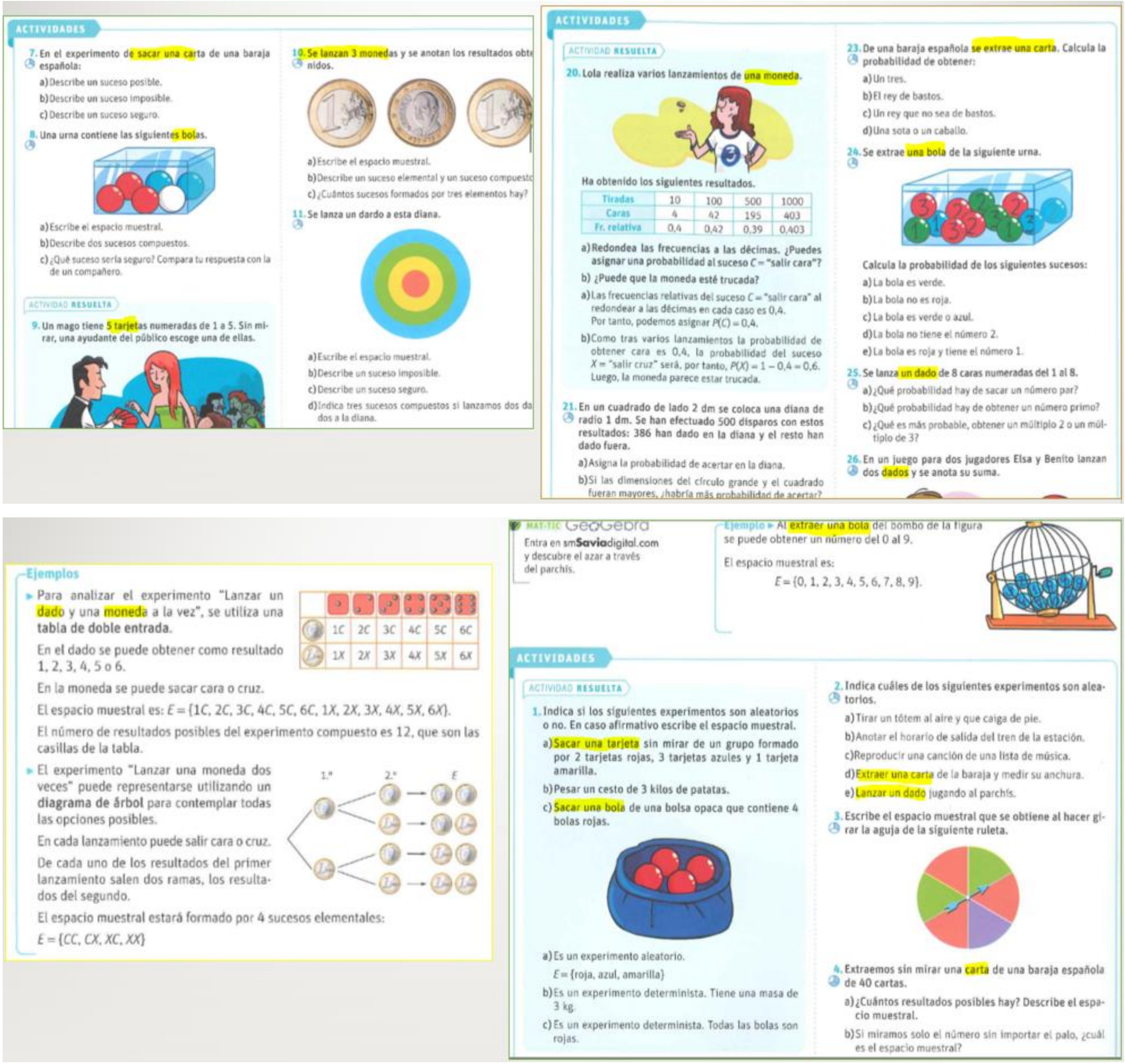
a) Describe los sucesos: $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.

b) Describe los sucesos: $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

c) Describe los sucesos $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$.

18. Lanzamos un dado dodecaédrico y miramos el núme de la cara superior. Describe los sucesos siguientes.

a) "Salir un múltiplo de 4"



ACTIVIDADES

7. En el experimento de sacar una carta de una baraja española:
a) Describe un suceso posible.
b) Describe un suceso imposible.
c) Describe un suceso seguro.

8. Una urna contiene las siguientes bolas.
a) Escribe el espacio muestral.
b) Describe dos sucesos compuestos.
c) ¿Qué suceso sería seguro? Compara tu respuesta con la de un compañero.

ACTIVIDAD RESUELTA

9. Un mago tiene 5 tarjetas numeradas de 1 a 5. Sin mirar, una ayudante del público escoge una de ellas.

10. Se lanzan 3 monedas y se anotan los resultados obtenidos.
a) Escribe el espacio muestral.
b) Describe un suceso elemental y un suceso compuesto.
c) ¿Cuántos sucesos formados por tres elementos hay?

11. Se lanza un dardo a esta diana.
a) Escribe el espacio muestral.
b) Describe un suceso imposible.
c) Describe un suceso seguro.
d) Indica tres sucesos compuestos si lanzamos dos dardos a la diana.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD RESUELTA

20. Lola realiza varios lanzamientos de una moneda.

Ha obtenido los siguientes resultados.

Tiradas	10	100	500	1000
Caras	4	42	195	403
Fr. relativa	0,4	0,42	0,39	0,403

a) Redondea las frecuencias a las décimas. ¿Puedes asignar una probabilidad al suceso C = "salir cara"?
b) ¿Puede que la moneda esté trucada?
a) Las frecuencias relativas del suceso C = "salir cara" al redondear a las décimas en cada caso es 0,4.
Por tanto, podemos asignar $P(C) = 0,4$.
b) Como tras varios lanzamientos la probabilidad de obtener cara es 0,4, la probabilidad del suceso X = "salir cruz" será, por tanto, $P(X) = 1 - 0,4 = 0,6$.
Luego, la moneda parece estar trucada.

21. En un cuadrado de lado 2 dm se coloca una diana de radio 1 dm. Se han efectuado 500 disparos con estos resultados: 386 han dado en la diana y el resto han dado fuera.
a) Asigna la probabilidad de acertar en la diana.
b) Si las dimensiones del círculo grande y el cuadrado fueran mayores, ¿habría más probabilidad de acertar?

23. De una baraja española se extrae una carta. Calcula la probabilidad de obtener:
a) Un tres.
b) El rey de bastos.
c) Un rey que no sea de bastos.
d) Una sota o un caballo.

24. Se extrae una bola de la siguiente urna.

Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) La bola es verde.
b) La bola no es roja.
c) La bola es verde o azul.
d) La bola no tiene el número 2.
e) La bola es roja y tiene el número 1.

25. Se lanza un dado de 8 caras numeradas del 1 al 8.
a) ¿Qué probabilidad hay de sacar un número par?
b) ¿Qué probabilidad hay de obtener un número primo?
c) ¿Qué es más probable, obtener un múltiplo 2 o un múltiplo de 3?

26. En un juego para dos jugadores Elsa y Benito lanzan dos dados y se anota su suma.

Ejemplos

▸ Para analizar el experimento "Lanzar un dado y una moneda a la vez", se utiliza una tabla de doble entrada.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
C	1C	2C	3C	4C	5C	6C
X	1X	2X	3X	4X	5X	6X

En el dado se puede obtener como resultado 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
En la moneda se puede sacar cara o cruz.
El espacio muestral es: $E = \{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1X, 2X, 3X, 4X, 5X, 6X\}$.
El número de resultados posibles del experimento compuesto es 12, que son las casillas de la tabla.

▸ El experimento "Lanzar una moneda dos veces" puede representarse utilizando un diagrama de árbol para contemplar todas las opciones posibles.
En cada lanzamiento puede salir cara o cruz.
De cada uno de los resultados del primer lanzamiento salen dos ramas, los resultados del segundo.
El espacio muestral estará formado por 4 sucesos elementales:
$E = \{CC, CX, XC, XX\}$

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y descubre el azar a través del parchís.

Ejemplo ▸ Al extraer una bola del bombo de la figura se puede obtener un número del 0 al 9.
El espacio muestral es:
$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD RESUELTA

1. Indica si los siguientes experimentos son aleatorios o no. En caso afirmativo escribe el espacio muestral.
a) Sacar una tarjeta sin mirar de un grupo formado por 2 tarjetas rojas, 3 tarjetas azules y 1 tarjeta amarilla.
b) Pesar un cesto de 3 kilos de patatas.
c) Sacar una bola de una bolsa opaca que contiene 4 bolas rojas.

a) Es un experimento aleatorio.
E = {roja, azul, amarilla}
b) Es un experimento determinista. Tiene una masa de 3 kg.
c) Es un experimento determinista. Todas las bolas son rojas.

2. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.
a) Tirar un tótem al aire y que caiga de pie.
b) Anotar el horario de salida del tren de la estación.
c) Reproducir una canción de una lista de música.
d) Extraer una carta de la baraja y medir su anchura.
e) Lanzar un dado jugando al parchís.

3. Escribe el espacio muestral que se obtiene al hacer girar la aguja de la siguiente ruleta.

4. Extraemos sin mirar una carta de una baraja española de 40 cartas.
a) ¿Cuántos resultados posibles hay? Describe el espacio muestral.
b) Si miramos solo el número sin importar el palo, ¿cuál es el espacio muestral?

Ilustración 60.- Ejercicios y ejemplos del libro de 2ºESO en España. La inmensa mayoría de estos son consistentes en experimentos tales como extraer una bola, extraer una carta, lanzar una moneda, o lanzar dados. Esto puede apreciarse en la imagen con la gran cantidad de dibujos de bolas, cartas, dados y monedas.

Como contra parte, sin embargo, está el hecho de que todos los problemas de azar pueden reducirse a uno de estos (urnas, cartas, dados, monedas...), y es un elemento importante en la didáctica de la probabilidad reducir cualquier enunciado a una de esas situaciones.

9.2. 4ºESO

9.2.1. Vocabulario, probabilidad y definición de conceptos

En Singapur, el libro de 4º curso parte de hacer un repaso a los conceptos y contenidos vistos en 2º curso. Cómo se ha dicho previamente, el repaso en Singapur **es breve** (ver Ilustración 40) y ocupa apenas una página, tras lo cual se empiezan a ver nuevos conceptos enseguida; sin embargo, el tema está pensado de forma que **se van viendo**

estos nuevos contenidos y se van repasando los contenidos vistos en 2º curso a la vez. Esto se puede ver, por ejemplo, en la siguiente ilustración (ver Ilustración 61).

2 More about Probability

et's see how probability is applied in different situations.

ı) A die is rolled. What is the probability of getting
(i) an even number,
(ii) a number greater than 2,
(iii) a number which is even and greater than 2,
(iv) a number which is either even or greater than 2?

The equally possible outcomes are 1, 2, 3, 4, 5, 6.

The number of equally possible outcomes is 6.

Ilustración 61.- Libro de 4º curso; pág. 152. En el ejemplo se repasa lo aprendido (obtener sucesos de un experimento simple y su probabilidad; apartados uno y dos. Concepto de sucesos equiprobables) y se pasa a su vez a ver nuevos conceptos (probabilidad de la unión, e intersección; apartados tres y cuatro).

Una vez más, en Singapur (y aún en 4º curso) vemos que se expresa con palabras y con un lenguaje coloquial lo que en España se expresa con lenguaje matemático (ya desde 2º de ESO, sin una introducción progresiva del mismo, sin que exista un proceso de adaptación del alumnado a ese nuevo lenguaje; ver Ilustración 62). Un lenguaje algo más matemático se empieza a usar en 4º curso en algunas cosas, en Singapur (ver Ilustración 63).

The following are some properties of probability.

- The probability of an outcome is a measure of the fraction of time that the outcome is expected to happen. This can often be calculated by taking the number of ways that the outcome can happen divided by the total number of possible outcomes.
- Every probability is a number between 0 and 1. If the outcome has a probability of 0, it means that the outcome can never happen – it is an impossible outcome.
  If an outcome has a probability of 1, the outcome is sure to happen. Most probabilities are between 0 and 1, rarely equal to 0 or 1.
- The sum of the probabilities of all possible outcomes is 1.
- Probability of an event not happening = 1 – probability of the event happening

La **probabilidad** $P(A)$, de un suceso A, es el valor de la frecuencia relativa de A, $f_r(A)$, al repetir el experimento infinitas veces.

La probabilidad asociada a un experimento aleatorio cumple las propiedades:

- La probabilidad de cualquier suceso A está comprendida entre 0 y 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- La probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\varnothing) = 0$
- La probabilidad del suceso seguro es 1: $P(E) = 1$

Ilustración 62.- Comparación del tipo de vocabulario utilizado en cada país para transmitir los conceptos; matemático y formal en España, más coloquial y accesible en Singapur. Comparación de las propiedades de la probabilidad explicadas. En la imagen de arriba, parte del repaso del tema de probabilidad de 2º curso, Singapur.

The equally possible outcomes are 1, 2, 3, 4, 5, 6.

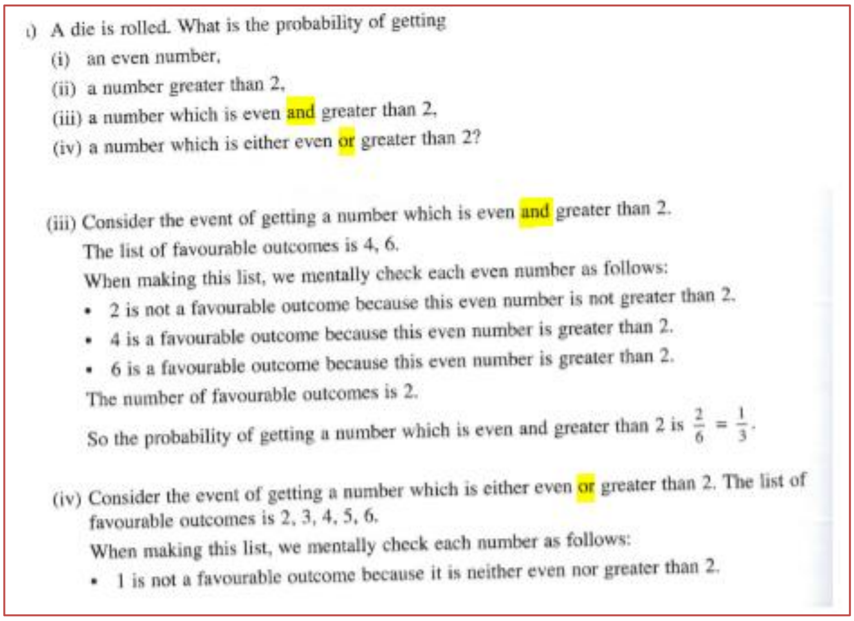
The number of equally possible outcomes is 6.

(i) Consider the event of getting an even number.
The list of all favourable outcomes is 2, 4, 6.
The number of favourable outcomes is 3.
So the probability of getting an even number is $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

- Al lanzar un dado tetraédrico el espacio de sucesos es:
  - Suceso imposible: $\varnothing$
  - Sucesos elementales: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
  - Sucesos compuestos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$
  - Suceso seguro: $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ilustración 63.- Otro ejemplo de cómo Singapur explica con palabras comprensibles para todo alumno, aún en 4º curso, mientras en España se utilizan términos y notación más matemática (ya desde 2º ESO). En este caso, al hablar de los sucesos.

En Singapur (4º curso), no se utilizan los diagramas de Venn ni se habla de unión e intersección de **sucesos**, etc. Por el contrario, **mediante ejemplos**, que es la forma en la que van haciendo adquirir los conocimientos al alumno en Singapur (como ya se ha visto en el capítulo anterior, de 2º de ESO), piden cuales son los resultados favorables para "x" condición. Esto es una forma mucho **más natural** de pedir algo e igualmente se trabajan los sucesos de unión e intersección y sus probabilidades. Se puede ver en la siguiente ilustración (ver Ilustración 64).

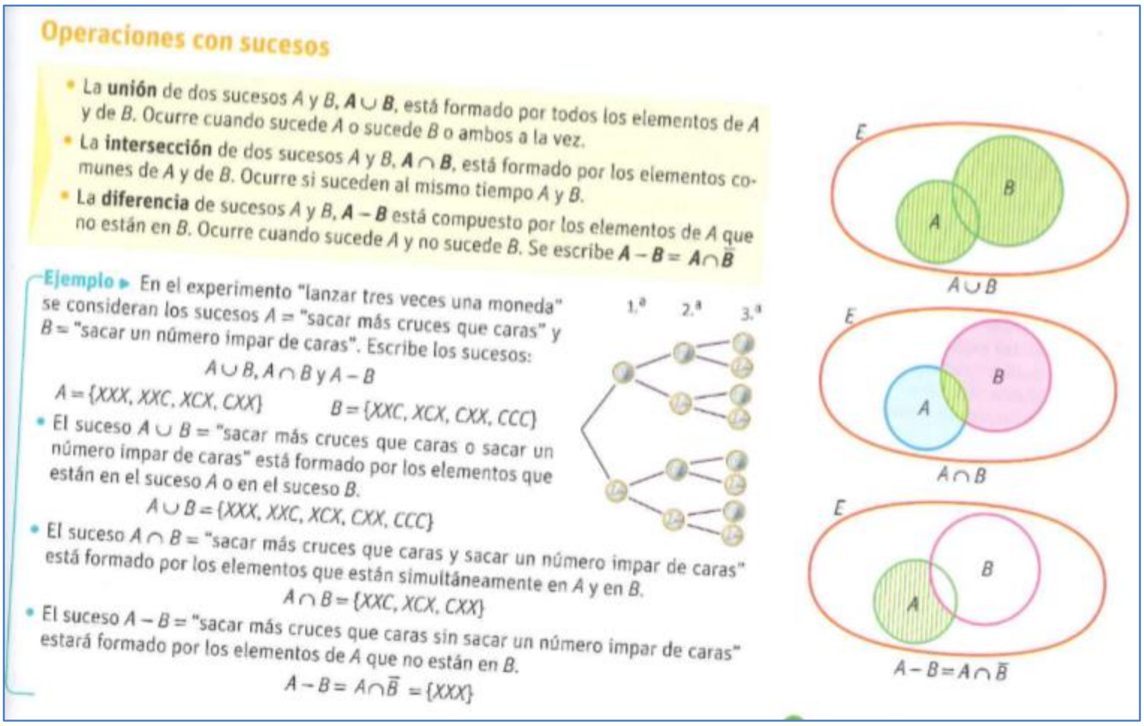


i) A die is rolled. What is the probability of getting
(i) an even number,
(ii) a number greater than 2,
(iii) a number which is even and greater than 2,
(iv) a number which is either even or greater than 2?

(iii) Consider the event of getting a number which is even and greater than 2.
The list of favourable outcomes is 4, 6.
When making this list, we mentally check each even number as follows:
- 2 is not a favourable outcome because this even number is not greater than 2.
- 4 is a favourable outcome because this even number is greater than 2.
- 6 is a favourable outcome because this even number is greater than 2.

The number of favourable outcomes is 2.
So the probability of getting a number which is even and greater than 2 is $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(iv) Consider the event of getting a number which is either even or greater than 2. The list of favourable outcomes is 2, 3, 4, 5, 6.
When making this list, we mentally check each number as follows:
- 1 is not a favourable outcome because it is neither even nor greater than 2.



Operaciones con sucesos

- La **unión** de dos sucesos A y B, $\mathbf{A \cup B}$, está formado por todos los elementos de A y de B. Ocurre cuando sucede A o sucede B o ambos a la vez.
- La **intersección** de dos sucesos A y B, $\mathbf{A \cap B}$, está formado por los elementos comunes de A y de B. Ocurre si suceden al mismo tiempo A y B.
- La **diferencia** de sucesos A y B, $\mathbf{A - B}$ está compuesto por los elementos de A que no están en B. Ocurre cuando sucede A y no sucede B. Se escribe $\mathbf{A - B = A \cap \overline{B}}$

Ejemplo ▸ En el experimento "lanzar tres veces una moneda" se consideran los sucesos A = "sacar más cruces que caras" y B = "sacar un número impar de caras". Escribe los sucesos:

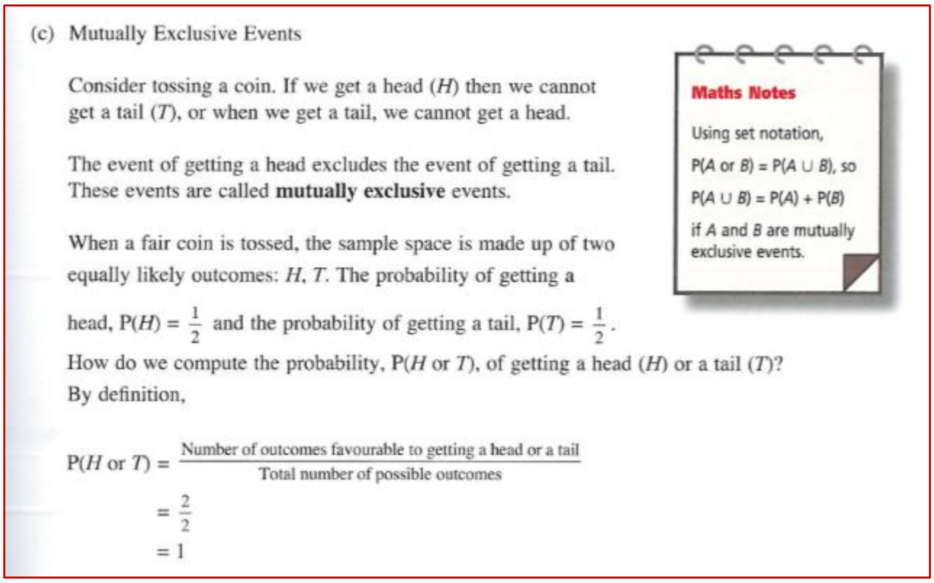
$A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$

$A = \{XXX, XXC, XCX, CXX\}$ $\quad B = \{XXC, XCX, CXX, CCC\}$

- El suceso $A \cup B$ = "sacar más cruces que caras o sacar un número impar de caras" está formado por los elementos que están en el suceso A o en el suceso B.
$A \cup B = \{XXX, XXC, XCX, CXX, CCC\}$
- El suceso $A \cap B$ = "sacar más cruces que caras y sacar un número impar de caras" está formado por los elementos que están simultáneamente en A y en B.
$A \cap B = \{XXC, XCX, CXX\}$
- El suceso $A - B$ = "sacar más cruces que caras sin sacar un número impar de caras" estará formado por los elementos de A que no están en B.
$A - B = A \cap \overline{B} = \{XXX\}$

Ilustración 64.- En Singapur se trabaja lo mismo que en España, en el caso de estas ilustraciones, la unión y la intersección. Pero en España esto está cargado de simbología que puede dejar al alumno descolocado o ser un obstáculo en el aprendizaje en lugar de una ayuda.

Bien es cierto, sin embargo, que del modo en que se hace en el libro de Singapur, un concepto puede no quedar del todo definido, mientras que en España sí quede. Esto se puede ver, por ejemplo, al ver el concepto de sucesos incompatibles. **En España queda del todo definido**, mientras que en Singapur un alumno podría pensar que para que dos sucesos sean incompatibles, es necesario que las probabilidades de ambos den 1 al ser sumadas; es decir, existe una ambigüedad en el caso de Singapur (ver Ilustración 65).



(c) Mutually Exclusive Events

Consider tossing a coin. If we get a head (H) then we cannot get a tail (T), or when we get a tail, we cannot get a head.

The event of getting a head excludes the event of getting a tail. These events are called **mutually exclusive** events.

When a fair coin is tossed, the sample space is made up of two equally likely outcomes: H, T. The probability of getting a head, $P(H) = \frac{1}{2}$ and the probability of getting a tail, $P(T) = \frac{1}{2}$.

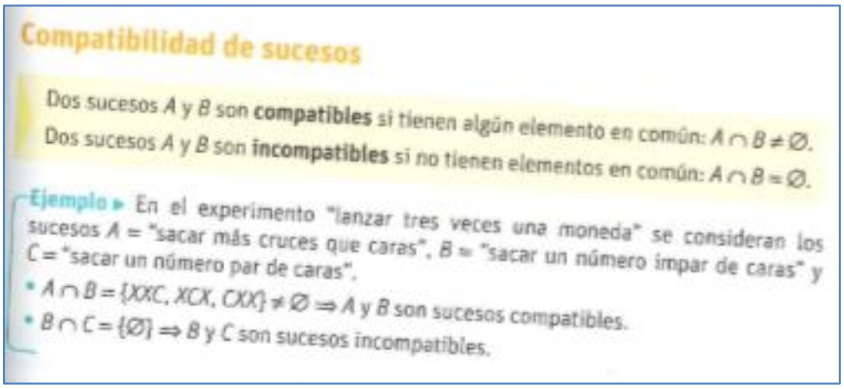
How do we compute the probability, P(H or T), of getting a head (H) or a tail (T)?

By definition,

$$P(H \text{ or } T) = \frac{\text{Number of outcomes favourable to getting a head or a tail}}{\text{Total number of possible outcomes}} = \frac{2}{2} = 1$$

Maths Notes

Using set notation, P(A or B) = P($A \cup B$), so P($A \cup B$) = P(A) + P(B) if A and B are mutually exclusive events.



Compatibilidad de sucesos

Dos sucesos A y B son **compatibles** si tienen algún elemento en común: $A \cap B \neq \varnothing$.

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si no tienen elementos en común: $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo ▸ En el experimento "lanzar tres veces una moneda" se consideran los sucesos A = "sacar más cruces que caras", B = "sacar un número impar de caras" y C = "sacar un número par de caras".

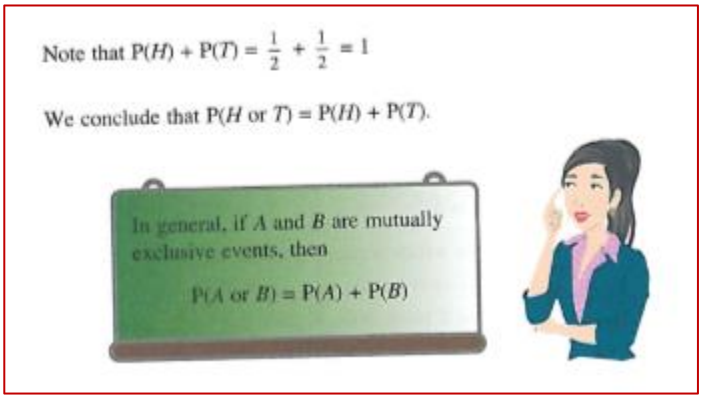
- $A \cap B = \{XXC, XCX, CXX\} \neq \varnothing \Rightarrow A$ y B son sucesos compatibles.
- $B \cap C = \{\varnothing\} \Rightarrow B$ y C son sucesos incompatibles.

Ilustración 65.- Explicación de sucesos incompatibles en el libro de Singapur y España, respectivamente. En España queda del todo definido, mientras que en Singapur no tanto.

En cualquier caso, en el presente trabajo **se considera una opción más adecuada la de Singapur**, pues el alumno entenderá con facilidad el concepto, mientras que en España puede resultar extraño para el alumno, y que este no aprenda el concepto y lo olvide con facilidad, en cuyo caso el hecho de que el concepto esté definido totalmente carece de importancia, pues el alumno no ha adquirido el concepto. **Se propone** para el caso de Singapur, **que se termine de formalizar el concepto**, como ya se hace en Singapur con otros conceptos que son formalizados al final (véase la regla de Laplace en 2º curso, ver Ilustración 55).

9.2.2. Probabilidad de la unión

La **probabilidad de la unión** se ve en Singapur con el último ejemplo que se ha puesto (ver Ilustración 65), donde culmina formalizando y poniendo la fórmula de la probabilidad de la unión para el caso de sucesos incompatibles (ver Ilustración 66).



Note that $P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

We conclude that $P(H \text{ or } T) = P(H) + P(T)$.

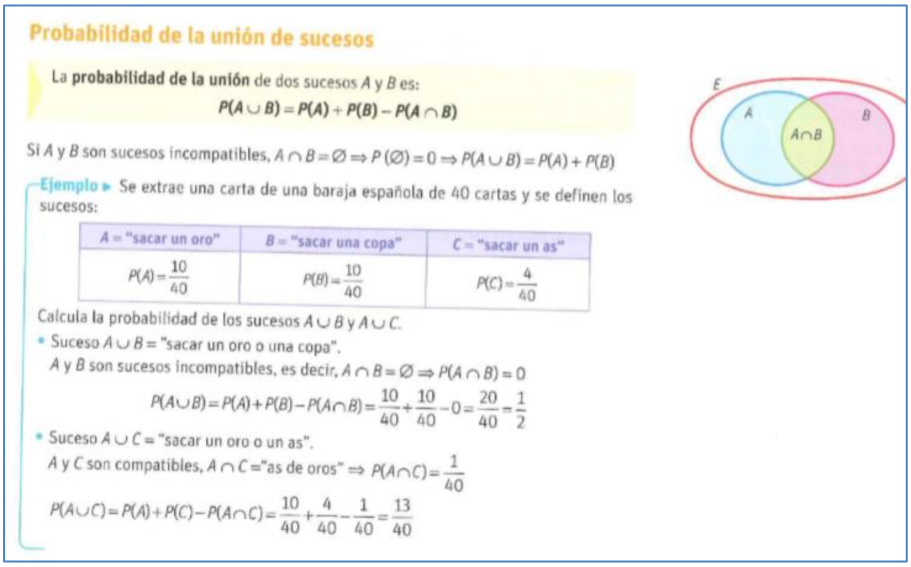
In general, if A and B are mutually exclusive events, then

$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

Ilustración 66.- Continuación del ejemplo del libro de Singapur de la ilustración anterior. Se ve como se llega a la fórmula de la probabilidad (para sucesos incompatibles) mediante un ejemplo, y se formaliza.

Aquí sucede pues que no se muestra la fórmula para la probabilidad de la unión, sino que se llega a ella. Por el contrario, en España (en 4ºESO) se da la fórmula y en el ejemplo que aparece solo se utiliza esa fórmula que ha salido, desde el punto de vista del estudiante, de la nada (ver Ilustración 67, arriba). Hay que hacer notar, sin embargo, que en España se ve la probabilidad de la unión también en 3ºESO (ver Ilustración 67, abajo), y en este libro sí se hace algo mejor. Esto es porque, aunque no se puede decir como tal que se llega a la fórmula mediante el ejemplo, sí se muestra el cálculo de la probabilidad de la unión usando la nueva fórmula (la de la probabilidad de la unión) y usando la regla de Laplace, con lo que **el alumnado** puede comprobar que se llega al mismo resultado. Es decir, **puede comprobar que el nuevo conocimiento** (la fórmula de la probabilidad de la unión) que se le ha dado lleva al mismo resultado al que se llega utilizando sus conocimientos previos (la regla de Laplace).

En el caso de Singapur no se ve la probabilidad de la unión para sucesos compatibles y en España sí (tanto en 3ºESO como en 4ºESO).



Probabilidad de la unión de sucesos

La **probabilidad de la unión** de dos sucesos A y B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

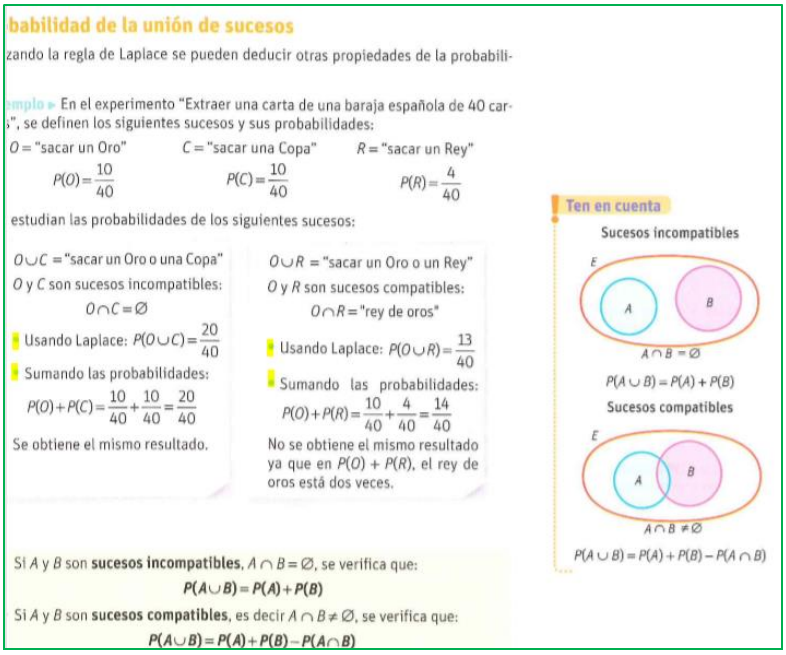
Si A y B son sucesos incompatibles, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(\varnothing) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ejemplo ▸ Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se definen los sucesos:

A = "sacar un oro"	B = "sacar una copa"	C = "sacar un as"
$P(A) = \frac{10}{40}$	$P(B) = \frac{10}{40}$	$P(C) = \frac{4}{40}$

Calcula la probabilidad de los sucesos $A \cup B$ y $A \cup C$.

- Suceso $A \cup B$ = "sacar un oro o una copa".
  A y B son sucesos incompatibles, es decir, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0$
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} - 0 = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$
- Suceso $A \cup C$ = "sacar un oro o un as".
  A y C son compatibles, $A \cap C$ = "as de oros" $\Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{40}$
  $$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$



babilidad de la unión de sucesos

zando la regla de Laplace se pueden deducir otras propiedades de la probabili-

mplo ▸ En el experimento "Extraer una carta de una baraja española de 40 car-
s", se definen los siguientes sucesos y sus probabilidades:

O = "sacar un Oro" $\quad P(O) = \frac{10}{40}$ $\qquad$ C = "sacar una Copa" $\quad P(C) = \frac{10}{40}$ $\qquad$ R = "sacar un Rey" $\quad P(R) = \frac{4}{40}$

estudian las probabilidades de los siguientes sucesos:

$O \cup C$ = "sacar un Oro o una Copa"
O y C son sucesos incompatibles:
$O \cap C = \varnothing$
Usando Laplace: $P(O \cup C) = \frac{20}{40}$
Sumando las probabilidades:
$P(O) + P(C) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \frac{20}{40}$
Se obtiene el mismo resultado.

$O \cup R$ = "sacar un Oro o un Rey"
O y R son sucesos compatibles:
$O \cap R$ = "rey de oros"
Usando Laplace: $P(O \cup R) = \frac{13}{40}$
Sumando las probabilidades:
$P(O) + P(R) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} = \frac{14}{40}$
No se obtiene el mismo resultado ya que en $P(O) + P(R)$, el rey de oros está dos veces.

Si A y B son **sucesos incompatibles**, $A \cap B = \varnothing$, se verifica que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si A y B son **sucesos compatibles**, es decir $A \cap B \neq \varnothing$, se verifica que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ten en cuenta

Sucesos incompatibles

$A \cap B = \varnothing$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sucesos compatibles

$A \cap B \neq \varnothing$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ilustración 67.- Cómo se llega a la probabilidad de la unión en España, en el libro de 4º ESO (arriba) y en el de 3º (abajo). En 4º solamente se da al alumno la fórmula directamente. En 3º se ve este concepto mejor, pues se utiliza la regla de Laplace (conocimiento previo del alumnado) para obtener el mismo resultado que con las fórmulas dadas (nuevo conocimiento).

9.2.3. Diagramas de árbol

En la **probabilidad de experimentos compuestos**, podemos encontrar en el libro de Singapur los **diagramas de árbol**, al igual que en el libro de España. En ambos países vemos dos tipos de diagramas de árbol: los que muestran todos los resultados posibles, y los que no lo hacen e incorporan probabilidades en sus ramas (*diagrama de árbol de probabilidad*). Llamaremos a partir de ahora al primer tipo *diagrama de árbol de tipo 1*, y al segundo tipo *diagrama de árbol de tipo 2* (ver Ilustración 68).

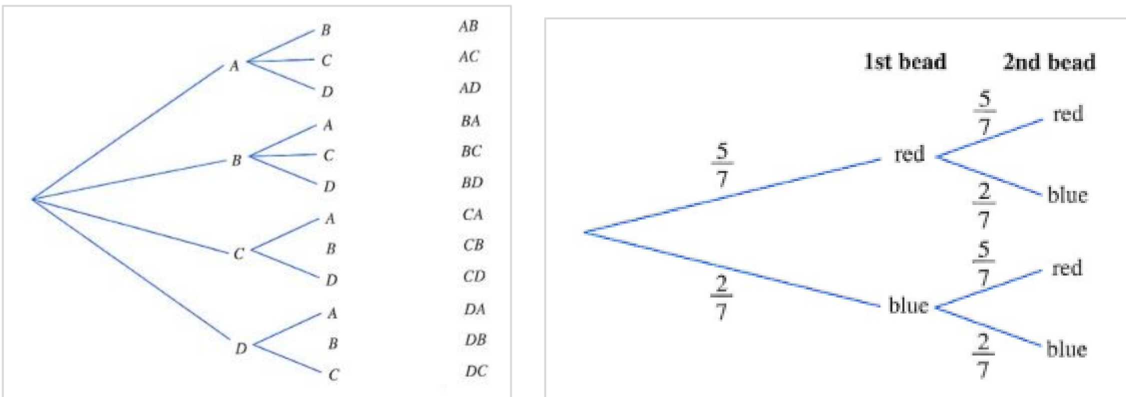


Ilustración 68.- Los dos tipos de diagrama de árbol. El primero (izq.; en este trabajo denominado como "*de tipo 1*") sin probabilidades en sus ramas, y con él se puede ver todo el espacio muestral, todos los casos posibles. El segundo (drcha.; "*de tipo 2*" en este trabajo) con probabilidades en sus ramas.

Sin embargo, **aunque en ambos países se ven los dos tipos de diagramas** de árbol, **se hace de un modo distinto, y esto puede ser determinante para la compresión** del segundo tipo de diagrama (diagrama de árbol de probabilidad) y de la regla del producto. Para explicar cómo puede ser determinante, se va a exponer primero cómo está explicado el diagrama en cada país, que difiere en realidad en aspectos algo sutiles:

Se empieza **en Singapur** por el primer tipo de diagrama de árbol, lo cual tiene mucho sentido, dado que así se parte de los conocimientos previos (cálculo de la probabilidad cómo casos probables entre casos posibles), y, dado que es una técnica para contar, se utiliza el diagrama como herramienta para ver todos los casos posibles y los casos favorables. Esto se hace con un ejemplo (extraer cartas de una baraja, ver Ilustración 69); en el que se usa para mostrar todos los casos posibles y no se calcula ninguna probabilidad. Inmediatamente después de este ejemplo, se pone otro ejemplo distinto (sacar dos bolas con reemplazamiento de una urna con bolas de color rojo y azul).

.) Consider an experiment involving the following two tasks.

1st task: A card is drawn from a box containing 4 cards, labelled A, B, C and D.

2nd task: A second card is drawn from the remaining 3 cards.

(b) Consider an experiment involving the following two tasks.

1st task: A bead is drawn at random from a box containing 5 red beads and 2 blue beads.

2nd task: A second bead is drawn at random from the box after the first bead drawn is replaced.

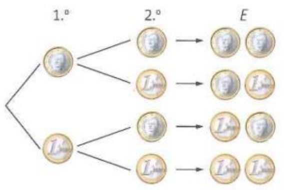
Ilustración 69.- Ejemplos con los que se empieza a introducir los diagramas de árbol (de ambos tipos) en Singapur. Pág. 156 y 157.

En **España** se introduce el diagrama de árbol de *tipo 1* únicamente, en 2º de ESO, con el objetivo de obtener el espacio muestral, con el siguiente ejemplo (ver Ilustración 70).

▸ El experimento "Lanzar una moneda dos veces" puede representarse utilizando un **diagrama de árbol** para contemplar todas las opciones posibles.

En cada lanzamiento puede salir cara o cruz.

De cada uno de los resultados del primer lanzamiento salen dos ramas, los resultados del segundo.

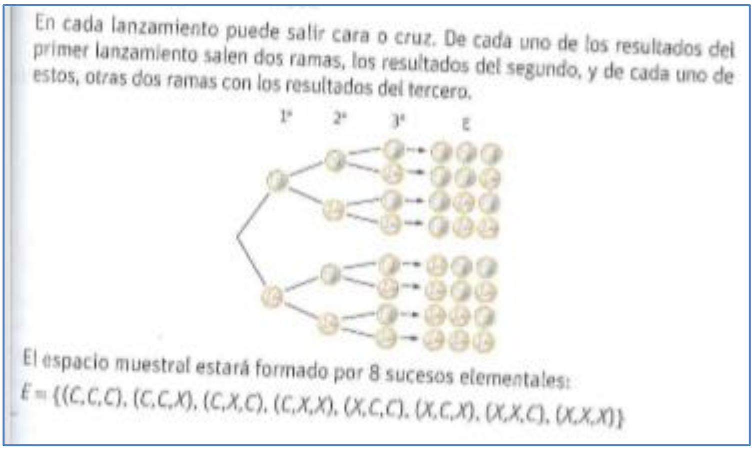


El espacio muestral estará formado por 4 sucesos elementales:

$E = \{CC, CX, XC, XX\}$

Ilustración 70.- Primer ejemplo en el que se introduce el diagrama de árbol (*de tipo 1*) en 2º ESO; pág. 269.

Tras esto, en 3º ESO aparece en el libro (pág. 299) el diagrama de árbol de forma casi idéntica a 2º, salvo que el experimento del ejemplo es de tres lanzamientos de moneda en lugar de dos (ver Ilustración 71).

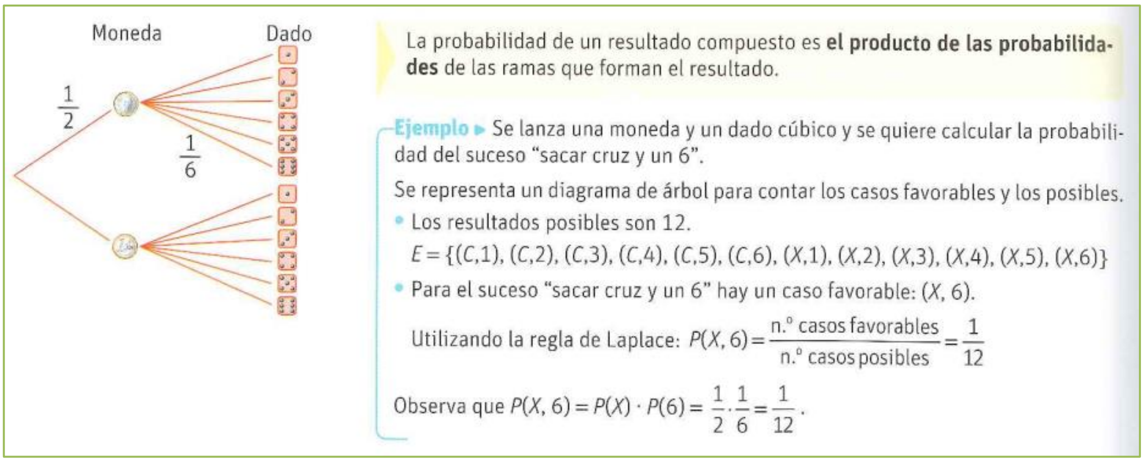


En cada lanzamiento puede salir cara o cruz. De cada uno de los resultados del primer lanzamiento salen dos ramas, los resultados del segundo, y de cada uno de estos, otras dos ramas con los resultados del tercero.

El espacio muestral estará formado por 8 sucesos elementales:
$E = \{(C,C,C), (C,C,X), (C,X,C), (C,X,X), (X,C,C), (X,C,X), (X,X,C), (X,X,X)\}$

Ilustración 71.- 3º ESO; España, página 299. Ejemplo casi idéntico al de 2º, utilizado para calcular el espacio muestral, diagrama de *tipo 1*.

Ya después, el diagrama de árbol aparece junto a la regla del producto, con dos ejemplos distintos (ver Ilustración 72). El ejemplo está formado por dos experimentos simples (lanzar moneda y lanzar dado), y en él el diagrama de árbol coincide en ser un diagrama de los dos tipos. En el segundo ejemplo el experimento compuesto consiste en sacar dos bolas de una urna, con y sin reemplazamiento, y en él el diagrama de árbol es de *tipo 2*.



La probabilidad de un resultado compuesto es **el producto de las probabilidades** de las ramas que forman el resultado.

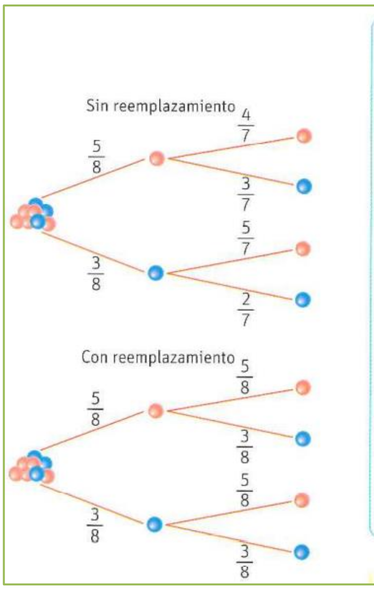
Ejemplo ▸ Se lanza una moneda y un dado cúbico y se quiere calcular la probabilidad del suceso "sacar cruz y un 6".

Se representa un diagrama de árbol para contar los casos favorables y los posibles.

- Los resultados posibles son 12.
  $E = \{(C,1), (C,2), (C,3), (C,4), (C,5), (C,6), (X,1), (X,2), (X,3), (X,4), (X,5), (X,6)\}$
- Para el suceso "sacar cruz y un 6" hay un caso favorable: $(X, 6)$.

  Utilizando la regla de Laplace: $P(X,6) = \frac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}} = \frac{1}{12}$

Observa que $P(X,6) = P(X) \cdot P(6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.



Sin reemplazamiento

Con reemplazamiento

Ejemplo ▸ De una urna que contiene 5 bolas rojas y 3 azules se extraen sin mirar dos bolas, una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean azules?

Hay dos maneras de realizar el experimento:

- **Sin devolver a la urna la primera bola extraída.**

  En este caso el resultado de la primera extracción condiciona el resultado de la segunda. En el diagrama de árbol podemos observar que si la primera bola es azul, en la urna quedarán 7 bolas de las cuales 2 son azules.

  Si A_1 = "sacar bola azul en la primera extracción" y A_2 = "sacar bola azul en la segunda", la probabilidad de sacar dos bolas azules es:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

- **Devolviendo la primera bola extraída.**

  Al volver a poner en la urna la bola extraída el resultado de la segunda extracción no depende del resultado de la primera. La probabilidad de A_2 no depende de que se verifique A_1:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

Ilustración 72.- Introducción del diagrama de árbol (los dos tipos) en 3º ESO; España, página 302, primer (arriba) y segundo (abajo) ejemplo respectivamente. En el segundo ejemplo el diagrama de árbol es de tipo 2; en el primer ejemplo coincide que el diagrama de árbol puede considerarse de ambos tipos.

Así pues, se puede ver que, al principio, **ambos países** muestran el primer tipo de diagrama de árbol *de tipo 1*, para calcular el espacio muestral (ver Ilustración 73).

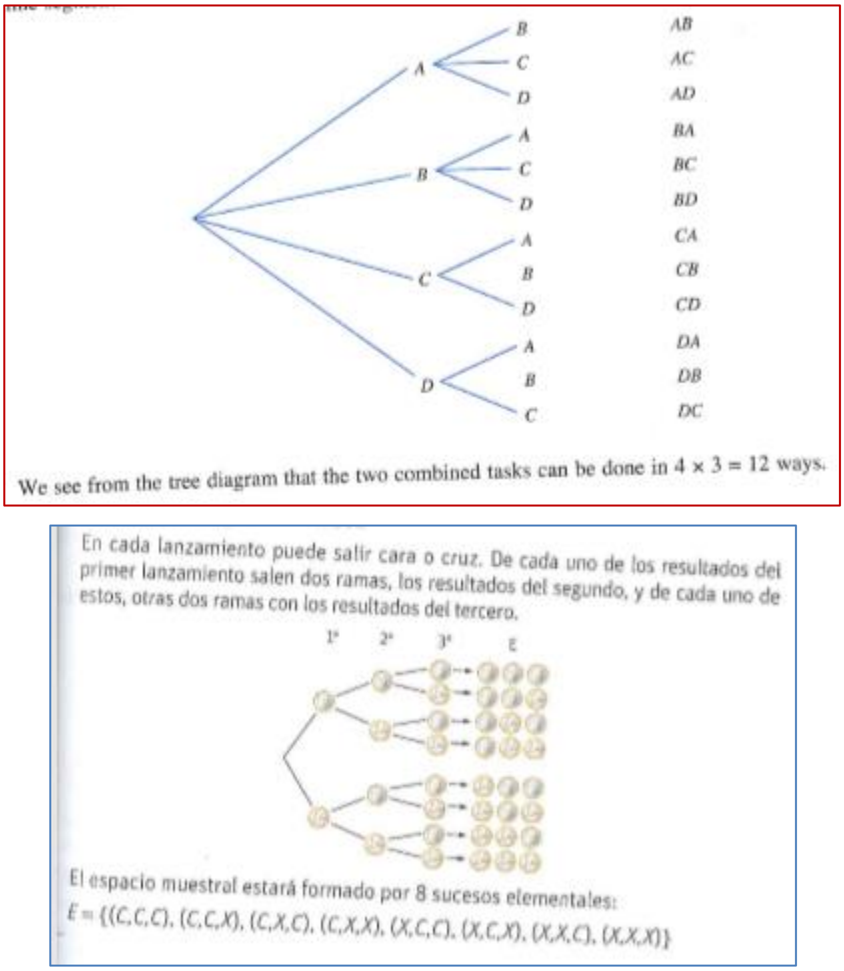


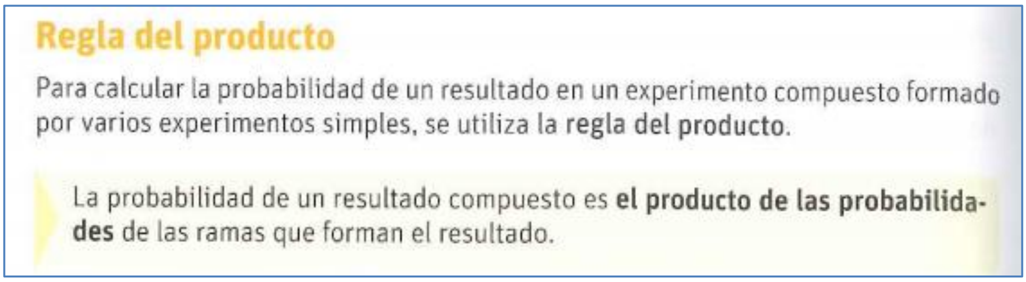
Ilustración 73.- Comparación. Tanto en Singapur (arriba) como en España (abajo; 3º ESO, pág. 299) se muestra el diagrama de árbol *de tipo* 1, con todos los resultados posibles, para calcular el espacio muestral.

En este punto ya ambos países difieren, **se va a analizar** cada uno **por separado** y finalmente se hace una **tabla** a modo de comparativa entre ambos. **Este análisis se lleva a cabo con las siguientes consideraciones**:

Se considera que es importante la **explicación de la regla del producto** y cómo esta se puede obtener a partir de la regla de Laplace, que es el conocimiento previo del alumnado. Esta explicación debería ser general, tanto para experimentos dependientes como independientes. Y esta explicación se puede apoyar en el uso del diagrama de árbol de *tipo 1*.

Se considera también que es importante la **explicación del diagrama de árbol** *de tipo 2*. Este es diferente al primero, y debería partirse igualmente del conocimiento previo del alumnado para explicarlo. Así, se considera una buena opción la introducción de diagrama *de tipo 2*, después de la utilización del diagrama de *tipo 1* en un mismo ejemplo; esto es, utilizar un ejemplo en el que se calcule primero con el primer tipo de diagrama y con Laplace una probabilidad que pida el enunciado, y después calcular eso mismo utilizando el segundo tipo de diagrama. El alumnado debe entender por qué este diagrama tiene probabilidades en sus ramas y qué son exactamente estas probabilidades, y ser consciente de las diferencias con el primero, viendo que este segundo no muestra todos los resultados posibles (espacio muestral) y conociendo el porqué de su utilización.

En el caso de España se empieza desde el primer momento, y antes del enunciado del primer ejemplo, entregando al alumnado el enunciado de la regla del producto (ver Ilustración 74).



Regla del producto

Para calcular la probabilidad de un resultado en un experimento compuesto formado por varios experimentos simples, se utiliza la **regla del producto**.

La probabilidad de un resultado compuesto es **el producto de las probabilidades** de las ramas que forman el resultado.

Ilustración 74.- En España se da la Regla del producto desde un inicio. Página 302, libro 3º ESO.

El primero de los dos ejemplos (ver Ilustración 72, arriba) muestra cómo mediante Laplace y mediante la regla del producto (entregada al alumnado) se llega a un mismo resultado: Sin embargo, se pueden encontrar varios problemas. El primero es que el ejemplo es de tal modo que su diagrama de árbol es a la vez de *tipo 1* y de *tipo 2* (dado que una moneda tiene dos caras diferentes y cada cara de un dado tiene un número diferente, a diferencia de una urna con bolas de colores, en la que se repiten los colores); así el alumnado no los diferencia entre los dos tipos de diagrama de árbol y puede confundirse en el futuro (ver Ilustración 75).

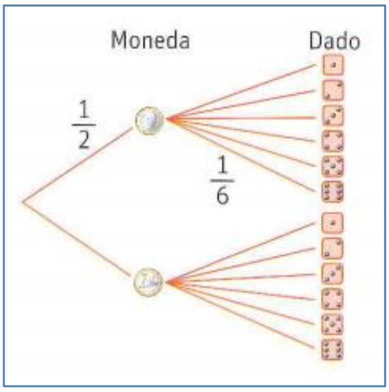


Ilustración 75.- Primer ejemplo. El diagrama de árbol tiene probabilidades en sus ramas, pero a su vez desglosa todos los resultados posibles con sus ramas. Por tanto, en este diagrama coinciden ambos tipos. Pág. 302.

El segundo problema es que, aunque se muestra cómo mediante Laplace y mediante la regla del producto (entregada al alumnado) se llega a un mismo resultado, esto se hace sin una explicación, solo utilizando ambas fórmulas, una al lado de la otra, y el resultado de cada una (ver Ilustración 76).

- Para el suceso "sacar cruz y un 6" hay un caso favorable: $(X, 6)$.

  Utilizando la regla de Laplace: $P(X, 6) = \dfrac{\text{n.° casos favorables}}{\text{n.° casos posibles}} = \dfrac{1}{12}$

Observa que $P(X, 6) = P(X) \cdot P(6) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$.

Ilustración 76.- Primer ejemplo. Resolución del ejemplo; se muestra cómo ambos resultados coinciden, utilizando cada regla por separado. No se da más explicación que esa. Pág. 302.

El tercer problema es se da el segundo tipo de diagrama de árbol directamente, sin una explicación o contexto previo, sin dar un porqué o explicar qué son exactamente esas probabilidades que aparecen en cada rama. Y tampoco se relaciona con el diagrama de *tipo 1*, que es el que el alumnado ya conoce, y del cual conoce su sentido (ver Ilustración 77).

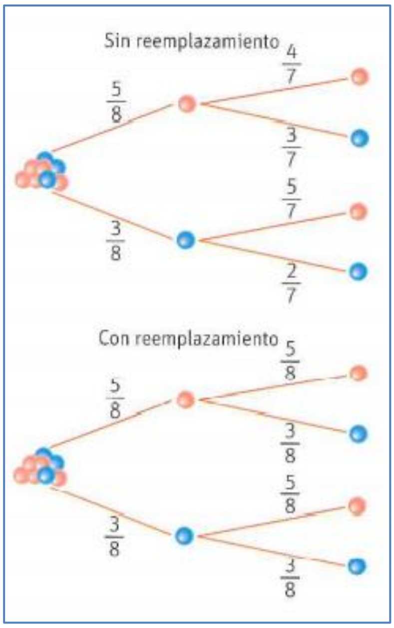
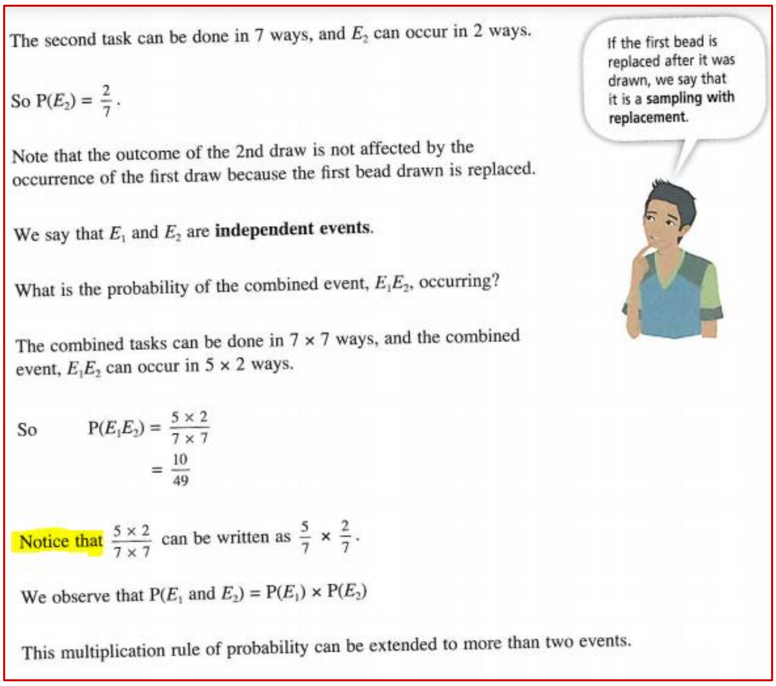


Ilustración 77.- Segundo ejemplo. El diagrama se pone directamente y en un ejemplo muy distinto al anterior, en el que no se utiliza el diagrama de árbol de *tipo 1*. Pág. 302.

Otro problema es que no se explica la relación entre la regla del producto y la regla de Laplace para el caso de experimentos dependientes (solo se usa la fórmula), pero este aspecto y el ya mencionado de explicar las probabilidades de cada rama se abordan en el siguiente capítulo de este trabajo.

En el caso de **Singapur**, sí se explica con Laplace (conocimiento previo del alumno) como se llega a la regla del producto (nuevo conocimiento), y no se entrega la fórmula, se puede ver en el segundo ejemplo de singapur (ver enunciado en Ilustración 69, y la resolución en Ilustración 78):



The second task can be done in 7 ways, and E_2 can occur in 2 ways.

So $P(E_2) = \frac{2}{7}$.

Note that the outcome of the 2nd draw is not affected by the occurrence of the first draw because the first bead drawn is replaced.

We say that E_1 and E_2 are **independent events**.

What is the probability of the combined event, E_1E_2, occurring?

The combined tasks can be done in 7×7 ways, and the combined event, E_1E_2 can occur in 5×2 ways.

So $$P(E_1E_2) = \frac{5 \times 2}{7 \times 7} = \frac{10}{49}$$

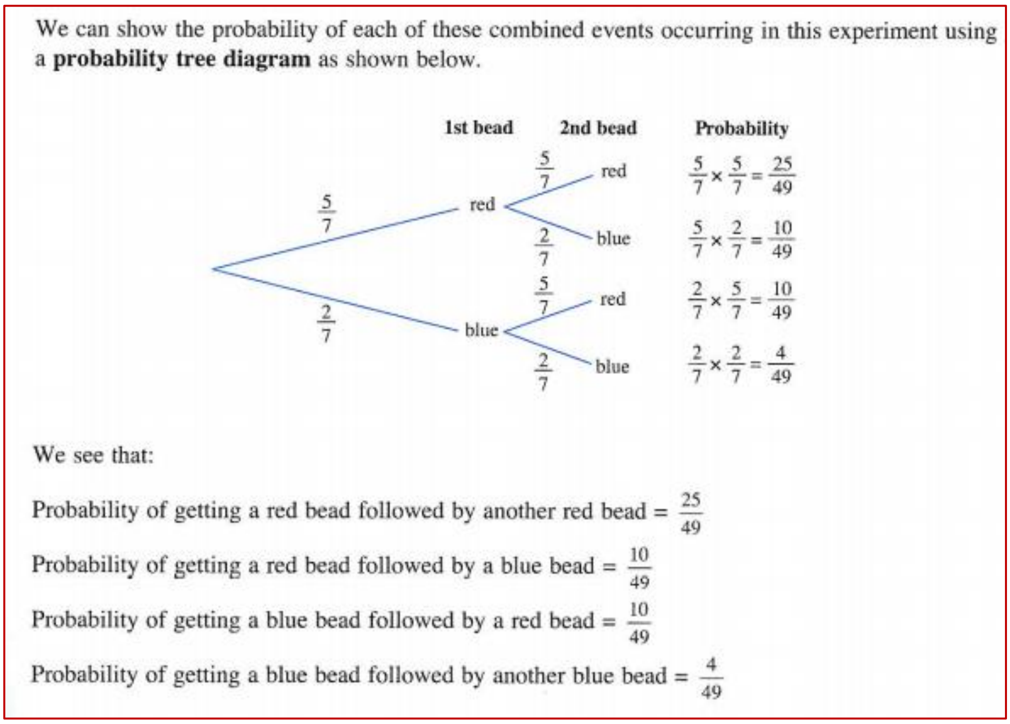
Notice that $\frac{5 \times 2}{7 \times 7}$ can be written as $\frac{5}{7} \times \frac{2}{7}$.

We observe that $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

This multiplication rule of probability can be extended to more than two events.

Ilustración 78.- Segundo ejemplo (una parte del mismo) de Singapur. Se ve cómo se llega a la regla del producto para el caso de experimentos independientes, y cómo se ha llegado a través de Laplace (conocimiento previo). Pág. 158.

Sin embargo, hay que hacer notar que en este ejemplo no se dibuja el diagrama de *tipo 1* correspondiente, lo cual facilitaría la visualización y comprensión por parte del alumnado. Así, los dos tipos de diagramas quedan sin ser relacionados del todo, pero sí se explica, coloquialmente, las probabilidades de cada rama del diagrama (ver Ilustración 79).


We can show the probability of each of these combined events occurring in this experiment using a **probability tree diagram** as shown below.

We see that:

Probability of getting a red bead followed by another red bead = $\frac{25}{49}$

Probability of getting a red bead followed by a blue bead = $\frac{10}{49}$

Probability of getting a blue bead followed by a red bead = $\frac{10}{49}$

Probability of getting a blue bead followed by another blue bead = $\frac{4}{49}$

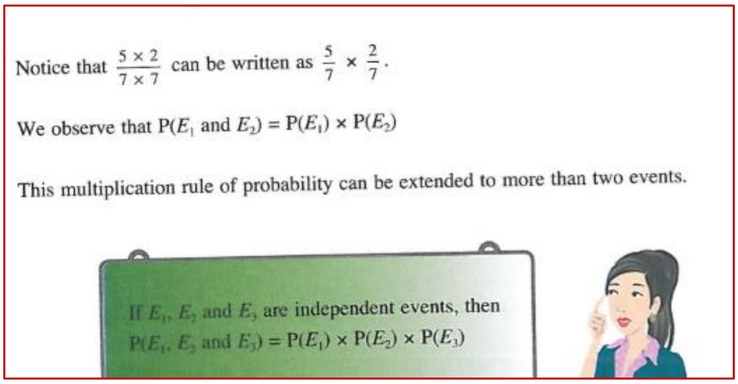
Ilustración 79.- Parte del segundo ejemplo de Singapur. Las probabilidades escritas en cada rama se explican abajo. Pág. 159.

En la siguiente tabla puede verse un resumen de lo analizado, y una comparativa por tanto de ambos países, respecto a los diagramas de árbol:

<u>Aspecto</u>	<u>España</u>	<u>Singapur</u>
Mostrar que la regla del producto se puede obtener utilizando Laplace.	Sí se hace en parte, pero solo para experimentos independientes y utilizando el diagrama de árbol tipo 1. La explicación es sumamente laxa y puede pasar desapercibida.	Sí se hace, pero solo para experimentos independientes y utilizando el diagrama de árbol tipo 1. Se explica bien cómo se obtiene.
Mostrar el diagrama *tipo 2* junto al de *tipo* 1, en un mismo ejemplo, mostrando su relación.	No. Sí se usa un ejemplo en que ambos tipos de diagramas coinciden, pero esto no se considera positivo.	Sí y no. Sí se hace, pero sin dibujar el diagrama de tipo 1 (lo cual lo hace mucho menos visual).

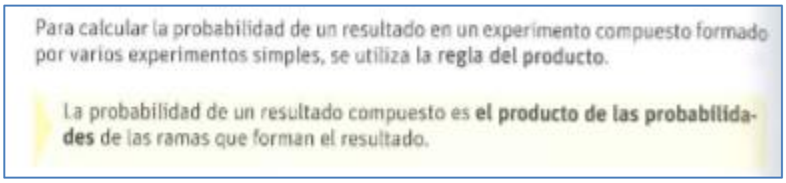
Regla del producto. Entregar la fórmula o llegar a ella (ver Ilustración 81).	Se entrega la fórmula lo primero de todo.	No se entrega, se llega a ella, lo que puede facilitar su comprensión.
Otros problemas.	El ejemplo utilizado (lanzar moneda y lanzar dado después) hace que ambos tipos de diagrama de árbol coincidan. Así el alumnado los distinguirá peor. (ya mencionado)	---

Ilustración 80.- Tabla resumen. Comparación. Los diferentes aspectos y cómo es en cada país, en lo relativo a los diagramas de árbol y su explicación.


Notice that $\frac{5 \times 2}{7 \times 7}$ can be written as $\frac{5}{7} \times \frac{2}{7}$.

We observe that P(E_1 and E_2) = P(E_1) × P(E_2)

This multiplication rule of probability can be extended to more than two events.


Para calcular la probabilidad de un resultado en un experimento compuesto formado por varios experimentos simples, se utiliza la **regla del producto**.

La probabilidad de un resultado compuesto es **el producto de las probabilidades** de las ramas que forman el resultado.

Ilustración 81.- Comparativa. En España (abajo) se da desde el principio la regla del producto. En Singapur (arriba) se llega a la regla del producto a través de un ejemplo.
Hay que resaltar que en ambos es la regla del producto de experimentos independientes, pues no explican la expresión general para experimentos dependientes (con la probabilidad condicionada).

En conclusión, se considera que **en Singapur** el alumnado podrá ver con **mayor facilidad** de donde sale la regla del producto (y por tanto entenderla y aprenderla mejor), y a su vez el diagrama de árbol de probabilidades, **que en España**. Sin embargo, se considera que en ambos países hay aspectos que se podrían mejorar (en Singapur también, por ejemplo, el diagrama de árbol de tipo 1 en el segundo ejemplo, y mostrar el cálculo de probabilidades del mismo modo también en el caso de “con reemplazamiento”).

9.2.4. Regla del producto

Además de lo ya mencionado sobre la regla del producto, se pasa a hablar sobre cómo esta se define y se muestra en ambos países. La regla del producto es diferente si los experimentos son dependientes o independientes.

En España (en el libro de 4ºESO) se dice que “La probabilidad de un suceso de un experimento compuesto es el producto de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman”, cuando esto en realidad, como poco, **puede llevar a error al alumno**. Se debe explicar la regla del producto para experimentos dependientes, o para los dos casos (experimentos dependientes e independientes). Lo que **no se debe** hacer y se hace en este libro, es **mostrar al alumnado la regla del producto para el caso de experimentos independientes** (ver Ilustración 82, arriba) **y no aclarar que esa fórmula** que se está dando al alumno **solo es así cuando los experimentos son independientes** (ver Ilustración 82, abajo).

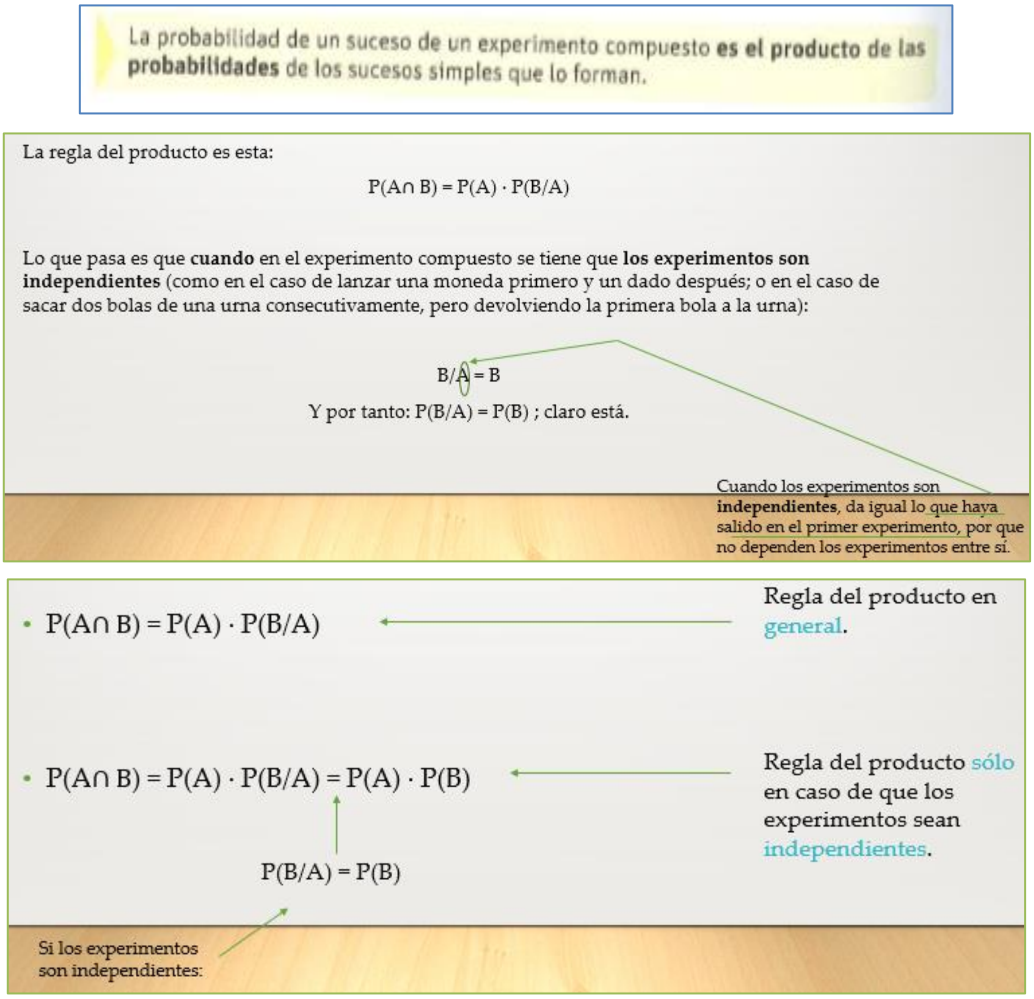


Ilustración 82.- En la imagen de arriba se muestra cómo se habla de la regla del producto en el libro de 4ºESO, donde no se explica la regla del producto para caso los dos casos posibles (experimentos dependientes o independientes). En medio y abajo, las imagenes muestran la regla del producto para cada tipo de experimento (dependiente o independiente).

Es cierto que en el libro de 3ºESO, al hablar de la regla del producto, lo hace distinto y de una forma menos confusa, pues dice que “La probabilidad de un resultado compuesto es el producto de las probabilidades de las ramas que forman el resultado”. Pero igualmente existe el problema de que en el ejemplo en el que esto se dice y se explica (ver Ilustración 72, arriba), las probabilidades de las ramas de la derecha del diagrama de árbol coinciden en ser a la vez la probabilidad condicionada y la probabilidad de ese suceso en el segundo experimento (es decir, P(B/A) = P(B), lo dicho ya, como en la ilustración anterior, Ilustración 82, se puede ver).

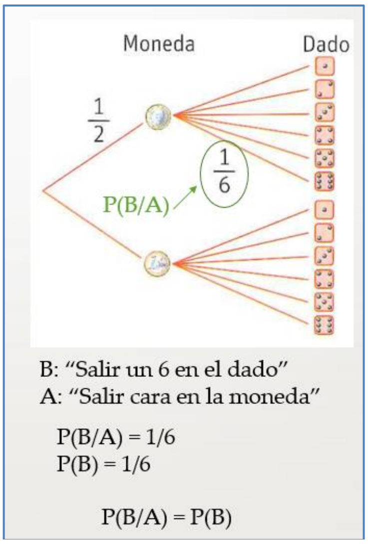


Ilustración 83.- Diagrama de árbol del primer ejemplo, 3º ESO; pág. 302. La probabilidad condicionada coincide con la probabilidad del suceso B.

Por lo que, más adelante, cuando **el alumnado** enfrente un problema de experimentos dependientes, **puede creer erróneamente que P(A∩ B) = P(A) · P(B).** Dada esa definición para la regla del producto, **debería decirse qué probabilidad se pone en esas ramas de la derecha del diagrama de árbol** (cuando los experimentos son dependientes la probabilidad condicionada; cuando los experimentos son independientes la probabilidad condicionada también, solo que no está condicionada y por eso es igual a la probabilidad de ese segundo suceso; ver Ilustración 84).

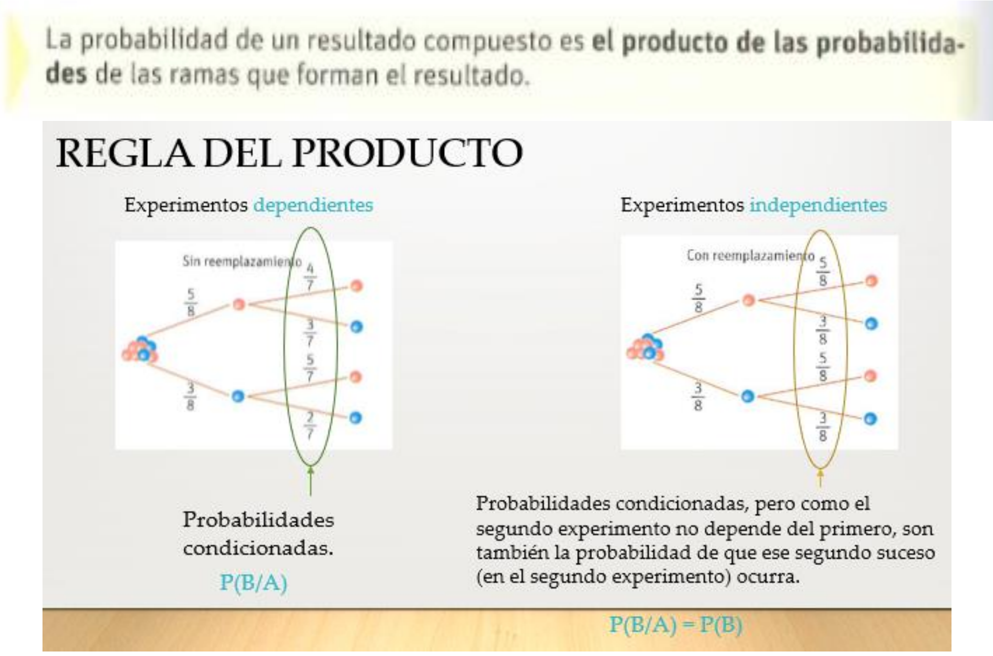


Ilustración 84.- Arriba: La regla del producto en el libro de 3º ESO. Aunque la define diferente y de forma menos confusa quizá para el alumnado, igualmente conlleva a error, supone el mismo problema que se ve en el libro de 4ºESO. Abajo: una posible indicación de esto que se ha dicho, para que el alumnado sea consciente.

En **Singapur**, cuando se obtiene la regla del producto se hace para el caso de experimentos independientes, y así se indica en la fórmula del libro (aunque no se resalta mucho, remarcar la palabra "independientes" en negrita podría ayudar a que este detalle importante no pase desapercibido). Sin embargo, **para experimentos dependientes no se obtiene la regla del producto** y sin embargo **se usa como si fuera igual** que para el caso de independientes, al igual que en España (ver Ilustración 85).

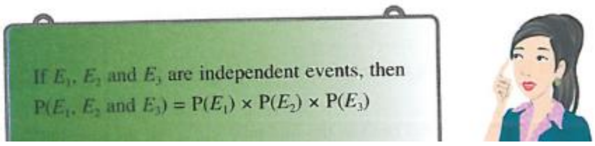


Ilustración 85.- En Singapur sí se especifica que la fórmula que se muestra es para el caso de experimentos independientes. Sin embargo, al igual que en España, fallan en que pueden hacer pensar al alumnado que esta misma fórmula es la que corresponde para el caso de experimentos dependientes (y no es así pues aparecería ahí la probabilidad condicionada). En el libro Singapur no se da nombre a esta propiedad.

En el caso de ambos países, **se considera**, en el presente trabajo, **que se debería introducir aquí la probabilidad condicionada**, pues, aunque no se quiera mencionar, ésta aparece (de forma implícita) en el ejemplo que utilizan para mostrar la regla del producto (y en la misma regla del producto en sí). Además, eso ayudaría a que el alumnado no tuviera una dificultad mayor al ver, más adelante, el teorema de la probabilidad total (ver Ilustración 86).

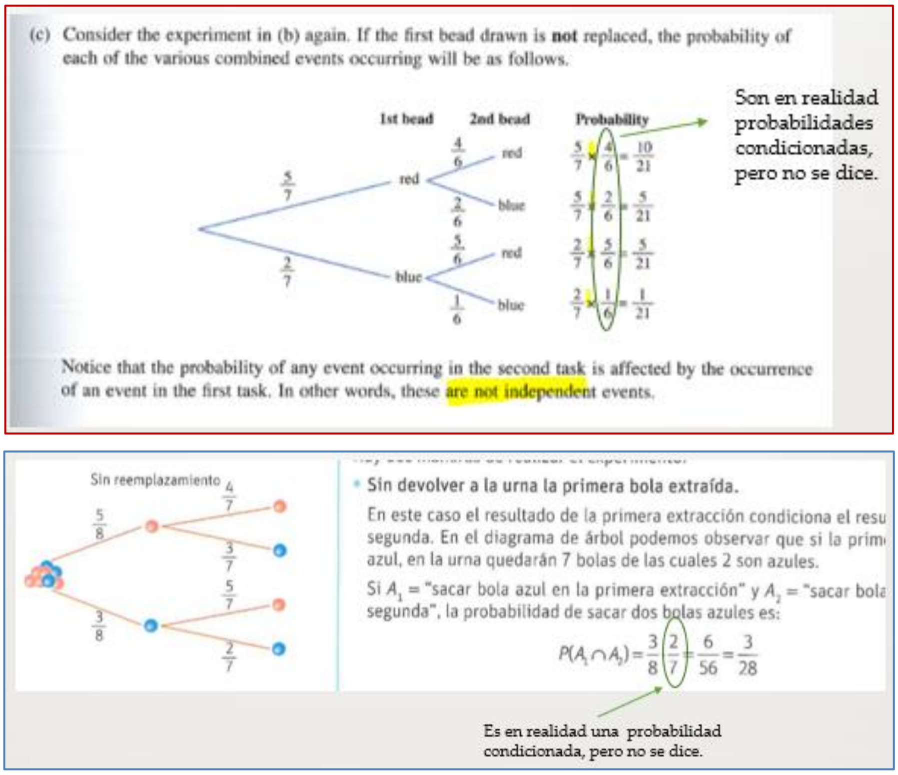
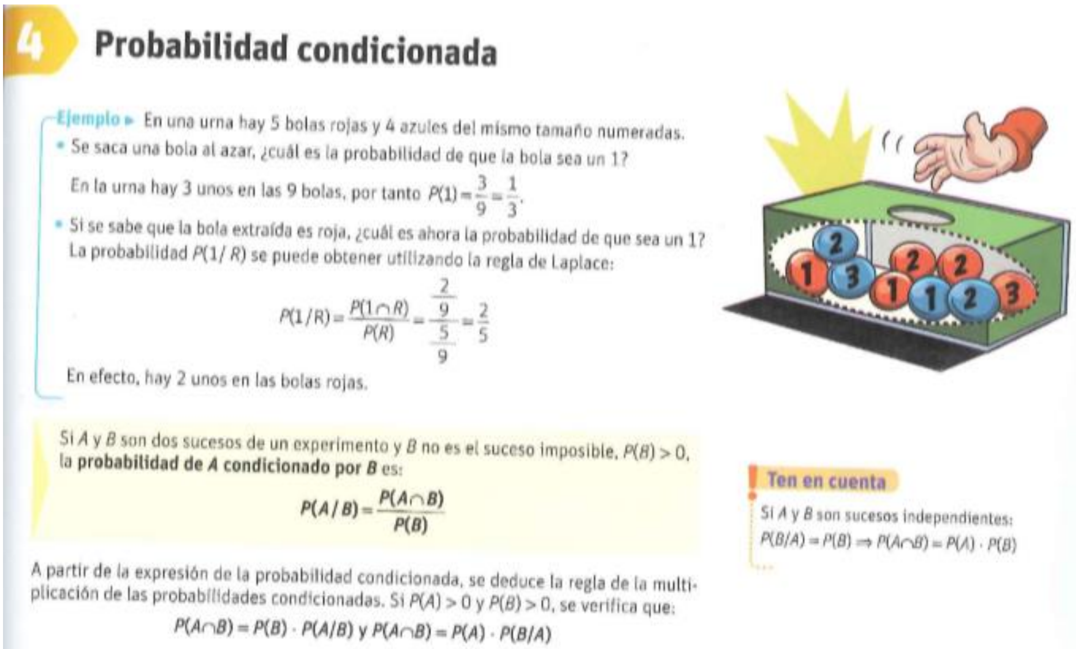


Ilustración 86.- En ambos casos (Singapur, España) no se dice que se está tratando con una probabilidad condicionada cuando se está haciendo (ejemplos exp. dependientes).

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Se considera entonces, en este trabajo, que la introducción de la probabilidad condicionada debería ser más temprana, a la vez que se ve la regla del producto. A continuación, se crítica (mencionando lo positivo y lo negativo) cómo se introduce la probabilidad condicionada en el caso de España; y se añade una sugerencia de una forma alternativa de hacerlo (esto último sería extensible al caso de Singapur).

En el libro de SM de 4º ESO, en la página 277, se muestra la **probabilidad condicionada** (ver Ilustración 87). Se utiliza para ello un experimento que consiste en sacar (al azar) una única bola de una caja, pero al tener las bolas dos características (color y número) existe la probabilidad condicionada. Se puede ver positivo el uso de este ejemplo para su propósito, debido a que en él se puede sacar fácilmente y a simple vista, con Laplace, tanto la probabilidad condicionada como el numerador y el denominador del cociente.



4 Probabilidad condicionada

Ejemplo ▸ En una urna hay 5 bolas rojas y 4 azules del mismo tamaño numeradas.

- Se saca una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea un 1?

  En la urna hay 3 unos en las 9 bolas, por tanto $P(1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

- Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿cuál es ahora la probabilidad de que sea un 1? La probabilidad $P(1/R)$ se puede obtener utilizando la regla de Laplace:

$$P(1/R) = \frac{P(1 \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$$

En efecto, hay 2 unos en las bolas rojas.

Si A y B son dos sucesos de un experimento y B no es el suceso imposible, $P(B) > 0$, la **probabilidad de A condicionado por B** es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A partir de la expresión de la probabilidad condicionada, se deduce la regla de la multiplicación de las probabilidades condicionadas. Si $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, se verifica que:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \text{ y } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Ten en cuenta

Si A y B son sucesos independientes:
$P(B/A) = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ilustración 87.- El ejemplo de 4ºESO (pág. 277) para mostrar el cumplimiento de la fórmula de la probabilidad condicionada, es interesante por la facilidad de cálculo de los tres términos de la fórmula, pero el ejemplo es a su vez inadecuado para introducir por primera vez esa expresión.

En cambio, de haberse utilizado un experimento compuesto dependiente, no sería tan fácil para el alumno ver que la igualdad que aparece en la ilustración anterior (Ilustración 87) es cierta: por ejemplo, el experimento compuesto de sacar dos cartas, sacar la segunda carta un as habiendo sido un as la primera carta extraída; en este caso el numerador, $P(A_2 \cap A_1)$, sería menos intuitivo de calcular.

Sin embargo, el hecho de **usar un ejemplo distinto a los anteriores se ve como un perjuicio** para el aprendizaje del alumno. Esto es así debido a que trata el concepto que se quiere mostrar, la probabilidad condicionada, **como si fuera algo nuevo y ajeno a lo que ya se ha visto**, cuando no lo es. Esta probabilidad estaba ya presente en el ejemplo con el que se explica la diferencia entre experimentos dependientes e independientes en 3ºESO (ver Ilustración 72) en el que se utiliza la regla del producto (se explica por primera vez en esa misma página, la regla del producto). De modo que lo que debería hacerse es lo siguiente: mostrar la regla del producto en ese ejemplo de 3ºESO utilizando la probabilidad condicionada (ver Ilustración 88), y poniendo su expresión general (es decir, para el caso de experimentos dependientes); pues de esta misma expresión, sin más que mover un término de un lado de la ecuación al otro, es de donde procede la fórmula de la probabilidad condicionada, y esto los alumnos lo deberían ver así (ver Ilustración 89).

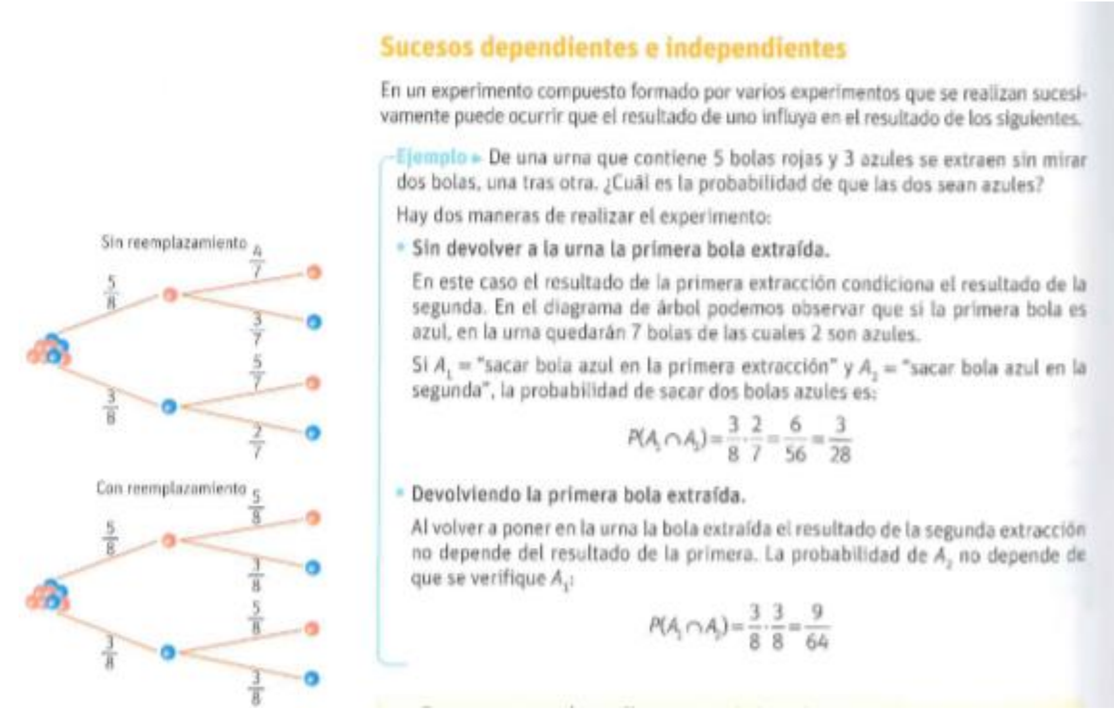


Ilustración 88.- Ejemplo de 3ºESO (pág. 302) en el que debería aparecer la probabilidad condicionada, y la expresión general de la regla del producto (es decir, la expresión para el caso de experimentos dependientes).

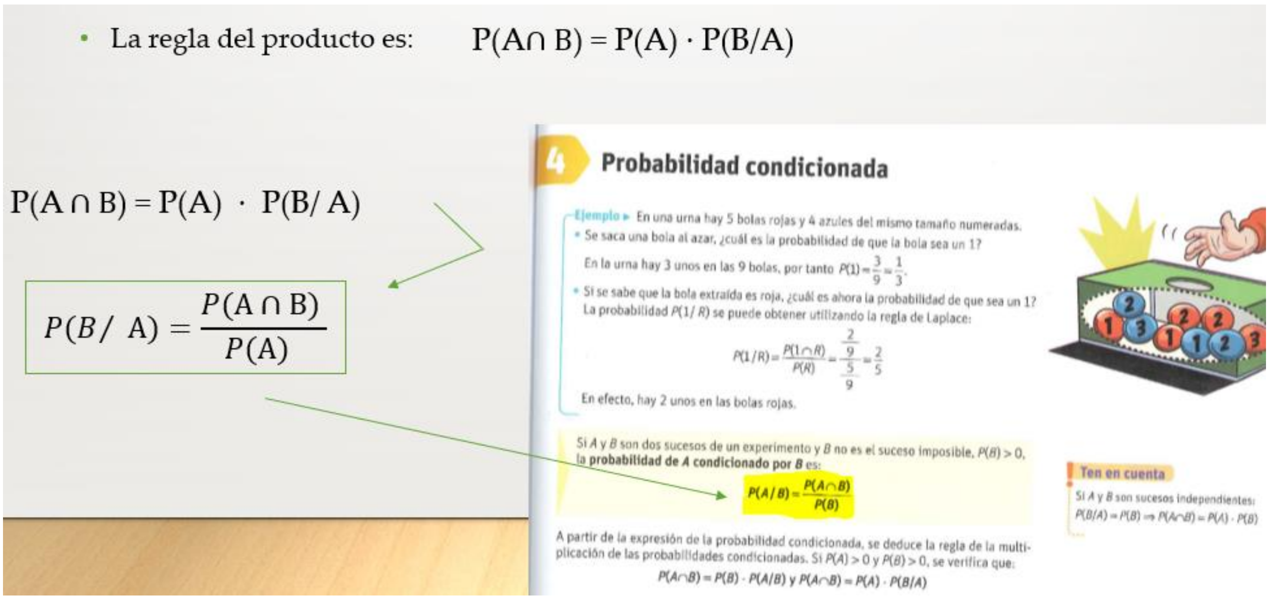


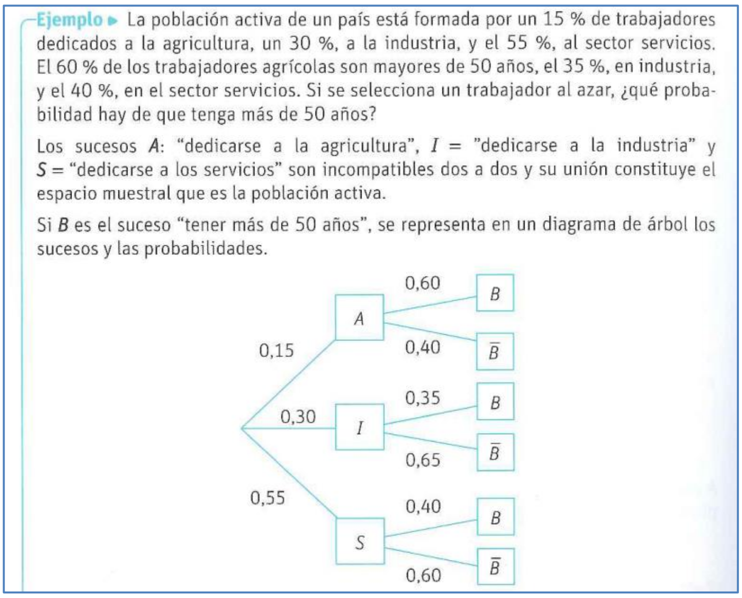
Ilustración 89.- La fórmula de la probabilidad condicionada se extrae, moviendo un término de la ecuación al otro lado, de la regla del producto genérica (para experimentos no independientes). En el libro de 4º no se explica esto.

Además de esto, otro aspecto criticable a **esta forma de introducir la probabilidad condicionada** es que **no le da un sentido** al hacerlo. Es decir, para que un concepto quede fijado en la mente del alumnado, este debe tener un sentido; este sentido puede ser, por ejemplo, la necesidad de conocer una fórmula que permita calcular algo que se está buscando calcular, y en el libro se introduce una fórmula que el alumno no necesita en ese ejercicio, pues puede calcular la probabilidad condicionada sin utilizarla. Así pues, y, **en conclusión**, el **ejemplo** utilizado para introducir la probabilidad condicionada **puede ser bueno para** que el alumnado pueda ver y **comprobar con facilidad el cumplimiento de la fórmula** de la probabilidad condicionada, **pero no para introducirla por primera vez**.

9.2.5. Teorema de la probabilidad total

Ya se ha mencionado que **el teorema de la probabilidad total no aparece en la ESO en el currículo de España**. Sin embargo, dado el hecho de que en el libro de texto de referencia para este trabajo sí que aparece (a pesar de que en la mayoría de libros no aparezca), y que en Singapur encontramos el teorema de la probabilidad total (aunque sin formalizar) en el libro de 4º curso, se aprovecha en este trabajo para **realizar una crítica constructiva** y **sugerir una alternativa** a la forma en la que se podría transmitir al alumnado este concepto.
Tras analizar este concepto en los libros de texto de referencia de ambos países, se ha visto que éste aparece, en ambos casos, de un modo que en el presente trabajo se considera poco adecuado, aunque **por razones distintas que se pasan a explicar a continuación**.

En el caso del libro, de la editorial SM, de **España**, el **primer problema** es **el ejemplo** (ver Ilustración 90) que se utiliza para introducir y explicar al alumnado qué y cómo es el teorema de la probabilidad total.


Ejemplo ▸ La población activa de un país está formada por un 15 % de trabajadores dedicados a la agricultura, un 30 %, a la industria, y el 55 %, al sector servicios. El 60 % de los trabajadores agrícolas son mayores de 50 años, el 35 %, en industria, y el 40 %, en el sector servicios. Si se selecciona un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 50 años?

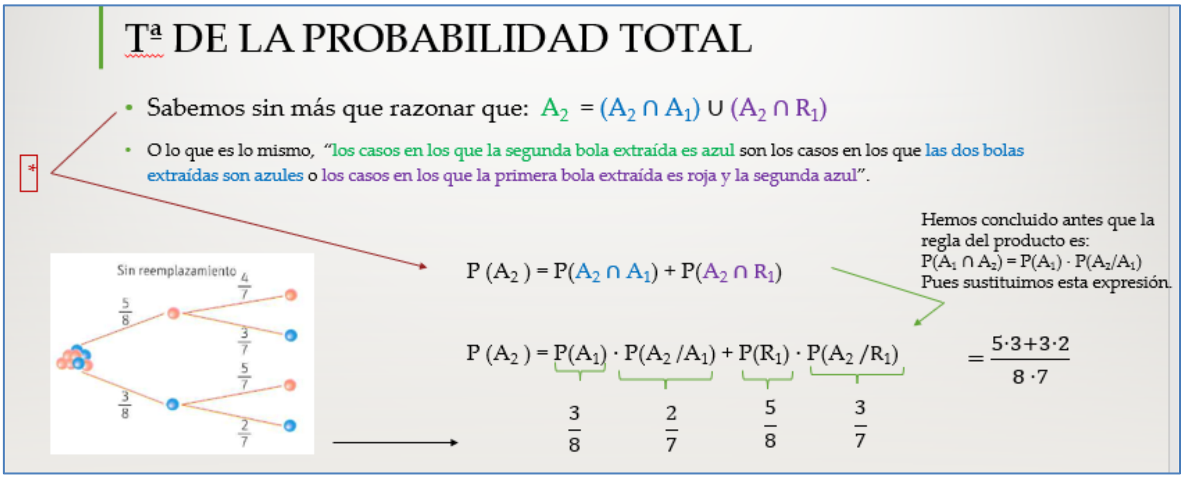
Los sucesos A: "dedicarse a la agricultura", I = "dedicarse a la industria" y S = "dedicarse a los servicios" son incompatibles dos a dos y su unión constituye el espacio muestral que es la población activa.

Si B es el suceso "tener más de 50 años", se representa en un diagrama de árbol los sucesos y las probabilidades.

Ilustración 90.- Ejemplo utilizado para introducir el teorema de la probabilidad; página 278, libro 4º ESO editorial SM. Se utilizan las proporciones, en lugar de objetos o personas, por primera vez para el alumnado, en el tema de probabilidad del libro.

Este problema es tal debido a que el ejemplo utilizado es el primer ejemplo en el que no se utilizan objetos o personas que se puedan contar, sino que en su lugar se utilizan proporciones de personas con cierta característica común, en una población. **Tampoco se ha trabajado la probabilidad como porcentaje** (en Singapur por ejemplo, sí la muestran desde el principio como número con decimales o fracción del 0 al 1, y como porcentaje del 0 al 100). **Esto supone al alumnado un cambio fuerte**, que se suma al hecho de la introducción de un nuevo concepto, y puede dificultar la adquisición y correcta comprensión del alumnado de ese nuevo concepto (el teorema).

Se considera más adecuado, por otra parte, **mostrar el teorema de la probabilidad total como la suma de las probabilidades de la intersección de sucesos**, pues la fórmula que se muestra se obtiene al fin y al cabo de ahí, sin más que usar la regla del producto en cada sumando (y el alumnado ya conoce **la regla del producto**). Se muestra esto en la siguiente ilustración (ver Ilustración 91).



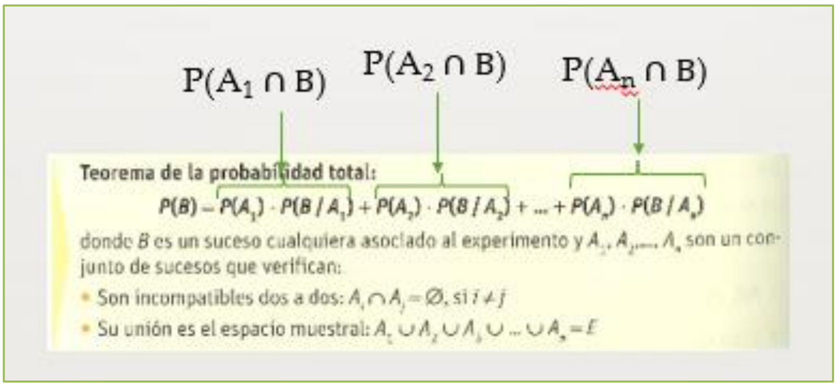


Ilustración 91.- Arriba, se muestra como lo primero que se ve (por razonamiento) es que la probabilidad de un suceso del segundo experimento (salir la 2º bola azul, en este caso concreto) es igual a la la suma de las probabilidades de la intersección de sucesos; luego se puede desarrollar aplicando la regla del producto. Debido a que esto es así, en la imagen de abajo se señala como se considera que debería aparecer el teorema en lugar de como aparece.

Además, **podría mostrarse** en el mismo ejemplo **como la suma de probabilidades da uno** (esto se dice, pero fuera del ejemplo y con palabras y lenguaje matemático que no llegará del mismo modo al alumnado).

En el caso de **Singapur**, el ejemplo que se utiliza (ver Ilustración 92) no supone un problema para la compresión del teorema como en España, pues es un ejemplo que sí introduce un cambio con los ejemplos y problemas vistos hasta el momento (este problema no es por ejemplo coger dos bolas de una urna, sino que si lo comparamos con esto, es como si hubiera, no una, sino tres urnas, y las tres con bolas de dos tipos), pero no es un cambio tan grande como en el caso del de España. El cambio que supone es simplemente que en las probabilidades de las ramas de la derecha en el diagrama de árbol, en lugar de tener todas el mismo denominador, podrán tener denominadores diferentes.

EXAMPLE 6

Three book shelves are placed inside a room. There are 5 books on shelf *A*, of which 2 are mathematics books; 7 books on shelf *B*, of which 3 are mathematics books; and 5 books on shelf *C*, of which 1 is a mathematics book. If a person enters the room and picks one book at random from one of the shelves, find the probability that the book picked will be a mathematics book, assuming that any of the 3 shelves are equally likely to be selected.

Ilustración 92.- Primer ejemplo en el que aparece la probabilidad total en Singapur; 4º curso, pág. 165.

El problema es que en este primer ejemplo que se ve el Tª de la probabilidad total en Singapur, **se utiliza una notación confusa y que no se explica**: se llama P(A) a P("que el libro sea de la estantería A **y** que sea de matemáticas"), sin indicar esto en ningún lugar.

Sin embargo, en la Ilustración 93 **el libro no comete este error**. Cabe aquí destacar **otra de las virtudes de Singapur**, y es el hecho de **poner varias alternativas** (hasta tres alternativas en algún caso) de resolución en los apartados de algunos ejemplos, lo cual puede ayudar a la compresión del contenido que se está trabajando (ver Ilustración 94).

(AMPLE 7

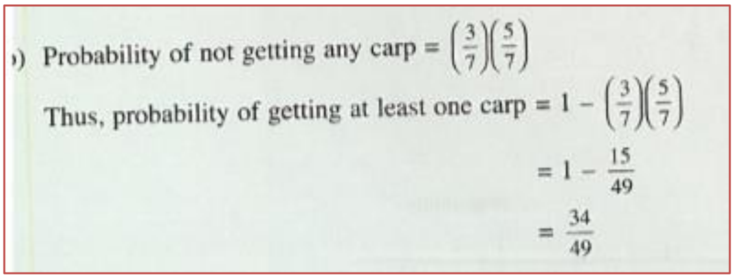
re are 4 carps and 3 grass fish in Pond *A* and 2 carps and 5 grass fish
ond *B*. Assuming each grass fish or carp has an equal chance to be
ked, find the probability, if one from each pond is hooked, that

both are carps,

at least one is a carp.

Ilustración 93.- Segundo ejemplo en el que aparece la probabilidad total en Singapur. 4º curso, pág. 166.

Se propone, en cualquier caso, en este trabajo, **la introducción de otra alternativa**, introduciendo el diagrama de árbol de *tipo 1* (el que muestra todo el espacio muestral, sin probabilidades en sus ramas); de este modo el alumnado verá también de donde sale ese (ver Ilustración 94, en el centro) 4·2, ese 4·5, y ese 3·2, de los casos favorables, y el 7·7 de los posibles (además de hacerlo porque la regla del producto te dice que es así).

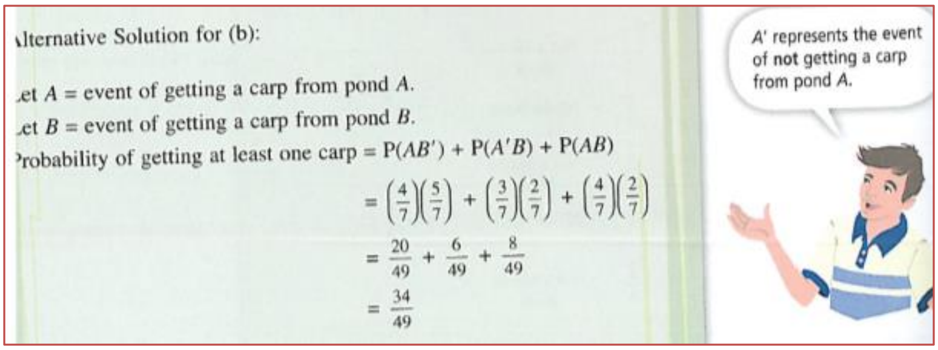


)) Probability of not getting any carp $= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{5}{7}\right)$

Thus, probability of getting at least one carp $= 1 - \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{5}{7}\right)$

$$= 1 - \frac{15}{49}$$

$$= \frac{34}{49}$$



lternative Solution for (b):

et A = event of getting a carp from pond A.

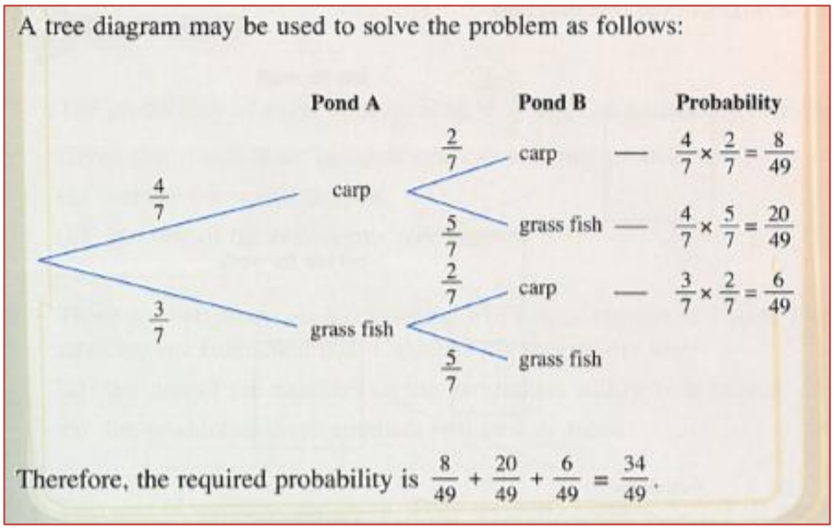
et B = event of getting a carp from pond B.

robability of getting at least one carp $= P(AB') + P(A'B) + P(AB)$

$$= \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{7}\right) + \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$= \frac{20}{49} + \frac{6}{49} + \frac{8}{49}$$

$$= \frac{34}{49}$$

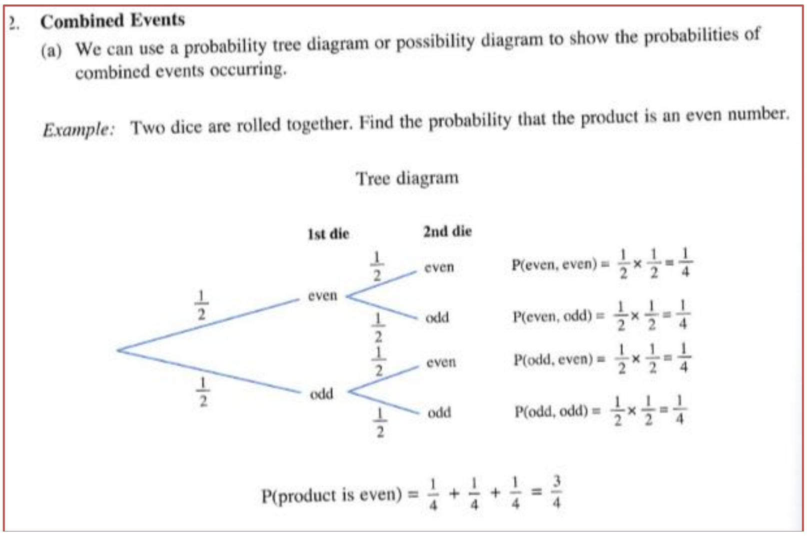


A tree diagram may be used to solve the problem as follows:

Therefore, the required probability is $\frac{8}{49} + \frac{20}{49} + \frac{6}{49} = \frac{34}{49}$.

Ilustración 94.- En Singapur algunos ejemplos muestran varias alternativas de resolución. En la ilustración, tres alternativas para el apartado de un ejemplo que muestra el teorema de la probabilidad total. Esto es beneficioso para el aprendizaje pues se completa la información que se da al alumnado. Aparte, se considera que la columna de la derecha del diagrama de árbol con la cabecera "Probability" ayuda de forma visual.

Aunque en el libro de 4º de Singapur no se llega a mencionar o dar nombre al teorema de la probabilidad total, podemos considerar que, en parte, se formaliza al final, en el apartado o capítulo "Chapter Review" (ver Ilustración 95).


2. **Combined Events**

(a) We can use a probability tree diagram or possibility diagram to show the probabilities of combined events occurring.

Example: Two dice are rolled together. Find the probability that the product is an even number.

Tree diagram

P(product is even) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Ilustración 95.- Formalización parcial del teorema de la probabilidad total en Singapur (4º curso). No se muestra una fórmula o expresión genérica del teorema de la probabilidad.

En cualquier caso, **se considera que ambos países**, tanto España como Singapur, **podrían haber utilizado el mismo ejemplo que utilizaron para mostrar la regla del producto**. No tienen porque verse ambos conceptos a la vez, sino que se puede volver a poner el mismo ejemplo que se utilizó, para ver el teorema de la probabilidad. Y se considera así porque esto permite que el alumnado vea todo en un mismo ejemplo, y **pueda ver la diferencia entre la regla del producto y el teorema de la probabilidad total**, además de que será un ejemplo ya trabajado, aunque sea parcialmente, por el alumno. Igualmente, después de ello se puede utilizar otro ejemplo más, y que sea distinto, para explicar el teorema, de modo que el alumno vea el concepto con distintos ejemplos y comprenda mejor.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

El presente trabajo puede dividirse en dos partes diferenciadas. **En la primera parte** se ha analizado el currículo vigente de España, en primaria y secundaria, en cuanto al contenido de probabilidad. Se han analizado ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con el contenido en el currículo. Y finalmente se han comentado las ausencias y presencias que se han encontrado en el currículo y en los libros de texto, además de comentar la coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

En la segunda parte de este trabajo, se ha tratado de hacer una comparación entre dos países cuyo método de enseñanza difiere significativamente, España y Singapur; sin embargo, no se ha tomado esto como un límite, sino que se ha aprovechado para analizar cada país y proponer algunas mejoras en algunos casos. Este análisis y comparación se ha hecho para el periodo educativo correspondiente a la ESO en España, y se ha hecho de la siguiente forma.

En primer lugar, se ha querido transmitir una primera imagen global y superficial de la probabilidad en ambos países, los objetivos de cada uno, y los contenidos que aparecen en sus libros, antes de ver como cada país intenta cumplir esos objetivos y transmitir esos contenidos. Para ello se han presentado las diferencias entre los currículos de los dos países (explicando que el de Singapur es muy diferente), y las líneas de aprendizaje en ambos países. En segundo lugar, se ha analizado la evolución en cada país y cómo de adecuado es el progreso de la enseñanza de la probabilidad a lo largo de los cursos. Y, finalmente, se ha profundizado en cómo en uno y otro país se transmiten los distintos contenidos de la probabilidad, poniendo ejemplos de ello mediante ilustraciones de los libros de texto y otras ilustraciones de elaboración propia.

A lo largo del trabajo se han ido sacando conclusiones conforme se iban analizando y comparando ambos países en cada aspecto o contenido, a la vez que se han realizado sugerencias de mejora cuando se ha estimado oportuno.

Para todo ello, se ha usado en España un libro de texto de referencia (una editorial de libros de texto, en realidad) y se ha explicado, al principio de la segunda parte del trabajo, por qué este es representativo del resto.

Así pues, este trabajo puede servir para conocer otro modo de enseñar la probabilidad con un enfoque distinto al que conocemos en España, y para, tras ver las debilidades y fortalezas de cada país, coger aquello que se considera mejor de cada sistema; además de las sugerencias que se han ido dando y que pueden ser útiles. Se ve de este modo que el trabajo no es únicamente una comparación entre dos países.

Conclusiones generales del trabajo

La primera conclusión que se extrae es que España y Singapur son muy distintos en el método de enseñanza de la probabilidad.

Ya desde sus respectivos currículos se diferencian muy notablemente, donde el de España es concreto, detallado, completo y cerrado, mientras el de Singapur es menos específico, más breve, y más abierto; este último, además, articula todo el aprendizaje de las matemáticas entorno a un eje: la resolución de problemas.

Esto hace que la estrategia de enseñanza sea distinta, encontrando así que en Singapur se parte de ejemplos que acabaran enseñando los contenidos de la teoría que son formalizados matemáticamente al final, llegando así a las fórmulas; mientras, en España, se parte de la teoría formal y se proponen ejercicios después.

Relacionado con esto, se encuentra que la notación y el vocabulario utilizado es más formal, más matemático en España, donde además se dan las definiciones de conceptos al comienzo de las lecciones, como ya se ha mencionado en los apartados anteriores.

En cuanto a los ejemplos, son más variados, y más cercanos al alumnado, los utilizados en Singapur, y están, en general, más relacionados con la vida cotidiana. El sentido y la utilidad que pueda ver un alumno en la probabilidad será mayor en Singapur (debido por ejemplo a que en España se empieza con sucesos de forma aislada y Singapur con la probabilidad directamente, experimentando).

Todo lo anterior es determinante, pues de ello se concluye que el alumnado tiene mayor facilidad para comprender y asimilar el concepto y los contenidos de la probabilidad en un sistema como el de Singapur, pero evitar la formalización puede llevar a ambigüedades (como con la regla de la unión y los sucesos mutuamente excluyentes).

En cuanto a la evolución, se concluye que España más repetitivo en los contenidos, y el volumen de esto es muy grande, mayor en cada curso; en Singapur, por el contrario, es más progresivo, con repasos breves y viendo contenidos nuevos después.

En España, en la ESO, se imparte la probabilidad en un curso más (tres cursos), y en Singapur no se ve la probabilidad en primaria mientras que en España sí. Sin embargo, ambos países acaban viendo casi los mismos contenidos.

Además, en España hay varios saltos más abruptos (al pasar de sucesos a probabilidad, por ejemplo).

De ello se concluye que la evolución de la enseñanza de la probabilidad, a lo largo de los cursos, es más adecuada en Singapur.

En ambos países podrían mejorarse algunas cosas como la regla del producto, dejando claro al alumnado cual sería la formula general y cual la específica para casos concretos, o mostrando de donde surge la regla, explicando la probabilidad condicionada al ver la regla del producto. También podrían eliminarse las discontinuidades que hay de un curso a otro, habiendo cursos intermedios en los que no se ve nada de probabilidad, propiciando el olvido de lo anteriormente visto.

A estas conclusiones generales se podrían sumar las conclusiones más concretas que se han ido sacando en el presente trabajo, para contenidos específicos de la probabilidad como los diagramas de árbol, la probabilidad de la unión, etc.

Referencias

Alcaide Guindo, F., Hernández Gómez, J., Serrano Marugán, E., Moreno y M., Pérez, A. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3 ESO. Savia*. Madrid, España: Ediciones SM.

Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E. y Barbero, J.F., Moreno, M., Sanz, L. y León, M. (2015). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I. 1 Bachillerato. Savia*. Madrid, España: Ediciones SM.

Alcaide Guindo, F., Hernández Gómez, J., Serrano Marugán, E., Moreno, M. y Donaire, J.J. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4 ESO*. *Savia*. Madrid, España: Ediciones SM.

Alcaide Guindo, F., Hernández Gómez, J., Serrano Marugán, E., Moreno, M. y Pérez, A. y Donaire, J.J. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4 ESO. Savia*. Madrid, España: Ediciones SM.

Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Barbero, J.F., Moreno, M., Rivière, Vicente, Sanz, L. y León, M. (2016). *Matemáticas II. 2 Bachillerato. Savia*. Madrid, España: Ediciones SM.

Aranzubía, V., Santaolalla Pascual E., Roldán Montesinos, J. y Pérez, E. (2008). *Matemáticas. 6 Primaria. Nuevo proyecto Planeta Amigo*. Madrid, España: Ediciones SM.

Berenguer Cruz, L., y Pérez Gómez, R. (2002). *Matemáticas para 3er curso-E.S.O*. Proyecto Sur de Ediciones.

Berenguer Cruz, L., y Pérez Gómez, R. (2003). *Matemáticas para 4º curso de E.S.O*. Proyecto Sur de Ediciones.

Casanovas, P. (P. C. S., y Figuera, J. M. (J. M. F. G. (1997). *Matemáticas 2* (1ª ed.). Almadraba.

Capella, T. (2011). *Matemáticas 3*. McGraw-Hill Interamericana de España.

Colera Jiménez y J., Oliveira, M. J. (2008). *Matemáticas aplicadas a ciencias sociales II. 2 Bachillerato.* Madrid, España: Anaya.

Nieto, M., Moreno, A., Pérez, A. (2015). *Matemáticas 1 ESO. Savia*. Madrid, España: Ediciones SM.

Nieto, M., Pérez, A. y Alcaide Guindo, F. (2015). *Matemáticas 2 ESO. Savia*. Madrid, España: Ediciones SM.

Piaget, T. D. D. C. (2007). *Desarrollo Cognitivo: Las Teorías de Piaget y de Vygotsky*.

Recuperado de http://www.paidopsiquiatria.cat/archivos/teorias_desarrollo_cognitivo_07-09_m1.pdf.

Ruiz-de-Luzuriaga-Peña, Manuel. (2014). Guía para citar y referenciar. Estilo APA. Pamplona.

Sánchez González, J. L., y Vera López, J. (2008). *Matemáticas. : 2º secundaria. Libro del alumno*. Oxford Educación.

Ministry of education, Singpore. *Mathematics 1, 2, 3, 4: Kho Tek Hong, Curriculum Planning & Development division*. (1997). Marshall Cavendish, education.

Boletín Oficial de Navarra (2014). Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra.

Boletín Oficial de Navarra (2015). Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra.

Boletín Oficial de Navarra (2015). Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra.

MOE. (2006). Mathematics Syllabus Primary. Singapore. Ministry of Education (MOE).

MOE. (2012). Additional Mathematics (O and N(A) level) Teaching and Learning Syllabus. Singapore. Ministry of Education (MOE).

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
José Antonio Moler, Departamento de Matemáticas