Manuela Pinheiro e Moreira

GEOMETRÍA

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN PARA EL ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS EN 3º DE ESO

TFM 2020

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Propuesta de intervención para el estudio de la resolución de triángulos en 3º de ESO

Manuela Pinheiro e Moreira

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar el tratamiento de la resolución de triángulos en un proceso formativo propuesto para el tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), evaluando aspectos condicionantes del modelo de enseñanza-aprendizaje con el fin de proponer un programa de clases que complemente el proceso formativo previamente evaluado.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte, se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, ESO y Bachillerato, con relación al tema indicado.

En la segunda parte, se presenta una propuesta de intervención para el estudio de la resolución de triángulos en tercer curso de ESO. Dicha propuesta se fundamenta en el análisis didáctico del proceso de instrucción del libro de texto y en el análisis de los errores y dificultades esperados. Finalmente, se incluye una justificación del proceso de estudio propuesto y se discuten los errores observados entre los alumnos de una clase de geometría de 3º de ESO. El trabajo se completa con una sección de síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas.

Parte I:

La resolución de triángulos en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster, se analiza el tratamiento de la resolución de triángulos en el currículo y en los libros de texto, en el tercer ciclo de Primaria, ESO y Bachillerato.

El análisis se divide en cinco capítulos. En los tres primeros capítulos, se muestran, en forma de tabla, los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo vigente que hacen referencia a la resolución de triángulos en cada uno de los niveles educativos. En el cuarto, se presentan ejemplos de las actividades tipo (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) propuestas en un libro de texto de 3º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libros de texto) se exponen en el quinto capítulo. En este caso, el objetivo es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de contenidos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1
La resolución de triángulos en el currículo vigente

Este capítulo desarrolla un análisis longitudinal de los contenidos matemáticos presentes en el currículo oficial que se relacionan con el tema específico que se propone analizar (resolución de triángulos).

Este análisis incluye el tercer ciclo de Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y el Bachillerato. Para ello, sirvieron de referencia los currículos establecidos en los Reales Decretos:

- ✓ Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra.
- ✓ Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

El desarrollo de este análisis se basa en los descriptores, que son palabras o enunciados que describen una determinada rama de las matemáticas (en este caso, la geometría) y que incluyen contenidos que están relacionados con el tema estudiado (resolución de triángulos). Los descriptores propuestos para este análisis son:

- ✓ C1: Geometría en el plano
- ✓ C2: Proporcionalidad geométrica
- ✓ C3: Trigonometría
- ✓ C4: Geometría en el espacio
- ✓ C5: Geometría analítica
- ✓ C6: Uso de tecnologías

Los descriptores están designados en las tablas con la letra *C*.

Este análisis permite un estudio longitudinal y amplio del currículo, cuyo objetivo es conocer cómo el tema específico de análisis es abordado en los diferentes niveles del circuito educativo, desde el tercer ciclo de Educación Primaria hasta el Bachillerato, considerando las distintas ramas académicas y aplicadas. De esta manera, se pretende determinar cómo se construye este conocimiento específico a lo largo del período escolar.

El análisis se presenta en forma de tablas, en las que los descriptores están relacionados con el contenido curricular requerido para cada curso. Mediante los descriptores, se identifican diferentes conceptos relacionados con el tema específico de análisis, revelando la continuidad o discontinuidad entre ellos y su evolución a lo largo del currículo.

1.1 Contenidos en Educación Primaria

Teniendo en cuenta la importancia de los conocimientos previos del alumnado en el aprendizaje, se presenta en la tabla siguiente los contenidos mínimos establecidos en el currículo vigente para el tercer ciclo de Educación Primaria. Estos contenidos indican, en mayor o menor grado, el nivel de conocimientos de una gran parte del alumnado.

Además de los contenidos puramente matemáticos, se incluyen en este análisis algunos contenidos del bloque de *Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas* relacionados con la integración de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación en el aprendizaje. El descriptor C6, relativo al *uso de tecnologías*, está directamente relacionado con este bloque.

1.1.1 Contenidos en Educación Primaria | 5º curso

C	Contenidos en Educación Primaria | 5º curso
C1	*Bloque 3. Medidas* Medidas de superficie. Forma compleja e incompleja. -Resolución de problemas de medida de superficies referidas a situaciones de la vida real. *Bloque 4. Geometría* La situación en el plano y en el espacio. Posiciones relativas de rectas y circunferencias. -Ángulos en distintas posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice. Formas planas y espaciales: figuras planas: elementos, relaciones y clasificación. Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos. Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados. Clasificación de los paralelepípedos. Concavidad y convexidad de figuras planas. Identificación y denominación de polígonos atendiendo al número de lados. Perímetro y área. La circunferencia y el círculo. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular. Regularidades y simetrías: reconocimiento de regularidades y, en particular, de las simetrías de tipo axial y de tipo especular.
C2	La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
C3	*Bloque 3. Medidas* Medidas en el Sistema sexagesimal: ángulos. Medida de ángulos. -Resolución de problemas de ángulos.
C4	–
C5	*Bloque 4. Geometría* Sistema de coordenadas cartesianas. -Descripción de posiciones y movimientos.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* Planificación del proceso de resolución de problemas: Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para obtener información, realizar cálculos numéricos, resolver problemas y presentar resultados. Integración de las tecnologías de la información y la comunicación, así como de los lenguajes y herramientas de programación en el proceso de aprendizaje.

Tabla1.1: Descriptores y contenidos en Educación Primaria | 5º curso.

1.1.2 Contenidos en Educación Primaria | 6º curso

C	Contenidos en Educación Primaria | 6º curso
C1	*Bloque 4. Geometría* Regularidades y simetrías.
C2	La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
C3	–
C 4	*Bloque 3. Medidas* Realización de mediciones de volumen. -Medida de volúmenes en forma compleja e incompleja. -Resolución de problemas de medida de volúmenes referidos a situaciones de la vida diaria. *Bloque 4. Geometría* Formas espaciales: elementos, relaciones y clasificación. Cuerpos geométricos: elementos, relaciones y clasificación. Poliedros. Elementos básicos: vértices, caras y aristas. Tipos de poliedros. Cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera. Cálculo de áreas y volúmenes de: prisma, pirámide, cilindro y cono.
C5	*Bloque 4. Geometría* Sistema de coordenadas cartesianas. -Descripción de posiciones y movimientos.
C 6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* Véanse los contenidos especificados para el descriptor, C6, en la Tabla 1.1.

Tabla1.2: Descriptores y contenidos en Educación Primaria | 6º curso.

1.2 Contenidos en Educación Secundaria Obligatoria

En los apartados siguientes, para cada curso de la Educación Secundaria Obligatoria, se presentan los contenidos del currículo oficial que, de alguna manera, se relacionan con la resolución de triángulos.

Conforme mencionado en el apartado anterior (Educación Primaria), se incluyen en este análisis algunos contenidos del bloque de *Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas* relacionados con la integración de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación en el aprendizaje (relacionados con el descriptor C6).

Teniendo en cuenta la configuración curricular establecida por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), las tablas referentes al tercer y cuarto cursos de la ESO distinguen los contenidos de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de los de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, vigentes como opciones diferenciadas de la asignatura de Matemáticas en el tercer curso de la ESO y como modalidades distintas en el cuarto curso de la ESO.

1.2.1 Contenidos en 1º y 2º de ESO

La tabla que se describe a continuación presenta los contenidos relacionados con la resolución de triángulos en el primer y segundo cursos de la ESO.

C	Contenidos 1º y 2º de ESO
C1	*Bloque 3. Geometría* Elementos básicos de la geometría del plano. -Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Ángulos y sus relaciones. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. -Propiedades. Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos y cuadriláteros. -Propiedades y relaciones. Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. -Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
C2	*Bloque 3. Geometría* Semejanza: figuras semejantes. -Criterios de semejanza. -Razón de semejanza y escala. -Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
C3	*Bloque 3. Geometría* Triángulos rectángulos. -El teorema de Pitágoras. -Justificación geométrica y aplicaciones.
C4	*Bloque 3. Geometría* Poliedros y cuerpos de revolución. -Elementos característicos, clasificación. -Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. -Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.
C5	*Bloque 4. Funciones* Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas. *Bloque 3. Geometría* Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tabla 1.3: Descriptores y contenidos en Educación Secundaria Obligatoria | 1º y 2º de ESO.

1.2.2 Contenidos en 3º de ESO

La tabla que se presenta a continuación describe los contenidos relacionados con la resolución de triángulos en el tercer curso de la ESO. La tabla está organizada en columnas separadas, según la opción de la asignatura de Matemáticas: Matemáticas

Orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

<table>
<tr><th>C</th><th>Contenidos 3º de ESO | Académicas</th><th>Contenidos 3º de ESO | Aplicadas</th></tr>
<tr><td>C1</td><td>Bloque 3. Geometría
Geometría del plano.
Lugar geométrico.</td><td>Bloque 3. Geometría
Mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área.
-Propiedades.</td></tr>
<tr><td>C2</td><td colspan="2">Bloque 3. Geometría:
Teorema de Tales.
-División de un segmento en partes proporcionales.
-Aplicación a la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>C3</td><td colspan="2">–</td></tr>
<tr><td>C4</td><td>Bloque 3. Geometría
Geometría del espacio.
-Planos de simetría en los poliedros.
La esfera.
-Intersecciones de planos y esferas.
El globo terráqueo.
-Coordenadas geográficas y husos horarios.
-Longitud y latitud de un punto.</td><td>Bloque 3. Geometría
Geometría del espacio: áreas y volúmenes.
El globo terráqueo.
-Coordenadas geográficas.
-Longitud y latitud de un punto.</td></tr>
<tr><td>C5</td><td colspan="2">Bloque 4. Funciones
Expresiones de la ecuación de la recta.
Bloque 3. Geometría
Traslaciones, giros y simetrías en el plano.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C6</td><td>Bloque 3. Geometría
Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.</td><td>–</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
Véanse los contenidos c), e) y f) especificados para el descriptor C6 en la Tabla 1.3.</td></tr>
</table>

Tabla 1.4: Descriptores y contenidos en Educación Secundaria Obligatoria | 3º de ESO.

1.2.3 Contenidos en 4º de ESO

La tabla que se presenta a continuación describe los contenidos relacionados con la resolución de triángulos en el cuarto curso de la ESO. La tabla está organizada en columnas separadas, según la modalidad del curso: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

<table>
<tr><th>C</th><th>Contenidos 4º de ESO | Académicas</th><th>Contenidos 4º de ESO | Aplicadas</th></tr>
<tr><td>C1</td><td colspan="2">Bloque 3. Geometría
Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes y áreas.</td></tr>
</table>

C2	*Bloque 3. Geometría* Semejanza. -Figuras semejantes. -Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	*Bloque 3. Geometría* Figuras semejantes. Teoremas de Tales y Pitágoras. -Aplicación de la semejanza para la obtención indirecta de medidas. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes.
C3	*Bloque 3. Geometría* Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. -Relaciones entre ellas. -Relaciones métricas en los triángulos.	–
C4	*Bloque 3. Geometría* Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de volúmenes.	
C5	*Bloque 3. Geometría (continuación)* Iniciación a la geometría analítica en el plano: -Coordenadas. -Vectores. -Ecuaciones de la recta. -Paralelismo, perpendicularidad.	–
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* Véanse los contenidos c), e) y f) especificados para el descriptor C6 en la Tabla 1.3. *Bloque 3. Geometría* Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	

Tabla 1.5: Descriptores y contenidos en Educación Secundaria Obligatoria | 4º de ESO.

1.3 Contenidos en Bachillerato

Los estudios de Bachillerato contemplan, tres modalidades: Ciencias, Humanidades y Ciencias Sociales y Artes. La asignatura de Matemáticas pertenece al currículo de las dos primeras: Ciencias y Humanidades y Ciencias Sociales (itinerario de Ciencias Sociales). No obstante, puesto que los contenidos de geometría y trigonometría no están incluidos en la asignatura de Matemáticas impartida en esta última modalidad, en este apartado nos restringiremos a los cursos de la modalidad de Ciencias.

1.3.1 Contenidos en 1º de Bachillerato | Modalidad Ciencias

C	Contenidos 1º de Bachillerato | Matemáticas I. Modalidad Ciencias
C1	*Bloque 4. Geometría* Lugares geométricos del plano. Cónicas. -Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. -Ecuación y elementos.
C2	–

C3	*Bloque 3. Análisis* Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, raíz, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos *Bloque 4. Geometría* Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. -Razones trigonométricas de los ángulos suma, diferencia de otros dos, doble y mitad. -Fórmulas de transformaciones trigonométricas. Teoremas. Resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas. Resolución de triángulos. -Resolución de problemas geométricos diversos.
C4	–
C5	*Bloque 4. Geometría* Vectores libres en el plano. -Operaciones geométricas. Producto escalar. -Módulo de un vector. -Ángulo de dos vectores. Bases ortogonales y ortonormales. Geometría métrica plana. -Ecuaciones de la recta. -Posiciones relativas de rectas. -Distancias y ángulos. -Resolución de problemas.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* Véanse los contenidos c), e) y f) especificados para el descriptor C6 en la Tabla 1.3.

Tabla 1.6: Descriptores y contenidos en Bachillerato | 1º de Bachillerato (Ciencias).

1.3.2 Contenidos en 2º de Bachillerato | Modalidad Ciencias

C	Contenidos 2º de Bachillerato| Matemáticas II. Modalidad Ciencias
C5	*Bloque 4. Geometría* Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. -Significado geométrico. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos). Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* Véanse los contenidos c), e) y f) especificados para el descriptor C6 en la Tabla 1.3.

Tabla 1.7: Descriptores y contenidos en Bachillerato | 2º de Bachillerato (Ciencias).

Nota: no están presentes en el currículo los contenidos relacionados con los descriptores C1 a C4.

Capítulo 2
Criterios de evaluación de la resolución de triángulos en el currículo vigente

Este capítulo presenta los criterios de evaluación incluidos en el currículo actual que están relacionados con el tema analizado. La descripción de los mismos se lleva a cabo utilizando tablas que organizan la información según el curso y los descriptores presentados en el capítulo anterior.

Los criterios de evaluación definen, para los docentes, las pautas de evaluación en relación con el rendimiento académico de los alumnos. Es decir, describen lo que el alumnado debe lograr en términos de conocimiento y competencias, y en qué contextos deben saber utilizar estos conocimientos.

Además de los criterios puramente matemáticos, se incluyen en este análisis algunos criterios del bloque de *Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas* relacionados con la integración de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el aprendizaje (relacionados con el descriptor C6, relativo al *uso de tecnologías*).

Los criterios de evaluación para cada una de las etapas del ciclo educativo se presentan a continuación.

2.1 Criterios de evaluación en Educación Primaria

Los criterios de evaluación establecidos en el currículo vigente para el tercer ciclo de Educación Primaria se presentan en las tablas siguientes.

2.1.1 Criterios de evaluación en Educación Primaria | 5º curso

C	Criterios de evaluación en Educación Primaria | 5º curso
C1	*Bloque 3. Medidas* 1. Conocer y seleccionar, los instrumentos y unidades de medida adecuadas, estimando, expresando con precisión medidas de longitud, superficie…convirtiendo unas unidades en otras cuando las circunstancias lo requieran. 4. Identificar y resolver problemas de la vida cotidiana utilizando los conocimientos geométricos trabajados. *Bloque 4. Geometría* 1. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, geometría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. 2. Conocer las figuras planas; cuadrado, rectángulo, romboide, triangulo, trapecio y rombo. 3. Comprender el método de calcular el área de un paralelogramo, triángulo, trapecio, y rombo. Calcular el área de figuras planas. 4. Utilizar las propiedades de las figuras planas para resolver problemas. 6. Identificar y resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando los conocimientos geométricos trabajados, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.

C2	–
C3	*Bloque 3. Medidas* 3. Conocer y seleccionar, los más adecuados entre los instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones, expresando con precisión medidas de ángulos, convirtiendo unas unidades en otras cuando las circunstancias lo requieran.
C4	–
C5	*Bloque 4. Geometría* 5. Interpretar representaciones espaciales realizadas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares. 6. Véase el descriptor C1.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 12. Utilizar los medios tecnológicos de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos. 13. Seleccionar y utilizar las herramientas tecnológicas y estrategias para el cálculo, para conocer los principios matemáticos y resolver problemas. 14. Utilizar herramientas y lenguajes de programación para modelizar y resolver problemas.

Tabla 2.1: Descriptores y criterios de evaluación en Educación Primaria | 5º curso.

2.1.2 Criterios de evaluación en Educación Primaria | 6º curso

C	Criterios de evaluación en Educación Primaria | 6º curso
C1	*Bloque 4. Geometría* 2. Interpretar una representación espacial realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones cercanas. 4. Memorizar y utilizar las expresiones matemáticas para calcular áreas y volúmenes. 5. Iniciarse en el concepto de simetría en figuras regulares. 6. Identificar y resolver problemas de la vida diaria, conectando la realidad y los conceptos geométricos, reflexionando sobre el procedimiento aplicado para su resolución.
C2	–
C3	–
C4	*Bloque 3. Medidas* 1. Conocer, transformar, comparar, ordenar y utilizar las unidades de medida de volúmenes, explicando oralmente. 4. Resolver problemas, utilizando y transformando las unidades de medida de volúmenes, eligiendo la unidad más adecuada, explicando el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.

C4	*Bloque 4. Geometría* 3. Reconocer, describir los elementos básicos, clasificar según diversos criterios y reproducir cuerpos geométricos aplicando los conocimientos a la comprensión e interpretación del entorno. 4. Memorizar y utilizar las expresiones matemáticas para calcular áreas y volúmenes. 6. Véase el descriptor C1.
C5	*Bloque 4. Geometría* 1. Reconocer los ejes de coordenadas en el plano. Representar pares ordenados en un sistema cartesiano. 6. Véase el descriptor C1.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 12 y 13. Véase el descriptor C6 de la Tabla 2.1.

Tabla 2.2: Descriptores y criterios de evaluación en Educación Primaria | 6º curso.

2.2 Criterios de evaluación en Educación Secundaria Obligatoria

Los criterios de evaluación referentes a los cursos de esta etapa educativa se muestran en las tablas incluidas a continuación.

2.2.1 Criterios de evaluación en 1º y 2º de ESO

C	Criterios de evaluación 1º y 2º de ESO
C1	*Bloque 3. Geometría* 1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. 2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución
C2	*Bloque 3. Geometría* 4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
C3	*Bloque 3. Geometría* 3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.
C4	*Bloque 3. Geometría* 5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.). 6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.
C5	*Bloque 4. Funciones* 1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.

C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción. *Bloque 3. Geometría* 2. Véase el descriptor C1.

Tabla 2.3: Descriptores y criterios de evaluación en Educación Secundaria Obligatoria | 1º y 2º de ESO.

2.2.2 Criterios de evaluación en 3º de ESO

Los criterios de evaluación para el tercer curso de la ESO se presentan en la tabla siguiente. La tabla está organizada en columnas separadas, según la opción de la asignatura de Matemáticas: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

Para la mayor parte de los descriptores, los criterios de evaluación son idénticos en ambas opciones y se presentan en una celda común. En aquellos casos en que los criterios de evaluación son diferentes para cada una de las dos opciones, su descripción se realiza por separado.

C	Criterios de evaluación 3º ESO | Académicas	Criterios de evaluación 3º ESO | Aplicadas
C1	*Bloque 3. Geometría* 1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.	
C2	*Bloque 3. Geometría* 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	*Bloque 3. Geometría* 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener medidas de longitudes, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Véase el descriptor C2 de la opción "Académicas".
C3	–	

C4	*Bloque 3. Geometría* 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros. 6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos	*Bloque 3. Geometría* 5. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.
C5	*Bloque 3. Geometría* 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.	
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 11 y 12. Véase el descriptor C6 de la Tabla 2.3.	

Tabla 2.4: Descriptores y criterios de evaluación en Educación Secundaria Obligatoria | 3º de ESO (Enseñanzas Académicas y Aplicadas).

Nota: En el currículo correspondiente al 3º de ESO no aparecen criterios de evaluación asociados a los siguientes contenidos:

- ✓ *Bloque 4. Funciones:* Expresiones de la ecuación de la recta.
- ✓ *Bloque 3. Geometría:* Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Véanse los contenidos especificados para los descriptores C5 y C6 en la Tabla 1.4.

2.2.3 Criterios de evaluación en 4º de ESO

Los criterios de evaluación referentes al cuarto curso de la ESO se muestran en la tabla incluida a continuación. Como se ha mencionado anteriormente, para cada descriptor, la tabla presenta una división según la modalidad del curso: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. En aquellos descriptores que presentan alguna diferencia, la descripción de los criterios se realiza separadamente para cada una de las modalidades.

C	Criterios de evaluación 4º ESO |Académicas	Criterios de evaluación 4º ESO | Aplicadas
C1	*Bloque 3. Geometría* 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	*Bloque 3. Geometría* 1. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas, y aplicando, así mismo, la unidad de medida más acorde con la situación descrita.
C2	*Bloque 3. Geometría* 2. Véase el descriptor C1 de la opción “Académicas”.	*Bloque 3. Geometría* 1. Véase el descriptor C1 de la opción “Aplicadas”.

C3	*Bloque 3. Geometría* 1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Véase el descriptor C1 de la opción “Académicas”.	*Bloque 3. Geometría* 1. Véase el descriptor C1 de la opción “Aplicadas”.
C4	*Bloque 3. Geometría* 2. Véase el descriptor C1 de la opción “Académicas”.	*Bloque3. Geometría* 1. Véase el descriptor C1 de la opción “Aplicadas”. 2. Utilizar aplicaciones informáticas de geometría dinámica, representando cuerpos geométricos y comprobando, mediante interacción con ella, propiedades geométricas
C5	*Bloque 3. Geometría* 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	–
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 11 y 12. Véase el descriptor C6 de la Tabla 2.3.	
	–	*Bloque 3. Geometría* 2. Véase el descriptor C4 de la opción “Aplicadas”.

Tabla 2.5: Descriptores y criterios de evaluación en Educación Secundaria Obligatoria | 4º de ESO (Enseñanzas Académicas y Aplicadas).

2.3 Criterios de evaluación en Bachillerato

Los criterios de evaluación definidos en el currículo para los cursos de Bachillerato (modalidad de Ciencias) se presentan en las tablas siguientes. Como se ha indicado previamente, de las dos modalidades de Bachillerato que incluyen la disciplina de Matemáticas, dicha modalidad es la única en la que se estudian temas de geometría.

2.3.1 Criterios de evaluación en 1º de Bachillerato | Modalidad Ciencias

C	Criterios de evaluación 1º de Bachillerato | Matemáticas I. Modalidad Ciencias
C1	*Bloque 4. Geometría* 5. Manejar el concepto de lugar geométrico en el plano. Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos usuales, estudiando sus ecuaciones reducidas y analizando sus propiedades métricas.
C2	–

C3	*Bloque 3. Análisis* 4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global. *Bloque 4. Geometría* 1. Reconocer y trabajar con los ángulos en radianes manejando con soltura las razones trigonométricas de un ángulo, de su doble y mitad, así como las transformaciones trigonométricas usuales. 2. Utilizar los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales para resolver ecuaciones trigonométricas así como aplicarlas en la resolución de triángulos directamente o como consecuencia de la resolución de problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico.
C4	–
C5	*Bloque 4. Geometría* 3. Manejar la operación del producto escalar y sus consecuencias. Entender los conceptos de base ortogonal y ortonormal. Distinguir y manejarse con precisión en el plano euclídeo y en el plano métrico, utilizando en ambos casos sus herramientas y propiedades. 4. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo las ecuaciones de rectas y utilizarlas, problemas de incidencia y cálculo de distancias.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 14. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

Tabla 2.6: Descriptores y criterios de evaluación en Bachillerato | 1º de Bachillerato (Ciencias).

2.3.2 Criterios de evaluación en 2º de Bachillerato | Modalidad Ciencias

C	Criterios de evaluación 2º Bachillerato | Matemáticas II. Modalidad Ciencias
C5	*Bloque 4. Geometría* 1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores. 2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio. 3. Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y considerando su significado geométrico.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 13 y 14. Véase el descriptor C6 de la Tabla 2.6.

Tabla 2.7: Descriptores y criterios de evaluación en Bachillerato | 2º de Bachillerato (Ciencias).

Nota: en la Tabla 2.7, no están presentes en el currículo los criterios de evaluación relacionados con los descriptores C1 a C4.

Capítulo 3

Estándares de aprendizaje evaluables de la resolución de triángulos en el currículo vigente

Este capítulo presenta los estándares de aprendizaje incluidos en el currículo actual que están relacionados con el tema analizado. La información está contenida en tablas que se organizan según el curso y los descriptores presentados en el primer capítulo.

Los estándares de aprendizaje constituyen la concreción de los criterios de evaluación y permiten especificar la forma de evaluar los contenidos matemáticos del currículo. En determinadas situaciones, se observa que los estándares añaden nuevos contenidos no especificados en el criterio del que proceden.

A través de los estándares, se establecen los conocimientos concretos que se consideran esenciales en el proceso de aprendizaje de las distintas etapas.

Conforme mencionado en los capítulos anteriores, además de los estándares de aprendizaje puramente matemáticos, se incluyen en este análisis algunos estándares del bloque de *Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas* relacionados con la integración de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación en el aprendizaje (relacionados con el descriptor C6, relativo al *uso de tecnologías*).

Los estándares de aprendizaje evaluables para cada una de las etapas del ciclo educativo se presentan a continuación.

3.1 Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

Los estándares de aprendizaje evaluables establecidos en el currículo vigente para el tercer ciclo de Educación Primaria se presentan en las tablas siguientes.

3.1.1 Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria | 5º curso

C	Estándares de aprendizaje en Educación Primaria | 5º curso
C1	*Bloque 3. Medidas* 1.9. Compara y ordena perceptivamente superficies de varios objetos. 1.10. Compara y ordena superficies de varias figuras mediante superposición, descomposición y unidad patrón. 1.12. Mide, con un metro o con la regla, y calcula el área de la superficie. 1.13. Elige la unidad de superficie más adecuada para expresar una medida. 1.15. Estima el área de diferentes superficies. 4.1. Aplica nociones de medida en la resolución de problemas aritméticos. 4.2. Plantea y resuelve problemas relacionados con la medida

C1	*Bloque 4. Geometría* 1.1. Reconoce y construye (utilizando regla y transportador) ángulos convexos (agudos, rectos y obtusos) llanos y cóncavos. 1.2. Reconoce y construye ángulos consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios. 1.3. Reconoce y construye la bisectriz de un ángulo. 1.4. Reconoce y construye rectas, semirrectas y segmentos. 1.5. Reconoce y construye (utilizando escuadra y cartabón) líneas paralelas y perpendiculares. 1.6. Reconoce y construye la mediatriz de un segmento. 1.7. Reconoce y construye las posiciones relativas de rectas y circunferencias. 1.8. Reconoce y construye las posiciones relativas de dos circunferencias. 1.9. Reconoce y construye figuras simétricas y con simetría. 1.10. Reconoce y construye figuras trasladadas. 1.11. Reconoce y construye figuras congruentes cuando el centro de giro es un punto de la figura. 2.1. Reconoce y construye las diagonales de un polígono. 2.2. Conoce la suma de los ángulos de un triángulo y de un cuadrilátero. 2.3. Reconoce, caracteriza y construye polígonos que cumplan condiciones dadas (atendiendo a la longitud de sus lados y a la amplitud de sus ángulos). 2.5. Reconoce, caracteriza y construye los diferentes cuadriláteros (atendiendo al paralelismo y longitud de sus lados y a la amplitud de sus ángulos). 3.1. Identifica y calcula el perímetro de figuras geométricas. 3.2. Calcula áreas de polígonos sencillos. 4.1. Identifica y construye circunferencia y distingue sus elementos. 4.2. Calcula la longitud de la circunferencia.
C1	*Bloque 4. Geometría* 6.1. Aplica nociones de geometría en la resolución de problemas aritméticos. 6.2. Plantea y resuelve problemas geométricos aplicando los conceptos y procedimientos trabajados. 6.3. Resuelve problemas sencillos de razonamiento lógico en contexto geométrico. 6.4. Resuelve problemas de recuento sistemático en contexto geométrico.
C2	–
C3	*Bloque 3. Medidas* 3.1. Mide ángulos con el transportador. 3.2. Conoce las unidades de amplitud de un ángulo: grado, minuto y segundo. 3.3. Suma y resta medidas de ángulos en forma compleja. 3.4. Estima la medida de ángulos dados.
C4	–
C5	*Bloque 4. Geometría* 5.1. Describe y ejecuta recorridos en un plano. 5.2. Identifica o localiza puntos en una cuadrícula utilizando coordenadas cartesianas. 6.1, 6.2 y 6.3. Véase el descriptor C1.

C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 12.1. Utiliza herramientas tecnológicas para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas. 12.2. Utiliza la calculadora para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas. 13.1. Realiza un proyecto, elabora y presenta un informe creando documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido, ...), buscando, analizando y seleccionando la información relevante, utilizando la herramienta tecnológica adecuada y compartiéndolo con sus compañeros. 14.1. Diseña y realiza proyectos de programación donde se utilizan secuencias de comandos, bucles, condicionales, variables, procedimientos, distintas formas de entrada y salida de datos.

Tabla 3.1: Descriptores y estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria | 5º curso.

3.1.2 Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria | 6º curso

C	Estándares de aprendizaje en Educación Primaria | 6º curso
C1	*Bloque 4. Geometría* 4.1. Calcula áreas de figuras sencillas, polígonos regulares y polígonos irregulares (descomponiendo en polígonos más sencillos). 4.2. Identifica y construye el círculo y las figuras circulares. 4.3. Calcula la longitud de la circunferencia. 4.4. Calcula el área del círculo. 6.1. Aplica nociones de geometría en la resolución de problemas aritméticos. 6.2. Plantea y resuelve problemas geométricos aplicando los conceptos y procedimientos trabajados. 6.3. Resuelve problemas de razonamiento lógico en contexto geométrico. 6.4. Resuelve problemas de recuento sistemático en contexto geométrico.
C2	–
C3	–
C4	*Bloque 3. Medidas* 1.3. Mide, con un metro o con la regla, y calcula el área de la superficie. 1.4. Elige la unidad de superficie y volumen más adecuada para expresar una medida. 1.6. Expresa de forma simple medidas de superficie y volumen dadas en forma compleja y viceversa. 1.9. Estima el área de diferentes superficies. Estima el volumen de diferentes objetos y espacios. *Bloque 4. Geometría* 3.1. Reconoce y caracteriza poliedros regulares e irregulares. 3.2. Reconoce y caracteriza cuerpos redondos. 3.3. Reconoce plantillas que corresponden a cuerpos geométricos. 3.4. Construye plantillas que corresponden a prismas regulares sencillos. 3.5. Calcula el volumen de ortoedros. 6.1, 6.2 y 6.3. Véase el descriptor C1.
C5	*Bloque 4. Geometría* 6.1, 6.2 y 6.3. Véase el descriptor C1.

C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 12.1, 12.2 y 13.1. Véase el descriptor C6 de la Tabla 3.1.

Tabla 3.2: Descriptores y estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria | 6º curso.

3.2 Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Secundaria Obligatoria

Los estándares de aprendizaje evaluables establecidos en el currículo vigente para la Educación Secundaria Obligatoria se presentan en las tablas siguientes.

Las tablas referentes al tercer y cuarto cursos de la ESO distinguen los contenidos de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de los de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, vigentes como opciones diferenciadas de la asignatura de Matemáticas en el tercer curso de la ESO y como modalidades distintas en el cuarto curso de la ESO (configuración curricular establecida por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa - LOMCE).

3.2.1 Estándares de aprendizaje evaluables en 1º y 2º de ESO

C	Estándares de aprendizaje 1º y 2º de ESO
C1	*Bloque 3. Geometría* 1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. 1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. 1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. 1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo. 2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. 2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos.
C2	*Bloque 3. Geometría* 4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes. 4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.
C3	*Bloque 3. Geometría* 3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo. 3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.

C4	*Bloque 3. Geometría* 5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. 5.2. Construye secciones sencillas de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados. 5.3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente. 6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.
C5	*Bloque 4. Funciones* 1.1.Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora. *Bloque 3. Geometría* 2.1. Véase el descriptor C1. 5.2. Véase el descriptor C4.

Tabla 3.3: Descriptores y estándares de aprendizaje evaluables en Educación Secundaria Obligatoria | 1º y 2º de ESO.

3.2.2 Estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO

La tabla que se presenta a continuación describe los estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la resolución de triángulos en el tercer curso de la ESO. La tabla está organizada en columnas separadas, según la opción de la asignatura de Matemáticas: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

C	Estándares de aprendizaje 3º ESO | Académicas	Estándares de aprendizaje 3º ESO | Aplicadas
C1	*Bloque 3. Geometría* 1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. 2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.	*Bloque 3. Geometría* 1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo. 1.2. Utiliza las propiedades de la mediatriz y la bisectriz para resolver problemas geométricos sencillos. 1.3. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos en los que intervienen ángulos. 1.4. Calcula el perímetro de polígonos, la longitud de circunferencias, el área de polígonos y de figuras circulares, en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.
C2	*Bloque 3. Geometría* 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.	*Bloque 3. Geometría* 2.1. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados. Establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.2. Reconoce triángulos semejantes, y en situaciones de semejanza utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes. 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.
C3	–	–
C4	*Bloque 3. Geometría* 5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.	*Bloque 3. Geometría* 5.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

C4	5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas. 6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.	
C5	*Bloque 3. Geometría* 4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.	
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 11.2, 11.3, 11.4, 12.1, 12.2 y 12.3. Véase el descriptor C6 de la Tabla 3.3. *Bloque 3. Geometría* 4.2. Véase el descriptor C5.	

Tabla 3.4: Descriptores y estándares de aprendizaje evaluables en Educación Secundaria Obligatoria | 3º de ESO.

3.2.3 Estándares de aprendizaje evaluables en 4º de ESO

La tabla que se presenta a continuación describe los estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la resolución de triángulos en el cuarto curso de la ESO. La tabla está organizada en columnas separadas, según la modalidad del curso: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

C	Estándares de aprendizaje 4º ESO |Académicas	Estándares de aprendizaje 4º ESO | Aplicadas
C1	*Bloque 3. Geometría* 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.	*Bloque 3. Geometría* 1.1. Utiliza los instrumentos apropiados, fórmulas y técnicas apropiadas para medir ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas, interpretando las escalas de medidas. 1.3. Utiliza las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de triángulos, rectángulos, círculos, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades correctas. 2.1. Representa y estudia los cuerpos geométricos más relevantes (triángulos, rectángulos, círculos, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) con una aplicación informática de geometría dinámica y comprueba sus propiedades geométricas.

C2	*Bloque 3. Geometría* 2.1. Véase el descriptor C1 de la opción "Académicas".	*Bloque 3. Geometría* 1.2 Emplea las propiedades de las figuras y cuerpos (simetrías, descomposición en figuras más conocidas, etc.) y aplica el teorema de Tales, para estimar/ calcular medidas indirectas. 1.4. Calcula medidas indirectas de longitud, área y volumen mediante la aplicación del teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos.
C3	*Bloque 3. Geometría* 1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.	*Bloque 3. Geometría* 1.4. Véase el descriptor C2 de la opción "Aplicadas".
C4	*Bloque 3. Geometría* 2.1 y 2.3. Véase el descriptor C1 de la opción "Académicas".	*Bloque3. Geometría* 1.1, 1.3 y 2.1. Véase el descriptor C1 de la opción "Aplicadas".
C5	*Bloque 3. Geometría* 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.	–
C6	*Bloque 3. Geometría* 2.1. Véase el descriptor C1 de la opción "Académicas". 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.	*Bloque 3. Geometría* 2.1. Véase el descriptor C1 de la opción "Aplicadas".
	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas 11.2, 11.3, 11.4, 12.1, 12.2 y 12.3. Véase el descriptor C6 de la Tabla 3.3.	

Tabla 3.5: Descriptores y estándares de aprendizaje evaluables en Educación Secundaria Obligatoria \| 4º de ESO.

3.3 Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato

Los estándares de aprendizaje evaluables definidos en el currículo para los cursos de Bachillerato (modalidad de Ciencias) se presentan en las tablas siguientes. Como se ha indicado previamente, de las dos modalidades de Bachillerato que incluyen la disciplina de Matemáticas, dicha modalidad es la única en la que se estudian temas de geometría.

3.3.1 Estándares de aprendizaje evaluables en 1º de Bachillerato | Modalidad Ciencias

C	Estándares de aprendizaje 1º de Bachillerato | Matemáticas I. Modalidad Ciencias
C 1	*Bloque 4. Geometría* 5.1. Conoce el significado de lugar geométrico, identificando los lugares más usuales en geometría plana así como sus características.
C2	–
C3	*Bloque 3. Análisis* 4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. 4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones. *Bloque 4. Geometría* 1.1. Conoce las razones trigonométricas de un ángulo, su doble y mitad, así como las del ángulo suma y diferencia de otros dos. 2.1. Resuelve problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico, utilizando los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales.
C4	–
C5	*Bloque 4. Geometría* 3.1. Emplea con asiduidad las consecuencias de la definición de producto escalar para normalizar vectores, calcular el coseno de un ángulo, estudiar la ortogonalidad de dos vectores o la proyección de un vector sobre otro. 3.2. Calcula la expresión analítica del producto escalar, del módulo y del coseno del ángulo. 4.1. Calcula distancias, entre puntos y de un punto a una recta, así como ángulos de dos rectas. 4.2. Obtiene la ecuación de una recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos. 4.3. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 13.2, 13.3, 13.4, 14.1, 14.2 y 14.3. Véanse los estándares de aprendizaje 11.2, 11.3, 11.4, 12.1, 12.2 y 12.3, respectivamente, especificados para el descriptor C6 en la Tabla 3.3. *Bloque 4. Geometría* 5.2. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos en las que hay que seleccionar, estudiar posiciones relativas y realizar intersecciones entre rectas y las distintas cónicas estudiadas

Tabla 3.6: Descriptores y estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato | 1º de Bachillerato (Ciencias).

3.3.2 Estándares de aprendizaje evaluables en 2º de Bachillerato | Modalidad Ciencias

C	Estándares de aprendizaje 2º de Bachillerato | Matemáticas II. Modalidad Ciencias
C5	*Bloque 4. Geometría* 1.1. Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. 2.1. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. 2.2. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. 2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. 2.4. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. 3.1. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. 3.2. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades. 3.3. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. 3.4. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.
C6	*Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* 13.2, 13.3, 13.4, 14.1, 14.2 y 14.3. Véanse los estándares de aprendizaje 11.2, 11.3, 11.4, 12.1, 12.2 y 12.3, respectivamente, especificados para el descriptor C6 en la Tabla 3.3. *Bloque 4. Geometría* 3.4. Véase el descriptor C5.

Tabla 3.7: Descriptores y estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato | 2º de Bachillerato (Ciencias).

Nota: en la Tabla 3.7, no están presentes en el currículo los estándares de aprendizaje relacionados con los descriptores C1 a C4.

Capítulo 4

Ejercicios, problemas, cuestiones tipo sobre resolución de triángulos en los libros de texto y su relación con la geometría en el currículo vigente

Los libros de texto asumen un papel de “puente” entre las directrices establecidas en el currículo y el alumnado. Por su relevancia, este capítulo está dedicado exclusivamente al análisis de los libros utilizados en diferentes etapas del ciclo educativo. El propósito es evaluar la concreción de los contenidos y criterios de evaluación, más específicamente de los estándares de aprendizaje, en los libros de texto.

Este análisis se lleva a cabo a través de la evaluación de las actividades presentes en los libros utilizados en cinco cursos: desde el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria hasta el primer curso de Bachillerato.

Las distintas actividades presentadas en los libros son clasificadas como: ejercicio, problema, cuestión o situación. El ejercicio se entiende como una actividad cuya resolución consiste en una operación o la aplicación de un algoritmo, y se caracteriza por su carácter repetitivo. Por problema, consideramos cualquier actividad cuya resolución se pueda lograr mediante diferentes procedimientos (i.e., no existe un único método). Sin embargo, para su éxito, es fundamental que los alumnos articulen sus conocimientos previos. Las actividades clasificadas como cuestiones son aquéllas en las que, para su resolución, no se requiere realizar operaciones, sino llevar a cabo un análisis crítico de la situación presentada. Finalmente, la situación didáctica es toda la actividad concebida en detalle para que el alumno, mediante variables dadas por el docente y conjugadas con sus conocimientos previos, llegue a conclusiones matemáticas por sus propios medios. Son actividades que requieren de la intervención del docente durante su desarrollo.

Según la clasificación previa, se busca representar las actividades tipo para cada uno de los cursos anteriormente mencionados, con el fin de evaluar el grado de conformidad entre los libros de texto y el currículo oficial.

Las actividades objeto de análisis se limitan a aquéllas que se relacionan, directa o indirectamente, con el tema de la resolución de triángulos.

4.1 Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en 1º de ESO

El libro de texto utilizado como referencia para este análisis es el libro cuya portada se muestra en la Figura 4.1. La referencia completa se encuentra en el apartado de referencias bibliográficas.

Este libro de texto dedica cinco capítulos a la geometría:

- ✓ Capítulo 10| Elementos del plano y simetrías.
- ✓ Capítulo 11| Polígonos
- ✓ Capítulo 12| Áreas y perímetros de polígono
- ✓ Capítulo 13| Circunferencia y círculo
- ✓ Capítulo 14| Cuerpos geométricos

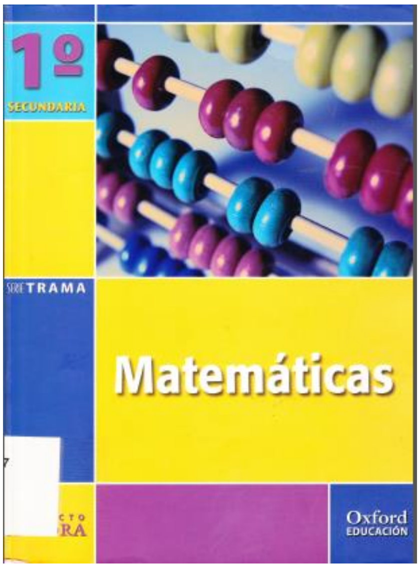


Figura 4.1: Libro de texto - 1º de ESO..

Los contenidos relacionados con la resolución de triángulos están presentes en los capítulos 10, 11 y 12. Por tanto, el análisis presentado se centra principalmente en estos capítulos. En el capítulo 14, los temas relacionados con triángulos no son centrales, pero se utilizan para la comprensión de los cuerpos de revolución.

Se observa en el libro la presencia de una amplia variedad de tipos de actividades (ejercicios, problemas y cuestiones) y diferentes niveles de dificultad. Los ejercicios son frecuentes a lo largo del capítulo, mientras que los problemas y las cuestiones más exigentes y creativas se encuentran en las actividades propuestas al final. Asimismo, los problemas contextualizados tienen una representatividad reducida en comparación con el resto.

Las actividades observadas cubren los siguientes estándares de aprendizaje (Tabla 3.3, capítulo 3): 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 3.1, 3.2, 5.1, 5.2, 6.1, 11.3 y 11.4.

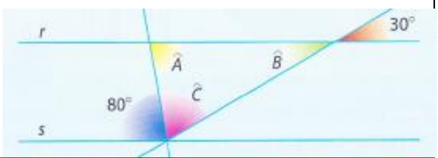
A continuación, se presentan algunas actividades seleccionadas del libro de referencia.

Elementos del Plano

Descripción: aplicación de las relaciones entre ángulos.

Tipo de actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

24 Indica la medida de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$, sabiendo que las rectas r y s son paralelas.



Polígonos

Descripción: cómo se clasifican los triángulos según sus lados y sus ángulos interiores.

Tipo de actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación

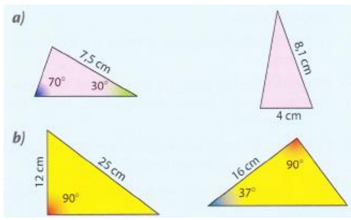
17 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con dibujos. ¿Qué casillas son imposibles de completar?

	Isósceles	Equilátero	Escaleno
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

Descripción: reconocimiento de las diferencias de la posición horizontal-vertical y aplicación de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Tipo de actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

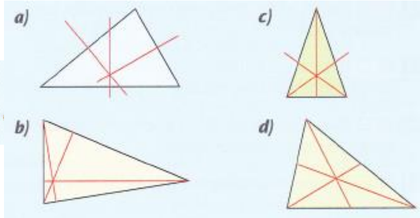
18 Sabiendo que los dos triángulos de cada apartado son iguales, averigua la medida de los lados y de los ángulos que faltan:



Descripción: identificación de las rectas y puntos notables de un triángulo.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ☐ Problema ■ Cuestión ☐ Situación

30 Indica cuáles son las rectas notables dibujadas en cada triángulo:



Descripción: conocimiento del teorema de Pitágoras y aplicación al cálculo de medidas.

Tipo de actividad: ■ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

5 Sabiendo que las medidas de cada apartado están ordenadas de menor a mayor, averigua el dato que falta para que con ellas se pueda construir un triángulo rectángulo:

a) 6 cm, 8 cm y *x*

b) 5 cm, 12 cm y *x*

c) *x*, 24 m y 25 m

d) 20 m, *x* y 29 m

Descripción: aplicación del teorema de Pitágoras al cálculo de medidas, reconocimiento de las propiedades de elementos geométricos en el plano y de la importancia de las representaciones gráficas para visualizar los datos del problema.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

4 ¿A qué distancia de un punto, *P*, hay que dibujar un segmento de 6 cm para que dicho punto se encuentre a 5 cm de cada extremo del segmento? ¿Qué relación hay entre el segmento y la recta que pasa por *P* y el punto medio del segmento?

Descripción: utilización de herramientas tecnológicas para trazar un triángulo conociendo algunos de sus elementos (lados y/o ángulos); el libro consultado utiliza el programa *Cabri*.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

3 Dibuja un triángulo con un lado, *a*, de 8 cm y dos ángulos, $\hat{B}$ y $\hat{C}$, de 40° y 60°, respectivamente. Explica el proceso seguido.

Áreas y Perímetros de Polígonos

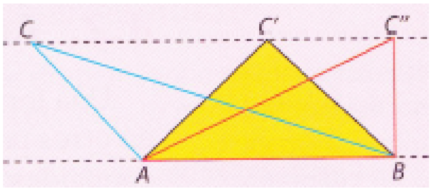
Descripción: aplicación y comprensión de la fórmula para calcular el área de un triángulo.

Tipo de actividad: ■ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

5 La superficie de un triángulo mide 40 cm². Si uno de sus lados mide 10 cm, calcula la altura correspondiente a ese lado.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ☐ Problema ■ Cuestión ☐ Situación

13 Razona, sin hacer ningún cálculo, cuál de los triángulos del dibujo, *ABC*, *ABC'* y *ABC''*, tiene mayor área:



Poliedros y Cuerpos de Revolución
Descripción: conocimiento de los cuerpos de revolución, sus características y elementos, y articulación de este conocimiento con otros aprendidos previamente (clasificación de triángulos y sus propiedades).
Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ☐ Problema ■ Cuestión ☐ Situación
8 ¿Puede la altura de un cono recto ser menor o igual que el radio de su base? ¿Y mayor que su generatriz? (Ayuda: piensa qué figura determinan la altura, el radio y la generatriz de un cono recto.)

4.2 Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en 2º de ESO

El libro de texto utilizado como referencia para este análisis es el libro cuya portada se muestra en la Figura 4.2. La referencia completa se encuentra en el apartado de referencias bibliográficas.

Este libro dedica cinco capítulos a la geometría:

- ✓ Capítulo 9 | Medidas sexagesimales
- ✓ Capítulo 10 | Semejanza y teorema de Pitágoras
- ✓ Capítulo 11 | Poliedros
- ✓ Capítulo 12 | Cuerpos de revolución

Los contenidos relacionados con la resolución de triángulos son centrales en el capítulo 10, donde se aborda el teorema de Tales, los criterios de semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras, entre otros. En los capítulos 11 y 12, los triángulos no asumen un papel protagonista, pero son utilizados para la comprensión de otros temas, tales como cuerpos de revolución y cálculo de áreas y volúmenes de poliedros.

Por todo ello, el análisis presentado se centra fundamentalmente en el capítulo 10. Puntualmente, se incluyen algunos ejercicios extraídos del resto de capítulos, en los que se aplican conocimientos relativos a triángulos.

Figura 4.2: Libro de texto - 2º de ESO.

El libro presenta una amplia variedad de actividades: ejercicios, problemas y cuestiones. Los ejercicios están significativamente presentes en todos los capítulos (en general, a continuación de la parte teórica). Los problemas también son bastante frecuentes (especialmente, en las actividades propuestas al final de cada capítulo) e incluyen ejemplos que hacen uso de objetos manipulables. Las cuestiones, aunque en menor medida, tienen una presencia constante a lo largo de los capítulos.

Finalmente, cabe mencionar que, en todos los capítulos, el libro presenta referencias y enlaces a páginas web (como la plataforma Descartes), en las que el alumnado tiene acceso a información teórica o a ejercicios sobre los temas tratados..

Los ejercicios evaluados cubren los siguientes estándares de aprendizaje (Tabla 3.3, capítulo 3): 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2 y 6.1.

A continuación, se presentan algunas actividades seleccionadas del libro de texto.

Semejanza

Descripción: aplicación de la razón de semejanza, razón de los perímetros y de las áreas para resolver problemas.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

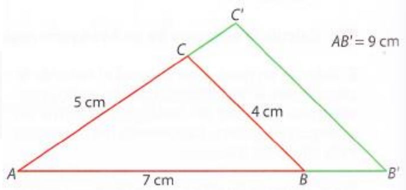
10 Los lados de un triángulo miden 12, 8 y 6 cm. Calcula la medida de los lados del triángulo semejante cuyo perímetro es 18 cm.

Teorema de Tales

Descripción: aplicación del teorema y reconocimiento de triángulos en posición de Tales.

Tipo de actividad: ■ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

14 Observa la figura y calcula la medida de los lados del triángulo $AB'C'$.



Criterios de Semejanza

Descripción: verificación de los criterios de semejanza de triángulos.

Tipo de actividad: ■ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

19 Aplicando los criterios de semejanza, justifica si los triángulos ABC y DEF son semejantes:

a) ABC y DEF son triángulos rectángulos con $\hat{A} = 50°$ y $\hat{F} = 35°$.

b) $AB = 6$ cm $AC = 8$ cm
$DE = 4$ cm $DF = 5$ cm
$\hat{A} = 60°$
$\hat{D} = 60°$

Aplicaciones de la Semejanza

Descripción: las actividades evaluadas con respecto a las aplicaciones de la semejanza consisten fundamentalmente en dividir un segmento en partes proporcionales, construir polígonos semejantes, utilizar escalas para resolver problemas de la vida cotidiana y calcular longitudes; la actividad presentada está relacionada con el cálculo de longitudes en triángulos semejantes.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

29 Calcula la altura de una casa que proyecta una sombra de 5 metros sabiendo que un árbol de 3 m de alto proyecta una sombra de 1 metro.

Teorema de Pitágoras

Descripción: aplicaciones del teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos.

Tipo de actividad: ■ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

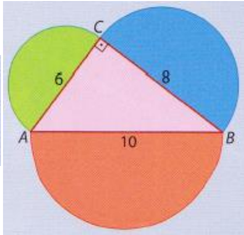
14 Completa la tabla:

Hipotenusa a	Cateto b	Cateto c
20		16
	5	12
2	1	
26	24	

Descripción: comprensión del significado geométrico del teorema de Pitágoras a través de su comprobación con figuras geométricas dibujadas sobre los lados del triángulo rectángulo.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Comprueba que el área de la figura construida sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos.



Poliedros

Descripción: los conocimientos relacionados con triángulos están directamente involucrados en el cálculo de áreas y volumen de poliedros.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

45 Halla el área y el volumen de una pirámide regular pentagonal de altura 3 m, sabiendo que la arista y la apotema de la base miden 4 y 2,75 m respectivamente. También se sabe que la altura de las caras triangulares es 4,1 m.

Cuerpos de Revolución

Descripción: los conocimientos relacionados con los triángulos están directamente involucrados en la comprensión de los cuerpos de revolución (en este caso, a través de la relación entre generatriz y altura, establecida por el teorema de Pitágoras); además, es necesario aplicar los conocimientos de semejanza de triángulos para resolver el problema propuesto.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ☐ Problema ■ Cuestión ☐ Situación

8 Un helado tiene forma de cono de altura 12 cm y radio de la base 3 cm. Describe la figura plana que genera este cuerpo de revolución al girar. Indica sus dimensiones.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

25 Dado un cono de altura 8 cm, radio de la base 4 cm, halla su generatriz. Imagina que se secciona ese cono por un plano paralelo a la base de forma que el cono que resulta tiene de altura 3 cm. Halla la generatriz de este nuevo cono, así como el área lateral, el área total y el volumen del tronco de cono que se ha obtenido al seccionarlo.

4.3 Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en 3º ESO

El libro de texto utilizado como referencia para este análisis es el libro cuya portada se presenta en la Figura 4.3.

El libro de texto dedica tres capítulos a la geometría:

- ✓ Capítulo 10 | Problemas métricos en el plano
- ✓ Capítulo 11 | Cuerpos geométricos
- ✓ Capítulo 12 | Transformaciones geométricas

Figura 4.3: Libro de texto - 3º de ESO.

Los contenidos relacionados con la resolución de triángulos se trabajan fundamentalmente en el capítulo 10, donde se estudian las relaciones angulares, la semejanza de triángulos, el teorema de Pitágoras, lugares geométricos y áreas de polígonos.

En el capítulo 11, aunque con un papel secundario, la teoría de triángulos está muy presente en las actividades relacionadas con el cálculo de áreas y volúmenes.

El capítulo 12 no se incluirá en este análisis, ya que no aborda directamente el tema central de esta memoria. Por otra parte, la resolución de las actividades propuestas en este capítulo no se fundamenta en los conocimientos sobre triángulos.

Por consiguiente, las actividades objeto de análisis son aquéllas propuestas en los capítulos 10 y 11.

Respecto a la correspondencia con el currículo actual, las actividades propuestas en el libro reflejan gran parte de los contenidos y estándares de aprendizaje asociados a este tema. Son excepciones los estándares 1.2, 2.2 y 3.1 del currículo oficial de la opción de Enseñanzas Académicas (correspondientes a los estándares 1.3, 2.1 y 3.1, respectivamente, de la opción de Enseñanzas Aplicadas). A continuación, se describen estos estándares y se discute brevemente su ausencia en el libro de texto.

1.2 (E. Académicas)/1.3 (E. Aplicadas). Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos.

2.2. (E. Académicas)/2.1 (E. Aplicadas). Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.

3.1 (E. Académicas y E. Aplicadas). Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.

En relación con el estándar 1.2 (E. Académicas), el libro aborda las relaciones angulares limitándose a la suma de los ángulos internos de los polígonos y a los ángulos en la circunferencia (ángulo central e inscrito). Las propiedades relativas a ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante no están presentes en la teoría ni se practican en las actividades propuestas.

Respecto al estándar 2.2 (E. Académicas), se constata que la semejanza en el libro (teoría y actividades) está centrada en los triángulos. El teorema de Tales no es abordado como un teorema estructural para la comprensión de la proporcionalidad geométrica que se aplica en diferentes contextos: división de un segmento en partes proporcionales, construcción de polígonos semejantes, cálculo de distancias, razón de semejanza, etc. El libro define los triángulos semejantes y presenta el concepto de triángulo en posición de Tales. Las actividades se limitan a estos contenidos. No se hace referencia a otros polígonos semejantes ni tampoco a su construcción o a la relación entre perímetros, áreas y volúmenes de polígonos semejantes. No obstante, en el margen de la página donde se encuentra el apartado sobre semejanza, se incluye el siguiente enlace: *Ampliación teórica: teorema de Tales | en la web*. La consulta a esta página web permite ampliar el aprendizaje sobre este tema.

El estándar 3.1 está relacionado el tema de semejanza. Están ausentes del libro las actividades con aplicaciones prácticas de la semejanza para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de distintos polígonos y cuerpos (por ejemplo, no se observan actividades con escalas).

Como aspecto positivo y diferenciador, se observa que el libro presenta, en combinación con las explicaciones teóricas, actividades que implican un mayor grado de razonamiento y creatividad. Este hecho difiere de la práctica habitual, en la que las actividades que exigen un mayor grado de razonamiento están relegadas al final del capítulo y representan propuestas de carácter opcional para los estudiantes más interesados en las matemáticas. Además, el libro desarrolla un enfoque práctico y objetivo de la geometría que, complementado con el trabajo docente en clase, puede resultar efectivo a la hora de transmitir los conocimientos. Como ampliación de los conceptos teóricos, se incluyen los enlaces *en la web*, para los estudiantes más curiosos o para aquellos docentes que buscan profundizar en determinados temas.

Cabe destacar que, al igual que otros libros consultados, el libro analizado dedica un espacio considerable al teorema de Pitágoras y sus aplicaciones, aunque este tema no está explícitamente incluido en el currículo actual del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Respecto al uso de herramientas tecnológicas para el estudio de la geometría, en el libro no se proponen ejercicios que involucren el uso de plataformas matemáticas. No obstante, se incluyen enlaces que permiten la extensión teórica de ciertos temas.

Para terminar, cabe mencionar que las actividades analizadas cubren los siguientes estándares de aprendizaje (descritos en la Tabla 3.4, capítulo 3):

Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas: 1.1, 2.1, 2.2 (parcialmente), 2.3, 3.1 (parcialmente) y 5.2.

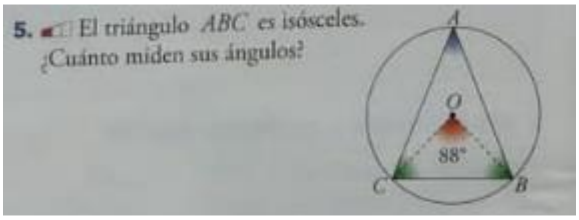
Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas: 1.1, 1.4, 2.1 (parcialmente) y 3.1 (parcialmente).

A continuación, se presentan algunas actividades seleccionadas del libro de texto.

Relaciones Angulares

Descripción: aplicación de las relaciones angulares como la suma de los ángulos internos de un triángulo y el concepto de ángulo inscrito y ángulo central.

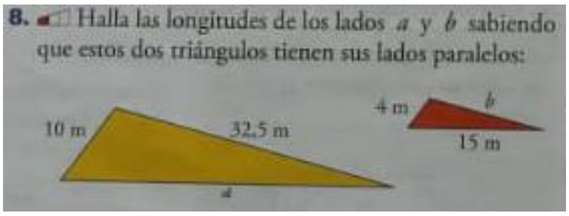
Tipo de actividad: ■ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación


5. El triángulo ABC es isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?

Semejanza

Descripción: aplicación del concepto de razón de semejanza.

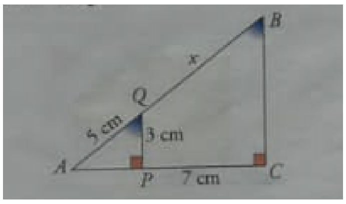
Tipo de actividad: ■ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación


8. Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:

Descripción: utilización del teorema de Tales para justificar un razonamiento. Triángulos en posición de Tales y comprensión del concepto de semejanza..

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ■ Cuestión ☐ Situación

31. a) ¿Por qué son semejantes los triángulos APQ y ACB?
b) Calcula $x = \overline{BQ}$.



Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

Descripción: uso de la relación entre catetos e hipotenusa para clasificar triángulos.

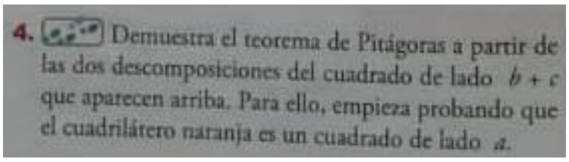
Tipo de actividad: ■ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

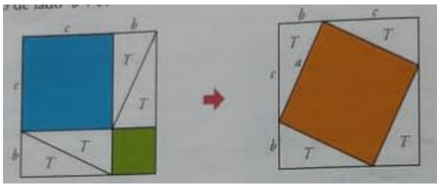
14. Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:

a) 11 m, 13 m, 20 m. b) 20 m, 21 m, 29 m.
c) 25 m, 29 m, 36 m. d) 7 m, 24 m, 25 m.

Descripción: aplicación de relaciones geométricas conocidas para la demostración de una ley o teorema.

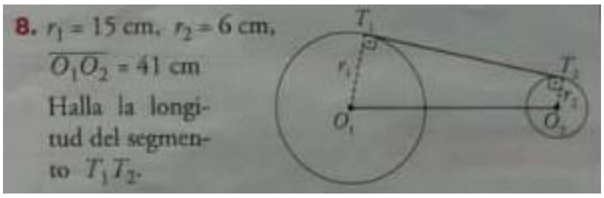
Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación


4. Demuestra el teorema de Pitágoras a partir de las dos descomposiciones del cuadrado de lado $b + c$ que aparecen arriba. Para ello, empieza probando que el cuadrilátero naranja es un cuadrado de lado a.



Descripción: aplicación del teorema de Pitágoras a la resolución de problemas con tangentes a circunferencias (consistente en identificar un triángulo rectángulo en el que uno de sus lados es la dimensión buscada).

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

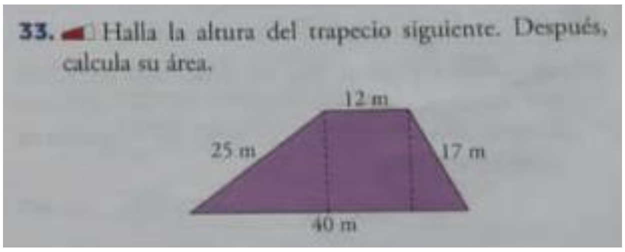

8. $r_1 = 15$ cm, $r_2 = 6$ cm, $\overline{O_1O_2} = 41$ cm

Halla la longitud del segmento T_1T_2.

Aplicación algebraica del teorema de Pitagoras

Descripción: aplicación del teorema de Pitágoras para obtener un sistema de ecuaciones cuya resolución permite hallar la solución del problema.

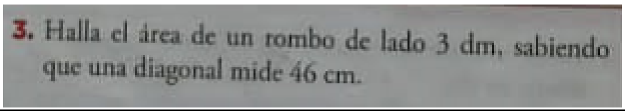
Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación


33. Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.

Areas de polígonos

Descripción: aplicación de las propiedades de los polígonos y del teorema de Pitágoras al cálculo de áreas.

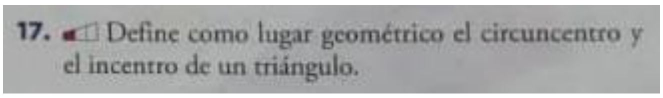
Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación


3. Halla el área de un rombo de lado 3 dm, sabiendo que una diagonal mide 46 cm.

Lugares Geométricos

Descripción: demostración del conocimiento de las propiedades que definen los puntos notables de un triángulo.

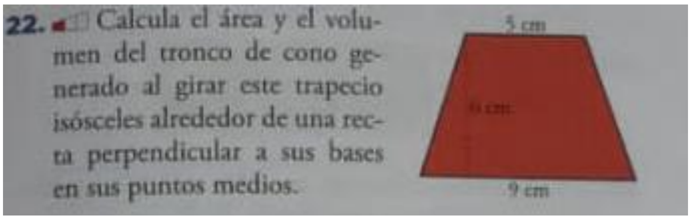
Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ☐ Problema ■ Cuestión ☐ Situación


17. Define como lugar geométrico el circuncentro y el incentro de un triángulo.

Cuerpos Geometricos

Descripción: aplicación del teorema de Pitágoras para determinar dimensiones desconocidas en el cálculo de superficies y volúmenes de diversos cuerpos geométricos.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación


22. Calcula el área y el volumen del tronco de cono generado al girar este trapecio isósceles alrededor de una recta perpendicular a sus bases en sus puntos medios.

4.4 Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en 4º de ESO

El libro de texto utilizado como referencia para este análisis es el libro cuya portada se presenta en la Figura 4.4. La referencia completa está en el apartado de referencias bibliográficas.

El libro de texto dedica tres capítulos a la geometría:

- ✓ Capítulo 6 | Semejanza
- ✓ Capítulo 7 | Trigonometría
- ✓ Capítulo 8 | Geometría analítica

Los contenidos relacionados con la resolución de triángulos están presentes en los tres capítulos mencionados. No obstante, el tratamiento principal de este tema se lleva a cabo en los dos primeros capítulos, 6 y 7. Por su parte, en el capítulo 8, dichos contenidos están significativamente presentes en las actividades propuestas al final del capítulo, en las que se busca que los alumnos apliquen los conceptos estudiados sobre la métrica del triángulo al nuevo contexto de la geometría analítica.

Figura 4.4: Libro de texto - 4º de ESO.

Respecto a las actividades planteadas, este libro difiere del resto en el hecho de que los problemas son las actividades predominantes a lo largo de los capítulos. Es especialmente relevante, además, que la mayoría de ellos son problemas que están fuertemente contextualizados. Aunque en menor medida, los ejercicios también están presentes en todos los capítulos, mientras que las cuestiones corresponden al tipo de actividades menos frecuentes.

Las actividades propuestas en los capítulos 6 y 7 cubren los siguientes estándares de aprendizaje (descritos en la Tabla 3.5, capítulo 3):

Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas: 1.1, 2.1, 2.2 y 2.3.

Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas: 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

A continuación, se presentan algunas actividades seleccionadas del libro de texto.

Semejanza

Descripción: aplicaciones de la semejanza, relación entre las áreas de figuras semejantes y comprensión del concepto de escala.

Tipo de actividad: ☐Ejercicio ■Problema ☐Cuestión ☐ Situación

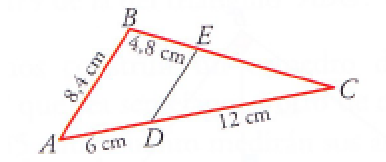
6. En el plano de un piso cuya escala es 1:200, el salón ocupa una superficie de 7 cm^2. ¿Cuál es la superficie real del salón?

Descripción: aplicación de los conocimientos sobre el teorema de Tales, triángulos semejantes (criterios de semejanza) y triángulos en posición de Tales.

Tipo de actividad: ■Ejercicio ☐Problema ■Cuestión ☐ Situación

10. En la figura, el segmento DE es paralelo a AB.

Justifica que los triángulos ABC y CDE son semejantes y calcula $\overline{DE}$ y $\overline{EC}$.



Descripción: aplicaciones de la semejanza de triángulos al cálculo de volúmenes y áreas de figuras espaciales (en particular, este ejemplo consiste en aplicar el teorema del cateto para calcular la superficie visible de la Luna).

Tipo de actividad: ☐Ejercicio ■Problema ☐Cuestión ☐ Situación

4. Un cohete se aproxima a la Luna, cuyo diámetro, según sabemos, es de 3 500 km.

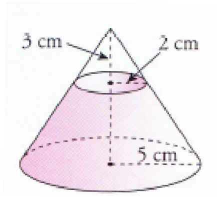
a) Averigua qué superficie de Luna se ve desde el cohete cuando se encuentra a 1 000 km de distancia. Hazlo razonadamente y comprueba el resultado aplicando la fórmula.

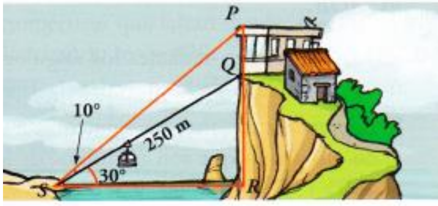
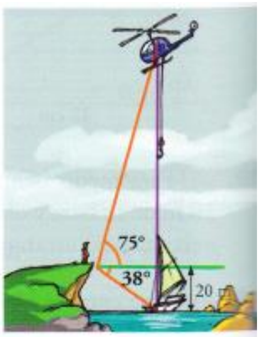
b) ¿A qué distancia debe estar el cohete para poder asegurar que sus ocupantes pueden ver el 10 % de la superficie de la Luna? (Aplica la fórmula).

Descripción: aplicaciones de la semejanza de triángulos al cálculo de volúmenes y áreas de figuras espaciales (tronco de cono y de pirámide).

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■Problema ☐Cuestión ☐Situación

34. De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.



Trigonometría
Descripción: razones trigonométricas de un ángulo agudo (seno, coseno y tangente) Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación **34.** Dos edificios distan entre sí 90 m. Desde un punto que está entre los dos edificios vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿Cuál es la altura de los edificios si sabemos que uno es 6 m más alto que el otro?
Descripción: resolución de triángulos rectángulos (se trata de hallar uno o más elementos desconocidos del triángulo, ya sean lados o ángulos, a partir de elementos conocidos, aplicando las razones trigonométricas). Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación **37.** Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$. 
Descripción: resolución de triángulos oblicuángulos (la idea es utilizar la altura para dividir el triángulo oblicuángulo en dos triángulos rectángulos y hallar uno o más elementos desconocidos, ya sean lados o ángulos, a partir de elementos conocidos, aplicando las razones trigonométricas). Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación **39.** Desde un acantilado a 20 m sobre el nivel del mar, se observa un helicóptero en prácticas de salvamento. Una persona desciende verticalmente hasta un barco en el que alguien está en peligro. Si los ángulos de observación son de 75º para el helicóptero y 38º para el barco, ¿cuánto medirá el cable que va desde el helicóptero al barco? 
Geometría Analítica
Descripción: aplicación de los conceptos estudiados previamente, en relación con los elementos notables del triángulo, al estudio de nuevos conceptos de la geometría analítica (ecuaciones de la recta, pendiente, distancia entre dos puntos). Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación **46.** Los puntos $A(2, 1)$ y $B(6, 4)$ son vértices de un triángulo. Sabiendo que $M(0,5; -1)$ es el punto medio del lado AC, calcula las coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ y el perímetro del triángulo.

4.5 Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo en 1º de Bachillerato

El libro de texto utilizado como referencia para este análisis es el libro cuya portada se muestra en la Figura 4.5. La referencia completa está en el apartado de referencias bibliográficas.

El libro dedica los siguientes capítulos a la Geometría:

- ✓ Capítulo 7 | Trigonometría
- ✓ Capítulo 8 | Resolución de triángulos
- ✓ Capítulo 10 | Geometría analítica
- ✓ Capítulo 11 | Lugares geométricos. Cónicas

En el capítulo 7, el triángulo está muy presente en la explicación de las razones trigonométricas de un ángulo agudo y de un ángulo cualquiera (circunferencia goniométrica), la razón trigonométrica fundamental y las razones trigonométricas de sumas y diferencias.

El capítulo 8 concentra la mayor parte de los ejercicios relacionados con el tema elegido. En este capítulo el alumno aprende a resolver triángulos rectángulos, calcular el área de un triángulo utilizando la trigonometría, relacionar los lados de un triángulo cualquiera con las razones trigonométricas de sus ángulos opuestos (teoremas del seno y del coseno), resolver cualquier triángulo y aplicar la trigonometría al cálculo de distancias entre puntos inaccesibles.

Figura 4.5: Libro de texto - 1º de Bachillerato.

El capítulo 10 desarrolla temas elementales de la geometría analítica (concepto de vector, operaciones con vectores, ecuaciones de la recta, posición relativa entre dos rectas, ángulos formados por dos rectas, distancias, etc.), en los que el triángulo no constituye un tema central. No obstante, los conocimientos adquiridos en este nuevo marco de la geometría analítica resultan fundamentales para el posterior estudio en profundidad de las figuras geométricas (en este caso, del triángulo).

En el contexto de la geometría analítica, los puntos notables de un triángulo se pueden determinar algebraicamente. Por ejemplo, conociendo determinados datos del triángulo, como los vértices, se puede hallar el baricentro, el ortocentro y el circuncentro, así como la ecuación de la recta de Euler.

Por tanto, los conceptos de geometría analítica descritos en este capítulo, además de ahondar en el conocimiento de los triángulos, permiten establecer un puente entre la geometría euclidiana y otras ramas de las matemáticas.

El capítulo 11, relativo a lugares geométricos y cónicas, no será contemplado en este análisis, puesto que sus actividades no están relacionadas con la temática de los triángulos.

En cuanto a los tipos de actividades propuestas, las más frecuentes son los problemas. Asimismo, al final de cada capítulo, hay un conjunto de diez cuestiones de opción múltiple que se proponen a los alumnos para que éstos puedan evaluar su nivel de conocimientos.

Los estándares de aprendizaje relacionados con triángulos que se trabajan a lo largo de las actividades son los siguientes: 1.1, 2.1, 2.2 y 5.1. Además, debe tenerse en cuenta que todos los estándares de aprendizaje relacionados con el bloque de geometría analítica se desarrollan en las actividades propuestas en el capítulo relativo a la resolución de triángulos A continuación, se presentan algunas actividades seleccionadas del libro de texto.

.Trigonometría

Descripción: hallar la expresión para calcular el área de un triángulo utilizando la trigonometría (i.e., aplicar los conocimientos previos y las razones trigonométricas para obtener la expresión de la altura y, a continuación, la del área del triángulo).

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

1> Comprueba que el área de cualquier triángulo *ABC* viene dada por la fórmula $S=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\text{tag } B\cdot\text{tag } C}{\text{tag } B+\text{tag } C}$

(Sugerencia: al trazar la altura *h* sobre el lado *a*, el triángulo *ABC* queda dividido en dos triángulos rectángulos; relaciona *h* en esos dos triángulos y lleva el valor obtenido a la fórmula $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$)

Resolución de triángulos

Descripción: resolución de un triángulo cualquiera mediante la aplicación del teorema del seno y/o del coseno (en el ejemplo dado, será a través del teorema del seno)..

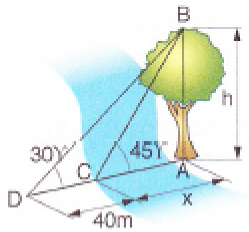
Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

5> Resuelve el triángulo *ABC* del que se conocen los siguientes datos: $A=52°$, $B=65°$ y $c=10$ m.

Descripción: resolución de triángulos rectángulos mediante la aplicación de razones trigonométricas para el cálculo de longitudes (como en el ejemplo siguiente) y áreas.

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

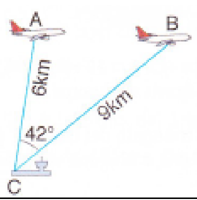
4> Desde la orilla de un río se ve un árbol, situado en la otra orilla, bajo un ángulo de 45°. Si se retrocede 40 m el árbol se ve bajo un ángulo de 30°. Calcula la altura del árbol y la anchura del río.



Descripción: cálculo de distancias entre puntos inaccesibles (conociendo dos lados y el ángulo que forman, se aplica el teorema del coseno).

Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

12> Dos aviones que se encuentran a 6 y 9 km de un aeropuerto se observan desde éste bajo un ángulo de 42°. ¿Qué distancia separa a los aviones?



Geometría Analítica
Descripción: resolución de un triángulo mediante la determinación de la ecuación de las rectas y la aplicación de la perpendicularidad entre vectores (producto escalar). Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación **7>** Los puntos $A(-2, 3)$ y $B(4, -2)$ son vértices de un triángulo rectángulo en A. El tercer vértice C está situado sobre la recta r: $2x - y - 1 = 0$. Determínalo.
Descripción: cálculo de los puntos notables del triángulo: el baricentro se obtiene a partir de la fórmula; el ortocentro, determinando las rectas que contienen los lados (dadas por un punto y el vector director) y las alturas (que contienen el vértice opuesto al lado perpendicular) e igualando las ecuaciones correspondientes a estas últimas.
Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
26> Calcula el baricentro y el ortocentro del triángulo de vértices $A(1, -1)$, $B(2, 3)$ y $C(-3, 2)$.
Descripción: resolución de triángulos mediante la determinación de las ecuaciones de las rectas y los ángulos formados entre ellas.
Tipo de actividad: ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación
38> PAU Considérese, en el plano, el triángulo de vértices $A = (2, 0)$, $B = (0, 1)$ y $C = (-3, -2)$. Calcula los ángulos y el área de ese triángulo.

Capítulo 5
Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

El objetivo de este capítulo es relacionar las ideas que se han analizado en los capítulos anteriores: por un lado, los contenidos y estándares de aprendizaje evaluables del currículo oficial; y por otro, las actividades presentes en los libros de texto relativas a la resolución de triángulos. De esta forma, se pretende evaluar la correspondencia entre el currículo oficial y los libros de texto.

Al final del capítulo, se analizan las presencias y ausencias en el currículo y en los libros de texto en relación con los contenidos y las actividades presentados en el texto de referencia, *Trigonometry* (Gelfand y Saul, 2001).

5.1 Síntesis de la evolución de los contenidos

A través del análisis realizado en los capítulos anteriores, se observa cómo se encadenan los diferentes contenidos de geometría a lo largo de las diferentes etapas educativas. Asimismo, podemos apreciar cuál es el peso que tiene cada una de las familias de contenidos geométricos agrupadas en los descriptores y de qué forma se profundiza en estos contenidos en cada etapa. En esta sección, se presentan las principales conclusiones de este análisis del contenido curricular.

En los primeros cuatro cursos analizados (tercer ciclo de Educación Primaria y primer y segundo cursos de la ESO), los conceptos relacionados con la geometría en el plano (C1) y la geometría en el espacio (C4) constituyen las áreas más relevantes del currículo, asumiendo el protagonismo de las clases.

Más específicamente, en quinto curso de Educación Primaria, la geometría en el plano (C1) asume un mayor peso en comparación con otras materias cubiertas en la asignatura de Matemáticas, tales como la introducción al sistema cartesiano y los ángulos. Durante el sexto curso, la geometría en el espacio (C4) adquiere una mayor relevancia. Además, se refuerza el sistema cartesiano y se introduce el tema de posiciones y movimientos, que es tratado en menor proporción.

En el primer y segundo curso de la ESO, como continuación natural de la Educación Primaria, los contenidos relacionados con la geometría en el plano (C1) asumen una mayor relevancia y se introduce un mayor grado de formalización (mediante el uso de notación matemática para la resolución de problemas). Sin embargo, la introducción de una serie de temas nuevos revela una diferencia sustancial entre este curso y los cursos anteriores (tercer ciclo de Educación Primaria). En geometría en el plano, surgen los conceptos de bisectriz, bisectriz perpendicular y sus propiedades. Además, se introduce la semejanza (C2), el teorema de Pitágoras (C3) y los cuerpos de revolución (C4). De este modo, se refuerza el aprendizaje adquirido en las fases anteriores y se concede un espacio significativo a los nuevos contenidos que se desea transmitir.

Por tanto, como factor común entre el tercer ciclo de la Educación Primaria y los dos primeros cursos de la ESO, se evidencia el mayor peso que se atribuye a la geometría en el plano (C1) y a la geometría en el espacio (C4) en comparación con los demás descriptores.

Según Oliveira, López y Cardoso (2016), en la estructura del currículo, la geometría en el espacio se introduce como una extensión de la geometría plana: el estudio de los objetos espaciales se inicia en las fases previas, partiendo de los conceptos primitivos de rectas, puntos, segmentos, curvas y planos, para luego extenderse al cálculo de áreas y volúmenes de regiones sólidas. Este hecho es de especial importancia, ya que los conocimientos espaciales y sus interrelaciones no se pueden enseñar desvinculados de la geometría plana.

En el tercer curso de la ESO, se observa una diferencia significativa con respecto a los anteriores: la distribución equilibrada de las diferentes familias de contenidos (descriptores) en el currículo. Destaca, además, el hecho de que los contenidos de trigonometría (C3) no se estudian durante este curso. En ambas opciones, se introducen nuevos conceptos sobre geometría en el espacio (C4) y geometría analítica (C5). En el primer caso, se describe el globo terráqueo y las coordenadas geográficas (latitud y longitud). En el segundo, se introducen diferentes expresiones de la ecuación de la recta, giros, simetrías y traslaciones.

Las principales diferencias entre las modalidades de Enseñanzas Académicas y Aplicadas se observan en los ámbitos de la geometría en el espacio (C4) y el uso de las tecnologías (C6). En la modalidad de Enseñanzas Académicas, se trabajan intersecciones de planos y esferas y planos de simetrías en los poliedros (C4), así como el uso de herramientas informáticas para el estudio de la geometría (C6).

Respecto al cuarto curso de la ESO, al igual que ocurría para el tercer curso, se observa una distribución equilibrada de todos los contenidos de geometría del currículo. No obstante, se aprecian diferencias evidentes entre las modalidades de Enseñanzas Académicas y Aplicadas: mientras que en la primera opción se introducen conceptos nuevos, la segunda representa un repaso de los temas aprendidos en fases anteriores. En la modalidad de Enseñanzas Académicas, se introduce la trigonometría (C3) y algunas nociones básicas de geometría analítica (C5): en trigonometría, se estudian las razones trigonométricas y las relaciones métricas en los triángulos; en geometría analítica, se inicia la geometría analítica en el plano (coordenadas de vectores, ecuaciones de la recta, paralelismo y perpendicularidad).

En ambas modalidades, el currículo hace referencia al uso de *software* de geometría dinámica para el aprendizaje de los conceptos y propiedades.

En cuanto a los cursos de Bachillerato en la modalidad de Ciencias, durante el primer curso se destaca la importancia de la trigonometría (C3), introduciendo nuevos conceptos y profundizando en otros vistos anteriormente: razones trigonométricas de ángulos suma, diferencia, doble y mitad, fórmulas de transformaciones trigonométricas, teoremas de seno, coseno y tangente, resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas y resolución de triángulos. También se introduce el estudio de las funciones trigonométricas en el bloque de análisis. Otro campo que asume un papel destacado es la geometría analítica (C5), en la cual se trabajan nuevos conceptos, tales como producto escalar, bases ortogonales y ortonormales, y se profundiza en otros ya estudiados, como el concepto de módulo. Además, se presta especial atención a la geometría plana (C1), introduciendo el tema de las cónicas, sus ecuaciones y elementos.

El segundo curso de Bachillerato está centrado en la geometría analítica (C5) y no trabaja los descriptores C1 a C4. En este contexto, se refuerzan los conceptos ya aprendidos y se introducen otros nuevos, como los productos vectorial y mixto y su significado geométrico, además de las ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.

En resumen, desde el tercer ciclo de Educación Primaria hasta el segundo curso de la ESO, los ámbitos más trabajados de la geometría son la geometría en el plano y la geometría en el espacio. En el tercer y cuarto cursos de la ESO, hay una distribución equilibrada de diferentes campos de la geometría: en tercer curso, todos los descriptores están presentes, excepto la trigonometría; en cuarto curso, se observa una diferencia significativa entre las modalidades de Enseñanzas Académicas y Aplicadas, puesto que tanto la trigonometría como la geometría analítica adquieren especial relevancia en el primer caso. Durante el Bachillerato, la trigonometría y la geometría analítica asumen el protagonismo de las clases.

A pesar de que las prioridades del currículo son diferentes en cada una de las etapas, existe un tratamiento en espiral de la mayor parte de contenidos, ya que los temas se reproducen continuamente y se profundizan progresivamente a lo largo de las etapas. Un claro ejemplo de este tratamiento puede observarse en el estudio de la geometría analítica: el primer contacto con este campo de la geometría se establece al comienzo del ciclo, con la introducción del sistema cartesiano, los puntos y desplazamientos en el plano; posteriormente, se estudian las rectas y las ecuaciones que las determinan a través de las funciones lineales y afines; en la última etapa (Bachillerato), se produce un salto hacia las operaciones con vectores y la geometría analítica en el espacio tridimensional.

Esta estructura del currículo es corroborada por la Teoría de Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1976). De acuerdo con esta teoría, el aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva de quien aprende, de forma no arbitraria y sustantiva o no literal (Rodríguez, 2004). Según Moreira (como se citó en Rodríguez, 2004), esta interacción se produce cuando se relaciona el conocimiento objeto de estudio con otras ideas, conceptos o proposiciones ya presentes en la estructura cognitiva del aprendiz y, es lo que dota de significado a ese nuevo contenido.

A lo largo de esta espiral, se pretende interrelacionar conceptos y profundizar en ellos, trabajando continuamente hacia un mayor grado de abstracción.

Analizando la evolución curricular relativa al tema de resolución de triángulos, se observa que, pese a que el tema en cuestión se desarrolla progresivamente a lo largo de todas las etapas, de un curso a otro varía el contexto en el que se encuadra (es decir, en qué campo de las Matemáticas aparece como elemento de estudio).

En el tercer ciclo de Educación Primaria, este tema se estudia en el ámbito de la geometría en el plano (C1). Por su parte, en el primer y segundo curso de la ESO, tanto los triángulos como la semejanza son cuestiones centrales y se trabajan en la geometría en el plano (C1) y en la proporcionalidad geométrica (C2). En estos cursos, se repasan los conceptos anteriores y se extiende el tema con la introducción de algunos lugares geométricos (mediatriz y bisectriz) y el teorema de Pitágoras

En el tercer curso de la ESO, la semejanza adquiere un papel relevante con la introducción del teorema de Tales (C2), mientras que la resolución de triángulos está presente en la geometría en el plano y en el espacio (C1 y C4), cuando se calculan áreas y perímetros de figuras planas y áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.

El salto más importante se produce en cuarto curso de la ESO con la introducción de la trigonometría (C3), que permite a los alumnos resolver triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. En esta etapa, la semejanza también desempeña un papel destacado en la resolución de triángulos (para el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes) a través de los criterios de semejanza (i.e., teorema del cateto y teorema de la altura en triángulos rectángulos).

En Bachillerato, al igual que en el último curso de la ESO, el conocimiento del triángulo continúa consolidándose y profundizándose a través de la trigonometría. Sin embargo, en esta nueva etapa, destaca su aplicación en el ámbito de la geometría analítica. Diversos temas de geometría analítica se convierten en herramientas fundamentales para un análisis más profundo de los triángulos y su resolución. De esta manera, se desarrolla el uso del razonamiento deductivo con un alto grado de formalización y abstracción.

El enfoque adoptado en la enseñanza del tema de resolución de triángulos permite al alumno familiarizarse con la materia progresivamente, a medida que avanza en su etapa educativa (Goñi *et al.*, 2000). De esta forma, se promueve un aprendizaje efectivo y el desarrollo de un enfoque formal y abstracto de los conceptos.

5.2 Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

En este apartado se discute la conformidad entre el currículo actual y los libros de texto analizados, con relación al tema de resolución de triángulos.

El libro de texto analizado de primer curso de la ESO cumple con los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables previstos en el currículo actual, incluidos aquéllos relativos al uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (C6). El libro amplía incluso los contenidos establecidos en el currículo, ya que presenta un capítulo dedicado a la geometría espacial (C4), en el que introduce la teoría de los poliedros y los cuerpos de revolución (temas previstos oficialmente para segundo curso de la ESO). Respecto al uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, aunque el libro es anterior al currículo actual (2014), está en correspondencia con él, ya que presenta una sección dedicada al uso de una plataforma matemática, *Cabri*, y propone varias actividades de geometría (de tipo ejercicios y problemas), cuya resolución debe realizarse a través de la misma.

Por su parte, el libro de texto de segundo curso de la ESO cumple también con el currículo oficial (contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables), en lo que respecta a los temas de geometría relacionados con la resolución de triángulos. Este libro inicia la parte de geometría con un capítulo en el que revisa el estudio de los ángulos en el plano (C1), un tema ya visto en el curso anterior. En los siguientes capítulos, presenta los temas incluidos en el currículo para este curso, a saber: semejanza, teorema de Tales (C2), teorema de Pitágoras (C3), poliedros y cuerpos de revolución (C4). Cabe destacar que el libro incluye referencias y enlaces a páginas *web* (como la plataforma Descartes), con actividades interactivas para comprobar los teoremas, repasar y aplicar la teoría aprendida. Por tanto, cumple también con los contenidos y estándares de aprendizaje evaluables relativos al uso de las tecnologías de la información y la comunicación (C6).

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, las actividades propuestas en el libro de texto de tercer curso de la ESO reflejan gran parte de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que incluye el currículo relativos a la resolución de triángulos. Sin embargo, se ha verificado la ausencia en el libro de los estándares de aprendizaje 1.2, 2.2 y 3.1 de la opción de Enseñanzas Académicas, correspondientes a los estándares 1.3, 2.1 y 3.1, respectivamente, de la opción de Enseñanzas Aplicadas. Tales ausencias, discutidas previamente en el apartado 4.3, se deben a una exposición limitada de los temas de relaciones angulares y semejanzas. Por un lado, el libro limita las relaciones angulares a la suma de ángulos de los polígonos y a los ángulos de la circunferencia (inscrito y central). Por otro, la semejanza se reduce al estudio de los criterios de semejanza y los triángulos en posición de Tales. No obstante, a lo largo del texto se incluyen referencias a páginas *web* en las que los alumnos pueden ampliar sus conocimientos sobre estos temas, si el docente lo considera oportuno.

Finalmente, el libro de texto dedica un espacio significativo al teorema de Pitágoras y sus aplicaciones algebraicas, tema que no está incluido explícitamente en el currículo actual de tercer curso.

El libro de cuarto curso de la ESO reúne los contenidos, criterios y estándares aplicables a la resolución de triángulos previstos en el currículo actual. Aunque no están directamente relacionados con el tópico analizado, los estándares de aprendizaje del bloque de geometría analítica (C5) están presentes en las actividades relacionadas con la resolución de triángulos en el ámbito de la geometría analítica.

Cabe señalar, en relación con el estándar 3.6 del bloque de geometría de la modalidad de Enseñanzas Académicas ("*Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características"*), que el libro presenta, a lo largo de los capítulos, diversas referencias a páginas *web* en las que los alumnos pueden practicar los conceptos estudiados mediante recursos tecnológicos interactivos.

Por último, se verifica una coherencia total del libro de primer curso de Bachillerato con el currículo, ya que las actividades propuestas responden a los contenidos y requisitos descritos por los estándares de aprendizaje relativos a la resolución de triángulos. Respecto al uso de las nuevas tecnologías (C6), el libro analizado contiene un enlace a un centro de enseñanza en línea, e incluye además un CD-ROM en el que se pueden encontrar enlaces, bibliografía y actividades interactivas relacionadas con la resolución de triángulos.

En conclusión, se observa que, en general, los libros de texto cumplen con los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables establecidos en el currículo oficial (con la excepción de los estándares señalados en el libro de texto de tercer curso de la ESO).

5.3 Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Para el análisis de ausencias y presencias descrito a continuación, se ha utilizado como libro de referencia el texto *Trigonometry* (Gelfand y Saul, 2001).

Dicho texto permite comprender, en relación con la geometría y la trigonometría (campos a los que pertenece el tema analizado), que el orden en que se presentan los diferentes contenidos del currículo se justifica por la naturaleza de los conceptos y por la forma en que se relacionan. Por un lado, muchos resultados de la geometría preparan el escenario para introducir los conceptos de la trigonometría; por otro, la trigonometría, junto con el álgebra, son herramientas analíticas necesarias para comprender la geometría, permitiendo un análisis más profundo y un conocimiento más amplio sobre cada una de las figuras geométricas (Gelfand y Saul, 2001)

El texto *Trigonometry* evidencia que la comprensión de esta interrelación entre los diferentes campos de las Matemáticas es necesaria y fundamental para el desarrollo de un verdadero razonamiento matemático. En este sentido, destacan dos aspectos relevantes: que los alumnos sean conscientes de cómo se desplazan de un campo a otro y que usen su razonamiento de una manera creativa para llegar por sus propios medios a nuevos conceptos y teoremas matemáticos.

En los siguientes párrafos, se describen algunos puntos de conexión entre el texto de referencia, el currículo y los libros de texto y, principalmente, se discuten las ausencias observadas, ya que la reflexión sobre las mismas nos puede conducir a una enseñanza más cercana y eficaz de las Matemáticas.

Como punto de concordancia entre el texto *Trigonometry*, el currículo y los libros de texto, destaca el teorema de Pitágoras, que constituye la herramienta más potente en geometría para resolver triángulos. El libro adopta el enfoque griego para probar este teorema, interpretando los cuadrados de los lados como áreas de cuadrados adyacentes a ellos. Este enfoque está presente en los libros de texto, y se menciona también en los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo oficial.

El libro de referencia presenta una exposición creativa y constructiva de diferentes temas de la geometría y la trigonometría, que, en general, están ausentes de los libros de texto y del currículo oficial. Por ejemplo, cabe mencionar la definición del seno (o coseno) de un ángulo. La mayoría de los libros definen el seno de un ángulo a partir de una fórmula: la razón entre la longitud del lado opuesto al ángulo y la hipotenusa, considerando que dicho ángulo pertenece a un triángulo rectángulo. Sin embargo, esta fórmula a menudo conduce a una idea mal construida o incompleta de la razón trigonométrica: no se transmite a los alumnos la noción de que existen muchos posibles triángulos, de diferentes tamaños, que incluyen dicho ángulo. En otras palabras, resolver una actividad relacionada con el cálculo del seno o el coseno de un ángulo α no es sólo encontrar un valor numérico, sino comprender que dicho valor depende sólo del ángulo α y no de un triángulo rectángulo en particular que lo contenga.

Un ejemplo de esta idea, que se menciona en el texto *Trigonometry*, es utilizar el triángulo 30º-60º-90º para explicar que, según la geometría, para una hipotenusa de longitud arbitraria L, la longitud del lado opuesto al ángulo más pequeño siempre será $L/2$, por lo que el seno de 30º siempre será 1/2 (independientemente de la longitud de los lados del triángulo rectángulo). Se pretende, de esta manera, que los alumnos comprendan cómo los ángulos determinan la proporción de los lados.

El texto *Trigonometry* hace sugerencias tan simples como mostrar a los alumnos el tamaño de las razones trigonométricas basándose en la geometría: puesto que la hipotenusa es el lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo (i.e., el lado opuesto al mayor de sus ángulos), el cociente de cualquier otro lado entre la hipotenusa nunca podrá ser mayor que 1. Otra sugerencia interesante del libro hace referencia a las razones trigonométricas de 0º y 90º: se presenta a los alumnos una serie de triángulos rectángulos, uno de cuyos ángulos tiende a 0º ó a 90º, manteniendo la hipotenusa constante y modificando la longitud de los catetos. A través de la observación, el alumno puede deducir por sí mismo, por ejemplo, la definición de seno y coseno de 90º.

Otro tema importante, destacado en el texto de referencia y ausente en los libros de texto, es el concepto de que las razones trigonométricas son adimensionales. Así, el seno de un ángulo debe entenderse como una relación entre dos longitudes y, por tanto, no dependerá del sistema de unidades utilizado para su medición.

El texto de referencia propone también actividades en las que se pide obtener razones trigonométricas que no son de cálculo directo (e.g., encontrar el seno de ángulos que pertenecen a triángulos obtusángulos o acutángulos). Por ejemplo, expresar el área del triángulo en términos de las longitudes de dos de sus lados y del ángulo que forman, u obtener dos expresiones diferentes para la altura del triángulo (i.e., la ley de los senos). Tales actividades permiten a los alumnos deducir fórmulas trigonométricas interesantes y, en definitiva, les hacen comprender que el procedimiento para resolver este tipo de problemas pasa por dibujar triángulos y utilizar adecuadamente las razones trigonométricas e identidades fundamentales necesarias.

La idea del texto será, pues, no restringir las actividades a ejercicios o problemas en los que los alumnos se limiten a aplicar una fórmula o propiedad para llegar a un determinado resultado, sino pedirles que demuestren ciertas propiedades haciendo uso de conocimientos adquiridos previamente.

Otra propiedad relevante de las razones trigonométricas, ausente en los libros de texto y no explicitada en el currículo, es la relación que existe entre el seno de un ángulo y la cuerda en una circunferencia circunscrita a un triángulo (que tiene que ver con otro importante teorema de la geometría relativo al ángulo inscrito). Según Gelfand y Saul (2001), los alumnos comprenderán mejor la ley de los senos cuando sean conscientes del significado geométrico del cociente entre la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto a ese lado en cualquier triángulo inscrito en la circunferencia.

De este modo, los alumnos podrán entender geométricamente el seno de un ángulo de tres formas diferentes: 1) en un triángulo rectángulo, como la razón entre las longitudes del lado opuesto al ángulo (agudo) y de la hipotenusa; 2) en un triángulo cualquiera, como la razón entre la longitud del lado opuesto al ángulo y el diámetro de la circunferencia circunscrita; y 3) en un triángulo cualquiera, como la razón entre el doble del área del triángulo y el producto de las longitudes de los dos lados que definen el ángulo.

Un análisis simple y fundamental para resolver triángulos se formula a través de la pregunta siguiente: conociendo los elementos de un triángulo (lados, ángulos, alturas, etc.), ¿cuántos de ellos son necesarios para construir el triángulo? El texto *Trigonometry* propone como actividad completar una tabla en la que cada fila representa un conjunto de tres medidas (por ejemplo, dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos). Los alumnos deben decidir, para cada conjunto de medidas, si éstas definen o no un triángulo y qué restricciones existen para que se pueda formar el triángulo. El objetivo de la actividad no es memorizar la tabla, sino que el alumno interiorice lo que la geometría nos dice (¡y lo que no nos dice!) sobre el triángulo (Gelfand y Saul, 2001). Éste es un ejemplo de una actividad simple y creativa, que activa el razonamiento matemático en los alumnos y que, a menudo, está ausente de los libros de texto.

Los contenidos matemáticos expuestos en el texto *Trigonometry* están esencialmente presentes en el currículo y en los libros de texto. La principal ausencia que este texto pone en evidencia en el currículo y, en consecuencia, en los libros de texto no está relacionada con los contenidos, sino con la forma en que éstos se exponen. Es obvio que la forma en que una asignatura se transmite a los alumnos define, en cierta medida, los estándares de aprendizaje evaluables (y viceversa, los estándares de aprendizaje considerados condicionarán también la exposición de los contenidos). Desde este punto de vista, en el currículo oficial hay una ausencia de estándares de aprendizaje que conduzcan a un enfoque más creativo de la enseñanza por parte de los docentes, tanto en la exposición de contenidos como en las actividades propuestas, de forma que los alumnos puedan desarrollar por sí mismos nuevos conocimientos.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de la resolución de triángulos en 3º de ESO

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster, se analiza el proceso de estudio de temas de geometría relacionados con la resolución de triángulos en una clase de 3º de ESO.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo, se analiza el libro de texto según el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. En el segundo, se describen las dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de los contenidos relacionados con la resolución de triángulos. El tercer capítulo contiene el proceso de estudio propuesto, que incluye actividades, cronograma y tareas. Finalmente, en el último capítulo, se justifica la propuesta presentada a partir de los análisis precedentes (análisis didáctico y análisis de dificultades y errores en el aprendizaje) y se discuten los errores más comunes en geometría observados entre los alumnos de una clase de 3º de ESO.

La síntesis del trabajo, las conclusiones y algunas cuestiones abiertas extraídas del análisis se describen en el último apartado.

Capítulo 6

Resolución de triángulos en el libro de texto de referencia

El propósito de este capítulo es aplicar el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática para desarrollar un análisis de los textos matemáticos referentes a la unidad didáctica *"Problemas métricos en el plano"* (Unidad 10 del libro de texto). Más específicamente, a los primeros cinco apartados de esta unidad, que integran los temas relacionados con la resolución de triángulos.

Esta teoría, desarrollada para el análisis de procesos de instrucción planificados en un libro de texto y prácticas reales de enseñanza-aprendizaje, busca evaluar la validez o aptitud de dichos procesos a través del análisis de su idoneidad.

Este estudio es fundamental en la labor docente, puesto que el libro de texto constituye un pilar fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje, sobre todo a partir de ESO, que debe reforzar la autonomía de los alumnos y el carácter mediador del docente. En este sentido, Godino, Font y Wilhelmi (2006) refieren "*que un libro de texto que tenga una baja idoneidad epistémica y semiótica implicará una mayor carga para el profesor y una menor autonomía para los alumnos"*.

6.1 Objetos matemáticos involucrados

Según Godino *et al.* (2006), para evaluar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción, es necesario establecer un sistema de referencia o un *significado de referencia* basado en un sistema de prácticas (operativas y discursivas), realizadas por una persona o compartidas dentro de la institución para la resolución de determinadas situaciones-problema.

Este sistema está compuesto por seis elementos primarios que deben ser activados (en su totalidad o parcialmente) durante la realización de cualquier práctica. Estos elementos se denominan objetos matemáticos y constituyen cualquier entidad, material o inmaterial, que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización y otorgando un mayor o menor grado de significado al tema estudiado.

Los seis elementos primarios son: lenguaje (simbólico, verbal y gráfico), situaciones, proposiciones (propiedades, lemas y teoremas), conceptos (definiciones), procedimientos (algoritmos, operaciones, rutinas matemáticas) –los tres últimos definen las reglas– y argumentos (que están soportados por conceptos, proposiciones y procedimientos).

Estos seis elementos se relacionan entre sí formando configuraciones que definen la idoneidad de un proceso de instrucción matemática. Las configuraciones son las redes de objetos que intervienen y emergen de un sistema de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, construyendo el significado de un objeto matemático. Según Godino *et al.* (2006), las configuraciones pueden ser cognitivas (conjunto de objetos personales) o epistémicas (conjunto de objetos institucionales), según la perspectiva que se considere en la práctica (personal o institucional, respectivamente).

A continuación, se describen los elementos del significado de referencia, relacionados con la resolución de triángulos, según el enfoque ontosemiótico:

Lenguaje	
Verbal	Demostración, prueba, ángulos, grados, vértice, polígonos regulares, circunferencia, radio, centro, diámetro, arco, cuerda, ángulo central, ángulo inscrito, semicircunferencia, paralela, secante, semejanza, figuras geométricas, triángulos, equilátero, isósceles, triángulos en posición de Tales, lados homólogos, proporcionales, razón, ángulos comunes, opuestos, criterio de semejanza, inscrito, circunscrito, lado, diagonal, apotema, teorema de Pitágoras, triángulo rectángulo, catetos, hipotenusa, cuadrado, áreas, clasificación de triángulos, obtusángulo, acutángulo, tangente, rombo, trapecio, pentágono, hexágono, octógono, segmento, base, altura, incógnita, proyección, sistema de ecuaciones, lugar geométrico, propiedad, distancia, mediatriz, equidistantes, extremos, puntos, bisectriz, arco capaz, incentro, circuncentro.
Simbólico	º (grados), $\widehat{POQ}$ (ángulo), $\widehat{PQ}$ (arco), α y β (ángulos), $\overline{PT}$ (distancia), PT (segmento), $\pm$, $=$, $\div$, /, $>$, $<$, a (hipotenusa), b y c (catetos), $a^2+b^2=c^2$, $\frac{a}{a\prime} = \frac{b}{b\prime} = \frac{c}{c\prime}$, $\hat{A}$ (ángulo), $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, r (radio), x (incógnita), h (altura), d (diagonal), P y Q (puntos), r y s (rectas), $dist(P,r)$ (distancia del punto P a la recta r), →, √, $\begin{cases} x+y=18 \\ \dots \end{cases}$ (sistema de ecuaciones).
Gráfico	Representación de ángulos inscritos en circunferencia y ángulo central. Cuadrilátero y triángulos rectángulos inscritos en una circunferencia. Triángulos semejantes. Representación de triángulos en posición de Tales Representación de polígonos, sus circunferencias circunscritas y sus diagonales para representar las relaciones angulares entre el polígono y los ángulos inscritos en la circunferencia y la semejanza de triángulos. Elementos de un triángulo rectángulo. Representación gráfica de la comprobación geométrica del teorema de Pitágoras. Representación gráfica de triángulos rectángulos, obtusángulos y acutángulos según las relaciones que se establecen entre las longitudes de sus lados. Ilustraciones en problemas de tangentes a circunferencias y los triángulos involucrados en su resolución. Proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Altura. Ilustraciones de trapecios y los triángulos rectángulos involucrados en su resolución. Ilustración de la mediatriz, bisectriz y arco capaz.

Situaciones	
Relaciones Angulares	**No contextualizados:** Ejercicios de cálculo de medidas angulares de arcos y valor de ángulos, involucrando ángulos inscritos en circunferencias. Ejercicios para hallar el valor de ángulos en figuras geométricas aplicando directamente las propiedades estudiadas y las relaciones angulares en ángulos formados por rectas que se cortan y paralelas cortadas por una secante. Problema involucrando triángulos rectángulos inscritos en la circunferencia. Problema en el que el alumno debe aplicar la teoría aprendida para llegar a otras leyes de la geometría (por ejemplo, la condición que debe cumplir un cuadrilátero para inscribirse en un círculo). Cuestiones de reflexión.

Semejanza de triángulos	**No contextualizados:** Problemas donde el alumno debe aplicar la semejanza de triángulos para encontrar otras relaciones matemáticas (por ejemplo, la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular). Ejercicios de aplicación directa de la razón de semejanza. Ejercicios de aplicación directa de la proporcionalidad para el cálculo de longitudes desconocidas. Problemas que primero requieren el reconocimiento de la semejanza entre triángulos y luego el cálculo de longitudes desconocidas mediante la aplicación de la proporcionalidad o de ángulos desconocidos en triángulos semejantes mediante la aplicación de las relaciones angulares en un polígono y entre rectas paralelas cortadas por secantes. Problemas de demostración de la semejanza (aplicación de los criterios de semejanza y relaciones angulares). Problemas que requieren el reconocimiento de triángulos semejantes y la aplicación de la proporcionalidad en situaciones matemáticas definidas por cuerdas y circunferencias. Ejercicio en que los alumnos deben hallar la razón entre las longitudes y áreas de varias figuras semejantes (ampliaciones o reducciones de una figura inicial), completar una tabla, reflexionar sobre los resultados y construir el significado de razón de semejanza. **Contextualizados**: Problemas de reconocimiento de la semejanza para solucionar situaciones en contextos reales, aplicando la proporcionalidad geométrica.
Teorema de Pitágoras	**No contextualizados:** Ejercicios en los que se indican las longitudes de los catetos y se pide la hipotenusa, o se da la hipotenusa y un cateto y se pide el otro cateto. Ejercicios donde se dan las medidas de los tres lados y se pide clasificar el triángulo en rectángulo, obtusángulo y acutángulo. Problema en el que se pide la demostración geométrica del teorema de Pitágoras. Problemas de aplicación del teorema de Pitágoras a polígonos regulares (rectángulos, triángulos, rombos, trapecios, hexágonos), que a veces requieren el uso de un sistema de ecuaciones. ✓ Se indican las tres longitudes de los lados del triángulo y se pide hallar la longitud de la altura sobre el lado mayor. ✓ Se indican las longitudes de los lados de un trapecio (el alumno debe dibujarlo) y se pide el cálculo de su altura. Problemas similares al descrito, involucrando circunferencias y cuerdas, en los que se pide hallar una determinada longitud, que puede ser el radio o la longitud de la cuerda. Problemas con mayor grado de dificultad, que implican el cálculo de longitudes desconocidas en figuras geométricas complejas.

Teorema de Pitágoras	**Problemas contextualizados** Aplicación del teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes desconocidas en contextos reales. Los alumnos deben identificar las figuras geométricas involucradas y las relaciones que se pueden establecer a partir de las longitudes conocidas. Ejemplos: ✓ Cálculo de la distancia del observador a un punto que se ve en el horizonte conociendo la altura del observador sobre la superficie terrestre. ✓ Cálculo del diámetro máximo de un tubo que se puede introducir en un orificio de sección triangular, conociendo las dimensiones de los lados del triángulo. ✓ Cálculo del diámetro mínimo de un túnel por el que circulará una vagoneta con sección rectangular conocida. ✓ Cálculo de las longitudes de cables que sujetan una antena, conociendo su altura y la distancia entre el punto de anclaje en el suelo y la base de la antena.
Lugares geométricos	**No contextualizados (cuestiones):** Definición de circunferencia como lugar geométrico. Representación gráfica de un lugar geométrico definido por una determinada propiedad enunciada en la cuestión. Definición de incentro y circuncentro como lugares geométricos. Identificación del lugar geométrico de los puntos P del plano que satisfacen una determinada propiedad (por ejemplo, que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto).

Conceptos	
Previos	Ángulos y sus relaciones (relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por rectas paralelas cortadas por una secante). Perpendicularidad y paralelismo. Medida y cálculo de ángulos en figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros en figuras planas. Elementos característicos de los triángulos, propiedad común a cada uno de ellos, y clasificación de triángulos según sus lados y ángulos. Mediatriz y bisectriz. Figuras semejantes. Razón de semejanza. Teorema de Pitágoras. Justificación geométrica. Aplicaciones.
Emergentes	Concepto de ángulo central y ángulo inscrito. Arco capaz. Teorema de Tales. Reconocimiento de triángulos semejantes. Aplicación del teorema de Tales y establecimiento de relaciones de proporcionalidad entre lados homólogos de triángulos semejantes para la resolución de problemas: cálculo de longitudes desconocidas y, especialmente, cálculo indirecto de longitudes en contextos reales.

Emergentes	Aplicación algebraica del teorema de Pitágoras para la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones, figuras geométricas más complejas o contextos más complejos. Definición de lugar geométrico. Definición de arco capaz, mediatriz, bisectriz y circunferencia como lugar geométrico.

Procedimientos	
Relaciones angulares	Aplicación de las relaciones angulares en una circunferencia para hallar medidas de ángulos y arcos. Aplicación de las propiedades de los ángulos internos de un polígono.
Semejanza de triángulos	Aplicación de los criterios de semejanza para justificar el procedimiento. Identificación de triángulos en situación de semejanza (i.e., en posición de Tales). Aplicación de la proporcionalidad geométrica entre lados homólogos de triángulos semejantes para el cálculo de longitudes desconocidas. Aplicación de la razón de semejanza para obtener los lados de triángulos semejantes. Descontextualización de enunciados de problemas contextualizados.
Teorema de Pitágoras	Aplicación directa del teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas y clasificar triángulos. Demostración geométrica del teorema de Pitágoras. Identificación de triángulos rectángulos en el contexto presentado en el enunciado (figura geométrica analizada), elección de la incógnita de forma adecuada, aplicación del teorema de Pitágoras para establecer relaciones entre las longitudes conocidas y la incógnita que se busca. En determinadas situaciones, obtención de un sistema de ecuaciones que permite hallar las longitudes desconocidas. Descontextualización de enunciados de problemas contextualizados.
Lugares Geométric	Representación de un determinado lugar geométrico basado en la propiedad común a todos sus puntos. Aplicación del concepto de lugar geométrico para justificar un procedimiento.

Propiedades	
Relaciones angulares	Los ángulos internos de un triángulo cualquiera suman 180º. Un polígono de n lados puede descomponerse en $n - 2$ triángulos. La suma de los ángulos de un polígono de n lados es $180\ (n - 2)$. La medida de cada ángulo de un n-ágono regular es $180\ (n - 2)/n$. La medida de un arco cualquiera es la misma que la del ángulo central correspondiente

Relaciones angulares	Un ángulo inscrito que abarca el mismo arco que un ángulo central mide la mitad que éste. Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
Semejanza de triángulos	Dos triángulos semejantes tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respetivamente iguales. Dos triángulos están en posición de Tales si tienen un ángulo común y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos. Dos triángulos son semejantes si se pueden colocar en posición de Tales. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales. Criterios de semejanza.
Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Si $b^2 + c^2 = a^2$, el triángulo es rectángulo. Si $b^2 + c^2 < a^2$, el triángulo es obtusángulo. Si $b^2 + c^2 > a^2$, el triángulo es acutángulo.
Lugares Geométricos	Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento. Los puntos P de la bisectriz del ángulo formado por las rectas r y s cumplen la condición: $dist(P, r) = dist(P, s)$. La distancia de todos los puntos de una circunferencia a su centro O es igual al radio r. De todos los puntos del arco capaz, el segmento AB se ve bajo un ángulo α.

Argumentos
Comprobación de las propiedades matemáticas. Justificación de propiedades matemáticas. Estructura de un razonamiento deductivo basado en los datos proporcionados para obtener la solución de una determinada situación-problema

6.2 Análisis global de la unidad didáctica

La unidad didáctica analizada en el libro de texto es la unidad 10, *"Problemas métricos en el plano"*, constituida por los siguientes apartados:

Apartado 1 – Relaciones angulares

Apartado 2 – Semejanza

Apartado 3 – Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

Apartado 4 – Aplicaciones algebraicas del teorema de Pitágoras

Apartado 5 – Lugares geométricos

Apartado 7 – Las cónicas como lugares geométricos

Apartado 8 – Áreas de polígonos

Apartado 9 – Áreas de figuras curvas

El estudio particular sobre la resolución de triángulos está relacionado con los cinco primeros apartados de esta unidad didáctica, es decir, relaciones angulares, semejanza, teorema de Pitágoras - aplicaciones, aplicaciones algebraicas del teorema de Pitágoras y lugares geométricos. La unidad didáctica estudiada se presenta en el Anexo A.

La unidad comienza con una breve introducción a la historia de la geometría, a través de la cual se presenta al alumnado a los dos grandes matemáticos, Tales de Mileto y Pitágoras, cuyas aportaciones a la geometría se van a estudiar en esta unidad didáctica.

Luego, la unidad se divide en los nueve apartados descritos anteriormente, que presentan la misma organización: se inicia por secciones con exposición de la teoría, a continuación hay una sección reservada para los ejercicios resueltos y, por último, una sección de actividades propuestas designada *"Piensa y Practica".*

Finalizados los nueve apartados en los que se expone la teoría, la unidad didáctica presenta un espacio reservado para las actividades propuestas, designado *"Ejercicios y problemas"*. Este apartado se subdivide en 6 secciones distintas: *"Practica"* (estructurada según el contenido trabajado), *"Piensa y resuelve"*, *"Resuelve problemas"* (que incluye los problemas contextualizados), *"Problemas +"* (que propone problemas con mayor grado de dificultad) y *"Reflexiona sobre la teoría"* (con cuestiones de carácter reflexivo). Todas las actividades propuestas en este apartado están clasificadas según su nivel de complejidad (niveles de dificultad 1, 2 ó 3), señalados al inicio de cada actividad.

A continuación, la unidad presenta un espacio designado *"Taller de Matemáticas"*, que se subdivide en 4 secciones: *"Infórmate"*, que incluye información adicional sobre Pitágoras; *"Lee y comprende"*, en la que se demuestra geométricamente el teorema de Pitágoras, mediante un procedimiento distinto al discutido en el respectivo apartado teórico; "*Generaliza"*, en la que se propone una actividad tipo situación para trabajar el concepto de razón de semejanza; y, finalmente, "*Entrénate resolviendo problemas"* , que contiene actividades que no tienen relación directa con el contenido teórico de la unidad didáctica, pero tratan de despertar el interés de los alumnos por las Matemáticas a través de problemas contextualizados.

La unidad termina con una sección de *"Autoevaluación"*, en la que se proponen siete actividades (ejercicios, problemas y cuestiones), que constituyen una revisión de todos los contenidos cubiertos en la unidad.

Como material complementario al libro de texto, la editorial ofrece recursos interactivos indicados en cada uno de los apartados teóricos en el margen de la página. Se trata de materiales complementarios y de ampliación accesibles a través del libro digital.

En las siguientes secciones, se presenta el análisis didáctico de los primeros cinco apartados de la unidad didáctica.

6.2.1 Apartado 1 – Relaciones angulares

Este apartado tiene como objetivo estudiar ángulos en los polígonos, ángulos centrales y ángulos inscritos.

La estructura de intervención comienza con la presentación del objeto matemático considerado, *ángulos en los polígonos*. A continuación, el texto describe propiedades ya conocidas por los alumnos, que sirven de argumento para la nueva propiedad que se pretende enseñar. La Figura 6.1 muestra los elementos primarios identificados en la primera sección de la propuesta de intervención del libro de texto

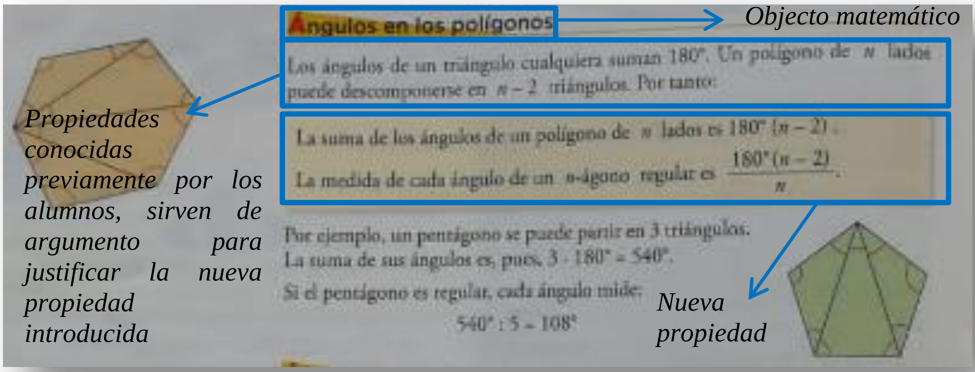


Figura 6.1: Elementos primarios en el texto sobre relaciones angulares en polígonos.

En los dos temas siguientes, ángulos en circunferencias, la estructura observada es similar, con algunas pequeñas diferencias. En primer lugar, se identifica el objeto matemático, ángulo central o ángulo inscrito, y a continuación se presenta al alumno su definición. Tras la definición, el texto describe una nueva propiedad que se aplica al nuevo concepto (para el ángulo inscrito, se incluyen dos propiedades, siendo la segunda consecuencia de la primera). Estos elementos se describen en la Figura 6.2.

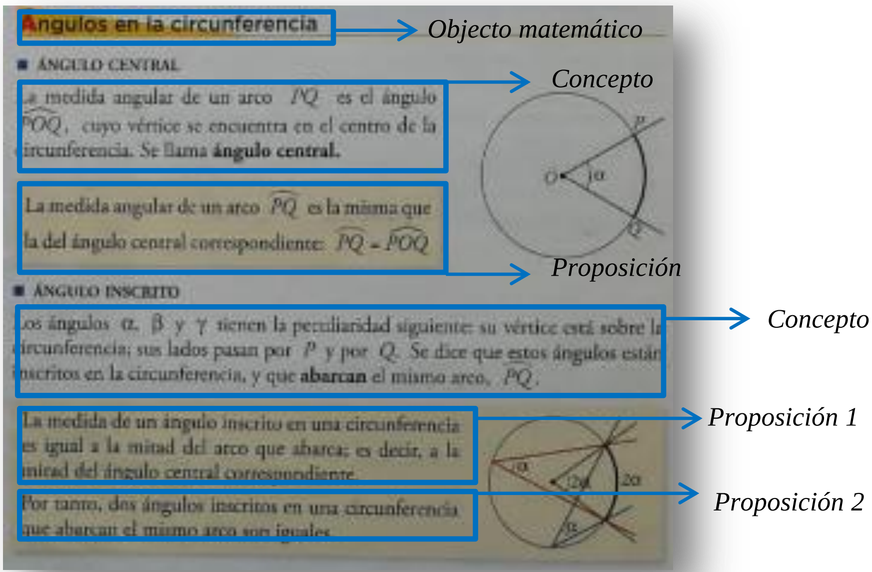


Figura 6.2: Elementos primarios en el texto sobre relaciones angulares en la circunferencia.

Para propiciar la comunicación matemática, expresando y soportando los conceptos y proposiciones, interviene el lenguaje. Se observa el uso del lenguaje verbal (e.g., dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales), simbólico (e.g., $\widehat{PQ} = \widehat{POQ}$) y gráfico (e.g., todas las ilustraciones de arcos y ángulos en las circunferencias incluidas en el lateral del texto).

La configuración epistémica asociada a este apartado es una red en la que intervienen mayoritariamente los conceptos, las proposiciones o propiedades y el lenguaje. Los elementos que se espera que emerjan de esta práctica serán los procedimientos y los argumentos que justifiquen la aplicación de determinadas propiedades y conceptos para la resolución de las situaciones-problema propuestas. En la Figura 6.3, se ilustra un esquema de la configuración epistémica identificada.

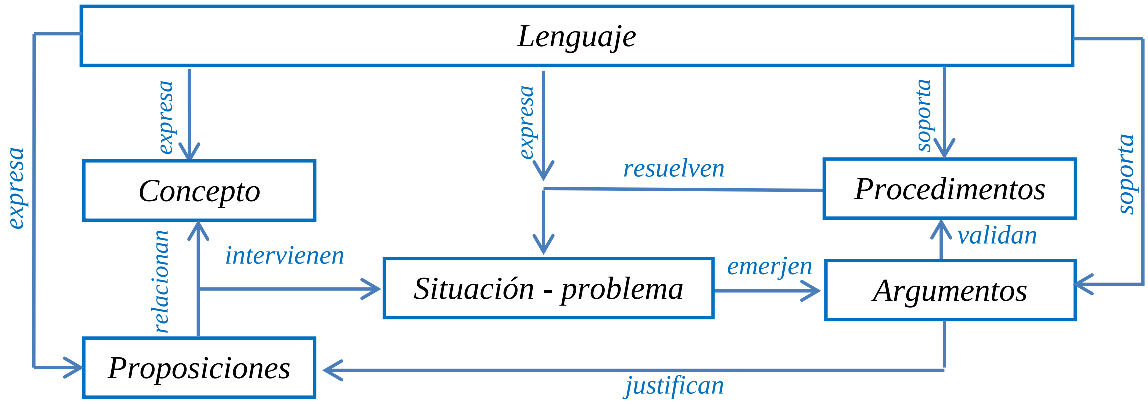


Figura 6.3: Esquema representativo de la configuración epistémica observada – Relaciones angulares.

La situación-problema está representada en el centro, ya que, desde el punto de vista del análisis ontosemiótico, constituye la razón de ser de la propuesta y el origen de la comprensión por parte del alumno, que motiva un conjunto de reglas (conceptos, proposiciones y procedimientos) y regula el lenguaje.

Respecto a los elementos que intervienen en la práctica y establecen la configuración observada, destaca la ausencia del argumento como objeto interviniente durante la introducción de los nuevos conceptos y proposiciones. El texto presenta las proposiciones a los alumnos sin el desarrollo de un argumento que responda a preguntas del tipo: *¿Por qué la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la del ángulo central?* En otras palabras, faltan argumentos que justifiquen las proposiciones presentadas, relacionen distintos conceptos y den significado matemático al nuevo conocimiento que se quiere construir.

Otro ejemplo que corrobora esta observación es el caso del ángulo inscrito en una semicircunferencia. El texto presenta inicialmente una determinada propiedad, previamente conocida, indicada en la Figura 6.4 como *Proposición 1*, que justifica la nueva propiedad que se quiere mostrar, indicada como *Proposición 2*. Sin embargo, no hay argumentos desarrollados que lleven a una conclusión lógica de la *Proposición 2*.

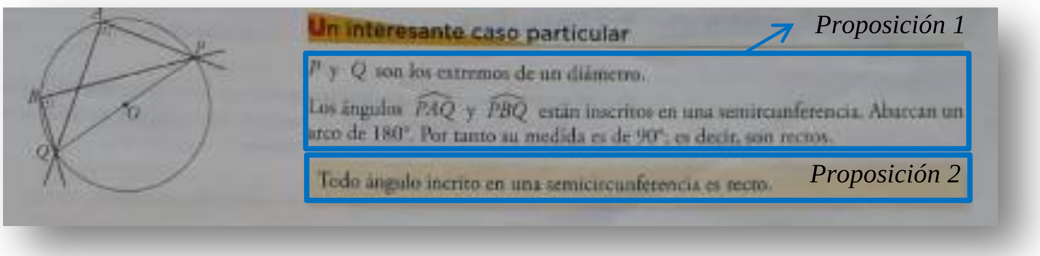


Figura 6.4: Elementos primarios en el texto sobre ángulo inscrito en una semicircunferencia.

El libro presenta una sección con un ejercicio resuelto, cuya solución sirve para establecer procedimientos que los alumnos deben aplicar en la resolución de las actividades que se proponen a continuación (ver Figura 6.5).

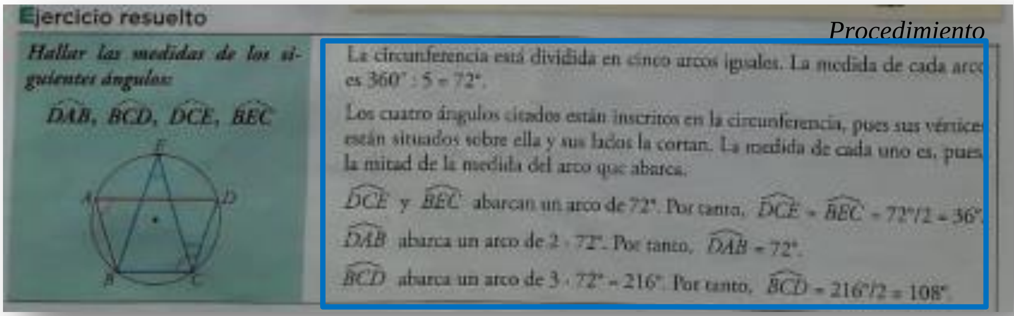


Figura 6.5: Ejercicio resuelto.

Las actividades propuestas se dividen en diferentes bloques. En la Tabla 6.6, se presenta un resumen de las actividades y su clasificación, según el tipo de actividad y el grado de dificultad.

Bloque	Página	Nº actividad	Tipo	Observaciones	Nivel dificultad
Piensa y practica	185	1 a 5	ejercicios	No contextualizados	-
Practica	198	1 a 4	ejercicios [a)]	No contextualizados.	1
		5 y 6	problemas	No contextualizados.	1 y 2
Piensa y resuelve	201	28	problema	No contextualizado	1
Problemas +	203	52	problema [b)]	No contextualizado	3
		53y 54	problema [c)]	No contextualizado	2
Reflexiona sobre la teoría	203	55	cuestión	No contextualizado	1
Autoevaluación	206	1	ejercicio	No contextualizado	-

Tabla 6.6: Resumen de las actividades propuestas en el apartado 1 sobre relaciones angulares.

a) y b) En estos ejercicios, es necesario el uso de conocimientos previos sobre relaciones angulares (no incluidos en el libro).

c) El problema 53 requiere la articulación de los conocimientos aprendidos para probar una condición o ley matemática y exige el desarrollo del lenguaje verbal para la comunicación de una propiedad.

En la Figura 6.7, se muestra la distribución de las actividades según el tipo (se contabilizan todas las actividades relacionadas con este tema) y el grado de dificultad (se contabilizan sólo las que están clasificadas).

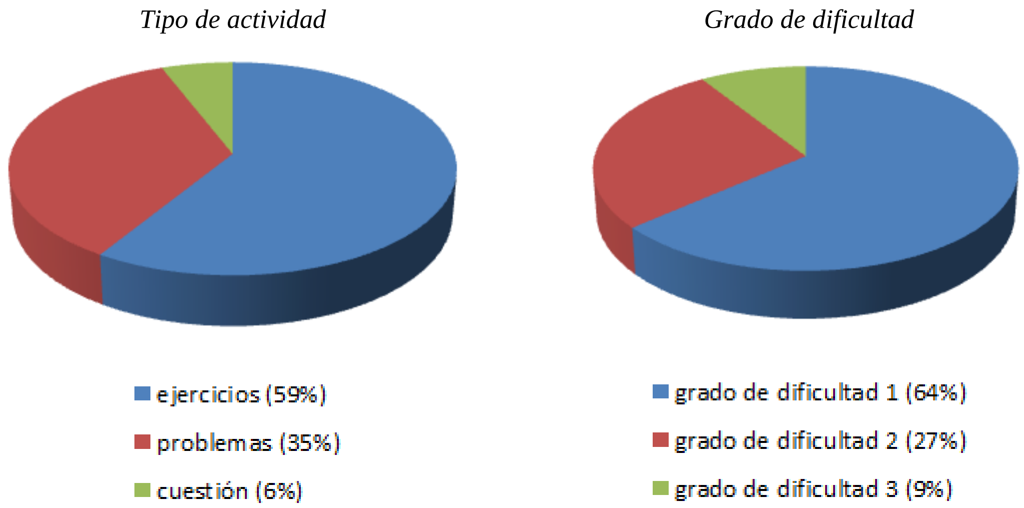


Figura 6.7: Distribución de las actividades según el tipo y el grado de dificultad – Relaciones angulares.

6.2.2 Apartado 2 – Semejanza de triángulos

Este apartado tiene como objetivo desarrollar el concepto de semejanza, las condiciones para la semejanza de triángulos, triángulos en posición de Tales y criterios de semejanza.

La estructura de intervención propuesta comienza con la presentación del objeto matemático que se va a estudiar, *semejanza de triángulos*. Luego, el texto incluye una definición general para la semejanza y describe las propiedades matemáticas que la determinan. En la Figura 6.8, se señalan los elementos primarios identificados en la primera sección del libro de texto.

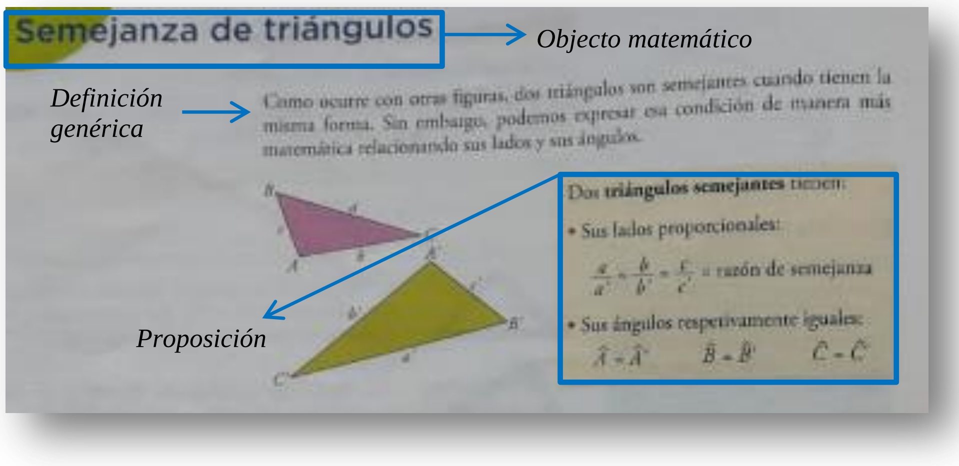


Figura 6.8: Elementos primarios en el texto sobre semejanza de triángulos.

En la siguiente sección, se identifica el objeto matemático de estudio *triángulos en posición de Tales* y se presenta la definición de este concepto. Tras la definición, se menciona la propiedad relacionada con el concepto anterior: *dos triángulos son semejantes si se pueden colocar en posición de Tales.* Finalmente, el texto presenta un argumento para justificar que *si dos triángulos tienen dos ángulos iguales*, *se pueden colocar en posición de Tales* (i.e., se verifica el concepto) *y*, *por tanto*, *son semejantes* (i.e., se aplica la propiedad). En la Figura 6.9, se presentan los elementos primarios identificados en esta sección.

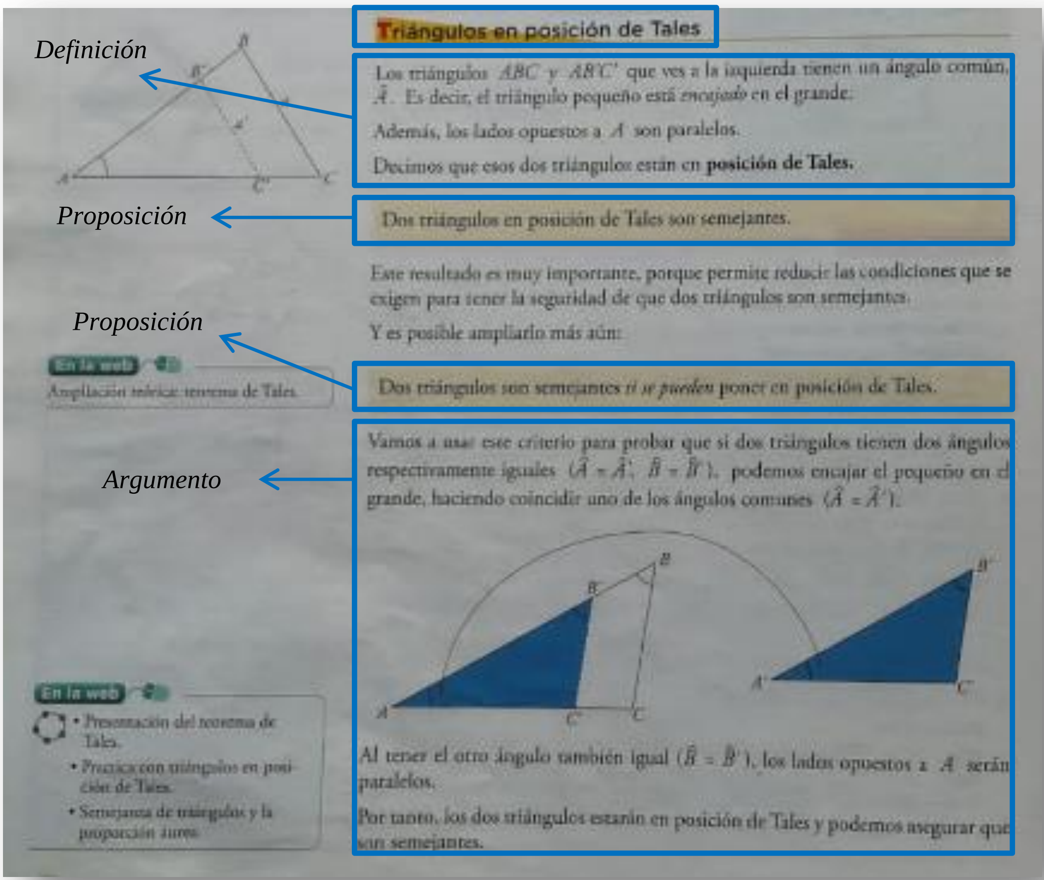


Figura 6.9: Elementos primarios en el texto sobre triángulos en posición de Tales.

En la última sección de este apartado, *criterio de semejanza de triángulos*, se refuerza la propiedad anteriormente expuesta, presentándola de la siguiente forma: *dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales (ya que hemos visto que se pueden colocar en posición de Tales).* A continuación, se desarrolla un argumento que pretende justificar la propiedad: *si dos ángulos son iguales, el tercer ángulo será igual* (aquí el texto supone que los alumnos recuerdan que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º) *y los lados serán proporcionales* (¿por qué?). En la Figura 6.10, se presentan los elementos primarios identificados en esta sección del texto

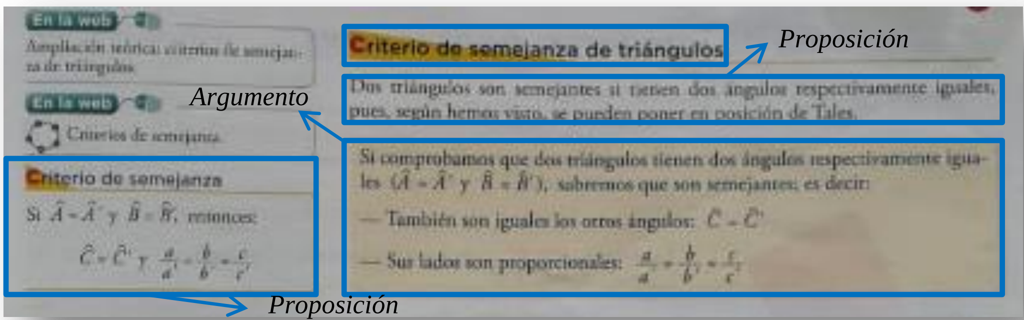
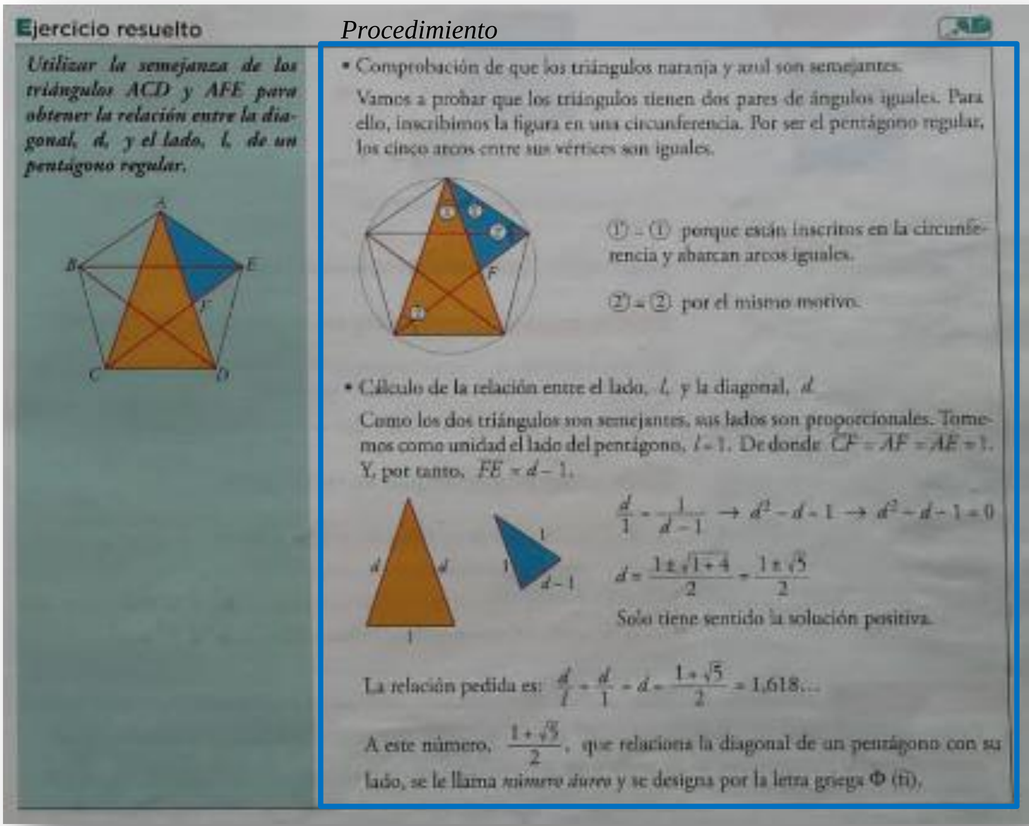


Figura 6.10: Elementos primarios en el texto sobre criterios de semejanza de triángulos.

Después de presentar la teoría, el libro desarrolla una sección que contiene un ejercicio resuelto que, además de servir para sistematizar los significados (Godino *et al.*, 2006), permite establecer procedimientos que los alumnos deben aplicar para la resolución de las actividades propuestas a continuación (ver Figura 6.11).



Ejercicio resuelto *Procedimiento*

Utilizar la semejanza de los triángulos ACD y AFE para obtener la relación entre la diagonal, d, y el lado, l, de un pentágono regular.

- Comprobación de que los triángulos naranja y azul son semejantes.

Vamos a probar que los triángulos tienen dos pares de ángulos iguales. Para ello, inscribimos la figura en una circunferencia. Por ser el pentágono regular, los cinco arcos entre sus vértices son iguales.

①' = ① porque están inscritos en la circunferencia y abarcan arcos iguales.

②' = ② por el mismo motivo.

- Cálculo de la relación entre el lado, l, y la diagonal, d.

Como los dos triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales. Tomemos como unidad el lado del pentágono, $l = 1$. De donde $\overline{CF} = \overline{AF} = \overline{AE} = 1$. Y, por tanto, $\overline{FE} = d - 1$.

$$\frac{d}{1} = \frac{1}{d-1} \rightarrow d^2 - d = 1 \rightarrow d^2 - d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Solo tiene sentido la solución positiva.

La relación pedida es: $\frac{d}{l} = \frac{d}{1} = d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$

A este número, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que relaciona la diagonal de un pentágono con su lado, se le llama *número áureo* y se designa por la letra griega Φ (fi).

Figura 6.11: Ejemplo de ejercicio resuelto sobre aplicación de la semejanza de triángulos para llegar a una ley o relación matemática.

Para generar la comunicación matemática, interviene otro elemento primario, el lenguaje. Se observa el uso del lenguaje verbal (e.g., dos triángulos en posición de Tales son semejantes), simbólico (e.g., $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$) y gráfico (e.g., todas las representaciones de triángulos que se observan en las Figuras 6.8, 6.9 y 6.11 presentadas anteriormente).

La configuración epistémica asociada a este apartado es una red, en la que intervienen los conceptos, las proposiciones o propiedades, los argumentos y el lenguaje. Los elementos que se espera que emerjan de esta práctica serán procedimientos y argumentos que justifiquen la aplicación de determinadas propiedades y conceptos para la resolución de las situaciones-problema propuestas en las actividades. En la Figura 6.12, se ilustra un esquema de la configuración epistémica que se identifica.

A continuación, se señalan tres aspectos que se consideran puntos de mejora y requieren de una atención particular del docente:

1) El texto presenta la razón de semejanza como resultado de una fórmula inmediata y no deja lugar a la construcción del significado de la razón de semejanza, aspecto directamente relacionado con el punto siguiente.

2) Aunque exista el argumento como elemento primario que interviene en la práctica, éste no demuestra al alumno por qué dos triángulos que se pueden colocar en posición de Tales son semejantes.
3) No se discuten distintas situaciones de semejanza y cómo identificarlas. Esta discusión permitiría al alumno establecer por sí mismo los criterios de semejanza de triángulos.

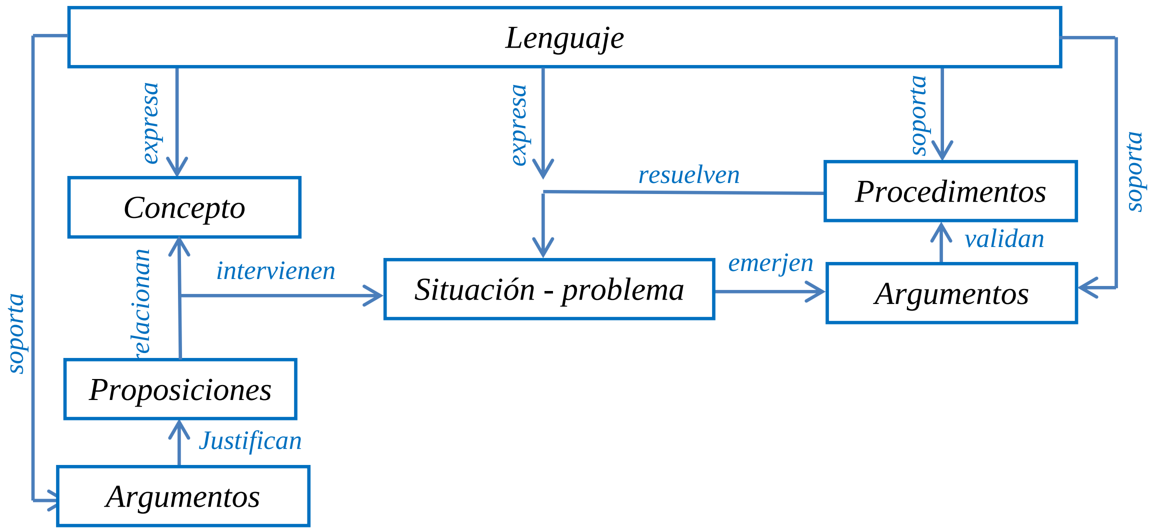


Figura 6.12: Esquema representativo de la configuración epistémica observada – Semejanza de triángulos.

Asimismo, sería interesante comenzar el texto con la presentación del teorema de Tales, verificándolo a través de una construcción geométrica sencilla, para después presentar su enunciado: *si dos rectas secantes se cortan con rectas paralelas, los segmentos que determinan son proporcionales*. De esta forma, se ampliaría el contexto de estudio de la proporcionalidad geométrica, extendiéndolo al análisis de la proporcionalidad aplicada a los triángulos. Por otra parte, la resolución de determinados problemas geométricos basados en el concepto de semejanza, tales como la división de un segmento en partes iguales, la construcción de polígonos semejantes o el uso escalas, previstos en el currículo actual, están ausentes del libro de texto.

Finalmente, la Tabla 6.7 presenta el resumen de las actividades propuestas en este apartado y su clasificación en cuanto al tipo y nivel de dificultad.

Bloque	Página	Nº actividad	Tipo	Observaciones	Nivel dificultad
Piensa y practica	187	1 y 2	problema [a)]	No contextualizados	-
Practica	198	7 y 8	ejercicios	No contextualizados.	1
		9	problema [b)]	No contextualizados.	2
Piensa y resuelve	201	30 y 31	problemas	No contextualizado	2 y 1
Resuelve problemas	202	41 y 42	problemas	Contextualizados	1 y 2
Problemas +	203	49	problema [c)]	No contextualizado	3
Taller matemáticas	204	Generaliza	situación [d)]	No contextualizado	-
Autoevaluación	205	2	ejercicios	No contextualizado	-

Tabla 6.7: Resumen de las actividades propuestas en el apartado 2 - Semejanzas.

a) El problema 2 requiere la articulación de lo aprendido para probar una relación o ley matemática.

b) Para la resolución de este problema es necesario el uso de conocimientos anteriores sobre relaciones angulares (rectas paralelas cortadas por una secante y suma de los ángulos internos de un triángulo).

c) La resolución implica la aplicación del teorema de Pitágoras además de la semejanza.

d) Esta actividad es muy interesante: se propone a los alumnos completar una tabla con la razón entre las longitudes de los lados y entre las áreas de una misma figura representada con distintos grados de reducción (figuras semejantes). La idea es que los alumnos observen los valores obtenidos y construyan por sí mismos el significado de figuras semejantes y razón de semejanza.

En la Figura 6.13, se muestra la distribución de las actividades según su tipo (se contabilizan todas las actividades relacionadas con este tema) y el grado de dificultad (se contabilizan sólo las que están clasificadas).

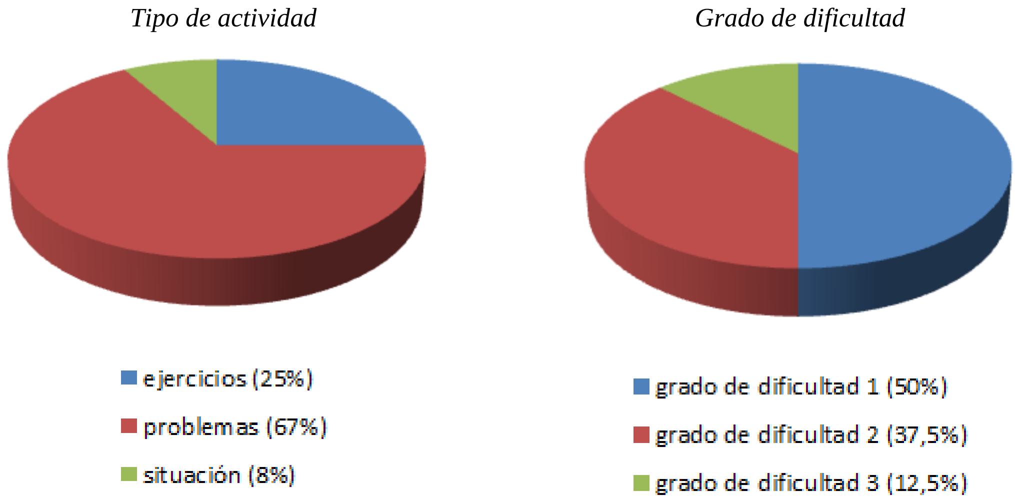


Figura 6.13: Distribución de las actividades según su tipo y grado de dificultad - Semejanza.

6.2.3 Apartados 3 y 4 – Teorema de Pitágoras, aplicaciones

En el apartado 3, se pretende repasar el teorema de Pitágoras, ya estudiado en el curso anterior, comprender la clasificación de triángulos atendiendo a la igualdad o desigualdad pitagórica y aplicar el teorema de Pitágoras para solucionar problemas de tangentes a circunferencias. En el apartado 4, se aprende a utilizar el teorema de Pitágoras para resolver problemas relacionados con figuras planas mediante la formulación de un sistema de ecuaciones.

La estructura de intervención propuesta comienza con la presentación del enunciado del teorema (la verdad que se ha de demostrar) y, a continuación, se ilustran las figuras geométricas que constituyen el argumento para probar el teorema. No obstante, el texto no desarrolla el argumento: muestra las figuras geométricas como sugerencia para la demostración del teorema y, más adelante, en la sección de actividades propuestas (actividad 4 de la página 188, Anexo A), pide a los alumnos que demuestren el teorema a partir de las dos descomposiciones incluidas en el texto.

En la Figura 6.14, se ilustran los elementos identificados, cuya descripción continúa en los siguientes párrafos.

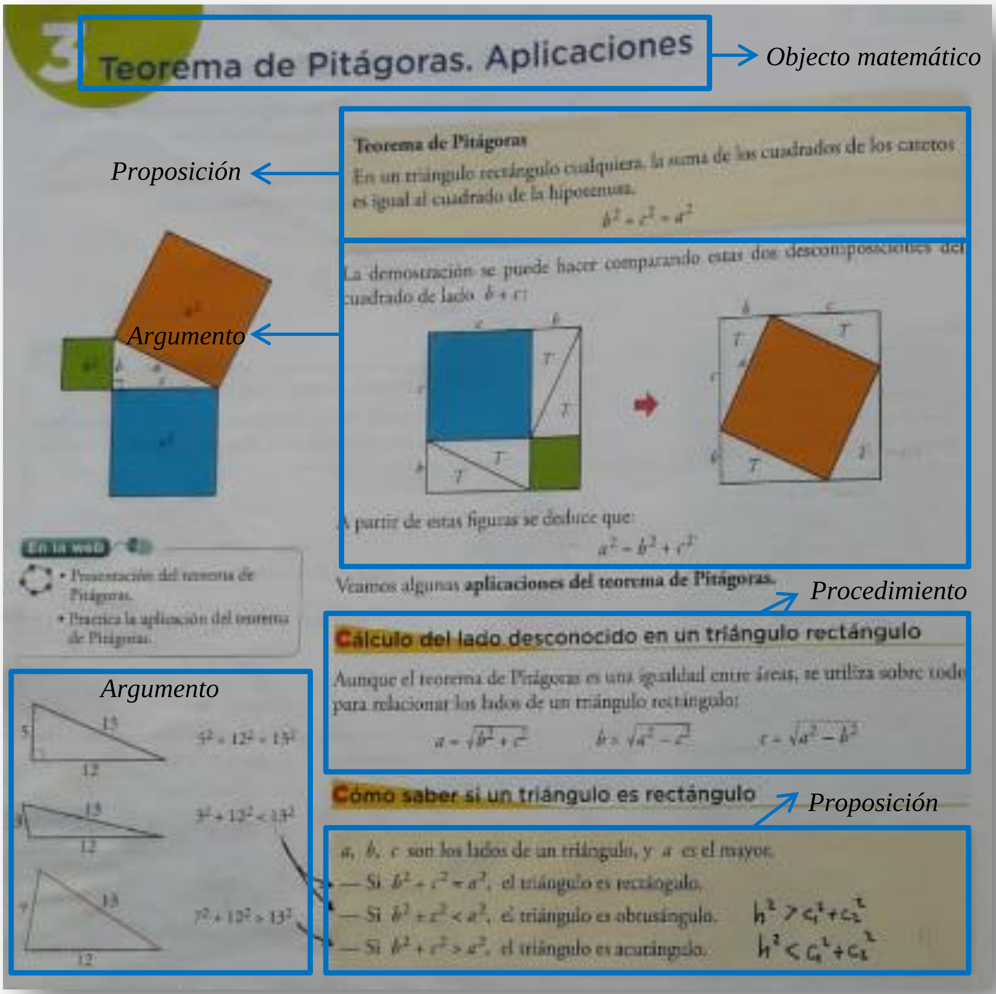


Figura 6.14: Elementos primarios en el texto sobre el teorema de Pitágoras, aplicaciones.

La siguiente sección, *cálculo del lado desconocido en un triángulo rectángulo*, establece el procedimiento que el alumno debe aplicar para encontrar las longitudes de los lados desconocidos de un triángulo rectángulo dado, expresando la igualdad pitagórica de diferentes formas.

En la última sección teórica, *cómo saber si un triángulo es rectángulo*, se presenta la propiedad establecida entre la relación pitagórica (de igualdad o desigualdad) y la correspondiente clasificación del triángulo. La descripción de esta propiedad se ilustra a través de tres triángulos representados en el margen de la página (rectángulo, obtusángulo y acutángulo), que pretenden transmitir a los alumnos la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo (i.e., de qué forma los lados determinan los ángulos).

Finalizada la presentación de la teoría, el libro incluye una sección con cuatro ejercicios resueltos sobre la aplicación del teorema de Pitágoras a la resolución de problemas que involucran tangentes a circunferencias. La exposición de la solución actúa como sistematización de los significados (Godino *et al.*, 2006) y establece procedimientos que los alumnos deben aplicar para resolver las actividades propuestas en la sección siguiente. En la Figura 6.15, se presenta uno de los ejemplos resueltos del libro

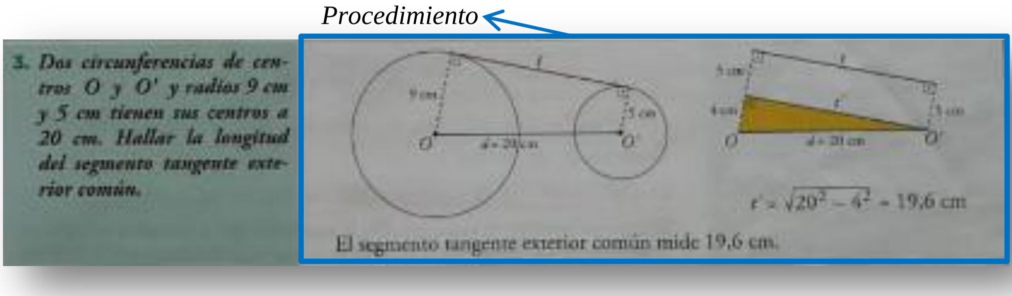


Figura 6.15: Ejemplo de ejercicio resuelto sobre la aplicación del teorema de Pitágoras para la resolución de problemas de tangentes a circunferencias.

El apartado 4, *aplicación algebraica del teorema de Pitágoras*, describe el procedimiento que se debe seguir para la resolución de problemas de geometría plana (cálculo de áreas y longitudes), a través de la formulación de un sistema de ecuaciones que resulta de la aplicación del teorema de Pitágoras. Se basa en la identificación de los triángulos rectángulos que se obtienen al dividir la figura original (triángulo, trapecio, etc.) mediante su altura. En este caso, se identifican las longitudes conocidas, se eligen las incógnitas adecuadamente y se aplica el teorema de Pitágoras.

Más adelante, el texto presenta dos ejemplos resueltos de la aplicación algebraica del teorema de Pitágoras a un triángulo y a un trapecio, sistematizando el procedimiento descrito en la teoría. En las Figuras 6.16 y 6.17, se muestran, respectivamente, el elemento identificado en el texto y uno de los ejemplos resueltos.

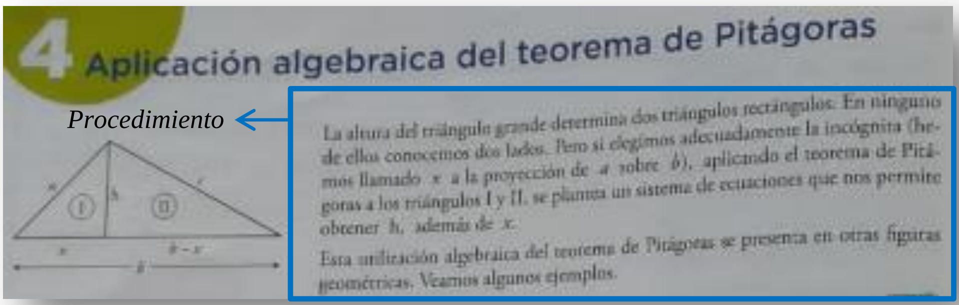


Figura 6.16: Elemento primario en el texto sobre Aplicaciones algebraicas del teorema de Pitágoras.

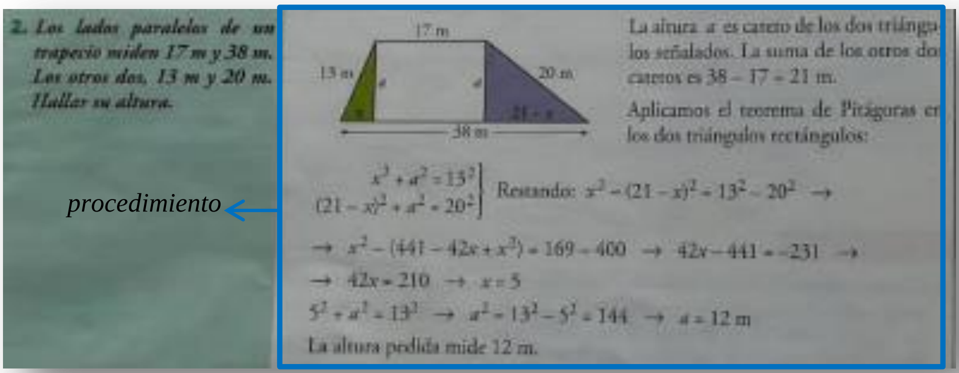


Figura 6.17: Ejemplo de ejercicio resuelto sobre la aplicación algebraica del teorema de Pitágoras para la resolución de problemas de geometría plana.

El lenguaje es otro elemento primario interviniente en la práctica. Se observa el uso del lenguaje verbal (e.g., en un triángulo rectángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa), simbólico (e.g., $b^2 + c^2 = a^2$) y gráfico (e.g., todas las figuras geométricas mostradas en la Figura 6.15, que representan y soportan gráficamente lo que se expone verbal y simbólicamente).

La configuración epistémica que se identifica en estos dos apartados relacionados con el teorema de Pitágoras es una red en la que intervienen definiciones, proposiciones, procedimientos y el lenguaje. A través de las actividades propuestas, se espera que emerjan los argumentos, que se justifiquen las propiedades y definiciones aprendidas y, por último, que se establezcan los procedimientos que conducirán a la solución del problema. La Figura 6.18 ilustra el esquema de la configuración epistémica identificada

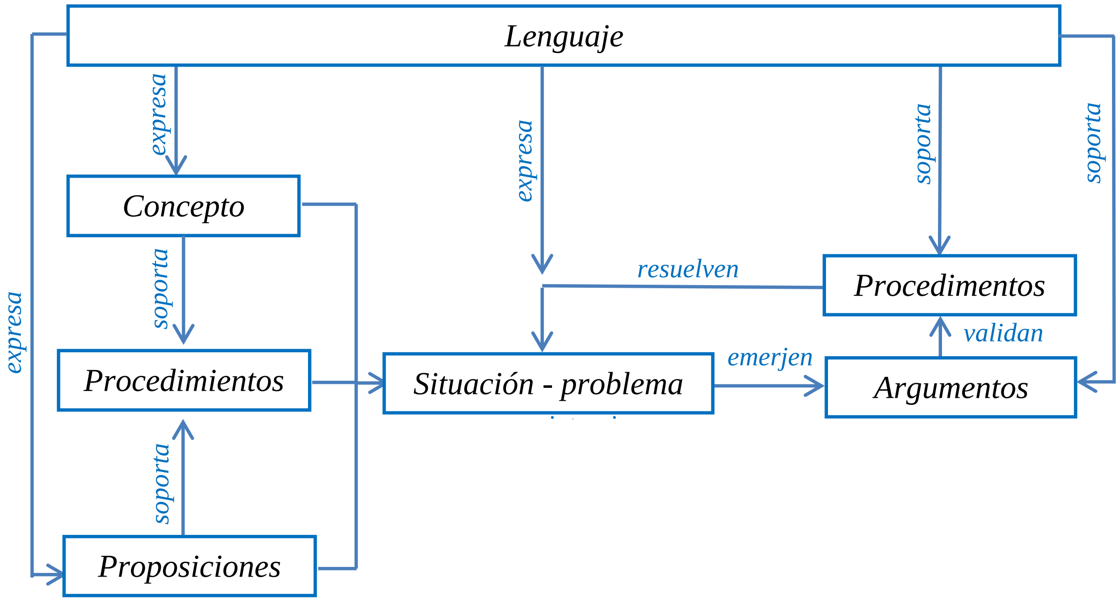


Figura 6.18: Esquema representativo de la configuración epistémica observada.

En este tipo de estructura, es fundamental proponer actividades que exijan a los estudiantes organizar sus argumentos antes de aplicar un procedimiento, con el fin de reducir el riesgo de una aplicación automatizada de lo aprendido.

En cuanto a las actividades propuestas, la Tabla 6.8 recoge un resumen de las mismas, según el bloque en el que se encuentran y su clasificación por tipo y grado de dificultad.

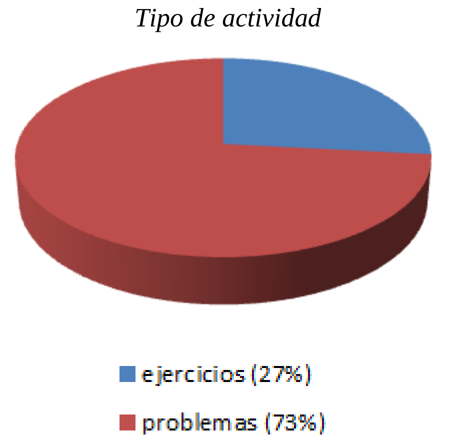
Bloque	Página	Nº actividad	Tipo	Observaciones	Nivel dificultad
Piensa y practica	188	1 a 3	ejercicio	No contextualizados	-
		4	problema [a)]	No contextualizado	-
	189	5, 7, 8 y 9	problema	No contextualizado	-
		6	ejercicio	No contextualizado	-
	190	1 y 2	problema	No contextualizado	-
Practica	199	10 y 14	ejercicios	No contextualizados.	1
		11, 12 y 13	problemas	No contextualizados.	2
Piensa y resuelve	201	32 y 33	problemas	No contextualizado	2
		36 y 37	problemas	No contextualizado	1

Bloque	Página	Nº actividad	Tipo	Observaciones	Nivel dificultad
Resuelve problemas	202	39, 44, 45, 46, 47	problemas	Contextualizados	1, 2, 2, 2, 3
Problemas +	203	50 y 51	problema	No contextualizado	3
Autoevaluación	205	3	problema	Contextualizados	-
		4 y 5	ejercicios	No contextualizado	-

Tabla 6.8: Resumen de las actividades propuestas en el apartado 2 - Semejanzas.

a) El problema 4 requiere la articulación de lo aprendido para probar una relación o ley matemática. Se le pide al alumno que pruebe el teorema de Pitágoras, a través de la comparación de dos figuras presentadas en el texto que representan un cuadrado de lado $b + c$. El problema es bastante interesante, ya que fomenta el pensamiento matemático y la experimentación fundamentada en los conocimientos del alumno. Sin embargo, el propio enunciado indica al alumno el primer paso hacia su resolución, lo que reduce significativamente el interés de la actividad.

En la Figura 6.19, se muestra la distribución de las actividades según su tipo (se contabilizan todas las actividades relacionadas con este tema) y el grado de dificultad (se contabilizan sólo las que están clasificadas).



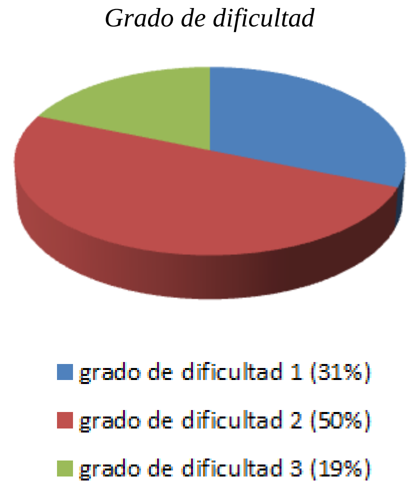


Figura 6.19: Distribución de las actividades presentes en el libro de texto según su tipo y grado de dificultad – Teorema de Pitágoras.

6.2.4 Apartado 5 – Lugar geométrico

El apartado 5 define el concepto de lugar geométrico y presenta las definiciones de mediatriz, bisectriz y arco capaz, ya conocidas por el alumnado, como lugares geométricos.

El texto comienza con la presentación de la definición de lugar geométrico. A continuación, se repasa el concepto de mediatriz y la propiedad que la caracteriza, activando en la mente de los alumnos sus conocimientos previos (antes de introducir la nueva definición de mediatriz como lugar geométrico). De igual modo, se define la bisectriz como lugar geométrico. Esta intervención es representada por el lenguaje verbal y sustentada por el lenguaje gráfico (mediante representaciones gráficas de la mediatriz y la bisectriz), que permite complementar la interpretación del texto escrito.

La Figura 6.20 muestra los elementos primarios identificados, cuya descripción continúa en los siguientes párrafos

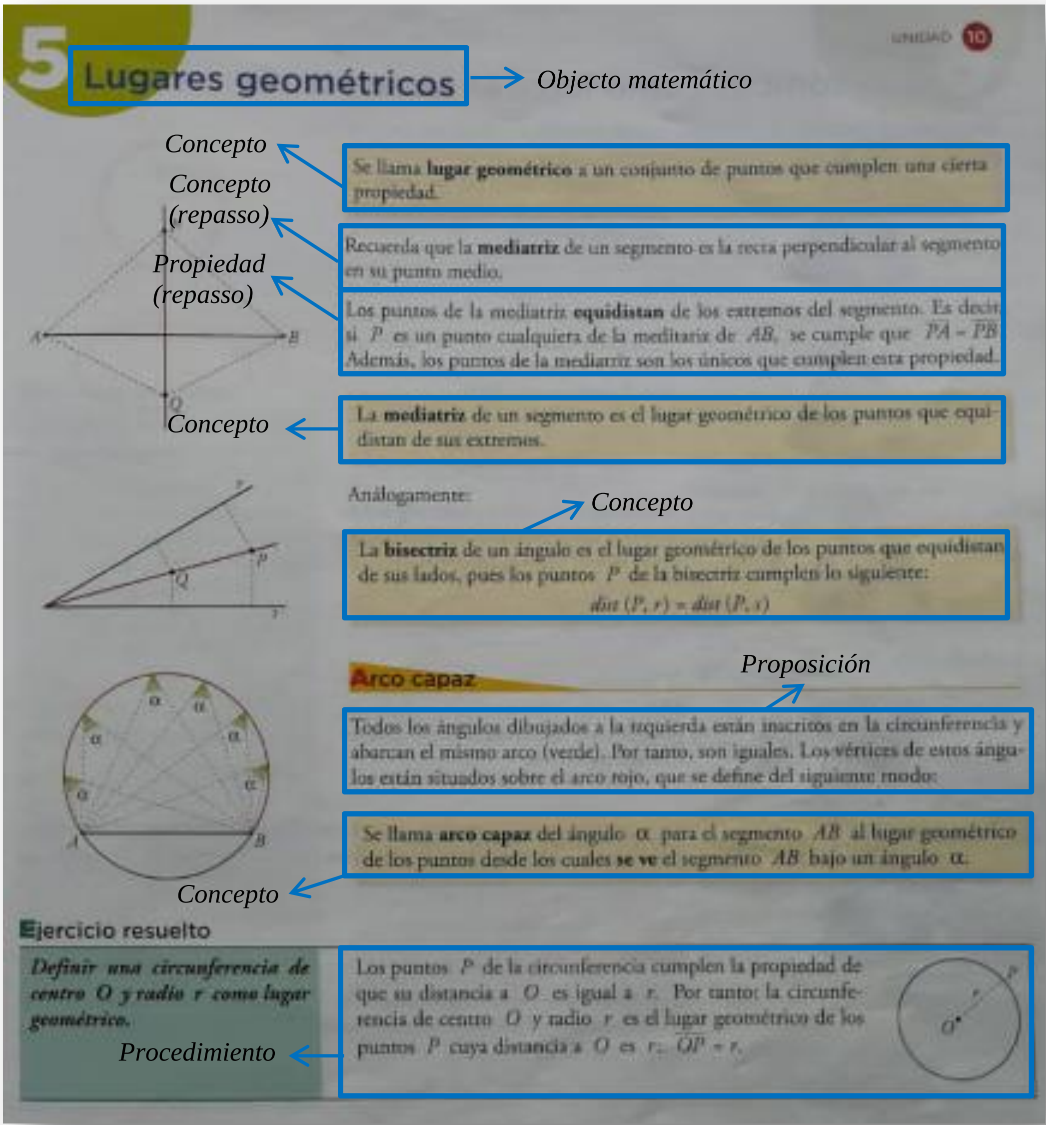


Figura 6.20: Elementos primarios en el texto sobre lugares geométricos.

En la segunda sección, *arco capaz*, el texto presenta la propiedad relativa a los ángulos inscritos en una circunferencia, cuyos lados cortan a la circunferencia en los mismos puntos. Después, se introduce el concepto de arco capaz como lugar geométrico. Para ello, el autor utiliza el lenguaje verbal y el lenguaje gráfico (representación de una circunferencia con ángulos inscritos que abarcan el mismo arco).

La configuración epistémica identificada en este apartado es una red en la que intervienen las definiciones, las proposiciones y el lenguaje. A través de las actividades propuestas, se espera que emerjan los argumentos que justifican las propiedades y definiciones aprendidas, permitiendo elaborar la respuesta al problema. Aunque en este caso no existen técnicas de cálculo, rutinas u operaciones, se ha considerado el elemento *procedimiento*, ya que es posible que el alumno establezca una técnica de actuación que funcione para este tipo de actividades. La Figura 6.21 ilustra el esquema de la configuración epistémica identificada.

.

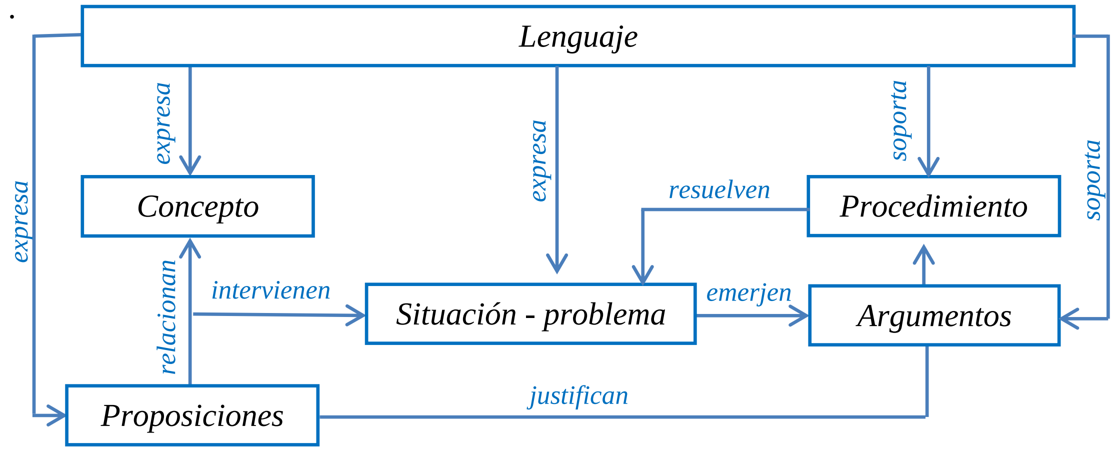


Figura 6.21: Esquema representativo de la configuración epistémica observada.

La Tabla 6.9 muestra el resumen de las actividades propuestas en este apartado, según el bloque en el que se ubican y su clasificación por tipo y nivel de dificultad.

Bloque	Página	Nº actividad	Tipo	Observaciones	Nivel dificultad
Piensa y practica	191	1 a 4	cuestión	No contextualizados	-
Practica	199	15 a 17	cuestión	No contextualizados.	1
Reflexiona sobre la teoría	203	56 y 57	cuestión	No contextualizado	1
Autoevaluación	205	6 a)	cuestión	No contextualizado	1

Tabla 6.9: Resumen de las actividades propuestas en el apartado 2 - Semejanzas.

En este caso, todas las actividades propuestas son de tipo cuestión y se caracterizan por un bajo grado de complejidad. Por este motivo, no se presentarán los gráficos relativos a la distribución de actividades relacionadas con este apartado.

6.2.5 Conclusiones

Se observa que las actividades propuestas en el primer apartado, *relaciones angulares*, son en su mayoría ejercicios, en menor medida problemas y, por último, cuestiones. Este patrón cambia significativamente en los siguientes apartados, s*emejanza y teorema de Pitágoras*, en los que los problemas asumen el liderazgo de las actividades y los ejercicios tienen un papel secundario.

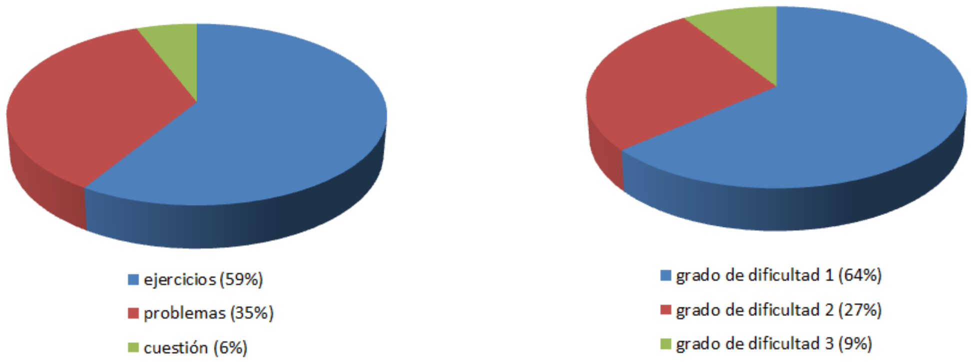
Se observa una tendencia similar en cuanto al nivel de dificultad de las actividades. En el primer apartado, *relaciones angulares*, las actividades con menor nivel de dificultad son las predominantes. Sin embargo, a medida que se avanza por los siguientes apartados, s*emejanza y teorema de Pitágoras*, las actividades con mayor grado de dificultad (niveles 2 y 3) ganan espacio: las de nivel 2 aumentan del 27% (relaciones angulares) al 37,5% (semejanza) y 50% (teorema de Pitágoras), mientras que las de nivel 3 se incrementan del 9% (relaciones angulares), al 12,5% (semejanza) y 19% (teorema de Pitágoras).

La Figura 6.22 ilustra los gráficos asociados a cada uno de los apartados mencionados.

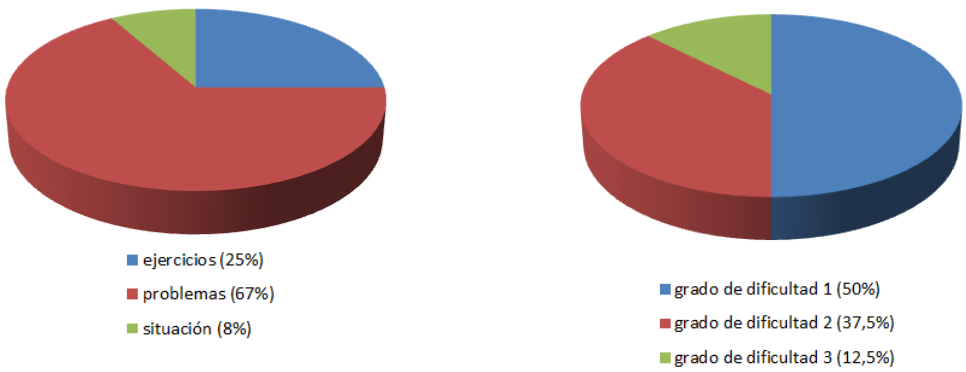
.

Tipo de actividades *Grado de dificultad*

Apartado 1 - Relaciones angulares



Apartado 2 - Semejanza



Apartados 3 y 4 – Teorema de Pitágoras

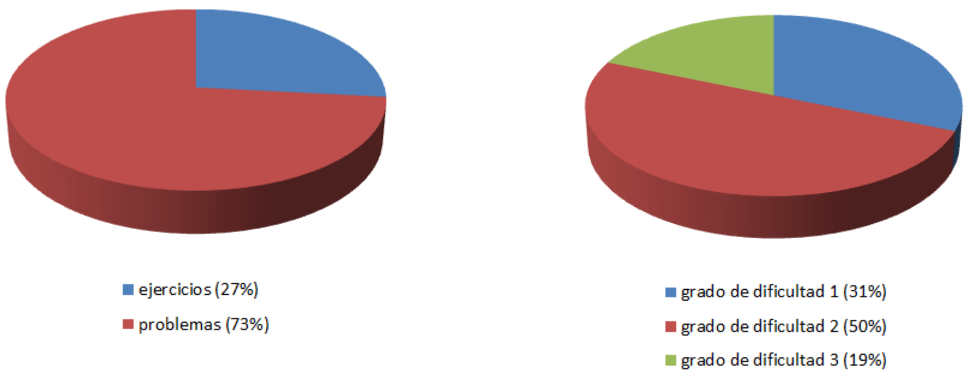


Figura 6.22: Síntesis de la evolución de las actividades en los primeros apartados de la unidad didáctica.

La evolución observada en el libro se considera muy positiva, puesto que las actividades de los niveles 2 y 3 (correspondientes a problemas) requieren, por parte del alumno, la articulación de conocimientos, conceptos y proposiciones aprendidas, que le permiten el desarrollo posterior de argumentos y procedimientos. Esto hace posible abordar resoluciones más formales o intuitivas, que agregan riqueza y variedad al proceso de análisis matemático. En este análisis de posibles trayectorias, se interrelacionan todos los elementos necesarios para estructurar una configuración epistémica (desde la perspectiva de la institución) y cognitiva (desde la perspectiva del alumno) asociada a la situación-problema presentada. De esta forma, el alumno construye y relaciona progresivamente diferentes elementos (del significado relacionado al concepto aprendido), produciendo así la competencia matemática y corroborando el logro de la comprensión desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico.

Los ejercicios resultan esenciales para ayudar a sistematizar procedimientos de aplicación de propiedades y comprensión de conceptos. Las actividades tipo problema o situación otorgan mayor idoneidad semiótica al proceso de instrucción propuesto, ya que permiten una negociación de significados por parte del alumno durante su desarrollo.

La Figura 6.23 ilustra los gráficos de distribución de actividades para los primeros cuatro apartados. Se observa que, aunque los problemas son las actividades mayoritarias, están equilibrados por la presencia de ejercicios. Por su parte, las actividades de tipo cuestión o situación tienen una presencia mucho más reducida. En cuanto a los grados de dificultad, las actividades de los niveles 1 y 2 muestran cierto equilibrio, mientras que las actividades de nivel 3, aunque con menos espacio, se sitúan por encima del 10%, lo que se considera un aspecto positivo.

.

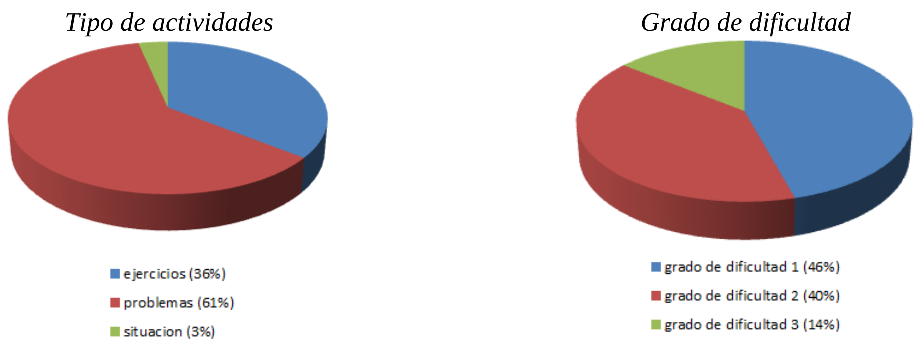


Figura 6.23: Distribución de las actividades en los primeros apartados de la unidad didáctica.

Desde la perspectiva institucional, el análisis realizado muestra que el significado institucional evaluado (i.e., el conjunto de actividades propuestas) está en conformidad con el significado institucional pretendido (i.e., el sistema de prácticas planificado en que se delimita la parte específica del conocimiento que se quiere transmitir). El significado institucional implementado no será analizado, puesto que depende de los ajustes que se producen posteriormente en clase.

Como excepción a lo anterior, cabe mencionar las actividades del libro de texto que se describen a continuación.

La actividad propuesta en la página 204 del apartado 2 (Anexo A) hace referencia a la razón de áreas. Sin embargo, este concepto no está mencionado o institucionalizado en la parte teórica del apartado correspondiente. Sería más interesante que esta actividad, en lugar de estar confinada al final del capítulo, se incluyera en el texto principal del segundo apartado, *semejanza*, como actividad propuesta a los alumnos. A continuación, el texto podría incluir la institucionalización del concepto de razón de semejanza y razón de áreas. Ésta sería una forma de añadir significado al proceso de instrucción planificado.

La actividad 17 de la página 199, referente al último apartado, *lugares geométricos*, requiere la comprensión de los conceptos de incentro y circuncentro, que están ausentes del texto teórico de este apartado. En este caso, la actividad propuesta no está en conformidad con la parte específica del conocimiento que se pretende transmitir.

Desde la perspectiva del alumno, en el primer apartado del libro de texto, se incluyen algunos ejercicios cuya resolución implica la articulación de nuevos conocimientos con conocimientos previos sobre relaciones angulares. La existencia de un espacio para notas de repaso (relativas, por ejemplo, a ángulos complementarios, suplementarios, etc.) sería muy relevante a la hora de activar los conocimientos previos de los alumnos. Este mecanismo de activación aumentaría la motivación del alumno ante la actividad y le permitiría relacionar y construir diversos elementos de significado relativos al nuevo concepto introducido. En definitiva, potenciaría la idoneidad cognitiva asociada al proceso de aprendizaje y el desarrollo del significado personal logrado.

Asimismo, en el segundo apartado, *semejanza*, una referencia al teorema de Tales en un contexto más amplio (antes de aplicar la proporcionalidad geométrica a los triángulos) resultaría ventajoso tanto desde el punto de vista del alumno como de la institución.

Otro aspecto reseñable en los apartados analizados es la ausencia de una situación-problema introductoria, cuya pregunta sirva de hilo conductor de la lección. Estas situaciones-problema al inicio de la lección son favorables al aprendizaje, puesto que permiten contextualizar los conocimientos y crear condiciones óptimas para la exploración personal de los alumnos (Godino *et al.*, 2006).

Respecto a la idoneidad de las actividades, cabe señalar que el libro presenta actividades que promueven el verdadero pensamiento matemático, otorgando una adecuada idoneidad epistémica al proceso de aprendizaje propuesto. Como ejemplo, se citan los problemas relacionados con comprobaciones de relaciones o leyes matemáticas, presentes en los apartados 1, 2 y 3 (problema 53 de la página 203, problema 2 de la página 187 y problema 4 de la página 188, Anexo A), así como los problemas contextualizados propuestos en la sección *"Resuelve problemas"*.

No obstante, en algunos problemas, la consigna debería ser más abierta, con el objetivo de no condicionar la exploración personal del alumno, incentivando así el proceso de investigación de las diversas posibilidades de solución. Por ejemplo, el problema 53 de la página 203 sobre relaciones angulares podría mejorarse, simplemente eliminando la solución que aparece a continuación del enunciado. Otro ejemplo similar es el problema 4 de la página 188 sobre la comprobación geométrica del teorema de Pitágoras. En este caso, se lee en el enunciado: *"Para ello, empieza probando que el cuadrilátero naranja es un cuadrado de lado a"*. Desde el punto de vista de la comprensión, sería más interesante lanzar el desafío sin dar pistas, con el objetivo de que el alumno experimente diferentes posibilidades y verbalice sus ideas. Respecto a este planteamiento, contrario a la exploración personal de los alumnos, Godino *et al.* (2006) refieren que dicha práctica *"convierte, de hecho, al proceso de estudio en una presentación magistral"*. En este contexto, tiene lugar una pérdida de idoneidad semiótica, ya que se evita afrontar las dificultades personales de los alumnos.

Para terminar, como último aspecto positivo destacable tras la lectura del libro, no se mezclan interpretaciones por el uso del lenguaje y la introducción de términos con distintos significados, lo cual, según Godino *et al*. (2006), acarrearía una gran complejidad semiótica, causa de muchos conflictos en el estudio de las Matemáticas.

Capítulo 7

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de los contenidos relacionados con la resolución de triángulos

En este capítulo, se presentan las dificultades y errores previsibles durante el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje previsto en el libro de texto, en relación con los contenidos relativos a la resolución de triángulos (apartados 1 a 5 de la unidad didáctica “Problemas métricos en el plano”).

El interés de este estudio es, por un lado, permitir que el docente, tras la identificación de las dificultades y errores más comunes, incluya en su programa de clases actividades que confronten a los alumnos con sus dificultades y les hagan tomar conciencia de sus errores, con el objetivo final de superarlos. De esta forma, no se trabaja contra el error sino con él, lo cual se materializa en un impulso hacia la construcción del conocimiento. Este mecanismo, promovido por determinadas actividades, corrobora la perspectiva constructivista del aprendizaje, según la cual se considera al error como constituyente de la actividad cognitiva.

Por otro lado, la toma de conciencia por parte del docente de estos obstáculos al aprendizaje del alumnado promueve la opción de una enseñanza más eficaz e integral, evitando que la propia acción docente introduzca obstáculos didácticos que intensifiquen las barreras de origen epistemológico y/o cognitivo.

En este capítulo, se exponen las dificultades y errores esperados en el proceso de instrucción evaluado y se presentan estrategias adecuadas para superarlos.

7.1 Dificultades

Dificultad es un término genérico que pretende describir aquello que no es fácil de entender y que, por tanto, se convierte en un verdadero desafío para muchos estudiantes. Entre las dificultades más habituales, se incluyen los conceptos matemáticos, las bases del cálculo, el lenguaje de los símbolos matemáticos y la resolución de problemas.

Las dificultades pueden tener su origen en diferentes factores, intrínsecos al alumno (biológicos y cognitivos), relacionados con un aprendizaje anterior deficiente o con una mala experiencia previa con las Matemáticas (actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas), debidos a la complejidad de algunos objetos matemáticos en sí mismos o a los contenidos matemáticos emergentes pretendidos (faceta epistémica) y relativos a la comprensión y resolución de problemas (en los que la decodificación, o traducción de un lenguaje a otro, juega un papel fundamental).

Tal como se ha mencionado anteriormente, el objeto de evaluar las posibles dificultades del alumnado radica principalmente en saber cómo afrontarlas y resolverlas con antelación, antes de que se conviertan en errores cometidos a la hora de enfrentar distintas situaciones matemáticas.

A continuación, se describen las dificultades esperadas para cada uno de los apartados que integran el estudio de la resolución de triángulos.

Apartado 1 - Relaciones angulares

- ✓ Es previsible que los alumnos no apliquen sus conocimientos previos sobre relaciones angulares para comprender las nuevas proposiciones relacionadas con ángulos en circunferencias. Esta dificultad puede estar relacionada con un aprendizaje deficiente de estos contenidos o con una inadecuada opción didáctica previa que no haya fomentado la interrelación de conceptos matemáticos (i.e., la aplicación de conocimientos anteriores para entender los nuevos). En este último caso, los alumnos dividen mentalmente los contenidos en diferentes compartimentos, cada uno con su propia teoría y procedimientos, pero desconectado de los demás saberes. Tal actitud denota una cierta rigidez o inflexibilidad hacia las Matemáticas.

Apartado 2 - Semejanza de triángulos

- ✓ Se espera que los alumnos no apliquen sus conocimientos previos sobre relaciones angulares para entender por qué dos triángulos en posición de Tales son semejantes. Si esto sucede, los alumnos intentarán memorizar la propiedad sin entender qué la sustenta, lo que se convierte en una dificultad adicional para resolver las actividades propuestas.
- ✓ Dificultad en el reconocimiento de figuras semejantes y en la interpretación de sus lados homólogos. Si se modifica la representación de dos triángulos (por ejemplo, en el caso de que un triángulo esté girado respecto a los ángulos homólogos del otro triángulo), muchos alumnos ya no consiguen establecer los criterios que les permiten reconocer la semejanza.
- ✓ Dificultad para comprender el concepto geométrico de razón de semejanza como un factor de ampliación o reducción de una figura. En otras palabras, dificultad en pasar del significado numérico o algebraico (i.e., la expresión de la razón) al espacial (i.e., la visualización de lo que sucede con la figura).

Apartados 3 y 4 - Teorema de Pitágoras

- ✓ Dificultad para comprender el teorema de Pitágoras de forma integral, relacionando su formulación gráfica (igualdad entre áreas representadas gráficamente) con la algebraica ($a^2 + b^2 = c^2$).
- ✓ Dificultad para aplicar algebraicamente el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas de geometría plana, en los que es necesario obtener un sistema de ecuaciones. Se prevén dificultades específicas relativas a la elección adecuada de la incógnita y a la falta de dominio de las manipulaciones algebraicas (e.g., dificultades para resolver el sistema de ecuaciones mediante los métodos de sustitución, reducción, igualación y gráfico, manejar signos negativos, establecer la jerarquía de operaciones, despejar las incógnitas, operar con fracciones, etc.).
- ✓ Dificultad para comprender visualmente la clasificación de triángulos basada en la relación pitagórica. En este caso, nuevamente, se pone de manifiesto la dificultad de relacionar la formulación algebraica con la gráfica y la necesidad de desarrollar la visión espacial.

Apartado 5 - Lugares geométricos

- ✓ Dificultad para comprender el concepto de lugar geométrico, lo que requiere un proceso de decodificación que permita traducirlo del leguaje escrito al gráfico. Para que los alumnos tengan éxito en las actividades relacionadas con este contenido, han de visualizar geométricamente las propiedades que definen cada uno de los lugares geométricos estudiados. Ésta es, por tanto, una dificultad relacionada con el desarrollo de una imagen conceptual completa.

Como dificultades transversales a todos los contenidos, destacan las siguientes:

- ✓ Dificultades en la interpretación de un enunciado y en su decodificación, expresándolo de forma gráfica o algebraica.
- ✓ Dificultades en ejercicios no contextualizados y poco originales que se caracterizan por una baja idoneidad afectiva, lo que se traduce en una menor motivación del alumnado para afrontar su resolución

Para subsanar las dificultades previstas y evitar otras nuevas, se considera fundamental que el docente, además de transmitir a los alumnos los conceptos, proposiciones y procedimientos establecidos en el currículo, generalice su aplicación a diferentes contextos, en los que los alumnos puedan experimentar la aplicabilidad de las reglas. De esta forma, los estudiantes van a ver, por sí mismos, cuándo las reglas funcionan y cuándo fallan, pudiendo comprender el ámbito de validez de la verdad matemática aprendida y establecer los procedimientos necesarios para solucionar la *situación-problema* propuesta.

Cabe destacar que esta práctica dirigida a la resolución de problemas potencia la conexión entre el lenguaje algebraico y el gráfico, minimizando la disociación entre ambos y promoviendo la competencia matemática (i.e., la habilidad de aplicar el conocimiento matemático para solucionar problemas en diferentes contextos).

Finalmente, la propuesta de actividades que trabajen la creatividad, tales como la incorporación de nuevas tecnologías, la manipulación de objetos o los debates co-evaluados en clase, aumenta el vínculo emocional del alumno con la dinámica del aula y favorece su aprendizaje.

7.2 Errores y su posible origen

Durante una situación matemática, se produce un error si el alumno puede disponer de medios para modificar su acción, teniendo en cuenta sus conocimientos y los resultados del intento precedente. Todos los fallos que el alumno no pueda corregir, por no tener disponibles los medios para lograr el éxito en un nuevo intento, son clasificados como fracaso (Briand y Chevalier, 1999).

Este discernimiento entre error y fracaso en una situación didáctica es fundamental, puesto que determina cómo debe ser la actuación del docente para que el alumno supere el fallo y avance en la espiral del conocimiento. El fracaso requiere una nueva construcción de los conocimientos vistos previamente. Por su parte, el error, para ser superado, exige al alumno adquirir conciencia del mismo. Las distintas respuestas ante un fallo se logran mediante diversas actividades e intervenciones en clase.

Con excepción de los errores erráticos e imprevisibles, los errores resultan, en su mayoría, de una concepción falsa o parcialmente construida que da lugar a una aplicación incorrecta del conocimiento. En otras palabras, el error se produce cuando los alumnos aplican, en una acción, un conocimiento considerado verdadero fuera de su campo de validez y que, por tanto, produce resultados falsos. Es lo que se denomina teorema en acto o teorema del alumno.

Los errores de este tipo son reproducibles, persistentes y se originan en un obstáculo. Se considera obstáculo a todo conocimiento adquirido (i.e., no es una falta de conocimiento), que fue efectivo en algún contexto específico, pero que, utilizado en otro contexto, da lugar a respuestas inadecuadas (Bocco y Canter, 2010). El origen de los obstáculos puede tener causas ontogénicas, didácticas y epistemológicas

Según D'Amore y Fandiño Pinilla, se denominan *obstáculos ontogenéticos* a aquéllos cuya causa reside en el propio alumno (inmadurez para aprender un determinado concepto, condiciones personales, etc.). Por su parte, se llaman *obstáculos didácticos* a aquéllos cuya causa radica en la elección del docente (metodología y didáctica, explicaciones previas, materiales utilizados, etc.). Por último, los *obstáculos epistemológicos* son aquéllos cuya causa se encuentra en el concepto matemático que en ese momento es objeto de aprendizaje (citado en Autino, Digión, Llanos, Marcoleri, Montalvetti y Soruco, 2011).

Otros errores esperables y directamente relacionados con las dificultades mencionadas en el apartado anterior son los siguientes:

- ✓ Errores cuyo origen está vinculado a las dificultades del alumno para traducir determinado contenido del lenguaje escrito al algebraico o gráfico (suelen observarse en la resolución de problemas).
- ✓ Errores originados por una imagen conceptual insuficiente de los temas tratados.
- ✓ Fracasos debidos a la falta de conocimientos previos que son esenciales para estructurar los nuevos conceptos (i.e., aprendizaje anterior deficiente).
- ✓ Errores originados por un conocimiento previo parcial de las proposiciones y conceptos, que a menudo conduce a su aplicación incorrecta (teorema en acto).
- ✓ Errores debidos a la complejidad cognitiva de algunas tareas o contenidos matemáticos (origen epistémico).
- ✓ Errores por desatención, desinterés y olvido, normalmente relacionados con actitudes emocionales y comportamentales.

La superación de los errores debe basarse, fundamentalmente, en la propuesta de actividades que inciten a los alumnos a reflexionar de forma crítica sobre sus propias respuestas y las de sus compañeros. De esta forma, se fomenta el pensamiento crítico y la toma de conciencia sobre su desempeño en determinada actividad didáctica. En este sentido, los errores deben ser vistos como herramientas de que dispone el docente para la definición de actividades que incluyan estrategias ajustadas a su superación.

Finalmente, con el objetivo de que los alumnos sepan aplicar correctamente las definiciones, proposiciones y procedimientos en diferentes contextos, es fundamental dar importancia a la construcción de imágenes conceptuales adecuadas. En otras palabras, enseñar la geometría sobre una base espacial, haciendo un uso sistemático de figuras asociadas a las propiedades geométricas, utilizando en clase las nuevas tecnologías que tanto facilitan este camino, y aplicando los nuevos conceptos a diferentes situaciones, con el fin de que los alumnos puedan desarrollar una comprensión integral y acorde a la definición matemática.

Capítulo 8
El proceso de estudio

Durante las prácticas, mi tutor en el centro me sugirió que escogiera algunos temas de geometría del libro de texto para preparar las clases que estuvieron bajo mi responsabilidad. Aunque las clases fueron interrumpidas, debido a la crisis sanitaria provocada por el COVID-19, este Trabajo Fin de Máster sigue las directrices expuestas a continuación, que constituyen la idea inicial.

En las siguientes páginas se presenta el programa propuesto de clases de geometría. Los temas cubiertos por las actividades propuestas son: relaciones angulares, semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras y lugares geométricos. Estos temas se corresponden con los cinco primeros apartados de la unidad didáctica “Problemas métricos en el plano” del libro de texto. La resolución de triángulos es la base común, transversal, a todos los apartados de la unidad didáctica cubiertos por el programa.

La Tabla 8.1, incluida a continuación, muestra la distribución de clases según los apartados de la unidad didáctica Se consideraron sesiones de 50 minutos.

	Sesión 0	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5	Sesión 6	Sesión 7	Sesión 8	Sesión 9	Sesión 10	Sesión 11	Sesión 12	Sesión 13	Sesión 14	Sesión 15
1|Relaciones angulares																Evaluación
2|Semejanza de triángulos																
3|Teorema Pitágoras																
4|Lugar geométrico																

Tabla 8.1: Distribución de las sesiones según los apartados de la unidad didáctica.

En el primer apartado, relaciones angulares, se busca resaltar la estrecha relación entre el triángulo y la circunferencia circunscrita, puesto que el conocimiento de las relaciones angulares entre ambas figuras es fundamental para la resolución de diversos problemas geométricos.

Las clases planificadas para este apartado, un conjunto de 3 sesiones, siguen el enfoque propuesto en el texto *Trigonometry*, debido al tipo de aprendizaje que se espera generar. Se trata de un abordaje que potencia en el alumno su creatividad, autonomía y razonamiento lógico, contrario a la automatización de las matemáticas.

Antes de iniciar este conjunto de tres sesiones, se plantea una sesión inicial (sesión 0), que corresponde a una actividad de repaso y evaluación de los conocimientos previos de los alumnos. Tal sesión puede plantearse como una tarea que los alumnos desarrollen en casa, sin necesidad de ocupar el tiempo de una sesión presencial (por eso está designada como sesión 0).

El segundo apartado, semejanza de triángulos, sigue los contenidos previstos en el libro de texto. Sin embargo, el programa propuesto pretende impartir esta temática apelando continuamente a la participación activa de los alumnos, para que sean ellos los protagonistas de la clase. Para ello, se propone un conjunto de actividades prácticas en las que los alumnos recurren a la manipulación de objetos, exposiciones orales en grupo evaluadas por rúbricas y actividades con *Geogebra*.

El tercer apartado, teorema de Pitágoras, corresponde al apartado más extenso, para el cual se prevén 5 sesiones. Como se ha mencionado para el segundo apartado, a través de las actividades propuestas se pretende que los alumnos desarrollen habilidades de razonamiento matemático, articulando a menudo la creatividad con sus conocimientos previos. Para ello, además de las actividades propuestas en el libro de texto, se incluyen en el programa, actividades manipulables con objetos, actividades de investigación con *Geogebra* y actividades propuestas en el texto *Trigonometry*.

El último apartado, lugares geométricos, se desarrolla mayoritariamente a través de la plataforma *Geogebra*,

Como elemento transversal a todo el programa, se propone el uso de vídeos, ya sea como parte de las actividades de clase o como tarea, la mayoría de ellos editados a través de la plataforma *Edpuzzle*.

Esta plataforma le permite al docente editar vídeos, agregando comentarios y cuestiones por escrito o por audio, en diferentes momentos del vídeo a medida que éste avanza. A través de una opción de la plataforma, el alumno no podrá adelantar el vídeo, y la realización de las actividades introducidas en distintos momentos del mismo es condición necesaria para que el vídeo siga adelante. El docente, a través de la plataforma, monitorea el progreso de sus alumnos y recibe sus respuestas automáticamente. *Edpuzzle* es una plataforma muy útil para la actividad docente, puesto que, además de utilizar una herramienta de aprendizaje muy eficaz mediante vídeos, le permite al docente evaluar la actividad del alumnado.

Este recurso permite al docente disponer de más tiempo en el aula para el desarrollo de actividades prácticas. Se espera que de esta forma, la clase se desarrolle de manera más efectiva, ya que los alumnos inician las clases con algunas nociones previas de la materia y sobre todo porque esta dinámica permite que los alumnos aprovechen el tiempo de clase con el docente para practicar, reforzar y aclarar dudas sobre la teoría introducida a través de los vídeos. En otras palabras, la mayor parte del tiempo de clase se dedica al desafío más grande de cualquier alumno: saber cómo aplicar la teoría y comprender qué la sustenta

Hay que mencionar que varios de los vídeos propuestos están en inglés. Esto no se debe a una elección específica de este idioma, sino a la del tipo de aprendizaje que se pretende conseguir. Después de visualizar varios vídeos en diferentes idiomas, se observó que en los vídeos en inglés se transmitía una forma de enseñar que apela al razonamiento matemático creativo e interrelacionado.

Además del uso de vídeos, el programa de clases incluye diversas actividades prácticas en las que los alumnos manipulan objetos, exponen temas en la pizarra evaluados mediante rúbricas y utilizan la plataforma *Geogebra* como medio para investigar propiedades matemáticas. Tal propuesta se justifica teniendo en cuenta la nueva lógica de nuestros días, en la que la interactividad y el acceso inmediato al conocimiento ocupan un lugar central. En este contexto, es importante enseñar las matemáticas bajo una óptica más práctica y accesible para todos, en este caso manipulando objetos e investigando las diversas opciones que se plantean.

Como recursos secundarios, también se utilizan herramientas digitales como *Padlet*, cuestionarios de *Google Forms* y la plataforma *Screencastify* para la grabación de vídeos.

A través del programa de clases propuesto, se pretende lograr dos objetivos principales: que el papel del docente en el aula sea en gran medida el de orientador y facilitador del aprendizaje, y que el conjunto de actividades propuestas promueva un aprendizaje eficaz y duradero y sirva para medir continuamente el grado de aprendizaje de los alumnos, conectando las dinámicas de clase con las evaluaciones.

Las actividades propuestas cubren los estándares de aprendizaje 1.1, 1.2, 2.1 (parcialmente), 2.2 (parcialmente), 2.3, 11.3, 11.4, 12.1 y 12.3, descritos en la Tabla 3.4 del capítulo 3

Todas las actividades del libro de texto incluidas en el programa, se presentan en el Anexo B. A continuación, se describe el programa de clases propuesto.

8.1 Actividades Planificadas

8.1.1 Sesión 0. Relaciones angulares. Repaso

Evaluación de los conocimientos previos de los alumnos sobre relaciones angulares. Esta actividad podrá ser enviada como tarea en la clase anterior.

- ✓ Tiempo estimado de dedicación del alumno: 25 minutos
- ✓ Tipo de intervención en clase: estudio autónomo

Se invitará a los alumnos a ver el vídeo de 8 minutos cuyo enlace se presenta a continuación y luego responder a un cuestionario de repaso en formato *Google Forms*.

Se trata de un vídeo corto y muy interesante sobre el tema de las relaciones angulares. El vídeo no es una clase magistral sobre el tema, sino una discusión que demuestra algunas de las propiedades de los ángulos y de los triángulos. El objetivo de esta actividad es activar la memoria de los alumnos respecto a este tema, fundamental para el éxito de las próximas clases.

Vídeo (Stevens, 2019)**:** https://edpuzzle.com/media/5f3d008b4434fb3f950032b9

A continuación, los alumnos deberán responder individualmente al *Cuestionario de Repaso - Relaciones Angulares* que se les presenta en formato *Google Forms*, cuyo enlace se incluye debajo.

https://docs.google.com/forms/d/1GSFyi8WAGv2NU91Hx_QEKraxLl4M8nuc-vq7xc6LE84/edit?usp=sharing

Esta actividad permite al docente identificar el nivel de conocimientos de sus alumnos y reforzar en clase las debilidades observadas.

Tarea (estudio autónomo): ejercicios 1 y 2 página 198 del libro de texto (Anexo B).

8.1.2 Sesión 1. Relaciones angulares en la circunferencia Ángulo central e inscrito

1ª parte: Medida de arcos y ángulo central

- ✓ Tiempo estimado en clase: 15 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: magistral y dialógica

Este tema será introducido a través de una exposición inicial del docente, luego se les presentan a los alumnos cuestiones que deben llevarlos a aplicar este nuevo concepto para llegar a otras verdades matemáticas. A continuación se muestra cómo se presentará el tema.

Quizás la manera más fácil de medir un arco de circunferencia es preguntar qué longitud de la circunferencia cubre el arco. En este contexto, observando el arco desde el centro de la circunferencia, dibujamos el ángulo central que limita dicho arco (ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro de la circunferencia). Si el ángulo AOB mide α *grados, entonces se dice que el arco* $\widehat{AB}$ *también mide* α *grados (Gelfand y Saul, 2001)*

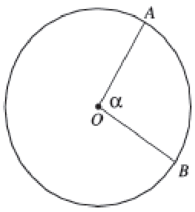


Figura 8.1: representación del ángulo central (Gelfand y Saul, 2001).

Actividad (obtenida del texto *Trigonometry* (Gelfand y Saul, 2001))

1) ¿Cuál es la medida en grados de un semicírculo? ¿Y de un cuarto de círculo?

2) ¿Cuál es la medida en grados del arco cortado por un lado de un pentágono inscrito en un círculo? ¿Y de un hexágono regular? ¿Y de un octógono regular?

2ª parte: Ángulos inscritos y sus arcos. Prueba del teorema

- ✓ Tiempo estimado en clase: 35 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: colaborativa y dialógica

Este tema se presentará de forma diferente al anterior. El profesor enuncia el teorema:

De la geometría tenemos un teorema importante que relaciona la medida en grados de un arco no con su ángulo central, sino con cualquier ángulo inscrito que intercepte ese arco. Según este teorema, "la medida en grados de un ángulo inscrito es la mitad de la *medida en grados de su arco de intersección".*

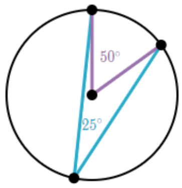


Figura 8.2: Ángulo central y ángulo inscrito (Obtenido de: https://www.khanacademy.org).

A continuación, se pedirá a los alumnos que lo demuestren utilizando básicamente sus conocimientos previos sobre triángulos. Para ello, los alumnos, dispuestos en parejas y con sus ordenadores, verán un vídeo (14 minutos), *"Prueba del teorema del ángulo inscrito"*, en el que se presenta la prueba del teorema para tres situaciones distintas:

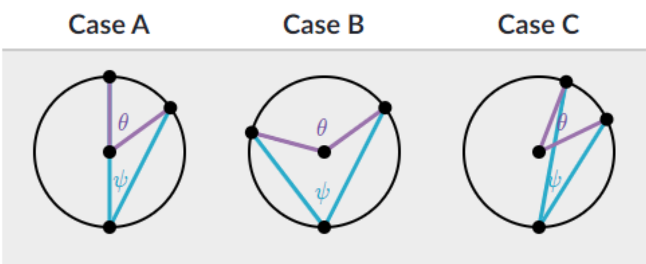


Figura 8.3: Situaciones consideradas para la prueba del teorema (obtenido de: https://www.khanacademy.org).

✓ Considerando un lado que forma el ángulo inscrito coincidiendo con el diámetro de la circunferencia (caso A);

✓ Considerando el centro de la circunferencia dentro del ángulo inscrito (caso B);

✓ Considerando el centro de la circunferencia fuera del ángulo inscrito (caso C).

El enlace al vídeo se presenta a continuación:

Vídeo (Khan, 2010): https://youtu.be/MyzGVbCHh5M

Nota: el video puede ser sustituido por una clase en la pizarra dada por el docente, si lo considera más ventajoso para el grupo-clase.

Actividad

1) Después de ver el vídeo, los grupos deben elegir una de las tres formas de probar el teorema y desarrollar la prueba en su cuaderno. Tras unos minutos, el docente sortea algunos grupos (como mínimo, un grupo para cada caso A, B y C) que deben salir a la pizarra a demostrar una de las situaciones consideradas. Si la demostración no es correcta, el docente puede elegir otro grupo que salga a la pizarra. Los grupos serán evaluados por sus compañeros mediante una rúbrica previamente conocida.

Esta práctica, además de promover en los alumnos el pensamiento matemático, fomenta la confianza de "jugar" con las matemáticas. . La actividad concluirá en la siguiente clase.

8.1.3 Sesión 2. Relaciones angulares en la circunferencia. Ángulo inscrito

Ángulos inscritos y sus arcos. Prueba del teorema de Tales

- ✓ Tiempo estimado en clase: 50 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: colaborativa y dialógica

La primera parte de la clase servirá para finalizar la actividad iniciada en la clase anterior, la demostración del teorema del ángulo inscrito. Tras esta actividad, se inicia la tercera actividad propuesta, cuya introducción es la siguiente:

Como corolario del teorema anterior, surge otro teorema, el teorema de Tales:

"Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto".

Actividad: prueba este teorema simplemente aplicando los resultados anteriormente obtenidos.

Actividad para realizar por parejas. El docente hace un seguimiento del trabajo de los alumnos, apoyando y ayudando con preguntas clave cuando sea necesario. Al final se demuestra el teorema en la pizarra, siguiendo las ideas que se presentan en el video indicado a continuación (7 minutos), *"Teorema de Tales"*.

Vídeo (Stevens, 2019): https://edpuzzle.com/media/5f3d2080bf02f73f2ace23f3

Para finalizar la clase, se propone una serie de desafíos a los grupos. La idea es preparar la mente de los alumnos para presentar el concepto de arco capaz.

Actividad (obtenida del texto *Trigonometry* (Gelfand y Saul, 2001))

1) Si dos ángulos inscritos interceptan el mismo arco, demuestra que estos ángulos son iguales.

2) Calcula la medida en grados de un ángulo de un pentágono regular. (sugerencia: cualquier pentágono regular se puede inscribir en un círculo.)

Las parejas que terminan las actividades salen a la pizarra para mostrar a sus compañeros su razonamiento.

8.1.4 Sesión 3. Relaciones angulares en la circunferencia. Arco capaz

1ª parte: Arco capaz

- ✓ Tiempo estimado en clase: 30 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: colaborativa y dialógica

Para presentar este tema, pensemos qué tamaño puede parecernos que tiene un objeto en particular cuando lo miramos, y cómo esa magnitud aparente puede variar según el ángulo de visión. Por ejemplo, visto desde la Tierra, el ángulo subtendido por una estrella es muy, muy pequeño, aunque sabemos que la estrella es realmente muy grande. Y el ángulo subtendido por el sol es mucho mayor, aunque sabemos que el sol no es la estrella más grande (en este momento, el docente les pide a los alumnos más ejemplos prácticos).

En estas situaciones, decimos que un objeto particular, que representaremos como uno segmento lineal AB, se ve desde un ángulo APB si estás situado en el punto P (ver Figura 8.4). A menudo, decimos que AB subtiende el ángulo APB en el punto P (Gelfand y Saul, 2001).

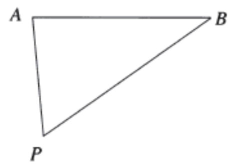


Figura 8.4: Objeto AB visto desde el punto P (Gelfand y Saul, 2001).

Actividad (obtenidas del texto *Trigonometry* (Gelfand y Saul, 2001))

En parejas, intentad responder a las siguientes cuestiones:

1) Supón que el ángulo subtendido por el objeto AB en P mide 60°. ¿Es posible hallar otros puntos en los que AB subtiende el mismo ángulo? ¿Desde qué posiciones subtiende un ángulo más grande? ¿Desde qué posiciones un ángulo más pequeño? (sugerencia: dibuja un círculo que pase por los puntos A, B y P y realiza un análisis, utilizando la goma elástica y los alfileres facilitados por el docente para visualizar los cambios).

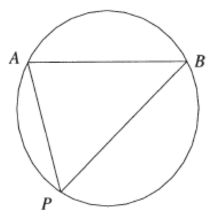


Figura 8.5: Objeto AB visto desde el punto P y relación con la circunferencia circunscrita (Gelfand y Saul, 2001).

Los alumnos deben llegar a las siguientes conclusiones:

- ✓ AB subtenderá un ángulo de 60º desde cualquier punto del círculo situado a un lado de la línea AB (donde está ubicado el punto P).
- ✓ AB subtenderá un ángulo mayor que 60º desde cualquier punto situado a un lado de la línea AB y en el interior del círculo.
- ✓ AB subtenderá un ángulo menor que 60º desde cualquier punto situado en el exterior del círculo que pasa por A, B y P.

El docente consolida las conclusiones a través del siguiente concepto: *Por lo tanto, todos los puntos de la circunferencia situados en el arco* $\widehat{AB}$ *subtienden el mismo ángulo y el arco* $\widehat{AB}$ *se denomina arco capaz.*

2ª parte: Cuestiones

- ✓ Tiempo estimado en clase: 20 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: colaborativa y dialógica

Actividad (obtenidas del texto *Trigonometry* (Gelfand y Saul, 2001)).

1) ¿Desde qué puntos el objeto AB subtenderá un ángulo de 120°?

2) ¿Desde qué puntos el objeto AB subtenderá un ángulo de 90°?

3) Los siguientes diagramas (figura 8.6) muestran un objeto AB que subtiende el ángulo α en el punto P. Usando estos diagramas y tus conocimientos de triángulos, demuestra que: si el punto Q está fuera del círculo, entonces AB subtiende un ángulo menor que α en el punto Q; y si el punto R está dentro del círculo, entonces AB subtiende un ángulo mayor que α en el punto R.

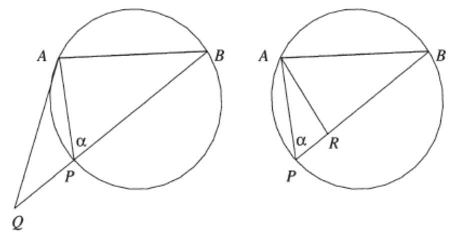


Figura 8.6: Diagramas (Gelfand y Saul, 2001).

4) El conjunto de puntos P en los que el objeto AB subtiende un ángulo igual a α no es todo el círculo, sino sólo el arco APB. ¿Qué ángulo subtiende el objeto AB desde el resto de puntos del círculo?

Tarea (colaborativa): realizada por parejas, ejercicios 4 y 5 de la página 185 del libro de texto, ejercicios 3 y 5 de la página 198, problemas 53 y 54 de la página 203 (Anexo B). Antes de la próxima clase, los alumnos deben subir sus resoluciones al muro *Padlet* creado por el docente para cada grupo de alumnos.

8.1.5 Sesión 4. Semejanza. Razón de semejanza

1ª parte: Figuras semejantes. Concepto de razón de semejanza

- ✓ Tiempo estimado en clase: 35 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: adidáctica y colaborativa

Para presentar este tema, se eligieron dos actividades prácticas en las que los alumnos deben manipular objetos a fin de entender la semejanza e identificar el concepto de constante de proporcionalidad. Ambas actividades se realizarán por parejas.

Actividad (Pereira, 2016)

1) El objetivo de esta actividad es que el alumno desarrolle la capacidad de dibujar ampliaciones y reducciones de figuras, de forma que este conocimiento le ayude a construir el concepto de figuras semejantes y razón de semejanza. Los materiales necesarios serán papel cuadriculado, lápiz y regla. El procedimiento será distribuir figuras a los alumnos y solicitar que realicen ampliaciones de cada una de ellas utilizando el papel cuadriculado (Figura 8.7).

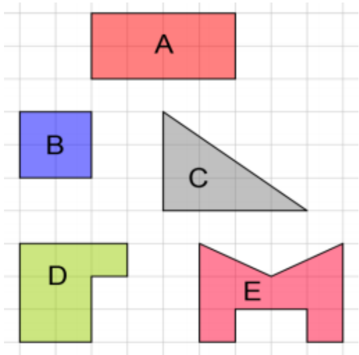


Figura 8.7: Figuras utilizadas en la actividad (Pereira, 2016).

A continuación, los alumnos deben llenar la siguiente tabla:

Figura	Ampliación		Figura original		$\frac{base\ ampliación}{base\ original}$	$\frac{altura\ ampliación}{altura\ original}$
	Base	Altura	Base	Altura		
A						
B						
C						
D						
E						

Tabla 8.2: Actividad para el estudio de la razón de semejanza.

Se espera que al inicio los alumnos se encuentren en una fase de intentos, donde será fundamental el apoyo del docente, el cual, a través de preguntas deberá llevar a los alumnos a verificar si las ampliaciones realizadas son similares o no a la figura original. En esta fase, se puede sugerir a los alumnos que multipliquen los lados por 2 (ampliar al doble), para que observen cómo varía la medida de los respectivos lados y la semejanza entre las figuras. Este proceso debe repetirse para las otras figuras, utilizando otras constantes. Al analizar la tabla, el alumno notará que la constante elegida en cada caso aparecerá en las dos últimas columnas. Al final, los alumnos deben concluir que para hacer una ampliación o una reducción, cada segmento de la figura original debe multiplicarse por una constante y que esta constante determina la semejanza entre las dos figuras.

2) La segunda actividad es similar a la anterior (i.e., se analizan ampliaciones de figuras), pero aplicada a triángulos (Figura 8.8).

En una primera fase, el alumno debe descubrir, a través de mediciones con la regla, qué triángulos representan ampliaciones del triángulo más oscuro. En una segunda fase, el alumno debe recortar los triángulos de manera que se superpongan entre sí para poder comparar los respectivos ángulos.

En esta actividad, se espera que a los alumnos les resulte más fácil identificar las ampliaciones y se refuerza la cuestión de la proporcionalidad, ya que tales triángulos tendrán lados proporcionales al triángulo más oscuro. El objetivo es que después de identificar las ampliaciones, el alumno identifique que los ángulos correspondientes tienen la misma medida.

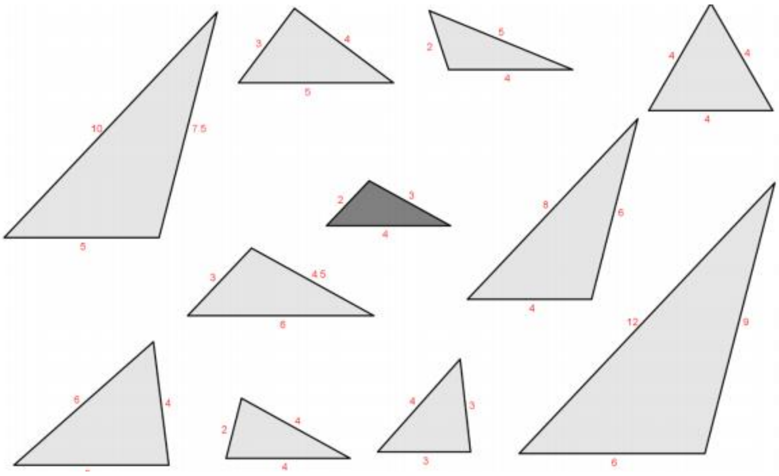


Figura 8.8: Figuras utilizadas en la actividad (Pereira, 2016).

Terminadas estas dos actividades y asegurándose de que los alumnos han comprendido la dinámica, el docente consolida el concepto de semejanza y las condiciones matemáticas que definen la semejanza de los triángulos: *sus lados son proporcionales y los respectivos ángulos son iguales.*

2ª parte: Actividad interactiva (vídeo en *Edpuzzle*)

- ✓ Tiempo estimado en clase: 15 minutos
- ✓ Tipo de intervención en clase: estudio autónomo

Los alumnos deben ver el vídeo cuyo enlace se muestra a continuación, *"Semejanza de Triángulos - Análisis Preliminar"*. Se trata de un vídeo editado en la plataforma *Edpuzzle*, con una duración de 9 minutos. Al final del vídeo, surgen 4 cuestiones que los alumnos deben ser capaces de responder (actividad individual).

Vídeo (Khan,2011b): https://edpuzzle.com/media/5f3aff8e9f841f3f4a423125

Tarea (estudio autónomo)

- ✓ Tiempo estimado de dedicación del alumno: 30 minutos

Resolver los ejercicios 7 y 8 de la página 198 del libro de texto (Anexo B), relacionados con el vídeo visto en clase.

Después de resolver los dos ejercicios anteriores, los alumnos deben ver el vídeo cuyo enlace se presenta a continuación, *"Criterios de Semejanza"*. Al igual que el anterior, se trata de un vídeo editado en la plataforma *Edpuzzle*, con una duración de 12 minutos, después de los cuales se incluyen 12 cuestiones que los alumnos deben responder.

Vídeo (Khan, 2011a): https://edpuzzle.com/media/5f3bbee8b63e8d3f61990863

8.1.6 Sesión 5. Semejanza. Criterios de semejanza

Aplicación práctica de los criterios de semejanza

- ✓ Tiempo estimado en clase: 50 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: colaborativa y dialógica

No se introducirán nuevos conceptos en esta clase, sin embargo, se presenta una discusión sobre la semejanza de triángulos aplicando los conceptos discutidos en las clases anteriores. Se trata de “preparar el terreno” para las próximas sesiones. En esta actividad los alumnos, organizados en grupos, presentan un tema determinado en la pizarra. El resto de la clase debe observar la presentación y evaluar al grupo mediante una rúbrica previamente conocida.

Antes del inicio de la actividad prevista, el docente corrige en la pizarra los ejercicios enviados como tarea en la última clase.

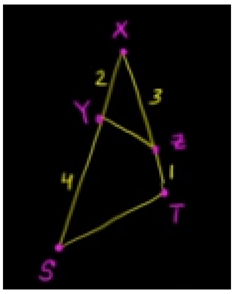
Actividad

Durante la clase, los alumnos visualizarán el siguiente vídeo disponible en internet, “*Ejemplos de análisis de triángulos semejantes*”:

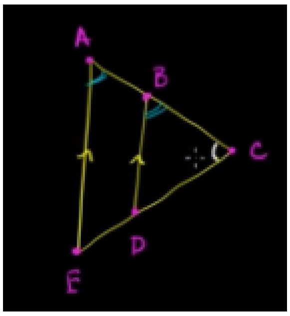
Vídeo (Khan, 2011c): https://youtu.be/Ly86lwq_2gc

Se trata de una discusión breve (9 minutos) y muy interesante sobre la identificación de situaciones de semejanza. Tras la visualización del vídeo, los alumnos, organizados en grupos de 3, deberán explicar en la pizarra qué argumentos de semejanza se pueden aplicar en cada una de las situaciones analizadas en el vídeo.

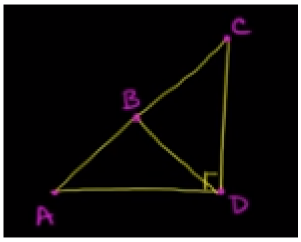
Para ello, el docente considerará las situaciones geométricas que se presentan en la Figura 8.9. Cada una de ellas se identifica con los números del 1 al 5 y el docente por sorteo definirá qué situación presentará cada grupo y cuáles serán los grupos sorteados. Todos los alumnos recibirán una rúbrica que tendrán que completar durante la presentación de sus compañeros, con el fin de evaluar la claridad de la presentación.



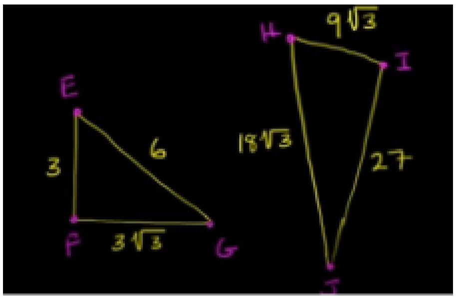
Situación 1



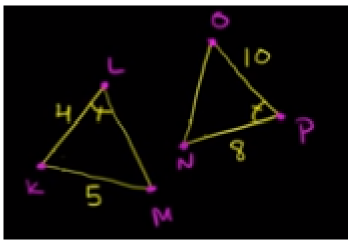
Situación 2



Situación 3



Situación 4



Situación 5

Figura 8.9: Situaciones propuestas para evaluar la semejanza aplicando los criterios aprendidos anteriormente (obtenido en: https://www.youtube.com/watch?v=Ly86lwq_2gc&feature=youtu.be).

Nota: el video puede ser sustituido por una clase en la pizarra dada por el docente, si lo considera más ventajoso para el grupo-clase.

A continuación, los alumnos deberán resolver las siguientes actividades del libro: problema 9 de la página 198, problema 31 de la página 201 y problema 2 de la página 205 (Anexo B).

8.1.7 Sesión 6. Semejanza. Cálculo de distancias a puntos inaccesibles

1ª parte: Preparación del teorema de Tales

Actividad (Post, 2018)

- ✓ Tiempo estimado en clase: 15 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: colaborativa y dialógica

¿Son semejantes los dos triángulos de la figura? ¿Por qué?

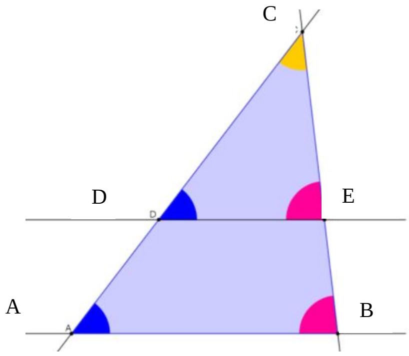


Figura 8.10: Figura analizada para la segunda actividad (Post, 2018).

Esta actividad debe desarrollarse por parejas. La idea es que los alumnos discutan con su pareja cómo poden demostrar la semejanza. A continuación, se invita a los alumnos a compartir sus reflexiones. El docente discute con los alumnos las respuestas proporcionadas y las observaciones realizadas con el fin de justificar la semejanza entre los dos triángulos de la figura. Al final de la actividad, el docente debe asegurarse de que todos los alumnos han comprendido por qué los triángulos son semejantes.

Extendiéndose los lados de los dos triángulos, se observa que tenemos dos rectas paralelas (r y s) cortadas por dos rectas secantes o transversales. De esta forma, está claro que los ángulos indicados en la figura por el mismo color son ángulos correspondientes y, en consecuencia, congruentes. Por el criterio AA, se puede afirmar que los dos triángulos son semejantes. Además, estos triángulos tienen un ángulo en común (representado en amarillo).

2ª parte: Cálculo de distancias a puntos inaccesibles

Actividad (Pereira, 2016)

- ✓ Tiempo estimado en clase: 35 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: adidáctica y colaborativa

En esta actividad, los alumnos, organizados en grupos de 4, recibirán tres imágenes diferentes que representan las tres “situaciones-problema” (ver Figura 8.11).

El objetivo es que los alumnos apliquen los conceptos de semejanza para explicar cómo calcularían la altura de determinados objetos sin poder medirla directamente, imaginando que se pudieran utilizar los siguientes materiales: cinta métrica, escuadra, palo de escoba, espejo, papel y bolígrafo. Las preguntas propuestas son: ¿cómo lo harías? ¿Cómo usarías algunos de los objetos mencionados? ¿Qué conocimientos aplicarías para calcular la altura deseada?

En una fase inicial de la actividad, los alumnos de cada grupo discutirán y deberán elaborar en una hoja de papel el procedimiento que adoptarían para resolver la cuestión planteada. En esta fase, el docente camina entre los grupos escuchando las discusiones y haciendo preguntas con el objetivo de inducirlos a observar la semejanza que se puede identificar en cada situación y, en su caso, resolverla.

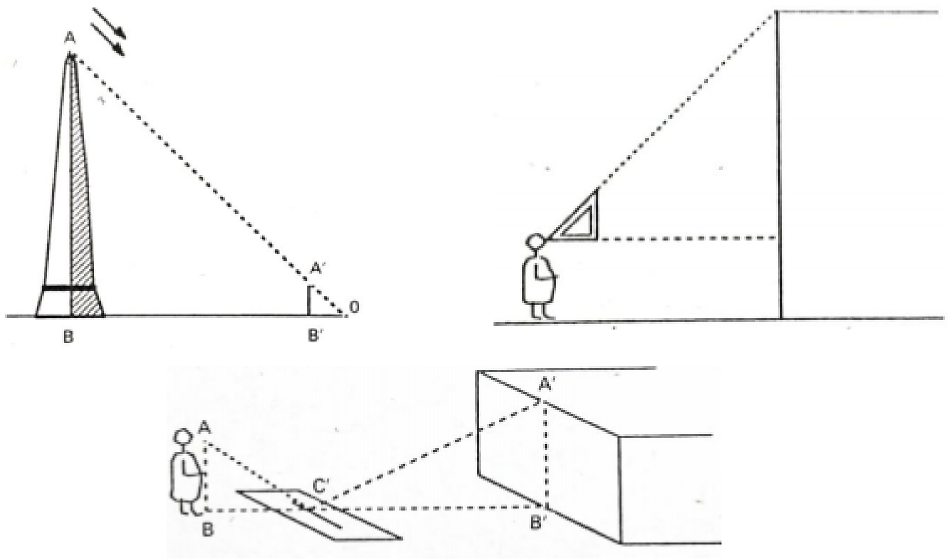


Figura 8.11: Situaciones-problema (Pereira, 2016).

En una segunda fase, cada grupo debe presentar su razonamiento en la pizarra a sus compañeros, quienes deberán comentar la presentación. Actividad evaluable mediante rúbricas previamente conocidas.

Tarea (estudio autónomo)

- ✓ Tiempo estimado de dedicación del alumno: 20 minutos

Los alumnos recibirán el enlace a un vídeo editado en la plataforma *Edpuzzle*, de 5 minutos de duración, *"Teorema de Tales (aplicación en triángulos)"*. Es un vídeo muy corto y sencillo, que contiene numerosas imágenes. Se ha añadido al vídeo una nota explicativa sobre el teorema de Tales con una perspectiva más amplia y 5 cuestiones que los alumnos deberán responder al final de su visualización. Los contenidos más relevantes del vídeo son: reconocimiento de triángulos semejantes y del teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.

Vídeo (Carreon, 2020): https://edpuzzle.com/media/5f3e504803c1783f4c09fcba

Además, deben resolver los problemas 41 y 42 de la página 202 del libro (Anexo B).

8.1.8 Sesión 7. Semejanza. Teorema de Tales y distancias a puntos inaccesibles

1ª parte: Teorema de Tales y cálculo de distancias a puntos inaccesibles

- ✓ Tiempo estimado en clase: 15 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: magistral y dialógica

En esta primera parte de la clase, se realizará un repaso de los triángulos en posición de Tales y se corregirán los dos ejercicios enviados como tarea.

2ª parte: Teorema de Tales mediante actividades de investigación en *Geogebra*

- ✓ Tiempo estimado en clase: 35 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

Actividad

Los alumnos, organizados por parejas, deberán probar el teorema de Tales con sus ordenadores utilizando la plataforma *Geogebra*. El docente, utilizando su ordenador y el equipo de proyección, asistirá puntualmente a los alumnos, dándoles algunas indicaciones. Sin embargo, la idea es que los grupos discutan la mejor forma de demostrar el teorema, con la ayuda proporcionada por el docente.

Como posible procedimiento, los alumnos pueden probarlo mediante los siguientes 5 pasos:

1) dibuja un triángulo y, haciendo uso de los comandos de *Geogebra*, mide sus ángulos y la longitud de sus lados;

2) construye una recta paralela a uno de los lados y que corte a los otros dos, marcando los puntos de intersección;

3) mide las amplitudes de los ángulos formados por la recta paralela y los lados interceptados por ella (son iguales a los ángulos de la base) y mide la longitud de los lados del triángulo menor;

4) comprueba que existe proporcionalidad geométrica entre los segmentos resultantes: abre la hoja de cálculo en *Geogebra* para introducir las longitudes de los lados y hallar la razón entre los lados (en este paso se verifica que los cocientes entre lados homólogos son iguales, obteniendo un valor constante)

5) para terminar, mueve uno de los vértices del triángulo a otro triángulo distinto y observa que los triángulos siguen siendo semejantes, ya que la razón entre lados homólogos, aunque ahora es diferente, se mantiene constante para todo el triángulo.

Durante esta práctica, el docente debe mantener un diálogo constante con la clase a través de una dinámica de preguntas y respuestas: por ejemplo, después de que los alumnos completen los dos primeros pasos, dibujando los triángulos, el docente pregunta, *¿cómo se llaman los triángulos que hemos dibujado?*; en el cuarto paso, la verificación de la proporcionalidad, si comparamos segmentos correspondientes, *¿qué segmentos compararemos entre sí?, ¿con qué lado tendré que comparar el lado AB?*; y en el último paso, *¿qué significa que los cocientes entre las longitudes de los lados son iguales? ¡Que son proporcionales!*

8.1.9 Sesión 8. Teorema de Pitágoras. Prueba

1ª parte: Demostración del teorema a través de la manipulación de objetos

- ✓ Tiempo estimado en clase: 30 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

El docente expone el enunciado del teorema de Pitágoras a los alumnos y luego los invita a probar el teorema. Organizados por parejas y siguiendo las orientaciones del docente, demostrarán el teorema de Pitágoras manipulando figuras geométricas (recortes). El procedimiento seguido en clase es el mismo que se muestra en el vídeo, "*What is the Pythagoras theorem?"*, de 4 minutos y medio de duración, cuyo enlace se presenta a continuación:

Vídeo (Letstute, 2013): https://youtu.be/A1vca8mKiu0

Esta actividad equivale a resolver el problema 4 de la página188 del libro de texto (Anexo B).

2º parte: Actividad práctica con *Geogebra* (Parte I)

- ✓ Tiempo estimado en clase: 20 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

Esta parte de la clase está dedicada al uso de la plataforma *Geogebra*. El objetivo es que, con la orientación del docente, los alumnos organizados por parejas inicien la demostración del teorema de Pitágoras a través de *Geogebra*.

El docente, de forma simultánea con los alumnos, debe desarrollar la construcción del teorema en *Geogebra*, siguiendo el procedimiento presentado en el vídeo cuyo enlace se incluye a continuación, *"Construcción del teorema de Pitágoras con Geogebra"*. Esta parte de la clase se desarrolla de forma secuencial y contiene las pausas necesarias para que el docente se asegure de que todos los alumnos siguen el proceso.

Vídeo (Garcia, 2019): https://youtu.be/85Ayp3Hrvw4

El tiempo total del vídeo es de 12 minutos. Puesto que el desarrollo simultáneo de la actividad con los alumnos tendrá una duración superior a los 12 minutos, se ha decidido dividir esta práctica en dos partes. La parte I corresponde a los 6 primeros minutos del vídeo (construcción del triángulo rectángulo y de los cuadrados adyacentes a los lados) y la parte II incluye los 6 minutos restantes (comprobación algebraica del teorema). Así, esta actividad se inicia en esta 8ª sesión y finaliza en la 9ª sesión.

Tarea (colaborativa)

Esta tarea consta de una actividad por parejas que se evaluará mediante una rúbrica que será previamente distribuida entre los alumnos. En clase, los alumnos practicaron con el docente la demostración del teorema de Pitágoras. En casa, deberán elegir una posible forma de demostrar el teorema y, por parejas, grabar un vídeo de la demostración y enviárselo al profesor. Para la grabación del vídeo, se les indicará que usen la plataforma *Screencastify*.

El docente les indicará los siguientes enlaces para su visualización:

Vídeo 1 "Folding" (Vihart, 2011), 3 minutos: https://youtu.be/z6lL83wl31E

Vídeo 2 "Cut and Paste" (Krafka, 2010), 1 minuto: https://youtu.be/DQk_VrWdCr0

Vídeo 3 "Modelo 3D" (Atul Classes, 2014), 3 minutos: https://youtu.be/X8X_Ckvul90

Se trata de diferentes formas de demostrar el teorema de Pitágoras. El vídeo 1 demuestra cómo probar el teorema a través del plegado de papel, estilo *origami*. El vídeo 2 contiene una actividad muy simple de cortado y pegado, y trata de involucrar a los alumnos a través del aprendizaje cenestésico. Por último, el vídeo 3 consiste en reproducir el teorema a partir de un modelo real, que se puede elaborar a partir de bloques, gominolas, agua, etc.

Los alumnos, por parejas, deben visualizar los tres vídeos y elegir una de las formas para desarrollar su propia exposición del teorema. Esta actividad será evaluada mediante una rúbrica previamente conocida. El docente debe concertar una fecha de entrega con los alumnos.

8.1.10 Sesión 9. Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

1ª parte: Actividad práctica con *Geogebra* (Parte II)

- ✓ Tiempo estimado en clase: 20 minutos

- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

Los primeros minutos de la clase se utilizarán para finalizar la actividad descrita en la sesión anterior: construcción del teorema de Pitágoras utilizando la plataforma *Geogebra*.

2ª parte: Discusión del teorema. Ejercicios

- ✓ Tiempo estimado: 30 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

El docente comenta que el teorema de Pitágoras es una de las herramientas más poderosas en geometría para resolver diversos problemas de nuestra vida diaria, siendo aplicado en diversas áreas como astronomía, geografía, ingeniería, etc.

El teorema de Pitágoras nos permite determinar los tres lados de un triángulo rectángulo y, de este modo, construir un triángulo conociendo ambos catetos o uno de los catetos y la hipotenusa (y, como sabemos de la geometría, el conocimiento de los tres lados determina el triángulo). A continuación, el docente identifica dos enunciados del teorema y los discute con los alumnos:

Enunciado I. <u>Si</u> a y b son las longitudes de los lados <u>de un triángulo rectángulo</u>, y c es la longitud de su hipotenusa, <u>entonces</u> $\underline{a^2 + b^2 = c^2}$ *(Gelfand y Saul, 2001).*

Enunciado II. <u>Si</u> los números positivos a, b y c satisfacen $\underline{a^2 + b^2 = c^2}$*, <u>entonces existe un triángulo</u> con los lados a, b y c, y este triángulo tiene un ángulo recto opuesto al lado de longitud c (<u>triángulo rectángulo</u>) (Gelfand y Saul, 2001).*

En la primera afirmación, sabemos algo acerca de un ángulo del triángulo (que es un ángulo recto) y de ahí podemos concluir que existe una cierta relación entre sus lados. En el segundo enunciado, sabemos algo sobre los lados del triángulo y, en consecuencia, concluimos algo sobre sus ángulos (que uno de ellos es un ángulo recto) (Gelfand y Saul, 2001).

Esta reflexión realizada *a priori*, antes de iniciar la resolución del problema, aumenta la probabilidad de éxito y la capacidad de análisis matemático, ya que evita la aplicación automática de la fórmula.

Ejemplo: Demuestre que un triángulo de lados 3, 4 y 5 es un triángulo rectángulo.

Solución: Podemos aplicar el enunciado II para ver si es un triángulo rectángulo. De hecho, $5^2 = 25 = 3^2 + 4^2$*. Entonces, según el enunciado II, el ángulo opuesto al lado de longitud 5 es un ángulo recto y el triángulo es rectángulo. Observa que no podemos usar el enunciado I del teorema de Pitágoras para resolver este problema.*

Actividad (por parejas) (obtenida del texto *Trigonometry* (Gelfand y Saul, 2001))

Los siguientes ejercicios hacen referencia al teorema de Pitágoras. Antes de comenzar a resolver cada ejercicio, asegúrate de entender cuál de los dos enunciados (I o II) vas a utilizar para resolverlo, e indícalo en tu cuaderno.

1) Dos lados de un triángulo rectángulo miden 10 y 24 unidades. Halla la longitud de la hipotenusa en las mismas unidades.

2) La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 41 unidades de longitud y uno de los catetos mide 9 unidades. Halla la medida del otro cateto.

3) Demuestra que un triángulo cuyos lados miden 5, 12 y 13 unidades es un triángulo rectángulo.

4) Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 1 unidad de longitud y la hipotenusa tiene 3 unidades de longitud. ¿Cuál es la longitud del otro cateto del triángulo??

5) La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles tiene 1 unidad de longitud. Halla la longitud del cateto.

6) En un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º, la hipotenusa tiene 1 unidad de longitud. Calcula las longitudes de los otros dos catetos.

Nota: El problema 6 será resuelto en clase por el docente y los alumnos. La resolución de este problema es muy sencilla e interesante. Lo primero es identificar el triángulo, 30º-60º-90º. Ahora, considera dos copias de dicho triángulo y únelas por el cateto adyacente al ángulo de 30º (ver Figura 8.12). Verás que forman un triángulo equilátero. El lado opuesto al ángulo de 30º es la mitad de un lado de este triángulo equilátero y, por lo tanto, la mitad de la hipotenusa.

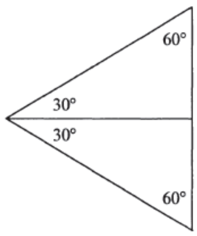


Figura 8.12: Resolución del problema 6 (Gelfand y Saul, 2001).

Tarea (estudio autónomo)**:** descrita en la siguiente sesión.

8.1.11 Sesión 10. Teorema de Pitágoras. Clasificación de triángulos

1ª parte: Clasificación de triángulos y relación pitagórica (vídeo de *Edpuzzle*)

- ✓ Tiempo estimado en clase: 15 minutos
- ✓ Tipo de intervención en clase: dialógica

La forma elegida para la presentación de este tema en clase se basa en el texto *Trigonometry* (Gelfand y Saul, 2001), cuyo contenido se transcribe a continuación.

Un triángulo se puede clasificar como agudo (que tiene tres ángulos agudos), recto (que tiene un ángulo recto) u obtuso (que tiene un ángulo obtuso). Sabemos por la geometría que las longitudes de los lados de un triángulo determinan sus ángulos. ¿Cómo podemos saber, a partir de la longitud de sus lados, si el triángulo es agudo, recto u obtuso?

La segunda afirmación que vimos respecto al teorema de Pitágoras responde parcialmente a esta pregunta: "Si las longitudes de los lados a, b y c satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$*, entonces el triángulo es rectángulo". ¿Y si la relación no se satisface?*

Para comprender mejor qué sucede con el triángulo en estas situaciones, imaginemos un triángulo rectángulo "articulado" en su ángulo recto, y cuya hipotenusa se puede estirar (como si fuera de goma). Los siguientes diagramas muestran tal triángulo. Los lados a y b tienen una longitud fija y el ángulo entre ellos es "articulado".

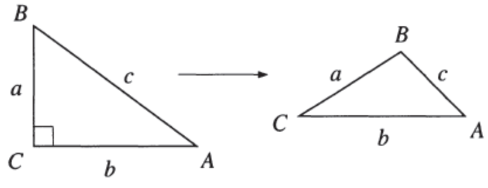


Figura 8.13: Diagramas del triángulo "articulado" (Gelfand y Saul,, 2001).

Como podemos ver, si partimos de un triángulo rectángulo y "cerramos" la rótula en C, el ángulo recto se volverá agudo. Cuando esto sucede, el tercer lado (identificado *como c) se acorta. Puesto que en el triángulo rectángulo se cumple la relación* $c^2 = a^2 + b^2$*, podemos afirmar:*

Enunciado III. Si el ángulo C del triángulo ABC es agudo, entonces $c^2 < a^2 + b^2$.

Asimismo, si "abrimos" la rótula hacia arriba, el ángulo C se vuelve obtuso y el tercer lado se alarga:

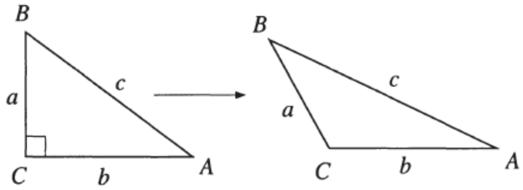


Figura 8.14: Diagramas del triángulo "articulado" (Gelfand y Saul, 2001).

Entonces, podemos afirmar:

Enunciado IV. Si el ángulo C de triángulo ABC es obtuso, entonces $c^2 > a^2 + b^2$.

A partir de estos enunciados, podemos deducir:

Por ejemplo, si, en el triángulo ABC, $c^2 < a^2 + b^2$*, entonces el ángulo C no puede ser recto (esto contradice el enunciado II del teorema de Pitágoras) y no puede ser obtuso (esto contradice el enunciado IV anterior). Entonces, el ángulo C debe ser agudo (que es el recíproco del enunciado III). Los enunciados III y IV, junto con sus recíprocos, nos permiten decidir si un triángulo es agudo, recto u obtuso, simplemente conociendo las longitudes de sus lados.*

Para preparar a los alumnos para esta clase, se ha elegido un vídeo disponible en internet, titulado "What if $a^2 + b^2$ doesn't equal c^2?", cuyo enfoque sobre este tema es similar al enfoque presentado en el texto *Trigonometry*. El vídeo, editado a través de la plataforma *Edpuzzle*, será enviado a los alumnos antes de esta clase. La tarea será la visualización del vídeo, de 10 minutos, previa a la clase. A continuación, se muestra el enlace al vídeo:

- ✓ Tiempo estimado de dedicación del alumno: 10 minutos

Vídeo (Dobbs, 2018)**:** https://edpuzzle.com/media/5f30695ad010013f2248c8b3

En clase, se revisa este tema para que el docente se asegure de que los alumnos han entendido el contenido del vídeo. Para ello, se utilizará *Geogebra*, que permite activar el razonamiento de los alumnos mediante la visualización de los cambios en el triángulo: en particular, variando la longitud de la hipotenusa y manteniendo fijos sus catetos, variará el ángulo opuesto y la relación pitagórica.

2ª parte: Ejercicios

- ✓ Tiempo estimado en clase: 25 minutos
- ✓ Tipo de intervención en clase: colaborativa

Actividad (por parejas) (obtenida del texto *Trigonometry* (Gelfand y Saul, 2001))

1) ¿Un triángulo cuyos lados miden 2, 3 y 4 es agudo, recto u obtuso?

Solución. Dado que $4^2 = 16 > 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, el triángulo es obtuso, con el ángulo obtuso opuesto al lado de longitud 4.

Pregunta: ¿Por qué no necesitamos comparar 3^2 *con* $2^2 + 4^2$*, ó* 2^2 *con* $3^2 + 4^2$*?*

2) ¿Es un triángulo de lados 4, 5 y 6 agudo, recto u obtuso?

Solución. Sólo necesitamos verificar la relación entre 6^2 y $4^2 + 5^2$. Dado que $6^2 = 36 < 4^2 + 5^2 = 41$, el triángulo es agudo.

3) ¿El triángulo cuyos lados miden 1, 2 y 3 es agudo, recto u obtuso?

Solución. Vemos que $3^2 = 9 > 2^2 + 1^2 = 5$, por lo que parece que el triángulo es obtuso.

Pregunta: Esta conclusión es incorrecta. ¿Por qué?

4) Ejercicio 3 del libro de texto, página 188 (Anexo B).

Nota: como esta sesión debe ocupar aproximadamente 40 minutos del tiempo de clase, la actividad programada para la próxima sesión puede iniciarse al final de esta clase.

8.1.12 Sesión 11. Teorema de Pitágoras. Problemas con tangentes a circunferencias

1ª parte: Tangentes a circunferencias: actividad práctica (vídeo de *Edpuzzle*)

- ✓ Tiempo estimado en clase: 30 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

La primera parte de esta clase estará destinada a la visualización de un vídeo editado a través de la plataforma *Edpuzzle*. Para esta sesión, se enviará a los alumnos un enlace al vídeo “Tangent Theorems for Circles and the Pythagorean Theorem”, de 9 minutos de duración. A lo largo del vídeo, los alumnos deberán responder a 6 cuestiones para continuar la visualización. Esta actividad debe realizarse en parejas. Mientras los alumnos desarrollan la actividad, el docente supervisa el desempeño de cada pareja y apoya a quienes lo necesitan.

Vídeo (Tanton, 2012): https://edpuzzle.com/media/5f2fde939903313f419e9372

El vídeo tiene una duración aproximada de 9 minutos y se consideran 20 minutos de tiempo adicional para que los alumnos reflexionen y respondan a las cuestiones planteadas a lo largo del mismo.

2ª parte: Problemas

- ✓ Tiempo estimado en clase: 20 minutos
- ✓ Tipo de intervención en clase: dialógica

El final de la clase estará dedicado a la resolución en la pizarra de los 4 problemas resueltos que se presentan en la página 189 del libro de texto (Anexo A). Esta parte de la clase deberá realizarse involucrando a los alumnos en la discusión de los ejercicios.

Tarea (estudio autónomo)

- ✓ Tiempo de dedicación del alumno: 30 minutos

Los alumnos deben resolver 3 de los 5 problemas presentados en la página 189 del libro de texto, así como el problema 36 de la página 201 (Anexo B). La corrección se realizará en la siguiente clase. Antes de la misma, los alumnos deberán subir sus soluciones al muro de *Padlet* creado por el docente para cada grupo.

8.1.13 Sesión 12. Aplicaciones algebraicas del teorema de Pitágoras

1ª parte: Corrección en clase de la tarea

- ✓ Tiempo estimado en clase: 25 minutos

- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

La primera parte de esta clase estará dedicada a la resolución en la pizarra de los ejercicios propuestos como tarea en la clase anterior. Los alumnos salen a la pizarra para explicar la resolución de los ejercicios a sus compañeros, quienes deben evaluar y discutir dicha resolución.

2ª parte: Aplicación algebraica del teorema de Pitágoras en figuras planas

- ✓ Tiempo estimado en clase: 25 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

El docente resuelve en la pizarra los ejercicios resueltos de la página 190 del libro (Anexo A), que incluyen triángulos y trapecios, involucrando a los alumnos en el proceso a través de preguntas adecuadas. En clase, los alumnos organizados por parejas, deben resolver los problemas 1 y 2 de la página 190 (Anexo B).

Tarea (colaborativa)

Los alumnos, organizados por parejas, deben resolver las siguientes actividades del libro de texto: problemas 12 y 13 de la página 199, problemas 32 y 33 de la página 201, problemas 50 y 51 de la página 203, y problema 3 de la página 204 (Anexo B).

Antes de la siguiente clase, los alumnos deberán subir sus soluciones al muro de *Padlet* creado por el docente para cada grupo. La resolución de los ejercicios se discutirá en la pizarra en la clase siguiente.

8.1.14 Sesión 13. Lugar geométrico. Mediatriz y bisectriz

1ª parte: Corrección en clase de la tarea

- ✓ Tiempo estimado en clase: 15 minutos
- ✓ Tipo de intervención en clase: dialógica

La primera parte de esta clase estará dedicada a la resolución en la pizarra de los ejercicios realizados como tarea. El docente habrá analizado previamente los ejercicios realizados por los alumnos a través de la plataforma *Padlet*, con el fin de orientar la clase a las dificultades y errores más comunes que presentan los alumnos.

2ª parte: Mediatriz y bisectriz (clase interactiva con *Geogebra*)

- ✓ Tiempo estimado en clase: 35 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: magistral, dialógica y colaborativa

El docente introduce el concepto de lugar geométrico, define la circunferencia y el arco capaz (concepto discutido en la 3ª sesión) como lugares geométricos, e introduce los conceptos de mediatriz y bisectriz. Con ayuda de compás, transportador y regla, los alumnos aprenden a dibujar la mediatriz y la bisectriz y verifican sus propiedades.

Actividad

Uso del compás y la regla para comprobar las propiedades de la mediatriz.

1) Dibuja un segmento, AB, y traza su mediatriz para buscar su punto medio, M. Después, comprueba con el compás que el segmento AM mide igual que el segmento MB.

2) Dibuja un ángulo ABC de 110º, traza la bisectriz de dicho ángulo y comprueba que cualquier punto de la bisectriz está situado a igual distancia de ambos lados del ángulo

Actividad: *Geogebra* para comprender las propiedades de la mediatriz y la bisectriz

Se inicia una actividad práctica en *Geogebra*, en la que el docente muestra a los alumnos, organizados por parejas, el dibujo de estos lugares geométricos a través de la plataforma. En esta práctica, alumnos y docente trabajan con *Geogebra* simultáneamente, y los alumnos aprenden en tiempo real

3) Dibuja un segmento, AB, de 7 cm y su mediatriz. Comprueba con *Geogebra* que la distancia de cualquier punto de la mediatriz al punto A es la misma que al punto B.
4) Dibuja un ángulo de 60º y su bisectriz. Comprueba que la bisectriz haya dividido al ángulo inicial en dos ángulos de 30º.

Tarea (estudio autónomo)

- ✓ Tiempo de dedicación del alumno: 15 a 20 minutos

Esta tarea es muy importante, ya que supone una preparación para la próxima clase. Se trata de un vídeo editado en la plataforma *Edpuzzle* que los alumnos deben ver, respondiendo a las cuestiones que se plantean. Su título es *"Rectas y Puntos Notables de los Triángulos"*, tiene una duración aproximada 9 minutos, y cuenta con 9 cuestiones de selección múltiple distribuidas a lo largo del mismo.

El docente, mediante el acceso a la plataforma, controla la visualización del vídeo por parte de los alumnos y recibe las respuestas al cuestionario propuesto. Así, en la clase siguiente, el docente aclara las posibles dudas y refuerza los conceptos aprendidos, favoreciendo el desarrollo de la siguiente sesión práctica con *Geogebra*.

Vídeo (Carreon, 2019): https://edpuzzle.com/media/5f327cc39ee67f3f5d19a9d7

8.1.15 Sesión 14. Lugar geométrico. Puntos notables de un triángulo

1ª parte: Puntos notables de un triángulo (clase interactiva con *Geogebra*)

Actividad

- ✓ Tiempo estimado en clase: 40 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

Una vez corregida la última tarea y repasada con el docente al inicio de la clase, los alumnos ya tienen los conocimientos necesarios para aprovechar una sesión práctica en la que aplicarán lo que han aprendido en la tarea anterior.

En esta clase, los alumnos ponen en práctica el concepto de puntos notables del triángulo, utilizando la plataforma *Geogebra*. La idea es que los alumnos aprendan a utilizar la plataforma para el estudio de triángulos, observen las propiedades de cada recta y punto notable del triángulo, y visualicen las diferencias entre ellos.

Los alumnos se organizarán por parejas. Toda la clase se desarrollará mediante el uso de ordenadores. El docente guiará paso a paso la actividad práctica de los alumnos, proyectando en la pizarra la construcción de los elementos en *Geogebra*. La clase seguirá la dinámica del vídeo "*Geogebra*. 3º ESO. Puntos Notables de un Triángulo", cuyo enlace se presenta a continuación:

Vídeo (Pérez, 2014): https://www.youtube.com/watch?v=JZJOmwSplqg

2ª parte: Incentro y circuncentro (clase interactiva con *Geogebra*)

Actividad

- ✓ Tiempo estimado en clase: 10 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: dialógica y colaborativa

Se presentan a los alumnos diversas actividades para realizar con *Geogebra,* que se describen a continuación. Las actividades, que deben llevarse a cabo por parejas, se iniciarán en esta clase y se terminarán en casa como tarea.

1) Trazado de las mediatrices de un triángulo y obtención del circuncentro y de la circunferencia circunscrita. Esta actividad debe realizarse para:

a) un triángulo acutángulo;

b) un triángulo rectángulo;

c) un triángulo obtusángulo.

2) Responde en tu cuaderno a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es la diferencia que se observa entre el circuncentro de un triángulo acutángulo y el circuncentro de un triángulo obtusángulo?

b) ¿Dónde está situado el circuncentro de un triángulo rectángulo?

c) ¿Por qué punto de la circunferencia pasa la hipotenusa del triángulo rectángulo?

d) Completar con la palabra que falta: “Así, se concluye que la hipotenusa del triángulo rectángulo corresponde al __________de la circunferencia circunscrita”.

3) Trazado de las bisectrices de un triángulo y obtención del incentro y de la circunferencia inscrita. Esta actividad debe realizarse para:

a) un triángulo acutángulo;

b) un triángulo rectángulo;

c) un triángulo obtusángulo.

Concluidas las actividades, los grupos deben compartirlas con el tutor. Para ello, se consideran diferentes posibilidades (el docente debe elegir una de ellas y explicar el procedimiento a los alumnos):

a) Con una cuenta en *Geogebra* (para mayores de 14 años): una vez finalizados los ejercicios, los alumnos seleccionan en “Archivo” la opción “Guardar” (la opción “Compartido” debe estar seleccionada). Se abrirá una opción en la parte inferior de la pantalla, donde se debe seleccionar “Compartir” (o, en “Archivo”, seleccionar “Compartir”). Así, aparecerá un enlace al fichero de *Geogebra* que los alumnos pueden copiar y enviar al tutor, por correo o a través del C*lassroom*.

b) Sin tener cuenta en *Geogebra* (utilizando *Geogebra* en línea): una vez terminados los ejercicios, los alumnos seleccionan en “Archivo” la opción “Guardar”. Entonces aparecerá una ventana, en la que los alumnos deberán seleccionar la opción que figura en la parte inferior, “Continuar sin identificarse ahora”. Seleccionando “Guardar”, se abrirá una ventana para elegir la carpeta del ordenador donde almacenar el fichero (o aparecerá el fichero descargado en la parte inferior izquierda y habrá que elegir la opción “Mostrar en una carpeta”). Los alumnos podrán subir al *Classroom* el fichero guardado en su ordenador (con extensión “.*ggb*”).

c) Existe una opción en *Geogebra* para crear grupos, que permite al docente crear un grupo con los alumnos y compartir actividades, y que permite a los alumnos compartir sus actividades con el tutor.

Tarea complementaria de repaso (estudio autónomo)

- ✓ Tiempo de dedicación del alumno: 20 minutos

Cuestiones 2 y 3 de la página 191 del libro de texto; cuestiones 15, 16 y 17 de la página 199 y cuestión 56 de la página 203 (Anexo B).

8.1.16 Sesión 15. Evaluación

1ª parte: Corrección en clase de la tarea

- ✓ Tiempo estimado en clase: 15 minutos
- ✓ Tipo de intervención en clase: dialógica

La primera parte de esta clase será la corrección de los ejercicios realizados como tarea. El docente habrá analizado previamente los ejercicios resueltos con *Geogebra*, con el fin de dedicar la clase a resolver las dificultades y errores más comunes que presentan los alumnos.

2ª parte: Autoevaluación

- ✓ Tiempo estimado en clase: 10 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: autónoma

Para la autoevaluación, se utilizará la herramienta *CoRubrics*, una aplicación que, a partir de una matriz creada por el docente, genera automáticamente un cuestionario que se envía al alumnado.

3ª parte: Evaluación intermedia

- ✓ Tiempo estimado en clase: 25 minutos
- ✓ Tipos de intervención en clase: autónoma

Para esta evaluación, se utilizará la herramienta *Google Forms*. Se les enviará a los alumnos un cuestionario de repaso sobre los temas cubiertos por este programa. Se trata de cuestiones de elección múltiple que los alumnos deben responder en clase a través de sus ordenadores.

8.2 Tabla de correlación de sesiones y estándares de aprendizaje evaluables

La Tabla 8.3 muestra la correspondencia entre las sesiones propuestas y los estándares de aprendizaje del currículo oficial (descritos en la Tabla 3.4 del capítulo 3).

Estándares / Sesión	1.1	1.2	2.1[c)]	2.2[c)]	2.3	11.3	11.4	12.1	12.3
Sesión 0		■							
Sesión 1[a)]		■							
Sesión 2[a)]		■							
Sesión 3 [a)]		■							
Sesión 4				■	■				
Sesión 5				■	■				
Sesión 6		■		■	■				
Sesión 7		■		■	■	■	■		
Sesión 8						■	■	■	
Sesión 9									
Sesión 10						■	■		
Sesión 11[b)]			■						
Sesión 12			■					■	
Sesión 13	■					■	■		
Sesión 14	■					■	■	■	
Sesión 15									■

Tabla 8.3: Sesiones y estándares de aprendizaje evaluables en 3º de ESO.

[a)] Las sesiones 1, 2 y 3 están relacionadas con el estándar de aprendizaje 1.2, ya que tratan de relaciones angulares. Sin embargo, los temas específicos tratados en estas sesiones (ángulo central, ángulo inscrito y arco capaz), que se estudian en el libro de texto, no están discriminados en los estándares de aprendizaje evaluables de 3º de ESO.

[b)] La sesión 11 corresponde a la aplicación del teorema de Pitágoras a problemas que involucren tangentes a circunferencias, tema estudiado en el libro de texto. Aunque no se corresponde con ningún tema contenido explícitamente en el currículo de 3º de ESO, está indirectamente relacionado con el estándar de aprendizaje 2.1.

[c)] Los estándares de aprendizaje 2.1 y 2.2 se cumplen sólo parcialmente. El estándar 2.1 incluye áreas de figuras circulares, que es un tema que no se ha considerado en esta propuesta. Por su parte, el estándar 2.2 se refiere a la proporcionalidad aplicada a diferentes polígonos; la presente propuesta trabaja, esencialmente, con triángulos.

8.3 Tabla resumen de la propuesta

El resumen de la programación propuesta se muestra en la Tabla 8.4 presentada a continuación.

Sesión		Duración (min) total	Duración (min) parcial	Programación	Uso de TIC	Tipo de intervención	Responsable	Herramientas específicas de evaluación
Apartado 1	S0	25	25	Repaso de relaciones angulares Evaluación previa	Edpuzzle y Google Forms	Estudio autónomo	Alumno	
	S1	50	15	Ángulo central	-	Magistral y dialógica	Docente y alumno	Exposición oral (rúbrica)
			35	Ángulo inscrito	Edpuzzle	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	
	S2	50	50	Ángulo inscrito (teorema de Tales)	-	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	
	S3	50	30	Arco capaz, discusión	-	Colaborativa y dialógica	Alumno y docente	Tarea de Padlet
			20	Arco capaz, cuestiones	Padlet[1)]			
Apartado 2	S4	50	35	Figuras semejantes Concepto de razón de semejanza	-	Adidáctica y colaborativa	Alumno	Cuestionario de Edpuzzle
			15	Semejanza de triángulos	Edpuzzle	Estudio autónomo	Alumno	
	S5	50	50	Criterios de semejanza	Edpuzzle[1)]	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	Cuestionario de Edpuzzle Exposición oral (rúbrica)
	S6	50	15	Teorema de Tales	-	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	Exposición oral (rúbrica)
			35	Distancias a puntos inaccesibles	-	Adidáctica y colaborativa	Alumno	
	S7	50	15	Teorema de Tales y cálculo de distancias a puntos inaccesibles	Edpuzzle[1)]	Magistral y dialogica	Docente y alumno	Cuestionario de Edpuzzle Geogebra
			35	Teorema de Tales mediante actividad e investigación con Geogebra	Geogebra	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	
Apartado 3	S8	50	30	Teorema de Pitágoras: demostración a través de la manipulación de objetos	-	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	Exposición oral (rúbrica) Grabación de un vídeo (Screencastify)
			20	Actividad práctica con Geogebra	Geogebra	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	
	S9	50	20	Actividad práctica con Geogebra	Geogebra	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	
			30	Discusión del teorema de Pitágoras	-	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	

Sesión		Duración (min)		Programación	Uso TIC	Tipo de intervención	Responsable	Herramientas evaluación específicas
		total	parcial					
Apartado 3	S10	40	15	Teorema de Pitágoras y clasificación de triángulos	Edpuzzle[1)] Geogebra	Dialógica	Alumno y docente	
			25	Ejercicios	-	Colaborativa	Alumno	
	S11	50	30	Teorema de Pitágoras y problemas con tangentes a circunferencias	Edpuzzle	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	Cuestionario de Edpuzzle
			20		Padlet[1)]	Dialógica	Alumno y docente	Tarea de Padlet
	S12	50	25	Aplicaciones algebraicas del teorema de Pitágoras	-	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	Exposición oral (rúbrica)
			25		-			Tarea de Padlet
Apartado 4	S13	50	15	Aplicaciones algebraicas del teorema de Pitágoras	-	Dialógica	Alumno y docente	Geogebra
			35	Lugares geométricos: mediatriz y bisectriz	Geogebra Edpuzzle[1)]	Magistral, dialógica y colaborativa	Alumno y docente	
	S14	50	40	Lugares geométricos: puntos notables de un triángulo	Geogebra	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	Cuestionario de Edpuzzle
			10	Incentro y circuncentro	Geogebra	Dialógica y colaborativa	Alumno y docente	Geogebra
Evaluación	S15	50	15	Lugares geométricos	-	Dialógica	Alumno	
			10	Autoevaluación	CoRubrics	Autónoma	Alumno	Google Forms
			25	Evaluación intermedia	Google Forms	Autónoma	Alumno	Google Forms

Tabla 8.4: Tabla resumen de la programación de clases propuesta.

8.4 Evaluación

8.4.1 Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables

Se aplicarán los criterios y estándares de aprendizaje evaluables referidos en los capítulos 2 y 3 de este documento, extraídos del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

8.4.2 Procedimientos, instrumentos de evaluación y criterios de evaluación

La propuesta será compaginar la evaluación tradicional con la evaluación de actividades colaborativas en clase. A tal fin, se introducirán herramientas que permiten realizar evaluaciones distintas de las tradicionales:

- ✓ *Edpuzzle*: permite al docente hacer vídeos interactivos con preguntas y comentarios.
- ✓ *Padlet*: permite a los alumnos publicar sus conocimientos. Funciona como un cuaderno *online*, en el que puede sintetizarse la información dada en clase y donde es posible añadir textos, imágenes y vídeos. También sirve para publicar ejercicios realizados en grupo, ya que la *app* se puede utilizar simultáneamente en varios dispositivos.
- ✓ *CoRubrics*: la evaluación de las distintas actividades realizadas en clase se llevará a cabo mediante rúbricas elaboradas con la herramienta *CoRubrics*. Ésta es una aplicación de Google *Classroom*, que permite crear rúbricas para evaluar el trabajo realizado. Sirve también para la autoevaluación de los alumnos. A través de la aplicación, el docente crea una matriz, a partir de la cual se genera automáticamente un cuestionario que es enviado al alumnado.
- ✓ *Geogebra*: durante el desarrollo del programa, se realizarán actividades en esta plataforma, que serán evaluadas posteriormente.

Estas herramientas serán aplicables en momentos estratégicos durante el desarrollo de las actividades. Además de aumentar la motivación y participación del alumnado, permiten al docente una evaluación en tiempo real de acuerdo con una rúbrica predefinida.

Los instrumentos de evaluación serán:

- ✓ **Observación de la actividad del alumnado mediante rúbricas, "Diario de clase" (Evaluación Actitudinal - EA)**. Se evaluarán los siguientes aspectos: resolución de las cuestiones propuestas, expresión oral, grado de motivación, iniciativa, dedicación al trabajo, respeto a los compañeros, responsabilidad, intervenciones en los debates, calidad de la argumentación, hábitos de trabajo, cuidado del material y cuaderno, asistencia regular a clase. Se trata de una evaluación cualitativa.

- ✓ **Análisis de producciones relacionadas con las actividades colaborativas (Evaluación de Grupo - EG)**. Se evaluarán los siguientes aspectos: estándares de aprendizaje evaluables, nivel de expresión oral, logro de las metas propuestas, utilización de las fuentes de información, presentación de hábitos de trabajo, participación, motivación, iniciativa, actitud de respeto al equipo y competencias clave. Es una evaluación cualitativa realizada mediantes rúbricas.

- ✓ **Evaluación Intermedia (Evaluación Intermedia - EI)**. Se evaluará el grado de adquisición de los estándares de aprendizaje descritos en la Tabla 7.1 (correspondientes a los contenidos discutidos en clase hasta el momento de la evaluación). Es una evaluación cuantitativa que se llevará a cabo en la última sesión.
- ✓ **Prueba escrita (Evaluación Final o Sumativa - EF)**. Se evaluará cuantitativamente la adquisición de los estándares de aprendizaje de este bloque didáctico, descritos en la Tabla 3.4. Esta evaluación está fuera del ámbito de esta programación, puesto que incluye todas las unidades didácticas del período.

Los instrumentos de evaluación que se basan en una evaluación cualitativa (EA y EG), es decir, que califican el nivel de logro de cada alumno en el desempeño de determinada tarea o actitud, tendrán una puntuación numérica asignada en función de la calificación.

La calificación final de cada alumno se obtendrá mediante la ponderación de los resultados obtenidos con los distintos instrumentos de evaluación. Se proponen las siguientes proporciones:

- ✓ 20 % Evaluación Actitudinal (EA).
- ✓ 40% Evaluaciones de Grupo (EG).
- ✓ 15% Evaluaciones Intermedias (EI).
- ✓ 25% Evaluación Final o Sumativa (EF).

La idea es llevar a cabo un proceso de evaluación que integre diversos conocimientos y competencias. En este sentido, más allá de las pruebas escritas tradicionales, se pretende promover una evaluación global que sea válida, inclusiva y eficaz. Se espera que la aplicación de este sistema de evaluación permita involucrar más a los alumnos, fomentando una participación activa y crítica, y sea capaz de conectar las dinámicas de clase con las evaluaciones.

Capítulo 9

Justificación de la propuesta de intervención y análisis de errores

La propuesta de intervención descrita en el capítulo 8 no se llegó a aplicar en clase, dado que el desarrollo de la disciplina del *Practicum II* se vio interrumpido por la crisis sanitaria provocada por el COVID-19. Este capítulo, por consiguiente, incluye un primer apartado en el que se describe la justificación de la propuesta de intervención presentada en el capítulo anterior, y un segundo apartado en el que se comentan algunos errores típicos relacionados con contenidos de geometría, cometidos por alumnos de tercer curso de la ESO del centro para el que se elaboró la propuesta de intervención.

9.1 Justificación de la propuesta de intervención

La propuesta de intervención didáctica presentada tiene como propósito complementar el proceso de instrucción propuesto en el libro de texto y plantear estrategias para detectar las dificultades de los alumnos y ayudarlos a superarlas.

El análisis del libro de texto presentado en el capítulo 6, para cada uno de los cuatro contenidos abordados (relaciones angulares, semejanza, teorema de Pitágoras y lugares geométricos), ha permitido verificar aquellas partes del proceso de instrucción que podrían mejorarse para proporcionar un aprendizaje más eficaz. A continuación, en el capítulo 7, se ha desarrollado un análisis sobre las dificultades y errores previstos durante el desarrollo de la unidad didáctica incluida en el libro de texto.

La integración de ambos análisis ha sido determinante para la elaboración de la propuesta de intervención didáctica descrita en el capítulo 8. En particular, el análisis conjunto de los puntos de mejora señalados en el libro de texto y las dificultades esperables de los alumnos ha permitido definir los tipos de intervención en clase y los materiales que se utilizan en la propuesta.

Para la elaboración de las sesiones sobre relaciones angulares, se tienen en cuenta dos aspectos fundamentales: la necesidad de activar los conocimientos previos de los alumnos (mediante un repaso del tema) y la posibilidad de que los alumnos descubran por sí mismos el porqué de los teoremas relativos a las relaciones angulares en la circunferencia. Para trabajar este último aspecto, se plantean actividades (tales como la demostración de teoremas o proposiciones) que lleven a los alumnos a interrelacionar sus conocimientos previos con otros nuevos introducidos en clase. Se trata de actividades que fomentan el razonamiento matemático y la autoconfianza para "jugar" con las Matemáticas.

Así, teniendo en cuenta estos dos aspectos, se propone una actividad inicial de repaso de los conceptos previos sobre relaciones angulares. A continuación, se plantean actividades de naturaleza creativa y desarrolladas mediante trabajo colaborativo, que permiten a los alumnos elaborar argumentos propios para validar las proposiciones y procedimientos. Estas actividades se estructuran a través de discusiones en clase, que permiten crear ambientes de aprendizaje con mayor idoneidad epistémica, en los que se genera motivación e interés. Tales actividades deben desarrollarse antes de la introducción de ejercicios tipo, cuyo objetivo es trabajar la automatización de los procedimientos. En este contexto, se espera un aumento de la tasa de éxito del alumnado en la resolución de los ejercicios propuestos.

En las sesiones referentes a la semejanza de triángulos, se busca el desarrollo de la visión espacial, el entrenamiento de la capacidad de representación geométrica y la integración de diferentes lenguajes (oral, simbólico y gráfico) para el desarrollo de una imagen conceptual completa. El objetivo principal es que los alumnos comprendan el significado de razón de semejanza y sepan identificar diversas situaciones de semejanza, con el fin de aplicarlas en diferentes contextos. Para ello, se proponen actividades de tipo situación que utilizan la manipulación de objetos, con el objetivo es aumentar la idoneidad epistémica y semiótica del proceso de aprendizaje. A menudo, se visualizan vídeos cortos (cuya duración es de 7 a 12 minutos), en los que los alumnos se inician en la teoría y deben responder a diversos cuestionarios. Esta actividad precede a los debates en clase, en los que los alumnos exponen su razonamiento sobre los temas visualizados en los vídeos y son co-evaluados por sus compañeros.

El uso de vídeos como herramienta de trabajo, además de aumentar la motivación de los alumnos y posibilitar al docente la evaluación individual de cada estudiante, permite incrementar el tiempo de clase dedicado a la discusión de las actividades propuestas (experimentación y validación de procesos), resolución de dudas y superación de posibles dificultades, que representan, en realidad, los momentos clave del aprendizaje.

Asimismo, sistemáticamente, se proponen actividades relacionadas con los temas tratados a través de la plataforma *Geogebra*, que constituye una potente herramienta de aprendizaje que promueve una mayor agilidad de resolución y facilita la comprensión de los conceptos estudiados. La plataforma despierta el interés de los alumnos, favorece su concentración y permite la participación activa de cada estudiante en la construcción de su conocimiento. En un contexto más amplio, además de promover el aprendizaje de las Matemáticas, responde a las necesidades de la sociedad en términos de formación digital, permitiendo así la evolución del entorno educativo.

En general, todas las actividades basadas en la visualización y discusión de figuras geométricas ayudan a los alumnos a superar sus dificultades más frecuentes con la geometría.

Las sesiones dedicadas al teorema de Pitágoras siguen las directrices previas: proponer actividades que obliguen a los alumnos a elaborar argumentos antes de aplicar un procedimiento. De esta forma, se reduce el riesgo de limitar el proceso de enseñanza-aprendizaje a una aplicación automatizada de conceptos y proposiciones. Para ello, se plantea la demostración del teorema de Pitágoras mediante diferentes experimentos de manipulación de objetos. Esta actividad elimina el obstáculo entre los enfoques algebraico y gráfico, permitiendo al alumno desarrollar su creatividad para probar una verdad matemática. La presentación final de sus conclusiones mediante la elaboración de un vídeo, además de resultar muy motivante, promueve la competencia digital.

Una alternativa, presente en algunas actividades, consiste en proponer modelos de intervención que tienen como objeto comprender el teorema de Pitágoras de una manera integral. Así, plantean preguntas como "*¿Qué nos dice esta relación?*" o *"¿Qué le sucede a un triángulo si no se cumple la relación pitagórica?"*. Esta forma de razonar permite incrementar la riqueza del proceso de análisis y promueve en los alumnos el denominado *"out-of-the-box thinking"*.

El objetivo principal de las sesiones sobre lugares geométricos es plantear actividades que permitan a los alumnos decodificar el concepto de lugar geométrico para visualizarlo, pasando así del lenguaje escrito al gráfico. Para ello, se pone a su disposición herramientas de representación gráfica (regla, compás, etc.) y herramientas informáticas (*Geogebra*). Estas actividades ayudan a visualizar geométricamente las propiedades estudiadas y contribuyen al desarrollo de una imagen conceptual completa de los contenidos impartidos en clase.

Cabe mencionar que, en este contexto, se ha incluido una sesión dedicada al estudio de los puntos notables de un triángulo, cuyos contenidos son necesarios para la resolución de algunas actividades propuestas en el libro de texto. Esta sesión se introduce a continuación de la que define lugar geométrico y permite al alumno lograr una comprensión más amplia de este concepto, que está presente en diferentes etapas de la estructura curricular.

En definitiva, la propuesta de intervención se construye con el objetivo de ampliar la imagen conceptual de determinados contenidos geométricos del currículo, enseñar sobre una base espacial sólida, generar motivación y conectar las dinámicas de clase con las evaluaciones.

9.2 Análisis de los errores observados en la práctica de la geometría relacionados con la resolución de triángulos

En los siguientes párrafos, se presentan y discuten los errores más comunes que, según el tutor del centro, cometen los alumnos de tercer curso de la ESO en la resolución de actividades prácticas de geometría.

En relación con el estudio de los ángulos en la circunferencia, el error más común resulta de la dificultad para interpretar la relación entre ángulo central y ángulo inscrito a una circunferencia. Este hecho lleva a los alumnos a aplicar erróneamente el concepto de ángulo central al ángulo inscrito. Las Figuras 9.1 y 9.2 muestran un ejemplo de este error.

1. ¿Cuál es la medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia? Di el valor de los ángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{FDE}$, $\widehat{DEF}$, $\widehat{DFG}$, $\widehat{FGD}$.

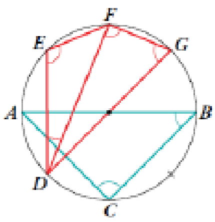
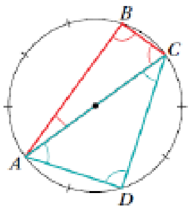


Figura 9.1: Ejercicio 1 de la página 185 del libro de texto.

En este caso, el alumno aplica un conocimiento, que juzga verdadero, fuera de su campo de validez, lo que produce resultados erróneos. Es un claro ejemplo del *teorema en acto* mencionado en el capítulo 7. Como es de esperar, este error es persistente y vuelve a aparecer en el segundo ejercicio propuesto (Figura 9.2).

2. ¿Cuál es la medida angular de cada uno de los diez arcos iguales? Halla el valor de los ángulos $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{ACD}$.



Ej 2 $360 : 10 = 36^\circ$

$\widehat{CAB}$ $36 \cdot 1 = 36^\circ$

$\widehat{ABC}$ $36 \cdot 5 = 180^\circ$

$\widehat{BCA}$ $36 \cdot 4 = 144^\circ$

$\widehat{CAD}$ $36 \cdot 3 = 108^\circ$

$\widehat{ADC}$ $36 \cdot 5 = 180^\circ$

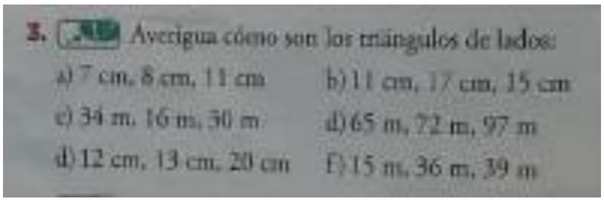
$\widehat{ACD}$ $36 \cdot 2 = 72^\circ$

Figura 9.2: Ejercicio 2 de la página 185 del libro de texto.

Las Figuras 9.3 y 9.4 ilustran un error común cometido al aplicar el teorema de Pitágoras para la clasificación de triángulos respecto a sus ángulos. En este ejemplo, el alumno no identifica la hipotenusa como el lado de mayor longitud, de forma que no distingue correctamente los catetos de la hipotenusa.

Este error puede deberse a la falta de atención del alumno o, con mayor probabilidad, a un escaso nivel de adquisición de conocimientos sobre triángulos en cursos anteriores. Si el docente es consciente de este tipo de errores, puede tratar de resolverlos en clase con preguntas sencillas del tipo: *¿por qué no necesitamos comparar* 7^2 *con* 8^2+11^2 *u* 8^2 *con* 7^2+11^2*?*

En este contexto, otra verificación importante que los alumnos deben realizar está relacionada con el teorema de la desigualdad triangular, puesto que, comprobando sólo la relación pitagórica, es posible concluir que un triángulo es obtuso cuando en realidad no lo es. *¿Por qué?*



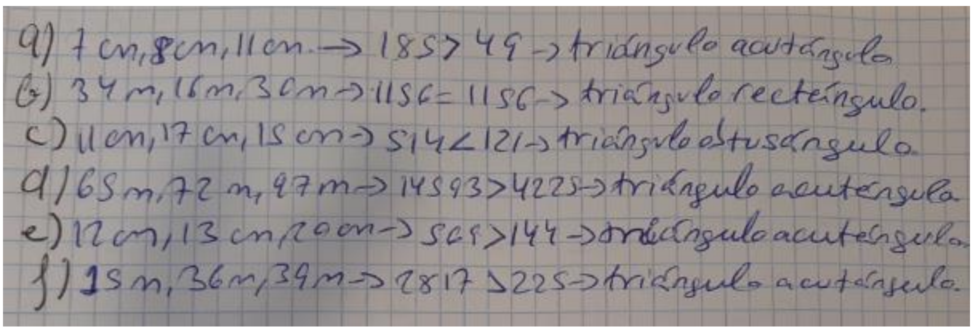
3. Averigua cómo son los triángulos de lados:

a) 7 cm, 8 cm, 11 cm b) 11 cm, 17 cm, 15 cm

c) 34 m, 16 m, 30 m d) 65 m, 72 m, 97 m

d) 12 cm, 13 cm, 20 cm f) 15 m, 36 m, 39 m

Figura 9.3: Ejercicio 3 de la página 188 del libro de texto.



a) 7 cm, 8 cm, 11 cm → 185 > 49 → triángulo acutángulo

b) 34 m, 16 m, 30 m → 1156 = 1156 → triángulo rectángulo.

c) 11 cm, 17 cm, 15 cm → 514 < 121 → triángulo obtusángulo

d) 65 m, 72 m, 97 m → 14593 > 4225 → triángulo acutángulo

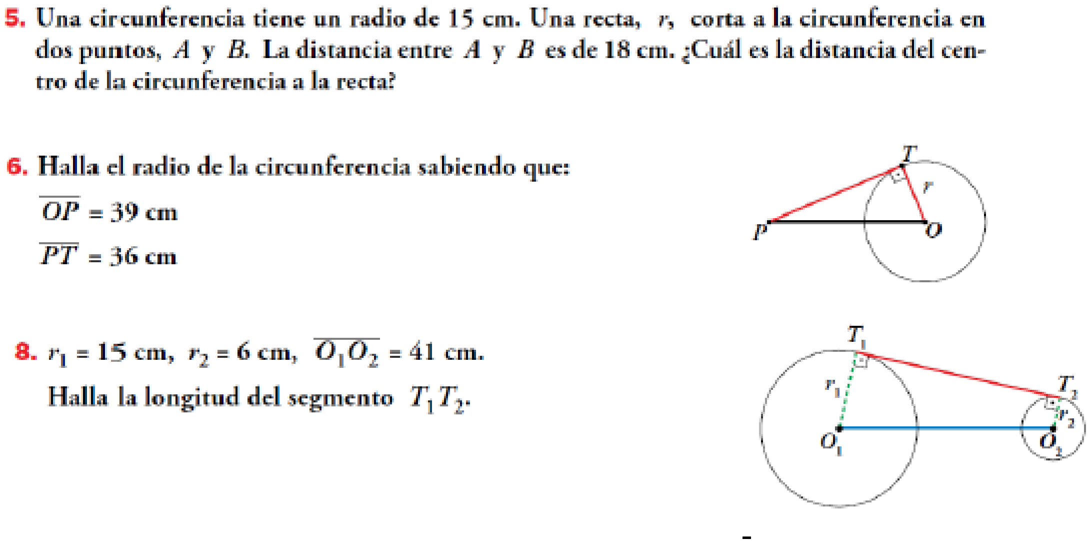
e) 12 cm, 13 cm, 20 cm → 569 > 144 → triángulo acutángulo

f) 15 m, 36 m, 39 m → 2817 > 225 → triángulo acutángulo.

Figura 9.4: Resolución del ejercicio 3 de la página 188 del libro de texto.

Asimismo, en la resolución de los ejercicios presentados en las Figuras 9.5 y 9.6, se identifican dos dificultades a la hora de aplicar el teorema de Pitágoras. La primera, ya mencionada anteriormente, consiste en que los alumnos no identifican correctamente qué longitudes corresponden a los catetos y a la hipotenusa. La segunda está relacionada con la identificación de triángulos rectángulos en contextos geométricos más complejos (en este caso, los triángulos que se pueden definir a partir de segmentos de recta tangentes a circunferencias).

El primero de los errores tiene su origen en una adquisición insuficiente de conocimientos previos sobre resolución de triángulos. El segundo radica en la dificultad de analizar representaciones geométricas y obtener información espacial, y se debe probablemente a prácticas didácticas previas que no trabajaron en profundidad el análisis de figuras geométricas.


5. Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta, r, corta a la circunferencia en dos puntos, A y B. La distancia entre A y B es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?

6. Halla el radio de la circunferencia sabiendo que:

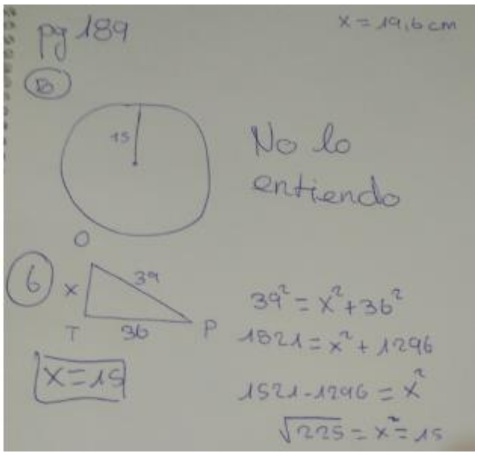
$\overline{OP} = 39$ cm

$\overline{PT} = 36$ cm

8. $r_1 = 15$ cm, $r_2 = 6$ cm, $\overline{O_1O_2} = 41$ cm.

Halla la longitud del segmento T_1T_2.

Figura 9.5: Problemas 5, 6 y 8 de la página 189 del libro de texto.



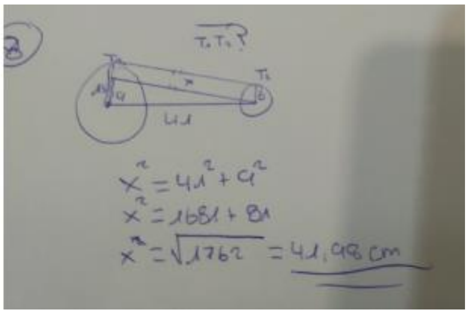


Figura 9.6: Resolución de los problemas 5, 6 y 8 de la página 189 del libro de texto.

La aplicación algebraica del teorema de Pitágoras exige la resolución de problemas que involucran muchos cálculos intermedios. En este contexto, las dos dificultades más comunes observadas entre los estudiantes están relacionadas con la formulación del sistema de ecuaciones y con su resolución, que incluye diversas manipulaciones algebraicas.

En el primer ejercicio que se presenta, enunciado en la Figura 9.7, los alumnos tienen que dividir un triángulo no rectángulo en dos triángulos rectángulos que comparten la misma altura. En la Figura 9.8, se presenta la solución aportada por uno de los alumnos: el planteamiento es correcto y va acompañado de una representación gráfica adecuada de la figura geométrica (lo que constituye un paso fundamental para el éxito en la resolución del problema). Sin embargo, el alumno muestra dificultades a la hora de desarrollar el producto notable (en este caso, el cuadrado de la diferencia). Estas dificultades tienen su origen en un aprendizaje insuficiente en cursos previos y, como se muestra en el ejemplo, pueden llegar a condicionar el éxito de las nuevas actividades propuestas.

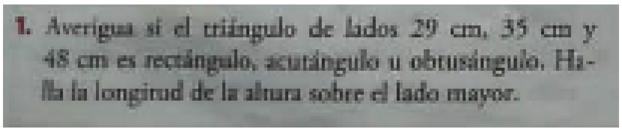

1. Averigua si el triángulo de lados 29 cm, 35 cm y 48 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Halla la longitud de la altura sobre el lado mayor.

Figura 9.7: Problema 1 de la página 190 del libro de texto.

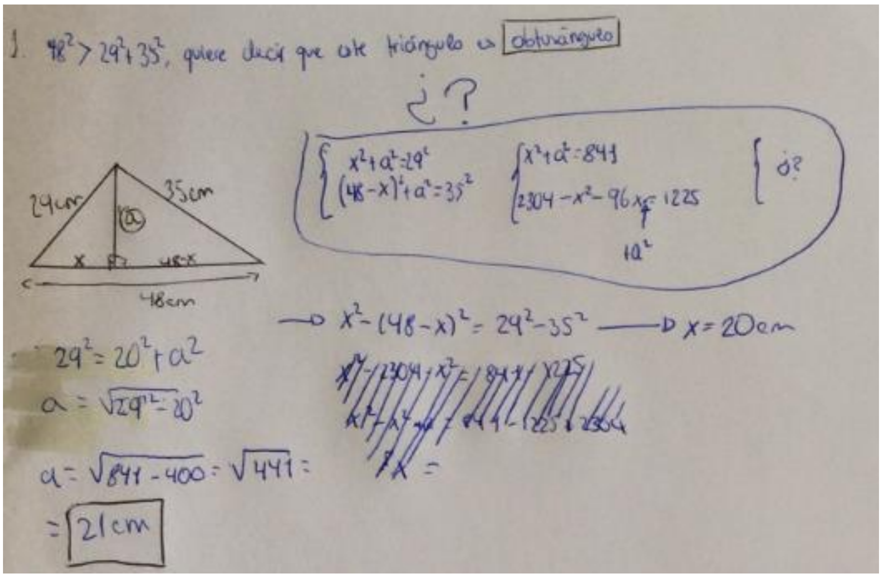


Figura 9.8: Resolución del problema 1 de la página 190 del libro de texto.

En la segunda solución, incluida en la Figura 9.9, el alumno plantea el sistema correctamente, pero no representa gráficamente las figuras geométricas involucradas. Al resolver el sistema, introduce un error (debido probablemente a su falta de atención) y obtiene un resultado con signo negativo. Este resultado es ilógico, ya que la solución del sistema es una medida de longitud. El hecho de que el alumno continúe con la resolución, sin prestar atención al signo obtenido, muestra una falta de análisis crítico hacia sus propios resultados.

Otro error observado es la clasificación incorrecta del triángulo dado: el alumno no comprueba al inicio de la resolución qué tipo de triángulo tiene, lo que probablemente le conduce a su error final (ya que la clasificación que deduce se corresponde con la de uno de los triángulos que resulta al dividir por su altura el triángulo original).

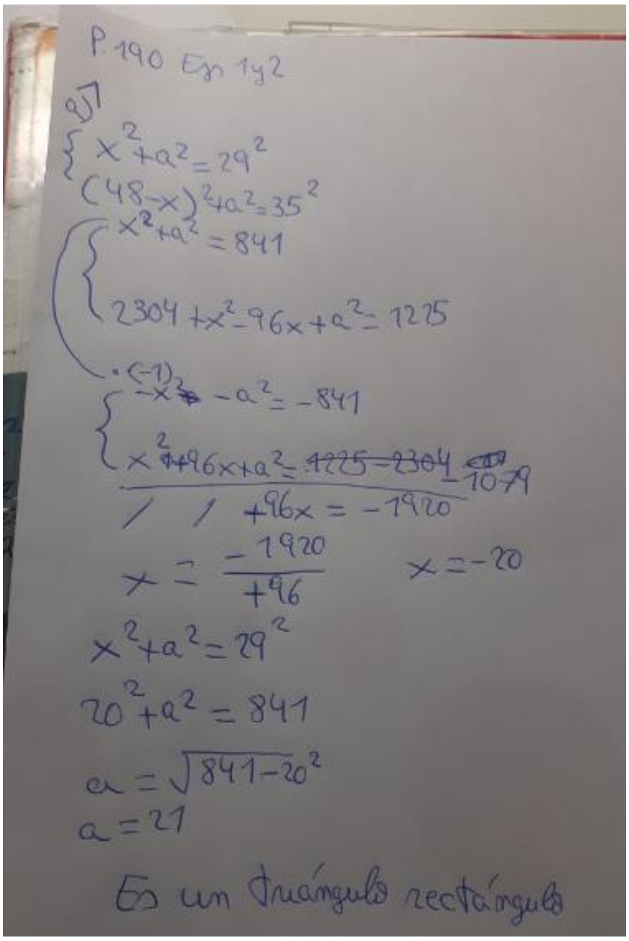


Figura 9.9: Resolución del problema 1 de la página 190 del libro de texto.

Respecto al tema de la semejanza de triángulos, en las Figuras 9.10 y 9.11, se presentan dos soluciones distintas de la siguiente situación: *"A determinada hora del día, la sombra de un edificio proyectado en el suelo mide 6,5 m. En ese mismo momento, la sombra de un poste de 4,5 m de altura mide 0,9 m. ¿Qué altura tiene el edificio?"*.

En el primer caso, mostrado en la Figura 9.10, el alumno plantea correctamente la razón de semejanza y la relación de proporcionalidad geométrica, pero comete un error en la manipulación algebraica de la igualdad (i.e., dificultad para despejar la variable). Se observa que, en la representación geométrica de la situación-problema, se identifican correctamente los lados homólogos de los triángulos, pero no así las trayectorias de los rayos solares que proyectan las sombras y definen las hipotenusas (que deberían ser paralelas en ambas representaciones).

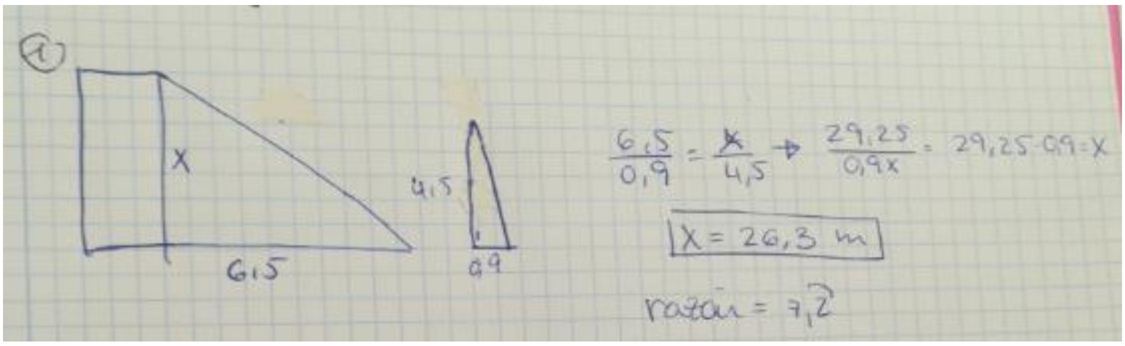


Figura 9.10: Resolución de un problema de semejanza para cálculo de distancia a puntos inaccesibles.

En la segunda solución, mostrada en la Figura 9.11, el fracaso del alumno resulta de su dificultad en la representación geométrica de la situación-problema y, en consecuencia, de la imposibilidad de identificar los triángulos semejantes (que es un paso fundamental para establecer la relación de proporcionalidad entre lados homólogos).

Esta observación muestra la dificultad que tienen algunos alumnos para reproducir gráficamente el enunciado de un problema. Probablemente, esta dificultad esté relacionada con un obstáculo didáctico derivado de una enseñanza de la geometría que no prioriza el desarrollo de la visión espacial.

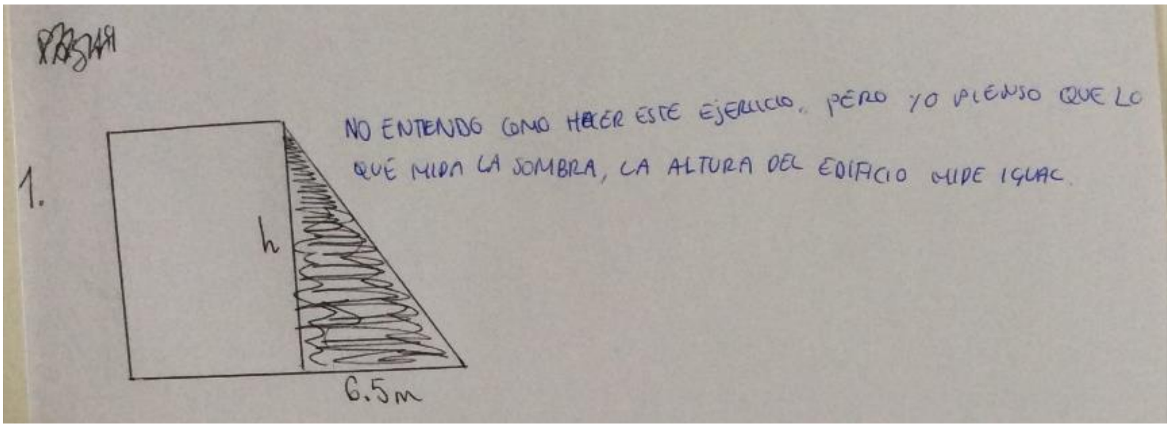


Figura 9.11: Resolución de un problema de semejanza para cálculo de distancia a puntos inaccesibles.

En el segundo ejercicio, se consideran dos triángulos con dos ángulos conocidos y se pide verificar si los triángulos son semejantes, justificando la respuesta.

Las soluciones ilustradas en las Figuras 9.12 y 9.13 muestran que, pese a que los alumnos deducen la respuesta correcta, no saben justificarla correctamente. En ambos casos, afirman que "*los triángulos son semejantes porque la suma de todos sus ángulos es 180º"*. En la primera solución, el alumno identifica esta afirmación con el criterio de semejanza designado por AAA o AA. Esto es consecuencia de un aprendizaje deficiente de los criterios de semejanza (i.e., de las condiciones matemáticas que definen la semejanza), probablemente originado en un obstáculo didáctico.

Para una resolución adecuada del problema, los alumnos deberían calcular el ángulo que falta en cada triángulo, representar gráficamente ambas figuras y justificar que los tres ángulos correspondientes son iguales entre sí, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ (criterio AAA o AA), por lo que los triángulos son semejantes.

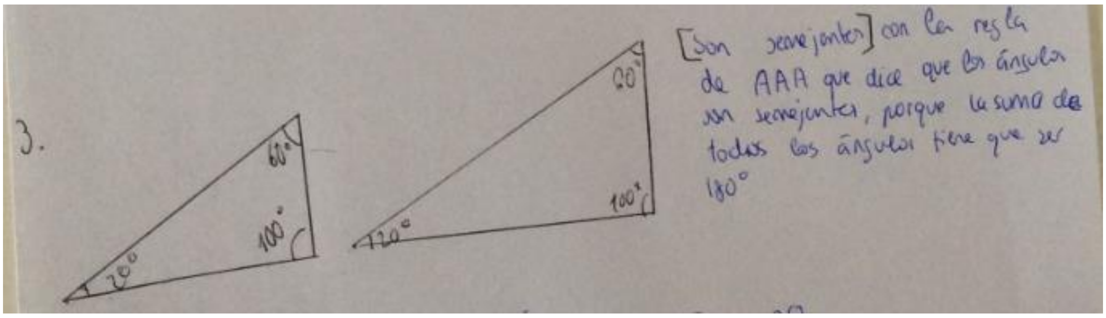


Figura 9.12: Ejercicio de aplicación de los criterios de semejanza.

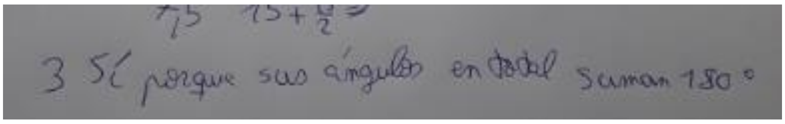


Figura 9.13: Ejercicio de aplicación de los criterios de semejanza.

En el tercer ejercicio, se muestra una representación geométrica de dos triángulos, de los que se conoce la longitud de dos de sus lados y la medida del ángulo formado por ambos. Se pide verificar si los triángulos son semejantes, justificando la respuesta.

En las tres soluciones que se presentan a continuación se pone de manifiesto una comprensión incompleta o equivocada de los criterios de semejanza y del significado de razón de semejanza.

En la primera solución, Figura 9.14, el alumno no justifica satisfactoriamente la condición de semejanza, ya que verifica la proporcionalidad entre dos lados, pero no afirma que el ángulo formado por dichos lados es idéntico en ambos triángulos y, en consecuencia, los triángulos son semejantes (i.e., se pueden colocar en posición de Tales).

Por otra parte, en la segunda solución, Figura 9.15, la semejanza tampoco está bien justificada. En este caso, el alumno trata de calcular el lado opuesto (que es innecesario en este ejercicio), pero lo hace incorrectamente, ya que no tiene claro el significado de razón de semejanza (como se menciona en el capítulo 8, para llevar a cabo una ampliación o una reducción, cada segmento de la figura original debe multiplicarse por una constante, que determina la semejanza entre las dos figuras). Del mismo modo, la tercera solución, incluida en la Figura 9.16, muestra que el alumno no tiene interiorizado el concepto de razón de semejanza.

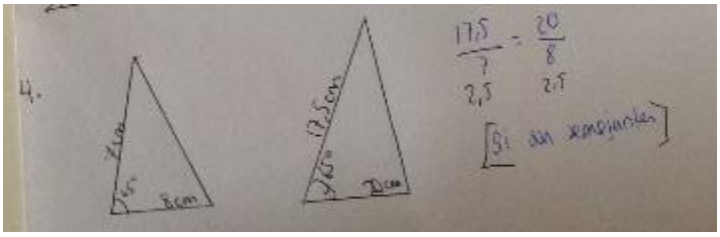


Figura 9.14: Ejercicio de aplicación de los criterios de semejanza.

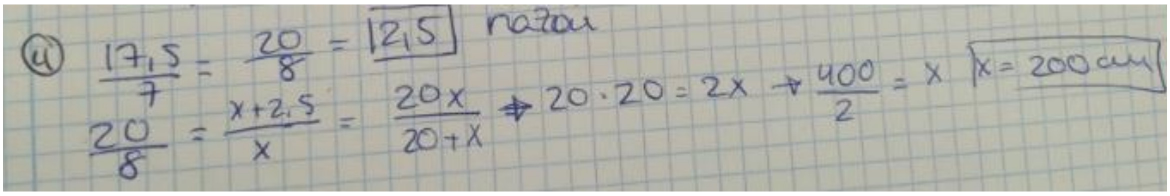


Figura 9.15: Ejercicio de aplicación de los criterios de semejanza.

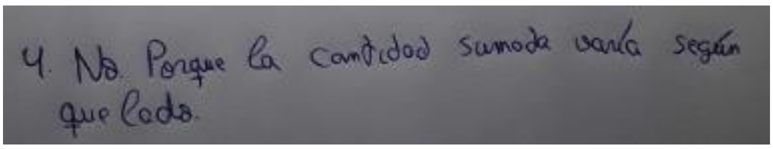


Figura 9.16: Ejercicio de aplicación de los criterios de semejanza.

Finalmente, las Figuras 9.17 y 9.18 contienen, respectivamente, un ejercicio sobre el tema de las relaciones angulares y los errores cometidos por un alumno en su resolución. Según el tutor del centro, estos errores son muy comunes entre los alumnos del curso. Se trata de un ejercicio sencillo, en el que se pide calcular el valor del ángulo $\hat{X}$. Para ello, los alumnos deben aplicar las propiedades sobre relaciones angulares que han estudiado previamente. Este ejemplo demuestra la importancia de incluir una revisión sobre este tema en la programación de clases, ya que puede comprometer el aprendizaje adecuado de los nuevos contenidos.

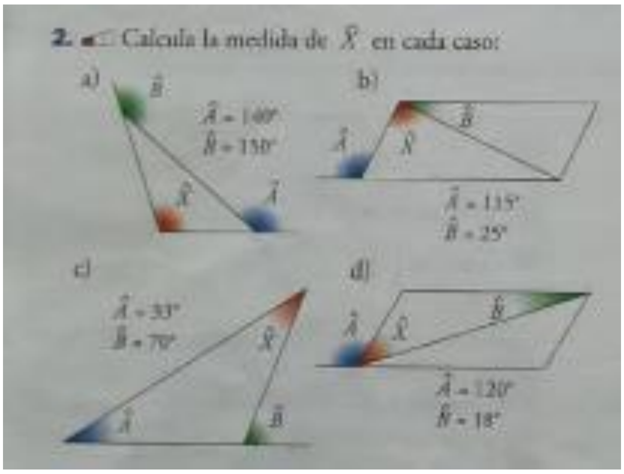


Figura 9.17: Ejercicio 2 de la página 198.

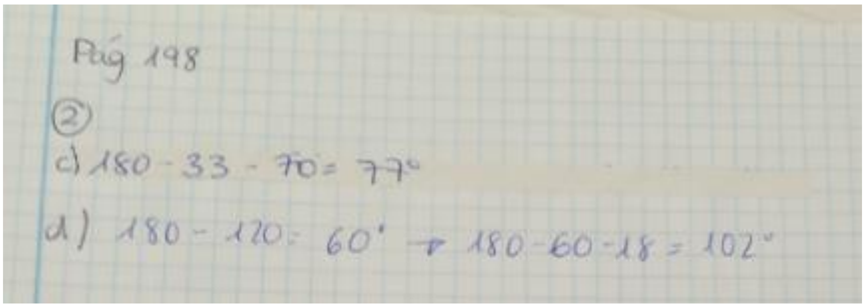


Figura 9.18: Resolución del ejercicio 2 de la página 198.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

En este apartado se describe brevemente la estructura del trabajo, se presentan, en forma de conclusiones, algunas reflexiones construidas a lo largo del mismo y, finalmente, se exponen diversas cuestiones consideradas relevantes para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Breve síntesis

En este trabajo, se lleva a cabo un análisis de la enseñanza de los contenidos de geometría relacionados con la resolución de triángulos en tercer curso de ESO.

La estructura principal del trabajo se divide en dos partes. La primera de ellas desarrolla un análisis longitudinal de cómo evoluciona el tema elegido y qué se valora en cada etapa del ciclo educativo. Para ello, en los tres primeros capítulos, se analiza el currículo oficial y, en particular, los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la geometría, que es la rama de las Matemáticas objeto de estudio. A continuación, en los capítulos 4 y 5, se analizan los ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto de cinco cursos de ESO y Bachillerato, y se evalúa la coherencia entre el currículo oficial y los libros de texto.

La segunda parte del trabajo se inicia, en el capítulo 6, con un análisis de la unidad didáctica del libro de texto usado como referencia, desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En el capítulo 7, se discuten las dificultades y errores previsibles durante el desarrollo del proceso de instrucción, considerando, entre otros, los resultados del análisis didáctico presentado en el capítulo 6. La integración del análisis didáctico y del análisis de las dificultades y errores previsibles sirve de base para la elaboración de una propuesta de intervención para el estudio de la unidad didáctica, que se presenta en el capítulo 8. En esta propuesta, se establecen estrategias encaminadas a mejorar el modelo de aprendizaje del alumnado. El capítulo 9, por su parte, presenta la justificación de la propuesta de intervención y una discusión sobre los errores de geometría más comunes observados en el alumnado de tercer curso de ESO del centro considerado.

Conclusiones generales del trabajo

El desarrollo de este trabajo ha permitido enmarcar el tema elegido en un contexto más amplio, considerando los ámbitos curricular (contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables) y académico (evolución del tema a lo largo de las distintas etapas educativas). Ésta constituye la primera fase de la tarea docente de planificación de las clases: se define el objeto matemático que se quiere enseñar y se toma conciencia de las directrices de actuación, tras consultar el currículo oficial y los textos matemáticos de referencia.

En este marco teórico de referencia, se inicia el análisis de la unidad didáctica del libro de texto, realizado según el enfoque ontosemiótico con el fin de valorar la idoneidad del proceso de instrucción propuesto. Esta fase del trabajo docente se incluye en la planificación de clases. En particular, se delimita la parte específica del conocimiento que se pretende transmitir, se desarrolla el análisis didáctico, que antecede a la programación, y se consideran distintos aspectos, tales como tiempo disponible, recursos y conocimientos previos de los alumnos, para una adecuada programación de las clases. El análisis didáctico es una herramienta fundamental, puesto que permite al docente adquirir una percepción crítica del proceso de instrucción propuesto en el libro de texto (más específicamente, cuáles son los objetos matemáticos involucrados y cómo se interrelacionan en el conjunto de prácticas). En este contexto, es posible definir qué partes del proceso de instrucción tienen margen de mejora, con el objetivo de aportar un significado adicional a lo enseñado en clase y promover en el alumnado la superación de sus dificultades. De esta forma, se logra un proceso de instrucción con mayor idoneidad epistémica y semiótica. Partimos de un sistema global de referencia y avanzamos hacia el significado institucional buscado.

La siguiente fase de la actuación docente consiste en implementar en clase el proceso de instrucción planificado. Esta fase supone introducir ajustes en el conjunto de prácticas previstas, que permitan adecuarlas al ritmo y necesidad del grupo-clase considerado. Ni esta fase de la actividad docente ni la fase final correspondiente a las evaluaciones, pudieron llevarse a cabo durante el *Practicum II*. Estas fases constituyen diferentes etapas del trabajo docente que se entremezclan en el aula, en un proceso dinámico y fundamental para el éxito del mecanismo de enseñanza-aprendizaje. Además de aportar al docente una visión global de las dificultades detectadas en clase, sirven para evaluar el grado de aprendizaje de los alumnos y las necesidades de mejora del proceso. Tal análisis daría lugar al capítulo final de este trabajo que, por las razones mencionadas, no ha podido ser desarrollado. En consecuencia, el trabajo se ha basado en la programación de clases y el análisis de las dificultades y errores más comunes de los alumnos, como forma de justificar o mejorar el proceso de instrucción planificado.

Desde la perspectiva de la planificación de las clases, este trabajo muestra que, tanto el análisis didáctico como el análisis de los errores y dificultades previos, permiten el desarrollo de actividades más cercanas al alumnado y más enfocadas en sus necesidades (i.e., en la superación de sus dificultades). Esta observación se corrobora con el análisis de los errores en geometría verificados en el aula de 3º de ESO, que se presenta en el capítulo 9. En él, se ponen de manifiesto las dificultades y errores relacionados con un escaso desarrollo de la visión espacial, el insuficiente significado personal de algunos conceptos, la dificultad en la traducción del lenguaje matemático y ciertos conocimientos previos poco consolidados. Con el objetivo de superar tales dificultades (previstas en el capítulo 7 y confirmadas en el capítulo 9), la planificación de clases presentada en el capítulo 8 incorpora diversas actividades. Cabe mencionar que la realización de esta propuesta de intervención es previa al conocimiento de los errores en geometría de los alumnos de tercer curso de ESO, analizados posteriormente en el capítulo 9.

Tras la elaboración del trabajo, cabe destacar tres cuestiones de especial relevancia: el desarrollo de la argumentación, el entrenamiento de la visión espacial y el uso de herramientas digitales en el aula. La argumentación es la base que permite al alumno interrelacionar contenidos y comprender verdaderamente la materia impartida. Su práctica debe anteceder a la introducción de los ejercicios (i.e., aplicación de procedimientos), de forma que se garantice la comprensión del proceso de análisis y se evite la automatización de las Matemáticas y sus errores asociados. Respecto a la visión espacial, es fundamental que la enseñanza de la geometría se apoye en el desarrollo de esta habilidad, que permite a los alumnos superar las dificultades que experimentan al traducir el enunciado de una situación-problema al lenguaje gráfico. Para terminar, el uso de las nuevas tecnologías en el aula promueve un vínculo afectivo del alumno con la asignatura y potencia actitudes positivas hacia las Matemáticas en general. Asimismo, permite al docente optimizar el tiempo de clase dedicado a aspectos clave del aprendizaje, tales como la discusión, argumentación y validación.

Cuestiones abiertas

Para un aprendizaje efectivo, la retroalimentación que se devuelve a los alumnos a través de comentarios y preguntas es fundamental para que mejoren sus argumentos, revisen los conceptos estudiados y reflexionen sobre sus elaboraciones. Teniendo en cuenta el tiempo de que dispone un docente y el amplio programa curricular, ¿cómo se pueden implementar en clase, de forma sistemática, técnicas de reflexión sobre los contenidos aprendidos y desarrollar la capacidad crítica de los alumnos?

¿Cómo puede el docente optimizar el proceso de evaluación continua para darle mayor peso en la evaluación final del alumno?

La formación de individuos capaces de aplicar sus conocimientos en diferentes contextos para resolver cuestiones y problemas de la vida real pasa por el desarrollo de lenguajes internos que potencien la capacidad de análisis y la creatividad. En este contexto, el desarrollo de la visión espacial que proporciona el estudio de la geometría juega un papel fundamental en la adquisición de competencias por parte de un individuo. Por tanto, ¿no sería beneficioso en el proceso formativo que los currículos oficiales concediesen más peso al estudio de la geometría?

Referencias

Legislación

Comunidad Foral de Navarra (2014). *Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra.* Boletín Oficial de Navarra, número 174, de 5 de septiembre de 2014, pág. 57 a 63.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado, núm. 3, de 03 de enero de 2015, Sec.I, pág. 381 a 422.

Referencias

Autino, B., Digión, M.A., Llanos, L.M., Marcoleri, M.E., Montalvetti, P.G. y Soruco, O.S. (2011). Obstáculos didácticos, ontogenéticos y epistemológicos identificados desde la comunicación en el aula de Matemática. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Comité Interamericano de Educación Matemática. Recife, Brasil.

Bocco, M. y Canter, C. (2010). Errores en geometría: clasificación e incidencia en un curso preuniversitario. *Revista Iberoamericana de Educación*, n.º 53/2 , de 10 de julio de 2010.

Briand, J., Chevalier, M.-C. (1999). *Les Enjeux Didactiques dans l'Enseignement des Mathématiques.* Hatier Pédagogie. Trad. por E. Lacasta y J.R. Pascual.

Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 4º ESO.* Madrid, España: Grupo Anaya.

Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2017). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO*. Madrid, España: Grupo Anaya.

Gelfand, I. M. y Saul, M. (2001). *Trigonometry.* Boston, EE. UU: Springer Science+Business Media, LLC

Godino, J.D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*. Número especial, pp. 131 - 155

Goñi, J.M., Alsina, C., Ávila, D., Burgués, C., Comellas, J., Corbalán, F., García, M.A., Hahn, C. y Serra, J. (2000). *El Currículum de Matemáticas en los Inicios del Siglo XXI*. Barcelona, España: GRAÓ.

López, C., Martínez, B., Montesinos, P. y González, F. (2008). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: McGraw Hill.

Martínez, J.M., Cuadra, R. y Barrado, F.J. (2007). *Matemáticas 1º Bachillerato*. Madrid, España: McGraw Hill.

Pereira, M.F. (2016). Uma sequência didática para o ensino de semelhança de figuras planas. *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Curitiba, Brasil.

Oliveira, R., López, L. y Cardoso, V. (2016). A interface da geometria plana à espacial: um estudo a partir dos triângulos e dos sólidos de platão. *Educação Matemática na Contemporaneidade: Desafios e Possibilidades*. *XII Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo, Brasil.

Rodríguez, M.L. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology*. *Proceedings of the First International Conference on Concept Mapping*. Pamplona, España.

Uriondo, J.L. (2007). *Matemáticas 1º Secundaria*. Estella, España: Oxford University Press.

Páginas *web*

Post, E. (2018, marzo 20). *Plano de aula - Semelhança em triângulos justapostos*. São Paulo, Brasil: Associação Nova Escola. Archivo recuperado de https://novaescola.org.br/plano-de-aula/866/semelhanca-em-triangulos-justapostos

Videos *web*

Atul Classes (2014, septiembre 22). *Pythagoras theorem project of math.* Archivo de vídeo recuperado de https://youtu.be/X8X_Ckvul90

Carreon, D. (2019, noviembre 27). *Rectas y puntos notables de los triángulos (súper fácil - para principiantes).* Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=q4C65NXyKUg

Carreon, D. (2020, enero 06). *Teorema de Tales triángulos (súper fácil - para principiantes).* Archivo de vídeo recuperado de https://edpuzzle.com/media/5f3e504803c1783f4c09fcba

Dobbs, M. (2018, marzo 21). *Classifying triangles with Pythagorean theorem*. Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=MFa4jtgy41M&t=640s

García, I. (2019, mayo 07). *Construcción teorema de Pitágoras con Geogebra*. Archivo de vídeo recuperado de https://youtu.be/85Ayp3Hrvw4

Khan, S. (2010, marzo 18). *Inscribed angle theorem proof*. Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=MyzGVbCHh5M&feature=youtu.be

Khan, S. (2011, octubre 01). *Similarity postulates. Similarity*. Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=7bO0TmJ6Ba4

Khan, S. (2011, octubre 01). *Similar triangle basics. Similarity*. Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=9ThXDY9Y3oU

Khan, S. (2011, octubre 03). *Similar triangle example problems. Similarity*. Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Ly86lwq_2gc&feature=youtu.be

Krafka, K. (2010, abril 14). *Pythagorean theorem classroom activity*. Archivo de vídeo recuperado de https://youtu.be/DQk_VrWdCr0

Letstute (2013, noviembre 05). *What is Pythagoras theorem? Explanation of Pythagoras theorem. Pythagoras proof*. Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=A1vca8mKiu0&feature=youtu.be

Pérez, R. (2014, febrero 09). *Geogebra. 3º ESO. Puntos notables de un triángulo*. Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=JZJOmwSplqg

Stevens, M. (2019, enero 20). *Thales's theorem*. Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=pJwRsoxe3VE&t=536s

Tanton, J. (2012, octubre 18). *Tangent theorems for circles and the Pythagorean theorem*. Archivo de vídeo recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Cxn1SBWFlQ4

Vihart (2011, junio 22). *Origami proof of the Pythagorean theorem.* Archivo de vídeo recuperado de https://youtu.be/z6lL83wl31E

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto

B. Actividades del libro de texto incluidas en la propuesta de intervención

A. Unidad didáctica del libro de texto

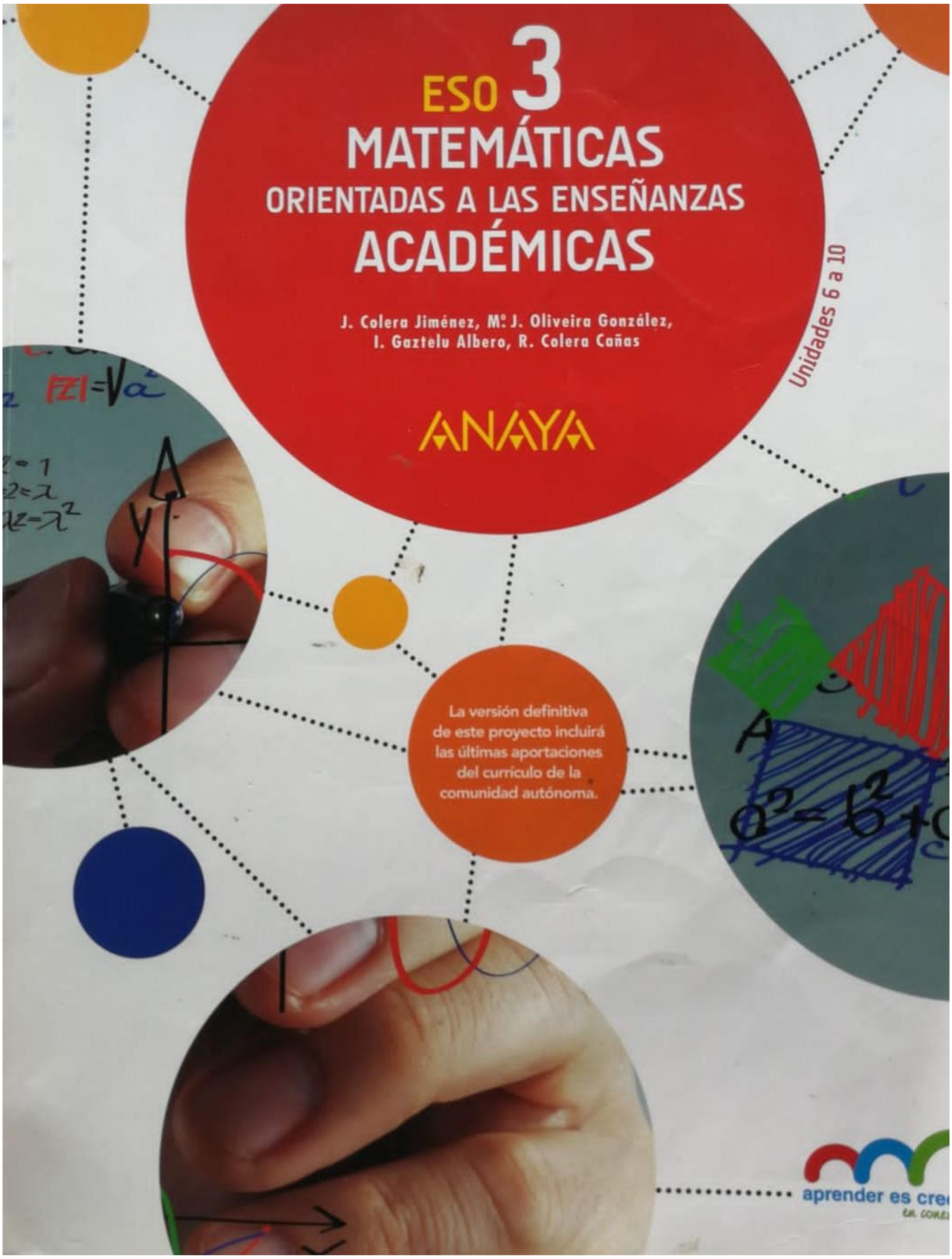


Figura A.1: Tapa del libro de texto.

ÍNDICE

Figura A.2: Índice.

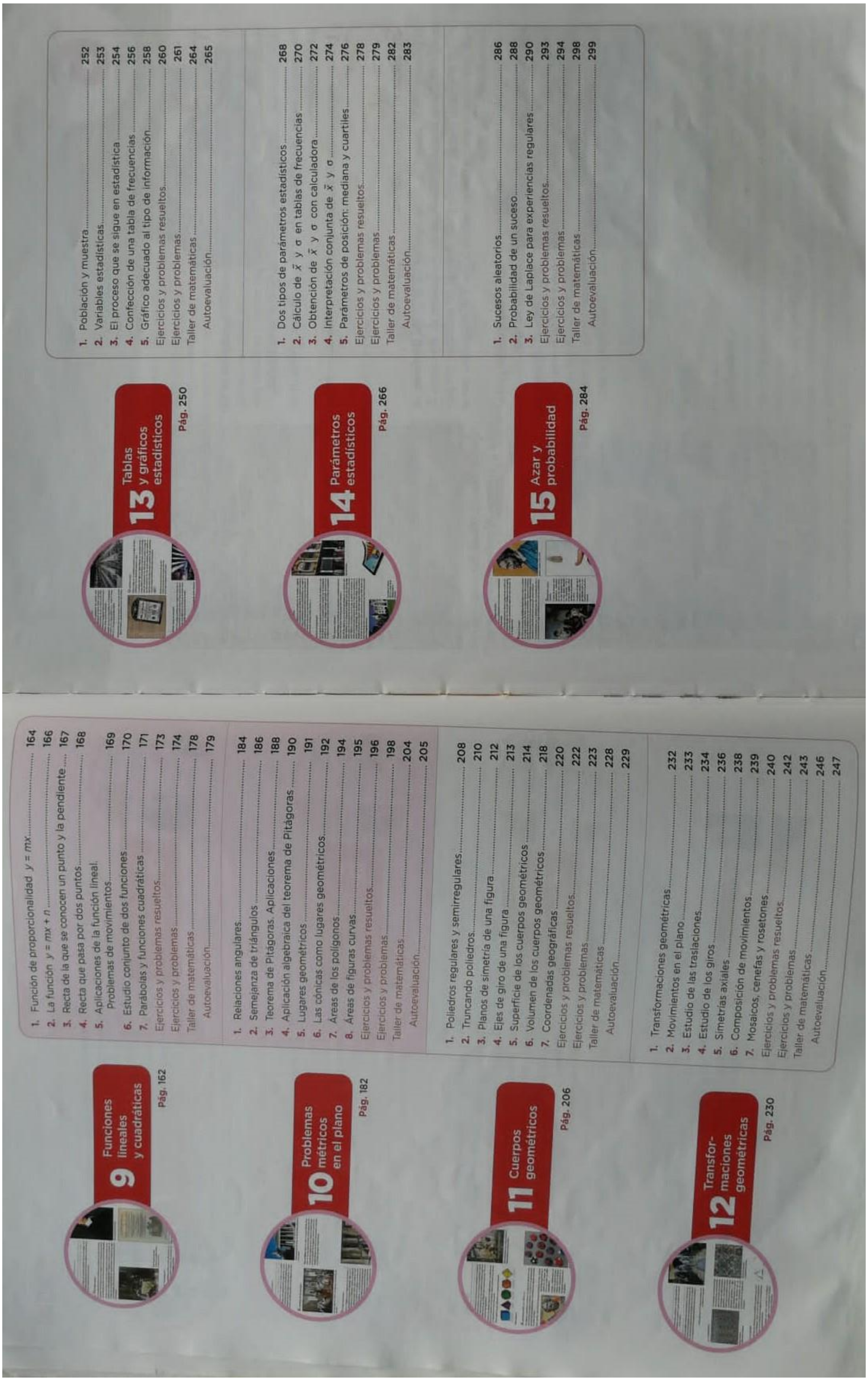
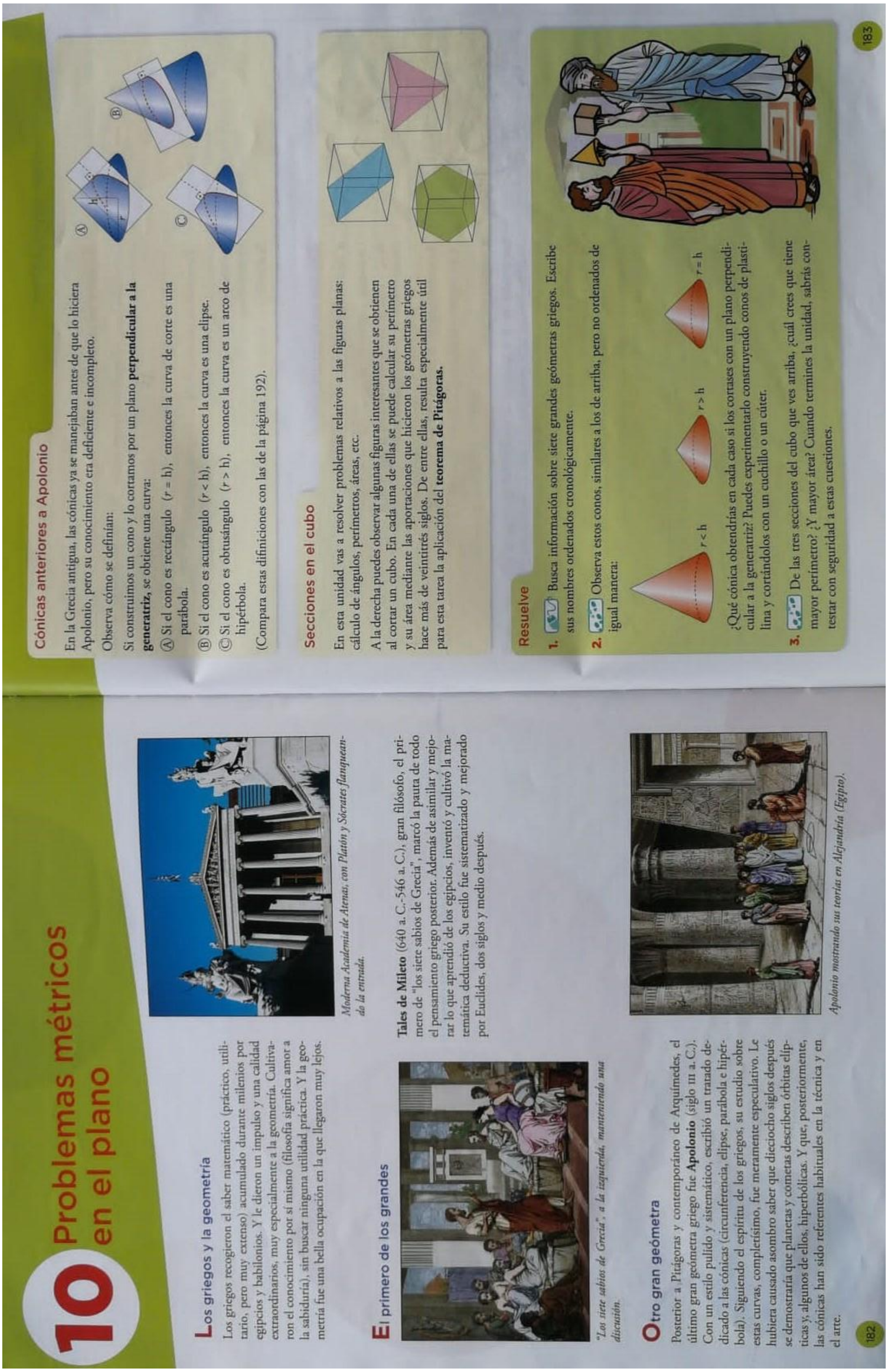


Figura A.3: Índice.



10 Problemas métricos en el plano

Los griegos y la geometría

Los griegos recogieron el saber matemático (práctico, utilitario, pero muy extenso) acumulado durante milenios por egipcios y babilonios. Y le dieron un impulso y una calidad extraordinarios, muy especialmente a la geometría. Cultivaron el conocimiento por sí mismo (filosofía significa amor a la sabiduría), sin buscar ninguna utilidad práctica. Y la geometría fue una bella ocupación en la que llegaron muy lejos.

Moderna Academia de Atenas, con Platón y Sócrates flanqueando la entrada.

El primero de los grandes

"Los siete sabios de Grecia", a la izquierda, manteniendo una discusión.

Tales de Mileto (640 a. C.-546 a. C.), gran filósofo, el primero de "los siete sabios de Grecia", marcó la pauta de todo el pensamiento griego posterior. Además de asimilar y mejorar lo que aprendió de los egipcios, inventó y cultivó la matemática deductiva. Su estilo fue sistematizado y mejorado por Euclides, dos siglos y medio después.

Otro gran geómetra

Posterior a Pitágoras y contemporáneo de Arquímedes, el último gran geómetra griego fue **Apolonio** (siglo III a. C.). Con un estilo pulido y sistemático, escribió un tratado dedicado a las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). Siguiendo el espíritu de los griegos, su estudio sobre estas curvas, completísimo, fue meramente especulativo. Le hubiera causado asombro saber que dieciocho siglos después se demostraría que planetas y cometas describen órbitas elípticas y, algunos de ellos, hiperbólicas. Y que, posteriormente, las cónicas han sido referentes habituales en la técnica y en el arte.

Apolonio mostrando sus teorías en Alejandría (Egipto).

182

Cónicas anteriores a Apolonio

En la Grecia antigua, las cónicas ya se manejaban antes de que lo hiciera Apolonio, pero su conocimiento era deficiente e incompleto.

Observa cómo se definían:

Si construimos un cono y lo cortamos por un plano **perpendicular a la generatriz,** se obtiene una curva:

Ⓐ Si el cono es rectángulo ($r = h$), entonces la curva de corte es una parábola.

Ⓑ Si el cono es acutángulo ($r < h$), entonces la curva es una elipse.

Ⓒ Si el cono es obtusángulo ($r > h$), entonces la curva es un arco de hipérbola.

(Compara estas difiniciones con las de la página 192).

Secciones en el cubo

En esta unidad vas a resolver problemas relativos a las figuras planas: cálculo de ángulos, perímetros, áreas, etc.

A la derecha puedes observar algunas figuras interesantes que se obtienen al cortar un cubo. En cada una de ellas se puede calcular su perímetro y su área mediante las aportaciones que hicieron los geómetras griegos hace más de veintitrés siglos. De entre ellas, resulta especialmente útil para esta tarea la aplicación del **teorema de Pitágoras.**

Resuelve

1. Busca información sobre siete grandes geómetras griegos. Escribe sus nombres ordenados cronológicamente.

2. Observa estos conos, similares a los de arriba, pero no ordenados de igual manera:

¿Qué cónica obtendrías en cada caso si los cortases con un plano perpendicular a la generatriz? Puedes experimentarlo construyendo conos de plastilina y cortándolos con un cuchillo o un cúter.

3. De las tres secciones del cubo que ves arriba, ¿cuál crees que tiene mayor perímetro? ¿Y mayor área? Cuando termines la unidad, sabrás contestar con seguridad a estas cuestiones.

183

Figura A.4: Páginas 182 y 183. Introducción.

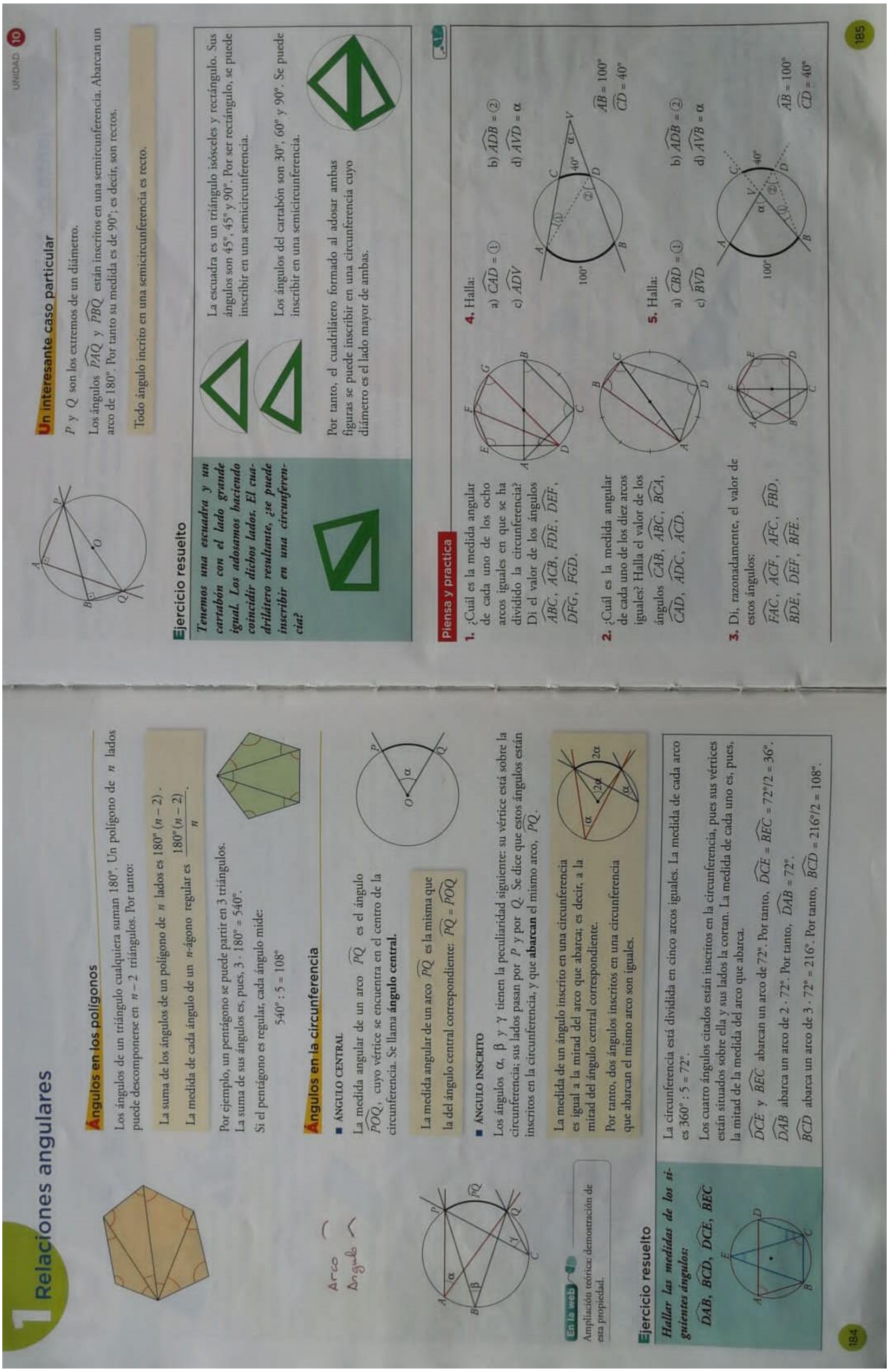


Figura A.5: Páginas 184 y 185. Apartado 1 | Relaciones angulares.

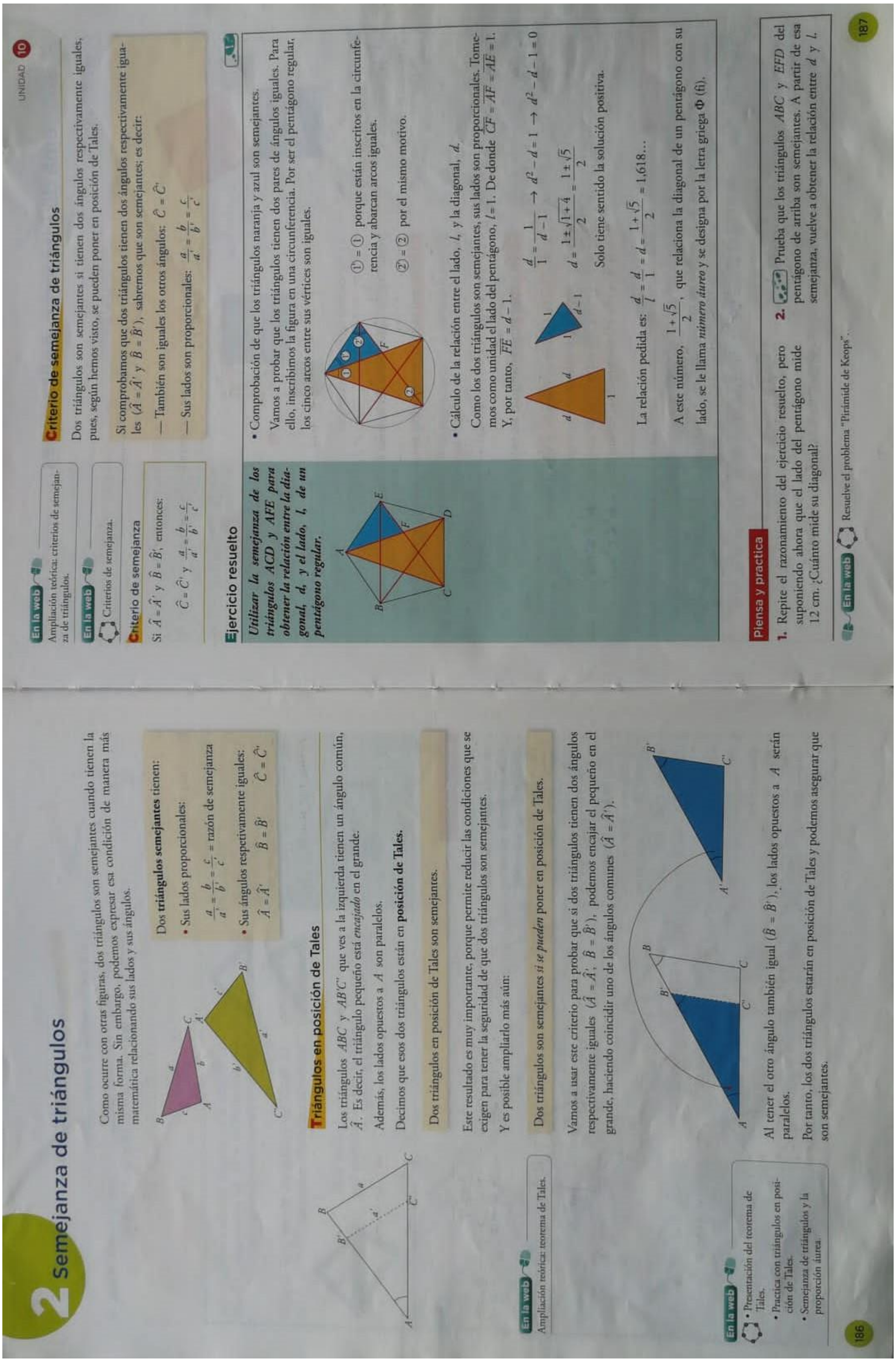
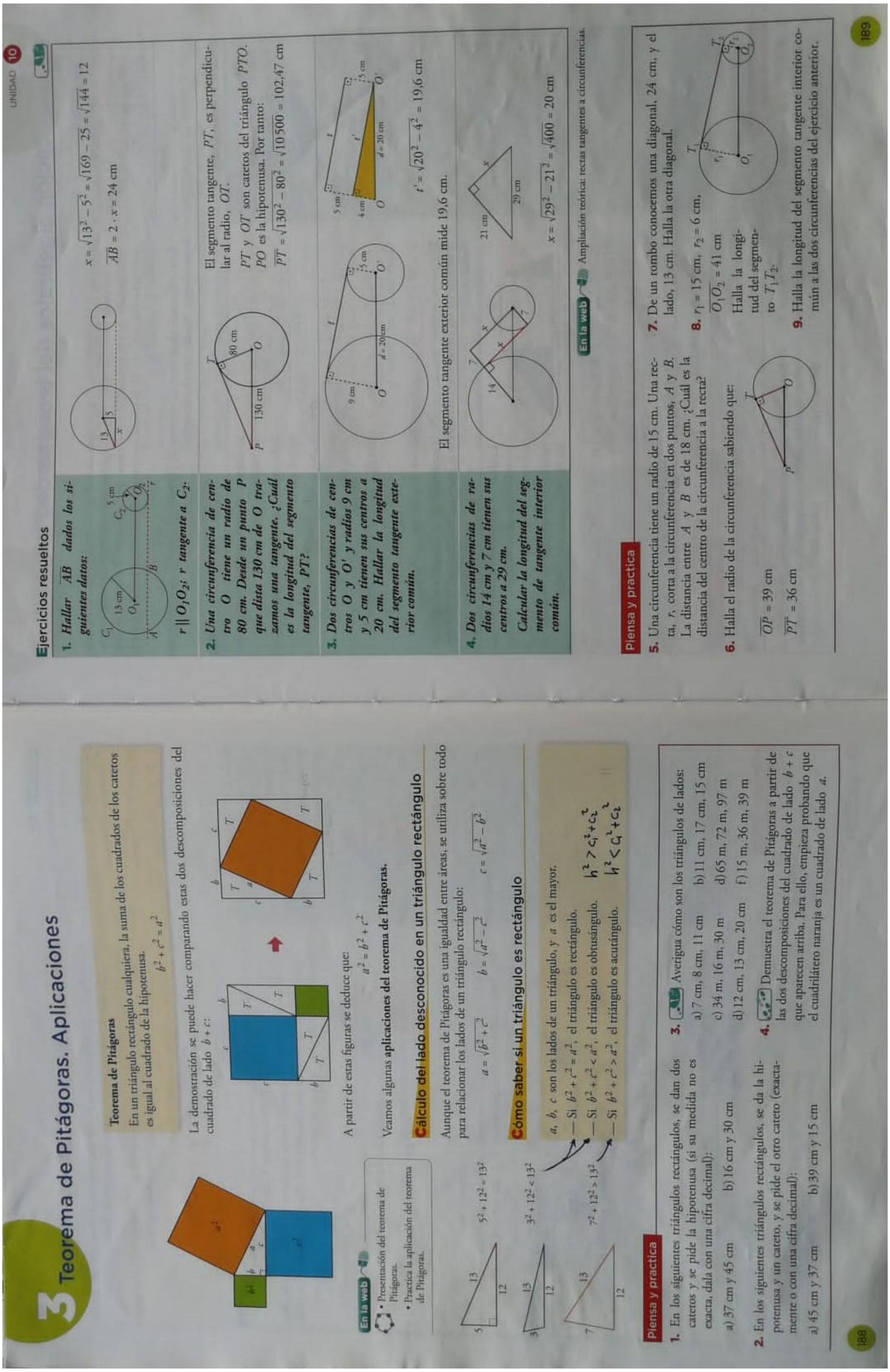


Figura A.6: Páginas 186 y 187. Apartado 2 | Semejanza de triángulos.



3 Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

Teorema de Pitágoras
En un triángulo rectángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
$b^2 + c^2 = a^2$

La demostración se puede hacer comparando estas dos descomposiciones del cuadrado de lado $b + c$:

A partir de estas figuras se deduce que:
$a^2 = b^2 + c^2$

Veamos algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras.

Cálculo del lado desconocido en un triángulo rectángulo

Aunque el teorema de Pitágoras es una igualdad entre áreas, se utiliza sobre todo para relacionar los lados de un triángulo rectángulo:
$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Cómo saber si un triángulo es rectángulo

a, b, c son los lados de un triángulo, y a es el mayor.
— Si $b^2 + c^2 = a^2$, el triángulo es rectángulo.
— Si $b^2 + c^2 < a^2$, el triángulo es obtusángulo.
— Si $b^2 + c^2 > a^2$, el triángulo es acutángulo.

$h^2 > c_1^2 + c_2^2$
$h^2 < c_1^2 + c_2^2$

En la web
• Presentación del teorema de Pitágoras.
• Practica la aplicación del teorema de Pitágoras.

$5^2 + 12^2 = 13^2$
$3^2 + 12^2 < 13^2$
$7^2 + 12^2 > 13^2$

Piensa y practica

1. En los siguientes triángulos rectángulos, se dan dos catetos y se pide la hipotenusa (si su medida no es exacta, dala con una cifra decimal):
a) 37 cm y 45 cm b) 16 cm y 30 cm

2. En los siguientes triángulos rectángulos, se da la hipotenusa y un cateto, y se pide el otro cateto (exactamente o con una cifra decimal):
a) 45 cm y 37 cm b) 39 cm y 15 cm

3. Averigua cómo son los triángulos de lados:
a) 7 cm, 8 cm, 11 cm b) 11 cm, 17 cm, 15 cm
c) 34 m, 16 m, 30 m d) 65 m, 72 m, 97 m
d) 12 cm, 13 cm, 20 cm f) 15 m, 36 m, 39 m

4. Demuestra el teorema de Pitágoras a partir de las dos descomposiciones del cuadrado de lado $b + c$ que aparecen arriba. Para ello, empieza probando que el cuadrilátero naranja es un cuadrado de lado a.

188

UNIDAD 10

Ejercicios resueltos

1. Hallar $\overline{AB}$ dados los siguientes datos:
$r \parallel O_1O_2$; r tangente a C_2:
$x = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$
$\overline{AB} = 2 \cdot x = 24$ cm

2. Una circunferencia de centro O tiene un radio de 80 cm. Desde un punto P que dista 130 cm de O trazamos una tangente. ¿Cuál es la longitud del segmento tangente, PT?
El segmento tangente, PT, es perpendicular al radio, OT.
PT y OT son catetos del triángulo PTO. PO es la hipotenusa. Por tanto:
$\overline{PT} = \sqrt{130^2 - 80^2} = \sqrt{10\,500} = 102,47$ cm

3. Dos circunferencias de centros O y O' y radios 9 cm y 5 cm tienen sus centros a 20 cm. Hallar la longitud del segmento tangente exterior común.
$t = \sqrt{20^2 - 4^2} = 19,6$ cm
El segmento tangente exterior común mide 19,6 cm.

4. Dos circunferencias de radios 14 cm y 7 cm tienen sus centros a 29 cm. Calcular la longitud del segmento de tangente interior común.
$x = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{400} = 20$ cm

En la web Ampliación teórica: rectas tangentes a circunferencias.

Piensa y practica

5. Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta, r, corta a la circunferencia en dos puntos, A y B. La distancia entre A y B es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?

6. Halla el radio de la circunferencia sabiendo que:
$\overline{OP} = 39$ cm
$\overline{PT} = 36$ cm

7. De un rombo conocemos una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Halla la otra diagonal.

8. $r_1 = 15$ cm, $r_2 = 6$ cm, $\overline{O_1O_2} = 41$ cm
Halla la longitud del segmento T_1T_2.

9. Halla la longitud del segmento tangente interior común a las dos circunferencias del ejercicio anterior.

189

Figura A.7: Páginas 188 y 189. Apartado 3 | Teorema de Pitágoras. Aplicaciones.

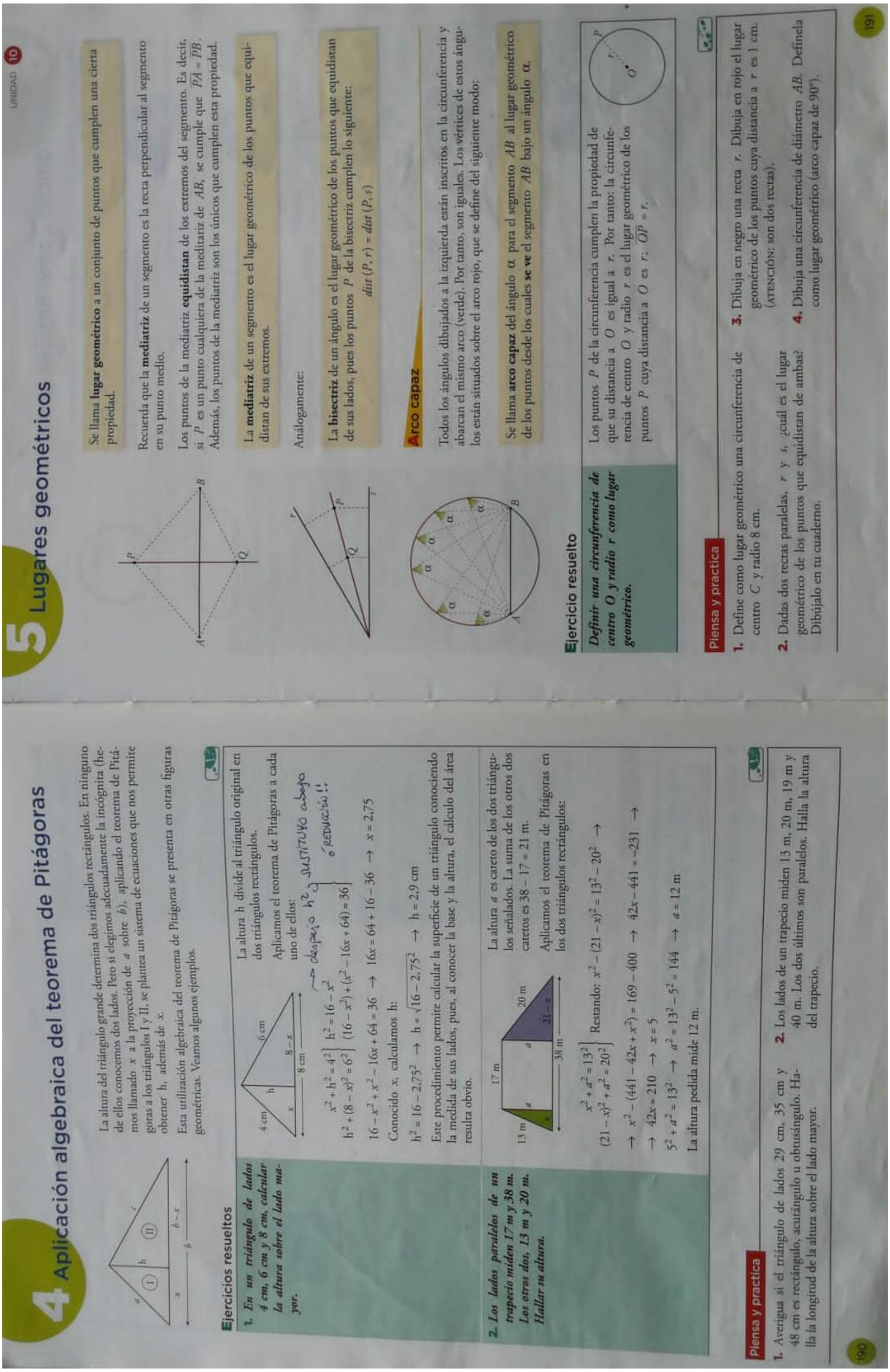
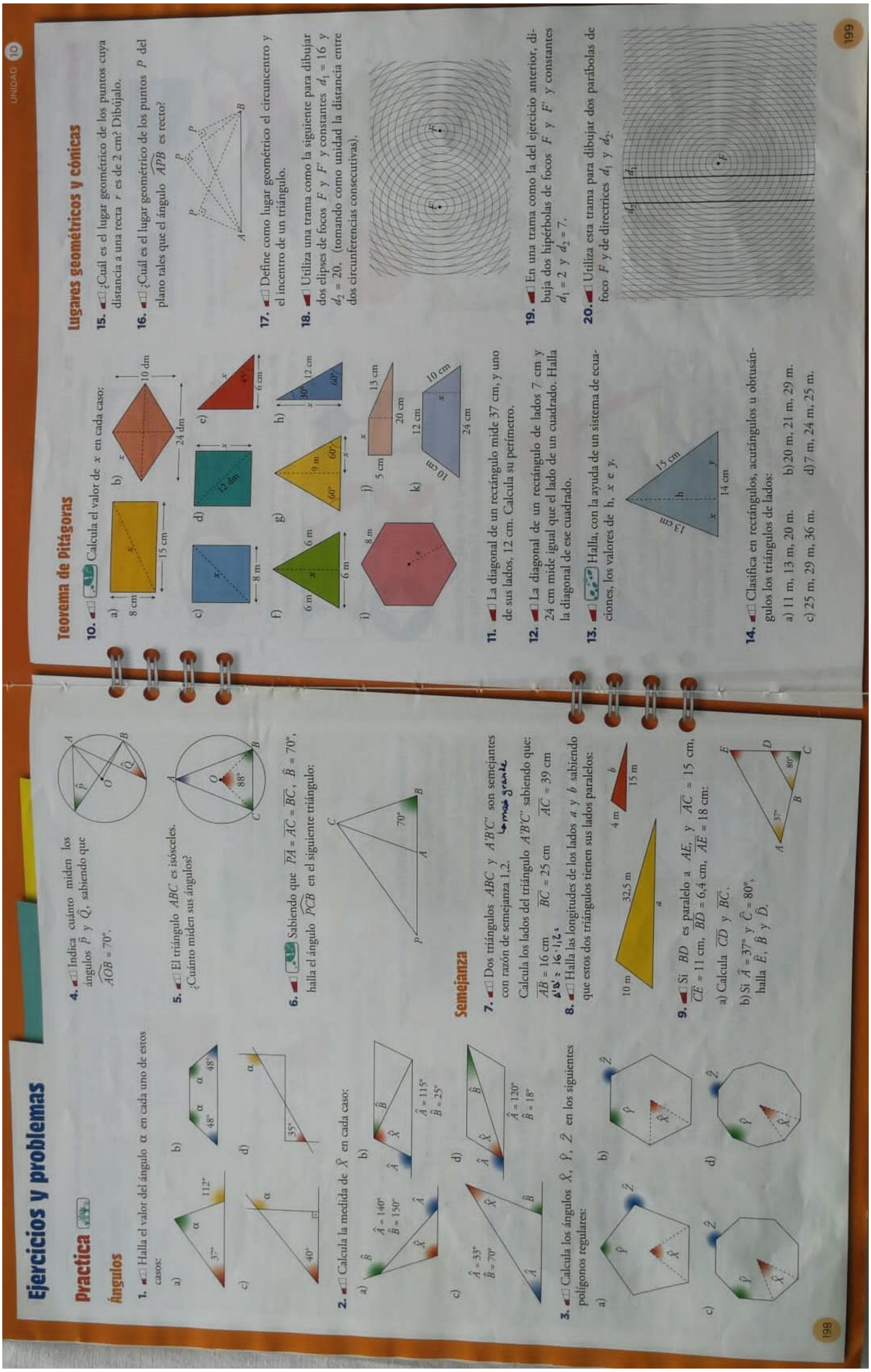


Figura A.8: Página 190. Apartado 4 | Aplicación algebraica del teorema de Pitágoras. Página 191. Apartado 5 | Lugares geométricos.



Ejercicios y problemas

Practica

Ángulos

1. Halla el valor del ángulo α en cada uno de estos casos:

2. Calcula la medida de $\hat{X}$ en cada caso:

3. Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:

4. Indica cuánto miden los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{Q}$, sabiendo que $\widehat{AOB} = 70°$.

5. El triángulo ABC es isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?

6. Sabiendo que $\overline{PA} = \overline{AC} = \overline{BC}$, $\hat{B} = 70°$, halla el ángulo $\widehat{PCB}$ en el siguiente triángulo:

Semejanza

7. Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con razón de semejanza 1,2. más grande

Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ sabiendo que:

$\overline{AB} = 16$ cm $\overline{BC} = 25$ cm $\overline{AC} = 39$ cm

$A'B' = 16 \cdot 1{,}2$

8. Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:

9. Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC} = 15$ cm, $\overline{CE} = 11$ cm, $\overline{BD} = 6{,}4$ cm, $\overline{AE} = 18$ cm:

a) Calcula $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$.

b) Si $\hat{A} = 37°$ y $\hat{C} = 80°$, halla $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.

198

UNIDAD 10

Teorema de Pitágoras

10. Calcula el valor de x en cada caso:

11. La diagonal de un rectángulo mide 37 cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perímetro.

12. La diagonal de un rectángulo de lados 7 cm y 24 cm mide igual que el lado de un cuadrado. Halla la diagonal de ese cuadrado.

13. Halla, con la ayuda de un sistema de ecuaciones, los valores de h, x e y.

14. Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:

a) 11 m, 13 m, 20 m.   b) 20 m, 21 m, 29 m.

c) 25 m, 29 m, 36 m.   d) 7 m, 24 m, 25 m.

Lugares geométricos y cónicas

15. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta r es de 2 cm? Dibújalo.

16. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto?

17. Define como lugar geométrico el circuncentro y el incentro de un triángulo.

18. Utiliza una trama como la siguiente para dibujar dos elipses de focos F y F' y constantes $d_1 = 16$ y $d_2 = 20$, (tomando como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).

19. En una trama como la del ejercicio anterior, dibuja dos hipérbolas de focos F y F' y constantes $d_1 = 2$ y $d_2 = 7$.

20. Utiliza esta trama para dibujar dos parábolas de foco F y de directrices d_1 y d_2.

199

Figura A.9: Página 198 y 199. Apartado *Ejercicios y problemas* | *Practica*.

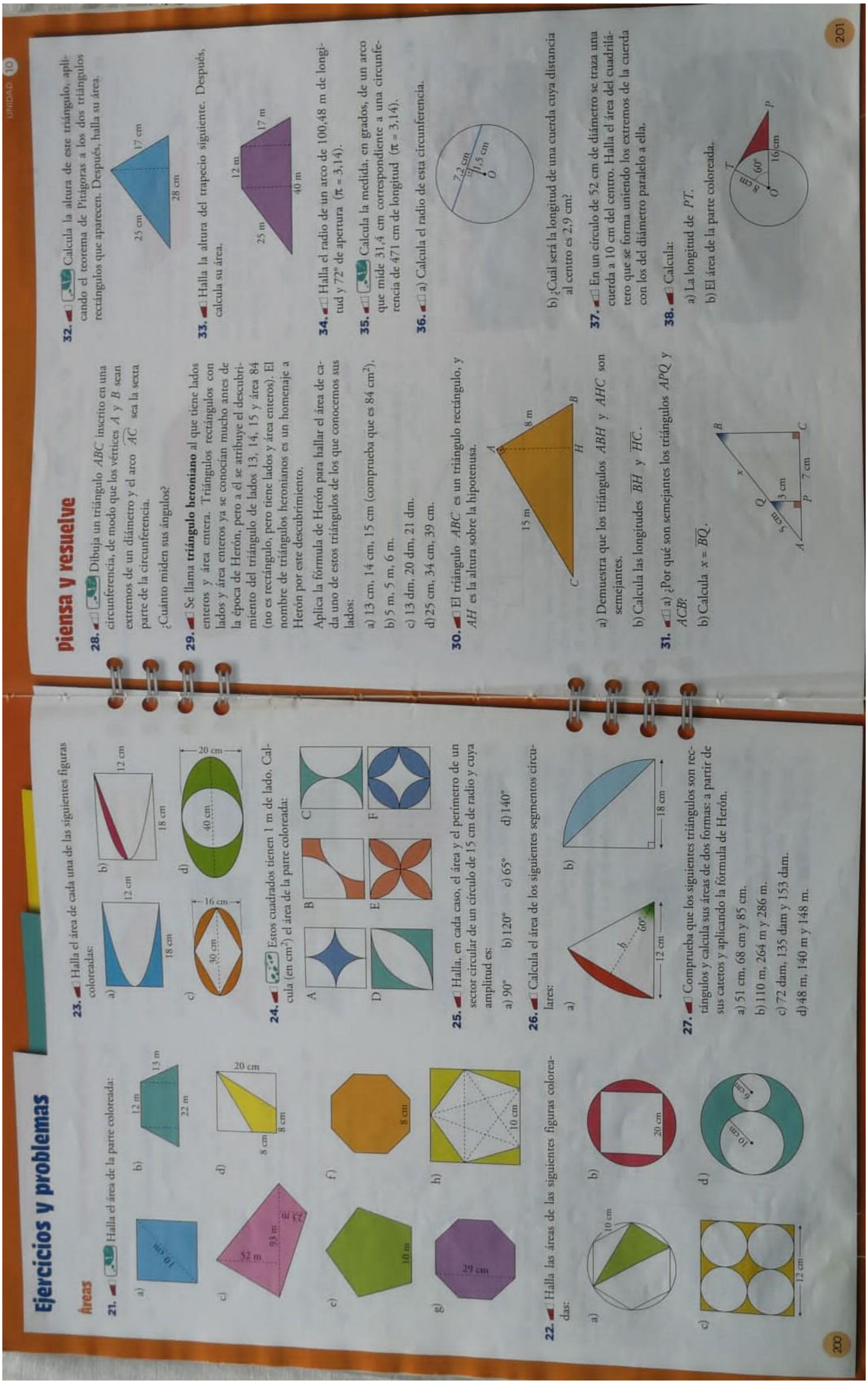


Figura A.10: Página 200. Apartado *Ejercicios y problemas | Practica*. Página 201. Apartado *Ejercicios y problemas | Piensa y Resuelve*.

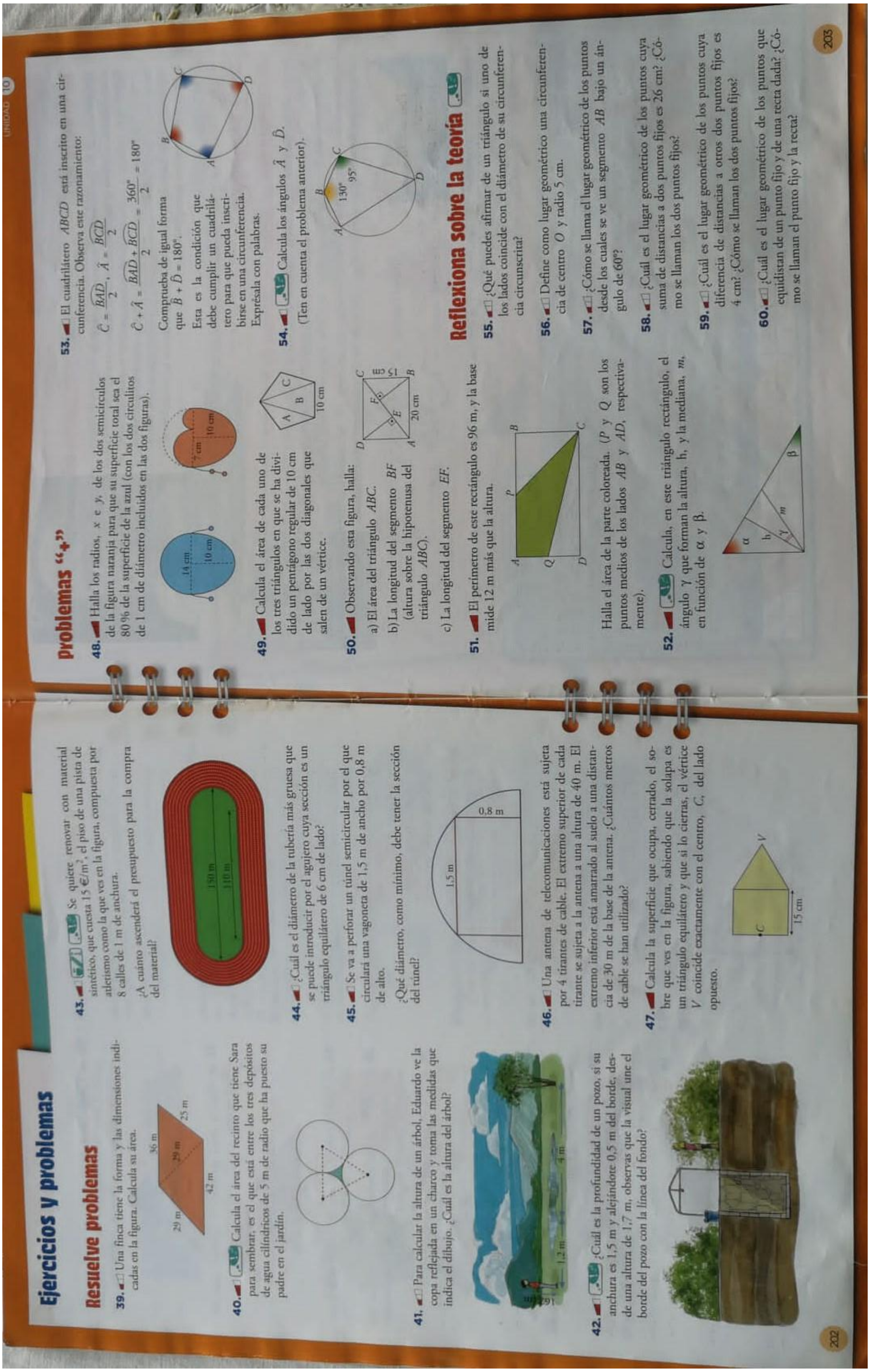


Figura A11: Página 202. Apartado *Ejercicios y problemas | Resuelve problemas.* Página 203. Apartado *Ejercicios y problemas | Problemas "+" y Reflexiona sobre la teoría.*

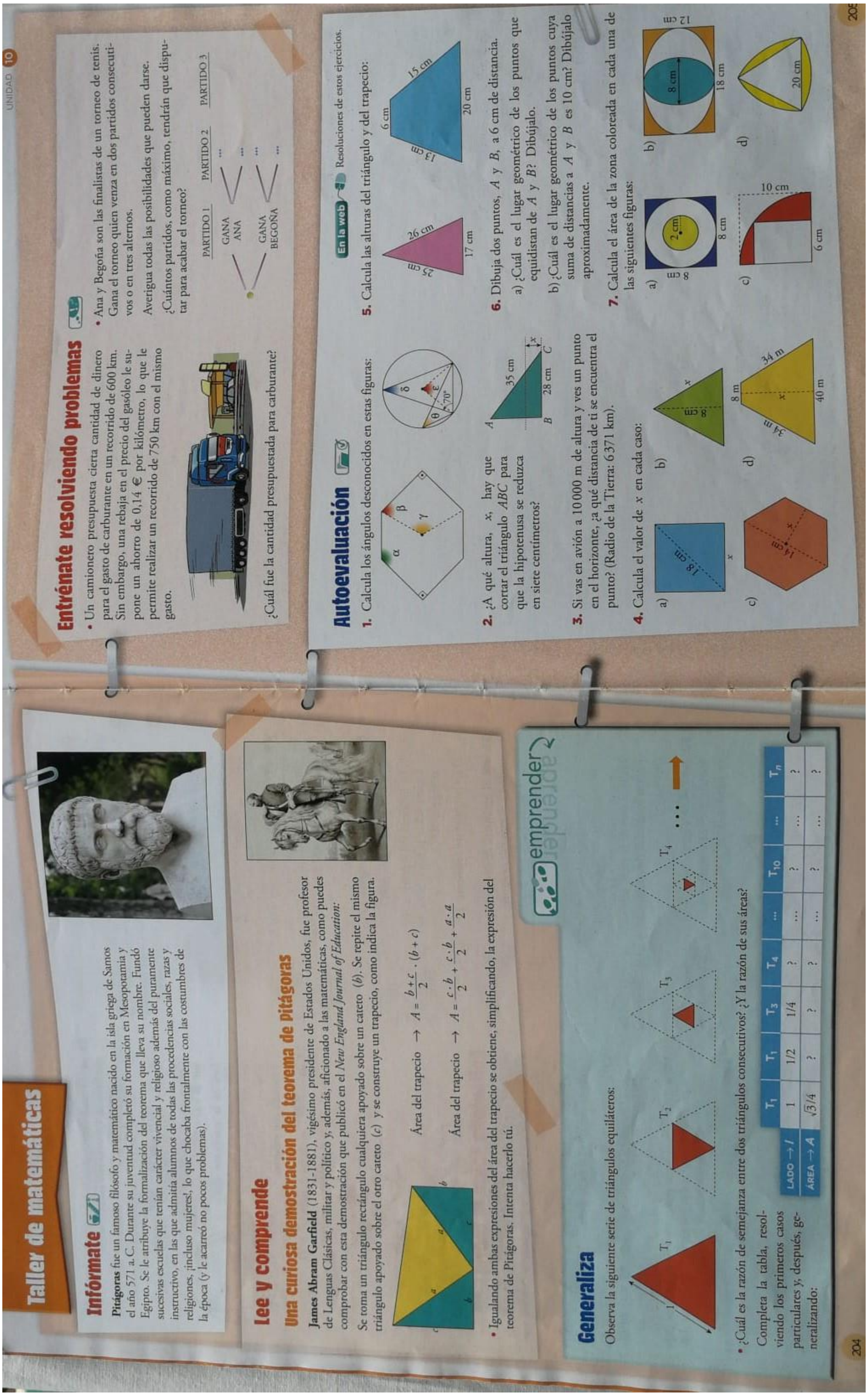
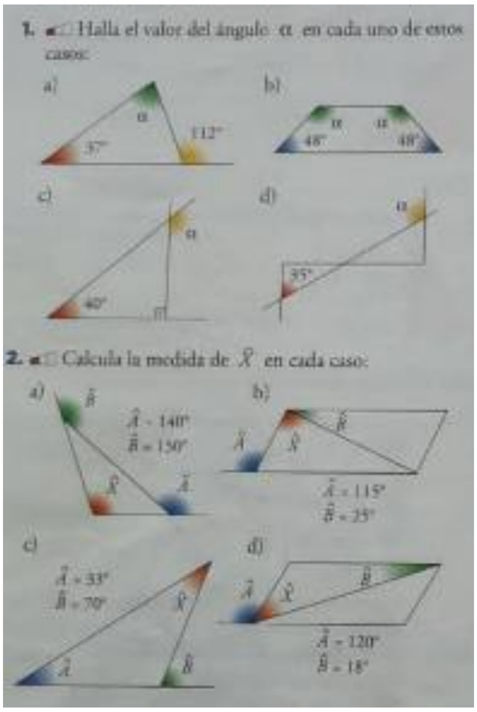


Figura A12: Página 204. Apartado *Taller de Matemáticas.* Página 205. Apartado *Autoevaluación.*

B. Actividades del libro de texto



1. Halla el valor del ángulo α en cada uno de estos casos:

a) 37° 112° α b) 48° α α 48° c) 40° α d) 35° α

2. Calcula la medida de $\hat{X}$ en cada caso:

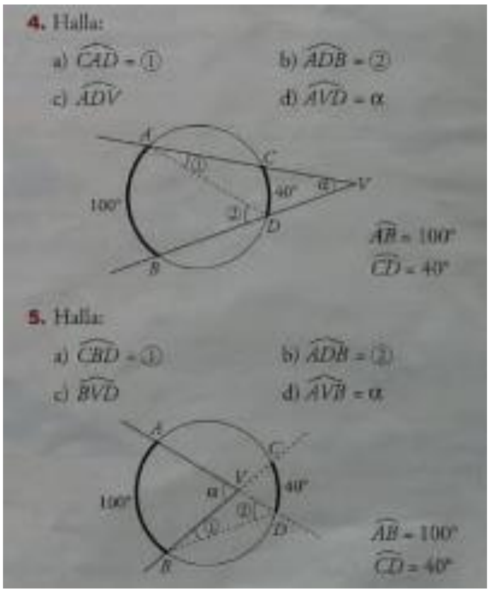
a) $\hat{A} = 140°$, $\hat{B} = 150°$

b) $\hat{A} = 115°$, $\hat{B} = 25°$

c) $\hat{A} = 33°$, $\hat{B} = 70°$

d) $\hat{A} = 120°$, $\hat{B} = 18°$

Figura B.1: Sesión 0. Tarea: Ejercicios 1 y 2, página 198.



4. Halla:

a) $\widehat{CAD}$ = ① b) $\widehat{ADB}$ = ②

c) $\widehat{ADV}$ d) $\widehat{AVD}$ = α

$\widehat{AB} = 100°$, $\widehat{CD} = 40°$

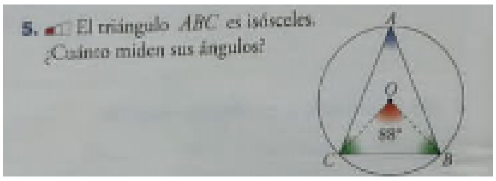
5. Halla:

a) $\widehat{CBD}$ = ① b) $\widehat{ADB}$ = ②

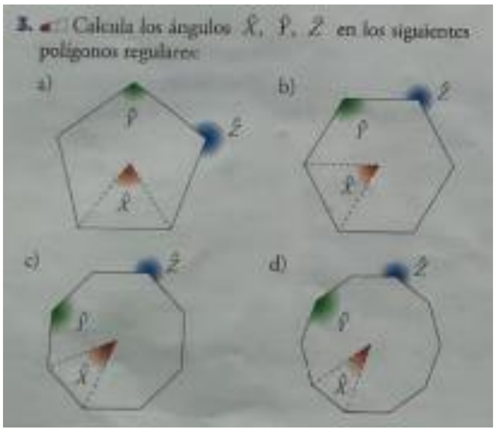
c) $\widehat{BVD}$ d) $\widehat{AVB}$ = α

$\widehat{AB} = 100°$, $\widehat{CD} = 40°$

Figura B.2: Sesión 3. Tarea: Ejercicios 4 y 5, página 185.



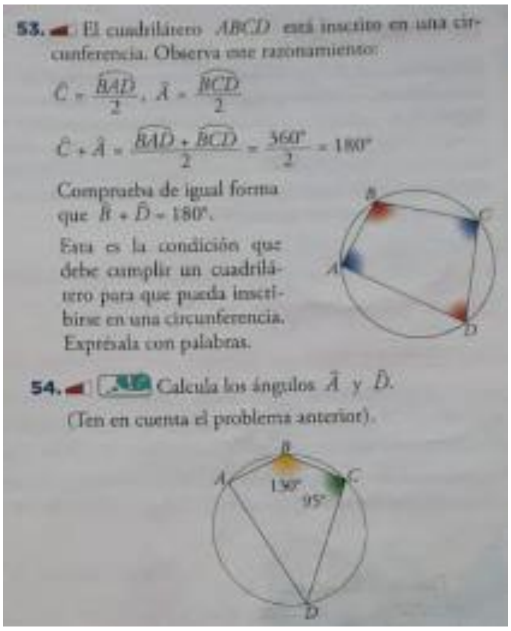
5. El triángulo ABC es isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?



3. Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:

a) b) c) d)

Figura B.3: Sesión 3. Tarea: 3 y 5, página 198.



53. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia. Observa este razonamiento:

$\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2}$, $\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2}$

$\hat{C} + \hat{A} = \frac{\widehat{BAD} + \widehat{BCD}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$

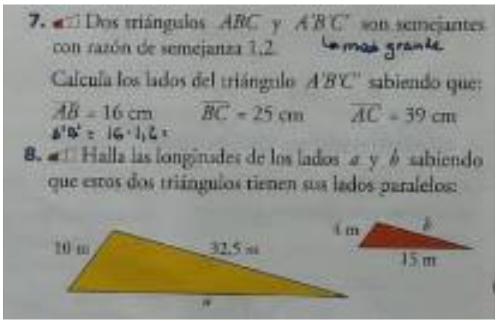
Comprueba de igual forma que $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

Esta es la condición que debe cumplir un cuadrilátero para que pueda inscribirse en una circunferencia. Exprésala con palabras.

54. Calcula los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$.

(Ten en cuenta el problema anterior).

Figura B.4: Sesión 3. Tarea: Problemas 53 y 54, página 203.



7. Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con razón de semejanza 1,2. la más grande

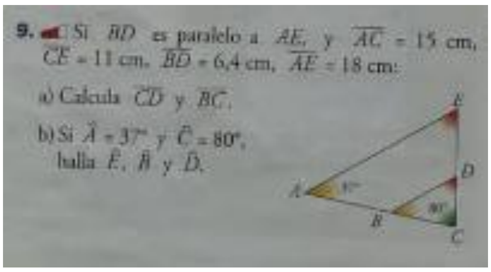
Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ sabiendo que:

$\overline{AB} = 16$ cm $\overline{BC} = 25$ cm $\overline{AC} = 39$ cm

$A'B' = 16 \cdot 1,2 =$

8. Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:

Figura B.5: Sesión 4. Tarea: Ejercicios 7 y 8, página 198.



9. Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC} = 15$ cm, $\overline{CE} = 11$ cm, $\overline{BD} = 6,4$ cm, $\overline{AE} = 18$ cm:

a) Calcula $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$.

b) Si $\hat{A} = 37°$ y $\hat{C} = 80°$, halla $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.

Figura B.6: Sesión 5. Tarea: Problema 9, página 198.

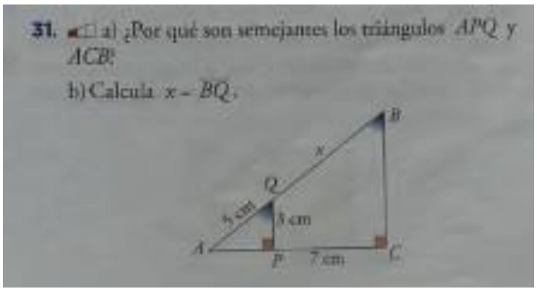

31. a) ¿Por qué son semejantes los triángulos APQ y ACB?
b) Calcula $x = BQ$.

Figura B.7: Sesión 5. Tarea: Problema 31, página 201.

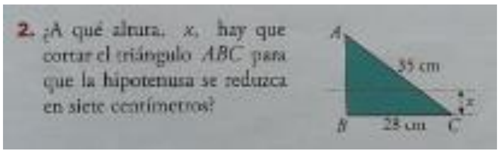
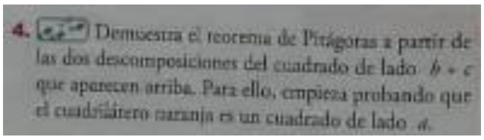

2. ¿A qué altura, x, hay que cortar el triángulo ABC para que la hipotenusa se reduzca en siete centímetros?

Figura B.8: Sesión 5. Tarea: Problema 2, página 205.


41. Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?


42. ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 m y alejándote 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, observas que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

Figura B.9: Sesión 6. Tarea: Problemas 41 y 42, página 202.


4. Demuestra el teorema de Pitágoras a partir de las dos descomposiciones del cuadrado de lado $b + c$ que aparecen arriba. Para ello, empieza probando que el cuadrilátero naranja es un cuadrado de lado a.

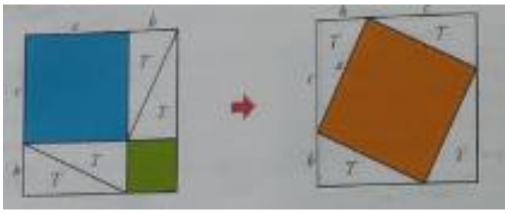


Figura B.10: Sesión 8. Tarea: Problema 4, página 188.

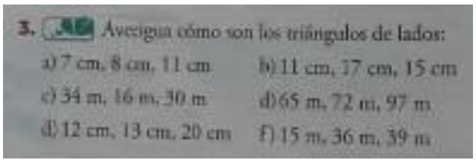
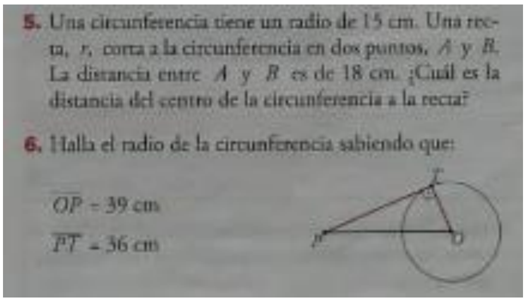

3. Averigua cómo son los triángulos de lados:
a) 7 cm, 8 cm, 11 cm b) 11 cm, 17 cm, 15 cm
c) 34 m, 16 m, 30 m d) 65 m, 72 m, 97 m
d) 12 cm, 13 cm, 20 cm f) 15 m, 36 m, 39 m

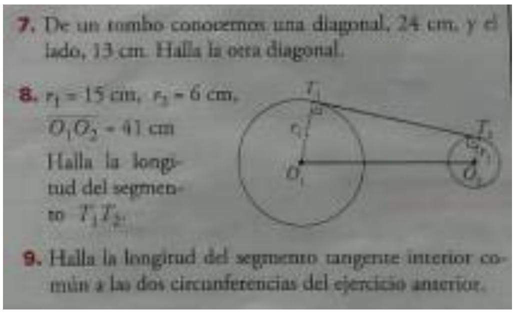
Figura B.11: Sesión 10. Tarea: Ejercicio 3, página 188.


5. Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta, r, corta a la circunferencia en dos puntos, A y B. La distancia entre A y B es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?

6. Halla el radio de la circunferencia sabiendo que:

$\overline{OP} = 39$ cm

$\overline{PT} = 36$ cm

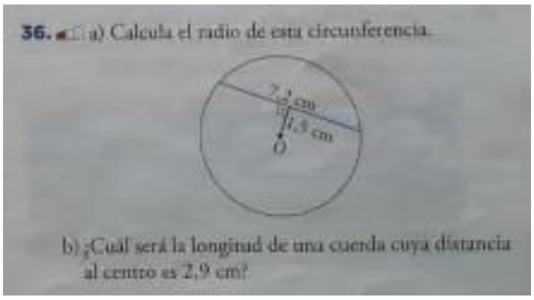


7. De un rombo conocemos una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Halla la otra diagonal.

8. $r_1 = 15$ cm, $r_2 = 6$ cm,
$\overline{O_1O_2} = 41$ cm
Halla la longitud del segmento T_1T_2.

9. Halla la longitud del segmento tangente interior común a las dos circunferencias del ejercicio anterior.

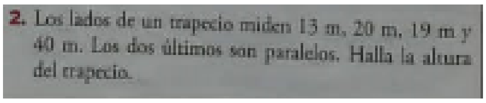
Figura B.12: Sesión 11. Tarea: Problemas 5 a 9, página 189 (los alumnos deben elegir 3 para resolver).



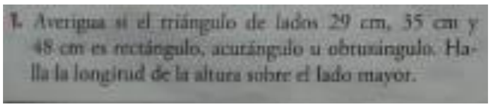
36. a) Calcula el radio de esta circunferencia.

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

Figura B.13: Sesión 11. Tarea: Problema 36, página 201.



2. Los lados de un trapecio miden 13 m, 20 m, 19 m y 40 m. Los dos últimos son paralelos. Halla la altura del trapecio.

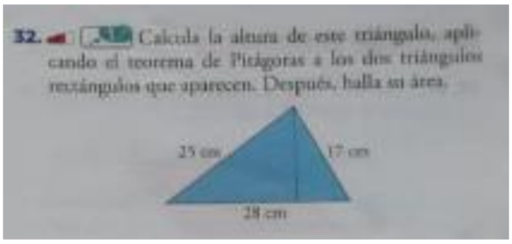


1. Averigua si el triángulo de lados 29 cm, 35 cm y 48 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Halla la longitud de la altura sobre el lado mayor.

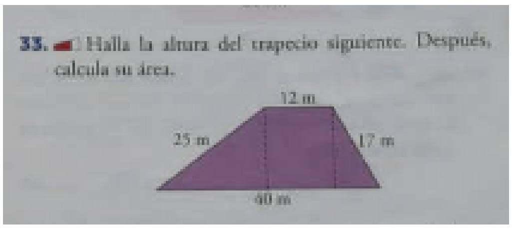
Figura B.14: Sesión 12. Tarea: Problemas 1 y 2, página 190.

13. Halla, con la ayuda de un sistema de ecuaciones, los valores de h, x e y.

Figura B.15: Sesión 12. Tarea: Problema 13, página 199.

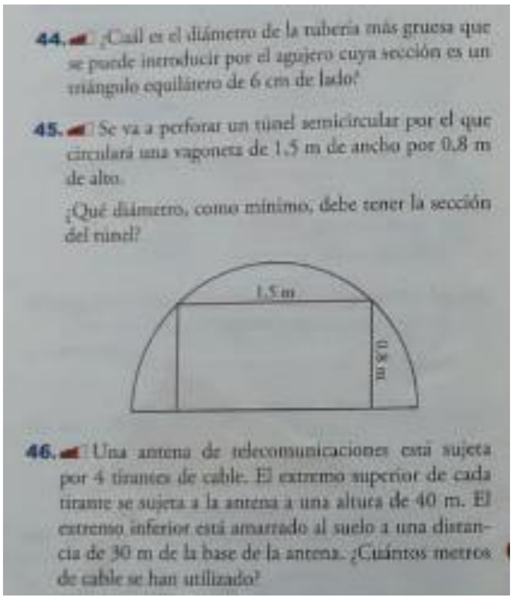


32. Calcula la altura de este triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que aparecen. Después, halla su área.



33. Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.

Figura B.16: Sesión 12. Tarea: Problemas 32 y 33, página 201.



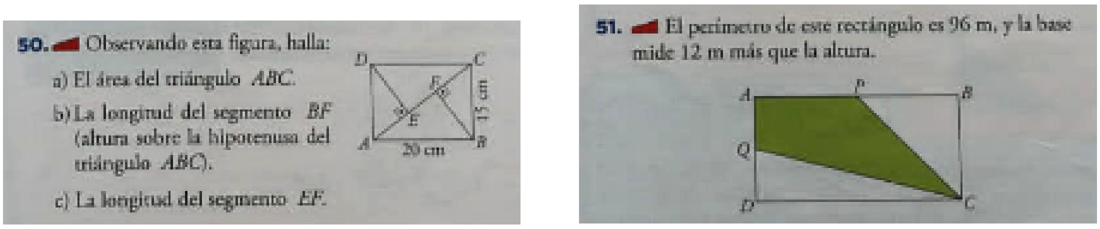
44. ¿Cuál es el diámetro de la tubería más gruesa que se puede introducir por el agujero cuya sección es un triángulo equilátero de 6 cm de lado?

45. Se va a perforar un túnel semicircular por el que circulará una vagoneta de 1,5 m de ancho por 0,8 m de alto.

¿Qué diámetro, como mínimo, debe tener la sección del túnel?

46. Una antena de telecomunicaciones está sujeta por 4 tirantes de cable. El extremo superior de cada tirante se sujeta a la antena a una altura de 40 m. El extremo inferior está amarrado al suelo a una distancia de 30 m de la base de la antena. ¿Cuántos metros de cable se han utilizado?

Figura B.17: Sesión 12. Tarea: Problemas 44, 45 y 46, página 202.



50. Observando esta figura, halla:

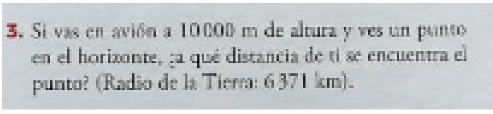
a) El área del triángulo ABC.

b) La longitud del segmento BF (altura sobre la hipotenusa del triángulo ABC).

c) La longitud del segmento EF.

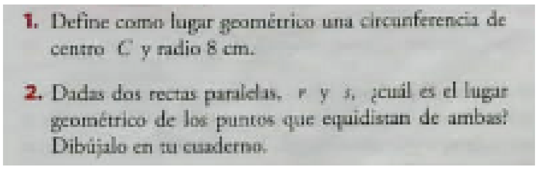
51. El perímetro de este rectángulo es 96 m, y la base mide 12 m más que la altura.

Figura B.18: Sesión 12. Tarea: Problemas 50 y 51, página 203.



3. Si vas en avión a 10 000 m de altura y ves un punto en el horizonte, ¿a qué distancia de ti se encuentra el punto? (Radio de la Tierra: 6 371 km).

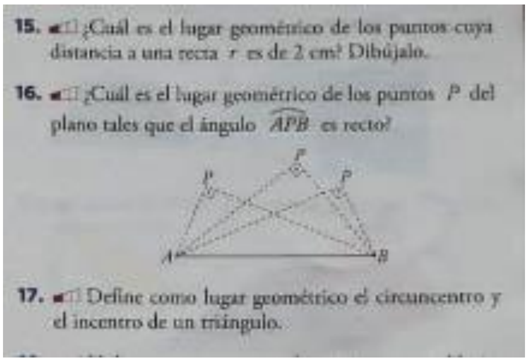
Figura B.19: Sesión 12. Tarea: Problema 3, página 205.



1. Define como lugar geométrico una circunferencia de centro C y radio 8 cm.

2. Dadas dos rectas paralelas, r y s, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas? Dibújalo en tu cuaderno.

Figura B.20: Sesión 14. Tarea: Cuestiones 1 y 2, página 191.

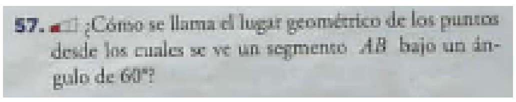


15. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta r es de 2 cm? Dibújalo.

16. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto?

17. Define como lugar geométrico el circuncentro y el incentro de un triángulo.

Figura B.21: Sesión 14. Tarea: Cuestiones 15, 16 y 17, página 199.



57. ¿Cómo se llama el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento AB bajo un ángulo de 60°?

Figura B.22: Sesión 14. Tarea: Cuestión 56, página 203.

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
Andrés Arrarás
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas