98

n.º 24

# TRATADO ELEMENTAL

# DE TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

## Y ESFÉRICA,

## *Y DE LA APLICACION DEL ÁLGEBRA*

## Á LA GEOMETRÍA;

DISPUESTO POR S. F. LACROIX,

SEXTA EDICION.

TRADUCIDA POR LOS CATEDRÁTICOS DE MATEMÁTICAS DE LOS CABALLEROS PAGES DE S. M.

M.E.

TOMO IV.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL
AÑO DE 1820.

A 18098

# ADVERTENCIA

## DE LOS TRADUCTORES.

El deseo de contribuir por nuestra parte á mejorar la enseñanza de que estamos encargados, y la amistad que nos unia con D. Josef Rebollo, nos han empeñado á continuar la traduccion del Curso de Matemáticas de Mr. Lacroix, que empezó aquel benemérito profesor, á quien una temprana muerte impidió concluirla, arrebatándolo á su familia, á sus amigos y á la juventud estudiosa, que admiraban en él la modestia de un verdadero sabio, adornada con las prendas de un tierno padre, de un fiel amigo, y de un maestro zelosísimo de los aprovechamientos de sus discípulos.

Nuestro primer pensamiento fue refundir en la traduccion los adelantamientos hechos últimamente, sirviéndonos para ello de obras publicadas por geómetras de mérito y reputacion justamente merecida; los cuales, bien sea porque solo han escrito de uno de los diferentes ramos de las Matemáticas puras, ó bien porque han conocido las ventajas de presentar unas mismas verdades bajo diferentes aspectos, han hecho mejoras considerables, particularmente en la aplicacion del Algebra á la Geometría de dos y tres dimensiones, que es acaso la parte que con mas esmero y mejor éxito han cultivado los geómetras modernos.

Pero semejante trabajo exigia largas meditaciones y mas tiempo del que permite la urgencia de concluir cuanto antes la traduccion, y habria al fin producido un nuevo curso de Matemáticas distinto del de Mr. Lacroix. Por tanto nos hemos limitado al mero oficio de traductores, tomándonos solo la libertad de modificar ligeramente algunas demostraciones del autor para hacerlas mas palpables, ó darlas mas extension en sus aplicaciones; y reservándonos para lo sucesivo publicar las ilustraciones y desenvolvimientos que creamos útiles para la mejor inteligencia del original y mayor aprovechamiento de los que se dediquen al estudio de las matemáticas.

De este modo evitaremos tambien la crítica á que nos habriamos expuesto, si hubiésemos alterado una obra que justamente corre en toda la Europa con la mas distinguida aceptacion, y cuyo autor tiene la gloria de haber contribuido muy eficazmente á los progresos que han hecho las matemáticas en estos últimos tiempos, por haber sido el primero que escribió unos Elementos correspondientes al estado que tenia la ciencia despues de las tareas de Euler, Lagrange, Monge, y otros geómetras célebres del siglo pasado.

# TRATADO ELEMENTAL
# DE TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA
## Y ESFÉRICA,
# *Y DE LA APLICACION DEL ÁLGEBRA*
## Á LA GEOMETRÍA.

---

## CAPITULO PRIMERO.

### DE LA TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

1. En un triángulo rectilíneo hay seis cosas que considerar, á saber, tres ángulos y tres lados; pero nos basta conocer cierto número de estas para determinar las demas. De las proposiciones demostradas en los triángulos iguales se infiere que se puede siempre construir un triángulo cuando se conocen tres de las seis cosas que le constituyen, con tal que entre los datos se halle por lo menos un lado. Para tener una completa teoría de los triángulos es necesario poder aplicar el cálculo á las construcciones geométricas, pues se sabe que la exactitud de estas últimas es limitada por la imperfeccion de los instrumentos, y al cálculo nada hay que le limite, á causa de estar á nuestro arbitrio llevarle al grado de exactitud que se estime conveniente. Este es pues el objeto que nos proponemos en la trigonometría rectilínea.

Los primeros que trataron de desenvolver por una serie de operaciones numéricas, ó por fórmulas algébricas, las relaciones que tienen entre sí las diversas partes de un triángulo, debieron detenerse por la dificultad de hacer entrar en el cálculo la magnitud de los ángulos que, medidos por arcos de círculo, no pueden compararse con la línea recta; pero muy luego debieron notar que si podian por cualquier medio calcular una serie de triángulos, cuyos ángulos tuviesen todos los valores posibles, esta serie comprenderia uno que seria semejante al triángulo que se trataba de determinar, cualesquiera que fuese dicho triángulo; con lo cual, por medio de simples proporciones, se podrian deducir las partes del segundo de las del primero. Aclararemos lo dicho por el ejemplo siguiente.

Fig. 1. 2. *Supongamos que en el triángulo* ABC, fig. 1, se conozca el ángulo B, el ángulo C, y el lado BC: se buscará en la serie de triángulos calculados aquel que tenga dos ángulos $b$ y $c$ respectivamente iguales á los B y C; el tal triángulo será semejante al propuesto ABC; y puesto que todas sus partes $ab$, $ac$, $bc$ son conocidas, se tendrán las proporciones

$$bc : ab :: BC : AB, \qquad bc : ac :: BC : AC,$$

en cada una de las cuales estan dados los tres primeros términos. Por consiguiente se sacará

$$AB = \frac{BC \times ab}{bc}, \qquad AC = \frac{BC \times ac}{bc},$$

y como ademas se tiene $A = a$, todas las partes del triángulo ABC estarán determinadas.

3. Ya que vemos el partido que podemos sacar de una serie de triángulos hechos sobre todos los ángulos posibles, y cuyos lados esten calculados, es muy natural



buscar medios para formar una serie de esta especie. A fin de considerar el caso mas simple, supongamos que los triángulos que se tratan de determinar sean rectángulos; es facil ver que todos se podrán construir en un cuadrante, bajando desde cada uno de los puntos del arco AB,
fig. 2, las perpendiculares MP, M′P′, M″P″ &c. al radio Fig. 2.
AC; y tirando los radios MC, M′C′, M″C″ &c., los triángulos MPC, M′P′C, M″P″C &c., formados de este modo, serán rectángulos en P, P′, P″ &c., y los ángulos MCP, M′CP′, M″CP″ &c. tendrán sucesivamente todos los valores posibles; en fin los ángulos CMP, CM′P′, CM″P″ &c., que con los anteriores forman un ángulo recto, serán los mismos que los que exige la naturaleza de los triángulos rectángulos; no podrá pues existir triángulo rectángulo que no sea equiángulo con alguno de los que da la construccion anterior. Es muy á propósito notar que estos últimos triángulos tienen todos una misma hipotenusa, que es el radio del arco AB.

4. Aun se puede formar una serie de triángulos rectángulos que todos tengan uno de los catetos igual al radio del círculo; para lo cual basta elevar la tangente indefinida AT al extremo del radio AC, y tirar por el centro C y por los puntos M, M′, M″ &c. las secantes CN, CN′, CN″ &c. Es evidente que los triángulos CAN, CAN′, CAN″ &c. tendrán sucesivamente todas las combinaciones de ángulos que pueden existir en un triángulo rectángulo; y entre estos triángulos se hallará precisamente uno semejante al triángulo rectángulo que se quiera.

5. En los triángulos CPM, CP′M′, CP″M″ &c. que tienen una misma hipotenusa, los lados PM, P′M′, P″M″ &c. que crecen al mismo tiempo que los ángulos

ACM, ACM′, ACM″ &c., y que los arcos AM, AM′, AM″ &c., que miden á estos ángulos, han recibido un nombre á causa de esta dependencia: la línea PM se llama el *seno* del arco AM; la línea P′M′ es el seno del arco AM′, y así de los demas. *De aqui se infiere que el seno de un arco es la perpendicular bajada desde uno de los extremos del arco al radio que pasa por el otro extremo.* Las líneas CP, CP′, CP″ &c. que disminuyen cuando aumentan los arcos AM, AM′, AM″ &c., son respectivamente iguales, como paralelas comprendidas entre paralelas, á las perpendiculares MQ, M′Q′, M″Q″ &c. bajadas desde los puntos M, M′, M″ &c. al radio CB perpendicular al CA; es pues evidente que las líneas MQ, M′Q′, M″Q″ &c. son con respecto á los arcos BM, BM′, BM″ &c. lo que son PM, P′M′, P″M″ &c. con relacion á los AM, AM′, AM″ &c.; y que por consiguiente MQ es el seno de BM; M′Q′ es el de BM′; M″Q″ lo es de BM″ &c.

Cuando dos arcos sumados entre sí ó restados uno de otro dan por resultado un cuadrante, se dice que son *complementos* uno de otro; y cuando dos arcos sumados entre sí componen la semicircunferencia, se dice que son
Fig. 4. *suplemento* uno de otro: asi pues AM′ y M′A′, fig. 4, son suplemento uno de otro. Los arcos BM, BM′ BM″ &c. son respectivamente los complementos de AM, AM′, AM″ &c. Se han designado las líneas MQ, M′Q′, M″Q″ &c., y tambien sus iguales CP, CP′, CP″ &c. bajo el nombre de *cosenos* de los arcos AM, AM′, AM″ &c. Segun estas nociones podremos decir que *el coseno de un arco cualquiera es el seno del complemento de este arco, y es igual á la parte del radio comprendida entre el centro y el pie del seno.*



Los triángulos rectángulos CPM, CP′M′, CP″M″ &c., que tienen una misma hipotenusa, estan formados por el radio del círculo y por el seno y coseno de aquel de sus ángulos agudos cuyo vértice está en el centro del círculo *.

6. Pasemos ahora á los triángulos CAN, CAN′, CAN″ &c. Sus hipotenusas son las *secantes* de los arcos AM, AM′, AM″ &c., pues se acostumbra á llamar *secante de un arco al radio tirado por el extremo del arco, y prolongado hasta el encuentro de la tangente tirada por el otro extremo de dicho arco.* Las porciones AN, AN′, AN″ &c. tomadas sobre la tangente AT son las *tangentes* de los arcos AM, AM′, AM″ &c., porque se ha convenido en llamar *tangente de un arco á la parte que interceptan sobre la tangente tirada por uno de los extremos del arco los dos radios que la terminan* **.

7. Si por el extremo B del arco AB, fig. 3, se Fig. 3.
tira la tangente *Bn* prolongada hasta que ella encuentre á la secante CN, la línea *Cn* es la secante del arco BM, complemento del AM, y se llama la *cosecante* de AM; la línea *Bn*, tangente de BM, es llamada *cotangente* de AM, pues se ha convenido en llamar *cotangente y cosecante de un arco á la tangente y secante de su complemento.* La cotangente y la cosecante, como se ve, no ha-

* La parte AP del radio AC, comprendida entre el pie del seno y el origen del arco, se llama *seno verso.* Esta línea no tiene uso alguno en trigonometría, y por lo mismo no hablaremos de ella en este tratado.

** Aqui vemos que las palabras *secante* y *tangente* estan tomadas en una acepcion diversa de la que se les ha dado en los Elementos de Geometría. En esta parte de las matemáticas la secante y la tangente son rectas indefinidas, de las cuales la una corta al círculo, y la otra le toca; pero en trigonometría se aplican las mismas denominaciones á líneas de una magnitud determinada: cuando pudiese haber equivocacion se llamarán á unas *tangentes* y *secantes trigonométricas*, y á las otras simplemente *tangentes* y *secantes*.

cen parte de los mismos triángulos que la tangente y secante, asi como se ve sucede por lo que hace al seno y coseno que forman un triángulo.

8. Las tangentes y secantes tienen con los senos y cosenos relaciones muy simples, por medio de las cuales pueden hallarse las unas cuando se conozcan las otras. Los triángulos CPM y CAN son semejantes, y dan

$CP : PM :: CA : AN$, de la cual sale $AN = \frac{PM \times CA}{CP}$;

poniendo en lugar de las líneas CP, PM y AN lo que expresan, esto es, cos. AM, sen. AM, tang. AM, y representando el radio CA por R se tendrá tang. AM $= \frac{R \text{ sen. } AM}{\text{cos. } AM}$.

De los mismos triángulos CPM y CAN se deduce tambien $CP : CM :: CA : CN$, de la cual se saca $CN = \frac{CM \times CA}{CP}$; pero $CN = \text{sec. } AM$, $CM = CA = R$, $CP = \text{cos. } AM$, luego $\text{sec. } AM = \frac{R^2}{\text{cos. } AM}$.

9. Si se comparan entre sí los triángulos CAN y $CBn$, que tambien son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo $ACN = CnB$ como alternos internos respecto á la secante $Cn$, se sacará la proporcion

$$AN : CA :: CB \text{ ó } CA : Bn,$$

la cual dá

$Bn = \frac{\overline{CA}^2}{AN}$, que equivale á $\text{cot. } AM = \frac{R^2}{\text{tang. } AM}$.



Esta proporcion, y la hallada para deducir la secante, hacen ver que *el radio es medio proporcional entre la secante y el coseno, y entre la tangente y cotangente*, á causa de tenerse las dos ecuaciones $\text{cos. } AM \times \text{sen. } AM = R^2$, $\text{tang. } AM \times \text{cot. } AM = R^2$.

10. Despues de lo dicho solo falta, para poder construir las tablas necesarias á la trigonometría, conocer los medios de calcular los senos y cosenos. Aun hay mas, los cosenos se deducen de los senos inmediatamente: porque el triángulo rectángulo CPM, que está formado de uno y otro, y cuya hipotenusa es el radio, da $\overline{PM}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CM}^2$, ó $\text{sen.}^2 AM + \text{cos.}^2 AM = R^2$ *, esto es, *que el cuadrado del radio es igual á la suma de los cuadrados del seno y del coseno*, de lo cual se infiere

$$\text{cos. } AM = \sqrt{R^2 - \text{sen.}^2 AM}.$$

Antes de pasar adelante observaremos que si el radio MC, fig. 4, desde luego sobrepuesto sobre AC, gira al rededor del punto C, como sobre una charnela, este radio formará sucesivamente con AC todos los ángulos posibles; y el punto M, situado en su extremo, pasará sobre todos los puntos de la circunferencia del círculo ABA'B'A, ó, lo que es lo mismo, la describirá. Siguiendo con atencion el movimiento que acabamos de indicar se ve desde luego que el punto A, en el cual el arco es nulo, el seno es nulo tambien, y el coseno no difiere del radio AC. Cuando el radio CM se ha separado de AC, Fig. 4.

* Hemos adoptado representar el cuadrado del seno de AM por $\text{sen.}^2 AM$ en lugar de la forma $(\text{sen. } AM)^2$, ó simplemente $\text{sen. } AM^2$, como lo hace el autor, por evitar el poder confundir la última representacion con el seno del cuadrado de A: lo propio debe decirse de las demas líneas trigonométricas.

el seno PM aumenta á medida que el punto M, que llamaré el *punto movible*, adelanta hácia B, y cuando él ha llegado alli, PM resulta igual á CB ó al radio. En las mismas circunstancias el coseno PC disminuye continuamente, y resulta nulo cuando el punto M está en B; el ángulo ACB es entonces recto, y el arco AB $= \frac{1}{2} \pi$ *. Continuando en moverse el punto M mas allá de B el seno decrece, y el coseno, que cae sobre el diámetro AA′ de un lado del punto C, opuesto á aquel en que él estaba antes de llegar á B, aumenta; pues claramente se ve que P′M′, seno de ABM′, es menor que BC, seno de AB, y CP′, coseno del primero de estos arcos, excede al coseno del segundo que es nulo.

Habiendo advertido que los cosenos en este segundo cuadrante tienen una posicion inversa de la que tienen en el primero, necesitamos tomar en consideracion esta diversa situacion, como lo hicimos en el Álgebra núms. 65, 66, 72 y 75. Esta diferencia de situacion se expresa en el cálculo por la oposicion de los signos; de suerte que si se miran como positivos ó efectuados del signo + los cosenos de los arcos menores que $\frac{1}{2} \pi$, es necesario mirar como negativos ó afectados del signo los cosenos de los arcos mayores que $\frac{1}{2} \pi$.

Es á propósito notar que P′M′ y CP′ son respectivamente el seno y coseno del arco A′M, contado desde A′, y suplemento de ABM′, de donde se sigue que un *ángulo obtuso tiene el mismo seno y el mismo coseno que su suplemento.*

Cuando el punto M′ ha llegado á A′, el seno es nulo como en el punto A, y el coseno es otra vez igual al radio.

* Representando por $\pi$ la semicircunferencia expresada en grados.



En el punto A′, el arco ABA′ es igual á la semicircunferencia ó á $\pi$; el ángulo ACM llega á su mayor incremento; pero nada se opone á que el radio CM y el punto movible no continúen su movimiento, pasando debajo del diámetro AA′. El seno, que resulta entonces P″M″, cae debajo del diámetro, y aumenta á medida que el punto M″ se aproxima á B′ mientras que el coseno CP″ disminuye. En el punto B′, en el cual el arco ABA′B′ es las $\frac{3}{4}$ partes de la circunferencia ó $\frac{3}{2} \pi$, el seno es igual al radio CB′, y el coseno es nulo. Se ve que en este cuadrante el coseno está contado como en el segundo cuadrante, y por consiguiente en el cálculo debe ser afectado del signo como en dicho segundo cuadrante, y el seno tiene una posicion inversa en el tercer cuadrante con respecto á la que tiene en los dos primeros, por cuya razon en el cálculo deberá expresarse esta circunstancia con anteponerle el signo —. En fin, desde B′ hasta A′ el seno P‴M‴, siempre debajo de AA′, disminuye continuamente, y el coseno CP‴, que se halla entonces del mismo lado en que él estaba en el primer cuarto de círculo AB, aumenta y resulta igual al radio en el punto A. En cuyo punto el seno es nulo, el punto movible ha acabado una revolucion, pero él puede volver á empezar otra; y considerando siempre como un solo arco, la totalidad del camino descrito por este punto desde el principio del movimiento, resultarán arcos mayores que la circunferencia, y que tendrán los mismos senos, cosenos, tangentes y cotangentes que las descritas en la primera revolucion. Estas consideraciones conducen á consecuencias muy importantes para el analisis, las cuales se hallan desenvueltas en los tratados de cálculo diferencial é integral del mismo autor.

La proposicion siguiente, que da la expresion del seno y coseno de la suma, ó de la diferencia de dos arcos, merece la mayor atencion, á causa de encerrar implícitamente todas las propiedades de los senos y cosenos.

11. Representemos por $a$ y $b$ dos arcos cualesquiera, se tendrá

$$\text{sen.}\ (a \pm b) = \frac{\text{sen.}\ a\ \text{cos.}\ b \pm \text{sen.}\ b\ \text{cos.}\ a}{R},$$

$$\text{cos.}\ (a \pm b) = \frac{\text{cos.}\ a\ \text{cos.}\ b \pm \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b}{R}.$$

Fig. 5. Para probarlo tómese sobre el círculo AMB, fig. 5, el arco $AM = a$; llévense á cada lado del punto M los arcos MN y MN′ iguales á $b$; tírese la cuerda NN′; desde los puntos N, $M$, N′ bájense sobre el radio AC las perpendiculares NQ, MP, N′Q′; por el punto M tírese el radio MC, y desde el punto E, en el cual dicho radio MC encuentra á la cuerda NN′, bájese sobre AC la perpendicular EF; por los puntos E y N′ tírense las rectas ED, N′G, paralelas á AC.

Hecho esto nótese: 1.° que NQ es el seno del arco $AN = AM + MN = a + b$, y que CQ es el coseno del mismo arco: 2.° que N′Q′ es el seno del arco $AN' = AM - MN' = a - b$, y que CQ′ es el coseno del mismo arco. Pero la cuerda NN′ está dividida en dos partes iguales en el punto E, á causa de que el radio CM pasa por la mitad del arco NN′ segun la construccion; ahora bien, de la evidente semejanza de los triángulos NED y NN′G se infiere que NG se halla tambien dividida en dos partes iguales en el punto D, y que $DN = NG$. Ademas $DQ = EF$, $GQ = N'Q'$, $DE = FQ$, á causa de que las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales, y como DE es la mitad de N′G, FQ será la mitad de Q′Q; de suerte que se tendrá $Q'F = QF = DE$. Ultimamente sacaremos que



$$NQ = DQ + DN = EF + DN$$
$$N'Q' = GQ = DQ - DG = EF - DN$$
$$CQ = CF - FQ = CF - DE$$
$$CQ' = CF + FQ' = CF + DE,$$

poniendo ahora por NQ, N′Q′, CQ, CQ′ lo que ellas representan, esto es, sen. $(a+b)$, sen. $(a-b)$, cos. $(a+b)$, cos. $(a-b)$, se sacará

$$\text{sen.}\ (a+b) = EF + DN,\quad \text{cos.}\ (a+b) = CF - DE,$$
$$\text{sen.}\ (a-b) = EF - DN,\quad \text{cos.}\ (a-b) = CF + DE.$$

Solo nos resta calcular las cuatro líneas EF, CF, DN, DE; las dos primeras se obtienen por los triángulos semejantes CMP y CFE, de los cuales salen las proporciones

$$CM : PM :: CE : EF,\quad CM : CP :: CE : CF.$$

Y puesto que $AM = a$ se tendrá $PM = \text{sen.}\ a$, $CP = \text{cos.}\ a$, tambien se infiere de las definiciones del seno y coseno de un arco que EN es el seno del arco MN, que CE es el coseno del mismo arco, y por consiguiente $EN = \text{sen.}\ b$, $CE = \text{cos.}\ b$; ademas $CM = R$, sustituyendo estos valores en las proporciones anteriores se halla despejando

$$EF = \frac{PM \times CE}{CM} = \frac{\text{sen.}\ a\ \text{cos.}\ b}{R},\quad CF = \frac{CP \times CE}{CM} = \frac{\text{cos.}\ a\ \text{cos.}\ b}{R}.$$

Comparando ahora los triángulos CMP, DEN, que son semejantes, puesto que los lados del segundo son perpendiculares á los del primero, se obtendrán, para determinar los valores de las otras dos líneas, las proporciones

$$CM : EN :: CP : DN,\quad CM : EN :: PM : DE.$$

Sustituyendo por los tres primeros términos de estas proporciones, lo que ellos representan, se inferirá

$$DN=\frac{EN\times CP}{CM}=\frac{\text{sen. } b\times\text{cos. } a}{R},\ DE=\frac{PM\times EN}{CM}=\frac{\text{sen. } a\,\text{sen. } b}{R}.$$

Reuniendo estos valores á los anteriores para formar los de sen. $(a+b)$, sen. $(a-b)$, cos. $(a+b)$ y cos. $(a-b)$, resultarán las cuatro ecuaciones

$$\begin{cases}\text{sen. }(a+b)=\dfrac{\text{sen. } a \text{ cos. } b+\text{sen. } b \text{ cos. } a}{R}.\\ \text{sen. }(a-b)=\dfrac{\text{sen. } a \text{ cos. } b-\text{sen. } b \text{ cos. } a}{R}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{cos. }(a+b)=\dfrac{\text{cos. } a \text{ cos. } b-\text{sen. } a \text{ sen. } b}{R}\\ \text{cos. }(a-b)=\dfrac{\text{cos. } a \text{ cos. } b+\text{sen. } a \text{ sen. } b}{R}\end{cases}$$

que se reducen á las dos primeras que componen el enunciado de la proposicion.

Estas fórmulas estan sacadas para cuando la suma de los arcos es menor que un cuadrante; pero ellas son generales cualesquiera que sean los arcos $a$ y $b$.

Fig. 5*. En efecto, si los arcos $a$ y $b$ estuvieren representados respectivamente por AM y MM′, fig. 5*, se podrian bajar desde los puntos M y M′ las perpendiculares MP, M′P′ al diámetro AD, desde M′ la M′Q igualmente perpendicular al radio CM; tambien puede tirarse desde Q la SN paralela á AD, y bajar la perpendicular QL á AD.

Hecha esta construccion tendremos $AM=a$, $MM'=b$, $MC=R$, $MP=\text{sen. } a$, $PC=\text{cos. } a$, $M'Q=\text{sen. } b$, $QC=\text{cos. } b$, $M'P'=\text{sen. }(a+b)$, $CP'=\text{cos. }(a+b)$.



Se ha dado al valor de cos. $(a+b)$, que es CP′ el signo menos, porque está contado de izquierda á derecha en sentido inverso de aquel en que se contó en el primer cuadrante, todo con arreglo á lo que hemos dicho en el número 10. Ahora bien, los triángulos semejantes PMC, CQL dan

$$CM : MP :: CQ : QL=NP',\ \text{luego } NP'=\frac{\text{sen. } a \text{ cos. } b}{R};$$

los triángulos PMC, QM′N dan

$$CM : CP :: QM' : M'N,\ \text{y por lo mismo } M'N=\frac{\text{cos. } a \text{ cos. } b}{R},$$

y como $M'P'=M'N+NP'$ se inferirá, poniendo por estas líneas sus valores, la ecuacion

$$\text{sen. }(a+b)=\frac{\text{sen. } a \text{ cos. } b+\text{sen. } b \text{ cos. } a}{R}.$$

Para deducir ahora la fórmula de cos. $(a+b)$ no habrá mas que comparar los triángulos semejantes CMP y CQL, que dan

$$CM : CP :: CQ : CL,\ \text{luego } CL=\frac{\text{cos. } a \text{ cos. } b}{R};$$

los triángulos CMP y QM′N dan

$$CM : MP :: QM' : QN,\ \text{de donde sale } QN=\frac{\text{sen. } a\,\text{sen. } b}{R},$$

y como $CP'=LP'-CL=QN-CL$, resultará $-CP'=CL-QN$; poniendo por las líneas que contiene la última ecuacion sus valores analíticos, tendremos la siguiente

$$\text{cos. }(a+b)=\frac{\text{cos. } a \text{ cos. } b-\text{sen. } a \text{ sen. } b}{R}.$$

Si los arcos $a$ y $b$ estuviesen representados por AM y MM′, fig. 5*, en tal caso bajando desde los puntos M Fig. 5*. y M′ las perpendiculares MP, M′P′ al radio AC, igualmente que la M′P″ al radio MC prolongado, y tirando las P″S y M′L perpendicular la primera, y paralela la segunda al radio AC, resultará que MP$=$sen. $a$, CP$=$ cos. $a$, M$'$P$''=$sen. $b$, CP$''=-$cos. $b$, M$'$P$'=$sen. AMM$'$; y como este seno está colocado de abajo arriba, se le tendrá que tomar con signo negativo segun lo dicho número 10, por lo que saldrá $-$M$'$P$'=$sen. $(a+b)$, y por la misma razon se sacará $-$CP$'=$cos. $(a+b)$.

Ahora bien, los triángulos semejantes CPM, CP$''$S dan

$$\text{CM}:\text{MP}::\text{CP}'':\ \text{SP}'',\ \text{luego SP}''=\frac{\text{sen. } a\times-\text{cos. } b}{\text{R}};$$

los triángulos PMC, M$'$QP$''$ dan

$$\text{CM}:\text{CP}::\text{M}'\text{P}'':\text{QP}'',\ \text{por lo mismo QP}''=\frac{\text{sen. } b \text{ cos. } a}{\text{R}},$$

y como P$'$M$'=$SQ$=$SP$''-$QP$''$, se infiere $-$P$'$M$'=-$SP$''$ $+$QP$''$; poniendo por estas líneas sus valores, resulta la ecuacion

$$\text{sen. }(a+b)=\frac{\text{sen. } a \text{ cos. } b+\text{sen. } b \text{ cos. } a}{\text{R}}.$$

Para hallar el coseno de $(a+b)$, representado por $-$CP$'$, bastará hallar las líneas CS y SP$'=$QM$'$, para lo cual los triángulos semejantes CPM y CP$''$S dan

$$\text{CM}:\text{CP}::\text{CP}'':\text{CS},\ \text{luego CS}=\frac{\text{cos. } a\times-\text{cos. } b}{\text{R}};$$

igualmente los triángulos semejantes CPM y M$'$P$''$Q dan

$$\text{CM}:\text{MP}::\text{M}'\text{P}'':\text{QM}',\ \text{luego SP}'=\frac{\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\text{R}},$$

y como CP$'=$CS$+$SP$'$ se infiere $-$CP$'=-$CS$-$SP$'$; en cuya ecuacion, sustituyendo los valores de las líneas que encierra, se tendrá

$$\text{cos. }(a+b)=\frac{\text{cos. } a \text{ cos. } b-\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\text{R}}.$$

Lo que hemos dicho de los tres primeros cuadrantes, con relacion al seno y coseno de $a+b$, diríamos del cuarto; y como despues vuelven los mismos senos y cosenos que para los cuatro cuadrantes, resulta que sean los que quieran $a$ y $b$ deberá tenerse siempre



$$\text{sen. }(a+b)=\frac{\text{sen. } a \text{ cos. } b+\text{sen. } b \text{ cos. } a}{\text{R}},$$

$$\text{y cos. }(a+b)=\frac{\text{cos. } a \text{ cos. } b-\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\text{R}}.$$

Solo nos falta deducir en general las fórmulas de sen. $(a-b)$, y cos. $(a-b)$, que solo hemos expuesto en el primer cuadrante deducido de la figura, de la cual podríamos valernos para los demas cuadrantes; pero vamos á hacerlo por una consideracion, y es la de suponer $b$ negativa, y como en tal caso núm. 10 sen. $-b=-$sen. $b$, y cos. $-b=$cos. $b$ las tales fórmulas se mudan en las siguientes

$$\text{sen. }(a-b)=\frac{\text{sen. } a\times\text{cos. }-b+\text{sen. }-b\times\text{cos. } a}{\text{R}},$$

$$\text{cos. }(a-b)=\frac{\text{cos. } a\times\text{cos. }-b-\text{sen. } a\times\text{sen. }-b}{\text{R}},$$

ó

$$\text{sen. }(a-b)=\frac{\text{sen. } a \text{ cos. } b-\text{sen. } b \text{ cos. } a}{\text{R}},$$

$$\text{cos. }(a-b)=\frac{\text{cos. } a \text{ cos. } b+\text{sen. } a.\ \text{sen. } b}{\text{R}}.$$

Cuyas dos últimas fórmulas, unidas á las dos anteriores, componen las cuatro que en general nos propusimos hallar.

Con las cuatro ecuaciones

$$\text{sen. }(a+b)=\frac{\text{sen. } a \text{ cos. } b+\text{sen. } b \text{ cos. } a}{\text{R}},$$

$$\text{cos. }(a+b)=\frac{\text{cos. } a \text{ cos. } b-\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\text{R}}$$

$$\text{sen.}\ (a-b)=\frac{\text{sen.}\ a\ \cos.\ b-\text{sen.}\ b\ \cos.\ a}{R},$$

$$\cos.\ (a-b)=\frac{\cos.\ a\ \cos.\ b+\text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b}{R},$$

pueden hallarse el seno y el coseno de un arco duplo, triplo, y en general multiplo de aquel cuyo seno y coseno se conoce. En efecto, si se hace sucesivamente $b=a$, $b=2\,a$, se tendrá

$$\begin{cases}\text{sen.}\ 2\,a=\dfrac{2\ \text{sen.}\ a\ \cos.\ a}{R}\\ \cos.\ 2\,a=\dfrac{\cos.^2 a-\text{sen.}^2 a}{R}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{sen.}\ 3\,a=\dfrac{\text{sen.}\ a\ \cos.\ 2\,a+\text{sen.}\ 2\,a\ \cos.\ a}{R}\\ \cos.\ 3\,a=\dfrac{\cos.\ a\ \cos.\ 2\,a-\text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ 2\,a}{R},\end{cases}$$

y estas dos últimas nos proporcionan conocer sen. $3\,a$ y cos. $3\,a$, cuando se conozca sen. $2\,a$ y cos. $2\,a$.

12. La ecuacion sen. $2\,a=\dfrac{2\ \text{sen.}\ a\ \cos.\ a}{R}$ conduce tambien del seno de un arco $a$ á la expresion del seno de la mitad de dicho arco. Si sustituimos por cos. $a$ su valor $\sqrt{R^2-\text{sen.}^2\ a}$, la ecuacion anterior se mudará en

$$\text{sen.}\ 2\,a=\frac{2\ \text{sen.}\ a\sqrt{R^2-\text{sen.}^2 a}}{R},$$

elevando al cuadrado, y quitando el denominador, la última ecuacion da

$$R^2\ \text{sen.}^2\ 2\,a=4\ R^2\ \text{sen.}^2\ a-4\ \text{sen.}^4\ a,$$

tomando á sen. $a$ por incógnita en esta ecuacion, que puede resolverse del mismo modo que las de segundo grado, sale



$$\text{sen.}\ a=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2\pm\tfrac{1}{2}R\sqrt{R^2-\text{sen.}^2\ 2\,a}}.$$

Si se hace $2\,a=a'$, sacaremos $a=\dfrac{a'}{2}$, y por consiguiente

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a'=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2\pm\tfrac{1}{2}R\sqrt{R^2-\text{sen.}^2\ a'}}:$$

poniendo ahora en esta ecuacion, por $\sqrt{R^2-\text{sen.}^2\ a'}$ su valor cos. $a'$, se sacará

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a'=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2\pm\tfrac{1}{2}R\ \cos.\ a'},$$

multiplicando por 4 las cantidades que hay debajo del radical, y dividiendo despues por 2 toda la expresion, lo cual no cambia el valor de la anterior, se tendrá la siguiente

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a'=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\ R^2\pm2\ R\ \cos.\ a'}\ *.$$

13. Puede llegarse á este resultado por una construccion muy simple.

Si se divide el arco AM, fig. 6, en dos partes iguales, la cuerda AQM se hallará igualmente dividida en Fig. 6.

* Podríamos deducir el valor de sen. $\frac{1}{2}\,a$ mas sencillamente, partiendo de la ecuacion cos. $2\,a=\dfrac{\cos.^2 a-\text{sen.}^2 a}{R}$, hallado en el núm. 11.

En efecto, poniendo en ella por cos.² $a$ su valor $R^2-\text{sen.}^2\,a$, y reduciendo se cambia en $\cos.\ 2\,a=\dfrac{R^2-2\ \text{sen.}^2\ a}{R}$; de cuya expresion, despejando sen.² $a$, sale $\text{sen.}^2\ a=\frac{1}{2}(R^2-R\ \cos.\ 2\,a)$, que multiplicándola, y partiéndola por 2, y extrayendo despues la raiz cuadrada da

$$\text{sen.}\ a=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\ R^2-2\ R\ \cos.\ 2\,a}.$$

que si no es tan general como la del autor, está deducida mas fácilmente.

dos partes iguales, y QM será el seno de MN ó de la mitad de AM; el triángulo AMP, rectángulo en P, da

$$AM=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{AP}^2},$$

y como $AP=AC-CP=R-\cos. AM=R-\cos. a'$, y ademas $PM=\text{sen. } AM=\text{sen. } a'$, se tendrá

$$AM=\sqrt{\text{sen.}^2 a'+R^2-2R\cos. a'+\cos.^2 a'}$$

$$=\sqrt{2R^2-2R\cos. a'},$$

por lo que se inferirá

$$QM=\tfrac{1}{2}AQM=\tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2-2R\cos. a'}.$$

Por este método solo hemos hallado el segundo valor de sen. $\frac{1}{2}a'$, *el otro es M'Q'*; porque el arco MN'A', que compone con el AM la semicircunferencia, tiene el mismo seno PM, puesto que esta línea es la perpendicular bajada desde el extremo M al radio CA' que pasa por el otro extremo (5), y en la ecuacion de que hemos partido no se expresa cual de estos dos arcos es el que se trata de dividir, debemos pues hallar al mismo tiempo el seno de la mitad del primero y el de la mitad del segundo. Se tendrá por dicha construccion

$$A'M=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{A'P}^2}=\sqrt{\overline{PM}^2+(A'C+CP)^2}$$

$$=\sqrt{\text{sen.}^2 a'+(R+\cos. a')^2}$$

$$=\sqrt{\text{sen.}^2 a'+R^2+2R\cos. a'+\cos.^2 a'}$$

$$=\sqrt{2R^2+2R\cos. a'}$$

y por lo tanto

$$MQ'=\text{sen. }\tfrac{1}{2}a'=\tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2+2R\cos. a'}:$$



cuyo resultado es el primer valor de sen. $\frac{1}{2}a'$ sacado en el número anterior.

Debemos observar que aunque sen. $a'$ sea el mismo en los dos valores de sen. $\frac{1}{2}a'$, el arco $a'$ es diferente; para uno de ellos este arco es el AM, y para el otro A'M, que es el *suplemento* de AM. Mas adelante daremos nociones generales sobre los diferentes arcos que pueden tener el mismo seno, la misma tangente &c.

14. De lo que precede se infiere que el seno de un arco cualquiera AN es la mitad de la cuerda AM del arco doble ANM, y que la cuerda AM es dupla del seno del arco AN mitad de ANM, de modo que cuando los senos son conocidos se deduce de ellos las cuerdas, y *vice versa*.

15. No son pues los valores absolutos de los senos lo que es necesario saber calcular, y sí solo su relacion con el radio, á causa de ser suficiente conocer en todos los triángulos CPM, CP'M' &c., fig. 2, las relaciones que Fig. 2. los lados tienen entre sí. Por lo mismo puede tomarse, para mayor sencillez, el radio por unidad, y expresar los senos PM, P'M' &c. en partes decimales de esta unidad, ó como antiguamente, suponer este radio dividido en 100000 partes.

16. Es á propósito notar que la longitud de un arco es siempre menor que la de su tangente, y mayor que la de su seno. En efecto, si se toma debajo del radio AC, fig. 7, el arco AM'=AM, y se tira la cuerda MM' asi Fig. 7. como las tangentes MT, M'T', es fácil ver que estas tangentes deben encontrar al radio AC en un mismo punto, puesto que los triángulos CMT y CM'T son iguales. De dicha igualdad se deduce la de las líneas MT y M'T, y como tambien son iguales las líneas PM y PM',

y los arcos AM y AM′, se tendrá $2\,AM < 2\,MT$ y $2\,AM > 2\,PM$ á causa de que la longitud de un arco de círculo está comprendida entre las porciones correspondientes de los polígonos inscrito y circunscrito (*Geom.* 151)*; y por lo mismo se concluirá $AM < MT$, $AM > PM$.

Con este motivo haremos notar que la razon entre la tangente y el seno de un arco se aproxima continuamente á valer la unidad á medida que el arco disminuye; en efecto, de la ecuacion $\text{tang. } a = \frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a}$, suponiendo $R = 1$, se saca $\frac{\text{sen. } a}{\text{tang. } a} = \text{cos. } a$; y como cos. $a$ se aproxima continuamente á valer la unidad, se infiere que la tangente y el seno se aproximan tambien mas y mas á la igualdad, puesto que el *límite* (*Alg.* 234) de su relacion es la unidad.

17. De aqui se infiere que si el valor de la tangente y el del seno de un arco pequeño AM no difieren en cierto número de sus primeras cifras, estas mismas primeras cifras darán tambien un valor aproximado del arco. Tomando por ejemplo $PM = 0{,}0001$, se halla

* La proposicion dicha arriba es un caso particular de esta otra: *Las líneas que son convexas en toda su extension, son tanto mas largas cuanto ellas se apartan mas de la línea recta.* En efecto, si se tira á la curva ACB, fig. 8, interior á la curva AMB, una tangente DE, esta tangente será mas corta que el arco DME, y se tendrá $ADEB < AMB$. Tirando despues por los puntos H y L, intermedios entre A y C, C y B, las tangentes FG, IK, se formará una nueva línea quebrada AFGIKB, que será menor que la primera, puesto que $FG < FD + DG$, $IK < IE + EK$. Es evidente que se podrán construir del mismo modo una serie indefinida de líneas quebradas que irán continuamente disminuyendo á medida que ellas se aproximen á confundirse con la curva ABC, que por lo mismo será no solo menor que AMB, sino aun que todas las líneas quebradas de que hemos hablado.

Fig. 8.



$$CP = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{PM}^2} = 0{,}999999995,$$

y $$MT = \frac{CM \times PM}{CP} = 0{,}0001000000005,$$

valor que no difiere de PM sino en la décimatercia cifra decimal; se puede pues tomar este número por el valor del arco AM expresado en partes del radio *.

18. Para aplicar las fórmulas de los números 12, 11 y 10 es menester conocer por lo menos el seno de uno de los arcos comprendidos en el cuarto de círculo; hay dos de estos arcos, cuyos senos respectivos son fáciles de conocer, á saber, el cuadrante y su tercera parte. En efecto, *el seno del cuadrante no es otra cosa que el radio mismo del círculo, y el seno de la tercera parte del cuadrante es igual á la mitad del radio.* El primero de estos valores se ve claramente ser el dicho con solo mirar la figura 2; y el segundo resulta de que el lado del exágo-

* Puede esto probarse fácilmente del modo siguiente. En efecto, suponiendo como antes $R = 1$, se tiene $\text{tang. } a = \frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} = \frac{\text{sen. } a}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}$ (8,10); pero (*Alg. núm.* 124) $\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a} = 1 - \frac{1}{2}\text{sen.}^2 a - \frac{1}{8}\text{sen.}^4 a - \&c.$, y por lo mismo $\text{tang. } a = \frac{\text{sen. } a}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}$, se cambia en $\text{tang. } a = \frac{\text{sen. } a}{1 - \frac{1}{2}\text{sen.}^2 a - \frac{1}{8}\text{sen.}^4 a - \&c.}$, que haciendo la division se muda en

$$\text{tang. } a = \text{sen. } a + \tfrac{1}{2}\text{sen.}^3 a + \tfrac{3}{8}\text{sen.}^5 a + \&c.$$

Es pues claro que mientras sen. $a$ sea una fraccion decimal muy pequeña, el término $\frac{1}{2}\text{sen.}^3 a$ no podrá influir sino sobre las últimas cifras de la expresion de tang. $a$, y que en las primeras se tendrá $\text{tang. } a = \text{sen. } a$. Esto se ve claramente para cuando $\text{sen. } a = 0{,}0001$, pues en tal caso $\frac{1}{2}\text{sen.}^3 a$ valdrá 0,0000000000005; cuyo resultado solo puede cambiar la décimatercia cifra decimal del valor de tang. $a$; menos pues influirán en dicho valor los demas términos $\frac{3}{8}\text{sen.}^5 a + \&c.$

no regular, ó lo que es lo mismo, la cuerda de las $\frac{2}{3}$ partes del cuadrante, fig. 9, es igual al radio (*Geom.* 146); la mitad de esta cuerda será pues el seno del $\frac{1}{3}$ del cuadrante (14). Fig. 9.

Partiendo pues del cuadrante entero, la fórmula

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\, a' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R \cos. a'}$$

da el seno de la mitad, despues el de la mitad de esta mitad, ó de la cuarta parte del cuadrante, y conduce á todas las fracciones comprendidas en la serie

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32}\ \&c.$$

La misma fórmula cuando se parte de la tercera parte del cuadrante, determina sucesivamente el seno de las fracciones

$$\tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{12},\ \tfrac{1}{24},\ \tfrac{1}{48}\ \&c.$$

de este arco.

Por lo dicho se ve que si el arco estuviese dividido en un número de partes igual á alguno de los denominadores de las fracciones anteriores, se hallaria directamente el seno de cada una de sus partes, y se formaria de ellos una tabla, escribiéndoles al lado de los arcos á quienes perteneciesen; pero esto no sucede asi: los astrónomos indianos parece han sido los únicos que han dividido el cuadrante en 24 partes para calcular los senos de una, dos &c. de estas partes. Un uso muy antiguo, y otras varias razones, han hecho adoptar otras divisiones diferentes de las progresiones arriba indicadas.

19. En la mayor parte de la Europa se considera dividida la circunferencia entera en 360 partes iguales, que se llaman *grados;* cada uno de estos se subdivide en 60 partes iguales llamadas *minutos;* cada uno de estos minutos en 60 partes llamadas *segundos;* cada uno de estos en otras 60 llamadas *terceros* &c. La señal de los grados es el caracter ° colocado á la derecha del número, y un poco encima; la de los minutos es ′; la de los segundos es ″; la de los terceros ‴ &c.: de suerte que 42°, 31′, 14″, 5‴ significa 42 grados, 31 minutos, 14 segundos, 5 terceros.



A causa de que en la medida de los ángulos no se tiene en consideracion el valor absoluto de los arcos, y sí solo á su relacion con la circunferencia entera, parecia muy natural el tomarla por unidad, y expresar los arcos por fracciones cualesquiera, ó si se quiere decimales. Sin embargo algunas consideraciones particulares han determinado á los sabios encargados de la reforma de pesos y medidas á tomar el ángulo recto por la unidad de los ángulos, y por consiguiente el cuarto de círculo ó *cuadrante* por la unidad de los arcos. Ellos han dividido pues en 100 partes iguales al tal cuadrante, y los han llamado *grados;* cada uno de estos le han subdividido en 100 partes iguales llamadas *minutos;* y de la misma manera puede continuarse la subdivision segun la progresion decimal.

Esta division es muy empleada en Francia: seria útil que todas las naciones la adoptasen, pues por ella se abrevian mucho los cálculos; pero mientras esto se verifica, como puede esperarse del progreso de las luces, nosotros seguiremos la primera, la cual, para no confundirla con la otra, la llamamos *sexagesimal*, y á la última *decimal* *.

* Parece que las principales razones que han hecho escoger el ángulo recto por unidad son: 1.° que el círculo entero, hablando con propiedad, nunca mide á un ángulo; puesto que en semejante caso el radio movible CM, fig. 2, ha venido á aplicarse sobre el radio CA: Fig. 2.
2.° que el seno, á cuya línea se refieren todas las demas trigonométri-

20. Representando por 1 el radio del círculo sobre el cual nos proponemos construir las tablas, y la circun-
Fig. 10. ferencia por $2\pi$, el seno de AB, fig. 10, ó sen. $\frac{1}{2}\pi = 1$; se tendrá ademas cos. $\frac{1}{2}\pi = 0$; haciendo pues $a' = \frac{1}{2}\pi$, la fórmula sen. $\frac{1}{2}a' = \sqrt{2R^2 - 2R \cos. a'}$ (13) hace ver que el seno de la mitad del cuadrante ó de $\frac{1}{4}\pi = 45°$, es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ *.

Tomando por unidad el arco $AB = \frac{1}{2}\pi$, AM será $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$: se tendrá pues

$$\text{sen.}\,\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \cos.\,\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707106781186.$$

Ahora bien, si se hace $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = a'$, se hallará

$$\text{sen.}\,\frac{1}{2}a' = \text{sen.}\,\frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = 0{,}382683432365,$$
$$\cos.\,\frac{1}{2}a' = \cos.\,\frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = 0{,}923879532511;$$

pero continuando de este modo en dividir cada arco en dos partes iguales, no se llegará á caer exactamente sobre una de las partes alicuotas del cuadrante; solo se llegarán á tener arcos mas y mas pequeños, y que por esta razon se aproximarán á ser iguales á sus senos (17). Por ejemplo, á la décima cuarta division se llegará á un arco que solo será $\frac{1}{2^{14}}$ del cuadrante, ó $\frac{1}{16384}$ de $\frac{1}{2}\pi$, y cuyo se-

cas, toma en toda la extension del cuadrante ó del ángulo recto todos los valores que puede tener.

Fig. 10. * Nos podemos tambien convencer de esto á priori, á causa de que el triángulo CMP, fig. 10, es rectángulo isósceles en el caso que se considera, y por lo mismo dará

$$2\overline{PM}^2 = \overline{CM}^2 = 1$$

de donde sale

$$\overline{PM}^2 = \tfrac{1}{2},\ \text{y}\ PM = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{2 \times \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$



no es 0,0000958737990955 *, menor por consiguiente que 0,0001; la pequeñez de este arco es tal que él no diferirá de su seno en las 12 primeras cifras decimales.

Con mayor razon podemos decir lo mismo para arcos aun menores; pero es claro que todos los arcos que se confunden con sus senos y sus tangentes son proporcionales á estas líneas: resulta pues

$$\text{sen.}\,\frac{\frac{1}{2}\pi}{16384} : \text{sen.}\,\frac{\frac{1}{2}\pi}{324000} :: \frac{\frac{1}{2}\pi}{16384} : \frac{\frac{1}{2}\pi}{324000}$$
$$:: 324000 : 16384,$$

de donde se infiere

$$\text{sen.}\,\frac{\frac{1}{2}\pi}{324000} = \frac{16384 \times \text{sen.}\,\frac{\frac{1}{2}\pi}{16384}}{324000}$$

$$\text{pero sen.}\,\frac{\frac{1}{2}\pi}{324000} = \text{sen.}\,\frac{324000''}{324000} = \text{sen.}\,1'',$$

$$\text{y sen.}\,\frac{\frac{1}{2}\pi}{16384} = 0{,}000095873799,$$

luego sen. $1'' = 0{,}00000484813679$;

valor exacto por lo menos en las 12 primeras cifras decimales. Por la misma razon se hallará

$$\text{sen.}\,2'' = 2\ \text{sen.}\,1''$$

* Este número le hemos calculado con 16 cifras, que el autor solo le tenia calculado con 12; y por consiguiente no podia verse en qué cifra era en la que el seno de $\frac{1}{16384}\frac{\pi}{2}$, diferia del arco que le corresponde: calculemos pues el tal arco. Para esto se sabe que 3,1415926535897932 (Lagni, *Memorias de la Academia de Paris*), representa la semicircunferencia del círculo, cuyo radio $= 1$; por lo tanto, el cuadrante ó $\frac{1}{2}\pi$ valdrá 1,5707963267948966, y el arco $\frac{1}{16384}\frac{\pi}{2}$ valdrá $\frac{1{,}5707963267948966}{16384}$, cuyo valor es 0,0000958737992428; el cual no difiere del seno de $\frac{1}{16384}\frac{\pi}{2}$, que es 0,0000958737990955, sino desde la cifra 13 en adelante.

$$\text{sen. } 3'' = 3 \text{ sen. } 1''$$
$$\text{sen. } 4'' = 4 \text{ sen. } 1''$$
&c.

Si se tiene cuidado de calcular al mismo tiempo el coseno y la tangente de cada uno de estos arcos, se verá que se puede seguir este camino hasta el arco cuyo seno y tangente se confunden en las 12 primeras cifras decimales.

Si solo se quisiese tener los valores aproximados hasta la octava cifra decimal, se podrá continuar hasta el arco de $1'$.

Para elevarse despues á arcos mayores, se emplearán las ecuaciones

$$\text{sen. } 2a = 2 \text{ sen. } a \cos. a$$
$$\cos. 2a = \cos.^2 a - \text{sen.}^2 a$$
$$\text{sen. } (a \pm b) = \text{sen. } a \cos. b \pm \text{sen. } b \cos. a$$
$$\cos. (a \pm b) = \cos. a \cos. b \mp \text{sen. } a \text{ sen. } b;$$

haciendo sucesivamente $a = 1'$, $a = 2'$ &c. en las dos primeras, se deducirá de ellas sen. $2'$, cos. $2'$; sen. $4'$, cos. $4'$ &c.; y haciendo despues $a = 1'$, $b = 2'$, $a = 2'$, $b = 3'$ &c., se obtendrá por medio de las dos últimas

sen. $3'$, cos. $3'$; sen. $5'$, cos. $5'$ &c.

Lo expuesto basta para hacer concebir cómo se han podido formar las tablas trigonométricas. Existen otros métodos mas expeditos para calcular los senos de cualesquiera arcos por medio de series convergentes que se deducen de las ecuaciones del núm. 11. Se las hallará en la introduccion al *Tratado del cálculo diferencial é integral*.

21. Para facilitar los cálculos se ha sustituido hace largo tiempo á los valores de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes, sus logaritmos; y en la mayor parte de las tablas solo se hallan estos últimos; de suerte que por



su medio se resuelve siempre la una ó la otra de estas cuestiones.

1.ª *Siendo dado un arco, hallar el logaritmo de su seno ó de su coseno, ó de su tangente ó de su cotangente.*

2.ª *Conociendo el logaritmo del seno ó del coseno, ó de la tangente ó de la cotangente de un arco, buscar este arco.*

La solucion de estas cuestiones depende de la disposicion de las tablas, disposicion que no es la misma en todas, y que se halla siempre explicada al principio de cada una de ellas; esta es la razon por que no hablamos aqui de la tal disposicion y uso. Nos limitaremos á indicar las tablas de Callet, como las mejores respecto á la division *sexagesimal*, y las de Bordá ó las de Hobert é Ideler respecto á la *decimal*.

Las tablas trigonométricas solo abrazan la extension del cuarto del círculo; sin embargo sirven para cualesquiera arcos por muy grandes que ellos sean; basta para comprender esto consultar los números 8, 9, 10, y mas particularmente el último y los siguientes.

22. Veamos ahora si las expresiones algebraicas sacadas en el núm. 11 corresponden á las diversas circunstancias que presenta el núm. 10. Para esto hagamos $a = \frac{1}{2}\pi$ en las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\cos. (a \pm b) &= \cos. a \cos. b \mp \text{sen. } a \text{ sen. } b\\ \text{sen. } (a \pm b) &= \text{sen. } a \cos. b \pm \text{sen. } b \cos. a\end{aligned}\right\} \text{(A)}.$$

Observando que en el dicho supuesto cos. $a = \cos. \frac{1}{2}\pi = 0$, y que sen. $a = \text{sen. } \frac{1}{2}\pi = 1$, se hallará

$$\cos. \left(\tfrac{1}{2}\pi \pm b\right) = \mp \text{sen. } b,$$
$$\text{sen. } \left(\tfrac{1}{2}\pi \pm b\right) = \cos. b.$$

Es menester notar dos cosas en estas expresiones, á saber, su valor absoluto, y el signo de que ellas estan afectadas.

Por lo que hace al valor, él se verifica sobre la figura; porque siendo AB, fig. 4, igual $\frac{1}{2}\pi$, si se toma el arco BM′ por valor de $b$, el arco AM′ será $\frac{1}{2}\pi+b$; pero P′M′, que es el seno de A′M′, y tambien el de AM′, será al mismo tiempo el coseno de BM′ ó de $b$, mientras que CP′ será el seno de dicho arco $b$.

Fig. 4.

Por lo que hace al signo − que afecta á cos. $(\frac{1}{2}\pi+b)$, quiere decir que si se miran como positivos los senos y cosenos de un arco menor que la cuarta parte de la circunferencia, el coseno de un arco mayor será negativo mientras que su seno permanecerá positivo. Si se hace $b=\frac{1}{2}\pi$, saldrá cos. $\pi=-1$, sen. $\pi=0$.

Suponiendo despues en las ecuaciones (A), $a=\pi$, se obtendrá segun lo que precede

$$\text{cos. }(\pi\pm b)=-\text{cos. }b$$
$$\text{sen. }(\pi\pm b)=\mp\text{sen. }b.$$

El valor absoluto de estas fórmulas puede verificarse con tanta facilidad como el de las anteriores: su signo da á entender que todo arco comprendido entre $\pi$ y $\frac{3}{2}\pi$, tendrá su seno y coseno negativos; y cuando $b=\frac{1}{2}\pi$, se sacará

$$\text{cos. }\tfrac{3}{2}\pi=0\text{, sen. }\tfrac{3}{2}\pi=-1.$$

En fin cuando $a=\frac{3}{2}\pi$, las ecuaciones (A) se reducen, en virtud de los valores anteriores, á

$$\text{cos. }(\tfrac{3}{2}\pi\pm b)=\pm\text{sen. }b,$$
$$\text{sen. }(\tfrac{3}{2}\pi\pm b)=-\text{cos. }b;$$

de aqui se infiere que todo arco comprendido entre $\frac{3}{2}\pi$ y $\frac{4}{2}\pi$ ó $2\pi$, tiene su coseno positivo y su seno negativo.

23. Si reunimos los resultados expuestos en el número anterior, se hallará:

1.° Que desde el punto A hasta el punto A′, en el cual el arco ABA′$=\pi$, los senos son positivos.



2.° Que desde el punto A′ hasta el punto A, en el cual el arco ABA′B′A$=2\pi$, esto es, desde $\pi$ hasta $2\pi$, los senos son negativos.

3.° Que desde el punto A hasta el punto B, en el cual el arco AB$=\frac{1}{2}\pi$, los cosenos son positivos.

4.° Que desde el punto B hasta el punto B′, en el cual el arco ABA′B′$=\frac{3}{2}\pi$, esto es, desde $\frac{1}{2}\pi$ á $\frac{3}{2}\pi$, los cosenos son negativos.

5.° En fin que desde B′ hasta el punto A, en el cual el arco ABA′B′A$=2\pi$, esto es, desde $\frac{3}{2}\pi$ á $2\pi$, los cosenos son positivos.

Se notará pues que los senos cambian de signo cuando estan situados debajo del diámetro AA′, y los cosenos cuando pasan de un lado al otro del punto C, ó que caen á distintos lados del diámetro BB′ perpendicular al primero.

Estos resultados obtenidos de la generalidad de las fórmulas

$$\text{sen. }(a\pm b)=\text{sen. }a\text{ cos. }b\pm\text{sen. }b\text{ cos. }a$$
$$\text{cos. }(a\pm b)=\text{cos. }a\text{ cos. }b\mp\text{sen. }a\text{ sen. }b,$$

no son otra cosa que los ya dichos núm. 10, deducidos alli de los principios expuestos en los núms. 65, 66, 72, 75 de los elementos de álgebra: esto debia ser asi, pues las fórmulas estan generalizadas en virtud de los tales principios, y asi es que los deben contener implícitamente.

24. Siguiendo el curso de las tangentes se hallará que aumentan continuamente desde el punto A, fig. 10, hasta el punto B, en el cual el arco AM es igual á $\frac{1}{2}\pi$. En este punto, confundiéndose la secante NC con CB, es paralela á la tangente AN, y no la vuelve á encontrar; de suerte que el arco AB no tiene, hablando con propiedad, tangente trigonométrica. Sin embargo, se dice que

Fig. 10.

su tangente es infinita; pero debe entenderse por esta expresion que tomando el punto M tan cerca del B como sea necesario, se hallará una tangente AN mayor que cualquier cantidad que se quiera. Esto mismo prueba la ecuacion $\text{tang. } a = \frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a}$, que da para tang. $a$ un valor tanto mayor cuanto menor sea cos. $a$, ó que el punto M se aproxime mas á estar en B.

Cuando $a=45$, resulta cos. $a=$sen. $a$, y por lo mismo tang. $45°=1$.

Fig. 10. Al mismo resultado se llega por medio del triángulo CAN, fig. 10, que es isósceles en el caso que se considera, pues que el ángulo CCN vale la mitad de un recto, y esto exige que valga lo mismo el ANC, en cuyo caso la tangente AN es igual al radio.

Fig. 4. Cuando el ~~arco AM, fig. 4, es~~ mayor que $\frac{1}{2}\pi$, el radio CM no encuentra á la línea AN encima del diámetro, y sí debajo. La verdadera tangente AN′ es igual, como es fácil hacerse cargo, á A′$n$′ tangente del arco A′M′, suplemento de AM′, pero se halla colocada en sentido opuesto. En el tercer cuadrante la tangente, que ha sido nula en el punto A′, vuelve á pasar encima del diámetro AA′, y AN es aun la tangente del arco AA′M″. Resultando despues el radio otra vez paralelo á AN en el punto B′, la tangente vuelve á ser infinita en este punto; pasado el cual, la tangente vuelve á estar situada debajo del diámetro; en efecto, el arco AA′M‴, por ejemplo, tiene claramente por tangente á AN′.

25. Examinemos ahora lo que resulta de la expresion algebraica

$$\text{tang. } a = \frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a}.$$



Es claro que su valor será positivo en todos los casos en que el seno y el coseno sean del mismo signo, lo cual se verifica desde 0° hasta $\frac{1}{2}\pi$, y desde $\pi$ á $\frac{3}{2}\pi$; el tal valor será negativo cuando tengan signos diversos el seno y el coseno, lo cual sucede desde $\frac{1}{2}\pi$ á $\pi$, y desde $\frac{3}{2}\pi$ á $2\pi$; de lo cual se infiere que para las tangentes asi como para los senos y cosenos, las mudanzas de signos corresponden á las mudanzas de situacion. Del mismo modo se hallará que las cotangentes son positivas desde 0° hasta $\frac{1}{2}\pi$, desde $\pi$ á $\frac{3}{2}\pi$; y negativas desde $\frac{1}{2}\pi$ á $\pi$, y desde $\frac{3}{2}\pi$ á $2\pi$.

26. Algunas veces se hallan en los cálculos arcos negativos, como ya hemos considerado, núm. 10; su seno y coseno pueden tambien determinarse por las fórmulas del núm. 11. La expresion de sen. $(a-b)$, cambiando de signo cuando se cambia en ella $a$ en $b$ y $b$ en $a$, hace ver que sen. $(b-a)=-$sen. $(a-b)$; asi pues cuando $a>b$, el arco negativo $b-a$ tiene un signo negativo.

Si se construyese la fig. 4* en esta hipótesis, tomando en ella AM$=b$, MN$=a$, y llevando este último arco por debajo del punto M para obrar como se ha dicho en el núm. 11, el arco AN′ se hallaria debajo de AC en lugar de estar por encima: el seno Q′N′ cambiaria pues de sentido, asi como el arco. Por lo que hace á los cosenos, ellos quedarian del mismo lado; y por las fórmulas se hallaria que Fig. 4.*

$$\text{cos. } (b-a)=\text{cos. } (a-b).$$

Esta correspondencia entre las fórmulas del núm. 11, y las consideraciones geométricas deducidas de la figura, son precisas á causa de que las fórmulas dichas estan generalizadas en virtud de las tales consideraciones geométricas, y por consiguiente las deben contener implícitamente.

27. La proposicion demostrada en el núm. 11 nos conduce á muchas consecuencias importantes: algunas de ellas serán necesarias en adelante; razon por que las colocaremos aqui.

1.° Sumando entre sí las dos ecuaciones

$$\text{sen.}\ (a+b)=\frac{\text{sen.}\ a\ \text{cos.}\ b+\text{sen.}\ b\ \text{cos.}\ a}{R}$$

$$\text{sen.}\ (a-b)=\frac{\text{sen.}\ a\ \text{cos.}\ b-\text{sen.}\ b\ \text{cos.}\ a}{R},$$

se sacará

$$\text{sen.}\ (a+b)+\text{sen.}\ (a-b)=\frac{2\ \text{sen.}\ a\ \text{cos.}\ b}{R},$$

de la cual sale

$$\text{sen.}\ a\ \text{cos.}\ b=\frac{R}{2}\ \text{sen.}\ (a+b)+\frac{R}{2}\ \text{sen.}\ (a-b).$$

2.° Restando ~~la segunda ecuacion~~ de la primera, se tendrá

$$\text{sen.}\ (a+b)-\text{sen.}\ (a-b)=\frac{2\ \text{sen.}\ b\ \text{cos.}\ a}{R},$$

de la que se infiere

$$\text{sen.}\ b\ \text{cos.}\ a=\frac{R}{2}\ \text{sen.}\ (a+b)-\frac{R}{2}\ \text{sen.}\ (a-b).$$

Cuando $a=b$, esta fórmula y la anterior dan

$$\text{sen.}\ a\ \text{cos.}\ a=\frac{R}{2}\ \text{sen.}\ 2\ a.$$

3.° Sumando entre sí las dos ecuaciones

$$\text{cos.}\ (a+b)=\frac{\text{cos.}\ a\ \text{cos.}\ b-\text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b}{R},$$

$$\text{cos.}\ (a-b)=\frac{\text{cos.}\ a\ \text{cos.}\ b+\text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b}{R},$$

se hallará

$$\text{cos.}\ (a+b)+\text{cos.}\ (a-b)=\frac{2\ \text{cos.}\ a\ \text{cos.}\ b}{R},$$



de la cual se deduce estotra

$$\text{cos.}\ a\ \text{cos.}\ b=\frac{R}{2}\ \text{cos.}\ (a+b)+\frac{R}{2}\ \text{cos.}\ (a-b).$$

Cuando $a=b$, esta fórmula da, observando que el coseno es igual al radio cuando el arco es nulo, la ecuacion

$$\text{cos.}^2\ a=\frac{R}{2}\ \text{cos.}\ 2\ a+\frac{R^2}{2}$$

4.° Restando la primera ecuacion de la segunda, se obtendrá

$$\text{cos.}\ (a-b)-\text{cos.}\ (a+b)=\frac{2\ \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b}{R},$$

de la cual se infiere

$$\text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b=\frac{R}{2}\ \text{cos.}\ (a-b)-\frac{R}{2}\ \text{cos.}\ (a+b).$$

Si se hace $a=b$, esta fórmula da

$$\text{sen.}^2\ a=\frac{R^2}{2}-\frac{R}{2}\ \text{cos.}\ 2\ a.$$

5.° Si se hace $a+b=a'$, $a-b=b'$, se hallará, sumándolas entre sí, la ecuacion $2\ a=a'+b'$, y restando la segunda de la primera la $2\ b=a'-b'$; de las dos últimas se deducen estotras

$$a=\frac{a'+b'}{2},\ b=\frac{a'-b'}{2}.$$

Poniendo ahora los valores de $a$, $b$, $a+b$ y $a-b$ en las expresiones de *sen. a cos. b*, *sen. b cos. a*, *cos. a cos. b*, *sen. a sen. b*, obtenidas anteriormente, se hallará

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (a'+b')\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (a'-b')=\frac{R}{2}\ (\text{sen.}\ a'+\text{sen.}\ b')$$

$$\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (a'+b')\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (a'-b')=\frac{R}{2}\ (\text{sen.}\ a'-\text{sen.}\ b')$$

$$\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (a'+b')\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (a'-b')=\frac{R}{2}\ (\text{cos.}\ a'+\text{cos.}\ b')$$

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a'+b')\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a'-b') = \frac{R}{2}(\text{cos.}\ b' - \text{cos.}\ a').$$

Dividiendo la segunda de estas fórmulas por la primera se hallará

$$\frac{\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(a'+b')\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a'-b')}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a'+b')\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a'-b')}{\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(a'-b')},$$

$$\frac{\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(a'+b')}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\text{sen.}\ a' - \text{sen.}\ b'}{\text{sen.}\ a' + \text{sen.}\ b'}.$$

Observando ahora que $\frac{\text{sen. A}}{\text{cos. A}} = \frac{\text{tang. A}}{R}$ (8), y que por consiguiente $\frac{\text{cos. A}}{\text{sen. A}} = \frac{R}{\text{tang. A}}$, se obtendrá

$$\frac{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a'-b')}{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\text{sen.}\ a' - \text{sen.}\ b'}{\text{sen.}\ a' + \text{sen.}\ b'}.$$

Del mismo modo puede deducirse de las dos últimas fórmulas referidas antes, que

$$\frac{\text{cos.}\ b' - \text{cos.}\ a'}{\text{cos.}\ a' + \text{cos.}\ b'} = \frac{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a'+b')\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a'-b')}{R^2}.$$

6.° Dividiendo la expresion de sen. $(a \pm b)$ por la de cos. $(a \pm b)$, se hallará

$$\frac{\text{sen.}\ (a \pm b)}{\text{cos.}\ (a \pm b)} = \frac{\text{sen.}\ a\ \text{cos.}\ b \pm \text{sen.}\ b\ \text{cos.}\ a}{\text{cos.}\ a\ \text{cos.}\ b \mp \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b};$$

dividiendo despues el numerador y el denominador de la fraccion del segundo miembro por cos. $a$ cos. $b$, ella se muda en

$$\frac{\frac{\text{sen.}\ a}{\text{cos.}\ a} \pm \frac{\text{sen.}\ b}{\text{cos.}\ b}}{1 \mp \frac{\text{sen.}\ a}{\text{cos.}\ a} \cdot \frac{\text{sen.}\ b}{\text{cos.}\ b}};$$

y como en general $\frac{\text{sen. A}}{\text{cos. A}} = \frac{\text{tang. A}}{R}$ (8), se obtendrá por lo mismo

$$\frac{\text{tang.}\ (a \pm b)}{R} = \frac{\frac{\text{tang.}\ a}{R} \pm \frac{\text{tang.}\ b}{R}}{1 \mp \frac{\text{tang.}\ a}{R} \cdot \frac{\text{tang.}\ b}{R}}$$

$$= \frac{R\,(\text{tang.}\ a \pm \text{tang.}\ b)}{R^2 \mp \text{tang.}\ a\ \text{tang.}\ b}:$$

y por último

$$\text{tang.}\ (a \pm b) = \frac{R^2\,(\text{tang.}\ a \pm \text{tang.}\ b)}{R^2 \mp \text{tang.}\ a\ \text{tang.}\ b}.$$

Acordándose que cot. $A = \frac{R^2}{\text{tang. A}}$ (9), se hallará

$$\text{cot.}\ (a \pm b) = \frac{R^2}{\text{tang.}\ (a \pm b)} = \frac{R^2 \mp \text{tang.}\ a\ \text{tang.}\ b}{\text{tang.}\ a \pm \text{tang.}\ b}$$

$$= \frac{R^2 \mp \frac{R^2}{\text{cot.}\ a} \cdot \frac{R^2}{\text{cot.}\ b}}{\frac{R^2}{\text{cot.}\ a} \pm \frac{R^2}{\text{cot.}\ b}};$$

y reduciendo sale por último

$$\text{cot.}\ (a \pm b) = \frac{\text{cot.}\ a\ \text{cot.}\ b \mp R^2}{\text{cot.}\ b \pm \text{cot.}\ a}.$$

28. La ecuacion hallada en el número anterior

$$\frac{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a'-b')}{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\text{sen.}\ a' - \text{sen.}\ b'}{\text{sen.}\ a' + \text{sen.}\ b'},$$

nos manifiesta que *la suma de los senos de dos arcos es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de estos arcos es á la tangente de la mitad de su diferencia.* Este mismo resultado puede encontrarse fácilmente por una construccion geométrica muy elegante.

Representemos por AM y AN, fig. 11, los dos Fig. 11.

arcos $a'$ y $b'$, se tendrá MP$=$sen. $a'$, NQ$=$sen. $b'$; tirando NC paralela al diámetro AB, prolongando MP hasta M$'$, resultará

$$\text{MR}=\text{MP}-\text{NQ}=\text{sen. } a'-\text{sen. } b',$$
$$\text{M'R}=\text{M'P}+\text{NQ}=\text{sen. } a'+\text{sen. } b' \; (14).$$

Hecho esto, si desde el punto C como centro y con un radio CD, igual al del círculo ACB, se describe un arco EDG, y despues se tira al punto D de este arco una tangente terminada por las rectas CM y CM$'$; es visible que DF y DH serán las tangentes de los arcos DE y DG, que medirán los ángulos MCN y NCM$'$, y como estos ángulos tienen su vértice en la circunferencia del círculo ACB, ellos tendrán tambien por medida la mitad de

$$\text{NM}=\text{AM}-\text{AN}=a'-b',$$

y la de

$$\text{NM'}=\text{AM'}+\text{AN}=a'+b':$$

por lo mismo se inferirá

$$\text{DF}=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a'-b'),\ \text{DH}=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a'+b').$$

Pero siendo MM$'$ y FH paralelas, se tendrá la proporcion

$$\text{MR} : \text{M'R} :: \text{DF} : \text{DH},$$

en la cual podemos poner por las líneas sus valores analiticos, y se sacará

sen. $a'-$ sen. $b'$ : sen. $a'+$ sen. $b'$ :: tang. $\frac{1}{2}$ $(a'-b')$ : tang. $\frac{1}{2}$ $(a'+b')$, cuyo resultado es el mismo que ibamos á buscar.

Seria fácil modificar la construccion anterior, para que ella nos proporcionase deducir las diversas ecuaciones análogas á la que acaba de demostrarse.

29. Como acontece muchas veces tener que hacer uso de las fórmulas que hemos sacado anteriormente, se



se

R.(8,10), cot. $a=\frac{R\sqrt{\ }}{}$), cosec. $a=\frac{R^2}{\text{sen. } a}$,

R

ta(8,10), cot. $a=\frac{R.}{\sqrt{R^2-}}$), cosec. $a=\frac{R^2}{\sqrt{R^2-\cos.^2 a}}$.....(10),

se.....(8), cot. $a=\frac{R^2}{\text{tang.}}$), cosec. $a=\frac{R.\sqrt{R^2+\text{tang.}^2 a}}{\text{tang. } a}$ (7,8),

c.....(6), cot. $a=\frac{}{\sqrt{\text{sec.}}}$), cosec. $a=\sqrt{R^2+\cot.^2 a}$.....(7),

c$R^2$ (7,8), cot. $a=\sqrt{\frac{\text{sec.}}{\text{cose}}}$), cosec. $a=\frac{R\,.\,\text{sec. } a}{\sqrt{\text{sec.}^2 a-R^2}}$.(6,7,8),

se $a+$ sen. $b=\frac{2}{R}$ sen. $\frac{1}{2}$ ... $b$ ... $b$ $=\frac{\text{sen. } (a+b)}{\text{sen. } (a-b)}$

se $a-$ sen. $b=\frac{2}{R}$ cos. $\frac{1}{2}$ ... $b$ $=\frac{\text{tang. } a\,.\,\text{tang. } b}{R^2}$

c $a+$ cos. $b=\frac{2}{R}$ cos. $\frac{1}{2}$ ... $\frac{\text{tang. } a\,.\,\text{tang. } b}{R^2}$ . $\frac{\text{sen. } (a+b)}{\text{sen. } (a-b)}$

t $\frac{a-\cos.\ b}{a-\text{sec. } b}=\frac{2}{\text{tang } \frac{1}{2}(}$ sen. $\frac{1}{2}$ ... $\frac{\text{tang. } b}{R^2}$ . $\frac{\text{sen. } (a+b)}{\text{tang. } (b\ \ a)}$

t $\frac{+\cos. b}{-\cos. b}=\frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+}{\text{tang. } \frac{1}{2}(a+b}$ ... $\frac{\cot. a}{R}$ . $\frac{\text{sen. } (a-b)}{\cos. (a+b)}$

$\frac{b}{b}=-\frac{\cos. (a-b)}{\cos. (a+b)}$

# CUADRO DE LAS FORMULAS TRIGONOMETRICAS MAS USADAS.

$$\left.\begin{aligned}&\text{sen.}^2 a+\text{cos.}^2 a=R^2 \ldots(10)\\&R^2+\text{tang.}^2 a=\text{sec.}^2 a \ldots(6)\\&R^2+\text{cot.}^2 a=\text{cosec.}^2 a \ldots(7)\end{aligned}\right\}$$

$$\text{tang.}\ a=\frac{R\ .\ \text{sen.}\ a}{\text{cos.}\ a}\ldots(8),\quad \text{sec.}\ a=\frac{R^2}{\text{cos.}\ a}\ldots(8),\quad \text{cot.}\ a=\frac{R\ .\ \text{cos.}\ a}{\text{sen.}\ a}\ldots(9),\quad \text{cosec.}\ a=\frac{R^2}{\text{sen. A}},$$

$$\text{sen.}\ a=\sqrt{R^2-\text{cos.}^2 a}\ldots(10),\quad \text{sen.}\ a=\frac{R\ .\ \text{tang.}\ a}{\sqrt{R^2+\text{tang.}^2 a}}\ldots(6,8),\quad \text{sen.}\ a=\frac{R}{\text{sec.}\ a}\sqrt{\text{sec.}^2 a-1}\ .(6,8),$$

$$\text{sen.}\ a=\frac{R^2}{\sqrt{R^2+\text{cot.}^2 a}}\ldots(7),\quad \text{sen.}\ a=\frac{R^2}{\text{cosec.}\ a},$$

$$\text{cos.}\ a=\sqrt{R^2-\text{sen.}^2 a}\ldots(10),\quad \text{cos.}\ a=\frac{R^2}{\sqrt{R^2+\text{tang.}^2 a}}(6,8),\quad \text{cos.}\ a=\frac{R\ .\ \text{cot.}\ a}{\sqrt{R^2+\text{cot.}^2 a}}(6,8),$$

$$\text{cos.}\ a=\frac{R^2}{\text{sec.}\ a}\ldots(8),\quad \text{cos.}\ a=\frac{R\sqrt{\text{cosec.}^2 a-R^2}}{\text{cosec.}\ a}\ldots(9),$$

$$\text{tang.}\ a=\frac{R\ \text{sen.}\ a}{\sqrt{R^2-\text{sen.}^2 a}}\ldots(8,10),\quad \text{tang.}\ a=\frac{R\sqrt{R^2-\text{cos.}^2 a}}{\text{cos.}\ a}(8,10),\quad \text{tang.}\ a=\frac{R^2}{\text{cot.}\ a}\ldots(8),$$

$$\text{tang.}\ a=\sqrt{\text{sec.}^2 a-R^2}\ldots(6),\quad \text{tang.}\ a=\frac{R^2}{\sqrt{\text{cosec.}^2 a-R^2}}(7,8),$$

$$\text{cot.}\ a=\frac{R\sqrt{R^2-\text{sen.}^2 a}}{\text{sen.}\ a}.(9,10),\quad \text{cot.}\ a=\frac{R\ .\ \text{cos.}\ a}{\sqrt{R^2-\text{cos.}^2 a}}\ldots(9,10),\quad \text{cot.}\ a=\frac{R^2}{\text{tang.}\ a}\ldots(8),$$

$$\text{cot.}\ a=\frac{R^2}{\sqrt{\text{sec.}^2 a-R^2}}\ldots(8,6),\quad \text{cot.}\ a=\sqrt{\text{cosec.}^2 a-R^2}\ldots(7),$$

$$\text{sec.}\ a=\frac{R^2}{\sqrt{R^2-\text{sen.}^2 a}}\ldots(8,10),\quad \text{sec.}\ a=\frac{R^2}{\text{cos.}\ a}\ldots(8),\quad \text{sec.}\ a=\sqrt{R^2+\text{tang.}^2 a}\ldots(6),$$

$$\text{sec.}\ a=\frac{R\sqrt{R^2+\text{cot.}^2 a}}{\text{cot.}\ a}\ .(6,8),\quad \text{sec.}\ a=\frac{R\ .\ \text{cosec.}\ a}{\sqrt{\text{cosec.}\ c^2 a-R^2}}(6,7,8),$$

$$\text{cosec.}\ a=\frac{R^2}{\text{sen.}\ a},\quad \text{cosec.}\ a=\frac{R^2}{\sqrt{R^2-\text{cos.}^2 a}}\ldots(10),\quad \text{cosec.}\ a=\frac{R.\sqrt{R^2+\text{tang.}^2 a}}{\text{tang.}\ a}(7,8),$$

$$\text{cosec.}\ a=\sqrt{R^2+\text{cot.}^2 a}\ldots(7),\quad \text{cosec.}\ a=\frac{R\ .\ \text{sec.}\ a}{\sqrt{\text{sec.}^2 a-R^2}}.(6,7,8),$$

$$\left.\begin{aligned}\text{sen.}\ (a+b)&=\frac{\text{sen.}\ a\ .\ \text{cos.}\ b+\text{sen.}\ b\ .\ \text{cos.}\ a}{R}\\ \text{sen.}\ (a-b)&=\frac{\text{sen.}\ a\ .\ \text{cos.}\ b-\text{sen.}\ b\ .\ \text{cos.}\ a}{R}\\ \text{cos.}\ (a+b)&=\frac{\text{cos.}\ a\ .\ \text{cos.}\ b-\text{sen.}\ a\ .\ \text{sen.}\ b}{R}\\ \text{cos.}\ (a-b)&=\frac{\text{cos.}\ a\ .\ \text{cos.}\ b+\text{sen.}\ a\ .\ \text{sen.}\ b}{R}\end{aligned}\right\}\ldots(11),$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tang.}\ (a+b)&=\frac{R^2\ (\text{tang.}\ a+\text{tang.}\ b)}{R^2-\text{tang.}\ a\ \text{tang.}\ b}\\ \text{tang.}\ (a-b)&=\frac{R^2\ (\text{tang.}\ a-\text{tang.}\ b)}{R^2+\text{tang.}\ a\ \text{tang.}\ b}\\ \text{cot.}\ (a+b)&=\frac{\text{cot.}\ a\ .\ \text{cot.}\ b-R^2}{\text{cot.}\ b+\text{cot.}\ a}\\ \text{cot.}\ (a-b)&=\frac{\text{cot.}\ a\ .\ \text{cot.}\ b+R^2}{\text{cot.}\ b-\text{cot.}\ a}\end{aligned}\right\}\ldots(27)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tang.}\ a+\text{tang.}\ b&=\frac{R^2\ \text{sen.}\ (a+b)}{\text{cos.}\ a\ .\ \text{cos.}\ b}\\ \text{tang.}\ a-\text{tang.}\ b&=\frac{R^2\ \text{sen.}\ (a-b)}{\text{cos.}\ a\ .\ \text{cos.}\ b}\\ \text{cot.}\ a+\text{cot.}\ b&=\frac{R^2\ \text{sen.}\ (a+b)}{\text{sen.}\ a\ .\ \text{sen.}\ b}\\ \text{cot.}\ a-\text{cot.}\ b&=-\frac{R^2\ \text{sen.}\ (a-b)}{\text{sen.}\ a\ .\ \text{sen.}\ b}\end{aligned}\right\}\ldots(8,11)$$

$$\text{tang.}\ a+\text{cot.}\ b=\frac{R^2\ \text{cos.}\ (b-a)}{\text{cos.}\ a\ .\ \text{sen.}\ b}$$

$$\text{tang.}\ a-\text{cot.}\ b=-\frac{R^2\ \text{cos.}\ (b+a)}{\text{cos.}\ a\ .\ \text{sen.}\ b}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{sen.}\ a.\text{cos.}\ b&=\tfrac{1}{2}R\ [\text{sen.}\ (a+b)+\text{sen.}\ (a-b)]\\ \text{cos.}\ a.\ \text{sen.}\ b&=\tfrac{1}{2}R\ [\text{sen.}\ (a+b)-\text{sen.}\ (a-b)]\\ \text{cos.}\ a.\text{cos.}\ b&=\tfrac{1}{2}R\ [\text{cos.}\ (a+b)+\text{cos.}\ (a-b)]\\ \text{sen.}\ a.\text{sen.}\ b&=-\tfrac{1}{2}R\ [\text{cos.}\ (a+b)-\text{cos.}\ (a-b)]\end{aligned}\right\}\ldots(27)$$

$$\frac{\text{tang.}\ a\ \text{cot.}\ b}{R^2}=\frac{\text{tang.}\ a}{\text{tang.}\ b}=\frac{\text{sen.}\ (a+b)+\text{sen.}\ (a-b)}{\text{sen.}\ (a+b)-\text{sen.}\ (a-b)}\ldots(27,8,9)$$

$$\frac{\text{tang.}\ a}{R}=\frac{\text{sen.}\ (a+b)+\text{sen.}\ (a-b)}{\text{cos.}\ (a+b)+\text{cos.}\ (a-b)}\ldots(27,8)$$

$$\frac{\text{cot.}\ b}{R}=\frac{\text{sen.}\ (a+b)+\text{sen.}\ (a-b)}{\text{cos.}\ (a-b)-\text{cos.}\ (a+b)}\ldots(27,9)$$

$$\frac{\text{tang.}\ b}{R}=\frac{\text{sen.}\ (a+b)-\text{sen.}\ (a-b)}{\text{cos.}\ (a+b)+\text{cos.}\ (a-b)}\ldots(27,9)$$

$$\frac{\text{cot.}\ a}{R}=\frac{\text{sen.}\ (a+b)-\text{sen.}\ (a-b)}{\text{cos.}\ (a-b)-\text{cos.}\ (a+b)}\ldots(27,9)$$

$$\frac{\text{cot.}\ a}{\text{tang.}\ b}=\frac{\text{cos.}\ (a+b)+\text{cos.}\ (a-b)}{\text{cos.}\ (a-b)-\text{cos.}\ (a+b)}\ldots(27,8,9)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{sen.}\ a+\text{sen.}\ b&=\frac{2}{R}\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ .\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(a-b)\\ \text{sen.}\ a-\text{sen.}\ b&=\frac{2}{R}\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ .\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a-b)\\ \text{cos.}\ a+\text{cos.}\ b&=\frac{2}{R}\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ .\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(a-b)\\ \text{cos.}\ a-\text{cos.}\ b&=-\frac{2}{R}\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ .\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a-b)\\ \text{sen.}\ a+\text{cos.}\ b&=\frac{2}{R}\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi+a-b).\text{cos.}\tfrac{1}{2}(a+b-\tfrac{1}{2}\pi)\\ \text{sen.}\ a-\text{cos.}\ b&=\frac{2}{R}\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi+a-b).\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b-\tfrac{1}{2}\pi)\end{aligned}\right\}\ldots(27).$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{sen.}\ a+\text{sen.}\ b}{\text{sen.}\ a-\text{sen.}\ b}&=\frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(a-b)}\\ \frac{\text{sen.}\ a+\text{sen.}\ b}{\text{cos.}\ a+\text{cos.}\ b}&=\frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(a+b)}{R}\\ \frac{\text{sen.}\ a+\text{sen.}\ b}{\text{cos.}\ a-\text{cos.}\ b}&=-\frac{\text{cot.}\ \frac{1}{2}(a-b)}{R}\\ \frac{\text{sen.}\ a-\text{sen.}\ b}{\text{cos.}\ a+\text{cos.}\ b}&=\frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(a-b)}{R}\\ \frac{\text{sen.}\ a-\text{sen.}\ b}{\text{cos.}\ a-\text{cos.}\ b}&=-\frac{\text{cot.}\ \frac{1}{2}(a+b)}{R}\\ \frac{\text{cos.}\ a+\text{cos.}\ b}{\text{cos.}\ a-\text{cos.}\ b}&=-\frac{\text{cot.}\ \frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(a+b)}\\ \frac{\text{sec.}\ a+\text{sec.}\ b}{\text{sec.}\ a-\text{sec.}\ b}&=\frac{\text{cot.}\ \frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(a+b)}\\ \frac{\text{sen.}\ a+\text{cos.}\ b}{\text{sen.}\ a-\text{cos.}\ b}&=\frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+a-b)}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(a+b-\frac{1}{2}\pi)}\end{aligned}\right\}\ldots(27,8,9)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{tang.}\ a+\text{tang.}\ b}{\text{tang.}\ a-\text{tang.}\ b}&=\frac{\text{sen.}\ (a+b)}{\text{sen.}\ (a-b)}\\ \frac{\text{tang.}\ a+\text{tang.}\ b}{\text{cot.}\ a+\text{cot.}\ b}&=\frac{\text{tang.}\ a\ .\ \text{tang.}\ b}{R^2}\\ \frac{\text{tang.}\ a+\text{tang.}\ b}{\text{cot.}\ a-\text{cot.}\ b}&=-\frac{\text{tang.}\ a\ .\ \text{tang.}\ b}{R^2}.\frac{\text{sen.}\ (a+b)}{\text{sen.}\ (a-b)}\\ \frac{\text{tang.}\ a+\text{tang.}\ b}{\text{tang.}\ a+\text{cot.}\ b}&=\frac{\text{tang.}\ b}{R}\ .\ \frac{\text{sen.}\ (a+b)}{\text{cos.}\ (b-a)}\\ \frac{\text{tang.}\ a+\text{tang.}\ b}{\text{tang.}\ a-\text{cot.}\ b}&=-\frac{\text{tang.}\ b}{R^2}\ .\ \text{tang.}\ (a+b)\\ \frac{\text{tang.}\ a-\text{tang.}\ b}{\text{cot.}\ a+\text{cot.}\ b}&=\frac{\text{tang.}\ a\ .\ \text{tang.}\ b}{R^2}.\frac{\text{sen}\ (a-b)}{\text{sen.}(a+b)}\\ \frac{\text{tang.}\ a-\text{tang.}\ b}{\text{cot.}\ a-\text{cot.}\ b}&=-\frac{\text{tang.}\ a\ .\ \text{tang.}\ b}{R^2}\\ \frac{\text{tang.}\ a-\text{tang.}\ b}{\text{tang.}\ a+\text{cot.}\ b}&=\frac{\text{tang.}\ b\ .\ \text{tang.}\ (a-b)}{R^2}\\ \frac{\text{tang.}\ a-\text{tang.}\ b}{\text{tang.}\ a-\text{cot.}\ b}&=-\frac{\text{tang.}\ b}{R}\ .\ \frac{\text{sen.}\ (a-b)}{\text{cos}\ (a+b)}\\ \frac{\text{cot.}\ a+\text{cot.}\ b}{\text{cot.}\ a-\text{cot.}\ b}&=-\frac{\text{sen.}\ (a+b)}{\text{sen.}\ (a-b)}\\ \frac{\text{cot.}\ a+\text{cot.}\ b}{\text{tang.}\ a+\text{cot.}\ b}&=\frac{\text{cot.}\ a}{R}\ .\ \frac{\text{sen.}\ (a+b)}{\text{cos.}\ (b-a)}\\ \frac{\text{cot.}\ a+\text{cot.}\ b}{\text{tang.}\ a-\text{cot.}\ b}&=-\frac{\text{cot.}\ a}{R^2}\ .\ \text{tang.}\ (a+b)\\ \frac{\text{cot.}\ a-\text{cot.}\ b}{\text{tang.}\ a+\text{cot.}\ b}&=-\frac{\text{cot.}\ a}{R^2}\ .\ \text{tang.}\ (a-b)\\ \frac{\text{cot.}\ a-\text{cot.}\ b}{\text{tang.}\ a-\text{cot.}\ b}&=\frac{\text{cot.}\ a}{R}\ .\ \frac{\text{sen.}\ (a-b)}{\text{cos.}\ (a+b)}\\ \frac{\text{tang.}\ a+\text{cot.}\ b}{\text{tang.}\ a-\text{cot.}\ b}&=-\frac{\text{cos.}\ (a-b)}{\text{cos.}\ (a+b)}\end{aligned}\right\}(8,9,11),$$

*

# CONTINUACION DEL CUADRO DE LAS FORMULAS TRIGONOMETRICAS.

$$\mathrm{sen.}\,2a=\frac{2\,\mathrm{sen.}\,a\,.\,\mathrm{cos.}\,a}{\mathrm{R}}\ldots\ldots(11),\quad \mathrm{sen.}\,2a=\frac{2\,\mathrm{R}^2\,\mathrm{tang.}\,a}{\mathrm{R}^2+\mathrm{tang.}^2\,a}\ldots\ldots(8,13,27),$$

$$\mathrm{sen.}\,2a=\frac{\mathrm{tang.}\,a\,(\mathrm{R}+\mathrm{cos.}\,2a)}{\mathrm{R}}\ldots(27,8,9),\quad \mathrm{sen.}\,2a=\frac{\mathrm{cot.}\,a\,(\mathrm{R}-\mathrm{cos.}\,2a)}{\mathrm{R}}\ldots(27,8,9),$$

$$\mathrm{sen.}\,\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\,\mathrm{R}^2-2\,\mathrm{R}\,\mathrm{cos.}\,a}\ldots\ldots(13),\quad \mathrm{sen.}\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\mathrm{sen.}\,a\,.\,\mathrm{tang.}\,\frac{1}{2}a}{2}}\ldots\ldots(8,11);$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{cos.}\,2a=\dfrac{\mathrm{cos.}^2\,a-\mathrm{sen.}^2\,a}{\mathrm{R}}\\ \mathrm{cos.}\,2a=\dfrac{\mathrm{cos.}^2\,a-\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}}\\ \mathrm{cos.}\,2a=\dfrac{\mathrm{R}^2-2\,\mathrm{sen.}^2\,a}{\mathrm{R}}\end{array}\right\}\ldots(10,11),$$

$$\mathrm{cos.}\,2a=\mathrm{R}\frac{\mathrm{R}^2-\mathrm{tang.}^2\,a}{\mathrm{R}^2+\mathrm{tang.}^2\,a}\ldots(8,13,27),\quad \mathrm{cos.}\,2a=\mathrm{R}\frac{\mathrm{cot.}\,a-\mathrm{tang.}\,a}{\mathrm{cot.}\,a+\mathrm{tang.}\,a}\ldots(8,9,11),$$

$$\mathrm{cos.}\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}\,\mathrm{cos.}\,a}{2}}\ldots\ldots(27);$$

$$\mathrm{tang.}\,2a=\frac{2\,\mathrm{R}^2\,\mathrm{tang.}\,a}{\mathrm{R}^2-\mathrm{tang.}^2\,a}\ldots\ldots(27),\quad \mathrm{tang.}\,2a=\frac{2\,\mathrm{R}^2\,\mathrm{cot.}\,a}{\mathrm{cot.}^2\,a-\mathrm{R}^2}\ldots\ldots(27,8),$$

$$\mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen.}\,a}{\mathrm{R}+\mathrm{cos.}\,a}\ldots\ldots(27),\quad \mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{2}a=\mathrm{R}\sqrt{\frac{\mathrm{R}-\mathrm{cos.}\,a}{\mathrm{R}+\mathrm{cos.}\,a}}.(13,27,8);$$

$$\mathrm{cot.}\,2a=\frac{\mathrm{cot.}^2\,a-\mathrm{R}^2}{2\,\mathrm{cot.}\,a}\ldots\ldots(27),\quad \mathrm{cot.}\,\tfrac{1}{2}a=\mathrm{cot.}\,a\pm\sqrt{\mathrm{cot.}^2 a+\mathrm{R}^2}\ldots(27),\quad \mathrm{cot.}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen.}\,a}{\mathrm{R}-\mathrm{cos.}\,a}\ldots\ldots(27);$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen.}^2 a-\mathrm{sen.}^2 b=\mathrm{sen.}\,(a+b)\,\mathrm{sen.}\,(a-b)\\ \mathrm{cos.}^2 b-\mathrm{cos.}^2 a=\mathrm{sen.}\,(a+b)\,\mathrm{sen.}\,(a-b)\\ \mathrm{cos.}^2 a-\mathrm{sen.}^2 b=\mathrm{cos.}\,(a+b)\,\mathrm{cos.}\,(a-b)\end{array}\right\}\ldots(10,11),$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{tang.}^2 a-\mathrm{tang.}^2 b=\dfrac{\mathrm{R}^4\,\mathrm{sen.}\,(a+b)\,\mathrm{sen.}\,(a-b)}{\mathrm{cos.}^2\,a\,.\,\mathrm{cos.}^2\,b}\\ \mathrm{cot.}^2 a-\mathrm{cot.}^2 b=-\dfrac{\mathrm{R}^4\,\mathrm{sen.}\,(a+b)\,\mathrm{sen.}\,(a-b)}{\mathrm{sen.}^2\,a\,\mathrm{sen.}^2\,b}\end{array}\right\}\ldots(8,11);$$

$$\mathrm{R}=\mathrm{sen.}\,\tfrac{1}{2}\pi=\mathrm{cos.}\,0^\circ=\mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\pi=\mathrm{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\pi=\mathrm{sec.}\,0^\circ=\mathrm{cosec.}\,\tfrac{1}{2}\pi\ldots\ldots(23,24);$$

$$\mathrm{sen.}\,a=\tfrac{1}{2}\text{ de cuerda }2a\ldots(14).$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen.}\,\frac{1}{2}\pi=1\\ \mathrm{cos.}\,\frac{1}{2}\pi=0\end{array}\right\}\mathrm{sen.}\,(\tfrac{1}{2}\pi\pm a)=\mathrm{cos.}\,a,\quad \mathrm{cos.}\,(\tfrac{1}{2}\pi\pm a)=\mp\mathrm{sen.}\,a,\quad \mathrm{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\pi\pm a)=\mp\mathrm{cot.}\,a,\quad \mathrm{cot.}\,(\tfrac{1}{2}\pi\pm a)=\mp\mathrm{tang.}\,a,\quad \mathrm{sec.}\,(\tfrac{1}{2}\pi\pm a)=\mp\mathrm{cosec.}\,a,\quad \mathrm{cosec.}\,(\tfrac{1}{2}\pi\pm a)=\mathrm{sec.}\,a.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen.}\,\pi=0\\ \mathrm{cos.}\,\pi=-1\end{array}\right\}\mathrm{sen.}\,(\pi\pm a)=\mp\mathrm{sen.}\,a,\quad \mathrm{cos.}\,(\pi\pm a)=-\mathrm{cos.}\,a,\quad \mathrm{tang.}\,(\pi\pm a)=\pm\mathrm{tang.}\,a,\quad \mathrm{cot.}\,(\pi\pm a)=\pm\mathrm{cot.}\,a,\quad \mathrm{sec.}\,(\pi\pm a)=-\mathrm{sec.}\,a,\quad \mathrm{cosec.}\,(\pi\pm a)=\mp\mathrm{cosec.}\,a.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen.}\,\frac{3}{2}\pi=-1\\ \mathrm{cos.}\,\frac{3}{2}\pi=0\end{array}\right\}\mathrm{sen.}\,(\tfrac{3}{2}\pi\pm a)=-\mathrm{cos.}\,a,\quad \mathrm{cos.}\,(\tfrac{3}{2}\pi\pm a)=\pm\mathrm{sen.}\,a,\quad \mathrm{tang.}\,(\tfrac{3}{2}\pi\pm a)=\mp\mathrm{cot.}\,a,\quad \mathrm{cot.}\,(\tfrac{3}{2}\pi\pm a)=\mp\mathrm{tang.}\,a,\quad \mathrm{sec.}\,(\tfrac{3}{2}\pi\pm a)=\pm\mathrm{cosec.}\,a,\quad \mathrm{cosec.}\,(\tfrac{3}{2}\pi\pm a)=-\mathrm{sec.}\,a.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen.}\,2\pi=0\\ \mathrm{cos.}\,2\pi=1\end{array}\right\}\mathrm{sen.}\,(2\pi\pm a)=\pm\mathrm{sen.}\,a,\quad \mathrm{cos.}\,(2\pi\pm a)=\mathrm{cos.}\,a,\quad \mathrm{tang.}\,(2\pi\pm a)=\pm\mathrm{tang.}\,a,\quad \mathrm{cot.}\,(2\pi\pm a)=\pm\mathrm{cot.}\,a,\quad \mathrm{sec.}\,(2\pi\pm a)=\mathrm{sec.}\,a,\quad \mathrm{cosec.}\,(2\pi\pm a)=\pm\mathrm{cosec.}\,a.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen.}\,2\mathrm{K}\pi=0\\ \mathrm{cos.}\,2\mathrm{K}\pi=1\end{array}\right\}\mathrm{sen.}\,(2\mathrm{K}\pi\pm a)=\pm\mathrm{sen.}\,a,\quad \mathrm{cos.}\,(2\mathrm{K}\pi\pm a)=\mathrm{cos.}\,a,\quad \mathrm{tang.}\,(2\mathrm{K}\pi\pm a)=\pm\mathrm{tang.}\,a,\quad \mathrm{cot.}\,(2\mathrm{K}\pi\pm a)=\pm\mathrm{cot.}\,a,\quad \mathrm{sec.}\,(2\mathrm{K}\pi\pm a)=\mathrm{sec.}\,a,\quad \mathrm{cosec.}\,(2\mathrm{K}\pi\pm a)=\pm\mathrm{cosec.}\,a.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen.}\,(2\mathrm{K}+1)\pi=0\\ \mathrm{cos.}\,(2\mathrm{K}+1)\pi=-1\end{array}\right\}\mathrm{sen.}\,[(2\mathrm{K}+1)\pi\pm a]=\mp\mathrm{sen.}\,a,\quad \mathrm{cos.}\,[(2\mathrm{K}+1)\pi\pm a]=-\mathrm{cos.}\,a,\quad \mathrm{tang.}\,[(2\mathrm{K}+1)\pi\pm a]=\pm\mathrm{tang.}\,a,\quad \mathrm{cot.}\,[(2\mathrm{K}+1)\pi\pm a]=\pm\mathrm{cot.}\,a,\quad \mathrm{sec.}\,[(2\mathrm{K}+1)\pi\pm a]=-\mathrm{sec.}\,a,\quad \mathrm{cosec.}\,[(2\mathrm{K}+1)\pi\pm a]=\mp\mathrm{cosec.}\,a$$

$$\mathrm{sen.}-a=-\mathrm{sen.}\,a,\quad \mathrm{cos.}-a=\mathrm{cos.}\,a,\quad \mathrm{tang.}-a=-\mathrm{tang.}\,a,\quad \mathrm{cot.}-a=-\mathrm{cot.}\,a,\quad \mathrm{sec.}-a=\mathrm{sec.}\,a,\quad \mathrm{cosec.}-a=-\mathrm{cosec.}\,a.$$

**

les ha reunido en el cuadro siguiente con otras que se deducen de ellas por métodos fáciles de imaginar. Los números que se leen al lado de cada fórmula señalan los artículos en que han sido halladas, ó de los cuales se las puede sacar *.

* El cuadro que presentamos no es el del autor; tiene otra orden en la colocacion de las fórmulas, y está muy aumentado.

30. Hablemos ahora de la aplicacion de las tablas trigonométricas á la resolucion de los triángulos, para lo cual es menester recordar que, por medio de estas tablas, cuando se conoce un *ángulo*, tambien se conoce el valor de su *seno*, *coseno*, *tangente* y *cotangente*; y que recíprocamente cuando es dado el valor de una de estas *líneas*, el del *arco* debe ser mirado como dado.

Fig. 12. Sea CDE, fig. 12, un triángulo rectángulo en D; desde uno de los ángulos agudos C descríbase, con un radio igual al de las tablas, el arco AM, bájese PM perpendicular á AC, y tírese la tangente AN; de este modo tendremos formados los dos triángulos de las tablas; á saber, CPM, que será el de los *senos* y *cosenos*, y CAN el de la *tangente* y *secante*. Uno y otro serán semejantes al triángulo propuesto, y comparándolos con este se sacará

$$\left.\begin{array}{l} CM:PM::CE:DE \\ CM:CP::CE:CD \end{array}\right\} \text{ ó } \left\{\begin{array}{l} R:\text{sen. } C::CE:DE \\ R:\text{cos. } C::CE:CD \end{array}\right.$$

$$CA:AN::CD:DE \quad \text{ó} \quad R:\text{tang. } C::CD:DE$$

Como el ángulo E es complemento del ángulo C, se tendrá cos. C = sen. E, las dos primeras proposiciones pueden reducirse á una sola, y enunciarse asi: *El radio es al seno de uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo propuesto, como la hipotenusa es al lado opuesto á este ángulo.*

La tercera manifiesta que *el radio es á la tangente de uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo propuesto, como el cateto adyacente á este ángulo es al cateto opuesto.*

Como el radio es siempre dado bastará conocer dos de los otros tres términos de cada una de las proporciones que acabo de enunciar para hallar el que resta. Asi pues



por la primera se determinará una de estas: *la hipotenusa, un cateto* y *un ángulo agudo* cuando se conozcan dos.

No debe extrañarse que hayamos dicho simplemente un ángulo agudo, siendo asi que la proporcion exige que este ángulo sea opuesto al lado dado ó buscado, puesto que uno de los ángulos agudos hace hallar inmediatamente el otro; y por consiguiente si el que se conoce ó que se busca no llena esta condicion puede emplearse su complemento.

Por la tercera proporcion se determinará siempre una de estas tres cosas: *los dos catetos* y *un ángulo agudo* cuando se conozcan las otras dos.

De lo dicho se infiere: 1.° que conociendo un lado y un ángulo de un triángulo rectángulo pueden calcularse los otros dos lados: 2.° que conociendo dos cualesquiera de los lados pueden calcularse los ángulos agudos.

Estos dos casos no comprenden aquel en que, conociendo dos lados cualesquiera, se busca directamente el tercero; pero este se resuelve fácilmente por la propiedad conocida del triángulo rectángulo que da $\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{CE}^2$, y de la cual sale $CE = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2}$.

Si fuese conocida la hipotenusa y un cateto, tal como DE, se tendria para valor del otro cateto la ecuacion

$$CD = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{DE}^2}:$$

observemos ahora que $\overline{CE}^2 - \overline{DE}^2 = (CE + DE)(CE - DE)$, sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, esta se mudará en $CD = \sqrt{(CE+DE)(CE-DE)}$, de la cual tomando los logaritmos se sacará

$$l\,CD = \tfrac{1}{2}\,[l\,(CE+DE)+l\,(CE-DE)]$$

Cuando se construyen fórmulas que deben servir para el cálculo numérico, es preciso tratar de disponerlas de modo que se las pueda aplicar cómodamente los logaritmos, esto es, que nos hallemos obligados lo menos posible á pasar de los logaritmos á los números, y de repasar de estos á los primeros. Si aplicamos los logaritmos á la investigacion de CD, tal cual se presenta en la primera expresion, se conocerá claramente el objeto de la presente nota.

Terminaremos esta exposicion de los principios que sirven para resolver los triángulos rectángulos, observando que los dos casos tratados últimamente se resuelven por las proporciones referidas al principio de este artículo, porque: 1.° si conociendo CD y DE se quisiese hallar CE, se podria calcular uno de los ángulos agudos, C por ejemplo, por la proporcion R : tang. C :: CD : DE; hallado este ángulo se calculará la hipotenusa CE por la proporcion R : sen. C :: CE : DE, en la cual se conocerán los tres términos R, sen. C, DE.

2.° Cuando se conozca la hipotenusa CE y uno de los otros lados, CD, por ejemplo, se calculará el ángulo agudo opuesto al lado buscado por la proporcion R : sen. E ó cos. C :: CE : CD; despues se hallará el lado DE por la proporcion R : sen. C :: CE : DE.

31. Lo que acabamos de decir sobre los triángulos rectángulos, podemos reunirlo de un modo cómodo, designando sus ángulos por A, B, C, de los cuales A sea el recto, y llamando $a$, $b$, $c$ los lados opuestos respectivamente á cada uno de estos ángulos, asi como lo manifiesta la fig. 13. Se tendrá por el primer principio
Fig. 13.

$$R : \text{sen. } C :: a : c, \quad R : \text{sen. } B :: a : b$$



de donde sale

$$\frac{c}{a}=\frac{\text{sen. } C}{R}, \quad \frac{b}{a}=\frac{\text{sen. } B}{R}.$$

Eliminando $a$ de estas dos ecuaciones, lo cual se logra dividiendo cada miembro de la primera por su correspondiente en la segunda, se hallará

$$\frac{c}{b}=\frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } B};$$

y como sen. B = cos. C, y ademas $\frac{\text{sen. } C}{\text{cos. } C}=\frac{\text{tang. } C}{R}$, resultará

$$\frac{c}{b}=\frac{\text{tang. } C}{R};$$

ecuacion que representa el segundo principio enunciado ya en el número anterior.

En fin, si se cuadra cada miembro de las dos primeras ecuaciones, y se añaden despues cada miembro con su correspondiente, se tendrá, observando que

$$\text{sen.}^2\, C + \text{sen.}^2\, B = \text{sen.}^2\, C + \text{cos.}^2\, C = R^2 \quad (10),$$

la ecuacion

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=1, \text{ ó } b^2+c^2=a^2.$$

Se infiere de lo dicho que las dos ecuaciones

$$\frac{c}{a}=\frac{\text{sen. } C}{R}, \quad \frac{b}{a}=\frac{\text{sen. } B}{R},$$

bastan, juntamente con la relacion que existe entre los ángulos B y C, para resolver todos los casos de los triángulos rectángulos.

32. El principio sobre el cual está fundada la resolucion de los triángulos rectángulos conduce á la de los triángulos cualesquiera. Bajando desde el ángulo B del triángulo ABC, fig. 14, una perpendicular BD, se for- Fig. 14.

marán dos triángulos ABD, BDC, rectángulos en D; se tendrá en el primero

$$R : \text{sen. } A :: AB : BD$$

y en el segundo

$$R : \text{sen. } C :: BC : BD,$$

lo que dará

$$R \times BD = \text{sen. } A \times AB, \quad R \times BD = \text{sen. } C \times BC,$$

de donde se sigue

sen. $A \times AB =$ sen. $C \times BC$ ó sen. $A$ : sen. $C :: BC : AB$.

Cuando la perpendicular cae fuera, el ángulo C no es comun al triángulo ABC y al triángulo BCD; pero el ángulo BCD y el ángulo BCA valen juntos dos ángulos rectos, y tienen el mismo signo (22).

La proporcion obtenida anteriormente se puede convertir en principio general, y enunciarse asi: *En un triángulo cualquiera los senos de los ángulos son entre sí como los lados opuestos á estos ángulos.*

33. La misma proposicion se demuestra tambien del modo siguiente, que parece mas análogo á la idea que hemos dado de la trigonometría en los núms. 1 y 2.

Fig. 15. Supuesto el triángulo ABC, fig. 15, se le circunscribirá una circunferencia de círculo; despues si se describe con centro en O, y un radio igual al de las tablas, una circunferencia de círculo *abc*, y se unen por rectas *ab*, *bc* y *ac* los puntos en que los radios AO, BO y CO encuentran la circunferencia de las tablas, se formará un triángulo *abc* semejante al propuesto, y cuyos lados *ab*, *bc* y *ac* se deducirán de las tablas.

La semejanza de los dos triángulos ABC y *abc* resulta evidente cuando se nota que las rectas *a*O, *b*O y *c*O son iguales como radios de un mismo círculo, y que lo mismo les sucede á las rectas AO, BO, CO; ahora bien,



los triángulos AOB, BOC y AOC tienen sus lados AO y BO, BO y CO, AO y CO, cortados proporcionalmente en los puntos *a* y *b*, *b* y *c*, *a* y *c*, y por lo mismo las rectas AB y *ab*, BC y *bc*, AC y *ac*, son respectivamente paralelas: luego se tendrá

$$AB : BC : AC :: ab : bc : ac,$$

ó

$$:: \tfrac{1}{2}\, ab : \tfrac{1}{2}\, bc : \tfrac{1}{2}\, ac.$$

Esto supuesto, los ángulos del triángulo *abc* tienen sus vértices colocados en la circunferencia, y son medidos por la mitad del arco que subtende el lado que le es respectivamente opuesto, y cada uno de estos arcos tendrá evidentemente por seno la mitad de este mismo lado (14); luego

$$\tfrac{1}{2}\, ab = \text{sen. } c = \text{sen. } C$$
$$\tfrac{1}{2}\, bc = \text{sen. } a = \text{sen. } A$$
$$\tfrac{1}{2}\, ac = \text{sen. } b = \text{sen. } B,$$

y por consiguiente

$$AB : BC : AC :: \text{sen. } C : \text{sen. } A : \text{sen. } B.$$

La comparacion de los AOB y *aob* manifiesta que AB : *ab* :: AO : *ao*, ó que AB : 2 sen. C :: AO : *a*O, esto es, que *cada lado del triángulo ABC es al doble del seno del ángulo que le es opuesto, como el radio del círculo circunscrito es al de las tablas* *.

34. Si designamos como en el núm. 31 los tres ángulos A, B, C, y los lados respectivamente opuestos á cada uno de ellos por *a*, *b*, *c*, fig. 16, se tendrá, segun lo que precede, las proporciones Fig. 16.

* Se podria considerar las líneas *ab*, *bc* y *ac* como los senos mismos de estos ángulos A, B, C, con solo tomar por unidad al diámetro del círculo *abc*; asi es como Mr. Carnot los ha presentado en su obra intitulada *Geometría de Posicion*. Se halla alli, segun esta definicion, una demostracion muy simple y elegante de la proposicion del número 11 y de sus principales consecuencias.

$$\text{sen. A} : \text{sen. B} :: a : b$$
$$\text{sen. A} : \text{sen. C} :: a : c$$
$$\text{sen. B} : \text{sen. C} :: b : c.$$

De las cuales se deducirán las ecuaciones

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen. B}}{\text{sen. A}}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\text{sen. C}}{\text{sen. A}}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\text{sen. C}}{\text{sen. B}}.$$

Se resolverá inmediatamente por estas proporciones un triángulo: 1.° *cuando en él se conozcan dos ángulos y un lado;* puesto que entonces todos los ángulos serán dados, y que los lados buscados serán precisamente opuestos á dos de estos ángulos; si, por ejemplo, $a$ fuese dado asi como los ángulos B y C, se restará la suma de estos ángulos de dos rectos para tener el ángulo A, y las dos primeras proporciones harán conocer los lados buscados $b$ y $c$: 2.° *cuando se tenga un ángulo y dos lados, de los cuales uno esté opuesto al ángulo dado*, por ejemplo, si los datos son el ángulo A con los lados $a$ y $b$, se calculará el ángulo B por la primera proporcion, y conociendo entonces dos ángulos, estaremos en el caso anterior.

Hay aun dos casos que, no hallándose comprendidos en los que acabamos de examinar, parece que no pertenecen al método: y son aquellos en que *se conocen dos lados y el ángulo comprendido, ó los tres lados;* nos ocuparemos de ellos sucesivamente.

35. Supongamos se conozcan los lados $a$ y $b$ y el ángulo comprendido $c$. Pónganse las ecuaciones

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen. C}}{\text{sen. A}}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\text{sen. C}}{\text{sen. B}}$$

bajo la forma

$$c \text{ sen. A} = a \text{ sen. C}, \quad c \text{ sen. B} = b \text{ sen. C},$$

con el fin de añadirlas miembro con miembro, y despues restarlas una de otra; hecho lo cual se hallará



$$(a+b) \text{ sen. C} = c \text{ (sen. A} + \text{sen. B)},$$
$$(a-b) \text{ sen. C} = c \text{ (sen. A} - \text{sen. B)};$$

si dividimos el segundo resultado por el primero, el lado incógnito $c$ desaparecerá, y se tendrá

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{sen. A} - \text{sen. B}}{\text{sen. A} + \text{sen. B}};$$

pero hemos visto (27) que

$$\frac{\text{sen. A} - \text{sen. B}}{\text{sen. A} + \text{sen. B}} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2} (\text{A} - \text{B})}{\text{tang.} \frac{1}{2} (\text{A} + \text{B})};$$

se concluirá pues de lo dicho

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2} (\text{A} - \text{B})}{\text{tang.} \frac{1}{2} (\text{A} + \text{B})} \,*;$$

de la cual se deducirá la proporcion

$$a+b : a-b :: \text{tang.} \tfrac{1}{2} (\text{A}+\text{B}) : \text{tang.} \tfrac{1}{2} (\text{A}-\text{B}),$$

que se enuncia asi. *La suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos á estos lados es á la tangente de la mitad de su diferencia.*

Todo es conocido en esta proporcion, á excepcion de A — B; pues si se resta de dos ángulos rectos la medida del ángulo conocido C, la resta será el valor de A + B; tomando por consiguiente el valor de tang. $\frac{1}{2}$ (A — B), se obtendrá

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} (\text{A}-\text{B}) = \frac{a-b}{a+b} \times \text{tang.} \tfrac{1}{2} (\text{A}+\text{B}).$$

Conociendo de este modo $\frac{1}{2}$ (A + B) y $\frac{1}{2}$ (A — B),

* Se puede, si se quiere, para mayor brevedad, hacer la proporcion.

$$a : b :: \text{sen. A} : \text{sen. B} \ (32),$$

de la cual se saca inmediatamente

$$a+b : a-b :: \text{sen. A} + \text{sen. B} : \text{sen. A} - \text{sen. B};$$

y se concluirá por el núm. 26 ó por las ecuaciones del núm. 27

$$a+b : a-b :: \text{tang.} \tfrac{1}{2} (\text{A}+\text{B}) : \text{tang.} \tfrac{1}{2} (\text{A}-\text{B}).$$

si se añaden se sacará

$$\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)=A;$$

y si se resta el segundo del primero, resultará

$$\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A+B)=B;$$

esto es, *que el ángulo mayor se sacará, añadiendo la mitad de la diferencia á la mitad de la suma, y el menor restando la mitad de la diferencia de la mitad de la suma.*

Cuando se haya calculado todos los ángulos, se hallará el tercer lado por la regla del núm. 32.

36. Tambien puede hallarse inmediatamente el tercer lado, bajando una perpendicular sobre el uno de los lados dados; por ejemplo, desde el ángulo A sobre el lado dado BC, fig. 14. Se tendrá, por la propiedad cono- Fig. 14.
cida de los triángulos oblicuángulos, $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\mp 2\,AC\times DC$, en cuya ecuacion debe tomarse el signo superior cuando la perpendicular cae dentro del triángulo, y el inferior cuando ella cae fuera; ademas en el triángulo rectángulo BDC se tendrá (30) $DC=BC\times\text{sen. }DBC=BC\cos. C$, haciendo $R=1$: se concluirá pues de aqui $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\,AC\times BC\times\cos. C$, y por consiguiente

$$AB=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\,AC.BC\cos. C},$$

fórmula que equivale, segun la notacion establecida, á

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2\,ab\cos. C},$$

y dará el lado $c$ por medio de los otros dos $a$ y $b$ y el ángulo C. Un solo signo basta para el término $2\,ab\cos. C$; porque cuando el ángulo C es obtuso, su coseno es negativo, y cambia por consiguiente el $-$ en $+$, como lo



exige la construccion geométrica.

37. Esta fórmula no se presta cómodamente al cálculo logarítmico; pero se sabe que

$$\cos. 2\,C=1-2\,\text{sen.}^2\,C\ (27),$$

lo que dará

$$\cos. C=1-2\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}C,$$

con solo escribir $\tfrac{1}{2}C$ en lugar de C; y por esta trasformacion se obtendrá

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2\,ab+4\,ab\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}C}=\sqrt{(a-b)^2+4\,ab\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}C}.$$

Si hacemos ahora $\dfrac{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}C}{a-b}\sqrt{ab}=\text{tang.}\,\alpha$, resultará

$$c=\sqrt{(a-b)^2+(a-b)^2\,\text{tang.}^2\alpha}$$

$$c=(a-b)\sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha}=\frac{a-b}{\cos.\alpha},$$

puesto que $\cos.\alpha=\dfrac{1}{\sec.\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tom.}^2\alpha}}$. Se calculará fácilmente *tang.* $\alpha$ por la fórmula $\text{tang.}\,\alpha=\dfrac{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}C}{a-b}\sqrt{ab}$; y cuando se conozca $\alpha$, se tendrá $c$ por la segunda $c=\dfrac{a-b}{\cos.\alpha}$ *.

* Cual sea el motivo por que se suponga $\dfrac{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}C}{a-b}\sqrt{ab}=\text{tang.}\,\alpha$, en la ecuacion $c=\sqrt{(a-b)^2+4\,ab\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}C}$, se infiere de que teniendo necesidad de buscar el logaritmo de lo que hay debajo del radical en el valor de $c$ para tener dicho valor, y lo que hay es un binomio, es preciso darle una forma monomia, lo cual se consigue multiplicando y partiendo por $(a-b)^2$, lo que está debajo del radical; con lo que

$$c=\sqrt{(a-b)^2\left(1+\frac{4\,ab\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}C}{(a-b)^2}\right)}$$

38. La ecuacion $c=\sqrt{a^2+b^2-2\,ab\ \cos. C}$, hace conocer el ángulo $c$ cuando sean dados los tres lados $a$, $b$, $c$; porque elevando al cuadro cada uno de sus miembros, saldrá

$$a^2+b^2-c^2=2\,ab\ \cos. C,$$

de la cual sale

$$\cos. C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\,ab};$$

pero como esta ecuacion es poco cómoda para el cálculo logarítmico, es necesario buscar otra.

Si se escribe $2\,c$ por $c$, y que se ponga $1-2\ \text{sen.}^2 c'$ en lugar de $\cos. c$ (27), se tendrá esta expresion

$$2\ \text{sen.}^2 C'=1+\frac{c^2-a^2-b^2}{2\,ab}.$$

$$=(a-b)\sqrt{1+\frac{4\,ab\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}C}{(a-b)^2}};$$

y como $\sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha}=\frac{1}{\cos.\alpha}$,

tendremos que comparar

$$\sqrt{\frac{1+4\,ab\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}C}{(a-b)^2}}\ \text{con}\ \sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha},$$

lo cual exige que

$$\frac{4\,ab\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}C}{(a-b)^2}=\text{tang.}^2\alpha.$$

ó que

$$\frac{2\ \text{sen.}\frac{1}{2}C}{a-b}\sqrt{ab}=\text{tang.}\alpha:$$

por cuyo medio el valor de

$c=\sqrt{(a-b)^2+4\,ab\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}C}$, toma la forma

$$c=(a-b)\frac{1}{\cos.\alpha},$$

$$c=\frac{a-b}{\cos.\alpha}.$$



$$=\frac{c^2-a^2-b^2+2\,ab}{2\,ab}=\frac{c^2-(a-b)^2}{2\,ab}$$

$$=\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2\,ab},$$

y por consiguiente

$$\text{sen.}^2 C'=\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{4\,ab}$$

$$=\frac{\frac{(c+a-b)}{2}\cdot\frac{(c-a+b)}{2}}{ab};$$

pero es fácil ver que

$$\frac{c+a-b}{2}=\frac{c+a+b}{2}-b,$$

$$\frac{c-a+b}{2}=\frac{c+a+b}{2}-a:$$

por consiguiente, si se hace $c+a+b=s$, se inferirá tomando la raiz cuadrada, y poniendo $\frac{1}{2}$ C en lugar de C′, la ecuacion

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}{ab}}$$

fórmula que conduce á la regla siguiente:

Para hallar un ángulo de un triángulo, cuando se conozcan los tres lados, se procederá así: *de la semi-suma de los tres lados réstese sucesivamente cada uno de los que comprende el ángulo buscado; multiplíquense las dos restas entre sí; divídase este producto por el de los lados que comprenden el ángulo buscado, y tómese la raiz cuadrada del cociente;* de este modo tendremos *el seno de la mitad de este ángulo.*

39. La solucion de todos los casos de los triángulos oblicuángulos no depende, como se ve, sino de las tres

reglas enunciadas en los números 32, 35, 38, y está fundada en el principio que nos sirvió de base para la resolucion de los triángulos rectángulos en el núm. 30: será pues fácil, con un poco de atencion, de retener estas reglas; y el cálculo de los ejemplos que daremos en este número bastará para poner al lector en estado de aplicarlas.

Antes de exponer los ejemplos de la resolucion de los triángulos rectilíneos haremos la observacion siguiente.

La ecuacion

$$\cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

nos dice que *en todo triángulo rectilíneo el coseno de un ángulo es igual á la suma de los cuadrados de los lados que forman dicho ángulo, menos el cuadrado del lado opuesto, dividido todo por dos veces el rectángulo de los lados que forman el ángulo de que se trata;* por lo mismo de cualquier triángulo rectilíneo se podrán deducir las tres ecuaciones

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos. B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ellas resuelven todos los problemas de la trigonometría rectilínea, pues son tres ecuaciones entre las seis cantidades $a$, $b$, $c$, A, B, C; en el caso de que se den los tres ángulos A, B, C para hallar los tres lados, ellas conducen á una ecuacion indeterminada entre dos de las tres cantidades desconocidas $a$, $b$, $c$.

Esto era preciso fuese asi, pues cuando se dan los tres ángulos hay una infinidad de triángulos semejantes que satisfacen á la cuestion, lo cual está bien expresado



por la *indeterminacion* de la ecuacion final.

Dichas tres ecuaciones encierran los principios que sirven para la resolucion de los triángulos rectilíneos, lo cual no debe extrañarse, pues para hallar en el núm. 36 el valor de AB, y por consiguiente sacar las tales ecuaciones, nos hemos valido del principio del núm. 30, del cual se han deducido los demas.

Para dar un ejemplo de lo que hemos anunciado, tomaremos el de la *proporcionalidad de los lados con los senos de los ángulos opuestos*, y veremos como él se deduce de las tales ecuaciones. En efecto, se sabe que $\text{sen.}^2 A = R^2 - \cos.^2 A$, introduciendo por cos. A su valor $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, y reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, saldrá

$$\text{sen.}^2 A = R^2 . \frac{4 b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4 b^2 c^2} =$$

$$\frac{R^2}{4 b^2 c^2} (2 b^2 c^2 + 2 b^2 a^2 + 2 a^2 c^2 - b^4 - c^4 - a^4);$$

luego

$$\frac{\text{sen.} A}{a} = \frac{R}{2abc} \sqrt{(2 b^2 c^2 + 2 b^2 a^2 + 2 a^2 c^2 - b^4 - c^4 - a^4)};$$

y como el segundo miembro de esta ecuacion está compuesto de las cantidades $a$, $b$, $c$ de un modo semejante; querrá esto decir que él será el mismo para $\frac{\text{sen. B}}{b}$, $\frac{\text{sen C}}{c}$, por consiguiente se podrá escribir

$$\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b} = \frac{\text{sen. C}}{c},$$

que es el resultado que íbamos á buscar (32).

*Ejemplos de la resolucion de los triángulos rectángulos.*

Fig. 13. 1.° Conociendo en el triángulo rectángulo BAC, fig. 13, la hipotenusa $a$ y un lado $c$, hallar el ángulo $c$ opuesto á este lado; supongamos que la hipotenusa $a = 13^{\text{varas}},178$, el lado $c = 7^{\text{v}},357$. Se tendrá (31) para determinar sen. C la proporcion

$$a : c :: \text{R} : \text{sen. C}$$

ó
$$\text{sen. C} = \frac{\text{R} \times c}{a};$$

y tomando los logaritmos, se sacará

$$l\,\text{sen. C} = l\text{R} + lc - la.$$

### Para mayor sencillez se hace comunmente el radio igual á la unidad; su logaritmo es entonces cero, y por lo mismo no es necesario tener cuenta con él; ademas en lugar de efectuar las sustracciones, se emplean los complementos aritméticos, cuya teoría se halla expuesta al fin de los Elementos de Algebra. Véase aquí la operacion

$lc = l\;7{,}357 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}8667008$
comp. arit. $la =$ comp. arit. $l\;13{,}178 = 8{,}8801505$

suma ó long. sen. C $= \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}7468513$

que en las tablas corresponde á long. sen. 33°....56'.... 12",71

luego C = 33°....56'....12",71.

2.° Conociendo el ángulo C y la hipotenusa $a$ se puede hallar el lado $b$; para esto supongamos C = 28°.... 13'....24", $a = 33^{\text{v}},253$, el lado $b$ le hallaremos por la proporcion

$$\text{R} : \text{sen. B ó cos. C} :: a : b,$$

de la cual sale



$$b = \frac{a \times \text{cos. C}}{\text{R}},$$

y por lo tanto

$$lb = la + l\,\text{cos. C} - l\text{R} = la + l\,\text{cos. C};$$

pero, $la = l\;33{,}253 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1{,}5218308$
$l\,\text{cos. C} = l\,\text{cos. } 28°\ldots13'\ldots24'' = 9{,}9450356$

suma o' $lb = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11{,}4668664$

que en las tablas corresponde a', log. 29,299;

luego $b = 29^{\text{v}},299$ con diferencia de menos de una milésima.

3.° Conociendo el lado $c = 5^{\text{v}},391$ y el ángulo B = 68°....21'.....10", podremos hallar el lado $b$. Para lo cual se tendrá

$$\text{R} : \text{tang. B} :: c : b;$$

de la cual sale

$$b = \frac{c \times \text{tang. B}}{\text{R}},$$

ó
$$lb = lc + l\,\text{tang. B} - l\text{R};$$

pero $lc = l\;5{,}391 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}7316693$
$l\,\text{tang. B} = l\,\text{tang. } 68°\ldots21'\ldots10'' = 10{,}4013389$

suma o' $lb = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11{,}1330082;$

por consiguiente $b = 13^{\text{v}},553$; con diferencia de menos de una milésima.

*Ejemplos de la resolucion de los triángulos oblicuángulos.*

1.° Conociendo en el triángulo ABC, fig. 16, el lado $c$, y los ángulos A y B, hallar el lado $b$. Fig. 16.

Sea pues A = 96°..13'...16", B = 45°...0'...17", $c = 27^{\text{v}},348$;

el ángulo $C$ será igual $180° - (A+B) = 180° - 141°....13'....33''$, o'.... $C = 38°....46'....27''$,
y se tendrá (32),

$$\text{sen. } C : \text{sen. } B :: c : b,$$

de la cual sale

$$b = \frac{c \times \text{sen. } B}{\text{sen. } C},$$

y por lo mismo

$$lb = lc + l\,\text{sen. } B - l\,\text{sen. } C;$$

pero $lc = l\,27,348 = \ldots\ldots\ldots\ldots 1,4369256$

$l$ sen. $B = l$ sen. $45°....0'....17'' =$ 9,8495208

comp. arit. $l$ sen. $C =$ comp. arit. $l$ sen. $38°$ ....$46'....27'' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 0,2032507

suma o' $lb = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 11,4896971,

que corresponde en las tablas al log. de 30,881;
luego $b = 30^v881$ con diferencia de menos de una milésima.

2.° Conociendo en el triángulo ABC los dos lados $a$, $b$, y el ángulo comprendido $c$, se pide el tercer lado $c$. Sea pues $a = 28^v442$, $b = 17^v803$, $c = 78°....17'....25'',6$; se empezará primero por hallar los otros ángulos. Para lo cual se tendrá (35)

$$a+b : a-b :: \text{tang. } \frac{A+B}{2} : \text{tang. } \frac{A-B}{2};$$

de esta proporcion sale

$$\text{tang. } \frac{A-B}{2} = \frac{\text{tang. } \left(\frac{A+B}{2}\right)(a-b)}{a+b}$$

y

$$l\,\text{tang. } \frac{A-B}{2} = l\,\text{tang. } \frac{A+B}{2} + l(a-b) - l(a+b);$$



pero $A + B = 180° - C = 180° - 78°....17'....25'',6 = 101°....42'....34'',4$ y $\frac{A+B}{2} = 50°....51'....17'',2$

$$a+b = 28,442 + 17,803 = 46,245,$$
$$a-b = 28,442 - 17,803 = 10,639,$$

$l$ tang. $\frac{A+B}{2} = l$ tang. $50°...51'...17'',2 =$ 10,0893813

$l(a-b) = l\,10,639 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 1,0269008

comp. arit. $l(a+b) =$ comp. arit. $l\,46,245 =$ 8,3349352

suma o' $l$ tang. $\frac{A-B}{2} = \ldots\ldots$ 19,4512173

que corresponde en las tablas a' log. tang. $15°....46'....54'',66$.

Luego $\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A$, da' $66°.38'.11'',86 = A$,

y $\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = B$, da' $35°....4'....22'',54 = B$.

Ahora bien, para determinar el lado $c$ se tendrá la proporcion

$$\text{sen. } B : \text{sen. } C :: b : c,$$

de la cual se deduce

$$c = \frac{b \times \text{sen. } C}{\text{sen. } B}$$

y

$$lc = lb + l\,\text{sen. } C - l\,\text{sen. } B;$$

pero $lb = l\,17,803 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 1,2504932

$l$ sen. $C = l$ sen. $78°....17'....25'',6 = \ldots\ldots$ 9,9908665

comp. arit. $l$ sen. $B =$ comp. arit. $l$ sen. $35°$ ....$4'....22'',54 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 0,2406203

suma o' $lc \ldots\ldots\ldots\ldots$ 11,4819800

que en las tablas corresponde á logaritmo de 30,338;
luego $c = 30^v338$.

3. Conociendo en el triángulo ABC los tres lados $a$, $b$, $c$, hallar el ángulo A.

Sean $a = 29^{v},037$, $b = 18^{v},743$, $c = 13^{v},782$.

Segun el número 36 se sumarán los tres lados, lo cual dará $61^{v},562$; y de la mitad 30,781 se restará sucesivamente $b$, $c$; se tendrá por restas 12,038 y 16,999: ahora bien

$l$ 16,999 = .................................. 1,2304234
$l$ 12,038 = .................................. 1,0805543
comp. arit. $l$ 18,743 = ................ 8,7271609
comp. arit. $l$ 13,782 = ................ 8,8606878

suma = ..........................19,8988264

cuya mitad, ó $l$ sen. A = ....................9,9494132,
que en la tabla corresponde á log. sen. $62°...52'...45'',18$
luego $A = 62°....52'....45'',18$.

40. En una obra de la naturaleza de esta no corresponde manifestar la inmensidad de aplicaciones de que es susceptible la trigonometría rectilínea; por lo tanto nos limitaremos á indicar la solucion de tres cuestiones que pueden mirarse como la base del arte de levantar planos.

Véase el enunciado de la primera.

Suponiendo dada de magnitud y posicion sobre un
Fig. 17. plano una línea AB, fig. 17, se pide determinar, respecto á esta línea, la posicion de un punto C, situado en el mismo plano, ó lo que es lo mismo, hallar las distancias AC y BC.

Para resolverla es necesario medir la línea AB, que es la *base* de la operacion, y los ángulos CAB y CBA comprendidos entre esta base y las líneas que juntan sus extremos con el punto incógnito C; las distancias buscadas AC y BC se calcularán segun la regla enunciada en el núm. 32; y cuando se las haya hallado se construirá,



por medio de una escala de partes iguales, sobre los tres lados dados el triángulo ABC, que hará conocer la posicion respectiva de los tres puntos A, B, C *.

Se podrá despues por la resolucion del triángulo rectángulo ACP, en el cual se conocerá el lado AC y el ángulo ACP, hallar la longitud de la perpendicular CP, bajada sobre AB, ó de la mas corta distancia del punto C á la línea AB, y la magnitud del segmento AP. Estos datos servirán tambien para notar la posicion del punto C respecto de la línea AB. Del mismo modo se hallaria la situacion de un punto D, que se pudiese percibir al mismo tiempo desde dos cualesquiera de los tres puntos A, B, C.

41. Cuando se ha determinado el punto D respecto á la línea AB, midiendo los ángulos DAB, DBA, se tendrá todo lo que es necesario para conocer la distancia recíproca de los puntos C y D; porque habiendo resuelto el triángulo DAB del mismo modo que el triángulo CAB, y restado despues el ángulo DAB del ángulo CAB, se conocerá entonces en el triángulo CAD los dos lados AC, AD, y el ángulo CAD que ellos forman: por lo tanto

* No tratamos aqui de la operacion de la medida de los ángulos, pues se aprende mas reflexionando sobre el instrumento mismo que de todo lo que puede decirse acerca de esto; y que tambien para concebir la posibilidad de esta medida basta imaginarse que se haya colocado sobre el punto A el centro de un sector de círculo, cuyos radios sean dirigidos segun los lados AB y AC del ángulo que se trata de conocer. Los que quieran ocuparse de la práctica del levantamiento de planos podrán consultar el *Tratado de Trigonometría* de Cagnoli, el artículo *Levantamiento de planos* del Diccionario de Matemáticas de la Enciclopedia metódica, el *Tratado de Agrimensura* de Mr. Lespinase, y últimamente los *Tratados de Geodesia teórica y práctica* de Mr. Puissant, en los cuales se hallan los métodos mas exactos y mas propios para las grandes operaciones trigonométricas, asi como los pormenores de todo.

la aplicacion de las reglas del número 35 da los otros dos ángulos DCA, CDA, y el tercer lado CD, que es la distancia buscada. El ángulo DCA da la posicion de la recta CD; y considerando á la AC como secante, la comparacion de los ángulos DCA y CAB hace ver cual es la inclinacion de CD respecto á la AB.

Partiendo de los puntos C y D, y considerando á la CD como una nueva base, podemos determinar nuevos puntos que no eran percibidos desde los dos primeros A y B: continuando de este modo de unos en otros, se fijará la posicion respectiva de todos los puntos de un pais: asi es como se ha construido la carta de Francia dirigida por Cassini.

42. La segunda cuestion de que nos vamos á ocupar es la misma primera, pero mas general, suponiendo que el punto que se ha de determinar esté situado fuera del plano, sobre el cual se halle la línea AB. Sea C este punto, fig. 18, y ABC′ el plano que contiene la línea AB: la posicion del punto C será conocida, si se tiene la del pie C′ de la perpendicular bajada desde este punto sobre el plano ABC′, y la longitud de la perpendicular CC′, que señala cuanto el punto C está elevado encima de C′, que se llama su *proyeccion*. En este caso los ángulos C′AB y C′BA no son los que se miden, y sí se miden en su lugar los ángulos CAB y CBA, situados en el plano CAB, que pasa por las líneas AC y BC, tiradas desde los puntos dados A y B al punto pedido; y para fijar la posicion de este plano, se medirá ademas el ángulo DBC que forma la línea CB con la BD perpendicular al plano ABC′, y por consiguiente paralela á la recta CC′ *.

* Cuando se trata de los puntos colocados sobre la superficie de la tierra se escoge por el plano ABC′ un plano *horizontal*, las líneas CC′ y BD son entonces *verticales*; su direccion es dado por la del *aplomo* ó *perpendículo*; el plano C′CB que pasa por estas líneas es vertical, y se halla determinado por el punto C, que se percibe desde el punto B, y por la línea BD. La línea C′B es una línea horizontal comprendida en este plano.



Se resuelve el triángulo CBA como en el núm. anterior por tenerse alli los mismos datos; despues en el triángulo C′BC, rectángulo en C′, se conoce la hipotenusa CB y el ángulo C′BC, que es la diferencia entre el ángulo recto DBC′ y el ángulo medido DBC, por lo que se pueden calcular los lados CC′ y C′B. El primero es la altura del punto C encima del plano C′AB, y sirve juntamente con el lado AC para determinar AC′ por medio del triángulo CAC′, rectángulo en C′. Hecho esto, se tendrán los tres lados del triángulo C′AB, y el punto C′ es por consiguiente dado.

43. Para mayor facilidad se ha supuesto la línea AB en el plano, al cual se refieren los puntos que íbamos á determinar; cuando ella no se halla alli debe observarse ademas el ángulo DBA, fig. 19, que en este caso forma con la línea DB perpendicular al plano A′BC′, sobre el cual se quiere referir el punto C. Hecho esto, se calculan, como antes, los lados AC y BC del triángulo ABC; y los lados CC′ y C′B del triángulo rectángulo C′BC; despues en el triángulo BA′A, rectángulo en A′, se conoce AB y el ángulo ABA′, complemento del ángulo observado DBA, por lo tanto se pueden hallar BA′ y AA′.

Ahora bien, si se concibe AC″ paralela á A′C′, resultará el triángulo AC″C, rectángulo en C″, en el cual se conocerá AC, lado calculado del triángulo ABC, y CC″ diferencia entre las líneas CC′ y C′C″ ó AA′, calculadas anteriormente; por consiguiente se podrá hallar

AC′′ ó A′C′. De todo lo dicho resulta que el triángulo BA′C′ estará determinado por sus tres lados, como lo está el triángulo BAC′ en el número anterior.

44. Tomando arbitrariamente los lados BC, BA, y siguiendo el método que acabamos de trazar, puede calcularse el triángulo A′C′B con la mira de conocer el ángulo C′BA′, formado por las líneas BC′ y BA′, que son sobre el plano A′BC′, las *proyecciones* de los rayos visuales BC y BA tirados desde el punto B á los puntos A y C.

El ángulo C′BA′ comprendido por estas proyecciones es el ángulo *reducido* del plano inclinado, en el cual él se halla, al plano A′BC′, sobre el cual se refieren los objetos, y que comunmente se escoge horizontal. En el núm. 62 expondremos otro modo de reducir un ángulo de un plano á otro plano; pero atendiendo á que los dos planos comunmente estan poco inclinados entre sí, se hace esta reduccion por métodos aproximativos mucho mas cortos, para lo cual se han formado tablas de reduccion.

Por ahora nos limitaremos á hacer notar que si se observasen tambien en el punto A los ángulos EAC, EAB, y se redujese por su medio el ángulo CAB al ángulo C′A′B, é igualmente que se calculase A′B, lo cual se lograria con multiplicar AB por el coseno del ángulo ABA′, ó el seno del ángulo DBA; en tal caso, conociendo inmediatamente los angulos C′BA′, C′A′B, y la recta A′B, la determinacion del punto C′ entraria en lo que hemos dicho, núm. 40.

No se hace únicamente de los ángulos observados la reduccion al plano horizontal: rara vez resulta que el observador pueda colocarse en los puntos notables que se escogen para vértices de los ángulos, y que comunmente son veletas de campanarios, de torres &c.: de aqui nace una nueva reduccion que se llama *reduccion de los ángulos al centro de la estacion.* Es menester consultar sobre este objeto, como sobre todas las atenciones que exigen las grandes operaciones trigonométricas, la obra de Mr. Delambre, intitulada *Métodos analíticos para la determinacion de un arco de meridiano*, y los tratados de M. Puissant, ya citados.



45. La tercera cuestion que vamos á resolver tiene por objeto *la determinacion de un punto por la observacion de los ángulos comprendidos entre las rectas tiradas desde este punto á tres puntos dados;* ella se presenta como uno de los medios mas cómodos para colocar sobre un plano ó sobre una carta un punto que no esté alli anotado.

Cuando se la considera en el caso mas general, se refiere á la geometría en el espacio, y el autor ha dado la solucion gráfica de ella en el *Complemento de los Elementos de Geometría;* pero cuando los tres ángulos estan en un mismo plano, hay siempre uno que es la suma ó la diferencia de los otros dos, de suerte que basta observar estos para concluir el primero, y pueden reducirse los demas casos á este, con solo haber reducido antes los ángulos al plano horizontal, de lo cual trataremos en el núm. 62.

La solucion gráfica de este caso consiste en describir sobre las líneas AB y AC, fig. 20, que unen los tres puntos dados A, B, C, dos segmentos de círculo capaces de medir los ángulos BDA, CDA observados en el punto D, entre los puntos A y B, A y C. Las circunferencias de los círculos se cortarán desde luego en el punto que se las ha hecho comun por la construccion, y ademas en el punto D, que será evidentemente el punto pedido. Fig. 20.

No entraremos en la discusion de los diferentes casos que puede presentar el problema relativamente á las diversas situaciones respectivas de los puntos dados A, B, C, y del punto buscado D; solo notaremos que la suma de los ángulos observados indica si él está colocado dentro del triángulo ó hácia fuera. En el primer caso la tal suma excede á dos ángulos rectos; en el segundo ella es menor; y si fuese precisamente igual á dos rectos, estaria colocado sobre la línea BC. Esto es muy facil de probar para que nos detengamos en ello.

He aqui uno de los modos de aplicar á este problema el cálculo trigonométrico. Los datos son las partes del triángulo ABC, y los ángulos observados BDA y CDA: por lo tanto haremos

$AB=a$, $AC=b$, $BDA=\alpha$, $CDA=\beta$, $BAC=\gamma$, y por incógnitas tomaremos

$$ABD=x,\ ACD=y;$$

porque luego que esten hallados estos ángulos, se conocerán en los triángulos BAD y DAC dos ángulos y un lado, y se podrán calcular todas las partes que faltan (34). Esto supuesto, los triángulos BAD y DAC darán

$$\text{sen. } BDA : \text{sen. } ABD :: AB : AD,$$

$$\text{sen. } CDA : \text{sen. } ACD :: AC : AD,$$

$$\text{sen. } \alpha : \text{sen. } x :: a : AD = \frac{a \text{ sen. } x}{\text{sen. } \alpha},$$

$$\text{sen. } \beta : \text{sen. } y :: b : AD = \frac{b \text{ sen. } y}{\text{sen. } \beta};$$

igualando los dos valores de AD saldrá

$$\frac{a \text{ sen. } x}{\text{sen. } \alpha} = \frac{b \text{ sen. } y}{\text{sen. } \beta}$$

que equivale á

$$a \text{ sen. } \beta \text{ sen. } x - b \text{ sen. } \alpha \text{ sen. } y = o.$$



Pero en el cuadrilátero ABDC, se tiene

$$ACD = 4 \text{ áng. rec.} - ADB - ADC - BAC - ABD,$$

ó lo que es lo mismo

$$y = 4 \text{ áng. rec.} - \alpha - \beta - \gamma - x;$$

si hacemos para abreviar

$$4 \text{ áng. rec.} - \alpha - \beta - \gamma = \delta,$$

resultará

$$y = \delta - x;$$

por consiguiente, sacando el valor de sen. $y$ de esta ecuacion, y sustituyéndole en la de arriba, saldrá

$$a \text{ sen. } \beta - b \text{ sen. } \alpha\ (\text{sen. } \delta \text{ cos. } x - \text{cos. } \delta \text{ sen. } x) = o;$$

dividiendo todo por sen. $x$, se obtendrá

$$a \text{ sen. } \beta - b \text{ sen. } \alpha \left(\text{sen. } \delta \frac{\text{cos. } x}{\text{sen. } x} - \text{cos. } \delta\right) = o,$$

en fin,

$$\frac{\text{cos. } x}{\text{sen. } x} = \text{cot. } x = \frac{a \text{ sen. } \beta + b \text{ sen. } \alpha \text{ cos. } \delta}{b \text{ sen. } \alpha \text{ sen. } \delta}.$$

Si esta expresion la dividimos en dos partes, se mudará en

$$\text{cot. } x = \frac{a \text{ sen. } \beta}{b \text{ sen. } \alpha \text{ sen. } \delta} + \frac{\text{cos. } \delta}{\text{sen. } \delta},$$

ó

$$\text{cot. } x = \frac{\text{cos. } \delta}{\text{sen. } \delta}\left(\frac{a \text{ sen. } \beta}{b \text{ sen. } \alpha \text{ cos. } \delta} + 1\right);$$

por último

$$\text{cot. } x = \text{cot. } \delta \left(\frac{a \text{ sen. } \beta}{b \text{ sen. } \alpha \text{ cos. } \delta} + 1\right).$$

Con lo que estará la cuestion resuelta; pues conociendo $x$, se tendrá $y$ por la ecuacion $y = \delta - x$.

La fórmula que acabamos de hallar no se presta cómodamente al cálculo logaritmo; por lo mismo resolveremos el problema que nos ocupa, segun lo ha hecho Cagnoli en su tratado de Trigonometría.

Los datos son los mismos que antes, y lo propio sucede á las incógnitas. Ahora bien, los triángulos ABD y ACD dan (núm. 32) $AD=\frac{AB \text{ sen. } ABD}{\text{sen. } BDA}$,

$$AD=\frac{AC \text{ sen. } ACD}{\text{sen. } ADC};$$

igualando estos valores se tendrá

$$\frac{AC \text{ sen. } ACD}{\text{sen. } ADC}=\frac{AB \text{ sen. } ABD}{\text{sen. } BDA};$$

de la cual sale la proporcion

sen. ABD : sen. ACD : : AC sen. BDA : AB sen. ADC,

de la que se deduce

$$\frac{\text{sen. } ABD-\text{sen. } ACD}{\text{sen. } ABD+\text{sen. } ACD}=\frac{AC \text{ sen. } BDA-AB \text{ sen. } ADC}{AC \text{ sen. } BDA+AB \text{ sen. } ADC};$$

y como el primer miembro expresa (núm. 27)

$$\frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD-ACD)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD+ACD)},$$

y ademas pueden dividirse los dos términos del segundo miembro por AC sen. BDA, la última ecuacion se mudará en

$$\frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD-ACD)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD+ACD)}=\frac{1-\frac{AB \text{ sen. } ADC}{AC \text{ sen. } BDA}}{1-\frac{AB \text{ sen. } ADC}{AC \text{ sen. } BDA}};$$

y representando por tang. A el quebrado $\frac{AB \text{ sen. } ADC}{AC \text{ sen. } BDA}$, se sacará

$$\frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD-ACD)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD+ACD)}=\frac{1-\text{tang. } A}{1+\text{tang. } A}.$$

Si recordamos ahora que $\text{tang. }(B+A)=\frac{\text{tang. } B+\text{tang. } A}{1-\text{tang. } B \text{ tang. } A}$, se tendrá haciendo $B=45°$, en cuyo caso tang. $B=1$, la



ecuacion $\frac{1}{\text{tang. }(45°+A)}=\frac{1-\text{tang. } A}{1+\text{tang. } A}$,

ó $\frac{1-\text{tang. } A}{1+\text{tang. } A}=\text{cot. }(45°+A)$,

que combinada con la superior, la muda en

$$\frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD-ACD)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD+ACD)}=\text{cot. }(45°+A),$$

ó $\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD-ACD)=\text{tang. } \frac{1}{2}(ABD+ACD)\times \text{cot. }(45°+A)$.

Conociendo pues el valor de ABD+ACD, que es fácil por la ecuacion $ABD+ACD=360°-BAC-BDC$, tambien lo es el hallar ABD−ACD por la última fórmula; por lo tanto se podrán hallar ABD y ACD, y por lo mismo se tiene lo necesario para calcular BD, AD y CD.

Cuando tang. $\frac{1}{2}$ (ABD−ACD) resulte negativa, se pondrá +tang. $\frac{1}{2}$ (ACD−ABD) en lugar de −tang. $\frac{1}{2}$ (ABD−ACD).

### *Nota sobre la nivelacion.*

Es útil observar como por medio del triángulo rectángulo ABA′, fig. 19, se ha determinado en el núm. 43 la altura AA′ del punto A sobre el punto A′ que le corresponde en el plano A′C′B; porque si este último es horizontal, la línea AA′ es en tal caso la *diferencia de nivel* entre el punto A y el mismo plano, y por consiguiente tambien entre el punto A y el punto B. Fig. 19.

La operacion que hace conocer esta diferencia se llama *nivelacion*; se ejecuta de varios modos segun la naturaleza de los instrumentos que en ella se empleen, y la extension de los espacios que se han de nivelar; pero siempre se tiene por objeto *determinar cuánto un punto* *está mas alto ó mas bajo que otro en el sentido vertical, ó perpendicularmente á la superficie terrestre.* Existen tratados de nivelacion que el lector podrá consultar; pero debemos advertir que desde que se posee en el *círculo repetidor* un instrumento portátil propio para medir los ángulos con la mayor exactitud, se puede, como lo hemos hecho en el núm. 43, hallar inmediatamente la diferencia de nivel de dos puntos por la medida del ángulo que forma con la vertical que pasa por uno de estos puntos la recta que los une.

Se ha supuesto en el texto que las rectas DB y AA′ eran paralelas entre sí; pero esta circunstancia solo es admisible para cuando las verticales se hallan en un espacio muy pequeño á causa de la convexidad de la superficie terrestre. Suponiéndola esférica, lo que difiere poco de la exactitud, las verticales concurren en el centro C, como lo
Fig. 21. manifiestan las líneas AC y BC, fig. 21; la línea BA, perpendicular á BD será tangente á la superficie en el punto B, y la diferencia de nivel, segun la definicion dada antes, será A$\alpha$ y no AA′, esto es, la diferencia entre los lados BC y AC del triángulo ABC, en el cual se conoce el lado AB medido, el lado BC igual al radio medio de la tierra, el cual es de 1122 leguas, en números redondos, en fin el ángulo B comprendido entre estos lados y suplemento del ángulo observado DBA. Esto supuesto, si se hace

$$\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{AC}=b,\ \mathrm{AB}=c,$$

se obtendrá (36)

$$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos.\mathrm{B}};$$

y como $c$ es siempre muy pequeño respecto á $a$, daremos á esta expresion la forma



$$b=a\sqrt{\left\{1+\frac{c^2-2ac\cos.\mathrm{B}}{a^2}\right\}}$$

$$=a\sqrt{\left\{1+\frac{2c}{a}\left(\frac{c}{2a}-\cos.\mathrm{B}\right)\right\}}.$$

Si hacemos para abreviar $\frac{c}{2a}-\cos.\mathrm{B}=m$, se podrá extraer la raiz cuadrada, y resultará

$$b=a\sqrt{\left\{1+\frac{2cm}{a}\right\}}$$

$$=a\left\{1+\frac{cm}{a}-\frac{1}{2}\,\frac{c^2m^2}{a^2}+\&c.\right\};$$

y como la línea buscada A$\alpha$ es igual á $b-a$, supondremos $b=a+\delta$, de cuya suposicion resultará despues de reducir $\quad \delta=cm-\frac{1}{2}\frac{c^2m^2}{a^2}+\&c.$

La cantidad $m$ y sus potencias se calculan facilmente por los logaritmos con solo tomar $\frac{c}{2a}=\cos.\mathrm{B}'$, pues en tal caso $\frac{c}{2a}-\cos.\mathrm{B}=\cos.\mathrm{B}'-\cos.\mathrm{B}=2\ \mathrm{sen.}\ \frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{B}')$ $\mathrm{sen.}\ \frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{B}')$, luego

$$m=2\ \mathrm{sen.}\ \tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{B}')\ \mathrm{sen.}\ \tfrac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{B}').$$

Cuando el ángulo B es recto, la línea BA se confunde con BA′; y si se considera en tal caso el punto $\alpha'$, interseccion de BA′ y del radio AC, se tendrá $c=\mathrm{B}\alpha'$, y $\delta$ se mudará en $\alpha\alpha'$, esto es, la distancia entre el punto $\alpha'$ tomado sobre la tangente y el punto $\alpha$ que le corresponde sobre la superficie terrestre, ó la *diferencia entre el nivel aparente y el nivel real.* En este caso $m=\frac{c}{2a}$; asi se tendrá

$$\delta = \frac{c^2}{2a} - \frac{c^4}{8a^3} + \&c.;$$

cuyo resultado hace conocer cuanto es lo que está mas baja la superficie terrestre que la tangente á una distancia $c$ del punto de contacto.

Comunmente se refiere primero el punto A á A′ sobre la tangente BA′; despues, á causa de la pequeñez del ángulo C, se mira las rectas AA′ y A$\alpha'$ como que se confunden, y se toma por A$\alpha$ la suma de las rectas AA′ y $\alpha\alpha'$.

Podemos pasarnos sin medir la distancia AB con tal que se observe el ángulo EAB al mismo tiempo que el DBA. En cuyo caso se conocen en el triángulo ABC los dos ángulos B y A, suplementos de los observados, y se tendrá (35) $\frac{b-a}{b+a} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(A-B)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(A+B)}$.

Si hacemos para abreviar $\frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(A-B)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(A+B)} = m$, y $b = a + \delta$, se hallará

$$\frac{\delta}{2a+\delta} = m, \qquad \text{ó } \delta = \frac{2am}{1-m};$$

pero $\frac{1}{1-m} = 1 + m + m^2 + \&c.$ (*Elem. de Algeb.*),

luego $\delta = 2am\,(1 + m + m^2 + \&c.)$

serie muy convergente cuando los ángulos A y B se aproximan á ser rectos. Comunmente bastará el primer término.

Cuando la operacion es delicada, ó quiera tenerse con mas exactitud, es necesario corregir los ángulos EAB y DBA de la *refraccion* que experimentan los rayos de luz atravesando el aire, desde A hasta B: nuestro objeto principal en referir las dos cuestiones anteriores ha sido para que sirvan de ejemplo de aplicacion de las series á la resolucion aproximada de ciertos casos de los triángulos.



# CAPÍTULO II.

## DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

46. Los triángulos esféricos, que por lo comun se calculan, son los que forman sobre la superficie de la esfera tres círculos máximos que se cortan de dos en dos. Un triángulo de esta especie determina siempre un ángulo triedro; y recíprocamente de un ángulo semejante se deduce tambien un triángulo esférico. En efecto, sea ABC, fig. 22, un triángulo esférico cualquiera, y que Fig. 22.
se haya tirado desde cada uno de sus ángulos al centro de la esfera de que hace parte los radios AS, BS, CS; los planos ABS, ACS, BCS serán los de los círculos máximos, sobre los cuales estan tomados los arcos AB, AC, BC, lados del triángulo propuesto, y estos arcos medirán los ángulos rectilíneos comprendidos sobre cada una de las caras del ángulo triedro SABC, entre sus aristas SA y SB, SA y SC, SB y SC. La inclinacion de dos planos se mide, como se sabe, por el ángulo rectilíneo formado por dos rectas tiradas en cada uno de estos planos por un mismo punto de su comun seccion, perpendicularmente á esta línea: se sigue de aqui que si por el punto A se tiran las rectas AI y AK, perpendiculares una y otra á AS, pero la primera en el plano CAS, y la segunda en el plano BAS, el ángulo rectilíneo IAK medirá la inclinacion de estos dos planos. Es muy facil de ver que la línea AI será tangente al arco AC, y que AK será tangente al arco AB; y como se toma para el ángulo que forman dos líneas curvas, el que comprenden las tangentes tiradas al punto en que ellas se encuentran, el

ángulo IAK será pues tambien la medida del ángulo formado por los arcos AC y AB. Lo mismo diríamos de los demas ángulos del triángulo; las inclinaciones de las caras del ángulo triedro SABC tienen pues la misma medida que el ángulo correspondiente del triángulo esférico ABC. El triángulo esférico y el ángulo triedro se hallan compuestos de seis partes que se corresponden, á saber: los tres lados del triángulo que corresponden á los ángulos que forman entre sí las aristas del ángulo triedro, y los tres ángulos del triángulo que corresponden á las inclinaciones recíprocas de las caras del ángulo triedro.

Euler, que se ha ocupado en muchas ocasiones de la trigonometría esférica, con el fin de presentarla bajo de aspectos nuevos, ha dado en 1779 * una memoria, que puede mirarse como un tratado nuevo de este ramo de las matemáticas. Su forma, enteramente analítica, nos obliga á presentarla á nuestros lectores, haciendo en ella las variaciones precisas para apoyarla sobre un solo principio, y simplificar algunos resultados.

47. Todo lo que vamos á exponer sobre los triángulos esféricos está fundado únicamente sobre la construccion siguiente, que es muy importante percibir bien.

Desde el ángulo C del triángulo ABC se baja una perpendicular CD al plano ASB del lado BA opuesto á este ángulo; desde el punto D se tiran las líneas ED, DF respectivamente perpendiculares á las SA y SB; tírense despues las líneas CE y CF, que serán respectivamente perpendiculares á las líneas SA y SB (*Geometría*). Se sigue de aqui que los ángulos CED y CFD medirán las

* Acta Academiæ Scientiarum Petropolitanæ, anno 1779, pars prior: véase tambien el *Desenvolvimiento de la parte elemental de las matemáticas, por Bertrand. Geneve 1778.* (T. II, pág. 576).



inclinaciones de los planos CSA y CSB sobre el plano ASB, ó lo que es lo mismo, darán el valor de los ángulos A y B del triángulo esférico ABC. Designaremos los ángulos de estos triángulos por la letra colocada en su vértice, y los lados que les son opuestos por una letra semejante, pero minúscula; aqui, como en el número 31, el lado BC opuesto al ángulo A, será llamado $a$, y asi de los demas. Suponiendo el radio de las tablas igual á 1, se tendrá

$$CE = \text{sen. } CA = \text{sen. } b, \qquad SE = \text{cos. } CA = \text{cos. } b,$$
$$CF = \text{sen. } CB = \text{sen. } a, \qquad SF = \text{cos. } CB = \text{cos. } a.$$

En el triángulo rectilíneo CDE, rectángulo en D, y cuyo ángulo CED = A, se hallará

$$CD = CE \text{ sen. } CED = \text{sen. } b \text{ sen. } A,$$
$$DE = CE \text{ cos. } CED = \text{sen. } b \text{ cos. } A.$$

Del triángulo rectilíneo CDF, rectángulo en D, y en el cual el ángulo CFD = B, se obtendrá

$$CD = CF \text{ sen. } CFD = \text{sen. } a \text{ sen. } B,$$
$$DF = CF \text{ cos. } CFD = \text{sen. } a \text{ cos. } B.$$

Igualando los dos valores de CD, se sacará

$$\text{sen. } b \text{ sen. } A = \text{sen. } a \text{ sen. } B \ldots\ldots (A);$$

resultado que es, respecto á los triángulos esféricos, el análogo del número 32.

Es bien claro que se deben tener del mismo modo las dos ecuaciones

$$\text{sen. } c \text{ sen. } A = \text{sen. } a \text{ sen. } C,$$
$$\text{sen. } c \text{ sen. } B = \text{sen. } b \text{ sen. } C.$$

Ahora bien, por el punto E tírese EG perpendicular á SB, y por el punto D tírese DH paralela á SB; de este modo se formará un triángulo rectángulo HDE, en el cual HED = ASB, puesto que restando el ángulo GES del ángulo recto SED, se tendrá por resta HED, y que el ángulo ASB ó ESG es tambien la diferencia entre un ángulo recto y el ángulo GES. De la resolucion del triángulo EHD se deducirá

$\text{HD}=\text{DE sen. DEH}=\text{DE sen. }c=\text{cos. A sen. }b\text{ sen. }c$;

pero $\text{SF}=\text{cos. }a=\text{SG}+\text{GF}=\text{SG}+\text{HD}$; y como $\text{SG}=\text{SE cos. ESG}=\text{cos. }b\text{ cos. }c$, se tendrá

$$\text{cos. }a=\text{cos. }b\text{ cos. }c+\text{cos. A sen. }b\text{ sen. }c;$$

cuya ecuacion expresa la relacion que existe entre el lado $a$, los otros lados $b$ y $c$, y el ángulo que ellos comprenden.

Es evidente que considerando en particular cada uno de estos últimos, se hallarán del mismo modo dos ecuaciones semejantes á la anterior; y se formarán entre las seis partes del triángulo ABC las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos. }a=\text{cos. }b\text{ cos. }c+\text{cos. A sen. }b\text{ sen. }c\\ \text{cos. }b=\text{cos. }a\text{ cos. }c+\text{cos. B sen. }a\text{ sen. }c\\ \text{cos. }c=\text{cos. }a\text{ cos. }b+\text{cos. C sen. }a\text{ sen. }b\end{array}\right\}\ldots\text{(B)}.$$

48. Estas tres ecuaciones encierran implícitamente la ecuacion (A). Para convencerse de ello basta tomar los valores que dan para cos. A, cos. B, cos. C, y sustituirlos en las ecuaciones:

$$\text{sen.}^2\text{A}=1-\text{cos.}^2\text{A},$$
$$\text{sen.}^2\text{B}=1-\text{cos.}^2\text{B},$$
$$\text{sen.}^2\text{C}=1-\text{cos.}^2\text{C}.$$

Por lo que hace á la primera de ellas, se tendrá

$$\text{sen.}^2\text{A}=1-\frac{\text{cos.}^2 a-2\text{ cos. }a\text{ cos. }b\text{ cos. }c+\text{cos.}^2 b\text{ cos.}^2 c}{\text{sen.}^2 b\text{ sen.}^2 c}=$$

$$\frac{\text{sen.}^2 b\text{ sen.}^2 c-\text{cos.}^2 a+2\text{ cos. }a\text{ cos. }b\text{ cos. }c-\text{cos.}^2 b\text{ cos.}^2 c}{\text{sen.}^2 b\text{ sen.}^2 c}=$$

$$\frac{(1-\text{cos.}^2 b)(1-\text{cos.}^2 c)-\text{cos.}^2 b\text{ cos.}^2 c-\text{cos.}^2 a+2\text{ cos. }a\text{ cos. }b\text{ cos. }c}{\text{sen.}^2 b\text{ sen.}^2 c}=$$

$$\frac{1-\text{cos.}^2 a-\text{cos.}^2 b-\text{cos.}^2 c+2\text{ cos. }a\text{ cos. }b\text{ cos. }c}{\text{sen.}^2 b\text{ sen.}^2 c};$$



multiplicando ahora los dos términos de esta fraccion por $\text{sen.}^2 a$, y tomando despues la raiz cuadrada, se obtendrá

$$\text{sen. A}=\text{sen. }a\times\frac{\sqrt{1-\text{cos.}^2 a-\text{cos.}^2 b-\text{cos.}^2 c+2\text{ cos. }a\text{ cos. }b\text{ cos. }c}}{\text{sen. }a\text{ sen. }b\text{ sen. }c}$$

Si para abreviar se representa por M la cantidad que multiplica á sen. $a$ en el segundo miembro de esta ecuacion, se tendrá

$$\text{sen. A}=\text{M sen. }a:$$

del mismo modo se hallará

$$\text{sen. B}=\text{M sen. }b,\qquad \text{sen. C}=\text{M sen. }a;$$

y por la eliminacion de M en estas tres ecuaciones, volveremos á encontrar las ecuaciones (A). Es conveniente notar que los tres lados $a$, $b$, $c$ entran todos del mismo modo en la expresion de M; esta es la razon por que M es comun á los valores de los senos de cada uno de los ángulos *, cuya circunstancia hemos visto (núm. 39) verificarse tambien en los triángulos rectilíneos.

Las ecuaciones (B) bastarán pues para resolver un triángulo esférico cualquiera cuando se conozcan tres partes de las seis que en él se consideran, observando que el seno y el coseno no deben ser mirados sino como una sola incógnita, pues se pueden expresar el uno por el otro.

La aplicacion de las ecuaciones (B) á los diferentes

* Designando por N el numerador de la cantidad M por $\gamma$, $\beta$, $\alpha$, tres aristas contiguas de un tetraedro cualquiera, y por $a$, $b$, $c$, los tres ángulos que ellas forman, resulta de una memoria de Euler, que el volúmen de este tetraedro es igual á $\frac{1}{3}\alpha\beta\gamma\times\frac{1}{2}\text{N}$, y que $\frac{1}{2}\text{N}$ equivale á $\sqrt{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(a+b+c)\text{ sen. }\tfrac{1}{2}(a+b-c)\text{ sen. }\tfrac{1}{2}(a+c-b)\text{ sen. }\tfrac{1}{2}(b+c-a)}$. En el tetraedro SABC, $\alpha=\beta=\gamma=1$; su volúmen es en tal caso igual á $\frac{1}{2}\text{N}$ (Véase sobre esto los *Novi Commentarii Acad. Petropolitanæ*, t. IV, pág. 160, y el 6.º *cuaderno del Diario de la escuela politécnica*.

casos que se pueden presentar, resulta mas fácil por medio de algunas trasformaciones que vamos á efectuar.

49. En ellas pueden cambiarse los ángulos en los lados que les son opuestos, y respectivamente, observando de dar el signo $-$ á los cosenos. Para probarlo es menester eliminar cos. $a$ de las dos últimas por medio de la primera; lo que equivale á decir que se saque de la primera el valor de cos. $a$, y se sustituya en las otras dos; se hallará

$$\cos. b = \cos. b \cos.^2 c + \cos. A \text{ sen. } b \text{ sen. } \cos. c + \cos. B \text{ sen. } a \text{ sen. } c$$

$$\cos. c = \cos.^2 b \cos. c + \cos. A \text{ sen. } b \text{ sen. } c \cos. b + \cos. C \text{ sen. } a \text{ sen. } b.$$

Sustituyendo en estos resultados por cos.$^2$ $c$ y cos.$^2$ $b$ sus equivalentes $1 - \text{sen.}^2 c$ y $1 - \text{sen.}^2 b$ se podrán reducir; en tal caso se hallarán divisibles el primero por sen. $c$, y el segundo por sen. $b$, despues de lo cual pueden escribirse asi

$$\left.\begin{array}{l}\cos. B \text{ sen. } a = \cos. b \text{ sen. } c - \cos. A \text{ sen. } b \cos. c \\ \cos. C \text{ sen. } a = \text{sen. } b \cos. c - \cos. A \cos. b \text{ sen. } c\end{array}\right\} \ldots (C).$$

*Si se multiplica la segunda de estas ecuaciones por* cos. A, y el resultado se añade á la primera, se obtendrá, despues de sustituir $1 - \text{sen.}^2 A$ por cos.$^2$ A, la siguiente

$$\text{sen. } a (\cos. B + \cos. A \cos. C = \text{sen.}^2 A \cos. b \text{ sen. } c;$$

pero se infiere de las ecuaciones (A) que sen. $c$ sen. A $=$ sen. $a$ sen. C; si sustituimos este valor de sen. $c$ sen. A en el segundo miembro de la ecuacion anterior, ella será divisible por sen. $a$, y se tendrá por resultado

$$\cos. B + \cos. A \cos. C = \cos. b \text{ sen. } A \text{ sen. } C,$$

ó, lo que es lo mismo,

$$\cos. B = - \cos. A \cos. C + \cos. b \text{ sen. } A \text{ sen. } C.$$



Observando la composicion de esta ecuacion y las ecuaciones (B), se ve que ella se deduce de la segunda de las (B) con solo cambiar las letras mayúsculas en minúsculas, y al contrario dando el signo $-$ á todos los cosenos. En efecto, haciendo lo dicho resulta que la tal segunda ecuacion de las (B) se muda en

$$- \cos. B = \cos. A \cos. C - \cos. b \text{ sen. } A \text{ sen. } C,$$

ecuacion, que es la anterior, cuando se cambian en ella los signos.

La relacion que tiene el ángulo B con los otros dos A, C, y el lado $b$ que ellos interceptan, existe necesariamente en cada una de las combinaciones semejantes de ángulos y lados; se tendrán pues al mismo tiempo las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\cos. A = - \cos. B \cos. C + \cos. a \text{ sen. } B \text{ sen. } C \\ \cos. B = - \cos. A \cos. C + \cos. b \text{ sen. } A \text{ sen. } C \\ \cos. C = - \cos. A \cos. B + \cos. c \text{ sen. } A \text{ sen. } B\end{array}\right\} \ldots (B').$$

50. Es menester notar que tomando los cosenos negativos, se pasa de los arcos $a$, $b$, $c$ y de los ángulos A, B, C á sus suplementos, porque $-\cos. A = \cos. (\pi - A)$, $-\cos. a = \cos. (\pi - a)$, y asi de los demas (23). Si se sustituyen estos valores en las ecuaciones anteriores, haciendo para abreviar $\pi - A = A'$, $\pi - a = a'$ &c., ellas se mudarán en

$$\left.\begin{array}{l}\cos. A' = \cos. B' \cos. C' + \cos. a' \text{ sen. } B' \text{ sen. } C' \\ \cos. B' = \cos. A' \cos. C' + \cos. b' \text{ sen. } A' \text{ sen. } C' \\ \cos. C' = \cos. A' \cos. B' + \cos. c' \text{ sen. } A' \text{ sen. } B'\end{array}\right\};$$

ecuaciones enteramente semejantes á las (B), y que por lo mismo pertenecen á un triángulo esférico, cuyos lados son A′, B′, C′, y los ángulos $a'$, $b'$, $c'$. Un triángulo de esta especie tiene sus ángulos medidos por los suplementos de los lados del triángulo ABC, y sus lados medirán los suplementos de los ángulos del mismo triángulo: el tal triángulo es designado en los tratados de Trigonometría bajo el nombre de *triángulo suplementario*; y se prueba que los vértices de sus ángulos son los polos de los lados del primero, y *vice-versa*.

51. Las ecuaciones obtenidas en el núm. 49, y señaladas por (C), que encierran cinco partes del triángulo esférico ABC, pueden trasformarse en otras que solo contengan cuatro de dichas partes. Para lograrlo es menester sustituir por sen. $a$ en la primera su equivalente $\frac{\text{sen. } b \text{ sen. A}}{\text{sen. B}}$, y por sen. $a$ en la segunda su igual $\frac{\text{sen. } c \text{ sen. A}}{\text{sen. C}}$ (47), y como $\frac{\text{cos. } p}{\text{sen. } p} = \text{cot. } p$, se hallará

$$\left.\begin{aligned}\text{cot. B} &= \frac{\text{cos. } b \text{ sen. } c - \text{cos. A sen. } b \text{ cos. } c}{\text{sen. A sen. } b}\\ \text{cot. C} &= \frac{\text{sen. } b \text{ cos. } c - \text{cos. A cos. } b \text{ sen. } c}{\text{sen. A sen. } c}\end{aligned}\right\}\ldots\text{(D)}.$$

Si observamos la composicion de estos valores nos será fácil formar los que les son análogos, permutando las letras de un modo conveniente; pero importa notar que por haber sido deducidos de las ecuaciones (B), se podrán cambiar en ellos del mismo modo que en estas los lados en ángulos, y recíprocamente con solo dar á los cosenos y cotangentes un signo contrario al que tienen, con lo que se inferirá

$$\left.\begin{aligned}\text{cot. } b &= \frac{\text{cos. B sen. C} + \text{cos. } a \text{ sen. B cos. C}}{\text{sen. } a \text{ sen. B}}\\ \text{cot. } c &= \frac{\text{sen. B cos. C} + \text{cos. } a \text{ cos. B sen. C}}{\text{sen. } a \text{ sen. C}}\end{aligned}\right\}\ldots\text{(D')}.$$

52. Los cinco sistemas de ecuaciones (A), (B), (B'), (D), (D') dan inmediatamente la resolucion de todos



los casos que puede ofrecer un triángulo esférico cualquiera. El primero expresa la relacion que existe entre los ángulos y los lados opuestos.

53. Del segundo se sacan las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned}\text{cos. } a &= \text{cos. } b \text{ cos. } c + \text{cos. A sen. } b \text{ sen. } c\\ \text{cos. } b &= \text{cos. } a \text{ cos. } c + \text{cos. B sen. } a \text{ sen. } c\\ \text{cos. } c &= \text{cos. } a \text{ cos. } b + \text{cos. C sen. } a \text{ sen. } b\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\text{cos. A} &= \frac{\text{cos. } a - \text{cos. } b \text{ cos. } c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\\ \text{cos. B} &= \frac{\text{cos. } b - \text{cos. } a \text{ cos. } c}{\text{sen. } a \text{ sen. } c}\\ \text{cos. C} &= \frac{\text{cos. } c - \text{cos. } a \text{ cos. } b}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}\end{aligned}\right\},$$

de las cuales las tres primeras hacen conocer un lado por medio de los otros dos y del ángulo que ellos forman, y las tres últimas dan los ángulos por medio de los lados.

54. El tercer sistema da, lo mismo que el anterior, seis fórmulas, que son

$$\left.\begin{aligned}\text{cos. A} &= -\text{cos. B cos. C} + \text{sen. B sen. C cos. } a\\ \text{cos. B} &= -\text{cos. A cos. C} + \text{sen. A sen. C cos. } b\\ \text{cos. C} &= -\text{cos. A cos. B} + \text{sen. A sen. B cos. } c\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{cos. } a &= \frac{\text{cos. A} + \text{cos. B cos. C}}{\text{sen. B sen. C}}\\ \text{cos. } b &= \frac{\text{cos. B} + \text{cos. A cos. C}}{\text{sen. A sen. C}}\\ \text{cos. } c &= \frac{\text{cos. C} + \text{cos. A cos. B}}{\text{sen. A sen. B}}\end{aligned}\right\}.$$

Las tres primeras harán conocer un ángulo cuando se conozca los otros dos, y el lado que ellos comprenden; las tres últimas darán cada uno de los lados cuando todos los ángulos sean conocidos.

55. El cuarto sistema, haciendo en él todas las per-

mutaciones posibles, da las seis fórmulas

$$\cot. A = \frac{\cos. a \text{ sen. } b - \cos. C \text{ sen. } a \cos. b}{\text{sen. } C \text{ sen. } a}$$

$$\cot. B = \frac{\text{sen. } a \cos. b - \cos. C \cos. a \text{ sen. } b}{\text{sen. } C \text{ sen. } b}$$

$$\cot. A = \frac{\cos. a \text{ sen. } c - \cos. B \text{ sen. } a \cos. b}{\text{sen. } B \text{ sen. } a}$$

$$\cot. C = \frac{\text{sen. } a \cos. c - \cos. B \cos. a \text{ sen. } b}{\text{sen. } B \text{ sen. } c}$$

$$\cot. B = \frac{\cos. b \text{ sen. } c - \cos. A \text{ sen. } b \cos. c}{\text{sen. } A \text{ sen. } b}$$

$$\cot. C = \frac{\text{sen. } b \cos. c - \cos. A \cos. b \text{ sen. } c}{\text{sen. } A \text{ sen. } c}$$

por medio de las cuales se determinará dos ángulos de un triángulo esférico cuando se conozca el tercer ángulo y los lados que le comprenden.

56. Ultimamente el quinto sistema conduce á las seis fórmulas siguientes:

$$\cot. a = \frac{\cos. A \text{ sen. } B + \cos. c \text{ sen. } A \cos. B}{\text{sen. } c \text{ sen. } A}$$

$$\cot. b = \frac{\text{sen. } A \cos. B + \cos. c \cos. A \text{ sen. } B}{\text{sen. } c \text{ sen. } B}$$

$$\cot. a = \frac{\cos. A \text{ sen. } C + \cos. b \text{ sen. } A \cos. C}{\text{sen. } b \text{ sen. } A}$$

$$\cot. c = \frac{\text{sen. } A \cos. C + \cos. b \cos. A \text{ sen. } C}{\text{sen. } b \text{ sen. } C}$$

$$\cot. b = \frac{\cos. B \text{ sen. } C + \cos. a \text{ sen. } B \cos. C}{\text{sen. } a \text{ sen. } B}$$

$$\cot. c = \frac{\text{sen. } B \cos. C + \cos. a \cos. B \text{ sen. } C}{\text{sen. } a \text{ sen. } C},$$

que servirán para determinar dos de los lados de un triángulo cuando se conozca el tercero y los dos ángulos, entre los cuales el tal lado conocido está comprendido.



57. Las fórmulas concluidas de los sistemas (B) (B′), (D) y (D′), (53—56) merecen la mayor atencion, tanto por su elegancia como por la propiedad que tienen de hacer conocer si el arco ó el ángulo que expresan es menor ó mayor que un cuadrante ó que un ángulo recto, propiedad que no tenian las expresiones de los senos de los mismos arcos. En efecto, siendo el seno de un arco el mismo que el de su suplemento, tanto por lo que hace á su valor como respecto á su signo, resulta que cuando solo se conozca el seno de un arco, no es posible reconocer si este arco es mayor ó menor que un cuadrante; pero cuando se conozca el coseno ó la tangente, y que ademas se sepa que este arco no pueda ser igual á la semicircunferencia, que es el caso de los triángulos esféricos y de los arcos que miden á sus ángulos, se ve por el signo del resultado si el arco buscado está comprendido entre $\frac{1}{2}\pi$ y $\pi$: el coseno y la cotangente tienen el signo — en el primer caso, y el signo + en el segundo. Luego si se tiene cuidado de dar á las cantidades conocidas que entran en las fórmulas referidas antes, los signos que deben afectarlas segun el valor de los arcos, á los cuales pertenecen, el signo del resultado hará conocer la *especie* del lado ó del ángulo buscado; esto es, si el lado es menor ó mayor que un cuadrante, ó si el ángulo es agudo ú obtuso.

58. Estas mismas fórmulas se simplifican mucho cuando el triángulo propuesto es rectángulo. En efecto, si se supone $C = \frac{1}{2}\pi$, se tendrá

$$\text{sen. } C = 1, \qquad \cos. C = 0;$$

y resultará

$$\cos. c = \cos. a \cos. b \ (53)$$

$$\cos.\ c=\frac{\cos.\ A\ \cos.\ B}{\text{sen.}\ A\ \text{sen.}\ B}=\cot.\ A\ \cot.\ B\ (54)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos.\ A=\text{sen.}\ B\ \cos.\ a\\ \cos.\ B=\text{sen.}\ A\ \cos.\ b\end{array}\right\}(54)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen.}\ a=\text{sen.}\ c\ \text{sen.}\ A\\ \text{sen.}\ b=\text{sen.}\ c\ \text{sen.}\ B\end{array}\right\}(47)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cot.\ b=\dfrac{\cos.\ B}{\text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ B}\\[2ex] \cot.\ a=\dfrac{\cos\ A}{\text{sen}\ b\ \text{sen.}\ A}\\[2ex] \cot.\ c=\dfrac{\cos.\ b\ \cos.\ A}{\text{sen.}\ b}\\[2ex] \cot.\ c=\dfrac{\cos.\ a\ \cos.\ B}{\text{sen.}\ a}\end{array}\right\}\text{(56), de donde sale}\left\{\begin{array}{l}\text{tang.}\ b=\text{sen.}\ a\ \text{tang.}\ B\\[2ex] \text{tang.}\ a=\text{sen.}\ b\ \text{tang.}\ A\\[2ex] \text{tang.}\ b=\cos.\ A\ \text{tang.}\ c\\[2ex] \text{tang.}\ a=\cos.\ B\ \text{tang.}\ c\end{array}\right.$$

y tomando solo de estas fórmulas aquellas que difieren esencialmente entre sí, se tendrán las seis siguientes:

$$\begin{array}{c}\cos.\ c=\cos.\ a\ \cos.\ b\\ \cos.\ c=\cot.\ A\ \cot.\ B\\ \text{sen.}\ a=\text{sen.}\ c\ \text{sen.}\ A\\ \text{tang.}\ a=\text{sen.}\ b\ \text{tang.}\ A\\ \text{tang.}\ a=\cos.\ B\ \text{tang.}\ c\\ \cos.\ A=\text{sen.}\ B\ \cos.\ a,\end{array}$$

las cuales por las inversiones de que son susceptibles bastarán para resolver los triángulos esféricos rectángulos en C, y en los que $c$, opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*, del mismo modo que en los rectilíneos. Se podrian sacar fórmulas análogas para el caso en que el triángulo esférico propuesto tuviese uno de sus lados igual á un cuadrante; pero no nos detendremos en él.

59. Con el fin de poder aplicar cómodamente los logaritmos a los cálculos de los triángulos esféricos, debemos trasformar las fórmulas de los núms. 53 y 54 en



otras, en que el numerador y el denominador esten descompuestos en sus factores; esto es lo que Euler ha hecho de un modo muy simple y elegante.

1.° De la expresion $\cos.\ A=\dfrac{\cos.\ a-\cos.\ b\ \cos.\ c}{\text{sen.}\ b\ \text{sen.}\ c}$, comprendida entre las del número 53, se saca

$$1-\cos.\ A=\frac{\cos.\ (b-c)-\cos.\ a}{\text{sen}\ b\ \text{sen.}\ c}\ (11)$$

$$1+\cos.\ A=\frac{\cos.\ a-\cos.\ (b+c)}{\text{sen.}\ b\ \text{sen.}\ c},$$

si se divide una por otra estas ecuaciones, y se tiene presente que $\dfrac{1-\cos.\ A}{1+\cos.\ A}=\text{tang.}^2\ \tfrac{1}{2}\ A\ (27)$, se sacará

$$\text{tang.}^2\ \tfrac{1}{2}\ A=\frac{\cos.\ (b-c)-\cos.\ a}{\cos.\ a-\cos.\ (b+c)},$$

pero $\cos.\ p-\cos.\ q=-2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)\ (27)$ luego

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}\ (b-c+a)\ \text{sen.}\ \frac{1}{2}\ (b-c-a)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}\ (a+b+c)\ \text{sen.}\ \frac{1}{2}\ (a-b-c)}}.$$

Si hacemos lo mismo con las demas expresiones del núm. 53, obtendremos resultados semejantes.

2.° Tomando en el núm. 54 la expresion

$$\cos.\ a=\frac{\cos.\ A+\cos.\ B\ \cos.\ C}{\text{sen.}\ B\ \text{sen.}\ C},$$

se deduce de ella

$$1-\cos.\ a=-\frac{\cos.\ (B+C)+\cos.\ A}{\text{sen.}\ B\ \text{sen.}\ C},$$

$$1+\cos.\ a=\frac{\cos.\ A+\cos.\ (B-C)}{\text{sen.}\ B\ \text{sen.}\ C},$$

de las cuales sale la siguiente

$$\text{tang.}^2\, \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos.\,(B+C)+\cos.\,A}{\cos.\,(B-C)+\cos.\,A};$$

pero $\cos.\, p + \cos.\, q = 2 \cos.\, \tfrac{1}{2}(p+q) \cos.\, \tfrac{1}{2}(p-q)$ (27), luego

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos.\,\tfrac{1}{2}(B+C+A)\cos.\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\cos.\,\tfrac{1}{2}(B-C+A)\cos.\,\tfrac{1}{2}(B-C-A)}};$$

esta fórmula no resulta imaginaria por la presencia del signo $-$ del numerador, puesto que $A+B+C$ excede siempre á un cuadrante, y tiene por lo mismo el coseno el signo negativo *.

3.° Las expresiones del núm. 53 dan tambien

$$\cos.\, a - \cos.\, b \cos.\, c = \text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c \cos.\, A$$
$$\cos.\, b - \cos.\, a \cos.\, c = \text{sen}\ a\ \text{sen.}\, c \cos.\, B;$$

dividiendo la primera de estas ecuaciones por la segunda, y observando que, segun las ecuaciones (A), se tiene

* Euler, con el fin de dar mas uniformidad á sus resultados, emplea las tangentes para hallar el valor de los arcos; pero se puede por medio de lo que precede llegar mas simplemente al valor de los arcos empleando los senos.

1.° Se sabe núm. 27 que $1 - \cos.\, A = 2\, \text{sen.}^2\, \tfrac{1}{2} A$, y por la fórmula

$$\cos.\, p - \cos.\, q = -2\, \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(p+q)\, \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(p-q),$$

se hallará

$$\cos.\,(b-c) - \cos.\, a = -2\, \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(b-c+a)\, \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(b-c-a);$$

ó cambiando el signo del arco $b-c-a$, y el de su seno se tendrá

$$\cos.\,(b-c) - \cos.\, a = 2\, \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(a+b-c)\, \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(a+c-b);$$

poniendo estos valores en el de $1 - \cos.\, A$, y sacando la raiz cuadrada de cada miembro, saldrá

$$\text{sen.}\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(a+b-c)\, \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c}}.$$

2.° Si se observa que $1 - \cos.\, a = 2\, \text{sen.}^2\, \tfrac{1}{2} a$ y que la expresion de $\cos.\, p + \cos.\, q$ da $\cos.\,(B+C) + \cos.\, A = 2 \cos.\, \tfrac{1}{2}(B+C+A) + \tfrac{1}{2}(B+C-A)$, se hallará

$$\text{sen.}\, \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos.\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen.}\, B\, \text{sen.}\, C}}$$



$$\frac{\text{sen.}\, b}{\text{sen.}\, a} = \frac{\text{sen.}\, B}{\text{sen.}\, A},$$

se hallará

$$\frac{\cos.\, a - \cos.\, b \cos.\, c}{\cos.\, b - \cos.\, a \cos.\, c} = \frac{\text{sen.}\, B \cos\ A}{\text{sen.}\, A \cos.\, B}.$$

Si añadimos la unidad á cada uno de los miembros de la última ecuacion, saldrá

$$1 + \frac{\cos.\, a - \cos.\, b \cos.\, c}{\cos.\, b - \cos.\, a \cos.\, c} = 1 + \frac{\text{sen.}\, B \cos.\, A}{\text{sen.}\, A \cos.\, B};$$

y si se reducen los dos términos de cada miembro de la última á un comun denominador, ella se mudará en

$$\frac{(\cos.\, a + \cos.\, b)(1 + \cos.\, c)}{\cos\, b - \cos.\, a \cos.\, c} = \frac{\text{sen.}\,(A+B)}{\text{sen.}\, A \cos.\, B}.$$

Si en lugar de añadir la unidad á la ecuacion de arriba se la hubiésemos quitado, hubiera resultado la siguiente

$$\frac{\cos.\, a - \cos.\, b \cos.\, c}{\cos.\, b - \cos.\, a \cos.\, c} - 1 = \frac{\text{sen.}\, B \cos.\, A}{\text{sen.}\, A \cos.\, B} - 1;$$

de la cual se sacará

$$\frac{(\cos.\, a - \cos.\, b)(1 + \cos.\, c)}{\cos.\, b - \cos.\, a \cos.\, c} = \frac{\text{sen.}\,(B-A)}{\text{sen.}\, A \cos.\, B}.$$

Dividiendo este resultado por el anterior, se obtendrá

$$\frac{\cos.\, a - \cos.\, b}{\cos.\, a + \cos.\, b} \times \frac{1 + \cos.\, c}{1 - \cos.\, c} = \frac{\text{sen.}\,(B-A)}{\text{sen.}\,(B+A)},$$

y como segun el cuadro de la página 39 se tiene

$$\frac{\cos.\, a - \cos.\, b}{\cos.\, a + \cos.\, b} = \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}(b+a)\, \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}(b-a),$$

$$\frac{1 + \cos.\, c}{1 - \cos.\, c} = \cot.^2\, \tfrac{1}{2} c,\ \text{sen.}\, p = 2\ \text{sen.}\, \tfrac{1}{2} p \cos.\, \tfrac{1}{2} p,$$

se podrá concluir

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}(b-a)\, \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}(b+a)\, \cot.^2\, \tfrac{1}{2} c$$

$$= \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(B-A) \cos. \frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(B+A) \cos. \frac{1}{2}(B+A)} \ldots\ldots\ldots (a).$$

Ahora bien, si se añade y quita sucesivamente la unidad á cada uno de los miembros de la ecuacion $\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } a} = \frac{\text{sen. B}}{\text{sen. A}}$, y despues se dividen uno por otro los dos resultados que se obtengan, se hallará la ecuacion

$$\frac{\text{sen. } b - \text{sen. } a}{\text{sen. } b + \text{sen. } a} = \frac{\text{sen. B} - \text{sen. A}}{\text{sen. B} + \text{sen. A}},$$

la cual puede trasformarse por las fórmulas del cuadro de la página 39 en la siguiente

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(b-a) \cot. \tfrac{1}{2}(b+a) = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(B-A) \cos. \frac{1}{2}(B+A)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(B+A) \cos. \frac{1}{2}(B-A)};$$

multiplicando entre sí miembro con miembro esta ecuacion y la $(a)$, y teniendo presente que

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(b+a) \cot. \tfrac{1}{2}(b+a) = 1 \ (9),$$

se sacará

$$\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}(b-a) \cot.^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{sen.}^2 \frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2}(B+A)};$$

extrayendo despues la raiz cuadrada de cada miembro, resultará

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(b-a) \cot. \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(B+A)};$$

y dividiendo la ecuacion $(a)$ por esta última, se sacará

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) \cot. \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos. \frac{1}{2}(B-A)}{\cos. \frac{1}{2}(B+A)}.$$

Observando que $\frac{1}{\cot. p} = \text{tang. } p$ (9), podremos deducir de las dos ecuaciones anteriores las siguientes

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(b-a) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \ \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(B+A)}$$



$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(b+a) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \ \frac{\cos. \frac{1}{2}(B-A)}{\cos. \frac{1}{2}(B+A)}:$$

las cuales proporcionan hallar dos lados de un triángulo esférico cuando se conozcan dos ángulos y el lado comprendido, puesto que designando en ellas por $b'$ y $a'$, los valores de los arcos $b+a$ y $b-a$ resultará

$$b = \tfrac{1}{2}(b'+a'), \quad a = \tfrac{1}{2}(b'-a').$$

4.° Tomando ahora en el núm. 54 las ecuaciones

$$\cos. A + \cos. B \cos. C = \text{sen. B sen. C} \cos. a$$
$$\cos. B + \cos. A \cos. C = \text{sen. A sen. C} \cos. b,$$

y dividiendo la primera por la segunda, se encontrará

$$\frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\cos. B + \cos. A \cos. C} = \frac{\text{sen. B} \cos. a}{\text{sen. A} \cos. b} = \frac{\text{sen. } b \cos. a}{\text{sen. } a \cos. b}.$$

Añadiendo y restando sucesivamente la unidad á cada uno de los miembros de la última, dividiendo despues los resultados uno por otro, se concluirá como anteriormente la ecuacion

$$\frac{\cos. A - \cos. B}{\cos. A + \cos. B} \times \frac{1 - \cos. C}{1 + \cos. C} = \frac{\text{sen. } (b-a)}{\text{sen. } (b+a)}$$

ó $\quad \text{tang. } \tfrac{1}{2}(B-A) \text{ tang. } \tfrac{1}{2}(B+A) \text{ tang.}^2 \tfrac{1}{2} c$

$$= \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(b-a) \cos. \frac{1}{2}(b-a)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(b+a) \cos. \frac{1}{2}(b+a)} \ldots\ldots (b);$$

y como la

$$\frac{\text{sen } b - \text{sen. } a}{\text{sen. } b + \text{sen. } a} = \frac{\text{sen. B} - \text{sen. A}}{\text{sen. B} + \text{sen. A}},$$

empleada en la trasformacion anterior, puede escribirse asi

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B-A) \cot. \tfrac{1}{2}(B+A) = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(b-a) \cos. \frac{1}{2}(b+a)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(b+a) \cos. \frac{1}{2}(b-a)};$$

multiplicando y dividiendo la ecuacion $(b)$ por la última que hemos hallado, obtendremos los dos resultados

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(B-A)=\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,C\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(b-a)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(b+a)}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(B+A)=\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,C\,\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(b-a)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(b+a)};$$

cuyas dos fórmulas sirven para reemplazar á las anteriores del núm. 54 cuando se conozcan dos lados y el ángulo que ellos forman.

60. Si tomamos todas las variaciones de que son susceptibles las fórmulas halladas, encontraremos

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+b-c)\ \text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+c-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(b+c-a)\ \text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+b+c)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(b+c-a)\ \text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+b-c)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+c-b)\ \text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+b+c)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+c-b)\ \text{sen. } \frac{1}{2}\,(b+c-a)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+b-c)\ \text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+b+c)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\text{cos. } \frac{1}{2}\,(B+C-A)\ \text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+B+C)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+B-C)\ \text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+C-B)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,b=\sqrt{\frac{-\text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+C-B)\ \text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+B+C)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(B+C-A)\ \text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+B-C)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,c=\sqrt{\frac{-\text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+B-C)\ \text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+B+C)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+C-B)\ \text{cos. } \frac{1}{2}\,(B+C-A)}}\ *$$

$$\text{tang. } \frac{b-a}{2}=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,c\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(B-A)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(B+A)}$$

$$\text{tang. } \frac{b+a}{2}=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,c\,\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(B-A)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(B+A)}$$

* Para sacar estas fórmulas de sus análogas del número anterior, es menester observar que $\alpha-\beta-\delta=\alpha-(\beta+\delta)$, y que sen. $(p-q)=-$sen. $(q-p)$, cos. $(p-q)=$cos. $(q-p)$.



$$\text{tang. } \frac{c-b}{2}=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(C-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(C+B)}$$

$$\text{tang. } \frac{c+b}{2}=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a\,\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(C-B)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(C+B)}$$

$$\text{tang. } \frac{a-c}{2}=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,b\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(A-C)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(A+C)}$$

$$\text{tang. } \frac{a+c}{2}=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,b\,\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(A-C)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(A+C)}$$

$$\text{tang. } \frac{B-A}{2}=\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,C\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(b-a)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(b+a)}$$

$$\text{tang. } \frac{B+A}{2}=\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,C\,\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(b-a)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(b+a)}$$

$$\text{tang. } \frac{C-B}{2}=\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,A\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(c-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(c+b)}$$

$$\text{tang. } \frac{C+B}{2}=\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,A\,\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(c-b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(c+b)}$$

$$\text{tang. } \frac{A-C}{2}=\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,B\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(a-c)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(a+c)}$$

$$\text{tang. } \frac{A+C}{2}=\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,B\,\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(a-c)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(a+c)}.$$

De las doce fórmulas que acabamos de sacar podemos deducir las siguientes, las cuales sirven para hallar el tercer ángulo ó el tercer lado de un triángulo, en el cual se conocen dos lados y los ángulos opuestos.

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,c=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(b-a)\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(B+A)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(B-A)}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,c=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(b+a)\,\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(B+A)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(B-A)}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(c-b)\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(C+B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(C-B)}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(c+b)\,\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(C+B)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\,(C-B)}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, b = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a-c)\,\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(A+C)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(A-C)}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, b = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a+c)\,\frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(A+C)}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(A-C)}$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\, C = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(B-A)\,\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(b+a)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(b-a)}$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\, C = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(B+A)\,\frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(b+a)}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(b-a)}$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\, A = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(C-B)\,\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(c+b)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(c-b)}$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\, A = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(C+B)\,\frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(c+b)}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(c-b)}$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\, B = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(A-C)\,\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(a+c)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(a-c)}$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\, B = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(A+C)\,\frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(a+c)}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(a-c)} \; *.$$

Si se unen á estas ecuaciones las (A) del núm. 47, que sirven para cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, ó dos ángulos, y el lado opuesto á uno de ellos, se tendrá todo lo necesario para resolver un triángulo esférico: lo que precede puede muy bien mirarse como un tratado completo de trigonometría esférica. Combinando entre sí las diversas fórmulas obtenidas sucesivamente, podríamos deducir otras muchas de un uso bastante comun en los cálculos astronómicos: tocante á este punto se debe á Mr. Delambre resultados muy elegantes y multiplicados, con importantes aplicaciones de los métodos aproximativos, ó de las series, en los casos en que ellas son susceptibles.

* Estas fórmulas y las anteriores son conocidas bajo el nombre de Analogías de Neper; porque ellas se deducen de las reglas dadas por este geómetra para resolver los triángulos esféricos (*Logarithmorum canonis descriptio*).



*Recapitulacion de las fórmulas necesarias para resolver un triángulo esférico cualquiera.*

61. No haciendo uso de las variaciones que puede presentar un mismo caso, hallaremos solo las seis siguientes:

1.° *Conociendo los tres lados* ($a$, $b$, $c$), *hallar uno de los ángulos* (A).

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, A = \sqrt{\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(a+b-c)\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(a+c-b)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(b+c-a)\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(a+b+c)}}.$$

2.° *Conociendo los tres ángulos* (A, B, C), *hallar uno de los lados* ($a$).

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{-\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(B+C-A)\ \text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(A+B+C)}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(A+B-C)\ \text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(A+C-B)}} \; *.$$

3.° *Conociendo dos lados* ($b$, $c$) *y el ángulo comprendido* (A), *hallar los otros ángulos* (B, C).

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(B+C) = \frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(b-c)}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(b+c)}\ \text{cot. } \tfrac{1}{2}\, A$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(B-C) = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(b-c)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(b+c)}\ \text{cot. } \tfrac{1}{2}\, A.$$

Para *hallar despues el tercer ángulo* (A) véase la fórmula del sexto caso.

* En lugar de esta fórmula y de la anterior se emplean comunmente las siguientes:

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\, A = \sqrt{\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(a+b-c)\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(a+c-b)}{\text{sen. } b\ \text{sen. } c}}$$

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{-\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(A+B+C)\ \text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(B+C-A)}{\text{sen. B sen. C}}}$$

obtenidas en la nota de la pág. 86, las cuales son análogas á la de que se hace uso para el caso semejante de la trigonometría rectilínea (38).

4.° *Conociendo dos ángulos* (B, C) *y el lado comprendido* ($a$), *hallar los otros lados* ($b$, $c$).

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(b+c)=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B-C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B+C)}\text{ tang. }\tfrac{1}{2}a$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(b-c)=\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(B-C)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(B+C)}\text{ tang. }\tfrac{1}{2}a.$$

Para *hallar despues el tercer ángulo* (A) véase la fórmula del quinto caso.

5.° *Conociendo dos lados* ($a$, $c$) *y un ángulo opuesto* (C), *hallar el ángulo opuesto* (A).

$$\text{sen. A}=\frac{\text{sen. }a\text{ sen. C}}{\text{sen. }c}.$$

6.° *Conociendo dos ángulos* (A, C) *y un lado opuesto* ($c$), *hallar el otro lado opuesto* ($a$).

$$\text{sen. }a=\frac{\text{sen. }c\text{ sen. A}}{\text{sen. C}}.$$

Para *hallar despues*, en estos dos últimos casos, *el ángulo* (B) *y el lado* ($b$) *comprendidos el uno entre los lados, y el otro entre los ángulos dados ó calculados*, se cambiará en las fórmulas del tercero y del cuarto caso $b$ en $a$, B en A, y recíprocamente; lo cual dará

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A+C)=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a-c)}{\cos.\tfrac{1}{2}(a+c)}\text{ cot. }\tfrac{1}{2}B$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}(a+c)=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A-C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(A+C)}\text{ tang. }\tfrac{1}{2}b;$$

y tendremos dos resultados, en los cuales todo es conocido, á excepcion de cot. $\tfrac{1}{2}$ B y de tang. $\tfrac{1}{2}b$, que por lo mismo serán determinadas.

Por medio de esta recapitulacion, y de la que se halla en la pág. 83, nada será mas facil que el resolver un triángulo esférico cualquiera, colocando, segun los enunciados anteriores, las letras A, B, C, $a$, $b$, $c$ en los ángulos y en los lados dados y buscados.



El cálculo aritmético se efectúa por la adicion y sustraccion de los logaritmos del modo indicado en los ejemplos hechos en el núm. 39, con la sola diferencia de que en nuestro caso solo se emplea la tabla de los logaritmos de las líneas trigonométricas, puesto que solo se trata de arcos de círculo.

Cuando en los cuatro primeros casos las circunstancias de la cuestion hiciesen dudar si los arcos ó los ángulos buscados valian mas ó menos de un cuadrante ó de un ángulo recto, se quitaria la dificultad recurriendo á las expresiones de los cosenos y de las cotangentes de las incógnitas (57). Pero en los dos últimos casos puede suceder que la cuestion propuesta sea susceptible de dos soluciones, y nos aseguraríamos de ello fácilmente estudiando el modo de construir un ángulo triedro cuando se conocen dos de sus caras, y la inclinacion de una de ellas sobre la tercera, ó bien cuando se conozca las inclinaciones de dos caras sobre la tercera, y el ángulo de las aristas que determinan una de las primeras. No entraremos aqui en estos pormenores *; pero sí presentaremos los resultados siguientes.

1.° El triángulo esférico no puede existir sino de un solo modo con los datos $a$, $c$ y C,

cuando $C=\tfrac{1}{2}\pi$

$C<\tfrac{1}{2}\pi,\quad a<\tfrac{1}{2}\pi,\quad c>a$

$C<\tfrac{1}{2}\pi,\quad a>\tfrac{1}{2}\pi,\quad c>\pi-a$

* Sobre este punto debe consultarse el *Desenvolvimiento nuevo de la parte elemental de Matemáticas* de Bertrand, tomo segundo, *Trigonometría*, seccion quinta, ó sus *Elementos de Geometría*, tercera parte.

$$C>\tfrac{1}{2}\pi,\quad a<\tfrac{1}{2}\pi,\quad c<\pi-a$$
$$C>\tfrac{1}{2}\pi,\quad a>\tfrac{1}{2}\pi,\quad c<a,$$

el tal triángulo es susceptible de dos formas

$$\text{cuando } C<\tfrac{1}{2}\pi,\quad a<\tfrac{1}{2}\pi,\quad c<a$$
$$C<\tfrac{1}{2}\pi,\quad a>\tfrac{1}{2}\pi,\quad c<\pi-a$$
$$C>\tfrac{1}{2}\pi,\quad a<\tfrac{1}{2}\pi,\quad c>\pi-a$$
$$C>\tfrac{1}{2}\pi,\quad a>\tfrac{1}{2}\pi,\quad c>a$$
$$C<\text{ ó }>\tfrac{1}{2}\pi,\quad a=\tfrac{1}{2}\pi.$$

2.° Con los datos A, C y $c$ no puede haber mas que una forma

$$\text{cuando } c=\tfrac{1}{2}\pi$$
$$c>\tfrac{1}{2}\pi,\quad A>\tfrac{1}{2}\pi,\quad C<A$$
$$c>\tfrac{1}{2}\pi,\quad A<\tfrac{1}{2}\pi,\quad C<\pi-A$$
$$c<\tfrac{1}{2}\pi,\quad A>\tfrac{1}{2}\pi,\quad C>\pi-A$$
$$c<\tfrac{1}{2}\pi,\quad A<\tfrac{1}{2}\pi,\quad C>A;$$

y el triángulo puede tener dos formas con dichos datos

$$\text{cuando } c>\tfrac{1}{2}\pi,\quad A>\tfrac{1}{2}\pi,\quad C>A$$
$$c>\tfrac{1}{2}\pi,\quad A<\tfrac{1}{2}\pi,\quad C>\pi-A$$
$$c<\tfrac{1}{2}\pi,\quad A>\tfrac{1}{2}\pi,\quad C<\pi-A$$
$$c<\tfrac{1}{2}\pi,\quad A<\tfrac{1}{2}\pi,\quad C<A$$
$$c<\text{ ó }>\tfrac{1}{2}\pi,\quad A=\tfrac{1}{2}\pi.$$

62. Para dar una aplicacion de la trigonometría esférica nos propondremos el problema siguiente: *conociendo un*
Fig. 23. *ángulo MSN, fig. 23, medido en un plano inclinado, y los ángulos que forman con una vertical SS′ los lados SM y SN del primero, hallar el ángulo M′S′N′ formado sobre el plano M′S′N′ horizontal ó perpendicular á SS′, por las proyecciones M′S′ y N′S′ de las líneas MS y NS.*

Las tres líneas SS′, SM y SN determinan un ángulo triedro, cuyo vértice está en S, y en el cual se conocen los tres ángulos planos MSN, MSS′ y NSS′; y puesto que la recta SS′ es perpendicular al plano N′S′M′, ella es



tambien perpendicular á cada una de las líneas M′S′, N′S′, situadas respectivamente en los planos S′SN, S′SM, y formando por consiguiente entre sí un ángulo igual al que mide la inclinacion de estos planos: el problema propuesto se reduce á determinar esta inclinacion. Este problema se halla resuelto por operaciones gráficas en el *Ensayo de geometría sobre los planos y las superficies*, ó *Complemento de los Elementos de geometría*, núm. 41.

Pero se puede obtener el ángulo buscado, considerándole como que hace parte del triángulo esférico BAC, formado por los arcos de círculo resultantes de las secciones que los tres planos MSN, S′SM, S′SN harian en una esfera, cuyo centro estuviese en S, y cuyo radio fuese igual al de las tablas. En este triángulo se tendrán los lados AB, AC, BC, que son las medidas respectivas de los ángulos dados NSS′, MSS′, MSN; y el ángulo pedido es precisamente el ángulo A: se le hallará por la primera regla del número anterior.

Como ejemplo de cálculo supongo que se haya observado

el ángulo MSN de 74°..16′..35″ = BC,
el ángulo S′SM de 57°..46′..18″,2 = AC,
el ángulo S′SN de 65°..34′..20″ = AB.

Estos ángulos representan los lados del triángulo esférico, cuyo ángulo en A se busca; se hace pues

$$a=74^{\circ}..16'..35'',\quad b=57^{\circ}..46'..18'',2,$$
$$c=65^{\circ}..34'..20'';$$

y empleando la fórmula

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a+b-c)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}\ b\ \text{sen.}\ c}},$$

(nota pág. 93).

Los arcos $\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(a+c-b)$ se hallan buscando primero la semisuma de los tres lados $a$, $b$, $c$, y restando de ella cada uno de los lados que forman el ángulo buscado (38); despues se toman los logaritmos de los senos de estos lados, los complementos aritméticos de los logaritmos de los senos de las restas, todo como lo manifiesta la operacion inferior.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $74^\circ..16'..35''$ | | |
| | $57^\circ..46'..18'',2$ | | |
| | $65^\circ..34'..20''$ | | |
| Suma... | $197^\circ..37'..13'',2$ | | |
| Semisuma. | $98^\circ..48'..36'',6$ | | $98^\circ..48'..36'',6$ |
| | $57^\circ..46'..18'',2$ | | $65^\circ..34'..20''$ |
| 1.ª resta... | $41^\circ..2'..18'',4$ | 2.ª resta... | $33^\circ..14'..16'',6$ |

log. sen. $41^\circ..2'..18'',4 = 9,8172779$
log. sen. $33^\circ..14'..16'',6 = 9,7388735$
Comp. arit. de log. sen. $57^\circ..46'..18'',2 = 0,0716655$
Comp. arit. de log. sen. $65^\circ..34'..20'' = 0,0407280$

Suma. $19,6685449$

log. sen. $\frac{1}{2}A = 9,8342724$

que en la tabla corresponde á log. sen. $43^\circ..7'..18'',98$; luego $\frac{1}{2}A = 43^\circ..7'..18'',98$, y por lo mismo $A = 86^\circ..14'..37'',96$: tal es pues el valor del ángulo $M'S'N'$ correspondiente al valor dado para el ángulo $MSN$.



# CAPÍTULO III.

## DE LA APLICACION DEL ÁLGEBRA Á LA GEOMETRÍA.

63. El objeto de la aplicacion del álgebra á la geometría es que haciendo uso de las operaciones algebráicas, se puedan combinar muchos teoremas de geometría, y deducir de estas combinaciones consecuencias importantes. Este es el camino que hemos seguido en los dos capítulos anteriores, y por él hemos llegado á sacar las principales fórmulas de las trigonometrías rectilínea y esférica. Un teorema, que establece una relacion entre muchas líneas de una magnitud definida, puede expresarse siempre por una ecuacion; y todas las trasformaciones que se hacen en la tal ecuacion, cuando se las traduce al lenguage comun, dan enunciados que son consecuencias del teorema de que se ha partido; pero este modo de mirar la aplicacion del álgebra á la geometría no ofrece sino una parte muy pequeña del que ella debe abrazar. Este ramo de las matemáticas, considerado en general, no se limita á la investigacion de las propiedades de la extension por medio de las operaciones algebráicas, sino lo que es mas, cómo se puede representar por estas propiedades lo que significa una expresion algebráica cualquiera, reducir las construcciones de las figuras á las operaciones del cálculo, y pasar de estas á las primeras: todo esto lo manifestarán las diversas cuestiones tratadas en este capítulo.

La escritura algebráica, tan útil para expresar las condiciones de los problemas relativos á los números, no es menos cómoda para los que pertenecen á la geometría. Estos últimos pueden ponerse en ecuacion como los primeros luego que se haya logrado hallar en su enunciado la relacion de las incógnitas y de los datos; pero es menester para lograrlo acudir á algunas propiedades de la especie de magnitud que se considera.

64. Por ejemplo, puesto que un triángulo está determinado cuando se conocen sus tres lados, su área deberá estarlo igualmente por este medio, y por lo mismo puede proponerse esta cuestion.

*Conociendo los tres lados de un triángulo, hallar la expresion de su área ó superficie.*

Como el área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, se ve desde luego que la cuestion se reduce á determinar la altura; y bajando en el triángulo ABC, fig. 14, una perpendicular sobre el lado AC, se formarán dos triángulos rectángulos, que darán relaciones entre los lados AB, BC, la perpendicular BD, y los segmentos AD y CD causados por haber bajado dicha perpendicular.

Fig. 14.

En efecto, si se designa por $c$, $c'$, $c''$, los lados AB, BC, AC del triángulo, por $t$ el segmento AD, y por $u$ la perpendicular BD, los triángulos rectángulos ABD BDC darán

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2, \qquad \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2;$$

ademas se observará que en el primer triángulo de la figura

$$DC = AC - AD = c'' - t,$$

y en el segundo

$$DC = AD - AC = t - c''.$$

Poniendo en las dos ecuaciones de arriba en lugar de las líneas las letras que las representan, y observando que



$(c''-t)^2 = (t-c'')^2$, se formarán para uno y otro triángulo las ecuaciones

$$c^2 = u^2 + t^2, \qquad c'^2 = u^2 + (c''-t)^2,$$

que no conteniendo mas que dos incógnitas $t$ y $u$, se podrán determinar sus valores.

Si se desenvuelve la segunda ecuacion, y se la resta de la primera, los términos $u^2$ y $t^2$ desaparecerán, y resultará

$$c^2 - c'^2 = 2\,c''t - c''^2 \ *:$$

de aqui se sacará

$$t = \frac{c^2 - c'^2 + c''^2}{2\,c''};$$

y como la ecuacion $c^2 = u^2 + t^2$ da

$$u = \pm\sqrt{c^2 - t^2},$$

se sacará, sustituyendo en esta por $t$ su valor anterior, la siguiente

$$u = \pm\sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - c'^2 + c''^2)^2}{4\,c''^2}}$$

ó

$$u = \frac{\pm\sqrt{4\,c^2\,c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)^2}}{2\,c''}.$$

Por medio de esta fórmula se puede hallar la altura de un triángulo cuando se conocen sus tres lados; y como la expresion de su área se mide por la mitad de su base por su altura, se deducirá de lo que precede el área de un triángulo cuando se conozcan sus tres lados.

Como la letra $u$ designa por el supuesto la perpendicular bajada sobre el lado $c''$ del triángulo propuesto, el área de este triángulo será

* Notaremos que esta ecuacion, puesta bajo la forma $c'^2 = c^2 + c''^2 - 2\,c''t$, presenta, respecto al lado $c$ ó BC, el teorema del número 76 de los *Elementos de geometría.*

$$\tfrac{1}{2}\,c''u = \tfrac{1}{4}\sqrt{4\,c^2\,c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)^2}$$

con solo poner por $u$ en la expresion $\frac{1}{2}\,c''\,u$ su valor sacado anteriormente.

Tal es la expresion del área de un triángulo por sus tres lados. Si la observamos con atencion, notarémos que no está presentada bajo la forma mas elegante que puede dársela, á causa de no ser simétrica respecto á cada uno de los lados $c$, $c'$, $c''$, lo que conocemos debe ser, para que cambiando en dicha expresion unas letras en otras, no mude de valor. De aqui se infiere que ella puede reducirse á solo contener las combinaciones de las letras que encierra; se llegará á esto observando que la cantidad $4c^2\,c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)^2$ es la diferencia de dos cuadrados, y por lo mismo se descompone en los factores

$$2\,cc'' + c^2 + c''^2 - c'^2,\quad 2\,cc'' - c^2 - c''^2 + c'^2$$

los cuales equivalen á

$$(c + c'')^2 - c'^2,\ -(c - c'')^2 + c'^2;$$

pero estos últimos equivalen á los siguientes

$$c + c' + c'',\ c + c'' - c',\ c + c' - c'',\ c' + c'' - c;$$

luego se tendrá por valor del segundo miembro de la última ecuacion el

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(c + c' + c'')\,(c' + c'' - c)\,(c + c'' - c')\,(c + c' - c'')}.$$

Ahora bien, si se observa que

$$c' + c'' - c = (c + c' + c'') - 2\,c$$
$$c + c'' - c' = (c + c' + c'') - 2\,c'$$
$$c + c' - c'' = (c + c' + c'') - 2\,c'';$$

y si se supone $c + c' + c'' = 2\,s$, se hallará por último que el área del triángulo ABC está expresada por

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{2\,s.\ 2\,(s - c).\ 2\,(s - c').\ 2\,(s - c'')},$$

la cual se reduce á

$$\sqrt{s\,(s - c)\,(s - c')\,(s - c'')};$$



fórmula tan notable por su elegancia, como por la utilidad que puede sacarse de ella para evaluar el área de una figura plana cualquiera: manifiesta que el *área de un triángulo está expresada por la raiz cuadrada del producto de la semisuma de los tres lados por las diferencias entre esta semisuma y cada uno de los lados.*

65. El método indicado en los *Elementos de Geometría*, núms. 234 y 235, para hallar la altura entera de una pirámide ó de un cono truncados por un plano paralelo á la base cuando se le reduce á fórmula, conduce á una expresion notable del volúmen del tal cuerpo.

Si se designa por $a$ y $b$ los lados homólogos de las bases de un tronco de pirámide, ó los radios de las de un tronco de cono, por $g$ la altura de dicho tronco, por $h$ la altura de la pirámide ó del cono entero, se tendrá la proporcion

$$a - b : a :: g : h \qquad \text{de la cual sale } h = \frac{ag}{a - b}.$$

Como la altura de la pirámide quitada ó deficiente es $h - g$, tendrá por expresion

$$h - g = \frac{ag}{a - b} - g = \frac{bg}{a - b}.$$

Esto supuesto, por ser semejantes las bases del tronco, serán entre sí como los cuadrados de sus líneas homólogas; de suerte que llamando S la base inferior y $s$ la superior, se tendrá

$$S : s :: a^2 : b^2,\ \text{ó}\ S : a^2 :: s : b^2.$$

Si designamos por $m$ la razon de las magnitudes $S$ y $a^2$, resultará

$$S = a^2 m,\quad s = b^2 m;$$

y los volúmenes del cuerpo entero y del quitado serán expresados respectivamente por

$$\tfrac{1}{3}hS = \tfrac{1}{3}\frac{mga^3}{a-b},\quad \tfrac{1}{3}(h-g)\,s = \tfrac{1}{3}\frac{mgb^3}{a-b},$$

con solo poner por S, $s$, $h$, $h-g$, los valores hallados anteriormente. En fin, restando la segunda expresion de la primera, se tendrá para volúmen del tronco la siguiente

$$\tfrac{1}{3}\frac{mg\,(a^3-b^3)}{a-b} = \tfrac{1}{3}\,mg\,(a^2+ab+b^2) = \tfrac{1}{3}\,g\,(ma^2+mab+mb^2).$$

Pero $ma^2$ y $mb^2$ son las bases inferior y superior del tronco; y si se hace $ab=c^2$, $c=\sqrt{ab}$ expresará una media proporcional entre las líneas $a$ y $b$, y por consiguiente $mab=mc^2$ expresará el área de un polígono semejante á las bases del tronco, y construido sobre el lado $c$, ó de un círculo cuyo radio sea $c$.

Del resultado anterior se infiere que *el volúmen de un tronco de pirámide ó de un cono es igual al tercio de su altura, multiplicado por la suma de las áreas de sus dos bases, y de una figura semejante construida sobre un lado ó sobre un radio medio proporcional entre los de estas bases;* y como $mab=\sqrt{ma^2 \cdot mb^2}$, se ve que el área de esta figura es media proporcional entre las de estas bases. Si se elevan sobre estas tres figuras, ya pirámides, ya conos de la misma altura que el tronco propuesto, la suma de sus volúmenes será equivalente á la de este tronco.

66. En las cuestiones anteriores nos habíamos propuesto buscar un resultado numérico; algunas veces se buscan líneas.

Por ejemplo, tratemos de inscribir un cuadrado
Fig. 24. DEFG en un triángulo ABC, fig. 24, será necesario suponer resuelta la cuestion, y buscar despues entre las



líneas dadas inmediatamente por el triángulo y el lado del cuadrado una relacion que pueda expresarse algebráicamente.

Para esto se bajará la perpendicular BH, que se mirará como conocida, puesto que sabemos tirarla; y comparando los triángulos semejantes BAC y BDE, BAH y BDI, se formarán las proporciones

$$\mathrm{AB : BD :: AC : DE},$$
$$\mathrm{AB : BD :: BH : BI},$$

que conducen á la

$$\mathrm{AC : DE :: BH : BI}.$$

Esta última da una relacion entre las líneas conocidas AC, BH, y las líneas incógnitas BI, DE; pero BI depende de BE, porque BI = BH − IH, y por la definicion del cuadrado IH = DE; designando pues por $a$ y $b$ los datos AC y BH, y por $x$ la incógnita IH ó DE, se tendrá

$$a : x :: b : b-x,$$

de la cual sale

$$bx = ab - ax.$$

De esta ecuacion del primer grado se concluye

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Cuando las rectas $a$ y $b$ se hallan referidas á una medida comun, ó expresadas en números, la fórmula anterior da por operaciones aritméticas el número que expresa la longitud de la recta IH; tomando este número sobre la recta BH, se tendrá el punto I, por el cual será necesario tirar la recta DE.

No es absolutamente preciso para determinar el punto I el recurrir á los números, porque las operaciones indicadas en la expresion de $x$ pueden efectuarse sobre las líneas. En efecto, se ve que esta incógnita es el cuarto término de la proporcion siguiente

$$a+b:a::b:x,$$

y que por consiguiente todo se reduce á hallar una cuarta proporcional á las tres líneas

$$a+b,\ a \text{ y } b.$$

Generalmente se mira como muy elegante el ligar con la figura que contiene los datos del problema las operaciones que es menester efectuar para tener su solucion; por lo mismo se puede en la cuestion presente emplear el ángulo recto CHB en la determinacion de la cuarta proporcional que debe hallarse. Se llevará pues sobre HC prolongada.

1.° $HL=a=AC$, 2.° $LK=b=BH$;

tirando BK, y despues IL paralelamente á BK el punto I, para el cual se tendrá

$$HK:HL::BH:IH,$$

pertenecerá al lado DE del cuadrado DEGF.

67. **Del mismo modo podemos ser conducidos á cuestiones de un grado superior al 1.°**

Se sabe que dividir una línea en media y extrema razon es dividirla de modo que uno de los segmentos sea medio proporcional entre toda la línea y el otro segmento; para resolver algebráicamente este problema se designará la línea entera por $a$, el segmento incógnito por $x$, el otro segmento será $a-x$, y se tendrá

$$a:x::x:a-x,$$

de donde se concluirá

$$a^2-ax=x^2;$$

resolviendo esta ecuacion se sacará

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{a^2+\tfrac{1}{4}a^2}.$$



Las operaciones indicadas en esta solucion pueden efectuarse sobre las líneas por medio del triángulo rectángulo; porque como $a^2+\frac{1}{4}a^2$ expresa la suma de los cuadrados de las líneas $a$ y $\frac{1}{2}a$, el radical $\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2}$ es la hipotenusa AC, fig. 25, del triángulo rectángulo construido sobre los lados $AB=a$, $BC=\frac{1}{2}a$. No se trata para obtener los dos valores de $x$, sino de combinar por sustraccion y por adicion la línea AC con la línea $BC=\frac{1}{2}a$, lo que se efectuará llevando BC desde C á D sobre AC, y desde C á D′ sobre su prolongacion, porque se tendrá Fig. 25.

$AD=AC-DC=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$, de donde sale $x=-AD$,

$AD'=AC+DC=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2}+\frac{1}{2}a$, de donde sale $x=-AD'$.

La recta AD, referida en E sobre AB por medio de un arco de círculo, es la solucion dada en el núm. 132 de los *Elementos de geometría;* y poniendo la ecuacion $a^2-ax=x^2$ del problema, bajo la forma

$$a^2=ax+x^2,$$

se sacará de ella la proporcion

$$x+a:a::a:x,$$

que equivale á

$$AD':AB::AB:AD,$$

puesto que

$$AD'=AD+2\,BC=AD+AB.$$

De lo dicho se infiere que la línea AD′ está tambien dividida en media y extrema razon en el punto D, y que el segmento mayor DD′ es igual á la línea dada AB. Mas adelante (77) veremos el enunciado, al cual corresponden al mismo tiempo los dos valores de $x$, y lo que significa el signo — que afecta al segundo.

Los ejemplos anteriores son suficientes para manifestar que la resolucion algébrica de los problemas determinados de geometría presenta circunstancias análogas á la de los problemas relativos á los números. Es menester pues empezar por poner la cuestion en ecuacion, sacar despues la expresion del valor de la incógnita; pero en lugar de emplear el cálculo aritmético para evaluar esta expresion, es necesario efectuar sobre las líneas conocidas operaciones gráficas, correspondientes á las que estan indicadas por los signos algébricos. En la cuestion del núm. 66, cuya ecuacion ascendió al primer grado, ha sido por las líneas proporcionales por quienes se ha determinado la incógnita; y por la cuestion anterior, cuya ecuacion subió al segundo grado, se ha recurrido á la propiedad del triángulo rectángulo. Estas determinaciones son lo que se llama la *construccion* de los valores de la incógnita: vamos pues á exponer los principios que son comunes á todas las cuestiones de estos dos grados.

68. Hay que notar en general, y hay siempre ocasion de verificar, que cuando solo entren líneas en el enunciado de una cuestion, y que la cantidad buscada sea ella misma una línea, su expresion encierra siempre un factor de mas en el numerador que en el denominador; y cada una de estas cantidades está compuesta de términos homogéneos entre sí. La expresion de $t$, hallada en el número 64, llena esta condicion: los términos de su numerador tienen dos factores, y su denominador uno solo.

De aqui se infiere que cuando la expresion de una línea cualquiera no contiene radicales, se puede, con solo representar todas las cantidades que ella encierre por líneas, obtener la longitud de la primera sin recurrir á los



números, buscando únicamente con la regla y el compas cuartas proporcionales á las líneas dadas. Para probarlo bastará el ejemplo siguiente.

Sea
$$t=\frac{abc+d^3-e^2f}{gh+n^2};$$
esta expresion, cuyo numerador está compuesto de términos que tienen tres factores, mientras que los términos del denominador solo tienen dos, pertenece, segun la observacion anterior, á una línea. Si se hace
$$abc=kd^2,\qquad e^2f=k'd^2,$$
$$gh=k''d,\qquad n^2=k'''d,$$
se sacará
$$t=\frac{d^2\,(k+d-k')}{d\,(k''+k''')}=\frac{d\,(k+d-k')}{k''+k'''}:$$
se obtendrá pues $t$ buscando una cuarta proporcional á las tres líneas $k''+k'''$, $k+d-k'$ y $d$, cuando las líneas incógnitas, representadas por $k$, $k'$, $k''$, $k'''$, esten determinadas. Las ecuaciones consideradas anteriormente conducen á las siguientes:
$$k=\frac{abc}{d^2}=\frac{ab}{d}\times\frac{c}{d},\qquad k'=\frac{e^2f}{d^2}=\frac{ef}{d}\times\frac{e}{d},$$
$$k''=\frac{gh}{d},\qquad k'''=\frac{n^2}{d};$$
valores que se forman por las proporciones siguientes:
$$d:a::b:\frac{ab}{d}\qquad d:c::\frac{ab}{d}:\frac{abc}{d^2}=k,$$
$$d:e::f:\frac{ef}{d}\qquad d:e::\frac{ef}{d}:\frac{e^2f}{d^2}=k',$$
$$d:g::h:\frac{gh}{d}=k'',$$
$$d:n::n:\frac{n^2}{d}=k''':$$

buscando pues los cuartos términos de cada una por las líneas proporcionales, se tendrá sucesivamente las longitudes de las líneas representadas por

$$\frac{ab}{d}, \frac{abc}{d^2}, \frac{ef}{d}, \frac{e^2f}{d^2}, \frac{gh}{d}, \frac{n^2}{d},$$

que darán

$$k, k', k'', k''';$$

y con estas se tendrá $t$.

Fácilmente se percibe que el espíritu del método de que acabamos de hacer uso para construir una expresion algebráica, consiste en trasformar el numerador y el denominador de la expresion propuesta en productos de un cierto número de factores simples ó de primer grado, lo cual siempre es posible haciendo uso de los medios que acabamos de emplear.

Hay casos en que esta trasformacion puede efectuarse inmediatamente, sin que sea necesario introducir cantidades indeterminadas: tal es el que ofrece la expresion

$$t = \frac{c(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2},$$

cuyo numerador es lo mismo que

$$c(a+b)(a-b),$$

y cuyo denominador puede escribirse asi,

$$\sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{a^2+b^2}:$$

y dicha expresion equivaldrá entonces á

$$t = \frac{(a-b)(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{a^2+b^2}},$$

cuyo valor se obtiene por las proporciones

$$\sqrt{a^2+b^2} : a+b :: c : \frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$



$$\sqrt{a^2+b^2} : a-b :: \frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}} : \frac{(a-b)(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{a^2+b^2}}.$$

El radical empleado en este cálculo se construye fácilmente por expresar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son $a$ y $b$.

69. El triángulo rectángulo y el círculo nos dan medios para construir la raiz cuadrada de una cantidad cualquiera expresada en líneas. El uso del primero es evidente cuando la que está comprendida bajo el radical es la suma ó la diferencia de dos cuadrados. En efecto, se tendrá en tal caso $\sqrt{a^2+b^2}$ y $\sqrt{a^2-b^2}$; la primera de estas dos expresiones puede mirarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son $a$ y $b$, y la segunda como uno de los lados adyacentes al ángulo recto en un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa seria $a$, y el tercer lado $b$.

Tambien puede construirse la expresion $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ por una serie de triángulos rectángulos; pues habiendo obtenido desde luego $\sqrt{a^2+b^2}$, se representará esta línea por $\alpha$, lo que dará

$$a^2+b^2 = \alpha^2,$$

y la cantidad propuesta se mudará en

$$\sqrt{\alpha^2+c^2+d^2};$$

se construirá el radical $\sqrt{\alpha^2+c^2}$ como el anterior, y llamando $\beta$ el resultado de esta operacion, se tendrá

$$\alpha^2+c^2 = \beta^2:$$

no quedará otra cosa que hacer sino buscar el valor de $\sqrt{\beta^2+d^2}$, lo que se ejecutará tomando la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son $\beta$ y $d$. Es muy fácil extender este método al caso en que el radical que se hubiese de construir contuviese un número cualquiera de cuadrados.

70. Pasemos ahora al empleo del círculo en la extraccion de las raices cuadradas. Se sabe que la perpendicular elevada sobre un diámetro es media proporcional entre los dos segmentos de este diámetro (*Geom.* 130); se
Fig. 26. obtendrá pues $\sqrt{ab}$ haciendo, fig. 26, $AP=a$, $BP=b$, y describiendo un círculo sobre la suma AB de estas dos líneas, tomada por diámetro: la perpendicular PM, elevada sobre el punto P, siendo media proporcional entre AP y BP, será igual á $\sqrt{ab}$.

Tambien puede hallarse una media proporcional entre dos líneas cualesquiera $a$ y $b$, tomando la mayor de las dos por el diámetro del círculo, y llevando la otra desde A á P; levantando despues la perpendicular PM, y tirando la cuerda AM, ella será la media proporcional pedida (*Geom.* 131).

Con el auxilio de estos métodos se construirán todos los radicales del segundo grado, cualquiera que sea la cantidad que expresen. Sea por ejemplo

$$\sqrt{a^2+bc-\frac{def}{g}}:$$

se hará $bc=ak$, $\frac{def}{g}=ak'$; la expresion propuesta equivaldrá á

$$\sqrt{a^2+ak-ak'}=\sqrt{(a+k-k')\,a},$$

y para obtenerla bastará tomar una media proporcional entre dos líneas, respectivamente iguales á $a+k-k'$ y $a$: es evidente que las cantidades $k$ y $k'$ se determinarán por las líneas proporcionales, segun lo que se ha dicho núme-



ro 68, puesto que las ecuaciones de donde ellas dependen dan

$$k=\frac{bc}{a}, \qquad k'=\frac{def}{ag},$$

y por consiguiente conducen á las proporciones:

$$a:b::c:k,$$

$$a:d::e:\frac{de}{a}, \quad g:f::\frac{de}{a}:\frac{def}{ag}=k'.$$

71. La cantidad que se propone construir podrá muy bien no ser homogénea; pero esto no resultará sino cuando se hayan hecho algunas líneas iguales á la unidad, ó que se haya representado un número por una letra, ó una línea por un número; y los métodos indicados anteriormente no se hallarán en defecto por esta circunstancia, siempre que se haga aparecer en todos los términos en que debia hallarse, y con los exponentes convenientes, la línea tomada por unidad.

Si por ejemplo se tuviese $\sqrt{a+\frac{bc}{d^3}}$, y que se supiese por el enunciado de la cuestion que habia conducido á esta expresion, que ella debia pertenecer á una línea, se veria que cada uno de los términos comprendidos bajo el radical deberia ser de segundo grado, y que por lo mismo si designamos la unidad por $n$, será necesario escribir $an$ en lugar de $a$, y $\frac{bcn^3}{d^3}$ en lugar de $\frac{bc}{d^3}$, lo cual no cambia en nada el valor absoluto de estas cantidades, puesto que $n=1=n^3$, y en general $n^m=1$, cualquiera que sea $m$. De este modo se tendria

$$\sqrt{an+\frac{bcn^3}{d^3}}=\sqrt{n\left(a+\frac{bcn^2}{d^3}\right)},$$

la cual se construirá fácilmente.

Observarémos de lo que antecede como puede extraerse por una operacion gráfica la raiz cuadrada de un número cualquiera, con solo tomar una media proporcional entre dos líneas, de las cuales una representaria la unidad, y la otra tendria con esta la razon señalada por el número propuesto. Por ejemplo, $\sqrt{\frac{7}{5}}$ se obtendria tomando una media proporcional entre dos líneas, de las cuales una seria los $\frac{7}{5}$ de la otra, puesto que $\sqrt{\frac{7}{5}}=\sqrt{1\times\frac{7}{5}}$.

72. Es cosa muy fácil por lo dicho el construir la expresion de las raices de la ecuacion de segundo grado $x^2-ax=b^2$, que puede representar todas las de este grado. En efecto, sacando el valor de $x$, se tendrá

$$x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}:$$

solo se trata de construir el radical $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ (69), y de tomar despues la suma y la diferencia del resultado, y de la línea $\frac{1}{2}a$ para obtener el valor absoluto de cada una de las raices de la propuesta.

Si esta ecuacion fuese de la forma $x^2-ax=-b^2$, se sacaria

$$x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}:$$

su construccion en este caso no diferiria de la del anterior, sino en que el radical estaria expresado por uno de los catetos de un triángulo rectángulo, en vez de estarlo por la hipotenusa, y que este triángulo no existiria si se tuviese $\frac{1}{2}a<b$, porque entonces, habiendo tomado sobre
Fig. 27. uno de los lados de un ángulo recto ABC, fig. 27, una magnitud $AB=b$, el círculo DE, descrito desde el punto A como centro, con un radio que seria menor que



AB, no alcanzaria á cortar al otro lado BC. Esta circunstancia está muy acorde con la teoría de las ecuaciones de segundo grado, que da las raices imaginarias para el caso de que se trata.

Lo que precede puede aplicarse á la cuestion siguiente: *Siendo dada la suma ó la diferencia de dos lados contiguos de un rectángulo y su área, construir este rectángulo.*

En efecto, sean $b^2$ la superficie del rectángulo pedido, $a$ la suma ó la diferencia de sus lados contiguos, y $x$ uno de ellos; el otro será expresado por $a-x$ en el primer caso, y por $a+x$ en el segundo; la superficie será $(a-x)\,x$ para el primer caso, y $(a+x)\,x$ para el segundo; de suerte que se tendrán las dos ecuaciones

$$ax-x^2=b^2,\quad ax+x^2=b^2;$$

las cuales resolviéndolas, darán los valores de $x$ construibles por el método anterior.

73. No es necesario resolver las ecuaciones del segundo grado para hallar gráficamente las raices; se las obtiene inmediatamente por las propiedades de las líneas que se cortan en el círculo.

La ecuacion $x^2+ax=b^2$, puesta bajo la forma

$$x\,(x+a)=b^2,$$

se refiere á la propiedad de las secantes y tangentes que parten desde un mismo punto (*Geom.* 128); porque si se describe, fig. 28, sobre un radio $BC=\frac{1}{2}a$ un círcu- Fig. 28.
lo, que se le tire una tangente AB, cuya longitud sea $b$, y que por los puntos A y C se tire una secante AC, llamando $x$ la línea AD, se tendrá

$$AD'=AD+DD'=AD+2BC=x+a,$$

y la propiedad citada anteriormente dará $AD\times AD'=$

$\overline{AB}^2$; por lo mismo resultará

$$x\,(x+a)=b^2,$$

que es la ecuacion propuesta.

Si se tuviese $x^2-ax=b^2$, seria necesario hacer $x=AD'$, en cuyo caso se tendria

$$AD=x-a,\ y\ x\,(x-a)=b^2.$$

No hallándose sujeta la construccion presente á ninguna excepcion, manifiesta que mientras que $b^2$ sea positivo en el segundo miembro, al mismo tiempo que $x^2$ lo es en el primero, las raices de la ecuacion propuesta serán siempre reales.

La ecuacion $x^2-ax=-b^2$ se muda en $ax-x^2=b^2$, y puede en tal caso escribirse asi

$$x\,(a-x)=b^2.$$

Bajo esta última forma se refiere á la propiedad de las cuerdas que se cortan en el círculo; porque si se des-
Fig. 29. cribe sobre un diámetro $AB=a$, fig. 29, un círculo, que se levante en el punto A una perpendicular $AC=b$, y luego se tire CM paralela á AB, y que por los puntos M y M', en que CM' encuentra al círculo, se baje sobre AB las perpendiculares PM y P'M', se tendrá

$$AP\times BP=AP\,(AB-AP)=\overline{PM}^2,$$
$$AP\,(a-AP)=b^2,$$

por lo mismo será

$$AP'\times BP'=AP'\,(AB-AP')=\overline{P'M'}^2,$$

ó
$$AP'\,(a-AP')=b^2:$$

de la cual se deduce que tomando sucesivamente para $x$ las rectas AP y A'P', obtenidas por los métodos anteriores, estas serán los valores de la incógnita $x$.

Es claro que cuando AC exceda al radio del círculo ó á $\frac{1}{2}\,a$, la recta CM no encontrará al círculo, y por



consiguiente no dará ninguna determinacion; pero entonces las raices de la ecuacion propuesta serán imaginarias.

Las raices de la ecuacion $x^2+ax=-b^2$ no difieren de las de la ecuacion $x^2-ax=-b^2$, sino en que ellas se hallan afectadas del signo $-$; pero su magnitud se obtendrá siempre por la construccion que se acaba de exponer.

74. En la aplicacion del álgebra á la geometría el signo $-$ se interpreta en general como se hace respecto á los números, invirtiendo de cierto modo el enunciado de la cuestion, ó tomando en ella las líneas que son afectadas del tal signo en un sentido contrario á aquel en que se las habia supuesto desde luego.

Antes de pasar adelante debemos recordar que las cantidades negativas tienen su orígen de aquellas sustracciones que no pueden efectuarse en el órden en que ellas se hallan indicadas, porque la cantidad que se ha de restar es mayor que la de quien se ha de restar. Por esta circunstancia se reconoce que hay error en el enunciado de aquella cuestion, ó á lo menos en su aplicacion al caso particular ~~que se tiene~~ en consideracion; y quitando este error, esto es, modificando el enunciado de la cuestion, de suerte que se haga posible la substraccion que antes no podia ejecutarse, se deberá tener un resultado positivo; mas para ciertas cuestiones, aquellas por ejemplo que conducen á ecuaciones del primer grado, no hay necesidad de tomarse este trabajo. El mismo signo del resultado indica la inversion de que es susceptible el enunciado; y los valores negativos, empleados del modo que expresan las reglas establecidas para efectuar las operaciones sobre las cantidades afectadas del signo $-$, satisfacen tambien á las cuestiones como los que son positivos; esta es la razon por que se ha cambiado la denominacion de *raices falsas*, que en otro tiempo daban los analistas á las raices negativas de las ecuaciones.

Es tambien por la sustraccion por quien debe explicarse, sobre las figuras geométricas, los valores negativos que el álgebra da á ciertas líneas; para sustraer una línea de otra basta llevar la primera sobre la segunda, partiendo desde uno de los extremos de la última; pero sobre esta operacion gráfica hay que hacer algunas observaciones nacidas del modo con que las líneas se describen.

Fig. 30. Sea pues CD, fig. 30, la línea que debe sustraerse de AB: como la primera es menor que la segunda, llevando en esta la CD desde B hasta $c$, su diferencia A$c$ estará colocada á la derecha del punto A; pero si se tuviese que restar C′D′ mayor que AB, y esta se llevase siempre sobre AB, partiendo desde el mismo extremo B, la diferencia de las dos rectas propuestas seria anotada en A$c'$ sobre la prolongacion de AB, y estaria colocada á la izquierda del punto A, esto es, de un lado opuesto al resultado A$c$ de la primera operacion; es pues á esta mudanza de situacion á quien corresponde el signo —.

A primera vista parecia que se debia efectuar la sustraccion indicada sobre las líneas C′D′ y AB, llevando la menor sobre la mayor, porque esto es lo que se hace con los números cuando se quita el menor del mayor; pero es menester observar, respecto á las líneas, que ellas son en general empleadas en señalar distancias á un cierto punto, al cual se refieren otros, y que se mira como fijo; ellas toman pues su incremento por el extremo opuesto á este punto, y en tal caso la sustraccion que por su naturaleza es inversa de la adicion, de la cual resultan en general los incrementos, debe ejecutarse tambien en sentido inverso de aquel, y por consiguiente yendo hácia el lado en que las



líneas disminuyen. De aqui proviene que si el punto A sobre la recta AB es el punto fijo de que hablamos, la sustraccion de CD ó de C′D′ debe ejecutarse tambien desde el punto B. La continuidad de las líneas, y la posibilidad de prolongarlas indefinidamente en los dos sentidos, da el medio de practicar, como acaba de verse, la sustraccion del mismo modo, aunque la cantidad que haya de sustraerse sea la mayor de las dos. He aqui un problema simple que confirmará lo que se acaba de decir.

75. *En un triángulo dado* ABC, *fig. 31, tirar paralelamente al lado* AC *una línea* DE *que sea igual á la línea dada* MN. Como los lados del triángulo son dados ó pueden determinarse, haremos Fig. 31.

$$AB = a,\ AC = b,\ MN = c;$$

tomaremos por incógnita la distancia AD, porque la posicion de una línea paralela á una línea dada es determinada por uno solo de sus puntos. Haciendo pues $AD = x$, se tendrá $BD = a - x$, y los triángulos semejantes BAC y BDE darán

$$AB : AC :: BD : DE,$$

ó

$$a : b :: a - x : c;$$

luego

$$ab - bx = ac,$$

$$x = \frac{ab - ac}{b} = \frac{a\,(b - c)}{b}.$$

El valor de $x$ se construye (68) con solo restar de $AC = b$ la recta $CF = c$, y tirar FD paralela á CB; porque la semejanza de los triángulos ABC y AFD da la proporcion:

$$AC : AB :: AF : AD$$

$$b : a :: b - c : x = \frac{a\,(b - c)}{b}.$$

Si la línea MN resultase mayor que AC, ella no podria existir en el interior del triángulo ABC; se necesitaria prolongar los lados AB y BC; pero entonces el punto D pasaria á D′ del otro lado del punto A, y esto es precisamente lo que indica el cálculo y la construccion.

En efecto, si se tiene M′N′> AC resultará $c>b$; por lo mismo la cantidad $b-c$ será negativa; pero haciendo la sustraccion de las líneas como se ha indicado en el número anterior, el punto F pasará á F′, y la línea F′D′, tirada por el punto F′ paralelamente á BC, no podrá encontrar sino la prolongacion del lado AB en D′.

76. En general siempre que se trate de distancias referidas á un punto fijo, y contadas sobre una linea ó sobre líneas paralelas; aquellas que son afectadas del signo $-$ deben tomarse en sentido opuesto á aquellas que estan afectadas del signo $+$.

En efecto, si se considera la situacion respectiva de dos puntos, cuyas distancias á una recta cualquiera esten expresadas por $a+b$ y $a-c$, es evidente que la distancia mutua de estos puntos es $b+c$, puesto que $a+b-(a-c)=b+c$, y para colocarlos de este modo respecto á
Fig. 32. una recta cualquiera A′B′, fig. 32, es menester tirar desde luego, sea de un lado, sea del otro de esta línea á una distancia $AA'=a$ una paralela á AB, tirar despues dos líneas paralelas á esta, la una QM fuera de las primeras y á una distancia $AQ=b$, la otra Q′M′ dentro y á una distancia $AQ'=c$. Por este medio todos los puntos tales como M y M′, colocados en los encuentros de las últimas paralelas, y de una perpendicular á la línea A′B′, tendrán entre sí la distancia exigida, y se hallarán en una situacion opuesta respecto á la paralela intermedia AB, de la cual sus respectivas separaciones son señaladas por $+b$ y



$-c$. Es fácil ver que estarian las dos del mismo lado de AB, si sus distancias á la línea A′B′ fuesen expresadas por $a+b$ y $a+c$, puesto que entonces su distancia mutua seria $b-c$. Asi es como los senos, que son las distancias de los extremos de los arcos al diámetro AA′, fig. 4, y Fig. 4.
los cosenos, que son las distancias al diámetro BB′, cambian de signo de un lado al otro de estos diámetros (10, 23). La tangente sigue la misma ley respecto al diámetro AA′, y por la misma razon.

77. Estas consideraciones no se aplican del mismo modo á la *secante*, porque su direccion cambia á cada momento; sin embargo ella tiene un signo propio á sus diversas situaciones, y que se deduce de su expresion analítica $\sec. a=\frac{R^2}{\cos. a}$; pero en general solo á las líneas que conservan la misma direccion es á quienes corresponde siempre la mudanza de signo, en virtud de la de lado *.

Las rectas AD y AD′, fig. 25, que representan las Fig. 25.
raices de la ecuacion de segundo grado $a^2-ax=x^2$ (67), aunque pertenecen á valores de signos diferentes, no son opuestos; pero si se tratase de aplicarles á la solucion de un problema, en el cual ellas fuesen consideradas como distancias á un punto fijo, medidas sobre una línea de direccion constante, seria necesario llevarlas de uno y otro lado de este punto, segun la regla del núm. 76.

* Puede darse una explicacion bastante natural de las variaciones de signo de la secante, observando que esta línea toma realmente una situacion opuesta cuando ella encuentra á la tangente por un lado opuesto á aquel por donde la tocaba antes. En efecto, en los arcos BA′ y A′B′, para los cuales la expresion analítica de la secante es negativa, no es el radio CM el que toca á la tangente NN′, mas sí el radio opuesto.

En efecto, el problema del núm. 67 puede enunciarse asi:

*Hallar sobre la recta* $AB=a$ *un punto* E, *tal que su distancia* AE *al punto* A *sea media proporcional entre su distancia al otro extremo* B *y la línea entera.* Como los dos valores de la incógnita son en tal caso AD y AD′, el último que se halla afectado del signo $-$ debe llevarse hácia AE′, mas allá del punto A, respecto al punto B. Esta conclusion es fácil de verificar, porque el valor de AD′, correspondiendo á $-x$ en la ecuacion $a^2-ax=x^2$, verifica la ecuacion $a^2+ax=x^2$, que resulta de mudar $+x$ en $-x$; y esta última ecuacion da la proporcion

$$a+x:x::x:a,$$

que equivale á

$$AB+AE' \quad \text{ó} \quad BE':AE'::AE':AB.$$

El problema siguiente es muy propio para manifestar cómo deben interpretarse las diversas soluciones que ofrece una misma ecuacion.

Fig. 33. 78. *Por un punto* E, *fig.* 33, *colocado como se quiera respecto de dos rectas* AB *y* AC, *perpendiculares entre sí, tirar una recta de modo que la parte* D′F′ *de esta recta, interceptada entre las dos rectas propuestas, sea de una magnitud dada* m.

Para conocer la posicion de la línea D′F′, ya sujeta á pasar por el punto dado E, solo falta tener otro punto de su direccion, el cual puede tomarse á arbitrio, y suponer sea el que corresponde; para lo que se imaginará que D′ es el punto en que la tal línea corta á la AC; y puesto que el punto E es dado, se supondrá conocidas las líneas GE y HE, tiradas desde este punto paralelamente á las líneas AB y AC; por lo mismo haremos

$$GE=a,\ HE=b,\ AD'=y.$$



Esto supuesto, los triángulos semejantes EGD′ y F′AD′ dan

$$GD':GE::AD':AF';$$

pero $\quad GD'=AD'-AG=AD'-HE=y-b,$

luego $\quad y-b:a::y:AF'=\dfrac{ay}{y-b}.$

El triángulo F′AD′ es rectángulo en A, y da la ecuacion

$$\overline{AD'}^2+\overline{AF'}^2=\overline{D'F'}^2,$$

que por la sustitucion de los valores de AD′, AF′ y D′F′, se muda en

$$y^2+\frac{a^2y^2}{(y-b)^2}=m^2:$$

desenvolviendo y ordenando da

$$y^4-2\,by^3+(b^2+a^2-m^2)\,y^2+2\,bm^2y-b^2m^2=0\ldots\ (1).$$

Esta ecuacion es del cuarto grado, á causa de que la cuestion propuesta tiene en general cuatro soluciones. En efecto se ve por solo la inspeccion de la figura que pueden llenarse de cuatro modos diferentes las condiciones del problema propuesto, á saber:

Por las dos líneas D′F′ y D″F″ tiradas en el ángulo recto BAC, en que se halla colocado el punto E.

Ademas por las dos líneas D‴F‴ y $D^{\prime v}F^{\prime v}$ tiradas en los ángulos CAB′ y BAC′, adyacentes al ángulo BAC.

No es difícil ver que las soluciones del ángulo BAC pueden ser imposibles, cuando la magnitud $m$ sea menor que cierto límite que depende de la posicion del punto E, respecto á las rectas AB y AC; pero que las otras dos soluciones serán siempre reales, á causa de que las líneas F‴D‴ y $F^{\prime v}D^{\prime v}$ pueden pasar por el punto A, lo cual las haria nulas, y tambien pueden ser paralelas, la una á

AB, la otra á AC, y por lo mismo ser infinitas; por consiguiente $F'''D'''$, $F^{IV}D^{IV}$ pueden tener todos los valores desde cero hasta el infinito.

No es menos evidente que la cuestion se simplificaria sin perder ninguna de sus soluciones, si se tomase el punto E á igual distancia de las rectas AC y AB, porque bastaria conocer en tal caso una de las del ángulo BAC y otra de las otras dos, para obtener todas cuatro.

Si por ejemplo se supiese tirar $D'F'$, se concluiria de esto $D''F''$, tomando en ella $AF'''=AD'$, á causa de que el punto E estaria semejantemente colocado, respecto de las dos rectas AC y AB; y se deduciria por la misma razon $D^{IV}F^{IV}$ de $D'''F'''$ con solo tomar $AF^{IV}=AD'''$. En virtud de esta observacion haremos $GE=HE$, ó $a=b$; y la ecuacion propuesta se mudaria en

$$y^4-2ay^3+2a^2y^2-m^2(y^2-2ay+a^2)=0\ldots\ (2).$$

No se ve aun cómo esta ecuacion pueda resolverse con mas facilidad que la anterior; pero se verá la evidencia de esto con solo hacer uso de la relacion observada antes.

Los triángulos $D'AF'$ y $D''AF''$, $D'''AF'''$ y $D^{IV}F^{IV}$ son iguales, y por lo mismo los ángulos $D'F'A$ y $D''F''A$, $D'''F'''A$ y $D^{IV}F^{IV}A$ son complementos uno de otro; y por consiguiente, luego que se conozca los ángulos $D'F'A$, $D'''F'''A$, se tendrán los otros dos, y todas las soluciones de la cuestion serán conocidas. Pero ya que de este modo solo sea necesario hallar dos soluciones directamente, es ventajoso determinar el ángulo que la recta comprendida entre las líneas AB y AC debe formar con la una de estas líneas, AB por ejemplo.

Tomando pues por incógnita la tangente de este ángulo, el triángulo $D'EG$ manifiesta que



$$\text{tang. } D'F'A=\text{tang. } D'EG=\frac{D'G}{GE}=\frac{y-b}{a}=\frac{y-a}{a}.$$

Si se hace $\frac{y-a}{a}=z$, se sacará

$$y=az+a;$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion (2), resultará, hechas las reducciones,

$$a^4z^4+2a^4z^3+(2a^4-a^2m^2)z^2+2a^4z+a^4=0,$$

ó $$z^4+2z^3+\frac{(2a-m^2)}{a^2}z^2+2z+1=0\ldots\ (3).$$

Si la cantidad $z'$ satisfaciese á esta ecuacion, lo mismo la sucederia á la cantidad $\frac{1}{z'}$ *; y escribiendo la ecuacion (3) de este modo,

$$z^4+2z^3+2z^2+2z+1=\frac{m^2}{a^2}z^2,$$

se reconoce que añadiéndola $z^2$ en cada miembro, el primero será un cuadrado perfecto,

$$z^4+2z^3+2z^2+2z+1+z^2=(z^2+z+1)^2:$$

por lo mismo se tendrá

$$(z^2+z+1)^2=\frac{m^2}{a^2}z^2+z^2,$$

ó $$z^2+z+1=\pm z\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+1},$$

la cual se muda en

$$z^2+\frac{a\mp\sqrt{m^2+a^2}}{a}z+1=0.$$

* Esta ecuacion es de las que se llaman *recíprocas*. Se halla en el *Complemento del Algebra* el modo de disminuir el exponente de estas ecuaciones todo lo posible, y por la trasformacion indicada á este efecto, la propuesta se reduce inmediatamente al segundo grado.

Esta ecuacion debe considerarse como equivalente á dos ecuaciones de segundo grado, á causa de las dos formas de que es susceptible el coeficiente del segundo término; y haciendo para abreviar $\sqrt{m^2+a^2}=n$, ella da sucesivamente

$$z^2+\frac{a-n}{a}z+1=0,$$
$$z^2+\frac{a+n}{a}z+1=0.$$

Si se representan por $z'$ y $z''$ las dos raices de la primera, y por $z'''$ y $z^{\mathrm{IV}}$ las de la segunda, se tendrá, á causa de ser el último término igual á la unidad, las dos ecuaciones

$$z'\,z''=1, \qquad z'''\,z^{\mathrm{IV}}=1;$$

y como $z$ expresa la tangente trigonométrica de un ángulo, cuyo radio es 1, se sigue que los valores $z'$ y $z''$ corresponden á dos ángulos complementos uno de otro, y que lo mismo se dice de $z'''$ y $z^{\mathrm{IV}}$ (9), conforme á lo que se ha notado, pág. 124.

Resolviendo las ecuaciones anteriores, se saca de la primera

$$z=-\frac{a-n}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(a-n)^2-4a^2},$$

y de la segunda

$$z=-\frac{a+n}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(a+n)^2-4a^2};$$

pero

$$\sqrt{(a-n)^2-4a^2}=\sqrt{(n+a)\,(n-3a)},$$
$$\sqrt{(a+n)^2-4a^2}=\sqrt{(n-a)\,(n+3a)};$$

y como $n=\sqrt{m^2+a^2}$ excede precisamente á $a$, se ve que



los dos últimos valores de $z$ serán siempre reales, siendo asi que los dos primeros serán imaginarios cuando se tenga $n<3a$.

Antes de llegar á este término, los mismos valores resultarán iguales si $n=3a$, esto es, si $\sqrt{m^2+a^2}=3a$; la cual da cuadrando

$$m^2+a^2=9a^2;$$

luego $m^2=8a^2$, ó $m=\sqrt{8a^2}=2a\sqrt{2}$;

lo cual prueba que no se podrá tirar en el ángulo BAC por el punto E ninguna recta menor que $2a\sqrt{2}$.

Como en tal caso $n$ se muda en $\sqrt{8a^2+a^2}=3a$, resulta que los dos primeros valores de $z$ serán iguales á 1, y los otros dos serán $-2\pm\sqrt{3}$. De aqui se infiere que las dos líneas D'F' y D''F'' se confunden, haciendo con AB un ángulo de 45.°

En el caso general, si se hace

$$\sqrt{(a-n)^2-4a^2}=\sqrt{(n+a)\,(n-3a)}=p$$
$$\sqrt{(a+n)^2-4a^2}=\sqrt{(n-a)\,(n-3a)}=q,$$

se sacará para los cuatro valores de $z$

$$z'=-\frac{a-n-p}{2a},\quad z''=-\frac{a-n+p}{2a},$$
$$z'''=-\frac{a+n-q}{2a},\quad z^{\mathrm{IV}}=-\frac{a+n+q}{2a}.$$

Conociendo las tangentes $z'$, $z''$, $z'''$, $z^{\mathrm{IV}}$, se hallarán los valores de $y$ por medio de la ecuacion

$$y=az+a\ (\text{pág. } 125).$$

Estos valores serán respectivamente

$$AD'=-\frac{a-n-p}{2}+a=\frac{a+n+p}{2}$$

$$AD'' = -\frac{a-n+p}{2} + a = \frac{a+n-p}{2}$$

$$AD''' = -\frac{a+n-q}{2} + a = \frac{a-n+q}{2}$$

$$AD^{\text{v}} = -\frac{a+n+q}{2} + a = \frac{a-n-q}{2}.$$

Ellos se construyen con facilidad; pues la cantidad $n$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son $a$ y $m$; las líneas $p$ y $q$ se obtienen tambien por los triángulos rectángulos (69), ó por las medias proporcionales (70); y cuando se tenga las longitudes de las cuatro rectas anteriores, los puntos D', D'', D''', D$^{\text{v}}$ serán dados *.

79. En lugar de tomar por incógnita el ángulo que debe hacer con AB la recta pedida, podríamos haber tratado de buscar la distancia entre el punto dado E y el punto K, medio de la línea D'F', para concluir de aqui D'E. Haciendo $EK = x$, y suponiendo para abreviar $F'K = D'K = \frac{m}{2} = l$, se tendria en tal caso $D'E = D'K + EK = l + x$, $F'E = F'K - EK = l - x$,

$$F'H = \sqrt{EF'^2 - EH^2} = \sqrt{(l-x)^2 - a^2};$$

y los triángulos semejantes D'GE, EHF' darian

$$D'E : EG :: EF' : F'H,$$

la cual equivale á

$$l + x : a :: l - x : \sqrt{(l-x)^2 - a^2},$$

* Si se compara el análisis que se acaba de hacer de las diversas circunstancias de la cuestion anterior con la que se halla en el Algebra de Bezout (tercer volumen del *Curso para la Marina*, edicion de 1781, pág. 334), se verá cuan incompleta es esta última; ella no indica mas que las dos soluciones representadas por las líneas D'F' y D'''F'''.



y de la que sale

$$a\,(l-x) = (l+x)\sqrt{(l-x)^2 - a^2};$$

elevando al cuadrado y trasladando, se muda la ecuacion anterior en

$$x^4 - (2l^2 + 2a^2)\,x^2 + l^4 - 2a^2 l^2 = 0,$$

que resuelta como las del segundo grado, daria

$$x^2 = l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2 l^2},$$

y últimamente

$$x = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2 l^2}} = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4l^2}};$$

expresiones fáciles de construir, segun lo que se ha visto en los números 69 y 70.

Esta solucion, tan notable por su elegancia, está sacada de la *Aritmética universal*. Newton la ha dado para manifestar cómo escogiendo las incógnitas de un modo conveniente, se simplifica la solucion de un problema. El que Newton hizo en la cuestion presente sin duda le fue sugerido por la consideracion de que la distancia EK no podia tener mas que dos magnitudes diferentes, la una relativa á las dos soluciones D'F' y D''F'', y la otra á las soluciones D'''F''' y D$^{\text{v}}$F$^{\text{v}}$, y que por consiguiente sus cuatro valores deben, haciendo abstraccion de los signos, ser iguales de dos en dos. Concluiremos de esto que para determinarse en la eleccion de las incógnitas ó incógnita es menester buscar la que en las diversas circunstancias que puede ofrecer la cuestion, sufre menos alteraciones.

80. El corto número de cuestiones resueltas anteriormente basta para manifestar cómo el álgebra se puede aplicar á la resolucion de los problemas. Por estos ejemplos se ha debido reconocer que las circunstancias relati-

vas á la situacion de las líneas pueden siempre deducirse de la consideracion de los triángulos, y por medio de las propiedades de estas figuras expresarse algébricamente. El arte de formar los triángulos de que se trata, y que resultan, sea explícitamente, sea implícitamente, de las condiciones del problema propuesto, no puede adquirirse sino con el hábito, asi como acontece á la facilidad de poner en ecuacion los problemas numéricos *.

Las diversas expresiones construidas en lo que antecede solo se refieren á líneas, porque los problemas que nos han conducido á ellas solo han tenido por objeto la determinacion de líneas, y esto es lo que acontece comunmente, á causa de que la determinacion de las figuras se reduce siempre á la de sus dimensiones. Sin embargo, puede presentarse algun caso en que se busque una *area* ó un *volumen;* en el primer caso la expresion á la cual se debe llegar, si es homogénea, ha de tener en cada término de su numerador dos factores mas que el denominador, y en el segundo caso debe tener tres.

Por ejemplo, la expresion $\frac{ab^2c-a^3d+d^4}{c^2+ad}$ puede representar una area, y la $\frac{a^7+b^5c^2-d^7}{a^4+b^4}$ un volúmen. En la final del núm. 65 la letra $m$ no debe contarse, porque ella expresa una relacion, y no una línea.

Construir estas expresiones es hacer un rectángulo,

* La *Aritmética universal de Newton* contiene una coleccion de problemas, tan preciosa por la elegancia de las soluciones, como por la variedad de los enunciados; la *Geometría de posicion* por Mr. *Carnot* los tiene muy interesantes, y que conducen á propiedades de la extension muy notables. La lectura de estas obras y de las de Tomas Simpson será muy útil á las personas que se quieran ejercitar en la resolucion de las cuestiones.



cuya área sea equivalente á la primera, y un paralelepípedo rectángulo cuyo volúmen sea equivalente á la segunda; y para esto se prepara la primera fórmula por el artificio analítico del núm. 68, de modo que se reduzca á un producto de dos factores, y la segunda de modo que represente un producto de tres factores.

En efecto, si se hace

$$ab^2c=m^3k,\quad a^3d=m^3k',\quad d^4=m^3k'',$$
$$c^2=mk''',\quad ad=mk^{\text{IV}},$$

quedará indeterminada la cantidad $m$, y las cantidades $k$, $k'$, $k''$, $k'''$, $k^{\text{IV}}$ se determinarán por las líneas proporcionales, y se tendrá

$$\frac{ab^2c-a^3d+d^4}{c^2+ad}=\frac{m^3k-m^3k'+m^3k''}{mk'''+mk^{\text{IV}}}$$
$$=\frac{m^2(k-k'+k'')}{k'''+k^{\text{IV}}}=m\times\frac{m(k-k'+k'')}{k'''+k^{\text{IV}}};$$

resultado que puede mirarse como el área de un rectángulo, cuya base seria $m$, y la altura seria la línea representada por la fórmula

$$\frac{m(k-k'+k''')}{k'''+k^{\text{IV}}}.$$

A causa de estar á nuestro arbitrio el tomar la línea $m$, se la puede hacer igual á una de las cantidades empleadas en la expresion que debia construirse, ó bien á la unidad, si es que no se ha hecho igual á la unidad, á ninguna de las cantidades. El ejemplo anterior se simplifica cuando se hace $m=a$; y resulta en tal caso

$$b^2c=a^2k,\quad d=k',\quad d^4=a^3k'',$$
$$c^2=ak''',\quad d=k^{\text{IV}},$$

y por lo mismo

$$\frac{ab^2c-a^3d+d^4}{c^2+ad}=\frac{a^2(k-d+k'')}{a(k'''+d)}=a\times\frac{a(k-d+k'')}{k''+d}.$$

Este método se aplica fácilmente á la segunda expresion propuesta

$$\frac{a^7+b^5c^2-d^7}{a^4+b^4}.$$

Tomando desde luego $a$ en lugar de la cantidad arbitraria $m$, se hará

$$b^5c^2=a^6k,\quad d^7=a^6k',\quad b^4=a^3k'',$$

y se mudará la propuesta en

$$\frac{a^7+b^5c^2-d^7}{a^4+b^4}=\frac{a^7+a^6k-a^6k'}{a^4+a^3k''}=\frac{a^6\,(a+k-k')}{a^3\,(a+k'')}$$
$$=a^2\times\frac{a\,(a+k-k')}{a+k''}.$$

La última fórmula puede muy bien tomarse por el volumen de un paralelepípedo rectángulo, cuya base es el cuadrado construido sobre la línea $a$, y cuya altura es la línea representada por la fórmula

$$\frac{a\,(a+k-k')}{a+k''}.$$

81. No solo sirve el Algebra para hallar la magnitud de las líneas y de las partes de la extension, comparadas las unas á las otras, sino que da tambien el medio de determinar las figuras que forman estas líneas, y en general las formas del espacio. Notando Descartes, el primero, que estas figuras y estas formas establecen relaciones de magnitud entre las líneas, llegó á aplicar el Algebra á la teoría de las líneas en general; y por este descubrimiento cambiaron de aspecto las Matemáticas.

Fig. 34. Por ejemplo, si se concibe que desde todos los puntos de una línea cualquiera DE, fig. 34, se hayan bajado perpendiculares PM, P′M′, P″M″ &c. sobre una línea recta AB, dada de posicion, y que partiendo desde un punto A, tomado á arbitrio sobre esta línea, se hayan



medido las distancias AP, AP′, AP″ &c.; cada una de estas distancias, y la perpendicular que la corresponde, estarán ligadas entre sí, de modo que la una se concluirá precisamente de la otra. En efecto, cuando esté fijada la magnitud de AP, el encuentro de la curva DE con la perpendicular, levantada por el punto P sobre la línea AB, dará la magnitud de PM; y cuando se tenga esta magnitud, que supondremos representada por $ab$, se obtendrá AP con solo tomar sobre AC, perpendicular á AB, una parte AQ$=ab$, y tirar por Q la recta QM paralela á AB, la cual encontrará á la línea DE en un punto M, para cuyo punto deberá tenerse PM$=ab$.

Nada obsta imaginar que las líneas AP, PM esten referidas á una línea comun tomada por unidad, y que bajo de este aspecto ellas se hallen representadas por números ó por letras. Si la relacion que hay entre AP y PM entre AP′ y P′M′ &c. puede ser expresada por una ecuacion algebráica, esta ecuacion caracterizará la línea DE, y podrá servir para hacer conocer sucesivamente todos sus puntos; esto lo manifestaremos en dos ejemplos muy simples.

82. Sea el primero la recta AE, fig. 35, tirada por el punto A, todas las perpendiculares PM, P′M′, P″M″ &c., bajadas desde cada uno de sus puntos sobre la línea AB, determinarán una serie de triángulos APM, AP′M′, AP″M″ &c., todos semejantes entre sí, y que darán Fig. 35.

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PM}::\mathrm{AP}':\mathrm{P}'\mathrm{M}'::\mathrm{AP}'':\mathrm{P}''\mathrm{M}''\ \&c.,$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{P'M'}}{\mathrm{AP'}}=\frac{\mathrm{P''M''}}{\mathrm{AP''}}\ \&c.$$

La relacion de todas las distancias AP á las perpendiculares PM es aqui muy fácil de conocer: ella consiste en la razon constante que cada una de las primeras tiene con la de las segundas que le corresponde; y si esta relacion se designa por $a$, se tendrá

$$PM=a\times AP,\ P'M'=a\times AP',\ P''M''=a\times AP''\ \&c.$$

Todas estas ecuaciones, que parecen particulares á cada punto de la recta AE, pueden ser comprendidas en una sola con solo designar en esta la distancia del pie de la perpendicular al punto A, cualquiera que ella sea, por $x$, y la perpendicular que la corresponda por $y$, porque en tal caso se tendria

$$y=ax.$$

Esta ecuacion, que contiene dos incógnitas $x$, $y$, solo puede dar á conocer el valor de la una, y esto sucederá cuando el valor de la otra se haya fijado arbitrariamente: si se asigna á $x$ un valor cualquiera AP, se deducirá para $y$ el valor correspondiente PM. Por ejemplo, si se hiciese $a=\frac{1}{2}$, se hallaria $PM=\frac{1}{2}AP$, esto es, que tomando PM, igual á la mitad de AP, el punto M estaria sobre la recta AE, y no en otra parte.

La línea AE no se termina en el punto A; para abrazar toda la extension de dicha línea se la debe concebir prolongada hácia AE′ debajo de la línea AB, y á izquierda de la línea AC. Esta última parte está tambien comprendida en la ecuacion $y=ax$; porque se puede dar á $x$ en esta ecuacion valores negativos, y expresando estos valores las distancias á la línea AC, deben ser tomados del lado opuesto á aquel en que se han llevado los valores positivos (76): ellos darán pues puntos tales como $p$, colocados al otro lado del punto A. Pero los valores correspondientes de $y$ son tambien negativos, y por lo mismo deben tomarse del lado opuesto á aquel en que se han llevado los valores positivos, esto es, debajo de AB, co-


mo $pm$; ademas es claro que si se tomase $Ap$ igual á AP, $pm$ seria igual á PM; de este modo podíamos concluir los puntos de la prolongacion AE′ de la recta AE.

83. Por segundo ejemplo consideremos el círculo descrito desde el punto A, fig. 36, como centro, y con un radio igual á la línea AD. Lo que distingue los puntos de la circunferencia de los demas del plano es el estar todos á una distancia del centro A que sea igual á AD; y por lo mismo en cualquier parage ó sitio en que se tome el punto M sobre esta curva, las rectas AP y PM serán los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa AM será igual á AD. Haciendo pues Fig. 36.

$$AP=x,\ PM=y,\ AD=r,$$

se tendrá

$$x^2+y^2=r^2,$$

de la cual sale

$$y=\sqrt{r^2-x^2};$$

ecuacion, por la que dando el valor de $x$ ó AP, se tendrá $y$ ó PM, empleando solo el analisis, y sin necesidad de construir figura, ó por lo menos se hallará la relacion entre $y$ ó PM y el radio $r$. Por ejemplo, tomando $x=\frac{1}{3}r$, resultará

$$y=\sqrt{r^2-\tfrac{1}{9}r^2}=\sqrt{\tfrac{8}{9}r^2}=r\times\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Se concibe fácilmente cómo pueden sacarse de la misma ecuacion los valores de las líneas representadas por PM para todos los puntos de la AB, comprendidos entre A y D. La ecuacion $y=\sqrt{r^2-x^2}$ prueba del mismo modo que la descripcion geométrica de la circunferencia del círculo, que esta curva no debe extenderse mas allá del punto D; porque para tomar el punto P mas allá de D seria necesario suponer $x > AD$ ó $> r$, y en este caso el valor de $y$ seria imaginario.

Aunque no se haya considerado mas que el cuadrante DE, los otros tres que completan la circunferencia se hallan comprendidos en la ecuacion $x^2 + y^2 = r^2$, porque la ordenada $y$ tiene dos valores para cada uno de los de $x$, á saber,

$$+\sqrt{r^2 - x^2 x}, \quad y - \sqrt{r^2 - x^2};$$

el segundo debe llevarse del lado opuesto al que se lleve el primero, y da por lo mismo todos los puntos del cuadrante DE'. Pero tambien puede darse á $x$ valores negativos que deben llevarse desde A á D', á causa de que los valores positivos fueron llevados desde A á D; y á cada uno de estos valores corresponden dos valores de $y$: el valor positivo dará los puntos del cuadrante D'E, y el valor negativo los puntos del cuadrante D'E'.

84. Aunque de las ecuaciones

$$y = ax, \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

solo se saquen valores pertenecientes á puntos siempre separados; sin embargo, la continuidad que resulta de la descripcion de la línea recta y del círculo, representadas estas líneas respectivamente por aquellas ecuaciones, no puede ser alterada, porque se puede siempre determinar, por medio de las tales ecuaciones, dos puntos tan inmediatos uno á otro como se quiera, á causa de que basta tomar para $x$ dos valores consecutivos casi iguales, y que nada es capaz de limitar la pequeñez de la diferencia que se puede poner entre ambos valores de $x$.

85. Este modo de representar el *curso* de las líneas, esto es, las circunstancias de su forma y de su situacion, refiriéndolas á una recta por perpendiculares, merece la mayor atencion; se ve que él tiene por objeto determinar la posicion de un punto cualquiera por medio de dos rectas AB y AC, perpendiculares entre sí. El punto M, fig. 34, está determinado cuando se tiene las distancias AP y AQ, puesto que se halla en la interseccion de las líneas PM y QM, tiradas por los puntos P y Q paralelamente á las rectas AB y AC. Fig. 34.



Las líneas AP y AQ, ó sus iguales PM y QM, se llaman *coordenadas*. Comunmente se emplea la palabra *abscisa* para designar la coordenada que se supone conocida, y á la otra se la da el nombre de *ordenada*. Asi en los ejemplos anteriores, en que siempre hemos expresado las líneas PM por medio de las AP, las tales PM expresaban las ordenadas, y las AP las abscisas. Las líneas AB y AC, que determinan la direccion de las coordenadas, se llaman los ejes de las *coordenadas*.

Es menester observar que para los puntos situados sobre la línea AB, la distancia AQ ó PM es nula, y que por consiguiente si se la representa por $y$, se tendrá para todos estos puntos $y = o$; por la misma razon se sacará QM ó AP, ó $x = o$, para todos aquellos que se hallan en el eje AC; y últimamente para el punto A, que se llama *el orígen de las coordenadas*, se deberá tener al mismo tiempo

$$x = o, \quad y = o.$$

Si solo se dan los valores absolutos de la abscisa AP y de la ordenada PM, queda aun indeterminado el punto M; pues en tal caso no se conoce mas que la distancia de este punto á las rectas indefinidas BB' y CC', fig. 37; y Fig. 37.
conservando estas mismas distancias, el tal punto podrá hallarse indiferentemente en uno cualquiera de los cuatro ángulos rectos BAC, B'AC, B'AC', BAC'; pero las

combinaciones de signos afectados á las coordenadas AP y PM hacen conocer en cual de estos ángulos se halla el punto propuesto. En efecto, habiendo convenido en dar el signo + á las partes de la linea AB, yendo desde A hácia B, el signo − será el que es necesario asignar á las partes de AB′ que estan desde A hácia B′. Del mismo modo si se ha dado el signo + á las partes de AC, que estan desde A hácia C, deberemos afectar del signo − á las otras que se hallan desde A hácia C′. En virtud de lo dicho se tendrá

$$\text{para el punto M del ángulo.....}\left\{\begin{array}{l} \text{BAC.....}\left\{\begin{array}{lll} +\text{AP} & \text{ó} & +x \\ +\text{PM} & & +y \end{array}\right\} \\ \text{B}'\text{AC.....}\left\{\begin{array}{ll} -\text{AP} & -x \\ +\text{PM} & +y \end{array}\right\} \\ \text{B}'\text{AC}'\text{.....}\left\{\begin{array}{ll} -\text{AP} & -x \\ -\text{PM} & -y \end{array}\right\} \\ \text{BAC}'\text{.....}\left\{\begin{array}{ll} +\text{AP} & +x \\ -\text{PM} & -y \end{array}\right\} \end{array}\right.$$

La eleccion de las líneas AB y AC, perpendiculares entre sí, no es la única que puede hacerse para determinar sobre un plano la posicion de un sistema de puntos: toda combinacion de líneas capaz de fijar la posicion de un punto, como, por ejemplo, la distancia de *él* á dos puntos dados, seria propia para este uso; pero comunmente las *coordenadas perpendiculares* son las que en su empleo presentan mas facilidad: en lo sucesivo se verán muchos ejemplos del modo con que se pasa de estas coordenadas á otros diversos modos de asignar sobre un plano la posicion de un sistema de puntos.

86. La ecuacion que expresa las relaciones entre las AP y las PM para una línea dada se llama *la ecuacion*



*de esta línea*, y esta se llama el *lugar geométrico* de la ecuacion que la pertenece.

Es claro que toda cuestion geométrica indeterminada que contenga dos incógnitas, conduce á un *lugar* geométrico. Por ejemplo, si se trata de formar todos los triángulos rectángulos que pueden construirse sobre una hipotenusa dada $a$, llamando $x$ é $y$ los catetos de estos triángulos rectángulos, la ecuacion del problema seria $x^2+y^2=a^2$, y se satisfaria á la cuestion con solo describir sobre un radio igual á $a$ un cuarto de círculo, y bajar desde todos los puntos de este perpendiculares al radio; el cuarto de círculo seria el lugar de todos los vértices de uno de los ángulos agudos de estos triángulos.

Por lo mismo se obtiene siempre la ecuacion de una curva, expresando analíticamente, ó una cualquiera de sus propiedades, como hemos hecho para la línea recta, ó las circunstancias de su trazo ó descripcion, como se ha hecho respecto al círculo. Recíprocamente una ecuacion cualquiera, considerada en sí misma, da origen á una curva, cuyas propiedades hace conocer. Como este último punto de vista es el mas general y el mas fecundo, nos valdremos de él, y por lo mismo deduciremos las líneas por la consideracion de las ecuaciones.

87. De todas las ecuaciones entre dos indeterminadas la mas simple es la del primer grado, ella pertenece á la línea recta, la mas simple de todas las líneas. Esta ecuacion puede representarse por $Cy=Ax+B$; pero dividiéndola por C no perderá nada de su generalidad, y se mudará en $y=\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}$, ó $y=ax+b$, con solo hacer $\frac{A}{C}=a$, $\frac{B}{C}=b$: es bajo de la forma $y=ax+b$,

bajo la cual la emplearemos siempre.

Supongamos que $b$ sea nula, se tendrá

$$y=ax,\ \text{ó}\ \frac{y}{x}=a;$$

esto es, que en toda la extension de la recta, la razon de
Fig. 35. PM á AP, fig. 35, será constante. Esta propiedad, que no es otra cosa que la expresion de la semejanza de los triángulos APM, AP′M′ &c., y de la cual resulta $\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'}$ &c., cualquiera que sea el sitio en que se tomen los puntos P, P′ &c. sobre la línea AB, no puede pertenecer sino á la línea recta AE, tirada por el punto A orígen de las coordenadas.

La relacion $\frac{y}{x}$ ó el coeficiente $a$, depende del ángulo que forma la recta AE con el eje AB de las abscisas; y como en el triángulo APM, que supongamos rectángulo en P, la razon de PM á AP es igual á la tangente del ángulo PAM (30), resulta que $a$ expresa la tangente de este ángulo.

Considerando la ecuacion $y=ax+b$ se observa que la nueva ordenada $y$ no difiere de la primera $y=ax$, mas que en que aquella excede á esta en la cantidad $b$; de lo cual se infiere que si se toma $AD=b$, y que se tire la línea DF paralela á AE, ella será el lugar de la ecuacion $y=ax+b$, puesto que se tendrá

$$PN=PM+MN=PM+AD$$
$$P'N'=P'M'+M'N'=P'M'+AD\ \&c.;$$

es preciso notar que el coeficiente $a$ quedará el mismo para todas las rectas paralelas á AE.

Es fácil ver que en la ecuacion $y=ax+b$ no hay cosa alguna que limite los valores que pueden atribuirse á $x$, y que por lo mismo los de $y$ podrán ser tan grandes como se quiera; pero al mismo tiempo nada hay que limite el curso de la línea DF en el espacio indefinido BAC, luego siempre habrá abscisas y ordenadas suficientemente grandes para representar los valores de $y$ y de $x$, que satisfarán á la ecuacion propuesta.



Haciendo $x=o$ se tendrá $y=b$, y este valor pertenecerá al punto D, en el cual la recta DF encuentra al eje AC de las ordenadas. Cuando $x$ sea negativa, se hallará

$$y=-ax+b,$$

de la cual se infiere que si $ax$ fuese menor que $b$, aun seria $y$ positiva, pero menor que $b$ ó AD. El curso de la línea DF manifiesta que esta circunstancia no puede verificarse sino en la parte DF′ correspondiente á las abscisas AP, que se habian escogido para representar los valores positivos de $x$; es pues por este lado DF′ por el que deben tomarse los valores negativos de $x$.

Para hallar el valor de $x$ correspondiente al punto $f$ en que la línea DF encuentra al eje AB de las abscisas, debe hacerse $y=o$, lo cual da

$$ax+b=o,\ \text{y}\ x=-\frac{b}{a}=Af.$$

Cuando permaneciendo negativo el valor de $x$, este sea mayor que $\frac{b}{a}$, el mismo valor de $y$ será negativo; y como pasado el punto $f$, la línea DF se halla por la parte inferior de la línea AB, resulta que la ordenada $p'n'$ caerá de un lado opuesto á aquel en que ella está situada desde luego; y por consiguiente los valores negativos de $y$ deben llevarse de un lado de la línea AB, opuesto á aquel que se ha adoptado para los valores positivos.

Estas observaciones, que confirman lo que se ha dicho en el núm. 76, no son particulares á la línea recta. Ellas son muy interesantes, porque las diversas formas que toman las líneas curvas depende en gran parte del uso de las cantidades negativas en las figuras.

La ecuacion $y=ax+b$ solo contiene dos constantes, que son $a$ y $b$; el valor de estas particulariza la recta que se considera y la distingue de cualquiera otra, de lo cual se infiere que bastan dos condiciones para determinar esta recta. Las primeras que se ofrecen son la de sujetar á la recta á pasar por dos puntos dados, ó bien á ser paralela ó perpendicular á otra recta dada, y pasar ademas por un punto dado. En lo sucesivo será necesario conocer la forma que toma la ecuacion $y=ax+b$ para satisfacer á estas diversas condiciones; esta es la razon por que vamos á examinarlas separadamente.

88. Si se busca la ecuacion de la línea recta que pasa por dos puntos, cuyas abscisas sean $\alpha$, $\alpha'$, y las ordenadas $\beta$ y $\beta'$, se pondrá sucesivamente $\alpha$ y $\alpha'$ en lugar de $x$, $\beta$ y $\beta'$ en lugar de $y$, lo cual dará, para determinar $a$ y $b$, las dos ecuaciones

$$\beta=a\alpha+b,\quad \beta'=a\alpha'+b;$$

de las cuales se deducirán

$$a=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha},\quad b=\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha};$$

y por lo mismo la ecuacion $y=ax+b$ se mudará en

$$y=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha},$$

y esta será la ecuacion de la recta buscada.

A este resultado se le puede dar una forma mas simple, porque si se resta de la ecuacion $y=ax+b$, una de las anteriores, por ejemplo, la primera desaparecerá $b$, y se obtendrá

$$y-\beta=a(x-\alpha):$$

esta última ecuacion será la de una recta sujeta á pasar por un punto dado, cuyas coordenadas son $\alpha$ y $\beta$, y que forma con el eje de las $x$ un ángulo cualquiera: si en ella se pone por $a$ su valor hallado anteriormente, se sacará

$$y-\beta=\left(\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\right)(x-\alpha).$$

La distancia de los puntos propuestos, ó la parte de la recta que ellos interceptan, tendrá por expresion

$$\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}:$$

esto se ve fácilmente, suponiendo que N y N′ representen estos puntos, porque su distancia NN′ es la hipotenusa del triángulo rectángulo NRN′, de lo cual se infiere que $\overline{NN'}^2=\overline{NR}^2+\overline{N'R}^2=(AP'-AP)^2+(P'M'-PN)^2$, y por lo mismo

$$NN'=\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}.$$

89. Para obtener la ecuacion de la línea recta que pase por el punto, cuyas coordenadas son $\alpha$ y $\beta$, y que sea paralela á la línea representada por la ecuacion $y=a'x+b$, bastará sustituir $a'$ en lugar de $a$ en la ecuacion $y-\beta=a(x-\alpha)$, la cual satisfacia ya á la condicion de pasar por el punto, cuyas coordenadas son $\alpha$ y $\beta$, con lo cual se tendrá $y-\beta=a'(x-\alpha)$;

esta ecuacion es la de la paralela que se pedia, pues segun el núm. 87 el coeficiente de $x$ es el mismo en las ecuaciones de las rectas paralelas entre sí.

90. Ultimamente, si AE y AI, fig. 38, son dos rectas perpendiculares entre sí que pasan por el origen A, y que sobre la abscisa AP se levanten las ordenadas PM Fig. 38.

y PM'; se halla, comparando los triángulos APM y APM', que la razon de AP á PM es inversa de la de AP á PM'; de suerte que si $a$ es el coeficiente de $x$ en la ecuacion de AE (87), este coeficiente será $\frac{1}{a}$ en la de AI. Pero cayendo debajo de AB las ordenadas de esta última deben, con arreglo al núm. 76, ser afectas del signo $-$; por consiguiente las ecuaciones de las rectas AE y AI serán pues

$$y=ax,\quad y=-\frac{1}{a}x\ *.$$

Fig. 39. * Sin fundarnos en lo dicho núm. 76, podemos llegar á este resultado, porque la inclinacion de las dos rectas AM y AM', fig. 39, que pasan por el orígen determina la forma del triángulo comprendido entre los puntos M y M' correspondientes á la misma abscisa AP y el origen A; en este triángulo es fácil calcular sus lados por las ecuaciones de estas rectas, que suponemos sean

$$y=ax,\quad y=a'x.$$

En efecto, si $AP=x$, se tendrá $PM=ax$, $PM'=a'x$,

$$MM'=PM-PM'=ax-a'x;$$

y los triángulos APM, APM' darán

$$\overline{AM}^2=\overline{AP}^2+\overline{PM}^2=x^2+a^2x^2$$
$$\overline{AM'}^2=\overline{AP}^2+\overline{PM'}^2=x^2+a'^2x^2;$$

ademas cuando estas rectas sean perpendiculares entre sí, el triángulo MAM' será rectángulo en A; MM', que en tal caso es hipotenusa, deberá satisfacer á la ecuacion

$$\overline{MM'}^2=\overline{AM}^2+\overline{AM'}^2$$

de la cual, sustituidos los valores de $\overline{MM'}^2$, $\overline{AM}^2$, $\overline{AM'}^2$ se infiere

$$(ax-a'x)^2=2x^2+a^2x^2+a'^2x^2.$$

Si se desenvuelve reduce y divide por $2x^2$, la ecuacion anterior se muda en $-aa'=1$, de donde se concluye $a'=-\frac{1}{a}$, como antes.

Es bueno observar que el signo $-$ indica la mudanza que debe experimentar la figura cuando el ángulo MAM' viene á ser recto, circunstancia que no permite que las dos líneas AM y AM' esten del mismo lado del eje AB, asi como se habia supuesto al principio: el álgebra hace sobre la situacion de estas líneas una correccion análoga á la que se verifica para las soluciones negativas en las cuestiones numéricas. (Véase *los Elementos de Algebra*).



Consideremos ahora las rectas DF y GH respectivamente paralelas á las AE y AI, y por lo mismo perpendiculares entre sí; sus ecuaciones deberán ser

$$y=ax+b,\ \text{y}\ y=-\frac{1}{a}x+b'\ \text{(núm. anterior)}.$$

Si la segunda debiese pasar por un punto cuyas coordenadas fuesen $\alpha$ y $\beta$, su ecuacion seria

$$y-\beta=-\frac{1}{a}(x-\alpha).$$

91. Cuando se cortan dos líneas ellas deben tener en su punto de interseccion las mismas coordenadas; de suerte que para hallar las del punto de interseccion de las dos rectas dadas por las ecuaciones

$$y=ax+b,$$
$$y=a'x+b';$$

solo habrá que suponer que las incógnitas $x$, $y$ tienen el mismo valor en una y otra ecuacion, por lo mismo deberá tenerse

$$ax+b=a'x+b',$$

la cual dará

$$x=\frac{b-b'}{a'-a},\quad y=\frac{a'b-ab'}{a'-a}.$$

Por estos valores se ve que el punto de interseccion se halla, tanto mas distante de los ejes AB y AC cuanto menor es la cantidad $a'-a$, y que $x$, $y$ resultan infinitas cuando $a'-a=0$, ó $a'=a$; esto es, cuando las rectas propuestas cesan de encontrarse ó son paralelas.

92. Puede ser útil conocer la longitud de la perpendicular bajada desde un punto dado sobre una línea dada, para lograrlo será necesario buscar las diferencias entre las coordenadas de este punto y las del punto en que la perpendicular encuentra á la línea dada, y sus-

tituir estas diferencias en la expresion

$$\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2} \text{ (núm. 88).}$$

Para ejecutar lo dicho tomaremos por ecuacion de la recta dada la

$$y=ax+b;$$

y por la de la perpendicular á ella, tirada por el punto cuyas coordenadas son $\alpha$ y $\beta$, la siguiente (núm. 90)

$$y-\beta=-\frac{1}{a}(x-\alpha).$$

Como aqui $x$ é $y$ representan lo que $\alpha'$ y $\beta'$ en el núm. 88, resulta que es menester buscar $x-\alpha$, é $y-\beta$ para sustituirlo en la expresion de la distancia, que en tal caso es $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$. Esto lo obtendremos con poner en la ecuacion

$$y-\beta=-\frac{1}{a}(x-\alpha)$$

el valor de $y$ tomado de la $y=ax+b$; con lo que la primera se mudará en

$$ax+b-\beta=-\frac{1}{a}(x-\alpha),$$

de la cual sale

$$x=\frac{\alpha+a\beta-ab}{a^2+1},$$

y por lo mismo

$$x-\alpha=\frac{a(\beta-b-a\alpha)}{a^2+1};$$

cuyo valor puesto en la ecuacion $y-\beta=-\frac{1}{a}(x-\alpha)$, la cambia en

$$y-\beta=-\frac{\beta-a\alpha-b}{a^2+1}.$$



Sustituyendo los valores de $x-\alpha$ é $y-\beta$, en la expresion $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$ se sacará por último para la longitud de la perpendicular buscada, la expresion

$$\frac{\beta-a\alpha-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

93. Lo que precede conduce á la determinacion del *seno*, del *coseno* y de la *tangente* del ángulo que entre sí forman dos rectas dadas. Sean

$$y=ax+b, \qquad y=a'x+b',$$

las ecuaciones de las dos rectas propuestas: es claro que el ángulo que ellas forman entre sí no cambiará si se las hace mover á ambas paralelamente á sí mismas hasta que pasen por el orígen de las coordenadas; y entonces sus ecuaciones se reducirán á

$$y=ax, \qquad y=a'x \text{ (87).}$$

En este estado es en el que las consideraremos y las supondremos representadas por las líneas AM y AM′, fig. 40. Tomando sobre una de ellas un punto M′, cuyas coordenadas sean $\alpha$ y $\beta$, la perpendicular MM′ bajada desde este punto sobre la otra línea AM, estará expresada por Fig. 40.

$$\frac{\beta-a\alpha}{\sqrt{1+a^2}},$$

á causa de $b=o$ (92); pero si se hace $AM'=r$, como las coordenadas del punto A son nulas, se tendrá

$$\alpha^2+\beta^2=r^2;$$

y porque el punto M′ está sobre la recta AM′, cuya ecuacion es $y=a'x$, se inferirá $\beta=a'\alpha$. Esta ecuacion combinada con la anterior da

$$\alpha=\frac{r}{\sqrt{1+a'^2}}, \qquad \beta=\frac{a'r}{\sqrt{1+a'^2}};$$

sustituyendo estos valores en el de la perpendicular, se hallará

$$\frac{r\,(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1+a'^2}};$$

y si se da á la perpendicular MM′ el nombre de seno, que se la ha asignado en la trigonometría, se inferirá

$$\text{sen. MAM}'=\frac{r\,(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1+a'^2}},$$

en cuya expresion representa $r$ el radio del círculo.

Si se resta de $r^2$ el cuadrado de este valor, se sacará el de $\overline{\text{AM}}^2$, ó el cuadrado del coseno del ángulo MAM′, á saber

$$\cos.^2\,\text{MAM}'=\frac{r^2\,(1+a^2)\,(1+a'^2)-r^2\,(a'-a)^2}{(1+a^2)\,(1+a'^2)}$$
$$=\frac{r^2\,(1+2aa'+a^2a'^2)}{(1+a^2)\,(1+a'^2)},$$

sacando la raiz cuadrada, resultará

$$\cos.\,\text{MAM}'=\frac{r\,(1+aa')}{\sqrt{(1+a^2)\,(1+a'^2)}};$$

últimamente, haciendo $r=1$, se sacará de estas dos expresiones la siguiente

$$\text{tang. MAM}'=\frac{\text{sen. MAM}'}{\text{cos. MAM}'}=\frac{a'-a}{1+aa'}.$$

Se hubiera podido deducir inmediatamente este último valor de la fórmula

$$\text{tang.}\,(p\pm q)=\frac{\text{tang.}\,p\pm\text{tang.}\,q}{1\mp\text{tang.}\,p\ \text{tang.}\,q},$$

expuesta en el cuadro de la pág. 39; á causa de que el ángulo MAM′ es la diferencia de los ángulos BAM′ y BAM, y por lo mismo si se representa estos últimos por



$p$ y $q$, se tendrá tang. $p=a'$, tang. $q=a$, y tang. $(p-q)$ $=\frac{a'-a}{1+aa'}$ como antes; pero esta fórmula está fundada en las del núm. 11, obtenidas por medio de una construccion, y nos hemos propuesto sacar de solo las ecuaciones de las líneas todo lo que es necesario para la aplicacion del álgebra á la geometría.

94. La ecuacion del círculo hallada en el núm. 83 es muy sencilla por haber dado al centro una situacion determinada, y fue la de colocarle en el orígen de las coordenadas, ó tomar este orígen en el centro mismo del círculo. Para generalizar la ecuacion de esta curva, es necesario tener la ecuacion del círculo DED′E′, fig. 36, Fig. 36.
colocando el orígen de las coordenadas y los ejes de un modo cualquiera respecto al centro A, como por ejemplo en A″; y para esto basta escribir analíticamente que la distancia de este centro á cada uno de los puntos de la circunferencia es igual á $r$. Pero si se designa por $p$ y $q$ las líneas A‴A′ y A′A, que en tal caso serán las coordenadas del centro A respecto á los ejes A‴B′ y A‴C′, y que se haga A‴Q $=x$, QM $=y$, se tendrá (88)

$$\text{AM}=r=\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2},$$

de la cual se deducirá, cuadrando los dos miembros y desenvolviendo,

$$x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2=r^2.$$

Esta última ecuacion es la mas general que puede obtenerse para el círculo, refiriéndole á coordenadas rectangulares: ella no puede particularizarse sino por la determinacion de las tres cantidades constantes $p$, $q$ y $r$, de las que las dos primeras fijan la posicion del centro, y la tercera representa el radio. De lo cual se infiere que para determinar la posicion y la magnitud de un círculo bastan tres condiciones: esto mismo se ha visto en los Elementos de Geometría.

Si se quisiese determinar el círculo que pasase por tres puntos cuyas coordenadas fuesen

$$\alpha \text{ y } \beta, \qquad \alpha' \text{ y } \beta', \qquad \alpha'' \text{ y } \beta'',$$

se pondria en la ecuacion anterior $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ en vez de $x$, y $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ en lugar de $y$; de este modo se formarian las tres ecuaciones

$$\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + \beta^2 - 2q\beta + q^2 = r^2,$$
$$\alpha'^2 - 2p\alpha' + p^2 + \beta'^2 - 2q\beta' + q^2 = r^2,$$
$$\alpha''^2 - 2p\alpha'' + p^2 + \beta''^2 - 2q\beta'' + q^2 = r^2,$$

que solo contienen las tres incógnitas $p$, $q$ y $r$.

Si se resta sucesivamente la primera de la segunda y tercera, se tendrá simplificando

$$2\left[(\alpha-\alpha')p + (\beta-\beta')q\right] - (\alpha^2-\alpha'^2) - (\beta^2-\beta'^2) = 0,$$
$$2\left[(\alpha-\alpha'')p + (\beta-\beta'')q\right] - (\alpha^2-\alpha''^2) - (\beta^2-\beta''^2) = 0;$$

como estas dos ecuaciones contienen á $p$ y $q$ elevadas á la primera potencia, manifiestan que el centro del círculo pedido solo puede tener una posicion; y por lo que hace al radio, como se saca

$$r = \sqrt{\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + \beta^2 - 2q\beta + q^2},$$

se ve que no es susceptible sino de un solo valor; por lo mismo no puede hacerse pasar por tres puntos dados mas que un solo círculo.

Por ser inútiles los resultados de la resolucion de las ecuaciones anteriores para lo que va á seguir, los suprimiremos hasta que volvamos sobre este asunto.

95. La ecuacion general del círculo

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2$$

se simplifica de muchos modos, que merecen notarse,



porque las formas que ella toma en tales casos se emplean con frecuencia en el analisis.

Si en ella se hace $p=0$, $q=0$, se vuelve á caer sobre la ecuacion

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Para colocar el orígen de las coordenadas sobre la circunferencia del círculo, basta hacer $p^2+q^2=r^2$; puesto que en el caso de que se trata $\sqrt{p^2+q^2}$ expresa la distancia del centro al orígen, y cuya distancia es igual al radio: en este caso la ecuacion general se muda en

$$x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0.$$

En fin, si para mayor sencillez se tomase el orígen de las coordenadas al extremo D′ del diámetro, como entonces se hallaria el centro sobre el eje de las abscisas, su ordenada seria nula, su abscisa $p$ seria igual al radio $r$, y la ecuacion anterior se mudaria en

$$x^2 - 2rx + y^2 = 0.$$

Esta última y la primera $x^2+y^2=r^2$ son las dos ecuaciones del círculo que mas comunmente se emplean.

De la ecuacion $x^2-2rx+y^2=0$ se deduce otra para el mismo círculo con solo observar que

$$x^2 + y^2 = \overline{D'M}^2;$$

pues representando por $z$ la cuerda D′M la tal ecuacion de arriba se mudará en

$$z^2 - 2rx = 0$$

ó

$$z^2 = 2rx:$$

ecuacion del círculo la mas sencilla de todas, y por la cual se puede construir fácilmente. En ella las abscisas estan contadas en el sentido del diámetro, y parten siempre desde la circunferencia; y las ordenadas parten desde el mismo punto, pero se cuentan en el sentido de las cuerdas.

96. Habiendo comprendido bien lo anterior, todas las cuestiones que pueden proponerse sobre la línea recta y el círculo se reducen fácilmente al álgebra, sin que sea necesario recurrir á mas propiedades de las figuras, que á la relacion que existe entre los tres lados de un triángulo rectángulo *. Supongamos por primer ejemplo la cuestion.

Fig. 41. *Siendo dadas dos rectas* AE *y* DE, fig. 41, *por los ángulos que forman con una tercera* AB, *y por la parte* AD *que interceptan sobre esta tercera, hallar sobre una línea* AC, *perpendicular á* AB, *un punto* G, *por el cual tirando una recta* GK *paralela á* AB, *la parte* HK *comprendida entre* AE *y* DE *sea de una magnitud dada.*

Para formar las ecuaciones de las rectas AE y ED, llamaremos $a$ y $a'$ las tangentes de los ángulos EAD y EDA que ellas forman respectivamente con la recta AB; tómese esta por el eje de las abscisas, cuyo orígen puede imaginarse en A igualmente que el de las ordenadas, que concibo paralelas á AC; ademas hágase $AD=\alpha$. La primera recta tendrá por ecuacion $y=ax$, puesto que pasa por el orígen A; como la segunda debe pasar por el punto D, para el cual se tiene

$$y=0\ (85)\ \text{y}\ x=\alpha,$$

se deberá inferir que la de dicha segunda será

$$y=-a'(x-\alpha),$$

con solo observar que $y$ disminuye mientras que $x$ aumenta, y que por lo mismo debe tomarse $a'$ negativamente: se tendrán las dos ecuaciones

$$y=ax, \qquad y=-a'(x-\alpha).$$

* En las notas que Mr. Legendre ha colocado al fin de sus Elementos de Geometría deduce esta relacion de las primeras consecuencias de la superposicion de los triángulos iguales por un medio muy elegante; pero las consideraciones que emplea son por desgracia muy abstractas para poder servir de base á un libro elemental, y dar al hombre aquella íntima convincion que resulta de las nociones recibidas inmediatamente por los sentidos.



Para obtener los puntos H y K, en los cuales las rectas que ellas representan encuentran á la línea GK, paralela á AB, basta hacer $y=AG$; luego si se supone $AG=t$, se sacará

$$t=ax, \qquad t=-a'(x-\alpha):$$

tomando el valor de $x$ en cada una de estas ecuaciones, saldrá

$$x=\frac{t}{a}, \qquad x=\frac{\alpha a'-t}{a'}.$$

Estas expresiones son las de las abscisas $Ah$ y $Ak$, cuya diferencia da $hk=HK$, á causa de las paralelas; y designando por $m$ la magnitud que debe tener HK, se hallará

$$m=\frac{\alpha a'-t}{a'}-\frac{t}{a},$$

de la cual se deducirá

$$aa'm=\alpha aa'-at-a't,$$

y por consiguiente

$$t=\frac{(\alpha-m)\,aa'}{a+a'}.$$

Este es el valor de AG, que satisface á la cuestion propuesta.

97. Supóngase que en vez de dar á la línea HK una magnitud conocida, se pida que ella sea igual á la línea AG, lo cual equivale á inscribir un cuadrado en un triángulo (66). En este caso en lugar de igualar á $m$ la expresion de HK, habrá que igualar esta á $t$, lo que dará

$$t=\frac{\alpha a'-t}{a'}-\frac{t}{a},$$

el coseno del ángulo que estas rectas forman en sí, tendrá por expresion (93),

$$\frac{r\left(1+\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right)}}=\frac{r\,(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}}.$$

Haciendo el radio $r=1$ como el de las tablas de los senos, y sustituyendo por las cantidades $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha'^2+\beta'^2$, $\alpha\alpha'+\beta\beta'$, sus valores $c^2$, $c'^2$, $\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2}$, resultará

$$\cos.\ MAM'=\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2cc'};$$

ecuacion que da una relacion entre los tres lados del triángulo MAM′ y uno de sus ángulos. Si se observa atentamente que el ángulo MAM′ está opuesto al lado $MM'=c''$, nos convenceremos que debe tenerse para los ángulos AMM′, AM′M, respectivamente opuestos á los lados $AM'=c'$, $AM=c$, las ecuaciones

$$\cos.\ AMM'=\frac{c^2+c''^2-c'^2}{2\,cc''},$$

$$\cos.\ AM'M=\frac{c'^2+c''^2-c^2}{2\,c'c''}.$$

Designando por $\gamma''$, $\gamma'$, $\gamma$ los ángulos MAM′, AMM′, AM′M, se deducirán las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} c^2+c'^2-2\,cc'\cos.\gamma''=c''^2\\ c^2+c''^2-2\,cc''\cos.\gamma'=c'^2\\ c'^2+c''^2-2\,c'c''\cos.\gamma=c^2\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(A).$$

Si se añaden una con otra la primera y segunda de estas ecuaciones, luego la primera y la tercera, despues la segunda y la tercera, se tendrán tres resultados, que serán respectivamente divisibles por $2\,c$, $2\,c'$, $2\,c''$ luego



que se hayan simplicado, despues de lo cual se mudarán en

$$\left.\begin{array}{l} c-c'\cos.\gamma''-c''\cos.\gamma'=0\\ c'-c\cos.\gamma''-c''\cos.\gamma=0\\ c''-c\cos.\gamma'-c'\cos.\gamma=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(B).$$

Es bueno observar que estas ecuaciones se obtienen inmediatamente bajando sucesivamente desde cada ángulo del triángulo una perpendicular al lado opuesto, y calculando los segmentos que causa en este lado.

Se tendrá en la fig. 14. Fig. 14.

$$AD=AB\cos.A,\quad CD=BC\cos.C$$

$$AC=AD+CD=AB\cos.A+BC\cos.C$$

Haciendo $AC=c$, $AB=c'$, $BC=c''$, y conservando las denominaciones de los ángulos, se sacará

$c=c'\cos.\gamma''+c''\cos.\gamma'$, ó $c-c'\cos.\gamma''-c''\cos.\gamma'=0$.

Del mismo modo se sacarian las otras dos ecuaciones.

100. Aunque estas sean tres, con todo no pueden servir para hallar los lados cuando son conocidos los tres ángulos *, porque si se buscase los valores de $c$, $c'$, $c''$ por medio de las expresiones generales de las incógnitas, determinadas por tres ecuaciones del primer grado, se hallaria o, á causa de que falta el término conocido. Pero haciendo en estas ecuaciones $\frac{c'}{c}=p$, $\frac{c''}{c}=q$, ellas se mudan en

$$1-p\cos.\gamma''-q\cos.\gamma=0$$

* Las ecuaciones (A) son las mismas que las que hallamos por otro camino en el núm. 39. La consecuencia que acabamos de ver es la misma que alli observamos; pero si despues de lo alli dicho hemos conservado aqui el texto, es por no omitir el camino tan fecundo y elegante que sigue nuestro autor.

$$p - \cos.\ \gamma' - q \cos.\ \gamma = 0$$
$$q - \cos\ \gamma' - p \cos.\ \gamma = 0,$$

las cuales dan la relacion de los lados del triángulo propuesto, y aun queda otra ecuacion de condicion. La tal relacion está expresada por las ecuaciones

$p = \frac{\cos \gamma'' + \cos \gamma' . \cos \gamma}{1 - \cos^2 \gamma}$

$$p = \cancel{\frac{[illegible]}{[illegible]}}$$
$$q = \frac{\cos.\ \gamma' + \cos.\ \gamma \cos.\ \gamma''}{1 - \cos.^2\ \gamma''},$$

y la ecuacion de condicion es

$$1 - \cos.^2\ \gamma - \cos.^2\ \gamma' - \cos.^2\ \gamma'' - 2 \cos.\ \gamma \cos.\ \gamma' \cos.\ \gamma'' = 0;$$

cuyo primer miembro es precisamente el denominador comun de los valores de las incógnitas $c$, $c'$, $c''$, deducidos de las expresiones generales citadas en este número. Y como hemos dicho que los numeradores de las incógnitas serian cero, y acabamos de ver que lo es tambien el denominador de ellas, resulta que los valores de los lados $c$, $c'$, $c''$ se presentarian bajo de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, y quedarian indeterminados.

La ecuacion de condicion que se acaba de hallar encierra la relacion que deben tener entre sí los tres ángulos $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ para que su suma sea igual á dos rectos, asi como lo exige la naturaleza del triángulo rectilíneo. Para asegurarse de ello supongamos que dicha suma sea $\pi$, ó que se tenga $\gamma + \gamma' + \gamma'' = \pi$, se va á manifestar como venimos á parar en la ecuacion de condicion arriba sacada. Es constante que de la ecuacion $\gamma + \gamma' + \gamma'' = \pi$ se infiere la $\cos.\ (\pi - \gamma - \gamma') = \cos.\ \gamma''$; y si tenemos presentes las fórmulas $\text{sen.}\ (p \pm q)$, $\cos.\ (p \pm q)$ (11), y observamos que $\text{sen.}\ \pi = 0$, $\cos.\ \pi = -1$, la ecuacion $\cos.\ (\pi - \gamma' - \gamma'') = \cos.\ \gamma$ se mudará en la



$$-\cos.\ (\gamma'' + \gamma') = \cos.\ \gamma;$$

y por las mismas fórmulas se deducirá

$$-\cos.\ \gamma'' \cos.\ \gamma' + \text{sen.}\ \gamma'' \ \text{sen.}\ \gamma' = \cos.\ \gamma,$$
$$\cos.\ \gamma + \cos.\ \gamma'' \cos.\ \gamma' = \text{sen.}\ \gamma'' \ \text{sen.}\ \gamma';$$

y cuadrando saldrá

$$(\cos.\ \gamma + \cos.\ \gamma'' \cos.\ \gamma')^2 = \text{sen.}^2\ \gamma'' \ \text{sen.}^2\ \gamma',$$

ó

$$\cos.^2\ \gamma - 2 \cos.\ \gamma \cos.\ \gamma' \cos.\ \gamma'' + \cos.^2\ \gamma'' \cos.^2\ \gamma' = (1 - \cos.^2\ \gamma'')(1 - \cos.^2\ \gamma'),$$

que efectuando la multiplicacion en el segundo miembro, reduciendo y trasladando, nos da la ecuacion que buscábamos.

Es á propósito notar que las ecuaciones (A) son, respecto á los triángulos rectilíneos, lo que son las (B) del núm. 47 respecto á los esféricos, y nos podrian conducir por simples trasformaciones á las fórmulas propias para la resolucion de los rectilíneos.

101. Para tener el área del triángulo MAM', figura 42, será necesario bajar desde A una perpendicular AD sobre el lado MM', que pasando por los puntos M y M', cuyas coordenadas son respectivamente $\alpha$ y $\beta$, $\alpha'$ y $\beta'$, tendrá por ecuacion (88) Fig. 42.

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha),$$
$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} x + \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha' - \alpha}.$$

Comparando esta última con la $y = ax + b$, se hallará

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}, \quad b = \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha' - \alpha};$$

pero observando que en el núm. 92 las letras $\alpha$ y $\beta$ representan las coordenadas del punto de donde parte la perpendicular, coordenadas que son nulas en el caso actual, puesto que este punto es el origen; la expresion de la perpendicular se reduce pues á

$$\frac{-b}{\sqrt{1+a^2}}=-\frac{\alpha'\beta-\beta'\alpha}{\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}},$$

y poniendo $c''$ en lugar de $\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}$, resultará

$$AD=\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{c''}.$$

Con este valor podremos ya tener el área del triángulo MAM′, que será

$$\frac{MM'\times AD}{2}=\frac{c''\times\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{c''}}{2}$$

ó

$$S=\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{2};$$

expresion bien notable á causa de dar el área de todos los triángulos que tienen su vértice en el punto A, por medio de las coordenadas de los vértices de los ángulos adyacentes á su base.

Se la puede cambiar en otra que no dependa mas que de los lados. Para lograrlo basta multiplicar entre sí las dos ecuaciones

$$\alpha^2+\beta^2=c^2,\quad \alpha'^2+\beta'^2=c'^2,$$

y restando de su producto el cuadrado de $\alpha\alpha'+\beta\beta'=\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2}$, se sacará

$$\alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2-2\alpha\alpha'\beta\beta'=c^2c'^2-\frac{(c^2+c'^2-c''^2)^2}{4}:$$

tomando las raices cuadradas, y reduciendo todos los términos del segundo miembro al mismo denominador, se hallará



$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=\tfrac{1}{2}\sqrt{4c^2c'^2-(c^2+c'^2-c''^2)^2},$$

y el área del triángulo MAD′ tendrá por expresion

$$s=\tfrac{1}{4}\sqrt{4c^2c'^2-(c^2+c'^2-c''^2)^2},$$

cuyo desenvolvimiento es conforme con el hallado número 64.

102. Si ahora se concibe un cuarto punto M″, cuyas coordenadas sean $\alpha''$, $\beta''$, y que se represente por $d$, $d'$, $d''$, las distancias AM″, MM″, M′M″, se tendrá

$$\alpha''^2+\beta''^2=d^2$$
$$(\alpha''-\alpha)^2+(\beta''-\beta)^2=d'^2$$
$$(\alpha''-\alpha')^2+(\beta''-\beta')^2=d''^2.$$

Desenvolviendo estas ecuaciones, y sustituyendo en las dos últimas por las cantidades $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha'^2+\beta'^2$, $\alpha''^2+\beta''^2$ sus valores $c^2$, $c'^2$ y $d^2$, resultará

$$c^2+d^2-2(\alpha\alpha''+\beta\beta'')=d'^2$$
$$c'^2+d^2-2(\alpha'\alpha''+\beta'\beta'')=d''^2;$$

y haciendo para abreviar

$$\frac{c^2+d^2-d'^2}{2}=d_{,},\quad \frac{c'^2+d^2-d''^2}{2}=d_{,,},$$

se sacará

$$d_{,}=\alpha\alpha''+\beta\beta'',\quad d_{,,}=\alpha'\alpha''+\beta'\beta''.$$

Derivando de estas ecuaciones los valores de $\alpha''$ y de $\beta''$, que son

$$\alpha''=\frac{\beta'd_{,}-\beta d_{,,}}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\quad \beta''=\frac{\alpha d_{,,}-\alpha'd_{,}}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},$$

para sustituirlos en la ecuacion $\alpha''^2+\beta''^2=d^2$, se hallará, con solo tener presentes las ecuaciones $\alpha^2+\beta^2=c^2$, $\alpha'^2+\beta'^2=c'^2$, la siguiente

$$c^2d_{,,}^2+c'^2d_{,}^2-2d_{,}d_{,,}(\alpha\alpha'+\beta\beta')$$
$$=d^2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2\ldots(C).$$

Poniendo ahora por las cantidades $\alpha\alpha'+\beta\beta'$, $\alpha\beta'-\alpha'\beta$

sus valores $\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{4c^2c'^2-(c^2+c'^2-c''^2)^2}$, obtenidos anteriormente, saldrá

$$c^2 d_{,,}^2+c'^2 d_{,}^2-2 d_{,} d_{,,} \frac{c^2+c'^2-c''^2}{2}$$
$$=d^2\times\frac{1}{4}\left(4c^2c'^2-(c^2+c'^2-c''^2)^2\right)$$

y volviendo á poner por $d_{,}$, $d_{,,}$ sus valores $\frac{c^2+d^2-d'^2}{2}$, $\frac{c'^2+d^2-d''^2}{2}$, la tal ecuacion solo contendrá las letras $c$, $c'$, $c''$, $d$, $d'$, $d''$, ó lo que es lo mismo las seis cantidades AM, AM', MM', AM'', MM'', M'M'', que forman los cuatro lados y las dos diagonales del cuadrilátero AMM'M''. De lo dicho se infiere que siempre que en un cuadrilátero se conozca los cuatro lados y una diagonal, se podrá determinar la otra, y tambien cuando se conozcan tres lados y las dos diagonales podrá hallarse el otro lado.

103. Si se quisiese determinar el punto M'' por la condicion que las tres distancias AM'', MM'', M'M'' fuesen iguales, este punto seria en tal caso el centro del círculo circunscrito al triángulo propuesto, y se tendria

$$d=d'=d'',$$

lo cual daria

$$d_{,}=\frac{c^2}{2}\qquad d_{,,}=\frac{c'^2}{2};$$

la ecuacion ($c$) se mudaria en

$$c^2c'^4+c'^2c^4-2c^2c'^2(\alpha\alpha'+\beta\beta')=4d^2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2;$$

si se tiene presente que por $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ debe ponerse su valor $\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2}$, y que en el núm. 101 hemos vis-



to que la superficie del triángulo AMM' es igual á $\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{2}$, la última ecuacion se mudará, llamando S dicha superficie, en

$$c^2c'^2c''^2=16d^2S^2,$$

de la cual sale

$$d=\frac{cc'c''}{4S};$$

expresion muy simple del radio del círculo circunscrito al triángulo propuesto; si en las expresiones de $\alpha''$ y $\beta''$ se pone por $d'$ y $d_{,,}$ sus valores $\frac{c^2}{2}$ y $\frac{c'^2}{2}$, se tendrán las coordenadas del centro del círculo.

104. No seria mucho mas dificil hallar las coordenadas del centro del círculo inscrito y su radio. En este caso el punto M'', fig. 43, se halla dentro del triángulo, Fig. 43.
y en una situacion tal, que las perpendiculares bajadas desde este punto sobre cada uno de los lados AM, AM', MM' son iguales entre sí. Para expresar analiticamente esta circunstancia basta formar las ecuaciones de las tres líneas anteriores, y deducir de ellas por la fórmula del núm. 92 las longitudes de las perpendiculares bajadas desde el punto M'', cuyas coordenadas son $\alpha$ y $\beta$. Pero estas ecuaciones son respectivamente

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x,\quad y=\frac{\beta'}{\alpha'}x\ (87),$$
$$y=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}\ (88);$$

y por lo mismo las perpendiculares bajadas sobre cada una de ellas tendrán por expresion

$$\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad\frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}},$$

$$\frac{(\alpha'-\alpha)\,\beta''-(\beta'-\beta)\,\alpha''+\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}},$$

las cuales podrán escribirse asi

$$\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{c},\quad \frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{c'}$$

$$\frac{-(\alpha\beta''-\alpha''\beta)-(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}{c''}$$

con solo poner por los tres radicales sus valores $c$, $c'$, $c''$.

Ahora bien, si se tiene presente que la fórmula que da la perpendicular bajada desde un punto sobre una línea se ha obtenido por una extraccion de raiz cuadrada, y que por lo mismo es susceptible de tomarse positiva ó negativamente, se concluirá de aqui que cada una de las expresiones anteriores tendrá dos valores. Para no emplear sino los positivos es menester observar que segun la figura, apartándose mas la línea AM′ del eje AB de las abscisas que lo que se aparta la AM, y ademas hallándose el punto M″ comprendido entre la primera y la última, debe tenerse

$$\frac{\beta'}{\alpha'}>\frac{\beta''}{\alpha''},\quad \frac{\beta'}{\alpha'}>\frac{\beta}{\alpha}\quad \text{y}\quad \frac{\beta''}{\alpha''}>\frac{\beta}{\alpha},$$

ó lo que es lo mismo

$$\alpha''\beta'>\alpha'\beta'',\quad \alpha\beta'>\alpha'\beta\quad \text{y}\quad \alpha\beta''>\alpha''\beta;$$

de lo cual se infiere que si se ha de obtener un valor positivo, la expresion de la segunda perpendicular debe tomarse con signos contrarios á los anteriores.

Como por la otra consideracion el punto M″ debe hallarse debajo de la recta MM′, cuya ecuacion es

$$y=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\,x+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha};$$

ya que $\alpha''$ y $\beta''$ son las coordenadas del punto M″, es



preciso que poniendo por $x$, $\alpha''$, se tenga

$$\beta''<\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\,\alpha''+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha},$$

ó que

$$\beta''<\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}\,\alpha''+\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha-\alpha'},$$

lo cual da

$$\alpha\beta''-\alpha'\beta''<\alpha''\beta-\alpha''\beta'+\alpha\beta'-\alpha'\beta,$$

ó bien

$$\alpha\beta''-\alpha''\beta+\alpha''\beta'-\alpha'\beta''<\alpha\beta'-\alpha'\beta;$$

con cuya condicion la expresion de la tercera perpendicular es positiva.

Si con arreglo á estas consideraciones se hiciese

$$\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{c}=e,\quad \frac{\alpha''\beta'-\alpha'\beta''}{c'}=e',$$

$$\frac{-(\alpha\beta''-\alpha''\beta)-(\alpha''\beta'-\alpha'\beta')+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}{c''}=e'',$$

y se añadiesen los productos $ec$, $e'c'$, $e''c''$, se sacaria, hechas las reducciones, la ecuacion

$$ec+e'c'+e''c''=\alpha\beta'-\alpha'\beta.$$

Esta ecuacion es facil de verificar, porque los productos $ec$, $e'c'$, $e''c''$ expresan las áreas de los triángulos AM″M, AM″M′, MM″M′ multiplicados por 2; la suma de estas áreas es igual á la del triángulo total AMM′, que se ha designado por S, luego

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=2\,S\ (101).$$

Cuando se tenga $e=e'=e''$, se inferirá inmediatamente

$$e=\frac{c+c'+c''}{2\,S};$$

y cuando sea $c=c'=c''$, resultará

$$e+e'+e''=\frac{2\,S}{c}.$$

La primera de estas dos expresiones es la del radio del círculo inscrito; y la segunda hace ver que *si desde un punto cualquiera, tomado en el interior de un triángulo equilátero, se baja una perpendicular á cada uno de los lados del triángulo, la suma de estas tres líneas será igual á su altura*, á causa de que tomando por base el lado $c$, y llamando $h$ la altura, se tendrá $S=\frac{1}{2}ch$, lo que da

$$e+e'+e''=h.$$

Aun podrian sacarse gran número de consecuencias de la teoría que se acaba de exponer; pero lo que precede basta para la extension de esta obra: observaremos que para cualesquiera polígonos rectilíneos existen ecuaciones análogas á las (A) y (B) del núm. 90 que se obtienen del mismo modo, y que conducen á las propiedades de estos polígonos, como estas á las del triángulo. Mr. Lagrange ha dado sobre las pirámides una Memoria, á la cual puede servir de preliminar lo que se acaba de exponer, y que se extenderia á los poliedros, haciendo uso de las fórmulas que se hallan en el quinto capítulo del *Tratado de cálculo diferencial é integral* *.

105. La combinacion de la ecuacion de la circunferencia del círculo y de la línea recta conduce fácilmente á las diversas propiedades que resultan del encuentro de estas líneas, y da la resolucion de todas las cuestiones, en las cuales la incógnita no pase del segundo grado.

Pero antes de tratar del encuentro de estas líneas manifestaremos algunas otras propiedades del círculo, expuestas ya en los Elementos de Geometría, con el fin de que unas y otras se hallen reunidas en un mismo sitio.

* Véase tambien la *Poligonometría de Huillier*: su *Polihedrometría* inserta en el primer volúmen de las *Memorias presentadas al Instituto por los sabios extrangeros*: la *Geometría de posicion* de Carnot, y su *Memoria sobre la relacion que existe entre las distancias de cinco puntos tomados á arbitrio en el espacio.*



1.ª Propiedad geométrica. *Que todos los puntos de la circunferencia estan equidistantes de un punto fijo llamado el centro.*

Veamos lo que nos dice el analisis. La distancia entre dos puntos dados, situados en un plano, es

$$\delta=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

con tal que $x$ é $y$, $\alpha$ y $\beta$ expresen las coordenadas de los dos puntos dados; y como por la propiedad geométrica esta distancia ha de ser constante, llamándola R, se sacará

$$R=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}.$$

Cuya ecuacion es justamente (núm. 94) la de la circunferencia del círculo; y por lo mismo *la ecuacion de la circunferencia del círculo contiene implícitamente la propiedad geométrica.*

2.ª Prop. geom. *Que la perpendicular bajada desde la circunferencia al diámetro es media proporcional entre los segmentos en que le divide.*

Anal. Hemos hallado en el núm. 95 que la ecuacion general del círculo se reduce, tomando el origen en el centro, á

$$x^2+y^2=R^2;$$

por lo mismo se inferirá

$$y^2=(R+x)(R-x),$$

de la cual sale

$$R+x:y::y:R-x.$$

Esta proporcion no es otra cosa que la propiedad geométrica que arriba anunciamos, luego *la ecuacion del círculo &c.*

3.ª Prop. geom. *Toda cuerda es media proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente.*

Anal. Hemos hallado, núm. 95, que una de las ecuaciones del círculo era la

$$z^2 = 2\,Rx,$$

en la cual $z$ representa una cuerda del círculo, cuyo radio es R, y $x$ la parte del diámetro correspondiente á dicha cuerda; por lo tanto sacaremos de ella

$$2\,R : z :: z : x;$$

la cual proporcion es la misma propiedad geométrica dicha arriba, por lo que *la ecuacion del círculo contiene implícitamente la tal propiedad.*

4.ª Prop. geom. *Por tres puntos dados que no esten en línea recta se puede siempre hacer pasar una circunferencia de círculo, pero solo una.*

Anal. En el número 94 hemos visto que la ecuacion general del círculo nos manifiesta la tal posibilidad, y ademas el medio que debemos emplear para hallar el centro del círculo, y la longitud del radio correspondiente al único que puede hacerse pasar por ellos. Mas nada hemos dicho de la condicion *esencial* de que los tres puntos dados *no han de estar en línea recta.*

Para manifestar por el analisis esta circunstancia observaremos que en el caso de estar los tres puntos en línea recta, deberá tenerse la ecuacion

$$\frac{\alpha'-\alpha}{\alpha''-\alpha} = \frac{\beta'-\beta}{\beta''-\beta},$$

resultante de la proporcion MH : HM″ :: MN : MM′,
Fig. 36*. que ocasiona la fig. 36 *, en la cual los tres puntos M, M′, M″, determinados por las coordenadas $\alpha\,\beta$, $\alpha'\,\beta'$, $\alpha''\,\beta''$, estan en línea recta. Ahora bien, las dos ecuaciones

$$2\left\{(\alpha-\alpha')\,p+(\beta-\beta')\,q\right\}-(\alpha^2-\alpha'^2)-(\beta^2-\beta'^2)=0,$$
$$2\left\{(\alpha-\alpha'')\,p+(\beta-\beta'')\,q\right\}-(\alpha^2-\alpha''^2)-(\beta^2-\beta''^2)=0$$

sacadas en el núm. 94 dan para $p$ y $q$ los valores



$$p=\frac{\left\{(\alpha^2-\alpha'^2)+(\beta^2-\beta'^2)\right\}(\beta-\beta'')-\left\{(\alpha^2-\alpha''^2)+(\beta^2-\beta''^2)\right\}(\beta-\beta')}{2\left\{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta'')-(\alpha-\alpha'')(\beta-\beta')\right\}}$$

$$q=\frac{\left\{(\alpha^2-\alpha''^2)+(\beta^2-\beta''^2)\right\}(\alpha-\alpha')-\left\{(\alpha^2-\alpha'^2)+(\beta^2-\beta'^2)\right\}(\alpha-\alpha''^2)}{2\left\{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta'')-(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')\right\}}$$

pero la ecuacion

$$\frac{\alpha'-\alpha}{\alpha''-\alpha}=\frac{\beta'-\beta}{\beta''-\beta},\ \text{ó}\ \frac{\alpha-\alpha'}{\alpha'-\alpha''}=\frac{\beta-\beta'}{\beta-\beta''}$$

se muda en

$$(\alpha-\alpha)(\beta-\beta'')-(\alpha-\alpha'')(\beta-\beta)=0,$$

por consiguiente el denominador de los valores de $p$ y $q$ es cero, y asi dichos valores son de la forma

$$\frac{A}{0},\quad \frac{B}{0};$$

lo que nos dice que

$$p=\infty,\quad q=\infty.$$

Asi pues las coordenadas que determinan la posicion del centro del círculo son infinitas; y la magnitud del radio sacada de la ecuacion

$$r=\sqrt{\alpha^2-2\,p\alpha+p^2-\beta^2-2\,q\beta+q^2},$$

de dicho núm. 94 es tambien infinita.

Todas estas circunstancias nos expresan claramente que cuando los tres puntos dados estan en línea recta, *no es posible trazar la tal circunferencia de círculo.* Se ve pues que *la propiedad geométrica está enteramente incluida en la ecuacion del círculo.*

5.ª Prop. geom. *Cuando se quiere hacer pasar una circunferencia de círculo por tres puntos dados, que no esten en línea recta, basta juntar los tres puntos con rectas, y dividir dos de ellas en dos partes iguales por una perpendicular; el punto donde se encuentren estas perpendiculares es el centro del círculo, y la distancia del centro* *á uno de los puntos dados es el radio.*

Anal. En el núm. 94 hemos deducido de la ecuacion del círculo las dos siguientes:

$$2\left\{(\alpha-\alpha')p+(\beta-\beta')q\right\}+(\alpha^2-\alpha'^2)-\beta^2-\beta'^2)=0,$$
$$2\left\{(\alpha-\alpha')p+(\beta-\beta'')q\right\}-(\alpha^2-\alpha''^2)-(\beta^2-\beta''^2)=0,$$

en las cuales $\alpha\ \beta$, $\alpha'\ \beta'$, $\alpha''\ \beta''$ expresan las coordenadas de los tres puntos, y $p$, $q$ las del centro.

Las tales dos ecuaciones se mudan en las siguientes:

$$(\alpha-\alpha')p+(\beta-\beta')q-\frac{(\alpha-\alpha')(\alpha+\alpha')}{2}$$
$$-\frac{(\beta-\beta')(\beta+\beta')}{2}=0$$
$$(\alpha-\alpha'')p+(\beta-\beta'')q-\frac{(\alpha-\alpha'')(\alpha+\alpha'')}{2}$$
$$-\frac{(\beta-\beta'')(\beta+\beta'')}{2}=0,$$

ó en

$$(\alpha-\alpha')\left\{p-\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right\}+(\beta-\beta')\left\{q-\frac{\beta+\beta'}{2}\right\}=0,$$
$$(\alpha-\alpha'')\left\{p-\frac{\alpha+\alpha''}{2}\right\}+(\beta-\beta')\left\{q-\frac{\beta+\beta''}{2}\right\}=0,$$

y por último en

$$\left.\begin{array}{l} q-\dfrac{\beta+\beta'}{2}=-\dfrac{\alpha-\alpha'}{\beta-\beta'}\left\{p-\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}\right\} \\ q-\dfrac{\beta+\beta''}{2}=-\dfrac{\alpha-\alpha''}{\beta-\beta''}\left\{p-\dfrac{\alpha+\alpha''}{2}\right\}\end{array}\right\}\ldots\ldots(A).$$

Cada una de las ecuaciones (A) pertenece á una recta, cuyas coordenadas son

$\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}$, $\dfrac{\beta+\beta'}{2}$, $p$, $q$ para la primera,

$\dfrac{\alpha+\alpha''}{2}$, $\dfrac{\beta+\beta''}{2}$, $p$, $q$ para la segunda;



y que forman con el eje de las $x$ un ángulo, cuya tangente es

$-\dfrac{\alpha-\alpha'}{\beta-\beta'}$ para la primera,

$-\dfrac{\alpha-\alpha''}{\beta-\beta''}$ para la segunda.

Por consiguiente, si comparamos cada una de estas ecuaciones con la de la cuerda que une dos puntos de los dados, que es núm. 88,

$y-\beta=\dfrac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$ para los puntos, cuyas coordenadas son $\alpha\ \beta$, $\alpha'\ \beta'$,

$y-\beta=\dfrac{\beta''-\beta}{\alpha''-\alpha}(x-\alpha)$ para los puntos, cuyas coordenadas son $\alpha\ \beta$, $\alpha''\ \beta''$,

ó

$$y-\beta=\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}(x-\alpha),$$
$$y-\beta=\frac{\beta-\beta''}{\alpha-\alpha''}(x-\alpha),$$

hallarémos que aquellas rectas son respectivamente perpendiculares á estas. Ademas las coordenadas de la primera recta

$$\frac{\alpha+\alpha'}{2},\ \frac{\beta+\beta'}{2},\ p,\ q,$$

nos expresan que ella pasa por medio de la cuerda que junta los puntos M y M′, y que contiene el centro del círculo; todo lo cual se percibe con hacerse cargo de la fig. 36**: lo mismo puede decirse de la segunda recta. Fig. 36.**

Por lo que toca al radio del círculo nada tenemos que agregar á lo dicho núm. 94.

De todo lo cual se infiere *que la propiedad de que tratamos la contiene la ecuacion general del círculo.*

Continuando en exponer las propiedades del círculo que resultan de su encuentro con la línea recta, veremos que se obtienen de hacer uso de las dos ecuaciones

$$x^2+y^2=r^2, \quad y-\beta=a(x-\alpha);$$

emplearlas en la determinacion de $x$ é $y$, o considerarlas como que tienen las mismas incógnitas, equivale á suponer que los puntos, á los cuales pertenecen las coordenadas $x$ é $y$, se hallan situados al mismo tiempo sobre la circunferencia y sobre la recta propuesta; esto es, que dichos puntos son las de interseccion de estas líneas; y en general es evidente que para hallar los puntos de encuentro de dos líneas cualesquiera, basta suponer que sus ecuaciones contienen las mismas incógnitas.

Si sacamos el valor de $y$ de la segunda ecuacion, y le sustituimos en la primera, se hallará

$$x^2+(ax+\beta-a\alpha)^2=r^2.$$

Desenvolviendo esta ecuacion de segundo grado hallaremos dos valores para $x$; lo cual debia ser asi, porque en general la recta debe encontrar á la circunferencia del círculo en dos puntos; pero puede llegarse á resultados mas sencillos, tomando por incógnita la distancia del punto, cuyas coordenadas son $\alpha$ y $\beta$ á uno de los de interseccion de la recta y del círculo. Si esta distancia la representamos por $z$, se tendrá (88),

$$z=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

de la cual se deducirá

$$z^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2;$$

si ponemos en esta ecuacion por $y-\beta$ su valor $a\,(x-\alpha)$, se sacará

$$z^2=(x-\alpha)^2\;(1+a^2),$$

de la que se deducirán las siguientes una despues de otra



$$x-\alpha=\frac{z}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y-\beta=\frac{az}{\sqrt{1+a^2}};$$

las cuales darán para $x$ é $y$ los valores

$$x=\alpha+\frac{z}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y=\beta+\frac{az}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Sustituyendo estos últimos valores en la ecuacion $x^2+y^2=r^2$, se la mudará en

$$\alpha^2+\frac{2\alpha z}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{z^2}{1+a^2}+\beta^2+\frac{2\beta az}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{a^2z^2}{1+a^2}=r^2,$$

y reduciendo saldrá

$$z^2+\frac{2\,(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}\,z+\alpha^2+\beta^2-r^2=0;$$

esta ecuacion nos proporcionará hallar $z$, y despues $x$ é $y$ por medio de las expresiones anteriores.

Es claro que si el punto E, fig. 44, fuese aquel cuyas coordenadas son $\alpha$, $\beta$, y que MNM′ y EM fuesen el círculo y la recta propuesta, $a$ expresaria la tangente del ángulo E$e$B, y los dos valores de $z$ pertenecerian á las rectas EM y EM′. Fig. 44.

106. Combinadas las ecuaciones del círculo y línea recta, y deducida la última, veremos como de ella resultan las demas propiedades que tenemos por objeto.

6.ª Prop. geo. *Si desde un punto fuera del círculo se le tiran dos secantes, estas serán recíprocamente proporcionales con sus partes externas.*

Anal. Por la teoría de las ecuaciones se sabe que el último término es el producto de todas las raices; luego si se expresan por $z'$ y $z''$ las de la ecuacioa última, se tendrá

$$z' z'' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

y como esta expresion es independiente de $a$, quedará la misma cualesquiera que sea esta cantidad; esto es, cualquiera que sea el ángulo E$e$B, cuya tangente es $a$; y como $z'$ y $z''$ representan las dos líneas EM y EM′, se infiere que el producto EM × EM′ es el mismo para todas las líneas tiradas por el punto E, ó que si se tira una nueva secante E$m'$, deberá tenerse

$$EM \times EM' = Em \times Em';$$

de cuya ecuacion resulta la propiedad enunciada, y por lo mismo *ella está inclusa en la combinacion de las ecuaciones del círculo y línea recta.*

7.ª Prop. geo. *Que si desde un punto fuera del círculo se le tiran una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.*

Anal. Como la ecuacion EM × EM′ = E$m$ × E$m'$ se verifica siempre, cualquiera que sea la recta E$m'$, ella existirá cuando la E$m'$ sea la tangente EN, en cuyo caso las líneas E$m$ y E$m'$ se mudan en EN y EN, y por lo tanto la última ecuacion viene á ser

$$EM \times EM' = EN \times EN;$$

la cual expresa la propiedad de que se trata, luego *dicha propiedad la contienen las ecuaciones del círculo y línea recta combinadas entre sí.*

8.ª Prop. geo. *Si se cortan dos cuerdas en un círculo, sus segmentos son recíprocamente proporcionales.*

Anal. Cuando el punto E está fuera del círculo se tiene $\alpha^2 + \beta^2 > r^2$, á causa de que $\alpha^2 + \beta^2$ expresa el cuadrado de la distancia del punto E al centro A; pero cuando este punto se halle dentro del círculo, como la manifiesta la fig. 45, $z'$ y $z''$ son de signos contrarios, á causa de que el último término $\alpha^2 + \beta^2 - r^2$ resulta negativo por deber ser Fig. 45.



$$\alpha^2 + \beta^2 < r^2.$$

Y como por otra parte el producto EM × EM′ queda independiente de la inclinacion de la línea MM′, respecto á AB; resulta que tirando por el punto E una segunda cuerda $mm'$, se deberá tener

$$EM \times EM' = Em \times Em';$$

*cuya ecuacion contiene la propiedad de que se trata;* y se ve que este teorema y los dos anteriores puede decirse forman uno solo por deducirse de la misma ecuacion.

Si de la

$$z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0,$$

se sacan los valores de $z$, se halla

$$z' = \frac{-(\alpha + \beta a) + \sqrt{r^2(1+a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$z'' = \frac{-(\alpha + \beta a) - \sqrt{r^2(1+a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

estas son las expresiones de las líneas EM′ y EM.

Podemos simplificarlas cambiando sus coordenadas, de modo que las abscisas $x$ y $\alpha$ se tomen sobre la recta AE, fig. 44, que une el punto E con el centro A del círculo, partiendo siempre desde este punto, y que las ordenadas Fig. 44.

$y$ sean perpendiculares á esta recta; en tal caso se tendrá

$$\beta = o, \quad \alpha = AE,$$

y

$$z' = \frac{-a\alpha + \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$z'' = \frac{-a\alpha - \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}},$$

la ecuacion del círculo no cambiará; pero la de la recta se mudará en

$$y = a(x - \alpha).$$

107. 9.ª Prop. geo. *Para tirar una tangente á un círculo por un punto fuera de él, bastará unir el punto con el centro del círculo, y trazar sobre esta línea como diámetro otra circunferencia, que cortará á la primera en dos puntos, desde los cuales tirando rectas al dado, estas serán dos tangentes al primer círculo, y contendrán la pedida.*

Anal. Suponiendo que el punto E sea exterior al círculo se obtiene $MM' = EM' - EM = z' - z''$, ó

$$MM' = \frac{2\sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

pero es visible que esta línea disminuye al paso que la EM, girando al rededor del punto E, se acerca á salir del círculo, y que los puntos M y M′ aproximándose concluyen por confundirse y coincidir con N, en cuyo caso la tal línea solo tiene con el círculo un simple contacto: en este punto se tendrá $MM' = o$, y por lo mismo

$$r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2 = o,$$



ó

$$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}.$$

He aqui pues la expresion de la tangente trigonométrica del ángulo que debe formar con la línea AE, la recta EN tirada por E, con la condicion de ser tangente al círculo, y por lo mismo la resolucion algébrica del problema de que se trata.

Si hubiese alguna dificultad en concebir, como la construccion de la última ecuacion es en todo conforme con la usada en geometría y dicha arriba, nos haríamos cargo que pues $a$ expresa la tangente trigonométrica del ángulo que la recta de que se trata de construir forma con la línea $AE = \alpha$, será preciso que $r$ y $\sqrt{\alpha^2 - r^2}$ expresen los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa sea $\alpha$; luego si sobre esta línea como diámetro se traza un círculo, y se unen los puntos de interseccion de estas circunferencias con el centro A de la dada, se hallará construida la expresion del modo con que se hace en geometría. Y como dicha expresion contiene el radical $\sqrt{\alpha^2 - r^2}$ que puede tomarse con los signos + y −, resulta que ella da los valores de las dos tangentes trigonométricas correspondientes á las tangentes geométricas.

108. 10.ª Prop. geo. *Para tirar una tangente á un círculo por un punto dado en la circunferencia, basta tirar un radio á dicho punto, y levantar en él una perpendicular al tal radio.*

Anal. Si designamos por $\alpha$ y $\beta$ las coordenadas de dicho punto, como él está en la circunferencia, deberá satisfacer á la ecuacion $x^2 + y^2 = r^2$, y por lo mismo se tendrá

$$\alpha^2+\beta^2=r^2,$$

lo cual es causa de que la

$$z^2+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z+\alpha^2+\beta^2-r^2=0,$$

se mude en

$$z^2+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z=0;$$

y en este estado se la puede descomponer en

$$z=0,\qquad z+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}=0:$$

por lo que, sus dos raices serán

$$z'=0,\qquad z''=-\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}};$$

y la diferencia de estos valores, ó la longitud de la parte de la secante comprendida en el círculo, será

$$\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Para que esta cantidad se desvanezca, como es preciso para que la secante se convierta en tangente, será necesario que se tenga

$$\alpha+\beta a=0,\quad \text{ó}\quad a=-\frac{\alpha}{\beta};$$

y por lo mismo la ecuacion $y-\beta=a(x-\alpha)$ de la recta EN, se mudará en

$$y-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha).$$

Ahora bien, la ecuacion de la recta tirada desde el centro del círculo al punto, cuyas coordenadas son $\alpha$ *y* $\beta$, ó el radio AN, seria (87)

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x;$$



lo que nos dice que la recta, cuya ecuacion es $y-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)$, es perpendicular á la $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, núm. 90, y que lo es en el punto cuyas coordenadas son $\alpha$ y $\beta$, que es el que tienen comun. Por consiguiente, *cuando se quiera tirar una tangente á un círculo por un punto dado en él, bastará levantar una perpendicular al radio en el punto dado.*

Si se quisiese conocer la distancia desde el origen A de las coordenadas, al punto en que la tangente NT encuentra al ege de las abscisas, seria necesario hacer en la ecuacion de esta tangente, $y=0$, lo cual daria

$$-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha),\quad \text{ó}\quad x=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha},$$

y por ser $\alpha^2+\beta^2=r^2$, saldria por último

$$x=\frac{r^2}{\alpha}.$$

11.ª Prop. geo. *El radio es perpendicular á la tangente en el punto de contacto.*

Anal. Acabamos de ver que la ecuacion de la tangente AN de un círculo es

$$y-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha),$$

con tal que $\alpha$ y $\beta$ expresen las coordenadas del punto de contacto, y $x$ é $y$ las coordenadas generales. La de una recta perpendicular á esta, que pase por el mismo punto N, cuyas coordenadas son $\alpha$ y $\beta$, y las generales de la recta sean $x'$, $y'$, será (núm. 90)

$$y'-\beta=\frac{\beta}{\alpha}(x'-\alpha).$$

Cuya ecuacion, simplificada, se muda en

$$y'\alpha=\beta x';$$

la cual nos dice que la recta que representa, pasa por el origen de las coordenadas, pues el supuesto $x'=0$ da $y'=0$, y al contrario; y como el tal origen es el centro, resulta *que la perpendicular á la tangente al círculo en el punto de contacto, pasa por el centro.*

Hemos visto que todos los principios que sobre el círculo se manifiestan en la Geometría elemental, los hemos deducido de su ecuacion; luego ella debe contenerlos implícitamente.

109. Por lo expuesto, puede resolverse la cuestion siguiente. *Hallar la posicion que debe tener la línea* EM, *tirada por el punto dado* E, *para que la parte* MM' *de esta línea comprendida en el círculo, sea de la magnitud* m. Con el fin de obtener expresiones sencillas, tomaremos, como en el núm. 106, la línea AE por eje de abscisas, é igualando á $m$ la diferencia de los valores de $z$, sacados en el núm. 107, resultará

$$m=\frac{2\sqrt{r^2(1+a^2)-a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

cuadrando y quitando el denominador se tendrá

$$m^2(1+a^2)=4r^2(1+a^2)-4a^2\alpha^2,$$

de la cual se deducirá

$$a=\frac{\sqrt{4r^2-m^2}}{\sqrt{4\alpha^2-4r^2+m^2}};$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion $y=a(x-\alpha)$, dará la de la recta buscada.

Hasta ahora solo hemos hallado la solucion analítica del problema; falta construir la expresion anterior. Para lograrlo, se observará que el numerador $\sqrt{4r^2-m^2}$ viene á ser el cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es $2r$, y $m$ el otro cateto. Por lo que hace al denominador $\sqrt{4\alpha^2-4r^2+m^2}$, se le dará la forma $\sqrt{4\alpha^2-(4r^2-m^2)}$, equivalente á $\sqrt{4\alpha^2-(\sqrt{4r^2-m^2})^2}$, y hace ver que dicho denominador es tambien el cateto de otro triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es $2\alpha$, y el otro cateto es $\sqrt{4r^2-m^2}$, ó el numerador, cuya construccion acabamos de indicar.



Designando por $p$ y $q$ las dos líneas que se obtendrán por estas operaciones, se sacará

$$a=\frac{q}{p},$$

y la ecuacion $y=a(x-\alpha)$ se mudará en

$$y=\frac{q}{p}(x-\alpha);$$

de la cual se infiere que si se toma sobre AE, partiendo desde E, una distancia $\text{EF}=p$, y que por el otro extremo de esta distancia, se levante una perpendicular $\text{FG}=q$, la recta que una el extremo de esta perpendicular con el punto E, gozará de la propiedad comprendida en el enunciado de la cuestion, á causa de que el ángulo FEG tendrá por tangente trigonométrica

$$a=\frac{q}{p}=\frac{\text{FG}}{\text{EF}}.$$

110. De lo dicho hasta aqui se infiere, que las cuestiones de Geometría pueden tratarse por dos métodos bien distintos: el uno consiste en determinar las ecuaciones de las líneas que contienen los puntos buscados, partiendo de las propiedades de estas líneas; y el otro consiste en deducir inmediatamente las relaciones de las rectas que determinan la posicion de estos puntos, valiéndose de la con-

sideracion de los triángulos semejantes y de los triángulos rectángulos que presenta la figura resultante del problema supuesto resuelto, ayudándose para ello con algunas construcciones preparatorias.

El primero de estos métodos, que algunas veces es mas elegante que el segundo, es siempre mas general; pero el segundo es comunmente mas sencillo; esto debia ser así, á causa de que en este se mira el asunto con menos generalidad, y que se parte de las propiedades mas cercanas á aquellas que se tratan de descubrir *.

111. La ecuacion del primer grado solo nos ha dado una especie de líneas, á saber, la línea recta; pues la del círculo fue ya de segundo grado; pero su ecuacion, hallada en el párrafo (94), aunque era la mas general, no es sino un caso particular de la siguiente expresion general de la ecuacion de dos indeterminadas de segundo grado

$$Ay^2 + Byx + Cx^2 + Dy + Ex = F \ldots\ldots (1)$$

Vamos á examinar las curvas que corresponden á los diferentes casos de esta fórmula; para lo cual se notará desde luego que sin que deje de ser general, se la puede escribir del modo siguiente:

$$y^2 + \frac{B}{A}yx + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x = \frac{F}{A};$$

y haciendo $\frac{B}{A} = b$, $\frac{C}{A} = c$, $\frac{D}{A} = d$, $\frac{E}{A} = e$, $\frac{F}{A} = f$, se tendrá $y^2 + bxy + x^2 + dy + ex = f$.

* Puede consultarse el método general y uniforme del primero de ellos en el Prefacio del *tratado de Cálculo diferencial é integral* del mismo autor, tres volúmenes en 4.°; y los que quieran conocer mas particularmente su aplicacion, hallarán de qué satisfacerse leyendo la segunda edicion de la *Reunion de varias proposiciones de Geometría* &c., publicada por Mr. Puissant, sabio muy recomendable, hoy dia individuo del cuerpo de Ingenieros geógrafos.



El primer medio que se presenta para examinar ó discutir las circunstancias del curso de las curvas que se buscan, es ver qué valores toman las ordenadas, segun se den á las abscisas diferentes valores, para lo cual resolveremos la ecuacion anterior con respecto á $y$.

Hecho lo cual, saldrá

$$y = -\tfrac{1}{2}(bx + d) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4(f - ex - cx^2) + (bx + d)^2}.$$

Desenvolviendo la cantidad que está debajo del radical y ordenando con relacion á $x$, saldrá

$$y = \frac{-(bx + d) \pm \sqrt{(4f + d^2) - 2(2e - bd)x - (4c - b^2)x^2}}{2}$$

Haciendo para abreviar

$$4f^2 + d^2 = p,\ 2e - bd = n,\ 4c - b^2 = m$$

se tendrá

$$y = -\frac{bx + d}{2} \pm \frac{\sqrt{p - 2nx - mx^2}}{2}.$$

Desde luego se ve que el valor de $y$ se compone de dos partes, la primera representada por $-\frac{bx + d}{2}$, es la ordenada de una línea recta, cuya ecuacion seria $y = -\tfrac{1}{2}bx - \tfrac{1}{2}d$, la cual se construiria tomando sobre el eje A$e$, debajo de AB, fig. 46, una parte AD $= \tfrac{1}{2}d$, y tirando por el punto D una recta DE, que formase con las $x$ negativas un ángulo DEA, cuya tangente fuese igual á $\tfrac{1}{2}b$ (87); de suerte que si AP fuese $x$, PM seria $-\frac{bx + d}{2}$. Fig. 46.

Hecho esto, para tener los puntos que pertenecen á la curva que se busca, es preciso tomar en la direccion de PN, así en la parte de arriba, como en la de abajo de la recta DE, las partes NM y NM′ iguales á

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2nx - mx^2}$$

y asi se tendrá

$$PM = -\tfrac{1}{2}(bx+d) + \tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2}$$
$$PM' = -\tfrac{1}{2}(bx+d) - \tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2}.$$

La recta DE tiene pues la notable propiedad de dividir en dos partes iguales las rectas tiradas paralelamente á la AC, entre dos puntos de la curva que se busca, por cuya razon se llama *diámetro;* pero entre la recta DE y los diámetros del círculo hay la diferencia de que estos cortan en ángulos rectos todas las líneas que dividen en dos partes iguales, siendo asi que la línea DE las corta oblicuamente: pero mas adelante se verá que ambas circunstancias dependen de la misma ley.

112. La ecuacion anterior se simplificaria mucho si tomásemos por ordenadas las rectas NM y NM′, esto es, haciendo

$$y + \frac{bx+d}{2} = t$$

tendriamos $t = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2}$;

pero en este caso no estarian contadas las abcisas AP sobre la línea II′, desde la cual se cuentan las ordenadas. Para conseguirlo es preciso tomarlas sobre el diámetro DE: lo cual se conseguirá haciendo $DN = s$, y observando que si se tira DG paralela á AB, se tendrá

$$DG = DN \cos. D = s \cos. D.$$

El ángulo D es igual al ángulo E, cuya tangente es $\tfrac{1}{2}a$; cuyo coseno es $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4+a^2}}$; (pág. 40) y pues que $AP = DG$, resultará $x = \dfrac{2s}{\sqrt{4+a^2}}$ ó haciendo para abreviar $q = \dfrac{2}{\sqrt{4+a^2}}$, $x = qs$.



Poniendo este valor de $x$ en el de $t$ se tendrá la ecuacion

$$t = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nqs-mq^2s^2},$$

la cual debe de existir entre $s$ y $t$, ó entre las rectas DN y NM para cada uno de los puntos de la curva; de modo que es su ecuacion referida á las coordenadas DN y NM. Esta ecuacion, aunque es mas sencilla que

$$y^2+bxy+cx^2dy+ex=f,$$

es tan general como ella, porque todas las trasformaciones que se han efectuado hasta aqui no han introducido ninguna condicion particular.

Como la expresion de $t$ está afectada en general de un radical de segundo grado, no puede tener valor real alguno, sin que la cantidad $p-2nqs-mq^2s^2$ sea positiva. El examen de esta circunstancia presenta varios casos que vamos á examinar sucesivamente.

113. Supondremos primero que la cantidad designada por $m$ en el núm. 111 sea positiva, y pondremos la expresion $p-2nqs-mq^2s^2$ bajo la forma

$$mq^2\left(\frac{p}{mq^2} - \frac{2n}{mq}s - s^2\right),$$

para no tener que considerar mas que la siguiente

$$\frac{p}{mq^2} - \frac{2n}{mq}s - s^2,$$

de la cual se puede hacer desaparecer el término en que $s$ solo es del primer grado, haciendo

$$s = u - \frac{n}{mq} \text{ (Elem. de Alg. 209)},$$

y despues de haber sustituido y reducido, se tendrá

$$\frac{pm+n^2}{m^2q} - u^2.$$

Para saber lo que es $u$ basta construir su valor en $s$, y la expresion

$$u = s + \frac{n}{mq} = \mathrm{DN} + \frac{n}{mq}$$

hace ver que el origen de las $u$ está detras del de las $s$ á una distancia $\mathrm{OD} = \frac{n}{mq}$, porque se tendrá entonces

$$\mathrm{DN} = \mathrm{ON} - \mathrm{OD} = u - \frac{n}{mq}.$$

Hecho esto se tendrá

$$t = \pm \sqrt{mq^2\left(\frac{pm+n^2}{m^2q^2} - u^2\right)},$$

lo cual manifiesta que la expresion de $t$ será real, con tal que

$$u^2 < \frac{pm+n^2}{m^2q^2},$$

que será nula cuando

$$u^2 = \frac{pm+n^2}{m^2q^2}, \text{ ó } u = \pm \sqrt{\frac{pm+n^2}{m^2q^2}}.$$

Estos últimos valores indican las intersecciones de la curva con el diámetro DE, los cuales, tomándolos á uno y otro lado del punto O por causa de sus signos, se tendrán los puntos I y I′ colocados á igual distancia del punto O.

Pasados estos puntos la cantidad

$$\frac{pm+n^2}{m^2q^2} - u^2,$$

se hace negativa, y por consiguiente las ordenadas $\frac{1}{4}$ serán imaginarias, y asi la curva no tendrá ningun punto perteneciente á abscisas mayores que OI y OI′, sino que toda ella estará comprendida en el espacio que hay entre



las líneas IH y IH′ tiradas por los puntos I y I′ paralelas á las ordenadas.

114. Los dos valores de $t$ que se tienen en $u$ solo se diferencian en el signo, y permanecen los mismos, bien sea que se tome $u$ positivo ó negativo; de modo que á la abscisa ON′=ON corresponde la ordenada N′M″ igual á NM′ colocada en sentido contrario, y asi los triángulos M″N′O y M′NO son iguales, y por consiguiente la recta M′M″ está dividida en dos partes iguales en el punto O. Por causa de esta propiedad que tiene el punto O con respecto á todos los puntos de la curva se le ha llamado *centro*.

115. Construyendo la ecuacion entre $t$ y $u$ se conoce la forma de la curva que representa; para esto hagamos

$$\frac{pm+n^2}{m^2q^2} = a'^2;$$

se tendrá $t = \pm \frac{1}{2}\sqrt{mq^2(a'^2-u^2)} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{mq^2}\,\sqrt{a'^2-u^2}.$

Trazando un círculo, cuyo radio sea $a'$ desde el punto O como centro, y que su abscisa sea $u$, el factor $\sqrt{a'^2-u^2}$ representará la ordenada del círculo, levantada perpendicularmente á OI. En cuanto al factor $\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}$ no debe representar mas que una relacion, atendiendo á la homogeneidad de las expresiones (71); representándolo pues por $\frac{b'}{a'}$, se tendrá

$$\frac{b'^2}{a'^2} = \frac{1}{4}mq^2,\ b'^2 = \frac{mp+n^2}{4m}, \text{ de donde sale}$$

$$t = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2-u^2}.$$

De modo que la ordenada NM se sacará buscando el cuarto término de la siguiente proporcion

$$a' : b' :: \sqrt{a'^2-u^2} : t.$$

Determinada que sea la magnitud de $t$, se la tomará á lo largo de la línea $MM'$, asi á la parte superior de DE como á la inferior por causa del signo $\pm$.

Es claro que la curva que resulte de esta construccion será cerrada como el círculo, y estará comprendida en el espacio que hay desde $u=a'$ hasta $u'=-a'$, porque pasando de estos límites el radical, ó la ordenada del círculo es imaginaria.

Es evidente que el mayor valor que puede tener la ordenada $t$ es la que corresponde al punto O, para el cual $u=o$; en cuyo caso se tiene

$$t=\pm b':$$

tomando pues las rectas OL y OL' iguales á $b'$, los puntos L y L' serán los límites de la curva en el sentido de las ordenadas, asi como los puntos I y I' lo son en el sentido de las abscisas.

116. Es digno de notarse que si la cantidad representada por $a'^2$ fuese negativa, el radical $\sqrt{a'^2-u^2}$ seria siempre imaginario, de modo que la ecuacion en este caso no puede expresar línea alguna. Atendiendo al valor $a'^2$ que es $\frac{pm+n^2}{m^2p^2}$, se verá que es negativo si $p$ tiene el signo $-$, y ademas si se verifica que $pm>n^2$.

Cuando en este caso $pm=n^2$, sale (115) $a'=o$, $b'=o$; pero siempre se tiene $\frac{b'}{a'}=\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}$, y por consiguiente

$$t=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2}.\sqrt{-u^2}=\pm qu\sqrt{-m},$$

cuya ecuacion se satisface haciendo $t=o$, $u=o$: por consiguiente se puede decir que en este caso la curva se reduce á un solo punto O, para el cual $t=o$, $u=o$, el



cual es el límite de las curvas dadas por la ecuacion anterior, á medida que los diámetros II' y LL' disminuyen.

Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuacion

$$t=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2\left(\frac{pm+n^2}{m^2q^2}-u^2\right)}$$

se trasforma en

$$t^2=\tfrac{1}{4}mq^2\left(\frac{pm+n^2}{m^2q^2}-u^2\right),$$

ó en

$$4mt^2+m^2q^2u^2-pm-n^2=o.$$

Cuando $p$ es negativo se trasforma en

$$4mt^2+m^2q^2u^2+pm-n^2=o;$$

y cuando $pm>n^2$, en este caso su primer miembro es la suma de tres cantidades esencialmente positivas, pues que $m$ tambien se supone positivo, de modo que no puede ser nulo, á no ser que se tengan separadamente las tres ecuaciones

$$4mt^2=o,\ m^2q^2u^2=o,\ pm-n^2=o.$$

Se pueden satisfacer las dos primeras haciendo $t=o$, $u=o$; pero la última expresa una condicion sin la cual la propuesta seria absolutamente absurda.

117. Supongamos ahora que $m$ sea negativo, la cantidad $p-2nqs-mq^2s^2$ se trasformará en

$$p-2nqs+mq^2s^2=mq^2\left(\frac{p}{mq^2}-\frac{2n}{mq}s+s^2\right):$$

se quitará el término $-\frac{2n}{mq}s$, haciendo $s=u+\frac{n}{mq}$; y como la cantidad $\frac{n}{mq}$, que representa DO, fig. 47, tiene el signo $+$, se tomará sobre DF en donde se cuentan las abscisas positivas. Se tendrá de este modo el punto O, Fig. 47.

y la ecuacion propuesta será

$$t=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2\left(\frac{pm-n^2}{m^2q^2}+u^2\right)}:$$

haciendo $\frac{pm-n^2}{m^2q^2}=\pm a'^2$, segun sea positiva ó negativa la cantidad $pm-n^2$, y representando lo mimo que antes $\frac{1}{4}mq^2$ por $\frac{b'^2}{a'^2}$

se tendrá $$t=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{u^2\pm a'^2}.$$

A primera vista parece que esta ecuacion encierra dos casos distintos; pero no contiene sino uno, porque elevando el cuadrado los dos miembros, se sacará

$$t^2=\frac{b'^2}{a'^2}(u^2\pm a'^2)$$

de donde $$a'^2t^2-b'^2u^2=a'^2b'^2$$
$$b'^2u^2-a'^2t^2=b'^2a'^2,$$

cuyas ecuaciones solo se diferencian una de otra en que en la segunda, $a'$ y $t$ reemplazan á $b'$ y $u$ en la primera, y recíprocamente bastará pues examinar una de ellas.

Considerando la segunda, dará

$$t=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{u^2-a'^2};$$

para construir la ordenada $t$ no hay mas que buscar una cuarta proporcional á las tres líneas

$$a',\ b' \text{ y } \sqrt{u^2-a'^2};$$

esta última es una media proporcional entre $u'-a'$ y $u+a'$, y solo es real en cuanto $u>a'$. De modo que la curva que se busca no tiene desde $u=o$ hasta $u=+a'$, y desde $u=o$ hasta $u=-a'$, ninguna ordenada real; y como $u=a'$ y $u=-a'$ da $t=o$, resulta que esta curva encuentra el diámetro DE en los puntos I y I′ en que terminan las abscisas OI y OO′, pero no se extiende entre las rectas IH y I′H′.



Mas allá de los puntos I y I′, se tiene $u>a'$ sea positiva ó negativamente, la ordenada $t$ aumenta sin cesar, y puede crecer indefinidamente. Segun estas consideraciones se ve claramente que el curso de la curva es semejante al de las líneas KI$k$, K′I′$k'$, separadas por el intervalo II′, y cuyas ramas IK, I$k$, I′K′ y I′$k'$, se extienden al infinito.

Si se considera esta curva con relacion á la recta LL′, esto es, tomando $t$ por abscisa, y $u$ por ordenada, dará su ecuacion

$$u=\pm\frac{a'}{b'}\sqrt{t^2+b'^2}.$$

Bajo esta forma, $u$ no puede ser menor que OI y OI′, y asi la curva no encuentra su diámetro LL′.

Por lo cual como de la ecuacion

$$a'^2t^2-b'^2u^2=a'^2b'^2$$

se saca $$t=\pm\frac{a'}{b'}\sqrt{u^2+a'^2},$$

debe pertenecer á una curva QL$q$, Q′L′$q'$ de la misma especie que KI$k$, K′I′$k'$, pero colocada con respecto al diámetro LL′ de las $t$, del mismo modo que la otra lo está con respecto al diámetro II′ de las $u$.

118. Si se tuviese $a'=o$, ó $pm-n^2=o$ (117), la expresion de $t$ se reduciria á $t=\pm\frac{1}{2}\sqrt{mq^2u^2}$, la cual dará las siguientes expresiones

$$t=\tfrac{1}{2}qu\sqrt{m} \qquad t=-\tfrac{1}{2}qu\sqrt{m},$$

que representan dos líneas rectas tiradas por el punto O. Para construirlas se tomará á arbitrio una abscisa OR, lo cual dará

$$t = \pm \tfrac{1}{2}\, ORq\sqrt{m},$$

y llevando estos valores desde R á S y á S′, se tirarán OS y OS′, las cuales serán las rectas pedidas.

Para comparar con estas rectas la curva KI$k$, no habrá mas que tomar la diferencia MV de las ordenadas NM y NV correspondientes á una abscisa cualquiera ON $= u$. La primera ordenada está representada por

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2}\sqrt{u^2 - a^2} \text{ ó } \tfrac{1}{2}qu\sqrt{m}\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}$$

y la segunda por

$$\tfrac{1}{2}qu\sqrt{m}$$

de donde sale

$$MV = \tfrac{1}{2}qu\sqrt{m} - \tfrac{1}{2}qu\sqrt{m}\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}} = \tfrac{1}{2}qu\sqrt{m} \times \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}\right).$$

Para apreciar mas facilmente la diferencia $1 - \sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}$ se desenvuelve la expresion $\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}$: y como 1 es la raiz del primer término, se hará

$$\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}} = 1 + z,$$

de donde se saca

$$1 - \frac{a'^2}{u^2} = 1 + 2z + z^2;$$

pero cuanto mayor sea $u$, tanto mas pequeña será la fraccion $\frac{a'^2}{u^2}$, y tanto menos la raiz $1 + z$ se diferenciará de la unidad. Despreciando pues, segun lo expuesto en



el Algebra, núm. 215, $z^2$ en la ecuacion anterior, se tendrá

$$z = -\frac{a'^2}{2u^2}.$$

Para sacar mas aproximado este valor, se hará $z = -\frac{a'^2}{2u^2} + z'$, y se determinará $z'$, que saldrá igual á $-\frac{a'^4}{8u^4}$, y asi sucesivamente. De modo que se tendrá

$$MV = \tfrac{1}{2}qu\sqrt{m}\left\{1 - 1 + \frac{a'^2}{2u^2} + \frac{a'^4}{8u^4} + \&\right\} = \tfrac{1}{2}q\sqrt{m}\left\{\frac{a'^2}{2u} + \frac{a'^4}{8u^3} + \&\right\};$$

lo cual manifiesta que cuanto mas crezca $u$ tanto mas disminuye MV, pero sin que jamas llegue á ser nulo.

Se sigue de aqui que cuanto mas se aparta la curva del punto O, tanto mas se aproxima á las rectas OS y OS′, sin que por eso las llegue á tocar; de modo que estas rectas son los límites de las porciones KI$k$ y K′I′$k'$ de la curva propuesta, sin poder salir jamas del ángulo SOS′, y del opuesto al vértice.

119. En el caso en que $m = o$, se tiene solo

$$t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2nqs}:$$

la cantidad que está bajo el radical se reduce á un solo término haciendo $\frac{p}{2nq} - s = u$; y por este medio sale $t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2nqu}$, ó representando $\tfrac{1}{2}nq$ por $e'$, $t = \pm\sqrt{e'u}$ se ve facilmente que esta ecuacion da $t = o$, y que por consiguiente el punto del diámetro DE, fig. 48, en el Fig. 48.
cual se ha tomado el origen de la $u$, pertenece á la curva que se busca. Para hallar este punto es preciso hacer $u = o$ en la ecuacion anterior

$$u = \frac{p}{2uq} - s,$$

la cual da $s = \frac{p}{2mq}$, llevando esta cantidad sobre DE, del lado de las abscisas positivas, se tendrá el punto I, en que la curva propuesta encuentra á DE.

Si la cantidad $c'$ es positiva, no se podrá tomar $u$ sino positivamente; pero se podrá tomar tan grande como se quiera, y al mismo tiempo los valores de $t$ irán siendo mayores, de modo que la curva debe extenderse al infinito de este lado solo, asi como lo manifiesta la línea R$\mathrm{I}r$. Estaria vuelta al lado opuesto si $c'$ fuese negativa, porque en este caso seria preciso tomar $u$ negativamente.

La ecuacion $t = \pm\sqrt{c'u}$ se construye tomando una media proporcional entre la abscisa $\mathrm{IN} = u$ y otra recta igual á $c'$: el resultado de esta construccion es la ordenada NM, la cual se llevará como en los casos anteriores, asi en la parte superior como inferior de DE.

Debe notarse que la ecuacion primitiva

$$t = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2nqs}$$

se reduce á $t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{p}$ cuando $u = o$, porque en este caso la curva considerada en este artículo se cambia en dos líneas rectas, tiradas paralelamente al eje de las $s$ á una distancia $\frac{1}{2}\sqrt{p}$, asi encima como debajo de dicho eje. A medida que $p$ disminuye estas dos líneas se van acercando, y cuando $p = o$, se confunden con el eje mismo, en cuyo caso es el lugar de la ecuacion propuesta.

120. Por lo expuesto en los números anteriores la ecuacion

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f$$

no puede tomar mas que una de las tres formas siguientes:



$$\left.\begin{array}{l} t = \pm\dfrac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - u^2} \\ t = \pm\dfrac{b'}{a'}\sqrt{u^2 - a'^2} \\ t = \pm\sqrt{c'u} \end{array}\right\} \text{ó haciendo desaparecer los radicales} \left\{\begin{array}{l} a'^2t^2 + b'^2u^2 = a'^2b'^2 \\ b'^2u^2 - a'^2t^2 = a'^2b'^2 \\ t^2 = c'u \end{array}\right.$$

segun que $m$ sea positivo ó negativo, ó nulo: corresponden á los casos en que la cantidad $4c - b^2$, que equivale á $\frac{4\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}$ (111), y que és del mismo signo que $4\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ es positiva, negativa ó nula: las tres ecuaciones anteriores se hallan tambien comprendidas en la ecuacion siguiente

$$t = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2nqs - mq^2s^2}.$$

Las curvas que representa la primera son aquellas que se cierran, y que por consiguiente comprenden un espacio limitado en todos sentidos (115): se llaman *elipses*. La segunda comprende aquellas curvas compuestas de cuatro ramas infinitas formando dos porciones separadas (117), á las que se llaman *hipérbolas*, y á las rectas, entre las cuales se hallan comprendidas, se llaman *asimptotas* (118). En fin la tercera ecuacion es la de las *parábolas* (119).

Para concluir el examen de todos los casos que encierra la ecuacion

$$\mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}y + \mathrm{E}x = \mathrm{F} \ldots\ldots (1)$$

solo falta considerar aquel en que los dos coeficientes A y C son nulos: porque aunque las trasformaciones que se han hecho hasta aqui son ilusorias(a) cuando $\mathrm{A} = o$, como la ecuacion contiene $x^2$, se la puede resolver con respecto á esta cantidad, cuando C no es nulo, y las fórmulas de los números anteriores pueden servir para esto, cam-

(a) p.r q.e quitando el coeficiente en la gral. todos los términos estan divididos p.r [illegible] y serian infinitos todos los coeficientes biando en ellas $y$ en $x$ y $x$ en $y$, esto es, tomando por eje de ordenadas el de las abscisas; pero dichas fórmulas no comprenden el caso en que A y C son nulas, porque la ecuacion (1) se reduce á la siguiente

$$Bxy + Dy + Ex = F,$$

que solo es de primer grado, respecto á cada una de las coordenadas $x$ é $y$; así merece un examen aparte.

Sin disminuir en nada su generalidad se la puede poner bajo la forma siguiente:

$$xy + dy + ex = f$$

de la cual sale $y = \frac{f - ex}{x + d}$:

cuyo valor de la ordenada jamas puede ser imaginario.

Si se hace $y = 0$, saldrá $x = \frac{f}{e}$.

Fig. 49. Esta es la abscisa del punto E, fig. 49, en cuyo punto la curva que se busca corta al eje de las abscisas AB, despues pasa á la parte inferior, porque $y$ se hace negativa cuando $x > \frac{f}{e}$. Cuando $x = 0$, sale $y = \frac{f}{d}$, cuyo valor indica el punto F en que la curva encuentra al eje AC de las $y$.

En la parte ó region negativa del eje de las $x$, continúa creciendo la ordenada $y$, porque el denominador $x + d$ disminuye, pues hay que restar $x$, y se hace cero cuando $x = -d$. En este caso el valor infinito que toma $y$ hace ver que la curva no puede llegar á tocar la recta GS levantada sobre la abscisa $AG = -d$ perpendicularmente al eje AB.

Si continúa $x$ siendo negativo, y se hace mayor que $d$, el valor de $y$ cambia de signo; pero su primer valor es mayor que cualquiera cantidad que se tome: de modo



que es preciso colocar en la parte inferior de AB, al otro lado de GS, una rama K′I′ semejante á KI, pero en sentido inverso, esto es, que se aproxime á AB á medida que crezca negativamente la abscisa.

Nos falta examinar qué valores toma $y$ segun va creciendo $x$ bien sea positiva ó negativamente; para esto divídase por $x$ los dos términos de la expresion de $y$: saldrá

$$y = \frac{\frac{f}{x} - e}{1 + \frac{d}{x}},$$

cuyo resultado, á proporcion que las fracciones $\frac{f}{x}$, y $\frac{d}{x}$ disminuyan ó que $x$ crezca, se aproxima mas y mas á $y = -e$. Por consiguiente tirando á la distancia $AH = e$, por la parte inferior de AB, HS′ paralela á este eje, se tendrá un límite, hácia el cual se aproximarán mas y mas las ramas $Ik$ y $I'k'$; y por consiguiente las ramas $KIk$ y $K'I'k'$ jamas saldrán del ángulo SOS′ y del opuesto.

Lo que se acaba de ver basta para manifestar la analogía que hay entre la curva que hemos considerado y la que se llama *hipérbola*; hubiéramos podido tambien trasformar la ecuacion de esta en la anterior, tomando por ejes de coordenadas las asimptotas indicadas en el núm. 188; pero no nos detendremos en esto, porque en lo sucesivo trataremos este asunto de un modo general (129). Por ahora nos contentaremos con hacer ver que si se cuentan las coordenadas desde el punto O, en que se cortan las asimptotas GS y HS, y haciendo

$$x = t - d \qquad y = u - e$$

la ecuacion propuesta se trasforma en $ut = f + de$.

bajo cuya forma se conoce facilmente que las dos ramas son semejantes.

121. Cada una de estas ecuaciones parece se halla reducida á la forma la mas simple; pero las coordenadas son perpendiculares entre sí, como sucede en las ecuaciones de la línea recta y del círculo que hemos hallado anteriormente; no obstante, las situaciones de las ordenadas y de las abscisas estan ligadas entre sí á causa de la condicion de que las primeras son paralelas á la recta que toca la curva en el extremo de su diámetro.

Fig. 46, 47, 48. Para convencerse de esto basta observar que los puntos M, M′, fig. 46, 47, 48, se confunden en uno solo en el punto I, cuya circunstancia forma el caracter esencial de los puntos de contacto (107). En efecto, la suma de las dos ordenadas, ó la distancia de los puntos M y M′, está representada por $\frac{2b'}{a}\sqrt{a'^2-u^2}$ en la elipse, por $\frac{2b'}{a'}\sqrt{u^2-a'^2}$ en la hipérbola; y finalmente por $2\sqrt{c'u}$ en la parábola, la cual suma es nula en el punto I, para el cual se tiene $u=a'$ en las dos primeras curvas, y $u=0$ para la tercera.

Como la ecuacion de las elipses es simétrica con respecto á las dos indeterminadas $t$ y $u$, de modo que la expresion de $u$ en $t$ tiene la misma forma que la de $t$ en $u$, se podrian tomar igualmente las $t$ por abscisas y las $u$ por

Fig. 46. ordenadas, y se veria que el diámetro II′, fig. 46, es paralelo á la tangente tirada por el punto L. Las rectas II′ y LL′ gozan ambas á dos de las mismas propiedades, por cuya razon se llaman *diámetros conjugados*. Es claro que en el círculo los diámetros conjugados deben de ser perpendiculares entre sí, porque la tangente tirada en el



extremo de cualquier diámetro le es perpendicular: en el círculo es infinito el número de diámetros que gozan de esta propiedad. No sucede lo mismo en la elipse; pero aunque en esta curva la analisis anterior no nos ha dado á conocer mas que dos diámetros conjugados, no obstante tiene siempre otros dos que se cortan en ángulos rectos, como veremos mas adelante.

Si se compara lo que acabamos de hacer con la ecuacion general de segundo orden, con lo que hemos visto en los números 87 y 94, con respecto á la línea recta y al círculo, se notará que la ecuacion de una misma línea toma diferentes formas, segun las coordenadas á que se refieren sus puntos. Por consiguiente puede ser útil saber cambiar las coordenadas, á fin de pasar á aquellas que den para la línea de que se trate la ecuacion mas sencilla; y en vista de esto vamos á buscar fórmulas generales para cambiar las coordenadas de una curva en otras situadas de cualquier modo, ya sea con respecto á las otras, ya con respecto á ellas mismas.

122. La mayor mudanza que puede ocurrir en un sistema de coordenadas, en el bien entendido que han de continuar siendo líneas rectas y respectivamente paralelas á dos líneas fijas, consiste en darles un nuevo origen y otras direcciones. Resolveremos desde luego este caso general, para lo cual supondremos que se quiera expresar los valores de las coordenadas $AP=x$, $PM=y$, fig. 50, Fig. 50.
referidas á los ejes AB y AC, por otras dos coordenadas $A'''P''=t$, $P''M=u$, referidas á los ejes A‴B″, A‴C″, cuya posicion respecto á los primeros se conoce.

Tirando por el nuevo origen A‴ las rectas A‴B′ y A‴C′, respectivamente paralelas á AB y á AC las distancias AA′ y A′ A‴ son conocidas por la hipótesis, y representándolas por $\alpha$ y $\beta$, se tendrá

$$AP = A'P + AA' = A'''P + \alpha$$
$$PM = P'M + A'A''' = P'M + \beta.$$

Tirando por el extremo de la nueva ordenada P″M, las líneas P″Q y P″R, la una paralela á AB y la otra á AC, se observará que siendo dada la situacion de los ejes A‴B″ y A‴C″ con respecto á AB y AC, se deben conocer todos los ángulos de los triángulos A‴P″R, P″MQ, ó lo que es lo mismo las relaciones de sus lados homólogos: por consiguiente haciendo $\frac{A'''R}{A'''P''} = m$, $\frac{P''R}{A'''P''} = n$, $\frac{P''Q}{P''M} = p$, $\frac{QM}{P''M} = q$ se tendrá

$$A'''R = m.\,A'''P'' = mt, \qquad P''R = n.\,A'''P'' = ut$$
$$p''Q = p.\,p''M = pu \qquad QM = q.\,P''M = qu$$

de donde se sacará

$$A'''P' = A'''R + P''Q = mt + pu$$
$$P'M = P''R + QM = nt + qn;$$

y finalmente

$$x = Ap = A'''p + x = mt + pu + \alpha$$
$$y = pM = p'M + B = nt + qu + \beta.$$

Estos son los valores mas generales que pueden tener las coordenadas $x$ ó $y$, cualquiera que sea el ángulo que forman entre sí, cuando se las quiere expresar por otras coordenadas de la misma especie situadas como se quiera. De este caso general se pueden deducir todos los particulares.

1.° Si se suponen las nuevas coordenadas paralelas á las primeras, y solo se cambia el orígen, las líneas A‴C″ y A‴C′, se confunden, y lo mismo sucede á A‴B″ y A‴B′; por consiguiente se tendrá



$$m = 1,\ n = 0,\ p = 0,\ y\ q = 1,$$

con lo que resultará

$$x = t + \alpha,\ y = u + \beta$$

lo que es facil de hacer ver á *priori*, porque en este caso A‴P″ y A‴P′ se confunden, y lo mismo sucede á P″M y P′M.

Si se hace $\alpha$ ó $\beta$ igual á cero, se conservará ó bien el eje AC ó bien el eje AB.

2.° Si solo se quiere cambiar la direccion de los ejes AB y AC conservando el orígen en el punto A, las líneas A‴B′ y A‴C′ se confunden en este caso con AB y AC; de modo que se tendrá

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,$$

con lo cual resultará

$$x = mt + pu,\ y = nt + qu.$$

Si suponemos $m = 1$, y $n = 0$, lo que da $x = t + pu$, $y = qu$, es lo mismo que hacer coincidir la línea A‴B″ con A‴B′, y por consiguiente solo se habrá cambiado la direccion de las ordenadas: se probaria del mismo modo que $x = mt$, $y = nt + u$ son los valores de $x$ y de $y$ cuando solo se cambia la direccion de las abscisas.

123. Se debe tener presente que las cantidades $m$, $n$, $p$ y $q$, las cuales todas dependen de la direccion de las nuevas coordenadas, tienen entre sí una dependencia mutua y necesaria; de suerte que no se pueden tomar arbitrariamente todas las cuatro, porque si conociendo el ángulo de los ejes primitivos A‴B′, A‴C′, se diesen ademas los ángulos B″A‴B′, y C″A‴B″, con solo estas tres cosas estaria enteramente determinada la situacion de los nuevos ejes A‴B″ y A‴C″. Cuando se pasa de un sistema conocido de coordenadas á otro sistema tambien conocido, las cantidades $m$, $n$, $p$ y $q$ calculadas segun lo

que representan, tendrá entre sí la dependencia ó relacion de que hemos hablado; pero al mismo tiempo se deduce de lo dicho que, cuando se da la situacion del origen, no se puede determinar la direccion de los nuevos ejes, de modo que se satisfagan á mas de dos condiciones diferentes, y que en las expresiones $x=mt+pu+\alpha$, $y=nt+qu+\beta$ las cantidades $x$ ó $y$, $t$ y $u$, no pueden ser coordenadas de un mismo punto, con respecto á dos sistemas de coordenadas rectas y paralelas, siempre y cuando $m$, $n$, $p$ y $q$ sean independientes. Vamos pues á examinar qué relacion deben tener entre sí dichas cantidades.

Si se tiran por el punto M las rectas MG y MH respectivamente perpendiculares á A‴B′ y A‴B″, y suponemos conocidos los ángulos MP′B′=C′A‴B′ y MP″B″=C″A‴B″, se tendrá la relacion de PM á P′G y la de P″M á P″H. Llamando $g$ la primera y $h$ la segunda, resultará

$$P'G=P'M\times g \text{ y } P''H=P''M\times h;$$

tirando despues A‴M, y representando A‴P′ y P′M′ por $x'$ é $y'$, los triángulos oblicuángulos A″P′M y A‴P″M darán

$$\overline{A'''M}^2=\overline{A'''P'}^2+\overline{P'M}^2+2\,\overline{A'''P'}\times\overline{P'G}=x'^2+y'^2+2gx'y'$$
$$\overline{A'''M}^2=\overline{A'''P''}^2+\overline{P''M}^2+2\,\overline{A'''P''}\times\overline{P''H}=t^2+u^2+2htu$$

igualando estas dos expresiones de $\overline{A'''M}^2$ saldrá

$$x'^2+y'^2+2gx'y'=t^2+u^2+2htu;$$

poniendo por $x'$ é $y'$ sus valores $mt+pu$ y $nt+qu$ se tendrá $(m^2+n^2+2gmn)\,t^2+(p^2+q^2+2gpq)\,u^2+2[mp+nq+g(np+mq)]tu=t^2+u^2+2htu$.

Esta ecuacion debe verificarse, tenga M la situacion que se quiera; asi es preciso que se verifique independientemente de los valores de $t$ y $u$, lo cual da las tres condiciones siguientes,



$m^2+n^2+2gmn=1$, $p^2+q^2+2gpq=1$, $mp+nq+g(np+mq)=h$.

Eliminando $g$ de las dos primeras, se tendrá

$$(m^2+n^2)pq-(p^2+q^2)\,mn=pq-mn,$$

cuyo resultado expresará las condiciones á que deben satisfacer las cantidades $m$, $n$, $p$ y $q$.

124. Por lo comun se supone que las nuevas coordenadas $u$ y $t$ se cortan en ángulo recto del mismo modo que las primeras; en cuyo caso las ecuaciones anteriores se simplifican mucho; porque siendo rectos entonces los ángulos MP,B′ y MP″B″, las líneas P′,G ó $gy$ y P″H ó $h$ desaparecen; de modo que solo queda

$$m^2+n^2=1,\quad p^2+q^2=1,\quad mp+nq=0,$$

de donde sale $m^2=1-n^2$; $p^2=1-q^2$, $m^2p^2=1-n^2-q^2+n^2q^2$; y como $mp=nq$, sale $n^2+q^2=1$.

Comparando este resultado con la ecuacion $m^2+n^2=1$, se halla $q=m$, lo cual da $p=-n$; por último se tiene

$$x'=mt-nu,\quad y'=nt+mu,$$

teniendo presente que las cantidades $m$ y $n$ dependen la una de la otra, en virtud de la ecuacion $m^2+n^2=1$.

La figura 51, construida para este caso particular, hace ver que $m$ es el coseno del ángulo B′A‴B″, y que $n$ es su seno, y que se tiene como anteriormente Fig. 51.

$$A'''P'=A'''R-P'Q=mt-nu$$
$$P'M=P''R+QM=nt+mu\ (*).$$

* Seria cosa muy fácil cambiar, no solo en este caso, sino en todos los anteriores, las denominaciones de las letras $m$, $n$, $p$, $q$ en senos ó cosenos de los ángulos que forman entre sí los ejes coordenados: con solo lo cual se tendrán las fórmulas que ponen varias obras *publicadas posteriormente á las primeras ediciones de esta;* pero la notacion que hemos adoptado abrevia las expresiones, y conserva la elegancia de la analisis. Por esta razon sin duda la prefirieron por lo general MM Lagrange y Monge, y asi adoptaron en sus obras representar las trasformaciones de coordenadas con letras, en lugar de valerse

Para cambiar en este caso el origen de coordenadas y la direccion de sus ejes, es preciso tomar

$$x=mt-nu-\alpha,\quad y=nt+mu+\beta\ (122)$$

y teniendo presente la ecuacion

$$m^2+n^2=1$$

solo podremos disponer de tres cantidades, á saber, $\alpha$, $\beta$ y de $m$ ó de $n$.

125. Veamos ahora qué simplificaciones se pueden dar a la ecuacion

$$Ay^2+Bxy+Cx+Dy+Ex=F\ldots\ldots(1)$$

de líneas trigonométricas, de cuyo medio, por otra parte, ya se valió Euler en el año de 1748.

Como la situacion respectiva de los cuatro ejes que se cortan en el punto A''', está determinada por tres de los ángulos que forman dos á dos de ellos, se pueden escoger de varios modos los datos de la cuestion: el siguiente nos parece bastante sencillo.

Fig. 50. Supongamos, fig. 50.

$$B''A'''B'=\delta,\ C''A'''C'=\chi,\ C'A'''B'=\varpi,$$

de aqui se saca

$$C'A'''B''=\varpi-\delta,\ C''A'''B'=\varpi-\chi,$$

por ser paralelas las rectas P''R, QM y A'''C', P''M y A'''C'', p''Q y A'''B, los ángulos A'''RP'' y P''QM son suplementos de C'A'''B' los ángulos A'''P''R y C'A'''B'', MP''Q y C''A'''B', P''MQ y C'A'''C'' son iguales, y asi tendremos (núm. 122)

$$m=\frac{A'''R}{A'''P}=\frac{\text{sen. }C'A'''B''}{\text{sen. }C'A'''B'}=\frac{\text{sen. }(\varpi-\delta)}{\text{sen. }\varpi}$$

$$n=\frac{P''R}{A'''P''}=\frac{\text{sen. }B''A'''B'}{\text{sen. }C'A'''B'}=\frac{\text{sen. }\delta}{\text{sen. }\varpi}$$

$$p=\frac{P''Q}{P''M}=\frac{\text{sen. }C'A'''C''}{\text{sen. }C'A'''B'}=\frac{\text{sen. }\chi}{\text{sen. }\varpi}$$

$$p=\frac{QM}{P''M}=\frac{\text{sen. }C''A'''B'}{\text{sen. }C'A'''B'}=\frac{\text{sen. }(\varpi-\chi)}{\text{sen. }\varpi}$$

$$A'''P=x'=\frac{\text{sen. }(\varpi-\delta)}{\text{sen. }\varpi}t+\frac{\text{sen. }\chi}{\text{sen. }\varpi}u$$

$$P'M=y'=\frac{\text{sen }\delta}{\text{sen. }\varpi}t+\frac{\text{sen. }(\varpi-\chi)}{\text{sen. }\varpi}u.$$

No necesitamos considerar ninguna ecuacion de condicion, porque



trasformando sus coordenadas; pero sin que dejen de ser perpendiculares entre si.

Si se hace $x=mt-nu+\alpha$, $y=nt+mu+\beta$ y substituimos en la ecuacion (1), el resultado será tambien una ecuacion completa de segundo grado en $n$ y $t$; pero como se han introducido tres cantidades arbitrarias, podremos establecer otras tantas condiciones, que simplifiquen el resultado, por ejemplo igualar á cero las coeficientes de las cantidades $ut$, $t$ y $u$, para que desaparezcan los términos que ellas afectan: asi tendremos una ecuacion de la forma siguiente

$$A't^2+C'u^2=F',$$

semejante á las dos primeras del núm. 120. Esta forma es notable; 1.° porque siendo iguales y de diferente signo los dos valores de $t$, el nuevo eje de las abscisas $u$ tiene que ser un diámetro (111); 2.° porque dando cada valor de $u$ tomado positiva ó negativamente, los mismos valores para $t$, es preciso que el orígen de las $u$, coloca-

en el cálculo no entran mas que las cantidades precisas para determinar los sistemas de coordenadas.

Si se supone que el ángulo C'A'''B' de los ejes primitivos sea recto, se tendrá sen. $\varpi=1$, y asi se sacará

$$x'=t\cos.\delta+u\text{ sen. }\chi$$
$$y'=t\text{ sen. }\delta+u\cos.\chi.$$

Se ve facilmente que en general el ángulo C''A'''B'' de los nuevos ejes coordenados está representado por $\varpi-(\delta+\chi)$: asi pues si este ángulo debe ser recto al mismo tiempo que el de los ejes primitivos, tendremos

$$\tfrac{1}{2}\pi-\delta-\chi=\tfrac{1}{2}\pi,\ \text{de donde }\chi=-\delta$$
$$\text{y sen }\chi=-\text{sen. }\delta,\ \cos.\chi=\cos\delta\ (23);$$

y por consiguiente

$$x'=t\cos.\delta-u\text{ sen. }\delta$$
$$y'=t\text{ sen. }\delta+u\cos.\delta,$$

lo mismo que se hubiera sacado inmediatamente de la figura 51 en que el eje A'''C'' cae al otro lado del eje A'''C' con relacion al eje A'''B', cuya circunstancia se expresa en la mudanza de signo del ángulo $\chi$. Fig. 51.

do en el medio del diámetro, sea el centro de la curva (114).

El cálculo será mas sencillo si en lugar de cambiar á un tiempo el orígen y la direccion de los ejes coordenados, se empieza por trasladar los ejes paralelamente á sí mismos. Si para esto se toma

$$x = x' + \alpha,\ y = y' + \beta,$$

la ecuacion (1) se trasformará en

$$\left.\begin{array}{l} A'y'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + (2A\beta + \beta\alpha + D)\,y + (2C\alpha + \beta B \\ + E)x + A\beta + B\alpha\beta + C\alpha^2 + D\beta + E\alpha = F. \end{array}\right\}(2).$$

Siendo las cantidades $\alpha$ y $\beta$ ambas á dos arbitrarias podemos disponer de ellas para quitar los términos en que hay $x'$ y $y'$, estableciendo las siguientes ecuaciones

$$2A\beta + B\alpha + D = 0 \qquad 2C\alpha + B\beta + E = 0\ (a),$$

las que dan

$$\alpha = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2},\ \beta = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2}.$$

En virtud de esto no quedan en la ecuacion (2) mas que términos afectados de $y'^2$, $x'^2$, $x'y'$, y términos independientes de las coordenadas $x'$ y $y'$; pero estos últimos se reducen á menos atendiendo á las ecuaciones ($a$). En efecto, multiplicando la primera por $\beta$, la segunda por $\alpha$, y restando su suma de la ecuacion (2), y suprimiendo los términos que deben desvanecerse, se tendrá

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 - A\beta^2 - B\alpha\beta - C\alpha^2 = F \ldots (3).$$

Si ahora damos otra direccion á los ejes de las coordenadas; pero de modo que sean rectangulares, para lo cual tomaremos segun el número anterior

$$x' = mt - nu,\ y' = nt + mu,$$

tendremos la siguiente ecuacion despues de haber substituido por $x'$ y $y'$ sus valores en la ecuacion (3)



$$\left.\begin{array}{l} (An^2 + Bmn + Cm^2)t^2 + [2(A-C)mn + B(m^2 - n^2)ut] \\ + (Am^2 - Bmn + Cn^2)u^2 - A\beta^2 - B\alpha\beta - C\alpha^2 = F. \end{array}\right\}(4).$$

No debiendo satisfacer las cantidades $m$ y $n$ mas que á la ecuacion $m^2 + n^2 = 1$, queda una indeterminada, y asi podemos disponer de ella para quitar el producto $ut$, igualando á cero su coeficiente, lo cual da la siguiente ecuacion

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0 \ldots (m).$$

Si hacemos para abreviar

$$An^2 + Bmn + Cm^2 = A'$$
$$Am^2 - Bmn + Cn^2 = C'$$
$$A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + F = F',$$

la ecuacion (4) se trasforma en

$$At'^2 + C'u^2 = F',$$

que tiene la forma que se pide; pero en el bien entendido que puedan sacarse valores reales para $m$ y $n$, que dependen de ecuaciones de segundo grado.

126. Dichos valores se sacan de las dos ecuaciones

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0$$
$$m^2 + n^2 = 1.$$

La primera da

$$mn = \frac{B(m^2 - n^2}{2(C - A)};$$

si se hace $\frac{B}{2(C-A)} = \gamma$, elevando al cuadrado el valor de $mn$, y eliminando $n^2$, con el auxilio de la ecuacion $m^2 + n^2 = 1$, saldrá

$$m^4 - m^2 = -\frac{\gamma^2}{1 + 4\gamma^2},$$

de donde se sacará

$$m^2 = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \frac{\gamma^2}{1+4\gamma^2}} = \tfrac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + 4\gamma^2}}$$

y con este valor se sacará

$$n^2=\tfrac{1}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{1+4\gamma^2}};$$

poniendo en lugar de $\gamma$, la cantidad que representa, y substituyendo los valores de $m^2$ y $n^2$, en la expresion $mn$, se encontrará tomando solo los signos superiores de las radicales

$$m^2=\tfrac{1}{2}+\frac{C-A}{2\sqrt{(C-A)^2+B^2}},$$

$$n^2=\tfrac{1}{2}-\frac{C-A}{2\sqrt{(C-A)^2+B^2}},$$

$$mn=\frac{B}{2\sqrt{(C-A)^2+B^2}}.$$

Los valores de $m$ y $n$, sacados de los de $m^2$ y $n^2$ tendrán signo $\pm$; pero por la expresion de $mn$ se ve que estos signos deben ser tales que el producto $mn$ tenga el mismo signo que B (*).

Sustituyendo los valores de $m^2$, $n^2$ y $mn$ en las expresiones de $A'$, y de $C'$ y juntando los términos que tienen el mismo denominador, se verá fácilmente que su numerador es divisible por $\sqrt{(C-A)^2+B^2}$, y que asi

$$A'=\tfrac{1}{2}(C+A)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(C-A)^2+B^2}$$

$$C'=\tfrac{1}{2}(C+A)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(C-A)^2+B^2}.$$

* Si conforme á lo que indicamos en la nota de la pág. 201 se hace $B''A'''B'=\delta$, tendremos $m=\cos\delta$, $n=\text{sen.}\,\delta$ de donde sale $mn=\text{sen.}\,\delta\cos.\,\delta=\tfrac{1}{2}\text{sen.}\,2\delta$

$$m^2-n^2=\cos.\,\delta^2-\text{sen.}\,\delta^2=\cos.\,2\delta$$

por consiguiente

$$\frac{\tfrac{1}{2}\text{sen.}\,2\delta}{\cos.\,2\delta}=\tfrac{1}{2}\text{tang.}\,2\delta=\frac{mn}{m^2-n^2}=\frac{B}{2(Cc-A)},$$

cuya fórmula da inmediatamente el ángulo que forma el eje de las $t$ con el de las $x$.



Del examen de estas expresiones sacaremos las siguientes consecuencias:

1.ª Las cantidades $A'$ y $C'$ son siempre reales.

2.ª Si A y C tienen el mismo signo, en este caso se puede suponer que tienen el signo $+$; cambiando, si es preciso, el signo de todos los términos de la ecuacion (1) (pág. 202) $A'$ será siempre positivo, y $C'$ solo lo será cuando

$$C+A>\sqrt{(C-A^2+B^2},$$

cuya condicion es lo mismo que la siguiente

$$(C+A)^2>(C-A)^2+B^2$$

ó que $$2AC>-2AC+B^2$$

ó que $$4AC>B^2,$$

de lo cual resulta que $4AC-B^2$ es una cantidad positiva.

3.ª Si A y C tienen signos diferentes, ó que siendo A positiva ó hecha tal, C sea negativa, tendremos

$$A'=\tfrac{1}{2}(A-C)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(C+A)^2+B^2}$$

$$C'=\tfrac{1}{2}(A-C)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(C+A)^2+B^2};$$

en este caso $A'$ será positivo y $C'$ negativo; pero $4AC$ tiene el signo $-$, la cantidad $4AC-B^2$ será negativa, de donde se sigue que el signo de $C'$ depende del de la cantidad $4AC-B^2$.

4.ª En fin, si $4AC=B^2$, saldrá $C'=0$, cuya circunstancia se hace notable no solo porque la trasformada $A't^2+C'u^2=F$ se reduce á $A't^2=F'$, sino porque las expresiones de $\alpha$ y $\beta$ de la pág. 204 se hacen infinitas; por consiguiente en este caso no se puede hacer desaparecer á la vez en la ecuacion (2) los términos afectados de $y'$ y de $x'$.

127. Para salvar este inconveniente, se hace inmediatamente en la ecuacion (1)

$$x=mt-nu,\ y=nt+mu,$$

lo que da

$$\left.\begin{aligned}&(An^2+Bmn+Cm^2)t^2\\&+\{2(A-C)mn+B(m^2-n^2)\}ut\\&+(Am^2-Bmn+Cn^2)u^2\\&+(Dn+Em)t+(Dm-En)u=F.\end{aligned}\right\}(5)$$

Haremos $2(A-C)mn+B(m^2-n^2)=0\ldots\ldots(m)$ para que desaparezca el producto $ut$; los valores de $m$ y de $n$, igualmente que los de los coeficientes de $t^2$ y $u^2$, serán los mismos que los del número precedente, y la trasformada será

$$A't^2+C'u^2+(Dn+Em)t+(Dm-En)u=F\ldots.(6)$$

Para acabar de simplificarla nos falta cambiar el orígen de coordenadas, haciendo $t=t'+\alpha'$, $u=u'+\beta'$, y sacaremos

$$\left.\begin{aligned}A't^2+C'u^2+(2A'\alpha'+Dn+Em)t\\+(2C'\beta'+Dm-En)u'\\+A'\alpha'^2+C'\beta'^2+(Dn+Em)\alpha'+(Dm-En)\beta'=F.\end{aligned}\right\}$$

Vemos que bajo esta forma tampoco se puede hacer desaparecer el término afectado de $u'$, cuando $C'=0$, porque la ecuacion

$$2C'\beta'+Dm-En=0$$

que seria preciso establecer, daria para $\beta$, un valor infinito; por lo tanto dispondremos de las dos cantidades arbitrarias $\alpha$ y $\beta'$ para quitar el término afectado de $t'$ y los términos independientes de las coordenadas $u'$ y $t'$, lo cual nos da las ecuaciones siguientes:

$$2A'\alpha+Dn+Em=0$$

$$A'\alpha'^2+C'\beta'^2+(Dn+Em)\alpha'+(Dm-Eu)\beta'-F=0.$$

Si hacemos para abreviar

$$2C'\beta'+Dm-En=-E',$$

tendremos la ecuacion $A't^2+C'u'^2-Eu'=0.$



Para examinar todos los casos comprendidos en esta trasformacion, seria preciso ver cuando pueden las dos primeras ecuaciones anteriores determinar $\alpha'$ y $\beta'$; pero por ahora nos basta considerar solo el caso en que $C'=0$, * cuyo supuesto reduce las ecuaciones anteriores á las siguientes

$$2A'a'+Dn+Em=0$$

$$A'\alpha'^2+(Dn+Em)\alpha'+(Dm-En)\beta'-F=0$$

y la trasformada en $t'$ y $u'$ á la siguiente

$$A't^2=E'u'.$$

Podemos simplificar las ecuaciones entre $\alpha'$ y $\beta'$, restando la segunda de la primera multiplicada por $\alpha'$, y teniendo presente que la hipótesis de $C'=0$ da

$$Dm-En=-E';$$

de modo que sacarán

$$\left.\begin{aligned}2A'a^2+Dn-Em=0\\A'\alpha^2-E'\beta'-F=0\end{aligned}\right\}\ldots(a')$$

Finalmente como la hipótesis de $C'=0$ hace $4AC=B^2$, los resultados del núm. procedente se trasforman en

$$A'=C+A,\ m^2=\frac{C}{C+A},\ n^2=\frac{A}{C+A},\ mu=\frac{\sqrt{Ac}}{C+A}.$$

Cuando $Dm-En=0$, se tiene $E'=0$, en cuyo caso las ecuaciones $(a')$ no conteniendo mas incógnita que $\alpha'$, pueden no acordarse entre sí; pero en esta hipótesis, y haciendo $C'=0$, la tsasformada en $t$ y $u$, núm. 127, toma la forma

* Todas las demas se hallan comprendidas en la ecuacion

$$A't^2+C'u^2=F'$$

que se trasforma facilmente en

$$A't'^2+C'u'^2-E'u'=0$$

haciendo $u=u'\pm\sqrt{\frac{F'}{C'}}$ y $E'=\pm2\sqrt{C'F'}$.

$$A't^2+D't=F$$

que solo encierra la coordenada $t$.

128. Todos los casos de la ecuacion general

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex=F$$

estan comprendidos en las tres trasformadas

$$A't^2+C'u^2=F',$$
$$A't'^2=E'u',$$
$$A't^2+D't=F,$$

las dos últimas corresponden solo al caso en que $4AC=B^2$, y la primera á todos los demas.

Las tres formas indicadas en el núm. 120 se hallan comprendidas en las dos primeras ecuaciones anteriores, con solo la diferencia que ahora las coordenadas son perpendiculares entre sí, por cuya razon se llaman *ejes* los diámetros á que estan referidas las curvas representadas en estas ecuaciones, cuyas circunstancias principales vamos á examinar.

1.° Si las cantidades $A'$ y $C'$ son ambas á dos positivas, lo cual corresponde á los casos en que $4AC-B^2$ tenia el signo $+$ en la ecuacion general, la trasformada

$$A't^2+C'u^2=F'$$

daba $t=\pm\sqrt{\dfrac{F'-C'u^2}{A'}}$,

la cual pertenece á una elipse. . . . . (120)

Fig. 52 Para hallar los semiejes OI y OL, fig. 52, se buscará el valor de $u$ cuando $t=0$, y el de $t$ cuando $u=0$, los cuales serán $OI=\sqrt{\dfrac{F'}{C'}}$, $OL=\sqrt{\dfrac{F'}{A'}}$,

y representando estas líneas por $a$ y $b$, sacaramos

$$\frac{F'}{C'}=a^2 \text{ de donde } C'=\frac{F'}{a^2}$$



$$\frac{F'}{A'}=b^2 \ldots\ldots\ldots A'=\frac{F'}{b^2}$$

$$\frac{t^2}{b^2}+\frac{u^2}{a^2}=1\text{, de donde } t=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-u^2},$$

cuyo resultado es semejante al del núm. 115, y se construye del mismo modo.

El caso actual tambien comprende la ecuacion del círculo, que es cuando $C'=A'$, en cuyo caso la trasformada es

$$A'(t^2+u^2)=F' \text{ ó } t^2+u^2=\frac{F'}{A'},$$

y sus coordenadas son rectangulares.

La ecuacion $A't^2+C'u^2=F'$ es absurda, cuando siendo positivas $A'$ y $C'$, es negativa $F'$; pero se puede verificar esta ecuacion, cuando $F'=0$, haciendo $t'=0$, $u'=0$, en cuyo caso representa solo el punto en que está el orígen de las coordenadas: ó es la elipse reducida á su centro. (116) Poniendo los valores de $\alpha$ y $\beta$ en el de $F'$ núm. 125 se expresará fácilmente por medio de los coeficientes de la ecuacion (1), qué condicion deben llenar para que signifique algo.

2.° Si $A'$ y $C'$ tienen signos diferentes, lo cual corresponde al caso en que $4AC-B^2$ tiene el signo $-$, la ecuacion en $t$ y $u$ toma por precision una de estas formas;

$$A't^2-C'u^2=F'$$
$$A't^2-C'u^2=-F';$$

si se pone por $A'$ y $C'$ sus valores en $a$ y $b$, saldrá, hechas las reducciones

$$\frac{t^2}{b^2}-\frac{u^2}{a^2}=1 \text{ de donde } t=\pm\frac{b}{a}\sqrt{u^2+a^2}$$

$$\frac{t^2}{b^2}-\frac{u^2}{a^2}=-1\ldots\ldots t=\pm\frac{b}{a}\sqrt{u^2-a^2}.$$

Estas dos ecuaciones pertenecen á hipérbolas (120), pero la primera está atravesada por el eje de la $t$ y no por el de las $u$, porque no puede verificarse que $t=0$: lo contrario se verifica para la segunda. Se debe tener presente que aun cuando haciendo $u=0$ en la segunda ecuacion, sale $t=\sqrt{-b^2}$, esto es imaginario, no por eso
Fig. 53. se deja de levantar en el centro $o$, fig. 53, una perpendicular $OL=\sqrt{b^2}=b$, y que por analogía con la elipse se llama *segundo eje* á la línea LL doble de OL; y se llama eje *trasversal* á la línea II', que encuentra la curva, lo que no se verifica con la línea LL'.

Cuando $A'=C'$ los dos ejes son iguales y la hipérbola se llama en este caso *equilátera*.

Es claro que cuando $F'=0$, las ecuaciones de la hipérbola se reducen á

$$A't^2-C'u^2=0 \text{ ó } t=\pm u\sqrt{\frac{C'}{A'}},$$

que solo representa dos líneas rectas (118).

3.° Cuando $4AC=B^2$, la trasformada se reduce á

$$A't'^2=E'u' \text{ ó } t'=\pm\sqrt{\frac{E'}{A'}u'}$$

que pertenece á una parábola que corta á su eje IB,
Fig. 54. fig. 54, en el orígen de las coordenadas $t'$ y $u'$.

Cuando $E'=0$ y concuerdan entre sí las ecuaciones ($a'$), pág. 209, sale $A''t'^2=0$, que da dos veces $t'=0$, lo cual indica el eje IB, hácia el cual tienden á reunirse las dos ramas de la parábola cuando $E'$ disminuye.

Como la última trasformada

$$A't^2+D't=F$$

no da para $t$ mas que dos valores determinados, solo representa dos rectas paralelas al eje de las $u$.



Finalmente, debe tenerse presente que la ecuacion

$$A't^2+C'u'^2-E'u'=0 \ldots\ldots (127)$$

comprende la elipse, la hipérbola y la parábola: representa la primera cuando $A'$ y $C'$ tienen el mismo signo; la segunda cuando tienen signos diferentes, y la tercera cuando $C'=0$.

Como el punto en que está colocado el orígen de coordenadas se halla en uno de los extremos del eje, se llama por esta razon *vértice*. En la elipse y en la hipérbola hay dos vértices que son I y I', fig. 52 y 53, en Fig. 52 y 53.
la parábola no hay mas que uno, fig. 54, ni tampoco Fig. 54.
tiene centro, por cuya razon su ecuacion no puede tomar la forma

$$A't^2+C'u^2=F'.$$

Aunque por medio de las fórmulas de los números anteriores se examina $a'$ qué especie de línea pertenece cualquier caso particular de la ecuacion general, se necesita todavía para trazar dicha línea establecer los ejes de las coordenadas de la trasformada, con relacion á los ejes primitivos, y construir las cantidades $A'$, $C'$, $F'$ ó $E'$; para esto basta estar algo habituado á particularizar fórmulas generales, y asi no nos detendremos á dar reglas particulares que se olvidan tan pronto como se aprenden y que rara vez se tienen presentes cuando se necesitan: ademas el siguiente egemplo, aunque sumamente sencillo, nos hará ver cuan inútiles serian semejantes reglas.

Sea la ecuacion

$$xy+Dy+Ex=F$$

comparándola con la ecuacion (1), sacaremos

$$A=0\ B=1,\ C=0,$$
$$4AC=0,\ B^2=1,$$

como $4AC$ no es igual á $B^2$, el caso que examinamos se refiere á la trasformada

$$A't^2+C'u^2=F'.$$

Ademas tendremos por los números 125 y 126

$$\alpha^2=-D,\ B=-E,\ F'=F+DE$$

y por el núm. 225

$$A'=\tfrac{1}{2},\ C'=-\tfrac{1}{2},$$

por consiguiente

$$\tfrac{1}{2}t^2-\tfrac{1}{2}u^2=F+DE,\ \text{ó}\ t^2-u^2=2(F+DE);$$

de modo que la curva es una hipérbola, cuyos dos semiejes son iguales á $\sqrt{2(F+DE)}$, y la atraviesa el eje de las $t$ (128). Teniendo presente las trasformaciones que ocasionan los valores

$$x=x'+\alpha\ y=y'+\beta$$
$$x'=mt-nu,\ y'=nt+mu$$

se ve que el orígen de las $t$ y de las $u$ corresponde al punto en que $x=\alpha$, $y=\beta$; tomando despues las distancias $AA'=-D$, $AA''=-E$, el punto $A'''$ será dicho orígen. Si calculamos despues el valor de $m$ ó del coseno del ángulo que forma el eje de las $t$ con el de las $x$, hallaremos que es igual al número $\frac{1}{\sqrt{2}}$, que corresponde al ángulo semirecto; de modo que si hacemos el ángulo $A''A'''B''$ igual á este, y tiramos $A'''C''$ perpendicular á $A'''B''$, tendremos los ejes de las $t$ y de las $u$; y por último tomando $A'''I$ y $A'''I'=\sqrt{2(F+DE)}$ determinaremos los vértices $I$ y $I'$ de la hipérbola que es el lugar de la ecuacion propuesta.

El mismo camino habrá que seguir para cualquier otro ejemplo, y si hemos escogido el anterior, discutido ya en el núm. 120, ha sido con la mira de probar que



la curva indicada en dicho número por sus asimptotas, es una hipérbola, y de hallar sus ejes *.

Muchas veces se presenta el problema de examinar qué curva es la que goza de cierta propiedad particular, cuya propiedad no sabemos que pertenezca á ninguna curva conocida: en este caso la ecuacion que expresa esta propiedad se halla incluida en alguna de las ecuaciones que hemos examinado: esto se hará patente con las siguientes cuestiones.

130. *Hallar la ecuacion de una curva tal que si desde cada uno de sus puntos* M, fig. 52, *se tiran rectas MF y MF' á dos puntos fijos F y F', la suma de dichas rectas sea igual á una línea dada.* Fig. 52.

Si se representa por $2a$ la línea dada por $2c$ la distancia $FF'$ de los puntos fijos, tomando por orígen de coordenadas el punto O, medio de $FF'$, de modo que $OF=OF'=c$, y haciendo $OP=x$ $PM=y$, hallaremos

$$FP=c-x\ F'P=c+x.$$

Los triángulos PMF, PMF' rectángulos en P dan

$$MF=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{MP}^2},\ MF'=\sqrt{\overline{F'P}^2+\overline{PM}^2}$$

$$\text{ó}\ MF=\sqrt{(c-x)^2+y^2},\ MF'=\sqrt{(c+x)^2+y^2};$$

pero si hacemos $MF=z$, tendremos que $MF'=2a-z$, porque segun la condicion del problema, en cualquier punto de la curva se verifica que

* Podriamos deducir inmediatamente de la ecuacion general de las líneas de segundo orden, la ecuacion de la hipérbola referida á sus asímptotas, trasformando las coordenadas rectangulares en otras, cuyo ángulo fuese indeterminado. Con esto se introducirian cuatro cantidades arbitrarias (123) de que podriamos disponer para hacer desaparecer los términos afectados de $t^2u^2$ y $u$; de modo que la ecuacion general de segundo grado tomaria la fuerza de $B'ut=F$; pero veriamos que las cantidades $m$ y $n$ no tenian valores reales sino en el caso de que $4AC - B^2$ fuese negativo, esto es, solo en el caso de la hipérbola.

$$MF+MF'=2a;$$

y por consiguiente

$$z=\sqrt{(c-x)^2+y^2},\ 2a-z=\sqrt{(c+x)^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado para que desaparezcan las radicales tendremos

$$z^2=c^2-2cx+x^2+y^2$$
$$4a^2-4az^2+=c^2+2cx+x^2+y^2,$$

restando la segunda ecuacion de la primera, saldrá

$$-4a^2+4az=-4cx$$

de donde sale

$$z=\frac{a^2-cx}{a},$$

cuyo valor de $z$ substituido en la primera expresion de $z^2$, se hallará la ecuacion que se busca, y será la siguiente, hechas las reducciones

$$a^4+c^2x^2=a^2c^2+a^2(x^2+y^2).$$

No siendo esta ecuacion mas que de segundo grado, hace ver que la curva que se busca es una de las que hemos discutido antes; y para saber á qué especie pertenece la daremos la forma siguiente

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^4-a^2c^2.$$

Comparándola con $A't^2+C'u^2=F'$, despues de haber escrito en esta $p$ é $y'$ por $u$ y $t$, tendremos

$$A'=a^2,\ C'=a^2-c^2,\ F'=a^4-a^2c^2=a^2(a^2-c^2),$$

de donde se deducirá que pertenece á una elipse, porque siendo $c$ menor que $a$, las cantidades A′, C′, F′ son esencialmente positivas (128). Haciendo para abreviar $a^2-c^2=b^2$, saldrá

$$ay^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

de donde sacando el valor de $y$ tendremos

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$



Los semiejes OI y OL de esta elipse son respectivamente $a$ y $b$; y como $b^2=a^2-c^2$, se deduce de aqui

$$c^2=a^2-b^2,\ \text{ó}\ c=\sqrt{a^2-b^2},$$

lo que manifiesta que cuando se conocen los ejes II′ y LL′ de una elipse, se pueden determinar sobre el eje mayor los puntos F′ y F′, para las cuales se verifica que MF+MF′=II′, describiendo desde el punto L como centro y con un radio igual á la mitad del eje mayor II′, un arco de círculo; porque en las intersecciones F y F′ de este arco con el eje II′, se verifica que

$$OF=OF'=\sqrt{\overline{FL}^2-\overline{OL}^2}=\sqrt{a^2-b^2}.$$

El problema que acabamos de resolver nos presenta una propiedad comun á todas las elipses, á saber: *que la suma de las líneas MF y MF′, que se llaman* radios vectores, *tiradas á los puntos F* y *F′, del eje mayor, y que se llaman* focus, *es siempre igual al eje mayor.*

131. Por medio de esta propiedad podemos hallar fácilmente todos cuantos puntos se quieran de la elipse, y aun describirla con un movimiento continuo. En efecto con una abertura cualquiera de compas FM, menor que OI y desde el punto F como centro, descríbase un círculo con dicha abertura, y despues tomando por centro el punto F′ y por radio F′M, que es la diferencia entre el eje II′ y el primer radio FM, descríbase otro círculo que cortará el primero en dos puntos M y M′ que pertenecerán á la elipse. Repitiendo esta construccion se tendrán otros puntos mas de la elipse, la cual se podrá trazar haciendo pasar por todos estos puntos una línea continua, y su trazado será tanto mas exacto cuantos mas puntos se hayan determinado.

Si la elipse es muy grande, se describe con un movimiento continuo, fijando en los puntos F y F′, los extremos de un cordon que tenga el mismo largo que II′; se pone tirante dicho cordon con una punta ó lapicero M que corre á lo largo del cordon hasta volver al mismo punto de donde partió, y de este modo queda trazada la elipse.

Se debe tener presente que la distancia $c$ de uno de los focus al centro se llama *excentricidad.*

La ecuacion $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ nos proporciona una construccion por puntos, muy conocida en la práctica. Para esto desde el centro O de la elipse que se pide se trazan dos semicírculos, el uno sobre el eje mayor, y el otro sobre el menor, como diámetros, y se tiran muchos radios ON, ON′, &c.; sobre el eje II se bajarán las perpendiculares PN, P′N′, &c., y por los puntos R, R′ &c. en que los radios ON, ON′, &c. encnentran al círculo menor, se tirarán las rectas RM, R′M′, &c. paralelas á II′; los puntos M, M′, &c. en que estas paralelas cortan á las perpendiculares PN, P′N′, &c. son puntos de la elipse que se quiere trazar. Esta construccion solo nos daria la mitad de la curva; pero haciendo igual construccion á la parte inferior del eje II′, tendriamos la otra mitad.

Para hacer ver la exactitud de esta construccion, basta observar que en virtud del paralelismo de las rectas RM y II′, se tiene

$$ON : OR :: PN : PM,$$

y como $ON=a$, $OR=b$, $OP=x$, resultará

$$PN=\sqrt{\overline{ON}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{a^2-x^2}$$

$a : b :: \sqrt{a^2-x^2} : PM$, de donde sale



$$PM=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=y.$$

132. Si modificamos el problema del número anterior, de modo que en lugar de tener $MF+MF'=2a$, tengamos $MF'-MF=2a$, que es lo mismo que decir que la *diferencia de los radios vectores sea constante*, y conservamos las mismas denominaciones que anteriormente, tendremos

$$MF=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{PM}^2}, \text{ ó } \qquad z=\sqrt{(c-x)^2+y^2},$$

$$MF'=\sqrt{\overline{F'P}^2+\overline{PM}^2}=2a+z=\sqrt{(c+x)^2+y^2},$$

de donde sacamos

$$z^2=c^2-2cx+x^2y^2$$

$$4a^2+4az+z^2=c^2+2cx+x^2+y^2;$$

restando la primera de estas ecuaciones de la segunda, sacaremos

$$4a^2+4az=4cx, \text{ ó } z=\frac{cx-a^2}{a},$$

y con este valor de $z$, se tendrá la ecuacion

$$\left(\frac{cx-a^2}{a}\right)^2=c^2-2cx+x^2+y^2,$$

la cual desenvuelta se reduce á

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

En el caso actual en que $c>a$, es preciso tomar $b^2=c^2-a^2$, lo cual da

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

cuya ecuacion pertenece á la hipérbola, de modo que esta curva goza de la propiedad de que *la diferencia de sus radios vectores MF y MF′ es igual al eje trasversal II′ en el que estan los focos F y F′.*

Ya hemos notado (128) que la hipérbola no tenia realmente mas que un eje; pero para conservar la analogía, se imagina un segundo eje LL′ tirado por el punto O perpendicularmente al primero: la cantidad $b$ expresa la longitud OL mitad de dicho eje, y la ecuacion $b^2=c^2-a^2$, ó $c=\sqrt{a^2+b^2}$ hace ver que para hallar los focos F y F′ es preciso tomar las distancias OF y OF′ iguales á la hipotenusa de un triángulo rectángulo construido sobre los dos semiejes OI y OL.

133. Nos podemos servir de la propiedad que gozan los focos F y F′ para construir la hipérbola por puntos. Para esto desde el punto F, como centro, y con un radio cualquiera FM, con tal que no sea menor que IF, se describirá un arco de círculo, despues se tomará un radio F′M mayor ó menor que el primero de una cantidad igual á II′, y el círculo descrito con este radio desde el punto F′ como centro cortará el primero en los puntos M y M′ que pertenecen á la hipérbola.

Para trazar una porcion de hipérbola con un movimiento continuo, se sujeta una regla á que gire al rededor del punto F′; se fija en el extremo R de esta regla y en el punto F un hilo, cuya longitud sea menor que F′R en la cantidad II′, haciendo despues girar la regla central, á la cual está apoyado el hilo RMF por medio de un puntero M de modo que siempre esté tenso; dicho puntero M trazará un arco de curva perteneciente á una hipérbola, cuyo eje es II′, y cuyos focos son F y F′.

134. Propongamos ahora hallar la ecuacion de *una curva tal que cada uno de sus puntos esté tan distante de la recta AC, dada de posicion, como de un punto fijo F dado tambien de posicion.*



Si tomamos sobre la recta AB tirada por el punto F perpendicularmente á AC, un punto I situado en el medio de AF, dicho punto pertenecerá á la curva en posicion, porque se halla tan distante de la recta AC como del punto F. Haciendo

$$IF=AI=c',\ IP=x,\ PM=y$$

tendremos que, para cualquier punto M, la distancia

$$QM=AP=AI+IP=c'+x,$$

y el triángulo rectángulo FPM nos dará

$$MF=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{PM}^2}=\sqrt{(c'-x)^2+y^2},$$

pues que $FP=IF-IP=c'-x$. Efectuando el cuadrado indicado debajo del radical, tendremos

$$MF=\sqrt{c'^2-2c'x+x^2+y^2};$$

pero segun la condicion del problema $QM=MF$, luego

$$c'+x=\sqrt{c'^2-2c'x+x^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado y reduciendo, sacaremos

$$2c'x=-2c'x+y^2,\ \text{ó}\ y^2=4c'x,$$

cuya ecuacion es la de la parábola (128).

135. Para construir la parábola, valiéndonos de la propiedad de que nos hemos servido para hallar su ecuacion, es preciso describir un círculo con un radio FM arbitrario, hacer $AP=FM$, y tirar por el punto P una recta PM paralela á la línea AC: el punto M en que esta recta corta al círculo pertenece á la parábola que se quiere construir, porque es claro que siendo la recta QM paralela é igual á AP, tambien será igual á FM.

Fundándose en esta propiedad se puede trazar la curva por medio de un movimiento continuo. Para esto se coloca á lo largo de AC una regla, sobre la cual se mueve una escuadra que tiene representado uno de sus lados por la recta QE; en el punto F se ata el extremo de un hilo que tiene de largo QE, y el otro extremo se fija en el punto E, aplicando con puntero ó lapicero contra el lado QE se pone tenso el hilo, y el lapicero describe una porcion de parábola.

136. La cuestion anterior se puede presentar de modo que comprenda las tres curvas de segundo grado, proponiéndola del modo siguiente: *hallar la ecuacion de una curva tal que la distancia entre un punto cualquiera* Fig. 57. *M y un punto fijo F, fig. 57, tenga con la distancia MQ entre el mismo punto M y una recta AC, dada de posicion una relacion constante.*

Sea $1 : n$ dicha relacion, y desde el punto F tírese sobre AC la perpendicular AB; es claro que la curva que se busca encontrará á la recta en un punto I tal que

$$IF : AI :: 1 : n;$$

de suerte que si representamos IF por $c'$, saldrá

$$AI = nc'.$$

Representando por $x$ IP, y por $y$ PM, el triángulo rectángulo PMF nos dará, como anteriormente

$$MF = \sqrt{(c'-x)^2+y^2}$$

y como $QM = AP = AI + IP = nc' + x$, tendremos

$$\sqrt{(c'-x)^2+y^2} : nc'+x :: 1 : n$$

de donde sale

$$nc'+x = n\sqrt{(c'-x)^2+y^2},$$

que elevando al cuadrado, tendremos por último

$$n^2y^2+(n^2-1)\,x^2-2(n+1)nc'x=0.$$

Esta ecuacion es de una forma enteramente parecida á la ecuacion $A'z^2+C'u'^2-E'u'=0$ del número (128) y pertenecerá á la elipse, hipérbola ó parábola, segun que sea $n>1$, $n<1$, ó $n=1$, y por consiguiente hace ver



que la propiedad fundamental de la ecuacion propuesta pertenece á las tres curvas de segundo grado, por cuyo respeto se le da el nombre de *directriz* á la recta AC.

Si damos á la ecuacion anterior la siguiente forma

$$y^2+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)x^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)c'x=0$$

y tenemos presente que cuanto mas aumente $n$ tanto mas disminuyen las fracciones $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, se verá que si suponemos $n$ infinito, la ecuacion anterior se reduce á

$$y^2+x^2-2c'x=0,$$

que es la ecuacion de un círculo, cuyo radio es $c'$, y cuyo orígen de abscisas está colocado en uno de los extremos del diámetro (94).

137. En el número 128 se ha visto que la elipse, la hipérbola y la parábola pueden estar comprendidas en una sola ecuacion; la cual, es digno de notarse, puede deducirse inmediatamente de una de las siguientes

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\ y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

las cuales, referidas al centro, parecen pertenecer solo á la elipse y á la hipérbola. Para esto basta trasladar el orígen á uno de los vértices de las curvas, cuyas ecuaciones son las anteriores. En efecto, si en las fig. 52 y 53, se hace $IP=x'$, para la primera tendremos Fig. 52 y 53.

$$x \text{ ó } OP=OI-IP=a-x',$$

y para la segunda

$$x' \text{ ó } OP=OI+IP=a+x'.$$

Substituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores, tendremos

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x'-\frac{b^2}{a^2}x'^2;\ y^2=\frac{2b^2}{a}x'+\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

ó haciendo $\frac{2b^2}{a^2}=\text{P}$, serán

$$y^2=px'-\frac{p}{2a}x'^2,\ y^2=px'+\frac{p}{2a}x'^2,$$

Fig 53. las cuales solo se diferencian en el signo de $a$: la fig. 53 manifiesta que si se mira la abscisa IP como positiva, el eje II′ tiene que ser por precision negativo.

Poniendo por $b^2$ su valor, tanto el que pertenece á la elipse como á la hipérbola, se tendrá

$$p=\frac{2(a^2-c^2)}{a}\ (130)\ p=\frac{2(c^2-a^2)}{a}\ (132);$$

pero es conveniente introducir la distancia IF en lugar de $c$ que representa OF; y haciendo IF$=c'$, se tiene para la fig. 52

$$c \text{ ó } \text{OF}=\text{OI}-\text{IF}=a-c'$$

para la fig. 53

$$c \text{ ó } \text{OF}=\text{OI}+\text{IF}=a+c':$$

cuyos valores dan

$$p=\frac{4ac'-2c'^2}{a},\ p=\frac{4ac'+2c'^2}{a},$$

cuyas expresiones solo se diferencian en el signo de $a$.

Ambas á dos reunidas en la siguiente fórmula

$$p=\frac{4ac'\pm 2c'^2}{a}=4c'\mp\frac{2c'^2}{a}$$

tienen por límite

$$p=4c'$$

cuando se supone $a$ infinito; pero en este caso las ecuaciones

$$y^2=px'\mp\frac{p}{2a}x'^2$$

se reducen á

$$y^2=px' \text{ ó } y^2=4c'x'$$



porque la fraccion $\frac{p}{2a}$ desaparece, y de este modo las ecuaciones anteriores dan la de la parábola (134).

Vemos pues que la ecuacion

$$y^2=px'-\frac{p}{2a}x'^2$$

puede representar cada una de las líneas de segundo orden: representará la elipse cuando $a$ sea positivo; el círculo cuando $p=2a$; la hipérbola cuando $a$ sea negativo, y la parábola cuando $a$ sea infinito *.

138. La cantidad $p$ se llama parámetro: en la elipse y en la hipérbola es una tercera proporcional á los dos ejes, porque su valor

$$p=\frac{2b^2}{a}=\frac{4b^2}{2a}$$

da la siguiente proporcion

$$2a:2b::2b:p;$$

en todas las tres curvas el parámetro es igual á la doble ordenada que pasa por el foco: en efecto, si se toma $x'=c'$, se tendrá

$$y^2=pc'\pm\frac{p}{2a}c'^2=\frac{p(2ac'\pm c'^2)}{2a}$$

$$\text{ó } 4y^2=p\,\frac{4ac'\pm 2c'^2}{a}=p^2,\ 2y=p.$$

* Si se supone $c'>2a$, la expresion $p=\frac{4ac'-2c'^2}{a}$, perteneciente á la elipse, tomaria un valor negativo, y la ecuacion $y^2=px'-\frac{p}{2a}x'^2$, se cambiaria en

$$y^2=-px'+\frac{p}{2a}x'^2$$

que perteneceria á una hipérbola; pero en este caso $c'$ representaria la distancia entre el vértice y el foco mas distante, ó IF′, fig. 53. Fig. 53.

139. Si las ecuaciones $y^2=px'\pm\frac{p}{2a}x'^2$ las ponemos bajo la forma siguiente

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ax'-x'^2);\ y^2=\frac{p}{2a}(2ax'+x'^2),$$

podemos deducir de estas las siguientes

$$\frac{y^2}{x'(2a-x')}=\frac{p}{2a},\ \frac{y^2}{x'(2a+x')}=\frac{p}{2a}$$

las que manifiestan que el cuadrado de la ordenada PM tiene una relacion constante con el producto de las líneas IP y I'P, que son respectivamente $x'$ y $2a-x'$ para la elipse, fig. 52, y $x'$ y $2a+x'$ para la hipérbola, fig. 53. Llamando á estas distancias, entre el extremo de la ordenada y los vértices de las curvas, *abscisas*, podemos decir que *en la elipse y en la hipérbola los cuadrados de las ordenadas son entre sí como los productos de las abscisas correspondientes.*

En efecto, si representamos por X' otra abscisa diferente de $x'$, pero contada desde el mismo punto, y por Y su ordenada correspondiente, tendremos

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ax'-x'^2),\ Y^2=\frac{p}{2a}(2aX'+X''),$$

de donde sale

$$y^2 : Y^2 :: x'(2a-x') . X'(2a-X')$$

para la elipse

y para la hipérbola $y^2 : Y^2 :: x'(2a+x') : X'(2a+X')$

suprimiendo en una y en otra el factor comun $\frac{p}{2a}$.

Si hacemos lo mismo con la ecuacion de la parábola $y^2=px'$ tendremos $y^2 : y^2 :: x' : X'$, esto es, que *en la parábola los cuadrados de las ordenadas son entre sí como las abscisas correspondientes.*



140. Comparando entre sí las fórmulas de los números 120 y 128 se ve que para cada curva de segundo grado, hay por lo menos dos sistemas de coordenadas, con los cuales la ecuacion de la curva se presenta bajo la forma mas sencilla que puede tener: uno de estos sistemas es el de los ejes, y el otro es el de los diámetros conjuados; pero ahora vamos hacer ver que hay una infinidad de sistemas que gozan de la misma propiedad. Para esto trasformaremos las coordenadas de las ecuaciones de los ejes.

En primer lugar la ecuacion de la elipse es

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

ó lo es lo mismo $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$;
es inutil trasladar el orígen de coordenadas, y asi le dejaremos en el centro, y solo mudaremos la direccion de los ejes, para lo cual basta tomar $y=nt+qn$, $x=mt+pn$ (122).

Dejando indeterminado el ángulo que deben formar entre sí las nuevas coordenadas, cuyo coseno está representado por $h$ (123), no contaremos con la ecuacion

$$mp+nq+g(np+mq)=h;$$

pero si con las dos siguientes

$$m^2+n^2+2gmn=1,\ p^2+q^2+2gpq=1,$$

porque siendo las coordenadas $x$ é $y$ recíprocamente perpendiculares, resulta que $g=0$, por lo cual

$$m^2+n^2=1,\ p^2+q^2=1:$$

por consiguiente podremos disponer de dos de las cuatro cantidades $m$, $n$, $p$ y $q$. Sustituyendo los valores de $x$ é $y$ en la ecuacion

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

saldrá

$$(a^2n^2+b^2m^2)t^2+2(a^2nq+b^2mp)ut+(a^2q^2+b^2p^2)u^2=a^2b^2$$

para simplificarla, podemos hacer

$$a^2nq+b^2mp=0,$$

con lo cual se reducirá á la siguiente

$$(a^2n^2+b^2m^2)t^2+(a^2q^2+b^2p^2)u^2=a^2b^2.$$

Para comparar esta ecuacion con

$$a'^2t^2+b'^2u^2=a'^2b'^2$$

las pondremos bajo la forma

$$\frac{a^2n^2+b^2m^2}{a^2b^2}t^2+\frac{a^2q^2+b^2p^2}{a^2b^2}=1,$$

$$\frac{t'^2}{b'^2}+\frac{u'^2}{a'^2}=1,$$

las cuales solo pueden ser idénticas, independientemente de $t$, y $u$, suponiendo $\frac{1}{b'^2}=\frac{a^2n^2+b^2m^2}{a^2b^2}$,

$$\frac{1}{a'^2}=\frac{a^2q^2+b^2p^2}{a^2b^2},$$

con lo cual tendremos

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2n^2+b^2m^2},\ a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2q^2+b^2p^2}.$$

Para convencernos de que siempre se puede hacer semejante trasformacion, es preciso que veamos que la determinacion de las cantidades $m$, $n$, $p$, y $q$ no tiene excepcion alguna. La ecuacion

$$a^2nq+b^2mp=0$$

puesta bajo la forma

$$\frac{nq}{mp}=-\frac{b^2}{a^2}$$

nos dará siempre á conocer la relacion de $p$ á $q$, ó la de $m$ á $n$.

Si de ella sacamos



$$\frac{q}{p}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n}$$

y hacemos para abreviar $\frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n}=-r$

saldra $q=pr$,

que sustituido en $p^2+q^2=1$, se sacará

$$p^2(1+r^2)=1$$

la cual nos da

$$p=\frac{1}{\sqrt{1+r^2}},\ q=\frac{1}{\sqrt{1+r^2}},$$

cuyas expresiones siempre son reales, cualquiera que sea $r$. No pudiendo la ecuacion $m^2+n^2=1$ determinar mas que una de las dos cantidades $m$ y $n$, queda absolutamente indeterminada la relacion $\frac{n}{m}$ que entra en las expresiones de $p$ y de $q$, por cuya razon son capaces de una infinidad de diferentes valores; por consiguiente hay efectivamente una infinidad de sistemas de coordenadas, para las cuales la ecuacion de la elipse es de la forma

$$a'^2t^2+b'^2u^2=a'^2b'^2$$

parecida anteriormente á la ecuacion de los ejes

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

141. Haciendo lo mismo con la ecuacion de la hipérbola

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),\ \text{ó}\ a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$$

que lo que hemos hecho con la de la elipse, tendremos

$$(a^2n^2-b^2m^2)t^2+2(a^2nq-b^2mp)+(a^2q^2-b^2p^2)u^2=-a^2b^2$$

$$a^2nq-b^2mp=0$$

$$\frac{a^2n^2-b^2m^2}{a^2b^2}t^2+\frac{a^2q^2-b^2p^2}{a^2b^2}u^2=-1:$$

comparada esta última ecuacion con

$$\frac{t^2}{b'^2} - \frac{u^2}{b'^2} = -1$$

saldrá

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2n^2 - b^2m^2},\ a'^2 = -\frac{a^2b^2}{a^2q^2 - b^2p^2}.$$

Las expresiones de $p$ y de $q$ tendrán la misma forma que en el caso anterior, y por consiguiente darán una infinidad de valores, dependientes de los que se den á la relacion $\frac{n}{m}$; por consiguiente en la hipérbola se verifica lo mismo que lo que acabamos de ver que se verificaba en la elipse.

142. Veamos ahora si para la parábola se verifica lo mismo; su ecuacion $y^2 = 4c'x$ no se puede trasformar en otra que le sea semejante, por medio de las fórmulas

$$x = mt + pn,\ y = nt + qu.$$

En efecto, sustituyendo estos valores en dicha ecuacion tendremos

$$n^2t^2 + 2nqut + q^2u^2 = 4c'(mt + pu),$$

en la cual es preciso que desaparezcan los términos afectados de $t^2$, $ut$ y $u$, lo que se conseguiria haciendo $n=0$, $p=0$; pero este supuesto daria $m=1$, $q=1$, $x=t$, $y=u$; de modo que volviamos á tener las coordenadas primitivas: lo que no sucederá si al mismo tiempo de cambiar la direccion de los ejes trasladamos el origen. Asi pues sustituiremos por $x$ é $y$ los valores mas generales

$$mt + pu + \alpha,\ nt + qu + \beta\ (122),$$

y tendremos

$$\left.\begin{array}{l} n^2t^2 + 2nqut + q^2u^2 \\ + 2\beta(nt + qu) - 4c'(mt + pu) \\ + \beta^2 - 4\alpha c' \end{array}\right\} = 0.$$



Pudiendo disponer ahora de cuatro cantidades, en virtud de las dos nuevas indeterminadas $\alpha$ y $\beta$, podremos hacer desaparecer los términos afectados de $ut$, de $t$, y los términos independientes de $t$ y de $u$, estableciendo

$$2nq = 0,\ 2\beta n - 4c'm = 0,\ \beta^2 - 4\alpha c' = 0.$$

Se puede satisfacer á la primera de estas ecuaciones de dos modos, bien porque $n=0$, ó porque $q=0$; pero $n=0$ haria que la segunda diese $m=0$, lo cual no puede ser, porque $n^2+m^2=1$. Por consiguiente adoptaremos el segundo supuesto que es $q=0$, el cual hace desaparecer el término $q^2u^2$, y solo nos queda

$$n^2t^2 = 4c'pu,\ ó\ t^2 = \frac{4c'pu}{n^2}$$

semejante á la ecuacion de la curva referida á su eje. El supuesto de $q=0$, trasforma la ecuacion $p^2+q^2=1$ en $p=\pm 1$; la ecuacion $2\beta n - 4c'm = 0$, da

$$\frac{n}{m} = \frac{2c'}{\beta},$$

la cual combinada con $m^2+n^2=1$, determina $n$ y $m$. La ecuacion $\beta^2 - 4\alpha c' = 0$ da á conocer $\alpha$, cuando $\beta$ es conocida; pero esta cantidad puede tener el valor que se quiera, y por consiguiente vemos que en la parábola se verifica lo mismo que en las dos curvas anteriores.

143. Lo que acabamos de exponer nos conduce á la cuestion siguiente: *dado un diámetro hallar su conjuado.* Para resolverla notaremos que en la fig. 50 del núm. 122, cuando el ángulo CAB, que es el que forman entre sí los ejes de las coordenadas primitivas, es recto, los triángulos P''A'''R y P''MQ son rectángulos, el uno en R, y el otro en Q; y que por consiguiente $m = \frac{A'''R}{A'''P''}$, representa el coseno del ángulo P''A'''R ó B''A'''B', y Fig. 50.

que $n=\frac{P''R}{A'''P''}$ es su seno; que $p=\frac{P''Q}{P''M}$ representa el coseno del ángulo MP″Q ó C″A‴B′, y que $q=\frac{QM}{P''M}$ es su seno.

Figs. 58 y 59. Si referimos estas mismas denominaciones á las figuras 58 y 59, tomando II′ por eje de las $x$, OF por el de las $t$, y OH por el de las $u$, tendremos

$$\frac{n}{m}=\frac{\text{sen. FOI}}{\text{cos. FOI}}=\text{tang. FOI}$$

$$\frac{q}{p}=\frac{\text{sen. HOI}}{\text{cos. HOI}}=\text{tang. HOI};$$

y como las ecuaciones

$$a^2nq+b^2mp=0$$

$$a^2nq-b^2mp=0$$

sacadas en los números 140 y 141, se puedan poner bajo la forma siguiente:

$$\frac{nq}{mp}=\mp\frac{b^2}{a^2},$$

resultará que

$$\text{tang. FOI, tang. HOI}=\mp\frac{b^2}{a^2}$$

perteneciendo el signo superior á la elipse, y el inferior á la hipérbola; por consiguiente se determinará facilmente uno de los ángulos FOI y HOI cuando se conozca el otro.

144. En la elipse se puede sustituir á los ángulos FOI, HOI, las coordenadas de los puntos F y H′, porque si representamos

OF por $\alpha$, EF por $\beta$

OG por $\alpha'$, GH por $\beta'$

tendremos



$$\text{tang. FOI}=\frac{EF}{OE}=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{tang. HOI}=\frac{GH}{OG}=\frac{\beta'}{\alpha'},$$

y por consiguiente

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}=-\frac{b^2}{a^2},$$

la cual da

$$a^2\beta\beta'+b^2\alpha\alpha'=0,$$

cuya ecuacion combinada con la de la elipse

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2$$

dará á conocer bien sea $\alpha$ y $\beta$, ó $\alpha'$ y $\beta'$, esto es, uno de los puntos F, ó H, cuando se conozca el otro.

En la hipérbola, fig. 59, $\alpha$ y $\beta$ no pertenecen á un punto de la curva, porque el diámetro OF no la atraviesa; pero como aqui solo se trata de la direccion de este diámetro, se puede tomar en lugar del punto F, el punto R, correspondiente á la abscisa OI, y por consiguiente hacer Fig. 59.

$$\alpha=OI=a,\ \beta=IR,$$

con lo cual tendremos

$$\text{tang. FOI}=\frac{\beta}{\alpha},\ \text{y}\ \frac{\beta}{\alpha}\ \frac{\beta'}{\alpha'}=\frac{b^2}{a^2}$$

ó

$$a\beta\beta'-b^2\alpha'=0.$$

Esta ecuacion nos dará á conocer $\beta$, lo cual bastará si es el punto R el que se pide; pero si es el punto H será preciso combinarla con la ecuacion de la hipérbola

$$a^2\beta'^2-b^2\alpha'^2=-a^2b^2.$$

145. En la parábola se tiene $q=0$; y por consiguiente el eje de las $u$, OH, fig. 60, es paralelo al de las $x$, y su situacion solo depende del punto O, en que encuentra á la curva. Dicho punto se halla determinado Fig. 60.

por medio de la cantidad $\alpha$, la cual manifiestamente representa la abscisa IG, que corresponde sobre el eje IB, al punto de la curva en que se verifica al mismo tiempo $t=0$, $u=0$; en este caso la ecuacion $\frac{n}{m}=\frac{2c'}{\beta}$ da la tangente trigonométrica del ángulo comprendido entre el eje de las $t$ y de las $u$.

Notaremos de paso, que una vez que se haya encontrado la situacion del diámetro que es el conjuado de un diámetro dado, se conoce al mismo tiempo la situacion de la tangente á la curva, en el punto en que esta corta el diámetro dado, y cuyo punto puede tenerse arbitrariamente. En efecto (121), en la elipse y en la hipérbola, fig. 58 y 59, el diámetro OF es paralelo á la tangente HT; y en la parábola, fig. 60, este mismo diámetro es tangente á la curva en el punto O.

Recíprocamente, cuando se sabe tirar una tangente á una de las curvas en uno de sus puntos, se conoce inmediatamenee la situacion del diámetro conjuado.

146. En las ecuaciones

$$a'^2t^2+b'^2u^2=a'^2b'^2,\quad a'^2t^2-b'^2u^2=-a'^2b'^2$$

que pertenecen la primera á la elipse y la segunda á la hipérbola, las letras $a'$, $b'$ representan los dos semidiámetros conjuados: en efecto, cuando $t=0$, sale

$$u=a',\text{ ó OH}=a',\text{ fig. 58 y 59;}$$

y cuando $u=0$, sale

$$t'^2=b'^2,\text{ ó } t'^2=-b'^2,$$

esto es para una y otra curva

$$\text{OF}=b'\ (128).$$

Se ve facilmente que con las ecuaciones $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$ y con las que resultan de las expresiones de $a'^2$ y $b'^2$, se pueden eliminar las cantidades $m$, $n$, $p$, $q$



de la ecuacion de condicion que determinará la situacion respectiva de los diámetros conjuados, y podremos llegar de este modo á sacar una relacion entre estas líneas y los semiejes. Se puede hacer el cálculo muy facilmente del modo siguiente:

En primer lugar, de las expresiones de $a'^2$ y $b'^2$, relativas á la elipse (140) se pueden sacar las ecuaciones

$$a'^2a^2q^2+a'^2b^2p^2=a^2b^2,\quad b'^2a^2n^2+b'^2b^2m^2=a^2b^2$$

que unidas á las dos siguientes

$$q^2+p^2=1,\quad m^2+n^2=1$$

nos dan dos sistemas de ecuaciones, el uno en $p^2$ y $q^2$, y el otro en $n^2$ y $m^2$. Del primero sacamos inmediatamente

$$q^2=\frac{a^2b^2-a'^2b^2}{a'^2a^2-a'^2b^2}=\frac{b^2(a^2-a'^2)}{a'^2(a^2-b^2)}$$

$$p^2=\frac{a'^2a^2-a^2b^2}{a'^2a^2-a'^2b^2}=\frac{a^2(a'^2-b^2)}{a'^2(a^2-b^2)}$$

para sacar $n^2$ y $m^2$, basta cambiar en las ecuaciones anteriores $a'$ en $b'$, y asi tendremos

$$n^2=\frac{b^2(a^2-b'^2)}{b'^2(a^2-b^2)}$$

$$m^2=\frac{a^2(b'^2-b^2)}{b'^2(a^2-b^2)}.$$

Ademas la ecuacion de condicion (140)

$$a^2nq+b^2mp=0$$

ó

$$a^2nq=-b^2mp,$$

cuadrándola nos da

$$a^4n^2q^2=b^2m^2p^2.$$

Si en esta última ecuacion sustituimos los valores de $n^2$, $q^2$, $m^2$, $p^2$ podremos suprimir los denominadores, porque son los mismos en ambos miembros; y asi tendremos

$$(a^2-a'^2)(a^2-b^2)=(a'^2-b^2)(b'^2-b^2).$$

Cuya ecuacion desenvuelta, y despues reduciendo y descomponiendo en factores, nos dará

$$(a^4-b^4)-(a^2-b^2)(a'^2+b'^2)=0,$$

suprimiendo el factor comun $a^2-b^2$, saldrá finalmente

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2, \text{ ó } \overline{OF}^2+\overline{OH}^2=\overline{OI}^2+\overline{OL}^2.$$

Las expresiones de $a'^2$ y $b'^2$ relativas á la hipérbola (141) nos dan las ecuaciones

$$a'^2a^2q^2-a'^2b^2p^2=-a^2b^2,\ b'^2a^2n^2-b'^2b^2m^2=a^2b^2$$

y como la ecuacion de condicion es

$$a^2nq-b^2mp=0$$

nos basta poner el signo $-$ á $b^2$ y $b'^2$ en el cálculo anterior para que se acomode al presente, y por consiguiente sacaremos

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2, \text{ ó } \overline{OF}^2-\overline{OH}^2=\overline{OI}^2-\overline{OL}^2:$$

luego la *suma de los cuadrados de los semidiámetros conjuados en la elipse, ó la diferencia en la hipérbola, es igual á la suma de los cuadrados de semiejes, ó á la diferencia.*

147. Si se multiplican entre sí las expresiones de $a'^2$ y $b'^2$ de la elipse, saldrá

$$a'^2b'^2=\frac{a^4b^4}{a^4n^2q^2+a^2b^2n^2p^2+a^2b^2m^2q^2+b^4m^2p^2};$$

pero cuadrado la ecuacion $a^2nq+b^2mp=0$, tendremos

$$a^4n^2q^2+2a^2b^2nmpq+b^4m^2p^2=0$$

ó $a^4n^2q^2+b^4m^2p^2=-2a^2b^2mnpq$,

de modo que en lugar del primero y último término del denominador de la expresion de $a'^2b'^2$, podremos poner $-2a^2b^2mnpq$, y asi tendremos

$$a'^2b'^2=\frac{a^4b^4}{a^2b^2n^2p^2-2a^2b^2mnpq+a^2b^2m^2q^2}=\frac{a^2b^2}{(np-mq)^2};$$

sacando la raiz cuadrada de ambos miembros, tendremos



$$a'b'=\frac{ab}{np-mq}, \text{ ó } a'b'(np-mq)=ab.$$

Es digno de notarse que la cantidad $np-mq$ no es otra cosa mas que el seno del ángulo que forman entre sí los dos diámetros conjuados OF y OH, fig. 58, porque Fig. 58.
siendo $n$ y $m$ el seno y coseno del ángulo FOI, $q$ y $p$ el seno y coseno del ángulo HOI, la fórmula
sen. FOH=sen. (FOI+HOI)=sen. FOI cos. HOI+sen. HOI cos. FOI (11), da sen. FOH$=np-mq$, atendiendo á que el ángulo HOI por caer debajo del eje II′ tiene el seno negativo, $q=-\frac{b^2mp}{a^2n}$, que es preciso hacer positivo en esta fórmula, y tomar por consiguiente $-q$ en lugar de $+q$: de modo que tendremos

$$a'b' \text{ sen. FOH}=ab.$$

Es claro que si desde el punto F se baja sobre OH la perpendicular FQ, tendremos

$$FQ=OF \text{ sen. FOH}=b' \text{ sen. FOH};$$

y por consiguiente el area del paralégramo FH será igual á OH×FQ$=a'b'$ sen. FOH:
de donde se deduce, que el rectángulo formado sobre los semiejes $a$ y $b$ ó OI y OL, es igual al paralelógramo FH, formado sobre los dos semidiámetros conjuados OF y OH.

Formando el producto $a'^2b'^2$ para la hipérbola se verá que esta goza de la misma propiedad; pero será preciso observar que en la fig. 59, el ángulo FOH=FOI Fig. 59.
$-$HOL.

De todo lo expuesto se deduce la siguiente propiedad: que *los paralelógramos construidos sobre los diámetros conjuados, bien sean de la elipse, ó bien de la hipérbola, son iguales al rectángulo de los ejes*, á causa de que estos paralelógramos, como lo manifiestan las figuras, se componen de cuatro paralelógramos iguales, y cada uno igual á la cuarta parte del rectángulo de los ejes.

148. Si representamos por $s$ el seno del ángulo FOH, tendremos la ecuacion

$$a'b's=ab,$$

la cual combinada con

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2$$

para la elipse, y con

$$a'^2+b'^2=a^2-b^2$$

para la hipérbola

nos servirá para hallar los semiejes $a$ y $b$, cuando solo conozcamos dos semidiámetros conjuados, y el ángulo que forman entre sí. Una vez determinados los ejes, hallaremos facilmente los ángulos que forman con los diámetros conjuados, valiéndonos de las expresiones de $q^2$, $p^2$, $m^2$, $n^2$, del número 146. Estas expresiones dan

$$\frac{q^2}{p^2}=\frac{b^2(a^2-a'^2)}{a^2(a'^2-b^2)},\quad \frac{n^2}{m^2}=\frac{b^2(a^2-b'^2)}{a^2(b'^2-b^2)},$$

y sacando las raices cuadradas, tendremos las tangentes de los ángulas HOI, FOI. . .

Una advertencia se nos presenta aqui que al mismo tiempo de ser notable es facil de hacer, y es que en cualquier elipse hay dos diámetros conjuados iguales entre sí. En efecto, si en las ecuaciones

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,\quad a'b's=ab$$

se supone $a'=b'$, sacaremos los valores

$$a'^2=\frac{a^2+b^2}{2},\quad s=\frac{ab}{a'^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

que nos dan á conocer la magnitud de los diámetros y el ángulo que comprenden. En virtud del supuesto $a'=b'$, los valores de $q^2$, $p^2$, $n^2$, $m^2$ se modifican de modo que el



primero es igual al tercero, el segundo al cuarto, de modo que se tiene todo cuanto se necesita para determinar, con respecto á los ejes, la situacion de dichos diámetros.

Si se refiere la ecuacion de la elipse á estos diámetros, toma la forma de

$$t^2+u^2=a^2,$$

semejante á la del círculo; la única diferencia consiste en la oblicuidad de las coordenadas $t$ y $u$; de modo que puede construirse la elipse, dando á las coordenadas del círculo la inclinacion que tienen los diámetros de que hemos hablado; y asi este medio nos suministra un método sencillo de trazar por puntos una elipse, cuando se conocen sus diámetros conjuados iguales.

El lector hará bien en efectuar la construccion de las expresiones anteriores. En cuanto á nosotros creemos haber llenado las miras que nos habiamos propuesto, que eran, manifestar de qué modo se pueden deducir las principales propiedades de las líneas de segundo orden, por un método verdaderamente analítico, é independiente de construcciones geométricas.

149. Hasta aqui hemos visto que la naturaleza de las curvas estaba cifrada en ecuaciones, refiriéndolas á un eje de abscisas con ordenadas paralelas entre sí; pero ahora vamos hacer ver que cualquier sistema de líneas que determine los diferentes puntos de una curva, es apropósito para darnos su ecuacion característica.

Podemos mirar como tal, con respecto á la elipse, la relacion

$$z=\frac{a^2-cx}{a}=a-\frac{cx}{a}$$

que hemos sacado en el núm. 130 entre el radio vector FM$=z$, fig. 52, y la abscisa OP$=x$. De aqui se deduce Fig. 52.

una construccion muy sencilla para la elipse; porque dando valores á $x$, sacaremos por líneas proporcionales la cantidad $\frac{cx}{a}$, que restada de $a$, nos dará $z$ ó FM; si desde el punto F, como centro, y con un radio FM, se describe un arco de círculo, este cortará la perpendicular PM en un punto M perteneciente á la elipse. Si la abscisa cayese en la parte OI′ del eje, como en este caso $x$ es negativo, tomariamos $z=a+\frac{cx}{a}$.

Esta ecuacion se diferencia de las anteriores, en que la ordenada, en lugar de ser siempre paralela á una misma recta, muda continuamente de direccion, y solo está sujeta á pasar por un punto dado; de modo que la ecuacion $z=a-\frac{cx}{a}$, aunque es de primer grado, no es la de una línea recta, como sucede cuando sus coordenadas son respectivamente paralelas á ejes fijos.

En el sistema de coordenadas que estamos considerando, parece bastante natural poner el origen de las abscisas en el punto F, del cual salen las nuevas ordenadas ó los radios vectores, y por consiguiente poner en lugar de $OP=x$, $FP=x'$, y asi tendremos

$$x \text{ ó } OP=OF-FP=c-x'$$

$$\text{y } z=a-\frac{c(c-x')}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}+\frac{cx'}{a},$$

poniendo ~~por~~ $b^2$ ~~su~~ igual $a^2-c^2$, saldrá

$$z=\frac{b^2+cx'}{a}.$$

Muchas veces en lugar de la abscisa $x'$ se introduce el ángulo IFM, lo que se consigue observando que en el triángulo rectángulo FMP se tiene



$FP=FM\cos. PFM$, ó $x'=-z\cos. IFM$ (23) llamando $\varphi$ el ángulo IFM, saldrá

$$z=\frac{b^2-cz\cos.\varphi}{a}, \text{ ó } z=\frac{b^2}{a+c\cos.\varphi}.$$

Se hace mucho uso de esta ecuacion en las aplicaciones de la Analis á la Astronomía, y se la llama *ecuacion polar*, lo mismo que á todas aquellas en que las ordenadas salen de un mismo punto que se llama *polo de la curva*.

Haciendo las mismas trasformaciones anteriores con la ecuacion $z=\frac{cx-a^2}{a}$ de la hipérbola (132) tendremos

$$z=\frac{c^2-a^2-cx'}{a}=\frac{b^2-cx'}{a}$$

$$z=\frac{b^2-cz\cos.\varphi}{a}, \text{ ó } z=\frac{b^2}{a+c\cos.\varphi}.$$

En la parábola, haciendo $FM=z$, fig. 54, y por ser $FM=QM$ (134) tendremos

$$z=c'+x,$$

pero representando $x$ IP, se tendrá

$$x=IF-FP=c'-x',$$

de donde

$$z=2c'-x'$$

$$z=2c'-z\cos.\varphi, \text{ ó } z=\frac{2c'}{1+\cos.\varphi}.$$

150. Podemos ligar entre sí las tres ecuaciones que acabamos de hallar para las tres curvas, introduciendo en lugar del segundo eje $b$, el parámetro, valiéndonos de la ecuacion $b^2=\frac{1}{2}ap$ (137). Con esta substitucion la ecuacion de la elipse se trasforma en

$$z=\frac{\frac{1}{2}ap}{a+c\cos.\varphi}=\frac{\frac{1}{2}p}{1+\frac{c}{a}\cos.\varphi},$$

la cual cuando $a$ sea negativa y $c>a$, será la de la hipérbola,* y cuando $c=a$, y $c$ infinita, en cuyo caso $p=4c'$, será la de la parábola.

Si hacemos $\frac{c}{a}=e$, tendremos

$$p=2a(1-e^2),\ z=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.\varphi},$$

bajo cuya forma, cuando $e<1$, tendremos la elipse, y el círculo si $e=0$; si $e>1$, y $a$ es negativo tendremos la hipérbola; y si $e=1$ y $a$ infinita, será la parábola.

Finalmente, si se quiere eliminar $a$ del resultado anterior, y poner en su lugar la distancia del vértice al foco, nos valdremos de la relacion $c=a-c'$ (137) que nos da

$$ae=a-c', \text{ de donde } a=\frac{c'}{1-e}$$

y

$$z=\frac{c'(1+e)}{1+e\cos.\varphi}.$$

151. Las propiedades fundamentales de la elipse, de la hipérbola y de la parábola, que hemos visto en el núm. 139, bien sea con respecto á los ejes, ó bien con respecto á los diámetros, son las mismas que las que tienen las curvas que resultan de la interseccion de un plano con una superficie cónica. Vamos ahora á demostrar esto sintéticamente.

Fig. 61. Sea ASB, fig. 61, un cono cualquiera de base circular, esto es, la superficie engendrada por una recta sujeta siempre á pasar por el punto S, y que recorre la circunferencia del círculo ACBD: 1.° es evidente que si cortamos este cono por un plano cualquiera CSD que pase por el *vértice* ó *cúspides* del cono, las intersecciones

* En este caso $\varphi$ es suplemento de IFM, fig. 53.



serán dos líneas rectas correspondientes á las dos posiciones sucesivas que toma la recta generatriz, cuando ha llegado á los puntos C y D, puntos en que el plano secante CSD corta la circunferencia ACBD. 2.° Si el plano secante es A′C′B′D′, y paralelo al plano de la base ACBD, la seccion será un círculo, lo cual se demuestra facilmente, imaginando que se haya tirado por el punto S y el centro de la base el *eje* SO, del cono, y que se hayan hecho pasar por este eje dos planos ASB y CSD, cuyas intersecciones respectivas con ACBD, y A′C′B′D′ sean AB y A′B′, CD y C′D′; porque en este caso los triángulos semejantes COS, C′O′S nos dan

$$CO : C'O' :: SO : SO'$$

y los triángulos semejantes AOS y A′O′S nos dan tambien

$$AO : A'O' :: SO : SO'$$

y como por construccion AO=CO, tendremos

$$A'O'=C'O',$$

lo que prueba que todos los radios de la seccion A′C′B′D′ son iguales, y que por consiguiente es un círculo.

Se debe tener presente que la superficie del cono es indefinida, asi por debajo del plano de la base ACBD, como por encima del vértice S, porque no hay circunstancia alguna que limite la longitud de la recta generatriz; y asi vemos facilmente que la prolongacion S*b* de la recta SB, engendra otro cono colocado inversamente con respecto al primero.

152. Imaginemos ahora que el plano secante no sea paralelo á la base ACBD del cono, sino por el contrario que la encuentre segun la recta GH, fig. 62; bajemos desde el centro O la perpendicular OG sobre GH, y hagamos pasar el plano triangular ASB. Es claro que si el Fig. 62.

plano secante encuentra al mismo tiempo los dos lados SA y SB, y que por consiguiente no penetra en el cono superior $aSb$, la seccion $IMI'm$ será una curva cerrada y rentrante en sí misma.

Esto supuesto tiremos paralelamente á ACBD dos planos $EMFm$, $E'M'F'm'$, que encontrarán al mismo tiempo al plano secante $IMI'm$: las comunes intersecciones de estos planos, representadas por $Mm$, $M'm'$, serán paralelas á GH, y por consiguiente perpendiculares á las líneas EF y E'F' que son paralelas entre sí, por ser las comunes intersecciones de los planos $EMFm$, $E'M'F'm'$ con el plano ASB. Siendo las curvas $EMFm$, $E'M'F'm'$ circunferencias de círculo por lo dicho en el número anterior, tendremos

$$\overline{PM}^2 = \overline{EP} \times \overline{FP},\ \overline{P'M'}^2 = \overline{E'P'} \times \overline{F'P'};$$

pero la línea II', que es la comun interseccion de los planos ASB y $IMI'm$, forma con las líneas EF, E'F', y con los lados del cono, los triángulos EIP, E'I'P', y los triángulos FI'P, F'I'P' que son semejantes; los primeros nos dan

$$EP : E'P' :: IP : IP'$$

y los otros

$$FP : F'P' :: I'P : I'P',$$

multiplicando estas dos proporciones ordenadamente, tendremos

$$EP \times FP : E'P' \times F'P' :: IP \times I'P : IP' \times I'P';$$

y substituyendo por $EP \times FP$, y por $E'P' \times F'P'$, sus valores $\overline{PM}^2$ y $\overline{P'M'}^2$ saldrá

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

cuya proporcion representa la propiedad característica de la elipse, expuesta en el núm. 139.



153. Si el triángulo SII' fuese semejante al triángulo SAB, sin que la línea II' fuese paralela á AB, lo cual se verificaria si el ángulo SII' fuese igual á SAB, en cuyo caso SI'I tambien seria igual á SBA, en cuyo caso los triángulos EPI y FI'P serian semejantes entre sí y nos darian

$$EP : I'P :: IP : FP,\ \text{ó}\ \overline{EP} \times \overline{FP} = \overline{I'P} \times \overline{IP}$$

y como en el círculo $EMFm$ se tiene

$$\overline{PM}^2 = \overline{EP} \times \overline{FP},$$

tandriamos

$$\overline{PM}^2 = \overline{I'P} \times IP:$$

de suerte que la seccion $IMIm$ seria un círculo en este caso, si las ordenadas PM eran perpendiculares al diámetro II'; pero para que se verifique esto último, es preciso que la comun interseccion GH del plano secante con la base del cono, sea perpendicular á un mismo tiempo no solo á la recta GA, sino tambien á la recta GI, esto es, que sea perpendicular al triángulo SAB tirado por el eje, y que por consiguiente que este eje sea perpendicular al plano de la base del cono y al plano secante. Cuando se verifican todas estas circunstancias, se dice que el plano secante es *antiparalelo* al de la base: de modo que en un cono de base circular, la seccion antiparalela á la base es un círculo, del mismo modo que la seccion que es paralela á dicha base.

154. Si el plano secante tuviese, con respecto á los lados del cono, la situacion que representa la fig. 63, es- Fig. 63.
to es, que encontrase á un mismo tiempo los dos conos opuestos, formaria en cada uno una curva indefinida, porque una vez que el plano haya penetrado al cono, ya no deja nunca de cortarle. Como los dos conos opuestos no forman, en realidad, mas que una sola superficie, se de-

ben considerar las dos curvas KI$k$, K$'$I$'k'$, como que solo componen una curva. Desde luego se nota una gran semejanza entre esta curva y la hipérbola; pero para hacer ver que son idénticas, es preciso ademas que hagamos ver que esta curva posee las propiedades características de la hipérbola. Suponiendo que se haya determinado el plano ASB del mismo modo que en el núm. 152, y que se haya tirado el plano EMF$m$ paralelo á ACBD, y que ademas se hayan tirado las rectas II$'$, M$m$, M$'m'$, que son las comunes intersecciones del plano secante con los tres planos ASB, EMF$m$, ACBD, comparemos los triángulos EIP, AIP$'$, que nos darán

$$EP : AP' :: IP : IP',$$

y los triángulos tambien semejantes FI$'$P, BI$'$P$'$ que nos darán

$$FP : BP' :: I'P : I'P'$$

multiplicando estas dos proporciones ordenadamente, saldrá

$$\overline{EP} \times \overline{FP} : \overline{AP'} \times \overline{BP'} :: \overline{IP} \times \overline{I'P} : \overline{IP'} \times \overline{I'P'};$$

pero como las secciones EMF$m$ y ACBD son círculos, cuyos diámetros EF y AB son perpendiculares por construccion, á las líneas M$m$ y M$'m'$, tendremos

$$\overline{EP} \times FP = \overline{PM}^2, \ \overline{AP'} \times \overline{BP'} = \overline{P'M'}^2;$$

y por consiguiente

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: \overline{IP} \times \overline{I'P} : \overline{IP'}^2 \times \overline{I'P'},$$

cuya proporcion encierra la propiedad característica de la hipérbola, que hemos hallado en el núm. 139.

155. Nos falta examinar el caso en que el plano secante sea paralelo á uno de los lados del cono, como
Fig. 64. lo manifiesta la fig. 64. En este caso no podrá encontrar mas que uno de los dos conos opuestos; pero siempre le cortará, de modo que la seccion MI$m$ será una curva



abierta é indefinida, parecida á la parábola, con quien vamos á probar que es idéntica. Habiendo tirado los planos ASB, EMF$m$, ACBD, del mismo modo y manera que anteriormente, el paralelismo de las líneas IP$'$ y SB, nos da

$$FP = B'P';$$

por otra parte los triángulos EIP, AIP$'$, por ser semejantes nos dan

$$EP : AP' :: IP : IP',$$

multiplicando uno de los términos de la primera razon por FP, y el otro por BP$'$ tendremos

$$\overline{EP} \times \overline{FP} : \overline{AP'} \times \overline{BP'} :: IP \,.\, IP';$$

pero los círculos EMF$m$ y ACBD nos dan

$$\overline{PM}^2 = \overline{EP}^2 \times \overline{FP}, \ \overline{P'M'}^2 = \overline{AP'}^2 \times \overline{BP'}$$

por consiguiente tendremos

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: IP : IP',$$

cuya proporcion representa la propiedad característica de la parábola, de que hicimos mencion en el núm. 139.

156. Tambien se pueden examinar en el cono las circunstancias, en virtud de las cuales mudan de naturaleza las líneas de segundo orden. En efecto, si el plano secante pasa por el vértice, sin cortar al cono, la seccion se reduce á un punto, cuyo caso corresponde al que notamos en el núm. 116.

Cuando pasando el plano secante por el vértice corta al cono, se tienen dos líneas rectas; y si despues se separa el plano secante del vértice del cono moviendo dicho plano paralelo á sí mismo, se tendrá una porcion de hipérbolas, las cuales tendrán todas ellas por asíptotas las dos rectas anteriores, referidas ó *proyectadas*, sobre el plano de la curva, por medio de perpendiculares á dicho plano (118 y 128). Finalmente, si el plano secante es paralelo á un lado del cono, y pasa por el vértice, no hace mas que tocar al cono segun una línea recta, que debe mirarse como doble; porque es la reunion de las dos ramas de la parábola, las cuales estrechándose mas y mas á medida que el plano secante se aproxima á ser tangente al cono, se acercan á confundirse con dicha recta (119 y 128).

Por otra parte cuanto mas se aparta el plano secante del vértice del cono, tanto mas se abre la parábola y se ensancha en su vértice; y por consiguiente tanto mas se aproxima á la línea tirada por este punto perpendicularmente á su eje.

157. Vamos á examinar ahora las propiedades de las líneas rectas que cortan ó tocan las curvas de segundo grado. Y para seguir el mismo método de que nos hemos valido para el círculo (105) tomaremos la ecuacion

$$y-\beta=A(x-\alpha),$$

que es la de una recta que pasa por un punto, cuyas coordenadas son $\alpha$ y $\beta$, y que forma con el eje de las abscisas un ángulo, cuya tangente trigonométrica es A. La combinaremos con la ecuacion $y^2=mx+nx^2$, que es comparable con $A't'^2+C'u'^2-E'u'=0$ (128), y asi comprende las tres curvas de segundo grado. Haciendo como en el núm. 105.

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=z$$

se tendrá

$$x=\alpha+\frac{z}{\sqrt{1+A^2}},\ y=\beta+\frac{Az}{\sqrt{1+A^2}},$$

haciendo para abreviar $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}=A'$, se tendrá

$$x=\alpha+A'z,\ y=\beta+AA'z,$$



cuyos valores sustituidos en la ecuacion $y^2=mx+nx^2$, sacaremos la trasformada siguiente.

$$\beta^2+2\beta AA'z+A^2A'^2z^2=\begin{cases} m\alpha+mA'z \\ +n\alpha^2+2nA'\alpha z+nA'^2z^2. \end{cases}$$

Pasando todos los términos á un miembro y ordenando respecto de $z$, tendremos

$$(A^2-n)A'^2z^2+(\beta A-\tfrac{1}{2}m-n\alpha)2A'z+\beta^2-m\alpha-n\alpha^2=0,$$

ó lo que es lo mismo

$$z^2+\frac{(\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha)}{(A^2-n)A'}z^2+\frac{\beta^2-m\alpha-n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2}=0.$$

En esta ecuacion la incógnita $z$ representa la distancia EM, fig. 65, que hay entre el punto dado E, y uno de los puntos de interseccion M y M' de la recta EM con la curva AC; teniendo el valor de esta distancia se determinarán fácilmente las coordenadas de la interseccion. Fig. 65.

Por lo que precede se ve claramente que *una línea recta no puede cortar mas que en dos puntos á una curva de segundo grado.*

158. En este caso sucede lo mismo que en el del círculo (107), de modo que deben de ser iguales los dos valores de $z$ cuando la línea recta en cuestion no haga mas que tocar á la curva; v. g. en el punto N, porque los puntos M y M' se aproximan mas y mas, á medida que la línea EM se acerca á EN. Y como la diferencia de los dos valores de $z$ comprendidos en la fórmula

$$z=-\frac{\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha}{(A^2-n)A'}\pm\sqrt{\left(\frac{\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha}{(A^2-n)A'}\right)^2-\frac{\beta^2-m\alpha-n\alpha^2}{(A^2-A'n)^2}}$$

está representada por

$$2\sqrt{\frac{\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha}{(A^2-n)A'}-\frac{\beta^2-m\alpha-n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2}}$$

esta nos da la longitud de la cuerda MM', cuya diferencia se hace nula, cuando coinciden los puntos M y M′, y por consiguiente tenemos para el punto N, la siguiente ecuacion

$$\left(\frac{\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha}{(A^2-n)A'}\right)^2-\frac{\beta^2-m\alpha-n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2}=0\ldots(1).$$

Desenvolviendo esta ecuacion, se verá que $A'^2$ desaparece como divisor comun, y nos queda una ecuacion que nos da el valor de A; y por consiguiente nos determina la posicion de la recta EN, tirada por el punto N, tangente á la curva AC.

Si solo queremos considerar los casos mas sencillos, supondremos que se haya tomado el punto E sobre el eje
Fig. 66. de las abscisas AP, fig. 66; lo cual hace que $\beta=0$, y asi la ecuacion (1) será

$$\frac{(\frac{1}{2}m+n\alpha)^2}{(A^2-n)^2}+\frac{m\alpha+n\alpha^2}{A^2-n}=0,$$

la cual, despues de haberla desenvuelto, se reduce á

$$\tfrac{1}{4}m^2+m\alpha A^2+n\alpha^2A^2=0$$

que nos da

$$A=\frac{\frac{1}{2}m}{\sqrt{-m\alpha-n\alpha^2}}.$$

Aunque esta expresion se presenta bajo una forma imaginaria, no obstante puede ser real en virtud de los valores particulares que pueden tener las cantidades $m$, $n$, y $\alpha$, lo cual sucederá siempre y cuando la situacion del punto E y la naturaleza de la curva permitan tirarle una tangente por dicho punto.

159. Hay un caso en que la condicion de tangencia se simplifica mucho, y es cuando ademas de estar sobre la curva el punto dado, debe de ser este el punto de contacto. En efecto, si el punto E se confunde con M,



fig. 65, en este caso habrá entre $\alpha$ y $\beta$ la misma relacion Fig. 65.
que entre $x$ é $y$, esto es

$$\beta^2=m\alpha+n\alpha^2,\ \text{ó}\ \beta^2-m\alpha-n\alpha^2=0,$$

lo cual trasforma la ecuacion (1) en la siguiente

$$\beta A-\tfrac{1}{2}m-n\alpha=0,$$

de donde se saca

$$A=\frac{\frac{1}{2}m+n\alpha}{\beta},$$

que es la expresion de la tangente del ángulo que la recta TM debe formar con el eje de las abscisas, para que toque á la curva AC.

Tendriamos determinada la situacion de esta recta mas comodamente, si ademas del punto de contacto, conociésemos otro punto; el que se presenta naturalmente es el punto T en que la recta encuentra al eje de las abscisas, en el cual $y=0$, y asi su ecuacion

$$y-\beta=A\ (x-\alpha)\ (85)$$

será $$-\beta=A(x-\alpha)\ \text{y}\ x-\alpha=-\frac{\beta}{A}$$

la cantidad $x-\alpha$ es la diferencia de abscisas de los puntos M y T, y por consiguiente representa la porcion PT del eje AB, poniendo por A su valor, tendremos

$$PT=-\frac{\beta^2}{\frac{1}{2}m+n\alpha}\ *.$$

La línea PT se llama *subtangente;* y una vez determinada, se obtiene la tangente, uniendo el punto M con el punto T con una recta.

160. Para conocer el valor de la subtangente en

* En la figura PT, es la suma de las líneas AT y AP, porque la abscisa AT del punto T es negativa con respecto á la abscisa AP del punto M (76).

cada una de las curvas de segundo grado, basta comparar sucesivamente las ecuaciones

$$y^2=px-\frac{p}{2a}x^2,\ y^2=px+\frac{p}{2a}x^2,\ y^2=px,$$

con la ecuacion $y^2=mx+nx^2$. Como en todos los casos $\alpha$ y $\beta$ representan las coordenadas del punto de contacto situado sobre la curva, es claro que tienen entre sí estas coordenadas la misma relacion que $x$ é $y$; por consiguiente sustituyendo por $\beta^2$ su valor, hallaremos para la primera ecuacion, que es la de la elipse

$$m=p,\ n=-\frac{p}{2a},\ \text{y asi } PT=-\frac{p(a-\alpha)}{2a\beta^2}=-\frac{2a\alpha-\alpha^2}{a+\alpha};$$

para la segunda, que es la hipérbola

$$m=p,\ n=\frac{p}{2a},\ \text{y asi } PT=-\frac{2a\beta^2}{p(a-\alpha)}=-\frac{2a\alpha+\alpha^2}{a+\alpha};$$

finalmente para la tercera, que pertenece á la parábola,

$$m=p,\ n=0,\ \text{y asi } PT=-\frac{2\beta^2}{p}=-2\alpha.$$

Esta última expresion, que es la mas sencilla de las tres, hace ver que *en la parábola la subtangente es doble de la abscisa.* El signo $-$ que tiene, lo mismo que las demas, manifiesta que debe tomarse sobre el eje AB, partiendo desde el punto P hácia el lado en que caen las $x$ negativas; pero como por otra parte la forma misma de la curva indica claramente hácia qué lado debe caer la subtangente, prescindiremos del signo desde aqui en adelante.

La construccion de las subtangentes de las otras dos curvas es tambien muy sencillo; en efecto para la elipse tendremos

$$a-\alpha : 2a-\alpha :: \alpha : \frac{2a\alpha-\alpha^2}{a-\alpha}=PT,$$

para la hipérbola



$$a+\alpha : 2a+\alpha :: \alpha : \frac{2a\alpha+\alpha^2}{a+\alpha}=PT,$$

de modo que está reducido á hallar cuartas proporcionales.

Es una cosa bien digna de notarse que el segundo eje $b$ no entra en las expresiones de las subtangentes; de modo que á una misma abscisa corresponde la misma subtangente en todas las elipses que tienen el mismo eje mayor, y otro tanto sucede á las hipérbolas. Y como por otra parte la elipse se trasforma en un círculo cuando $b=a$, podemos tirar una tangente á la elipse, tirándola antes al círculo; porque si se prolonga la ordenada $pm$, fig. 56, Fig. 56.
hasta que encuentre al círculo descrito sobre el eje mayor, y se tira la recta $n$T tangente en $n$ al círculo, la subtangente PT será tambien, en virtud de lo dicho, subtangente de la elipse en el punto $m$, y por consiguiente tendremos la tangente uniendo el punto T con el punto $m$. Tendriamos una construccion parecida á esto para las hipérbolas, una vez que tuviésemos la subtangente de la hipérbola equilátera (128).

161. Conociendo la subtangente se sacan fácilmente las expresiones de la *tangente*, de la *subnormal* y de la *normal*, que se llaman asi á las líneas TM, PR, MR, fig. 65. La primera es la parte de tangente comprendida Fig. 65.
entre el punto de contacto y el eje de las abscisas; la segunda es la parte del eje de las abscisas comprendida entre el extremo de la ordenada PM y el punto R, en que encuentra á dicho eje la perpendicular tirada á la tangente en el punto M; y la tercera es la longitud de esta misma perpendicular, tomada desde el punto M hasta el eje de las abscisas.

1.° El triángulo TMP, rectángulo en P, nos da

$$MT=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{PT}^2}.$$

2.° Los triángulos PMT, PMR, que son semejantes por estar formados por la perpendicular MP, bajada desde el ángulo recto del triángulo TMR, rectángulo en M, nos dan

$$PT : MP : MP : PR\text{, de donde } PR=\frac{\overline{PM}^2}{PT}.$$

3.° El triángulo MPR, rectángulo en P, nos da

$$MR=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{PR}^2}.$$

Es claro que estas fórmulas convienen á todas las curvas, y que para aplicarlas, por ejemplo, á la elipse, basta poner en la primera y en la segunda, en lugar de PM y de PT, los valores relativos á esta curva, y despues con el valor que se haya sacado para PR y con el de PM, se sacará el de MR: lo mismo se hará para la hipérbola y para la parábola. Como todo esto es sumamente fácil, solo pondremos los resultados finales de semejantes substituciones.

Para la elipse

$$PT=\frac{2a\alpha-\alpha^2}{a-\alpha},\ MT=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha-\alpha^2)+\left(\frac{2a\alpha-\alpha^2}{a-\alpha}\right)^2}$$

$$PR=\frac{b^2}{a^2}(a-\alpha),\ MR=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha-\alpha^2)+\frac{b^4}{a^4}(a-\alpha)^2},$$

para la hipérbola

$$PT=\frac{2a\alpha+\alpha^2}{a+\alpha},\ MT=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha+\alpha^2)+\left(\frac{2a\alpha+\alpha^2}{a+\alpha}\right)^2}$$



$$PR=\frac{b^2}{a^2}(a+\alpha),\ MR=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha+\alpha^2)+\frac{b^4}{a^4}(a+\alpha)^2},$$

para la parábola

$$PT=2\alpha,\ MT=\sqrt{p\alpha+4\alpha^2}$$
$$PR=\tfrac{1}{2}p,\ MR=\sqrt{p\alpha+\tfrac{1}{4}p^2}.$$

Se obtienen resultados un poco mas sencillos, por lo que hace á las dos primeras curvas, cuando se cuentan las abscisas desde el centro, pero no puede hacerse lo mismo con la parábola, porque carece de centro (128). Para sacar dichos resultados, en la elipse, basta hacer $\alpha=a-\alpha'$, y en la hipérbola, hacer $\alpha=\alpha'-a$; representando $\alpha'$ la nueva abscisa contada desde el centro: si hacemos las sustituciones, y efectuamos las reducciones, sacaremos para la elipse

$$PT=\frac{a^2-\alpha'^2}{\alpha'},\ MT=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha'^2)+\left(\frac{a^2-\alpha'^2}{\alpha'}\right)^2}$$

$$PR=\frac{b^2}{a^2}\alpha',\ MR=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha'^2)+\frac{b^4}{a^4}\alpha'^2},$$

para la hipérbola

$$PT=\frac{\alpha'^2-a^2}{\alpha'},\ MT=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2-a^2)+\left(\frac{\alpha'^2-a^2}{\alpha'}\right)^2}$$

$$PR=\frac{b^2}{a^2}\alpha',a^2\ MR=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2-a^2)+\frac{b^4}{a^4}\alpha'^2}.$$

162. Aunque sin duda es muy elegante el método que acabamos de exponer, de tirar tangentes á las curvas de segundo grado, no obstante no debemos dejar de hablar de las resoluciones sintéticas que dieron los antiguos de este mismo problema, y asi vamos á exponerlas brevemente.

1.° Se tirarán por el punto M, tomado sobre la elipse, fig. 52, los dos radios vectores FM y F′M; se prolongará uno de ellos, por ejemplo F′M hasta G, de modo que MG sea igual á FM; se tirará despues FG, la recta MH, levantada perpendicularmente en el medio de FG, será tangente en el punto M, porque no tendrá ningun otro punto comun con la curva mas que está este. En efecto, si tomamos otro punto cualquiera N sobre esta recta, y tiramos las rectas FN, F′N, tendremos Fig. 52.

$$F'N+NG>F'G,$$

ó lo que es lo mismo

$$F'N+FN>F'M+FM>II';$$

porque por construccion $MG=FM$, $NG=FN$; y como se veria fácilmente que para los puntos colocados dentro de la elipse, la suma de las distancias de cada uno de ellos á los focos es menor que el eje mayor, se sigue de lo expuesto que el punto N está fuera de la elipse, pues que la suma de sus radios vectores es mayor que el eje II′.

Esta construccion nos hace ver al mismo tiempo que los ángulos FMH, F′MN, formados por los radios vectores con la tangente, son iguales, y que la normal en el punto M dividiria al ángulo FMF′ en dos partes iguales.

2.° Cuando el punto M es de una hipérbola, figura 53, es preciso tomar el radio vector menor FM sobre el mayor F′M, y no sobre su prolongacion: concluyendo la construccion del mismo modo que anteriormente, tendremos en este caso Fig. 53.

$$F'N<F'G+NG<F'G+FN,$$

de donde se sigue

$$F'N-FN<F'G<F'M-FM,$$

lo que prueba que el punto N no pertenece á la hipérbola. No está colocado en lo interior de la curva, porque para esto seria preciso que la diferencia de las distancias á cada uno de los focos fuese mayor que el eje II′. En efecto, si se tira $F'm$, se tiene

$$F'm-Fm=F'm+Mm-FM,$$

y como $F'm+Mm>F'M$, se sigue que

$$F'm-Fm>F'M-FM.$$

De esta construccion resulta tambien la igualdad de los ángulos FMH y F′MH, ó RMN.

3.° Cuando el punto M pertenece á una parábola, fig. 54, no tenemos mas que un radio vector; pero en lugar del otro tenemos á la recta QM paralela al eje IB, y el punto Q hace veces del punto G, porque $QM=FM$. Considerando despues un punto N, bien sea mas arriba ó mas abajo del punto de contacto, se tiene al mismo tiempo QN y $FN>ON$; por consiguiente el punto N está fuera de la curva. Fig. 54.

De esta construccion se deduce que el ángulo FMH es igual á QMH; y ademas se debe observar que este último es igual $a'$NME que está formado por la tangente y la recta ME paralela al eje IB.

Si aplicásemos el cálculo á estas construcciones, hallariamos los resultados que obtuvimos en el número precedente.

163. La consideracion de las tangentes á la hipérbola da lugar á una circunstancia muy notable, que consiste en que aunque la hipérbola se extiende al infinito, no obstante cada una de sus ramas se halla comprendida entre los lados de cierto ángulo, sin que jamas los llegue á tocar, como lo manifiesta la fig. 67. Esta misma circunstancia, que ya observamos de otro modo en el número 118, se nos vuelve á presentar ahora observando

la marcha de la subtangente PT, á medida que el punto de contacto M se aleja sobre la curva y se separa del punto I, ó lo que viene á ser lo mismo, á medida que crece la abscisa OP. Representando por $x$ la OP, tenemos

(161) $PT=\frac{x^2-a^2}{x}$; y como $OT=OP-PT$, saldrá

$$OT=x-\frac{x^2-a^3}{x}=\frac{a^2}{x}.$$

Este resultado manifiesta claramente que cuanto mas crece $x$ tanto mas disminuye OT, y tanto mas el punto T se acerca al punto O; pero que jamas puede llegar á confundirse con él, porque una fraccion jamas puede llegar á ser nula, mientras que su numerador no desaparezca; por consiguiente el punto O debe mirarse como el límite, hácia el cual tiende sin cesar el punto T á proporcion que crece la abscisa. Es preciso que examinemos ahora qué alteraciones experimenta, en las mismas circunstancias, el ángulo MTP que determina la situacion de la tangente con respecto al eje de las abscisas. La expresion de la tangente trigonométrica de este ángulo es

$$\frac{MP}{PT}=\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}\ (30),$$

que dividiendo por $x$ ambos términos será $\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$

en donde se ve que á medida que $x$ crezca, la fraccion $\frac{a^2}{x^2}$

disminuye, y asi la expresion $\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$ tiende hácia



la cantidad $\frac{b}{a}$; el ángulo MTP no puede pues disminuir indefinidamente, y el límite, al cual jamas puede llegar, pero sí acercarse mas y mas, es el ángulo EOI, cuya tangente trigonométrica es $\frac{b}{a}$; por consiguiente la hipérbola jamas puede llegar á tocar la línea EO, por mas que se prolonguen uno y otro.

Para construir el ángulo EOI, se tomará sobre el eje II′ una abscisa cualquiera; por ejemplo, el semieje OI; y como el triángulo rectángulo EOI nos da EI=OI tang. EOI, tendremos

$$EI=OI\times\frac{b}{a}=b$$

porque $OI=a$. Por consiguiente levantando en el punto I una perpendicular $EI=b$, la recta OE que una los puntos O y E, será el límite de todas las tangentes de la rama IK de la hipérbola: este límite es lo que hemos dicho que se llama asímptota. Es claro que hay otra asímptota O$e$ en la parte inferior del eje II′ formando con este eje el ángulo que la primera, que es el límite de las tangentes de la rama I$k$.

164. Será útil hacer ver de qué modo se pasa de la ecuacion de la hipérbola con relacion á sus ejes, á la referida á sus asímptotas. Para esto tírese por el punto M, paralelamente á la asímptota O$e$, una nueva ordenada QM, y hágase $QO=t$, $QM=u$, es evidente que $\frac{OI}{OE}$ y $\frac{IE}{OE}$ son el uno el coseno y el otro el seno del ángulo EOI comprendido entre el eje de las $t$, QO, y el de las $x$, II, y como

$$\mathrm{OI}=a,\ \mathrm{IE}=b,\ \mathrm{OE}=\sqrt{\overline{\mathrm{OI}}^2+\overline{\mathrm{IE}}^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

sacaremos (122)

$$m=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ n=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Considerando despues el eje de las $u$, O$e$, tendremos

$$\cos.\ e\mathrm{OI}=\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{O}e},\ \mathrm{sen.}\ e\mathrm{OI}=\frac{\mathrm{I}e}{\mathrm{O}e}$$

y como O$e$=OE, I$e$=−IE, saldrá

$$p=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ q=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

y valiéndonos de las fórmulas generales

$$x=mt+pu,\ y=nt+qu$$

sacaremos

$$x=\frac{a(t+u)}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y=\frac{b(t-u)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Cuyos valores sustituidos en la ecuacion

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

la trasforman, despues de hechas las reducciones, en

$$\frac{4tu}{a^2+b^2}=1,\ \text{ó}\ tu=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2).$$

Esta última ecuacion, semejante á la trasformada de el núm. 120, patentiza la propiedad que tienen las asímptotas; porque de ella se saca

$$u=\frac{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}{t},\ \text{ó}\ \mathrm{QM}=\frac{\frac{1}{4}\overline{\mathrm{OE}}^2}{\mathrm{QO}}$$

que manifiesta que la ordenada QM va siempre disminuyendo á medida que el punto Q se aparta del punto O, pero sin que jamas pueda llegar á ser nula.

Cuando la hipérbola es equilátera (128), $b=a$, en



cuyo cono la tangente del ángulo EOI, representada por $\frac{b}{a}$, es igual á 1; por consiguiente cada asímptota forma con el eje II un ángulo igual al semirecto, y las dos juntas forman entre sí un ángulo recto. La ecuacion $tu=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, trasformándose en $tu=\frac{1}{2}a^2$, hace ver que el producto de las coordenadas $t$ y $u$ es igual, en este caso, á la mitad del cuadrado del semieje trasversal OI.

Se notará fácilmente que si se tiran por el punto I las rectas ID y I$d$, respectivamente paralelas á O$e$ y á OE, se formará un rombo, cuyos lados ID y I$d$ serán las coordenadas del punto I situado sobre el eje, referidas á las asímptotas; por consiguiente tendremos

$$\overline{\mathrm{ID}}\times\overline{\mathrm{I}d}=\overline{\mathrm{ID}}^2=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2),$$

de donde se saca

$$\mathrm{ID}=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

y en general

$$\mathrm{QO}\times\mathrm{QM}=\overline{\mathrm{ID}}^2.$$

En el caso en que la hipérbola sea equilátera, el rombo D$d$ es un cuadrado, porque el ángulo DO$d$ es recto.

El cuadrado $\overline{\mathrm{ID}}^2$, que equivale á la cuarta parte de la suma de los cuadrados de los semiejes de la hipérbola, es lo que los antiguos geómetros llamaban *potencia* de la hipérbola.

165. Es claro que si prolongamos las líneas MP y PM′, que son las ordenadas con respecto al eje II′, hasta que encuentren á las asímptotas OE y O$e$, las partes MR y M′R′ de estas ordenadas, interceptadas entre cada rama de la curva y su asímptota, son iguales entre sí: la misma propiedad se verifica para cualquier otra recta, que se

tire por cualquier punto de la hipérbola. Si por ejemplo tiramos la MN′ de cualquier modo, tendremos GM=GN′. Para demostrarlo observarémos antes que

$$PR=PR'=\frac{bx}{a}$$

$$MR=PR-PM=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$MR'=PR'+PM=\frac{b}{a}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$MR\times MR'=b^2.$$

Despues por el punto N′ se tirará la recta SS′ paralela á MM′; los triángulos semejantes RMG, SN′G nos darán

$$GM : GN' :: MR : N'S,$$

por los triángulos semejantes G′N′S′ y R′MG′ tendremos

$$G'M : G'N' :: MR' : N'S';$$

multiplicando estas dos proporciones ordenadamente tendremos

$$GM\times G'M : GN'\times G'N' :: MR\times MR' : N'S\times N'S';$$

y como en virtud de lo dicho anteriormente, tenemos

$$MR\times MR'=b^2,\ N'S\times N'S'=b^2$$

se deduce que

$$GM\times G'M=GN'\times G'N'.$$

Poniendo en lugar de G′M y de GN′ sus valores G′N′+MN′, GM+MN′, y haciendo las multiplicaciones indicadas, tendremos hechas las reducciones

$$GM\times MN'=G'N'\times MN',\ \text{ó}\ GM=G'N'.$$

166. Con el auxilio de la propiedad que acabamos de demostrar, se describe por puntos con mucha facilidad la hipérbola, con tal se den las asímptotas y un punto M. Por dicho punto se tiran una porcion de rectas como MN′, se toma la parte GM comprendida entre el punto M y la asímptota que está mas inmediata, y se pone dicha parte GM desde G hasta N′, con lo cual tendremos un nuevo punto N′ de la curva que se quiere trazar.



Cuando se conocen las asímptotas, se determina la direccion del eje II′, dividiendo en dos partes iguales el ángulo que forman; y como la tangente del ángulo EOI da á conocer la relacion de los semiejes $a$ y $b$ (163), se determinan fácilmente estos cuando se conoce un punto de la hipérbola. La ecuacion $\overline{PM}^2=\frac{b^2}{a^2}(\overline{OP}^2-a^2)$ nos da inmediatamente, representando por A la cantidad

$$\frac{b}{a},\ a^2=\frac{A^2\times\overline{OP}^2-\overline{PM}^2}{A^2}.$$

167. Ademas de la hipérbola, cuyas ramas son KI$k$ y K′I′$k'$, se halla comprendida entre las rectas OS y OS′ otra hipérbola HL$h$, H′L′$h'$, descrita en los otros dos ángulos formados por dichas rectas; de modo que el eje transversal II′ de la primera es segundo eje de la segunda, la cual tiene por eje trasversal LL′, el segundo eje de la primera. Por causa de la relacion que tienen entre sí estas dos curvas, se las llaman *hipérbolas conjuadas*: como tienen la misma *potencia*, resulta que tienen la misma ecuacion con respecto á las asímptotas; pero el ángulo de estas líneas, ó el de sus coordenadas, es diferente para cada una de ellas.

168. Por la forma de la ecuacion del círculo hemos visto que se necesitaban tres puntos para determinarle: la misma consideracion puede aplicarse á una curva cualquiera; y se va á ver que en general se necesitan tantos puntos como coeficientes tenga la ecuacion de la curva de que se trate. La ecuacion

$$Ay^2+Bxy+Ex^2+Dy+Ex=F,$$

que pertenece á las curvas de segundo grado, se la puede poner bajo de la forma

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx=e,$$

la cual solo contiene los cinco coeficientes $a$, $b$, $c$, $d$ y $e$; bastarán pues cinco puntos para particular la curva de segundo grado que ella representa. En efecto, si las coordenadas de estos puntos, son respectivamente

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'''\\ \beta'''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha^{IV}\\ \beta^{IV}\end{matrix}\right\},$$

se formarán las cinco ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}
&\beta^2+a\alpha\beta+b\alpha^2+c\beta+d\alpha=e\\
&\beta'^2+a\alpha'\beta'+b'\alpha^2+c\beta'+d\alpha'=e\\
&\beta''^2+a\alpha''\beta''+b\alpha''^2+c\beta''+d\alpha''=e\\
&\beta'''^2+a\alpha'''\beta'''+b\alpha'''^2+c\beta'''+d\alpha'''=e\\
&\beta^{IV2}+a\alpha^{IV}\beta^{IV}+b\alpha^{IV2}+c\beta^{IV}+d\alpha^{IV}=e.
\end{aligned}$$

Como solo tenemos por objeto demostrar la posibilidad de la determinacion de las letras $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ y el número de condiciones que ella exige, no nos detendremos en efectuar los cálculos que exigiera esta operacion, para los cuales puede consultarse la obra de Puissant, citada en el núm. 110, en la cual se hallará sobre este objeto y sus aplicaciones pormenores muy importantes; nos limitaremos á hacer observar que estas ecuaciones pueden ser contradictorias entre sí en ciertos casos particulares. Por ejemplo, si aconteciese que tres puntos de los cinco dados, estuviesen en línea recta, no seria posible hacer pasar una curva de segundo grado por estos puntos, á causa de que ninguna curva de este grado puede tener mas de dos puntos comunes con una recta (157).

Es claro que cuando la curva es dada de especie y



de posicion, se necesitan menos condiciones para determinarla. Si se quisiese determinar una elipse, cuyo centro y eje mayor se diesen de posicion, solo necesitariamos dos puntos, á causa de que la ecuacion $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, correspondiente á este caso, no comprende mas que dos coeficientes $a$, $b$ que en tal caso dependerian de las ecuaciones

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2$$
$$a^2\beta'^2+b^2\alpha'^2=a^2b^2.$$

169. Hemos manifestado en el núm. 73 que la ecuacion de segundo grado se construia por medio de una circunferencia de círculo y de una recta, y en el número 105, que las dos raices se determinaban por las dos intersecciones que podian tener entre sí estas líneas, de suerte que se consideraba la ecuacion propuesta como proveniente de la eliminacion de una incógnita entre dos ecuaciones con dos indeterminadas, la una perteneciente á la línea recta y la otra al círculo: si generalizamos este modo de proceder, tendremos el medio de construir ecuaciones de cualquier grado. En efecto, si se tuviese por ejemplo, la ecuacion

$$x^4-b^2x^2+c^3x-d^4=0,$$

se la podrá suponer producida por la eliminacion de una incógnita $y$, entre dos ecuaciones de segundo grado, que contengan en sí $x$ é $y$, y por lo mismo pertenecientes á dos curvas. Hallar estas dos ecuaciones es un problema indeterminado, porque hay una infinidad de sistemas de ecuaciones que pueden conducir á la propuesta; por lo mismo se toma una arbitrariamente. Sea pues $x^2=py$, se tendrá

$$x^4=p^2y^2,$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion propuesta, se mudará en

$$p^2y^2-b^2py+c^3x-d^4=0,$$

ó

$$y^2 - \frac{b^2}{p}\,y + \frac{c^3}{p^2}\,x - \frac{d^4}{p^2} = 0.$$

Es facil conocer que esta ecuacion pertenece á una parábola (128); y para ponerla bajo de la forma mas simple, basta hacer desaparecer el término multiplicado por $y$, lo cual se efectuará haciendo $y = y' + \frac{b^2}{2p}$, cuyo valor sustituido en la segunda de las dos anteriores, se mudará en

$$y'^2 + \frac{c^3}{p}\,x - \frac{b^4 + 4d^4}{4p^2} = 0;$$

este resultado puede escribirse como sigue

$$y'^2 = \frac{c^3}{p^2}\left\{\frac{b^4 + 4d^4}{4c^3} - x\right\},$$

y nós manifiesta que la parábola á quien pertenece tiene por parámetro la cantidad $\frac{c^3}{p^2}$, y que las abscisas contadas partiendo desde el vértice, son iguales á la diferencia entre la cantidad $\frac{b^4 + 4d^4}{4c^3}$ y las ordenadas de la primera parábola, en la cual $x^2 = py$. En efecto, si llevamos per-

Fig. 68. pendicularmente al eje $AB$ de las abscisas, fig. 68, y del lado de las ordenadas positivas, una distancia $AA' = \frac{b^2}{2p}$, la recta $A'B'$, tirada paralelamente á AB, será el eje, desde el cual deben tomarse las $y'$. El vértice de la parábola, cuya ordenada representa $y'$, corresponde al punto en que se tiene $y' = 0$, lo cual acontece cuando $x = \frac{b^4 + 4d^4}{4c^3}$; por lo mismo bastará hacer $AD = \frac{b^4 + 4d^4}{4c^3}$, y elevando DI perpendicularmente á $AR$ el punto I, será el vértice de la segunda parábola $GIH$, $A'I$ será su eje; y conociendo su parámetro, será facil construirla por puntos, segun el método del número 135. Por lo que hace á la primera parábola $GAF$, dada por la ecuacion $x^2 = py$, es visible que tiene su vértice en el origen $A$ de las coordenadas, y por eje de las $y$ á la $AC$. Cuando se la haya construido, los puntos $M$, $M'$, $M''$, $M'''$, en que encuentra á la parábola GIH, tendrán abscisas iguales á las raices de la ecuacion propuesta, á causa de que en estos puntos los valores de $x$ satisfacen al mismo tiempo á las dos ecuaciones



$$x^2 = py$$
$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0,$$

de las cuales resulta la propuesta.

Como queda indeterminada la cantidad $p$, introducida por la ecuacion de la primera parábola, puede recibir cualquier valor excepto cero, con el fin de simplificar la construccion.

Para representar el caso mas general, hemos dispuesto la ecuacion propuesta y la figura de modo que las dos curvas se encuentren en cuatro puntos; pero esta circunstancia no se verificará sino en el caso de que la ecuacion propuesta tenga reales sus cuatro raices. Por ejemplo, si el eje $A'I$ de la parábola $GIH$ cayese debajo de $AB$, lo cual aconteceria si el término $b^2py$ tuviese el signo $+$, á causa de que en semejante caso tendriamos que hacer $y = y' - \frac{b^2}{2p}$, no habria mas que dos intersecciones á lo mas; porque es bien claro que la rama IH no podria encontrar á la parábola $EAF$; aun hay mas, en ciertos casos la curva GIH se hallará toda entera debajo de EAF, y esto diria que las raices de la propuesta eran imaginarias.

Se ve tambien por esta construccion, como por la teoría de las ecuaciones, que la ecuacion del cuarto grado no puede tener sino un número par de raices reales, á causa de que las parábolas $EAF$, $GIH$ no pueden cortarse sino en dos ó en cuatro puntos.

170. De aqui se infiere que no encontrándose el círculo y la línea recta sino en dos puntos, no pueden resolverse mas problemas que los susceptibles á reducirse á ecuaciones de segundo grado, y no podrán ser bien empleados por no bastar, para aquellos que exceden á este grado, tales son los problemas de la duplicacion del cubo, y de la triseccion del ángulo, tan famosos en la antigüedad.

Por lo que hace al primero, se pide hallar el lado de un cubo, cuyo volumen sea doble del de otro cubo dado. Sea $a$ el lado de este, y $x$ el lado del otro, se tendrá la ecuacion:

$$x^3=2a^3, \text{ ó } x^3-2a^3=0.$$

Para compararla con la propuesta, es necesario hacerla pasar al cuarto grado, para lo cual, se multiplicará por $x$, y se tendrá

$$x^4-2a^3x=0;$$

comparando esta con $x^4-b^2x^2+c^3x-d^4=0$, se deberá tener

$$b=0,\ c^3=-2a^3,\ d=0.$$

Las ecuaciones de las parábolas que deben construirse, serán por lo mismo $x^2=py$, $y^2=\frac{2a^3}{p^2}x$: y si se toma $p=a$, ellas se mudarán en

$$x^2=ay,\ y^2=2ax;$$

la segunda curva tendrá un parámetro doble del de la primera.

Fig. 69. Estas curvas pasarán las dos por el origen $A$, fig. 69, á causa de que en una y otra se tendrá al mismo tiempo $x=0$ $y=0$, dichas curvas se cortarán alli, y esta interseccion dará $x=0$, raiz que proviene del factor introducido para ascender al cuarto grado la ecuacion propuesta de tercero. La figura manifiesta que solo puede tenerse, ademas de la raiz dicha, otra que sea real $AP$; y en efecto se ha visto, en los *Elementos de Algebra*, que la ecuacion $x^3-2a^3=0$, no tiene mas.



171. El problema de la triseccion del ángulo tiene por objeto dividir un ángulo ó un arco en tres partes iguales, lo cual se efectuaria sin trabajo si conociendo la cuerda ó el seno de un arco, se obtuviese la cuerda ó el seno de su tercio. Esta cuestion es un caso particular de la teoría de la multiseccion de los ángulos, que no expondremos aqui y nos remitimos á la Introduccion al *tratado de Calculo diferencial y de Cálculo integral;* ella se pone en ecuacion por medio de las fórmulas del número 11, que dan

$$\cos. 3a=\frac{4\cos.^3 A-3R^2\cos. A}{R^2}.$$

Si se mira como incógnita cos. A, y se representa *cos. 3A* por $a$ y *cos. A* por $x$, se tendrá la ecuacion

$$x^3-\tfrac{3}{4}R^2x-\tfrac{1}{4}R^2a=0,$$

que multiplicandola por $x$, y comparándola con la ecuacion

$$x^4-b^2x^2+c^3x-d^4=0,$$

dará

$$b^2=\tfrac{3}{4}R^2,\ c^3=-\tfrac{1}{4}R^2a,\ d^4=0.$$

En este caso se verá que hay, como en el núm. 170, una interseccion en el punto $A$, la cual corresponde á la raiz $x=0$, y los otros tres puntos de interseccion, darán las tres raices de la ecuacion

$$x^3-\tfrac{3}{4}R^2x-\tfrac{1}{4}R^2a=0.$$

Al primer aspecto parece que solo debia tenerse una raiz real, y que no habria mas que un modo de dividir un arco en tres partes iguales; pero si se reflexiona con atencion, se verá que hay tres arcos que deben satisfacer á la cuestion propuesta, á causa de que los arcos $3A$, $2\pi+3A$, $4\pi+3A$, que tienen el mismo coseno (23), si se les divide por 3, dan los valores

$$x=\cos. A,\ x=\cos.(\tfrac{2}{3}\pi+A),\ x=\cos.(\tfrac{4}{3}\pi+A),$$

esencialmente diferentes*. No puede haber mas arcos, porque los arcos $6\pi+3A$, $8\pi+3A$ &c., que aun tienen el mismo coseno que A, si se les divide por 3, conducen á los arcos $2\pi+A$, $2\pi+\frac{2}{3}\pi+A$ &c., y que

$$\cos.(2\pi+A)=\cos. A,\ \cos.(2\pi+\tfrac{2}{3}\pi+A)=\cos.(\tfrac{2}{3}\pi+A)\ \&c.$$

172. Antes de que los métodos de aproximacion hubiesen llegado al grado de perfeccion en que hoy se hallan, los geómetras se aplicaban mucho á la construccion de las ecuaciones, y hacian todos sus esfuerzos para efectuarla por las curvas mas simples, ó las mas fáciles de describir. Esta fue la causa de que Halley diese un método para construir las ecuaciones del tercero y cuarto grado, empleando el círculo y la parábola, cuyo método tiene una ventaja sobre el núm. 169, y es que el círculo que reemplaza una de las parábolas, se traza por un movimiento continuo; pero el poco uso que al presente se hace de las construcciones, dispensa de pormenores acerca de esto, y por lo mismo terminaremos este tratado por la exposicion de un método que reune, á la ventaja de aplicarse á ecuaciones de cualquier grado, la de pintar los

* La ecuacion anterior cae en el *caso irreducible*. (Véase el *Complemento de los Elementos de Algebra* del Autor.)



resultados obtenidos analíticamente por la teoría de la composicion de las ecuaciones.

Para fijar las ideas supondremos que la ecuacion que se ha de construir sea solo $a+bx+cx^2+dx^3=0$, se hará

$$y=a+bx+cx^2dx^3.$$

Se sabe que debe tenerse $y=0$ para los puntos en que la curva representada por esta ecuacion encuentre al eje de las abscisas; se infiere de aqui que las abscisas de estos puntos serán las raices de la ecuacion propuesta: por lo mismo la cuestion se reducirá á construir la curva de que se trata, lo cual es facil, despues de haber hecho homogénea la ecuacion dada, restituyendo en ella las potencias de la unidad (71). En efecto, se obtendrá

$$y=a+\frac{bx}{n}+\frac{cx^2}{n^2}+\frac{dx^3}{n^3},$$

resultado en el cual cada término se construye separadamente por las líneas proporcionales (68); pero he aqui un medio de unir entre sí de un modo cómodo las diferentes operaciones.

Se tirará, fig. 70, el eje *AB* de las abscisas; por el origen A se levantará la recta *AC* perpendicular á *AB*, la cual será el eje de las $y$; y habiendo tomado sobre el primero la parte $AD=n$, y tirado *DE* paralela á *AC*, se llevarán sobre esta última las partes Fig. 70.

$$AF=a,\ FG=b,\ GH=c,\ HI=d;$$

se tirará despues IK paralela á AB; se unirán los puntos *H* y *K* por una recta que cortará en *L* á la línea *PR*, levantada perpendicularmente á *AB* sobre la abscisa $AP=x$; se tirará *ML* paralela á *AB* para determinar sobre *DE* el punto *M*, que se unirá con el punto *G* por el punto *N*, en que *MG* encuentra á *PR*, tírese *ON* paralela á *AB*, y uniendo el punto *O* con el punto

$F$, la recta $OF$ dará sobre $PR$ un punto Q, en que se tendrá $PQ=y$.

En efecto, por los triángulos semejantes IKH y H'LH, se deducirá

$$IK\ (n) : H'L\ (x) :: HI\ (d) : HH'=\frac{dx}{n},$$

de lo que se infiere

$$GH'=GH+HH'=c+\frac{dx}{n};$$

de los triángulos $H'MG$ y $G'NG$ resulta

$$H'M(n) : G'N\,(x) :: GH'\left(c+\frac{dx}{n}\right) : GG'=\frac{ex}{n}+\frac{dx^2}{n^2},$$

y por lo mismo

$$FG'=FG+GG'=b+\frac{cx}{n}+\frac{dx^2}{n^2};$$

en fin de los triángulos G'OF, F'QF, se concluyen

$$G'O\,(n) : F'Q\,(x) :: FG'\left(b+\frac{cx}{n}+\frac{dx^2}{n^2}\right) : EF'=\frac{bx}{n}+\frac{cx^2}{n^2}+\frac{dx^3}{n^3},$$

lo cual da por último resultado

$$PQ=AF'=AF+FF'=a+\frac{bx}{n}+\frac{cx^2}{n^2}+\frac{dx^3}{n^3}.$$

Este método se extenderá sin dificultad al caso en que la ecuacion propuesta contenga un número cualquiera de términos; y cuando se hayan obtenido bastantes puntos para caracterizar el camino ó curso de la curva, se reconocerá facilmente de cuántas raices reales es susceptible esta ecuacion.

Fig. 71. 173. Si el curso de la curva es el mismo que el que representa la línea $XEGILY$, fig. 71, se reconocerá que ella encuentra en cinco puntos al eje de las abscisas, y por lo mismo indicará que la ecuacion de que deriva, tiene un número igual de raices reales: esta ecua-



cion no podrá ser de grado inferior al quinto. Por lo mismo la ecuacion propuesta será

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\&c.=0,$$

y la de la curva que se ha de construir será

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\&c.$$

Es evidente que los valores numéricos de la ordenada $y$ no son otra cosa que los resultados que se obtienen de la ecuacion propuesta, dando en ella á $x$ los valores correspondientes á las diferentes abscisas, escogidas arbitrariamente: la curva $XEGILY$, ofrece pues en algun modo el equivalente de un cuadro, en el cual estuviesen escritos estos resultados; pero con la ventaja de que en virtud de la ley de *continuidad*, que aun se percibe mejor en las líneas que en los números, los intervalos entre dos sustituciones sucesivas se llevarian facilmente. Por ejemplo, calculando las ordenadas $PP'$, $QQ'$, $RR'$ muy próximas las unas á las otras, y uniendo sus extremos por un trazo continuo, *sin ángulos ni garrotes*; de cuyo modo se tendrán con bastante exactitud las ordenadas intermedias.

Se observará: 1.° que ya que la ecuacion de la curva no contiene sino potencias enteras y positivas de $x$, cada valor de esta indeterminada no dará para $y$ sino un solo valor que será finito ó limitadò en tanto que $x$ lo sea, pero que $y$ será susceptible de adquirir incrementos indefinidos ó ilimitados, cuando $x$ los reciba tales, y que por consiguiente la curva $XEGILY$ debe extenderse al infinito, de cada lado del eje $AC$ de las $y$.

2.° La figura manifiesta, que la curva $XEGILY$ no podrá pasar de un lado del eje AB al otro, sin encontrar este eje; ó hablando analíticamente, que la ordenada $y$

no puede cambiar de signo, sin ser nula*; de lo cual se infiere que si dos sustituciones hechas *en la ecuacion propuesta, diesen dos resultados de signos contrarios habria alli realmente una raiz comprendida entre los valores de $x$ empleados en estas sustituciones.*

3.° Si se toman sobre la misma curva dos puntos colocados de un mismo lado respecto al eje AB, habria entre ellos un número par de intersecciones de la curva y de este eje: se ve en efecto dos entre $E$ é $I$, cuatro entre $E$ é $Y$, ó entre $X$ y $L$ &c.; ó no habria interseccion como acontece entre $P$ é $I$. Por el contrario, habria un número impar de intersecciones, si los puntos que se consideran estan colocados de diferentes lados, como $X$ y $E$, $X$ é $I$, $X$ é $Y$ &c. De lo cual resulta esta proposicion analítica: *entre dos valores de $x$, que, por su sustitucion en la ecuacion propuesta, den dos resultados del mismo signo, no puede haber sino un número par de raices reales, y habrá un número impar, si estos resultados son de signos diferentes.*

4.° Ultimamente, sucede algunas veces que por consecuencia de las relaciones que pueden tener entre sí los coeficientes $a, b, c, d, e, f$ &c., dos intersecciones consecutivas, tales como $K$ y $M$, se aproximen continuamente, vengan á confundirse, y la parte $IKLMY$ de la curva, tomando la forma de la línea punteada $IL'Y$, no

* Esto es cierto en este caso, porque la expresion de $y$ está sin denominador; pero si se tuviese $y=\frac{a}{x}$, la sucesion de los valores $x=+1$, $x=0$, $x=-1$, darian $y=+a$, $y=\frac{a}{0}$ ó infinito, é $y=-a$. Del mismo modo que las ramas de la hipérbola, consideradas entre sus asímptotas, estan ligadas entre sí (120).


haga sino tocar al eje $AB$; en tal caso las dos raices representadas por $AK$ y $AM$, resultan iguales entre sí, y á la abscisa $AL'$. Fácilmente se ve que si la ecuacion propuesta no tuviese otras raices reales, la curva que resulta de ella no cortaria á su eje en parte alguna, y por lo mismo no se podria hacer cambiar de signo al primer miembro de esta ecuacion por sustitucion alguna. No sucederia lo mismo si se reuniesen tres intersecciones: la curva cortaria por lo menos una vez al eje, bien fuese antes, ó bien fuese despues; y para convencerse de ello, basta ver lo que quedaria de esta curva, si los tres puntos $H$, $K$ y $M$, ó $F$, $H$ y $K$ se viniese á confundir. Siguiendo estas consideraciones se reconocerá que, por la reunion de un número par de intersecciones, la curva derivada de la ecuacion propuesta se puede hallar toda ella de un mismo lado del eje; pero que no se verifica esta circunstancia cuando el número de las intersecciones, confundidas en una sola, es impar; de aqui se concluirá que cuando una ecuacion no tenga por raices reales sino un número par de raices iguales, es imposible de reconocer la existencia de ella por ninguna sustitucion.

Comunmente la inspeccion de un corto número de puntos de la curva basta para indicar el espacio en que ella se aproxima mas al eje de las abscisas; en cuyo sitio, multiplicando el número de los puntos determinados, se podrá uno asegurar si hay alli contacto ó intersecciones; y si por consiguiente la ecuacion propuesta tiene raices rigorosamente iguales, ó solamente poco diferentes unas de otras: en este caso, la construccion de la curva sirve no solo para facilitar la resolucion numérica, sino para aclarar el camino que debe seguirse en su resolucion.

# APENDICE,

## EN QUE SE EXPONEN LOS PRINCIPIOS DE LA APLICACION DEL ALGEBRA A LA GEOMETRIA, A LAS SUPERFICIES CURVAS, Y A LAS CURVAS DE DOBLE CURVATURA.

### *Ecuaciones del plano y de la línea recta.*

175. El medio mas cómodo para fijar la posicion de un punto en el espacio, es el de proyectarlo sobre un plano BAC, cuya posicion sea dada, bajando sobre ese plano la perpendicular MM′, y referir luego la proyeccion M′, á dos ejes AB y AC, perpendiculares entre sí, por medio de las coordenadas AP y PM′. Eso es lo mismo que referir dicho punto á los tres planos BAC, BAD y DAC, perpendiculares entre sí: pues las coordenadas AP y PM′ situadas en el plano BAC, representan las distancias MM‴ y MM″ que hay desde el punto propuesto M á los otros dos planos DAC y BAD. Las rectas AB, AC, AD, segun las cuales los planos coordenados BAC, BAD, DAC se cortan de dos en dos, son los ejes de las coordenadas: distínguense entre sí por la letra aneja á la coordenada que les es paralela; de modo que si se hace AP$=x$, PM′$=y$, MM′$=z$, la línea AB será el eje de las $x$; la línea AC, el de las $y$, y la línea AD, el de las $z$.

Fig. 72

Los planos coordenados reciben ellos mismos denominaciones semejantes. El plano BAC se llamará el de las $x$



é $y$, porque contiene las coordenadas $x$ é $y$. La proyeccion M″ del punto M, sobre el plano BAD, siendo referida á los dos ejes AB y AD, por medio de las coordenadas AP$=x$ y PM″$=$MM′$=z$, designaráse dicho plano con el nombre de plano de las $x$, $z$. En fin, refiriéndose la proyeccion M″ del punto M, sobre el plano DAC á los ejes AC y AD por medio de las coordenadas AR $=$PM′$=y$, y RM‴$=$M′M$=z$, designaráse el tal plano con el nombre de plano de las $y$, $z$.

Debe observarse: 1.°, que las coordenadas $y$, $z$ son nulas al mismo tiempo para todos los puntos del eje de las $x$, AB; lo mismo sucede con $x$ y $z$ respecto del eje de las $y$, AC; y de $x$ é $y$ respecto del eje BD de las $z$.

2.° Que en todos los puntos del plano BAC, la coordenada $z$ es nula, y que tiene un valor constante para todos los puntos de un plano cualquiera paralelo al primero; de modo que esta ecuacion $z=c$, hallándose sola y sin otra determinacion alguna respecto de las otras dos coordenadas $x$ é $y$, debe ser considerada como perteneciente á todos los puntos de un plano tirado paralelamente á BAC y distante de él la cantidad $c$. Del mismo modo se verá que $y$ es nulo para todos los puntos del plano BAD, y que $y=b$ será la ecuacion del plano tirado paralelamente al primero y á una distancia$=b$.

Si se consideran juntas las dos ecuaciones $z=c$ y $y=b$, esto es, si se supone que tengan lugar á un mismo tiempo, ellas designarán una recta paralela al eje de las $x$, y tirada por el punto del plano de las $y$, $z$, cuyas coordenadas son $c$ y $b$; con efecto, es facil de ver que puede ser esa recta considerada como la interseccion de dos planos respectivamente paralelos á los planos BAC, BAD.

En fin, en el pleno BAC la coordenada $x$ será siempre nula, y $x=a$ será la ecuacion del plano paralelo al primero, tirado á una distancia $=a$. Las tres ecuaciones $z=c$, $y=b$, $x=a$, siendo reunidas solo pertenecen al punto formado por la interseccion de los tres planos respectivamente paralelos á cada uno de los planos coordenados.

176. Examinemos ahora qué es lo que significa una ecuacion entre dos de las tres indeterminadas $x$, $y$, $z$, y tomemos por ejemplo $z=Ax$. Veremos en primer lugar
Fig. 73 que esa ecuacion pertenece á una recta AN″, fig. 73 tirada en el plano de las $x$, $z$, BAD; pero aun tiene otra significacion mas extensa; pues si se concibe que la recta AN″ se mueve paralelamente á sí misma á lo largo del eje de las $y$, AC, en cualquiera posicion que se pare, la ordenada $z$, ó $M'm$, relativa á un punto cualquiera M′, situado sobre la recta PM′, paralela á AC, será igual á la ordenada $Pm''$, correspondiente en el plano BAD, á la abscisa $AP=RM'$. La recta AN″, por el movimiento que le suponemos, traza el plano N″AC, que pasa por las rectas AN″ y AC; se tendrá pues $z=Ax$ para todos los puntos de ese plano. Podríanse deducir consecuencias análogas para los otros planos coordenados, tomando ecuaciones entre las indeterminadas que ellos contienen; pero es preferible pasar desde luego al caso general, y considerar la ecuacion $z=Ax+By$.

Haciendo en ella $y=o$, saldrá $z=Ax$, de lo que se deduce que la recta AN″, que esta última ecuacion representa, comprende todos los puntos que la superficie representada por la ecuacion $z=Ax+By$ tiene comunes con el plano coordenado BAD, en el cual $y$ es siempre nulo, ó lo que viene á ser lo mismo, es la interseccion de ese plano con la superficie propuesta.



Cuando se hace $x=o$, se saca $z=By$, ecuacion perteneciente á una recta AN‴ tirada por el origen A, en el plano DAC, y que es la interseccion de ese plano con la superficie representada por la ecuacion $z=Ax+By$.

Si se concibe ahora que la línea AN‴ se mueva paralelamente á sí misma á lo largo de AN″, trazará el plano N‴AN″, y en llegando á una posicion cualquiera $m''$M, la porcion $Mm$ de la ordenada M′M será igual y paralela á $Rm'''$, y se tendrá por consiguiente

$$M'M=Pm''+Bm'''=Ax+By=z;$$

de donde se sigue que el plano N‴AN pasando por las líneas AN″ y AN‴, cuyas ecuaciones son

$$z=Ax,\ z=By$$

tiene él mismo por ecuacion $z=Ax+By$.

Si el plano propuesto, en vez de pasar por el origen A se hallase en una posicion G″EG″, determinada por las líneas EG″, EG‴, respectivamente paralelas á AN″ y AN‴, seria paralelo al plano N‴AN″, y prolongando la ordenada de este hasta su encuentro con el primero, se tendria

$$M'L=M'M+ML=M'M+AE;$$

llamando pues D la distancia AE, $y$ $z$ la ordenada M′L, tendríase por lo que antecede,

$$z=Ax+By+D.$$

Tal es la ecuacion de un plano colocado en una posicion cualquiera: es facil convencerse que ella representa la ecuacion general del primer grado con tres indeterminadas; pues esta última solo puede tener la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=o$; y dividiéndole por $\gamma$ vendrá á ser idéntica á la primera haciendo

$$-\frac{\alpha}{\gamma}=A,\ -\frac{\beta}{\gamma}=B,\ -\frac{\delta}{\gamma}=D.$$

Luego se ve que el coeficiente $\gamma$ nada añade á la generalidad de la ecuacion; con todo, lo conservaremos para hacer las fórmulas mas simétricas, y representaremos la ecuacion general de un plano cualquiera del modo siguiente:

$$Ax+By+Cz+D=0;$$

mas siempre se deberá tener presente que en todos los resultados podrá una de las constantes ser igualada á la unidad, ó bien determinada por medio de condiciones particulares.

177. Si se hace sucesivamente en la ecuacion de este plano, $x$, $y$, $z$ iguales á cero, se verá que corta al plano de las $y$, $z$ en una línea, cuya ecuacion es $Ay+Cz+D=0$; al de las $x$, $z$, en una línea, cuya ecuacion es $Bx+Cz+D=0$, y en fin el de las $x$, $y$ en una línea, cuya ecuacion es $Ax+Cy+D=0$.

Siendo la extension de los planos indefinida, se debe concebir el plano G‴EG″ prolongado por detras de los planos coordenados BAD, DAC; entonces encontrará al plano BAC, y pasará por debajo de él. Todas esas circunstancias pueden leerse en su ecuacion, observando que cada una de las indeterminadas $x$, $y$, $z$ debe ser tomada positiva y negativamente, y que si las partes AB, AC, y AD, fig. 62. de los ejes de las coordenadas correspon- Fig. 62.
den á los valores positivos de estas cantidades, las partes opuestas A$b$, A$c$ y A$d$ corresponderán á los valores negativos. Eso puede inmediatamente probarse por la direccion de las líneas situadas en los planos BAC, BAD y CAD; y tambien trasportando cada uno de esos planos paralelamente á sí mismos, de modo que se vuelvan positivas las ordenadas negativas que le son perpendiculares, y entonces se raciocinaria del mismo modo que se ha hecho respecto de las líneas (72).



Síguese de ahí que es facil conocer en cuál de los ocho ángulos triedros que forman los planos al rededor del punto A, cae un punto propuesto, por medio de los signos que acompañan á sus coordenadas; basta para esto tener presente que cuando se toma

$+x, +y, +z$, en el ángulo ABCD, se tiene
$+x, +y, -z$, en el ángulo ABC$d$,
$+x, -y, +z$, en el ángulo ABD$c$,
$-x, +y, +z$, en el ángulo ACD$b$,
$+x, -y, -z$, en el ángulo AB$cd$,
$-x, -y, +z$, en el ángulo AD$bc$,
$-x, +y, -z$, en el ángulo AC$bd$,
$-x, -y, -z$, en el ángulo A$bcd$.

178. Una línea recta está dada siempre que se conocen dos planos que la contienen, y de los cuales es la interseccion, porque las coordenadas de sus puntos son comunes á las ecuaciones de dichos planos. Sean pues

$$Ax+By+Cz+D=0 \ldots. \ (1)$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0 \ldots. \ (2)$$

las ecuaciones de los planos dados; considerando las indeterminadas $x$, $y$, $z$, como que tienen un mismo valor en ambas ecuaciones, no quedará mas que una sola que pueda ser tomada arbitrariamente y calculadas las otras dos consiguientemente á ella, darán á conocer la posicion de los diferentes puntos de la recta propuesta.

Las ecuaciones (1) y (2) no son las únicas que pueden representar á la recta propuesta; pues hállase en una infinidad de planos diferentes; pero se suele elegir entre todas las ecuaciones de que es susceptible, las que solo contienen dos de las coordenadas $x$, $y$, $z$.

Eliminando sucesivamente $x$, $y$, $z$, entre las ecuaciones (1) y (2), se obtienen las tres siguientes:

$$(AB'-A'B)\,y-(C'A'-C'A)\,z+AD'-A'D=0.$$
$$(BC'-B'C)\,y-(AB'-A'B)\,x+BD'-B'D=0,$$
$$(CA'-C'A)\,x-(BC'-B'C)\,y+CD'-C'D=0,$$

que se convierten en

$$\gamma y-\beta z+\delta=0\ldots.\ (3)$$
$$\alpha z-\gamma x+\varepsilon=0\ldots.\ (4)$$
$$\beta x-\alpha y+\varsigma=0\ldots.\ (5),$$

haciendo para abreviar

$$AB'-A'B=\gamma,\ CA'-C'A=\beta,\ BC'-B'C=\alpha,$$
$$AD'-A'D=\delta,\ BD'-B'D=\varepsilon,\ CD'-C'D=\varsigma.$$

Dos cualesquiera de estas ecuaciones bastan para reemplazar las ecuaciones (1) y (2), y comprenden implícitamente á la tercera. En efecto, si se multiplica la ecuacion (3) por $\alpha$, la ecuacion (4) por $\beta$, la ecuacion (5) por $\gamma$, y se suman los productos, se sacará

$$\alpha\delta+\beta\varepsilon+\gamma\varsigma=0,$$

resultado que la sustitucion de los valores de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\varsigma$, hará idéntico, ó expresará la condicion que han de satisfacer esas cantidades, para que dadas *á priori* las ecuaciones (3), (4) y (5), puedan pertenecer á una misma línea recta.

La ecuacion (3) que expresa la condicion que debe existir entre las coordenadas $y$, $z$ para todos los puntos de la recta propuesta; pertenece al conjunto de proyecciones de dichos puntos sobre el plano de las $y$, $z$, y es por consiguiente la ecuacion de la proyeccion de la recta propuesta sobre el tal plano. (compl. de los Elem. de Geom., número 4.) Igualmente la ecuacion (4) pertenece á la proyeccion de la recta sobre el plano de las $x$, $z$; y finalmente la ecuacion (5) es la de su proyeccion sobre el plano de las $x$, $y$. Dadas que sean dos cualesquiera de estas proyecciones, la recta está enteramente determinada; esto es evidente por el analisis anterior, y porque la recta propuesta no es otra cosa mas que la interseccion de dos cualesquiera planos proyectantes (compl. 5), planos cuya ecuacion es la misma que la de la proyeccion, sobre la cual son elevados (166).



179. No conteniendo la ecuacion general del plano mas que tres constantes necesarias, basta igual número de condiciones para particularizarla. Examinaremos sucesivamente las condiciones que mas á menudo se presentan, y trataremos al mismo tiempo las cuestiones análogas respectivas á las líneas rectas.

Propongámonos en primer lugar hacer pasar un plano por tres puntos, cuyas coordenadas sean

$$x',\ y',\ z';\ x'',\ y'',\ z'';\ x''',\ y''',\ z''';$$

pondremos sucesivamente

$$x',\ x'',\ x''' \text{ en vez de } x$$
$$y',\ y'',\ y''' \text{ en vez de } y$$
$$z',\ z'',\ z''' \text{ en vez de } z,$$

en la ecuacion general del plano,

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

y saldrán las tres ecuaciones:

$$Ax'+By'+Cz'+D=0,$$
$$Ax''+By''+Cz''+D=0,$$
$$Ax'''+By'''+Cz'''+D=0,$$

por medio de las cuales se determinarán las cantidades $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ y se tendrá

$$\frac{A}{D}=\frac{z'(y''-y''')-z''(y'-y''')+z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')},$$
$$\frac{B}{D}=\frac{x'(z''-z''')-x''(z'-z''')+x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{C}{D}=\frac{y'(x''-x''')-y''(x'-x''')+y'''(x'-x''')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y''z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}.$$

Es facil de ver que si se quisieran determinar las ecuaciones de las proyecciones de una recta que pasase por dos puntos dados, se conseguiria de un modo análogo, sustituyendo las coordenadas de esos puntos en las ecuaciones generales $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$; se hallaria

$$x-x'=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z'),\ y-y'=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z')\ (88).$$

180. Para conocer cuando están dos líneas dadas en un mismo plano, ó, lo que es lo mismo, cuando se cortan, es preciso cerciorarse de si las indeterminadas $x$, $y$, $z$, pueden ser comunes á las cuatro ecuaciones de las proyecciones de las rectas (compl. 19). Luego es evidente que si se eliminan $x$, $y$, $z$, quedará una ecuacion que expresará la condicion, sin la cual las ecuaciones de las rectas propuestas no pueden tener lugar para un mismo punto. Representemos por

$$\left.\begin{array}{l}x=az+\alpha\\ y=bz+\beta\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=a'z+\alpha'\\ y=b'z+\beta'\end{array}\right\}$$

las ecuaciones de esas rectas, sacaremos inmediatamente

$$az+\alpha=a'z+\alpha',\ bz+\beta=b'z+\beta'$$

eliminando $z$, sale

$$(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\beta'-\beta)(a'-a)=0.$$

181. Dos planos que son paralelos tienen sus secciones con cada plano coordenado, respectivamente paralelas entre sí (compl. 15); pero si $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$, representan las ecuaciones de los dos planos, sus comunes secciones respectivas con los planos de las $x$, $z$, y de las $y$, $z$, tendrán por ecuaciones

$$Ax+Cz+D=0,\ A'x+C'z+D'=0,$$
$$By+Cz+D=0,\ B'y+C'z+D'=0,$$



y solo serán paralelas dos á dos cuando se verifique

$$\frac{A}{C}=\frac{A'}{C'},\ \frac{B}{C}=\frac{B'}{C'}\ (85),$$

sacando de estas últimas ecuaciones los valores de $A'$ y de $B'$, se tendrá por la ecuacion del plano paralelo al primero,

$$\frac{C'}{C}(Ax+By+Cz)+D'=0.$$

$D'$ queda aun por determinar en este resultado; pero suponiendo que el plano que se busca ha de pasar por un punto, cuyas coordenadas sean $x'$, $y'$, $z'$, se tendrá

$$\frac{C'}{C}(Ax'+By'+Cz')+D'=0;$$

restando esta ecuacion de la anterior $D'$ desaparecerá, y dividiendo entonces por $\frac{C'}{C}$, saldrá

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Conviene advertir que si se consideran A, B, C, como cantidades cualesquiera, la ecuacion anterior será comun á todos los planos que pasen por el punto propuesto.

Supuesto que dos rectas son paralelas cuando sus proyecciones sobre cada uno de los planos coordenados, son respectivamente paralelos (compl. 20), sus ecuaciones tendrán en este caso la forma

$$\left.\begin{array}{l}x=az+\alpha\\ y=bz+\beta\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=az+\alpha'\\ y=bz+\beta'\end{array}\right\}.$$

Si la segunda debe pasar por el punto, cuyas coordenadas son $x'$, $y'$, $z'$, se tendrán para determinar $\alpha'$ y $\beta'$ las ecuaciones

$$x'=az'+\alpha'\ \text{y}\ y'=bz'+\beta',$$

de las cuales se sacará

$$x-x'=a(z-z'),\ y-y'=b(z-z').$$

182. Para hallar la ecuacion de un plano perpendicular á una recta dada, es preciso rener presente que las comunes secciones de este plano, con cada uno de los planos coordenados, son perpendiculares á las proyecciones de la recta dada (compl. 32). Sean $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, lar ecuaciones de la recta, y $Ax+By+Cz+D=0$, la del plano buscado; las comunes secciones de este con los planos de las $x$, $z$, y de las $y$, $z$ serán

$$Ax+Cz+D=0 \text{ ó } x=-\frac{Cz}{A}-\frac{D}{A},$$
$$By+Cz+D=0 \text{ ó } y=-\frac{Cz}{B}-\frac{D}{B},$$

y para que estas rectas sean perpendiculares á las proyecciones de la recta dada, deberá tenerse

$$a=\frac{A}{C},\ b=\frac{B}{C}\ (86).$$

Sustituyendo los valores de A y de B, sacados de estas ecuaciones en la del plano buscado, se tendrá

$$C(ax+by+z)+D=0;$$

y si el plano debe pasar por el punto, cuyas coordenadas sean $x'$, $y'$, $z'$, su ecuacion será

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

Si la ecuacion del plano fuese dada, y se quisiese conocer la de la recta que le es perpendicular, seria preciso entonces reemplazar $a$ y $b$ por los valores dados anteriormente, y se obtendria

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'),\ y-y'=\frac{B}{C}(z-z');$$

para las ecuaciones de la recta perpendicular al plano representado por $Ax+By+Cz+D=0$, y sujeta á pasar por un punto, cuyas coordenadas son $x'$, $y'$, $z'$.

183. La distancia del punto M, fig. 72, cuyas



coordenadas son $x$, $y$, $z$, al punto A, tiene por expresion $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (compl. 24). Esto nos conduce naturalmente á la ecuacion de la superficie de la esfera; pues debiendo todos sus puntos estar igualmente distantes de su centro, si se supone que sea ese centro el origen mismo de las coordenadas, y se representa al radio por $\gamma$, se tendrá para un punto cualquiera de la superficie propuesta la ecuacion $x^2+y^2+z^2=r^2$.

Cuando las coordenadas del centro sean $x'$, $y'$, $z'$, se tendrá

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=r^2;$$

pues si $m$ es el punto, y se toma $PO=pm'$, $M'N'=m'm$, los triángulos rectángulos $m'OM'$ y $mNM$ darán

$$\overline{m'M}^2=\overline{m'O}^2+\overline{M'O}^2,\ \overline{mM}^2=\overline{mN}^2+\overline{MN}^2;$$

pero $m'=x-x'$, $M'O=y-y'$, $MN=z-z'$, $mN=m'M'$ y por consiguiente la distancia entre los dos puntos $m$ y M tendrá por expresion

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

184. Lo que procede nos va á conducir de un modo sencillísimo á la expresion del coseno del ángulo formado por dos rectas dadas. Sean

$$\left.\begin{array}{l}x-x'=a(z-z')\\ y-y'=b(z-z')\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x-x'=a'(z-z')\\ y-y'=b'(z-z')\end{array}\right\}$$

las ecuaciones de las proyecciones de las rectas que se cortan en un punto, cuyas coordenadas son $x'$, $y'$, $z'$; si se imagina que se muevan paralelamente á sí mismas, hasta que su punto de interseccion esté en el origen, su ángulo $m$ variará, y las ecuaciones anteriores se reducirán á

$$\left.\begin{array}{l}x=az\\ y=bz\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=a'z\\ y=b'z\end{array}\right\}.$$

Concibamos ahora una esfera, cuyo centro esté en el orígen, y cuyo radio sea $r$; la distancia de los puntos en que su superficie cortará á cada uno de los lados del ángulo buscado, será evidentemente la cuerda de dicho ángulo. Se obtendrán las coordenadas del punto de encuentro de la primera recta con la superficie de la esfera, determinando $x$, $y$, $z$, por las ecuaciones de la recta y por la de la esfera; asi se sacará

$$x=\frac{ar}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ y=\frac{br}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ z=\frac{r}{\sqrt{1+a^2+b^2}}:$$

llamando $x'$, $y'$, $z'$, las coordenadas del punto de encuentro de la segunda recta con la superficie de la esferá, se tendrá igualmente

$$x'=\frac{a'r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\ y'=\frac{b'r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\ z'=\frac{r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

La expresion del cuadrado de la distancia de este punto al anterior, será $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$; sustituyendo en ella en vez de $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, sus valores se tendrá por resultado, hechas todas las reducciones,

$$r^2\left\{2-\frac{2(1+aa'+bb')}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}\right\};$$

pero se sabe (13) que llamando V el ángulo buscado, el cuadrado de la cuerda que abraza el arco que le mide es $=2R^2-2R\cos. V$, ó haciendo $R=r=1$, el cuadrado dicho valdrá $2-2\cos. V$; comparando esta expresion con la anterior y haciendo en ella $r=1$, sale

$$\cos. V=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}.$$

Será facil deducir de aqui



$$\text{sen. } V=\frac{\sqrt{(ab'-a'b)^2+(a-a')^2+(b-b')^2}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}.$$

Para que las dos rectas propuestas sean perpendiculares, se deberá tener $\cos. V=0$, y por consiguiente $1+aa'+bb'=0$.

186. En este sitio corresponde hablar de las relaciones que existen entre los ángulos que forma una recta cualquiera con los ejes coordenados, á causa de haberlos introducido en la mecánica con feliz éxito, y dar mas simetría á las ecuaciones de esta recta.

Para lograrlo por medio de las expresiones del número anterior, supongamos que la segunda recta dada sea uno de los ejes, por ejemplo el de las $x$; en tal caso se tendrá $y=0$ cualquiera que sea $x$; y por lo mismo $b'=0$. Observando ademas que segun la ecuacion $x=a'z$, $a'$ designa la tangente del ángulo que forma con el eje de las $z$ (86) la proyeccion de la línea de que se trata, ángulo que es recto cuando la tal línea coincide con el eje de las $x$ y $a'$ será infinito (24). El supuesto de $b'=0$ reduce la expresion de $\cos. V$ á

$$\frac{1+aa'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2)}},$$

y dividiendo sus dos términos por $a'$, se la dará la forma

$$\frac{\frac{1}{a'}+a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\left(\frac{1}{a'^2}+1\right)}};$$

en la que haciendo $a'$ infinito, se muda en

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Esta es la expresion del coseno del ángulo que la primera recta dada forma con el eje de las $x$.

Del mismo modo se hallará para el eje de las $y$, respecto á el cual $a'=0$, y $b'$ es infinito, se sacará

$$\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Para el eje de las $z$ con relacion al cual $a'=0$, y $b'=0$, se obtendrá

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Designando respectivamente por $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, los tres ángulos, cuyos cosenos acabamos de indicar, se tendrá

$$\cos.\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ \cos.\beta=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ \cos.\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Si cuadramos estas tres ecuaciones y las añadimos, sacaremos

$$\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=\frac{a^2+b^2+1}{1+a^2+b^2}=1,$$

como puede verse en el núm. 59 del *Complem. de los elem. de Geom.* del Autor.

187. La expresion de *cos.* $\gamma$, da

$$\sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{1}{\cos.\gamma},$$

si se la sustituye en las de *cos.* $\alpha$ y *cos.* $\beta$ se obtendrá

$$a=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\gamma},\ b=\frac{\cos.\beta}{\cos.\gamma};$$

y las ecuaciones de la primera recta dada, se mudarán en

$$(x-x')\cos.\gamma=(z-z')\cos.\alpha,$$
$$(y-y')\cos.\gamma=(z-z')\cos.\beta.$$

Si estos valores de $a$ y $b$ se les sustituye en la ecuacion del plano perpendicular á esta recta, á saber en



$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0\ (182),$$

se obtendrá este resultado simétrico

$$(x-x')\cos.\alpha+(y-y')\cos.\beta+(z-z')\cos.\gamma=0.$$

Ultimamente si se designan por $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ los ángulos que una segunda recta forma con los ejes de las coordenadas, se tendrá

$$a'=\frac{\cos.\alpha'}{\cos.\gamma'},\ b'=\frac{\cos.\beta'}{\cos.\gamma'};$$

la expresion que designa el coseno del ángulo que esta segunda recta forma con la primera (185) se mudará en

$$\cos.V=\cos.\alpha\cos.\alpha'+\cos.\beta\cos.\beta'+\cos.\gamma\cos.\gamma',$$

con solo tener presente que

$$\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=1,\ \ \cos.^2\alpha'+\cos.^2\beta'+\cos.^2\gamma'=1.$$

188. La utilidad de estas fórmulas casi nos obliga á deducirlas inmediatamente por consideraciones geométricas.

1.° Suponiendo que la recta dada se la traslade paralelamente á sí misma hasta el origen de las coordenadas, y se la represente por $AM$, fig. 74, se observará que el Fig. 74.
triángulo $APM$ es rectángulo en $P$ puesto que el plano $M'PM''$ es perpendicular al eje $AB$, y de él se inferirá

$$\cos.PAM=\frac{AP}{AM}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

con solo poner por $AM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (183), y por $x$ é $y$ sus valores $az$ y $bz$.

Del mismo modo se hallará

$$\cos.QAM=\frac{AQ}{AM}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$
$$\cos.RAM=\frac{AR}{AM}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Por este medio se llegará fácilmente á la relacion

$$\overline{\cos.\,PAM}^2+\overline{\cos.\,QAM}^2+\overline{\cos.\,RAM}^2=1.$$

2.° El triángulo *APM* da $AP=AM\cos.\,PAM$; del mismo modo se hallará $AR=AM\cos.\,RAM$, y como $AR=PM''$, se tendrá

$$\frac{AP}{PM''}=\frac{\cos.\,PAM}{\cos.\,RAM},\ \text{de donde sale}\ \frac{x}{z}=\frac{\cos.\,\alpha}{\cos.\,\gamma},$$

representando por $\alpha$ y $\gamma$ los ángulos que la recta AM forma con el eje de las $x$ y el de las $z$. Del mismo modo se hallará

$$\frac{y}{z}=\frac{\cos.\,\beta}{\cos.\,\gamma},$$

con solo designar por $\beta$ el ángulo comprendido por la recta propuesta y el eje de las $y$.

3.° En fin, se indica algunas veces una recta por el ángulo $MAM'$ que ella hace con su proyeccion sobre el plano de las $x$, $y$, y por el ángulo $M'AP$ que forma esta proyeccion con el eje de las $x$. Sea $\theta$ el primer ángulo, y $\varphi$ el segundo, se tendrá

$$MM'=AM\ \text{sen.}\ MAM',\ \text{ó}\ z=AM\ \text{sen.}\ \theta,$$
$$AM'=AM\ \cos.\ MAM',\ \text{ó}\ AM'=AM\ \cos.\ \theta,$$
$$PM'=AM'\ \text{sen.}\ M'AP,\ \text{ó}\ y=AM\ \cos.\ \theta\ \text{sen.}\ \varphi,$$
$$AP=AM'\ \cos.\ M'AP,\ \text{ó}\ x=AM\ \cos.\ \theta\ \text{sen.}\ \varphi.$$

Si se observan con cuidado estas últimas expresiones de $x$, de $y$ y de $z$, é igualmente las que resultan de las ecuaciones

$$\frac{x}{z}=\frac{\cos.\,\alpha}{\cos.\,\gamma},\quad \frac{y}{z}=\frac{\cos.\,\beta}{\cos.\,\gamma},$$

y observando que $\gamma$ designa el ángulo *RAM*, el cual es complemento de $MAM'$ ó de $\theta$, se tendrá

$\cos.\,\gamma=\text{sen.}\,\theta$, $\cos.\,\beta=\cos.\,\theta\ \text{sen.}\,\varphi$, $\cos.\,\alpha=\cos.\,\theta\cos.\,\varphi$.

Cuadrando estas últimas ecuaciones, y añadiéndolas se volveria á encontrar como antes



$$\cos.^2\gamma+\cos.^2\beta+\cos^2\alpha=1.$$

Todas las relaciones que hemos hallado entran en las resoluciones de los triángulos esféricos rectángulos (58).

189. El coseno del ángulo que dos planos cualesquiera forman entre sí, se deduce inmediatamente de la expresion que acabamos de hallar; pues dicho ángulo es igual al que forman entre sí dos rectas tiradas perpendicularmente á cada uno de los planos propuestos por un punto cualquiera de su comun interseccion (compl. 46). Representemos las ecuaciones de los planos por

$$Ax+By+Cz+D=0,\ Ax'+By'+Cz'+D'=0;$$

si se concibe que se muevan paralelamente á sí mismos hasta que lleguen al orígen de las coordenadas, su ángulo no cambiará, y sus ecuaciones se reducirán á

$$Ax+By+Cz=0,\ Ax'+By'+Cz'=0;$$

las ecuaciones de las rectas tiradas perpendicularmente á cada uno de ellos, por el tal punto, serán (172)

$$x=\frac{A}{C}z,\qquad x=\frac{A'}{C'}z,$$
$$y=\frac{B}{C}z,\qquad y=\frac{B'}{C'}z;$$

sustituyendo en la expresion de cos. V, en vez de $a$, $b$, $a'$, $b'$, los valores que dan estas ecuaciones, se tendrá

$$\cos.\,V=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}.$$

Si uno de los planos propuestos, v. g. el segundo, fuese el de las $x$, $y$, en el cual siempre se tiene $z=0$; es evidente que $A'$ y $B'$, se harán nulos en esta suposicion, y que V se reducirá á

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Igualmente se hallaria que el coseno del ángulo formado por el primer plano propuesto con el de las $x$, $z$, en el cual se tiene $y=0$, $A'=0$, $C'=0$, seria

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

y que el coseno del ángulo formado por el mismo plano con el de las $y$, $z$, para el cual se tiene $x=0$, $B'=0$, $C'=0$, será

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

En el caso en que los dos planos propuestos fuesen perpendiculares entre sí, se tendria cos. $V=0$, y por consiguiente $AA'+BB'+CC'=0$.

### *De las superficies de segundo grado.*

190. Las superficies, igualmente que las líneas, se dividen en órdenes, segun el grado de sus ecuaciones; el plano es la superficie del primer orden, porque su ecuacion solo es del primer grado. Las superficies del segundo orden estan todas comprendidas en la ecuacion

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz=L^2$$

que es la mas general que puede formarse en el segundo grado con las tres indeterminadas $x$, $y$, $z$.

Resolviendo esta ecuacion respecto de una de dichas letras, respecto de $z$, v. g., se tendrá

$$z=-\frac{Ex+Fy+K}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{\left\{(K^2+CL)+2(FK-CH)y+2(EK-CG)x+(F^2-BC)y^2+2(EF-CD)xy+(E^2-AC)x^2\right\}}.$$



Este resultado hace ver que á un mismo punto del plano de las $x$, $y$, corresponden dos puntos sobre la superficie propuesta, y que por consiguiente cada uno de los valores posibles de $z$ produce por la sustitucion de todos los valores posibles de $x$ y de $y$, una porcion de superficie que es, respecto de la superficie total, lo que son las ramas de una curva respecto de dicha curva.

Observaremos en primer lugar que la parte racional del valor de $z$, expresa la ordenada de un plano, que divide á la superficie en dos partes simétricas; pues si se toma ese plano por el punto de partida de las ordenadas de la superficie, haciendo

$$z+\frac{Ex+Fy+K}{C}=u,$$

la nueva ordenada $u$ tendria dos valores iguales, el uno positivo y el otro negativo. El plano mencionado hace pues en las superficies del segundo grado el mismo oficio que un diámetro en las curvas del segundo grado.

Seria dificil formarse una idea exacta de la forma que debe tener una superficie curva si nos contentásemos con considerar meramente algunos puntos aislados de ella; en vez de eso se imaginan una infinidad de secciones hechas en la superficie por diferentes planos, que para mayor sencillez se toman paralelos á los planos coordenados: una vez conocido el curso de las diferentes curvas resultantes de las secciones, y su continuidad, se da muy bien á conocer la forma de la superficie propuesta.

Todos los puntos de un plano tirado paralelamente al de las $x$, $y$, á una distancia $=a$, estarán comprendidos en la ecuacion $z=a$; y por consiguiente si se sustituye su valor en la ecuacion general de las superficies del segundo grado, se volverá á tener

$Ax^2+By^2+2Dxy+2(Ea+G)x+2(Fa+H)y=L-2Ka-Ca^2$,
y expresará la relacion que tienen entre sí las coordenadas del plano de las $x$, $y$, para todos los puntos de la superficie propuesta, distantes de ese plano la cantidad $a$, y pertenecerá por consiguiente en el plano de las $x$, $y$, á la proyeccion de la curva, segun la cual el plano, cuya ecuacion es $z=a$, encuentra la superficie del segundo grado; y como ese plano es paralelo al de las $x$, $y$, es evidente que la seccion hecha en la misma superficie, no se diferenciará en nada de su proyeccion sobre el plano de las $x$, $y$.

Tomando por $a$ diferentes valores, se tendrán las diferentes secciones paralelas al plano de las $x$, $y$: si se hace $a=0$, la ecuacion resultante

$$Ax^2+By^2+2Dxy+2Gx+2Fy=L$$

dará la curva del segundo grado, segun la cual corta á la superficie el plano de las $x$, $y$. Del mismo modo se determinarian las ecuaciones de las secciones paralelas al plano de las $x$, $z$, y al de las $y$, $z$.

Desde luego se echará de ver que las superficies, segun esten colocadas de un modo mas ó menos simétrico respecto de los ejes de las coordenadas *, tienen ecuaciones mas ó menos sencillas; y que por consiguiente para analizar las diferentes especies de superficies que representa la ecuacion general de las del segundo grado, es preciso empezar por despejarlas de cuantos términos dependen solo de la situacion particular de los ejes de las coordenadas, lo que puede hacerse, ya discutiendo el radical de un modo análogo al que se ha seguido para las líneas del segundo grado en los números 111—120, ya sea construyendo fórmulas generales para la trasformacion de coordenadas en el espacio, y empleando como en los números



125—127, las cantidades relativas á la posicion de los ejes, para simplificar cuanto sea posible la ecuacion general. Se puede consultar acerca de esos pormenores, que ya salen del límite de estos elementos, el capítulo 5 del tomo 1.° del *Tratado del cálculo diferencial é integral*.

191. Nos contentaremos aqui con observar que se puede sacar del núm. 185 la ecuacion del cono recto, colocado en una situacion cualquiera respecto de los planos coordenados.

Con efecto, siendo engendrado el cono recto por el movimiento de una recta sujeta á girar al rededor de otra, haciendo con ella un ángulo constante, si se designa por $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, las coordenadas del vértice, que se tomen por la recta fija ó eje del cono las ecuaciones

$$x-\alpha=a(z-\gamma),\ y-\beta=b(z-\gamma)$$

y por la recta movible ó el lado del cono las ecuaciones

$$x-\alpha=a'(z-\gamma),\ y-\beta=b'(z-\gamma),$$

el coseno del ángulo formado por esas dos rectas será

$$\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}};$$

como debe ser constante, se le representará por $c$, y se observará que perteneciendo $a$, $b$ al eje designan cantidades conocidas, y que

$$a'=\frac{x-\alpha}{z-\gamma},\ b'=\frac{y-\beta}{z-\gamma}.$$

Sustituyendo estos valores, se formará la ecuacion

$$\frac{1+a\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)+b\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\left\{1+\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)^2\right\}}}=c$$

que fácilmente se reduce á

$$\frac{a(x-\alpha)+b(y-\beta)+(z-\gamma)}{m\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}=c,$$

haciendo para abreviar $\sqrt{1+a^2+b^2}=m$.

Si se coloca el vértice en el origen de las coordenadas, se tendrá $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, y

$$\frac{ax+by+z}{m\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c.$$

Si se hace coincidir el eje del cono con el eje de las $z$ se tendrá $a=0$, $b=0$, $m=1$, porque en este eje $y=0$, $x=0$, sea cual fuere $z$; y la ecuacion anterior se reduce á

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c,$$

de la cual se saca elevándola al cuadrado,

$$z^2(1-c^2)=c^2(x^2+y^2);$$

haciendo en esta ecuacion $z=n$ se convierte en

$$n^2(1-c^2)=c^2(x^2+y^2),$$

ecuacion que pertenece á un círculo, cuyo centro está en el eje de las $z$, y cuyo radio es $\frac{n\sqrt{1-c^2}}{c}$. Resulta de esto que todas las secciones del cono recto por un plano paralelo al de las $x$, $y$, son círculos, lo que es ademas evidente por la naturaleza del cono.

Se saca de la ecuacion anterior

$$z=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2};$$

es facil de ver que $\sqrt{1-c^2}$ es el seno del ángulo que hace el lado del cono con el eje de las $z$, y que por consiguiente $\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ es la cotangente de dicho ángulo ó la tan-



gente del que la misma recta forma con el plano de las $x$, $y$.

Si se quisiera que el vértice del cono fuese un punto cualquiera del eje de las $z$, sin que dejase el eje de coincidir con el del cono, se tendria

$$z-\gamma=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Haciendo $z=0$, se obtendria la ecuacion de la curva, segun la cual encuentra el cono al plano de las $x$, $y$, y que puede ser considerada como la base. Esa ecuacion seria

$$-\gamma=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2}$$

ó

$$\frac{\gamma^2(1-c^2)}{c^2}=x^2+y^2;$$

ella pertenece á un círculo, cuyo radio es

$$\frac{\gamma\sqrt{1-c^2}}{c}.$$

Si se representa por $r$ ese radio, se tendrá

$$r^2=\frac{\gamma^2(1-c^2)}{c^2},\text{ y }\gamma=\frac{cr}{\sqrt{1-c^2}};$$

la ecuacion

$$z-\gamma=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2},$$

trocándose entonces en

$$z-\frac{cr}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2}$$

puede ponerse bajo la forma

$$z\sqrt{1-c^2}-c\gamma=c\sqrt{x^2+y^2},$$

en el caso en que $c=1$, ella se reduce á

$$r^2=x^2+y^2.$$

192. Esta última ecuacion, que no contiene mas que dos de las tres coordenadas, pertenece sin embargo á la superficie cilíndrica, en la cual se trasforma el cono cuando su vértice se aleja al infinito; porque designando $c$ el coseno del ángulo formado por la recta generatriz del cono y su eje, la hipótesis $c=1$ hace nulo ese ángulo, y establece el paralelismo de las dos rectas de que se trata; la primera, girando al rededor de la segunda, traza pues la superficie de un cilindro recto perpendicular al plano de las $x$, $y$, cuya base sobre dicho plano es el círculo que tiene por radio $\gamma$, y tiene su centro en el origen de las coordenadas.

Esto nos conduce á observar que una ecuacion cualquiera, que solo contiene dos de las tres coordenadas, y solo designa una curva sobre el plano de las coordenadas, pertenece en el espacio á una superficie, pues la coordenada que no entra en la ecuacion, hallándose independiente de las otras dos, tiene una infinidad de valores para cada punto del referido plano; y esos valores corresponden á todos los puntos de la recta alzada perpendicularmente al plano coordenado por el punto que en él se considera.

El conjunto de todas las rectas alzadas de este modo sobre cada punto de la curva constituye una superficie *cilíndrica*, tomando esta denominacion en toda la extension que se le da en el *Complemento de los elementos de Geometría.*

### *De las curvas consideradas en el espacio.*

193. Cuando se consideran las curvas en el espacio, siempre es como el resultado de la interseccion de dos superficies, asi como la línea recta resulta del encuentro de dos planos (168). Puédese por ejemplo indicar un círculo, dando la esfera de la cual es parte y el plano que corta á dicha esfera. Suponiendo que tenga esta su centro en el origen de las coordenadas, y sea cualquiera el plano, el sistema de las ecuaciones

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad (1) \qquad Ax+By+Cz=D \quad (2)$$

pertenecerá al círculo, segun el cual se encuentran la esfera y el plano propuestos, pues solo convendrá este sistema á los puntos que se hallen al mismo tiempo sobre una y otra superficie.

Claro está que se puede trasformar el sistema de las ecuaciones (1) y (2) en una infinidad de otros que le sean equivalentes. Lo que mas está en uso es eliminar alternativamente una de las tres indeterminadas $x$, $y$, $z$; y asi se obtienen entre estas tres cantidades combinadas de dos en dos tres ecuaciones, que pertenecen á las proyecciones de la curva buscada sobre cada uno de los planos coordenados.

En el ejemplo anterior se tiene

$$x^2+y^2+\left(\frac{D-Ax-By}{C}\right)^2=r^2$$

$$x^2+z^2+\left(\frac{D-Ax-Cz}{B}\right)^2=r^2$$

$$y^2+z^2+\left(\frac{D-By-Cz}{A}\right)^2=r^2,$$

dos cualesquiera de estas ecuaciones dan la tercera; pertenecen (119) á elipses, que son las proyecciones del círculo sobre cada uno de los planos coordenados (compl. 63).

Para concebir con claridad cómo las ecuaciones de las proyecciones de una curva representan esta curva, es necesario tener presente que dichas ecuaciones pertenecen á superficies cilíndricas elevadas perpendicularmente sobre las proyecciones (178), del mismo modo que las ecuaciones de las proyecciones de una recta, designan tambien sus planos proyectantes.

Síguese de esto que la curva propuesta resulta de la interseccion de las superficies cilíndricas elevadas sobre dos de sus proyecciones, como se ha dicho en el núm. 77 del complemento.

En la mayor parte de los casos, la interseccion de dos superficies curvas no puede tener todos sus puntos sobre un mismo plano, y forma entonces una curva de *doble curvatura;* tal es por ejemplo la interseccion de una esfera y de un cilindro recto, cuando el eje del cilindro no pasa por el centro de la esfera.

Supongamos que la esfera tenga su centro en el origen, y que el cilindro tenga por base el círculo y su eje paralelo al de las $z$; las ecuaciones de las superficies que contienen la curva propuesta, serán

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad 2ax-x^2=y^2,$$

y se tendrá por las proyecciones en $x$, $y$, y $x$, $z$,

$$2ax-x^2=y^2 \quad 2ax+z^2=r^2.$$

Esta curva pudiera describirse colocando una punta de compas sobre la superficie del cilindro, y haciendo girar la otra sobre dicha superficie, con una abertura igual al radio de la esfera.

Para obtener cuantos puntos se quieran de ella, es preciso determinar las coordenadas $y$, $z$ por medio de la abscisa $x$, sacando sus valores de las ecuaciones de las proyecciones que dan

$$y=\sqrt{2ax-x^2}, \quad z=\sqrt{r^2-2ax}.$$



Se reconoce la extension de estas curvas, asignando los casos, en los cuales las ordenadas se hacen imaginarias; para $y$ no se encuentran mas valores reales que desde

$$x=0 \text{ hasta } x=2a,$$

y para $z$, desde $x=0$ hasta $x=\frac{r^2}{2a}$ por el lado positivo, y desde $x=0$ hasta el infinito por el lado negativo.

Pero es evidente que solo se debe tomar la parte de la abscisa $x$, comun á las dos proyecciones, pues basta que una de las coordenadas se haga imaginaria para que haya la curva alcanzado su límite; luego no se extenderá mas que desde $x=0$ hasta $x=\frac{r^2}{2a}$.

La consideracion de las mismas proyecciones confirma este resultado. La ecuacion en $x$ é $y$, perteneciendo al círculo AE′F′$e'$, fig. 66, que sirve de base al cilindro, y perteneciendo la que contiene $x$ y $z$ á la parábola H″ I′ $h''$, cuyo parámetro $=2a$, y la distancia $\text{AI}=\frac{r^2}{2a}$, es evidente que solo se pueden emplear para describir la curva propuesta, las partes E′A$e'$ y H″ I′$h''$ de estas proyecciones, correspondientes sobre el eje AB á la parte AI′.

195. En fin, para asegurarse analíticamente de que la curva propuesta no es plana, es preciso indagar si puede ser la interseccion de uno de los cilindros elevados sobre sus proyecciones por un plano. Designando por $\text{A}x+\text{B}y+\text{C}z=\text{D}$ la ecuacion de un plano cualquiera, su interseccion con el cilindro elevado sobre la parábola H″I′$h''$ estará representada por las ecuaciones

$$\text{A}x+\text{B}y+\text{C}z=\text{D},$$
$$2ax+z^2=r^2;$$

la proyeccion de esta interseccion tendrá por ecuacion sobre el plano de las $y$, $z$,

$$A\frac{(r^2-z^2)}{2a}+By+Cz=D,$$

y debera coincidir en todos sus puntos con la de la curva propuesta sobre el mismo plano de las $y$, $z$, que es

$$r^2-z^2-\left(\frac{r^2-z^2}{2a^2}\right)^2=y^2.$$

Pero se saca de la ecuacion anterior

$$y=\frac{2aD-Ar^2-2aCz+Az^2}{2aB};$$

luego será necesario que para todos los valores de $z$ se tenga

$$\left(\frac{2aD-Ar^2-2aCz+Az^2}{2aB}\right)^2=r^2-z^2-\frac{(r^2-z^2)^2}{4a^2}.$$

Desenvolviendo este resultado se le dará la forma

$$Pz^4+Qz^3+Rz^2+Sz+T=0,$$

designando las letras P, Q, R, S, T coeficientes formados con las cantidades A, B, C, D. Para que esta ecuacion se verifique independientemente de $z$, es preciso que se tenga separadamente

$$P=0,\ Q=0,\ R=0,\ S=0,\ T=0.$$

La eliminacion dará á conocer que ninguna de dichas ecuaciones está comprendida en las otras, y por consiguiente no se pueden determinar los cuatro coeficientes A, B, C, D, de modo que satisfagan á un tiempo á todas ellas: luego no existe plano alguno que pueda comprender la curva propuesta; y si se quisiera determinar $z$ por medio de la ecuacion anterior, solo se podrian obtener por ella cuando mas cuatro valores, de suerte que la curva propuesta no puede ser cortada por un plano en mas de cuatro puntos.



# INDICE.

## CAPITULO PRIMERO.

### DE LA TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

## CAPITULO II.

### DE LA TRIGONOMETRIA ESFERICA.

## CAPITULO III.

### DE LA APLICACION DEL ALGEBRA A LA GEOMETRIA.

## APENDICE

### QUE CONTIENE LOS PRIMEROS PRINCIPIOS DE LA APLICACION DEL ALGEBRA A LAS SUPERFICIES CURVAS Y A LAS CURVAS DE DOBLE CURVATURA.

*Ecuaciones del plano y de la línea recta.*

DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO.



DE LAS CURVAS CONSIDERADAS EN EL ESPACIO.

# ERRATAS DEL TOMO TERCERO.

| Pág. | Lín. | Dice | Debe decir |
|---|---|---|---|
| 4. | 28. | 10 : 4 :: 30 : 12 | 2 : 4 :: 6 : 12. |
| 15. | 17. | á que se le | á que se la. |
| 17. | 24. | EB = 4 GE | EB = 4GB. |
| 22. | 15. | las sumas | la suma. |
| 25. | 5. | igual AB′ | igual AB. |
| 25. | 7. | CBA y el C′A′B′ | CAB y el C′A′B′. |
| 25. | 17. | A′B | A′B′. |
| 26. | 17. | B′C′ | BC″. |
| 29. | 6. | al punto B | al punto B′. |
| 29. | 25. | y BC′ | y B′C′. |
| 37. | 8. | que el B | que el B′. |
| 38. | 4. | línea AC | línea BC. |
| 39. | 14. | en la recta | con la recta. |
| 41. | 14. | que el ADF | que el ADE. |
| 43. | 7. | IK | IH. |
| 44. | 11. | por suposicion | por su posicion. |
| 48. | 9. | DG | DE. |
| 54. | 10. | á la GH | á la GA. |
| 54. | 25. | GK á GM | GM á GK. |
| 55. | 17. | GI : G*o*′ | GI′ : G*e*′. |
| 55. | 19. | GI | GI′. |
| 59. | 15. | AC | A*f*. |
| 73. | 22. | ACB | ACD. |
| 74. | Margen |  | fig. 50. |
| 94. | Margen |  | fig. 59. |
| 103. | 9. | á la diferencia | á la semidiferencia. |
| 144. | 20. | $a^{\mathrm{VII}} = \sqrt{4 - b^{\mathrm{XII}2}}$ | $a^{\mathrm{VII}} = \sqrt{4 - b^{\mathrm{VIII}2}}$. |
| 149. | 11. | ABC | FABC. |
| 150. | 29. | incomensurables | comensurables. |
| 151. | 11. | ABCD | EFGH. |
| 156. | 26. | CF | EF. |
| 166. | 17. | PH | PR. |
| 178. | 6. | superior | anterior. |
| 182. | 17. | SH | OH. |
| 182. | 20. | G | O. |
| 182. | 32. | GH | OH. |
| 183. | 7. | 112 | 212. |
| 184. | 4. | GG | GF. |
| 196. | 10. | son | sean. |
| 196. | 11. | hallan | hallen. |
| 197. | 2. | plan | plano. |
| 203. | 23. | semejantes | iguales. |

| Pág. | Lín. | Dice | Debe decir |
|---|---|---|---|
| 204. | 16. | polígono | poliedro. |
| 205. | 12. | 142 | 242. |
| 212. | 13. | BKSC | BKLC. |
| 214. | 13. | (§. 217) | (§. 237). |
| 216. | 3. | QRF | QRT. |
| 264. | 15. | $^1$ CS | $\frac{1}{3}$ CS. |
| 265. | 23. | CD : : | CD′ : : |
| 266. | 2. | $D' = 2R$ | $D' = 2R'$. |
| 131. | 28. | *bd* | *cd*. |

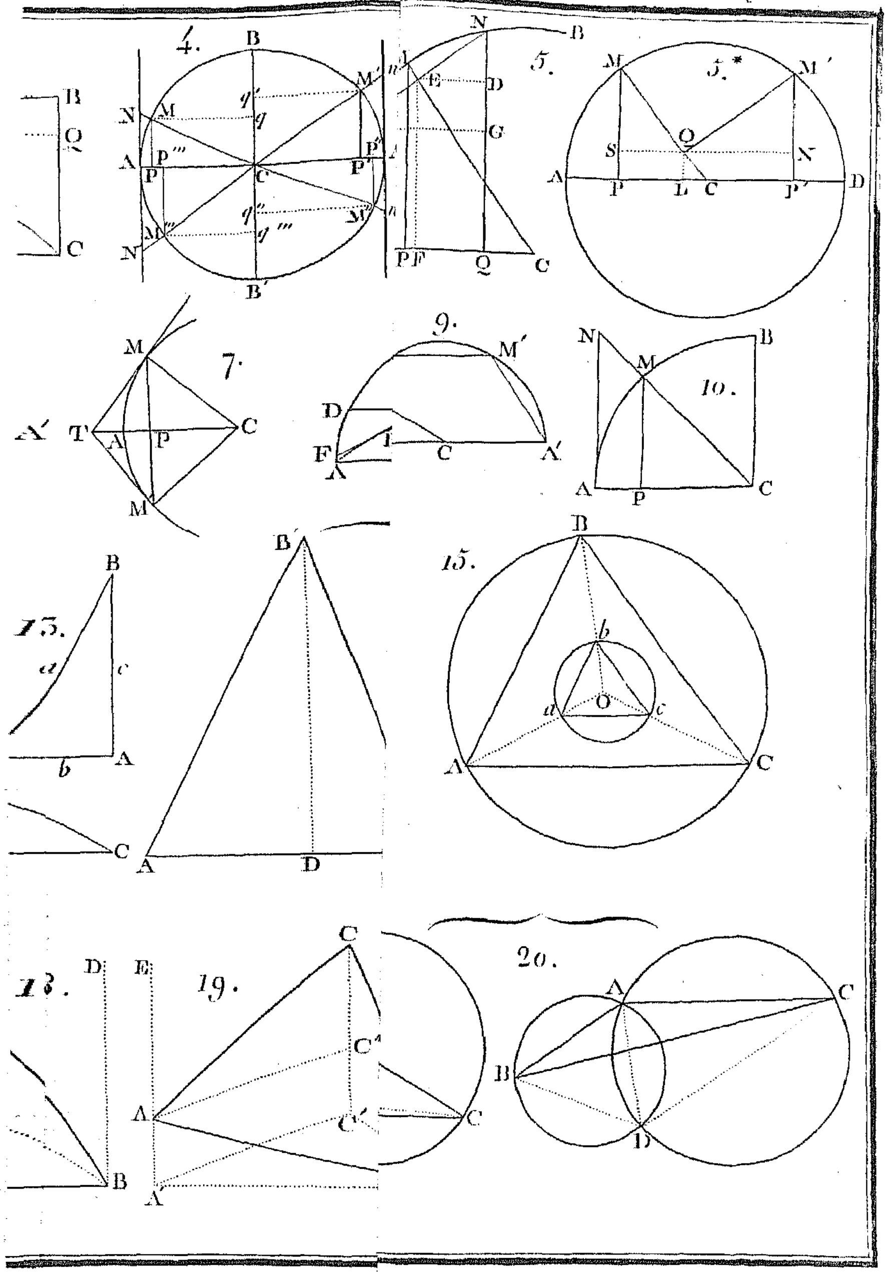
A la fig. 27 le falta una C.
A la 108 una A.
A la 117 una H.
En la fig. 43, donde está la R, debe estar la L, y al reves.

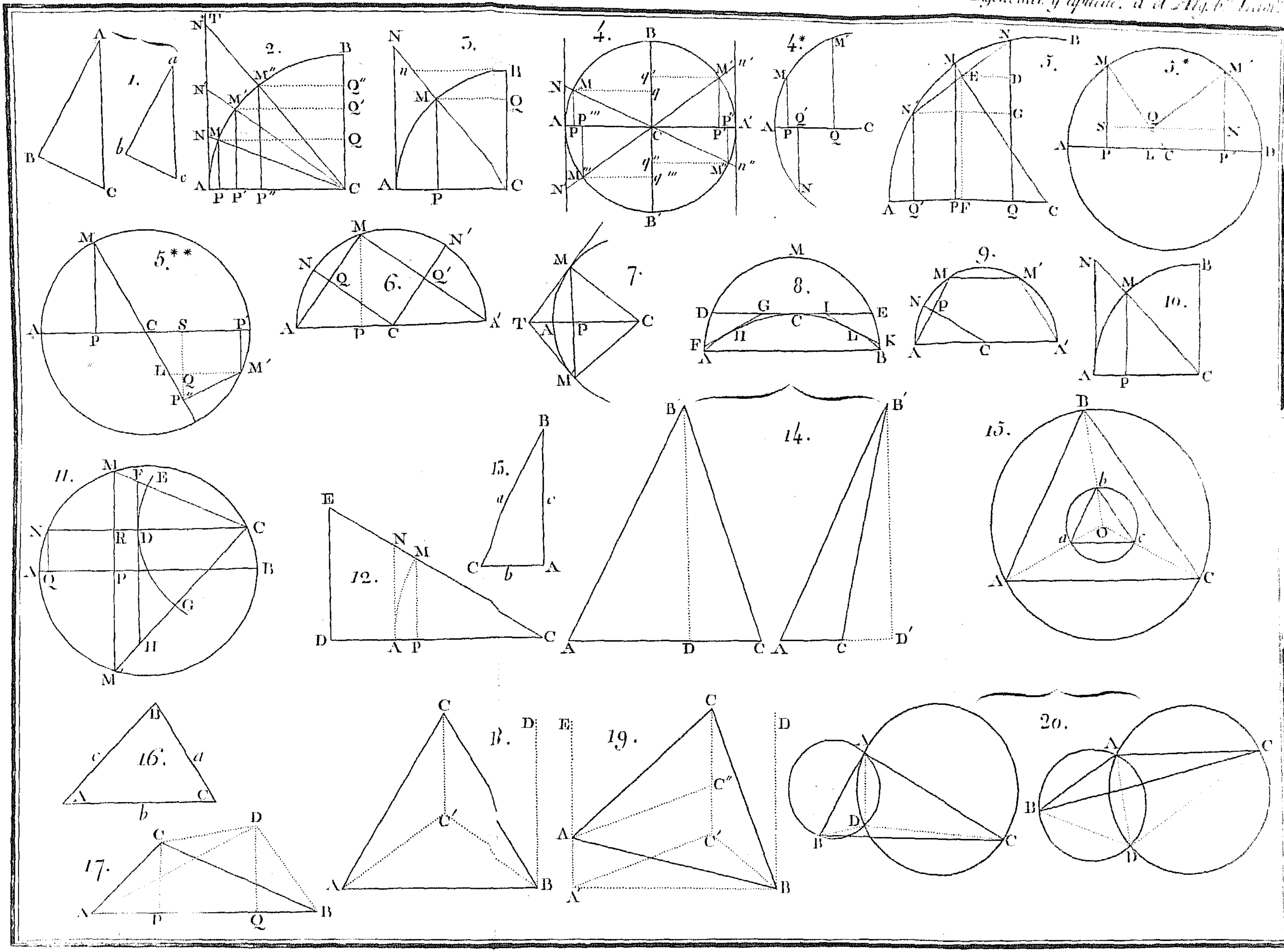
## ERRATAS DEL TOMO CUARTO.

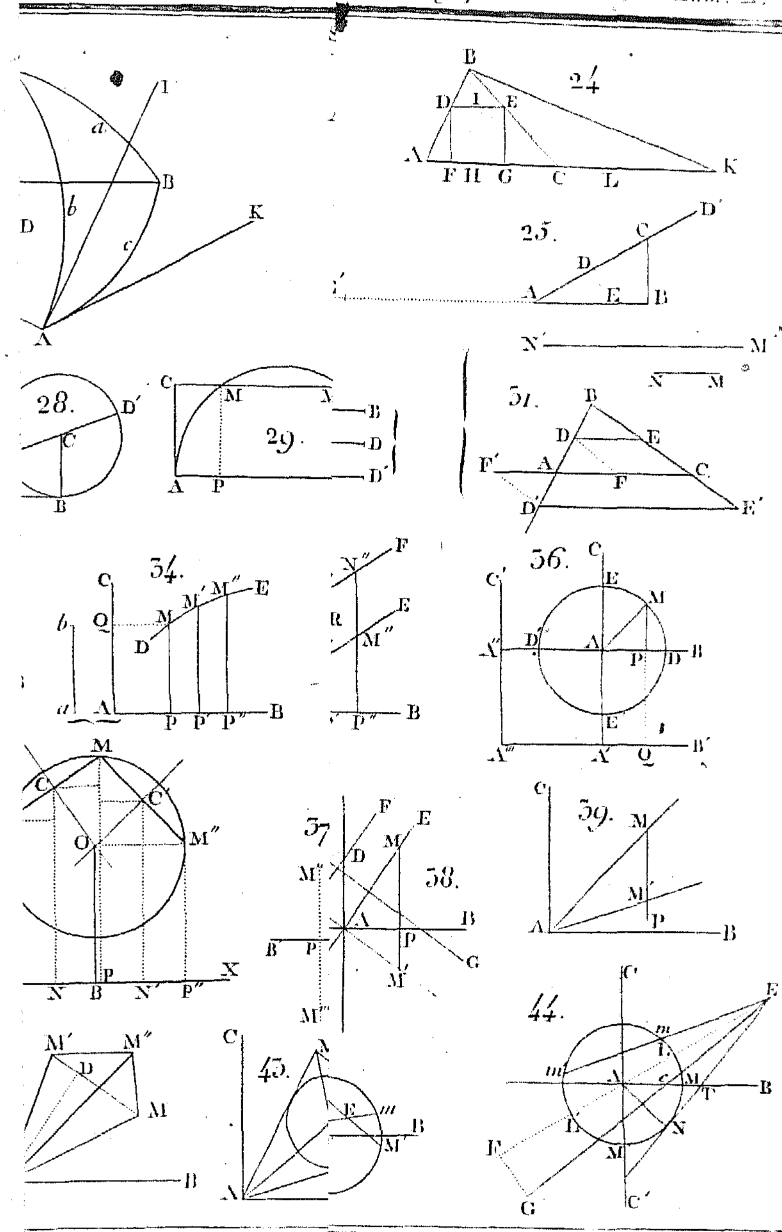
| Pág. | Lín. | Dice | Debe decir |
|---|---|---|---|
| 12. | 19. | $DN = NG$ | $DN = DG$. |
| 19. | 14. | Fig. 6 | Fig. 5. |
| 20. | 11. | $M'Q'$ | $MQ'$. |
| 48. | 25. | *c* | C. |
| 56. | 3. | ángulo *c* | ángulo C. |
| 58. | 1. | *c* | C. |
| 58. | 17. | comprendido *c* | comprendido C. |
| 60. | 13. | ó′ *l* sen. A | ó *l* sen. $\frac{1}{2}$ A. |
| 60. | 15. | 62°...52′...45,″18 | 125°..45′..30″,36. |
| 78. | 10. | + cos. A sen. *b* sen. cos. *c*... | + cos. A sen. *b* sen. *c* cos. *c*. |
| 102. | 1. | $\frac{1}{2}c''u = \frac{1}{4}\sqrt{4c^2c''^2-(c^2-t^2-c''^2)}$ | $\frac{1}{2}c''u\sqrt{4c^2c''^2-(c^2-c'^2-c''^2)}$. |
| 124. | 10. | $AF'''$ | $AF''$. |
| 124. | 22. | $D'F''A$ | $D''F''A$. |
| 125. | 7. | $\frac{(2a-m^2)}{a^2}z^2$ | $\frac{(2a-m^2)}{a^2}z$. |
| 181. | 12. | $4f^2+d^2=p$ | $4f+d^2=p$. |
| 181. | 18. | $Ac$ | $AC'$. |
| 184. | 21. | ordenadas$\frac{1}{4}$ | ordenadas. |
| 186. | 26. | $=\pm qn\sqrt{-m}$ | $=\pm qu\sqrt{-m}$. |
| 188. | 21. | $n'-a'$ | $u'-a'$. |
| 189. | 2. | $OO'$ | $OJ'$. |
| 190. | 8. | $\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}\sqrt{n^2-a^2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}\sqrt{u^2-a'^2}$. |
| 191. | 7. | $\left\{1-1+\frac{a'^2}{2n^2}+\frac{a^4}{8u^4}+\&\right\}$. | $\left\{1-1+\frac{a'^2}{2u^2}+\frac{a'^4}{8u^4}\right\}$. |
| 196. | 4. | á la forma la | á la forma. |
| 198. | 2. | $A'''P$ | $A'''p'$. |
| 198. | 11. | $\frac{QM}{p''M}=q$ | $\frac{QM}{p''M}=q$. |
| 198. | 14. | $p''Q=p\,.\,p''M$ | $p''q=pP''M$. |
| 198. | 19. | $Ap=A'''p+x$. | $AP=A'''P'+\alpha$. |
| 198. | 20. | $pM=p'M+B$ | $PM=P'M+\beta$. |
| 200. | 1. | tendrá | tendrán. |
| 200. | 15. | PM | $P'M$. |
| 200. | 18. | $P'M'$ | $P'M$. |
| 200. | 19. | $A''P'M$ | $A'''P'M$. |
| 201. | 11. | MP, B′ | $MP'B'$. |
| 201. | 11. | P′, G | $P'G$. |
| 201. | 14. | $m^2p^2=1-u^2-q^2+n^2q^2$... | $m^2p^2=1-n^2-q^2+n^2q^2$. |
| 201. | 15. | $n^2+q^3=1$ | $n^2+q^2=1$. |
| 201. | 15. | $mp=nq$ | $mp=-nq$. |
| 202. | 18. | $C''A'''C'''$ | $C'A'''C''$. |
| 202. | 25. | $=\frac{\text{sen.}\ (\pi-\delta}{\text{sen.}\ \pi}$ | $=\frac{\text{sen.}\ (\pi-\delta)}{\text{sen.}\ \pi}$. |
| 202. | 28. | $p=\frac{QM}{P''M}$ | $q=\frac{QM}{P''M}$. |
| 204. | 9. | $A'y^2$. | $Ay'^2$. |
| 204. | 9. | $(2AB+\beta\alpha+D)y$ | $(2AB+B\alpha+D)y'$. |
| 204. | 10. | $+E)x$ | $+E)x'$. |
| 204. | 10. | $A\beta$ | $A\beta^2$. |
| 207. | 9. | $C+A>\sqrt{(C-A^2+B^2}$.. | $C+A>\sqrt{(C-A)^2+B^2}$. |
| 208. | 23. | B | $B'$. |
| 208. | 16. | $A't^2+C'^2+2(A'\alpha'+Dn+Em)t$ | $A't'^2+C'u'^2+2(A'\alpha'+Dn+Em)t'$. |
| 208. | 25. | $\alpha$ y $B'$ | $\alpha'$ y $\beta'$. |
| 208. | 28. | $2A'\alpha$ | $2A'\alpha'$. |
| 208. | 29. | $(Dm+Eu)B'$ | $(Dm+En)\beta'$. |
| 209. | 7. | $2A'a'$ | $2A'\alpha'$. |
| 209. | 10. | $A't^2=E'u'$ | $A't'^2=E'u'$. |
| 209. | 16. | $2A'a^2$ | $2A'\alpha'^2$. |
| 209. | 17. | $A'\alpha^2$ | $A'\alpha'^2$. |
| 210. | 22. | $t=\pm\sqrt{\frac{F''-C'u^2}{A'}}$ | $t=\pm\sqrt{\frac{F'-C'u^2}{A'}}$. |
| 210. | 27. | sacaramos | sacaremos. |
| 211. | 23. | $At^2-C'u^2=-F'$ | $A't^2-C'u^2=-F'$. |
| 212. | 23. | $A''t'^2=0$ | $A't'^2=0$. |
| 214. | 14. | $x=x'+x, y=y'+B$ | $x=x'+\alpha, y=y'+\beta$. |
| 214. | 17. | En la margen falta poner Fig | 55. |
| 214. | 5. | $a^2=-D$ | $\alpha=-D$. |

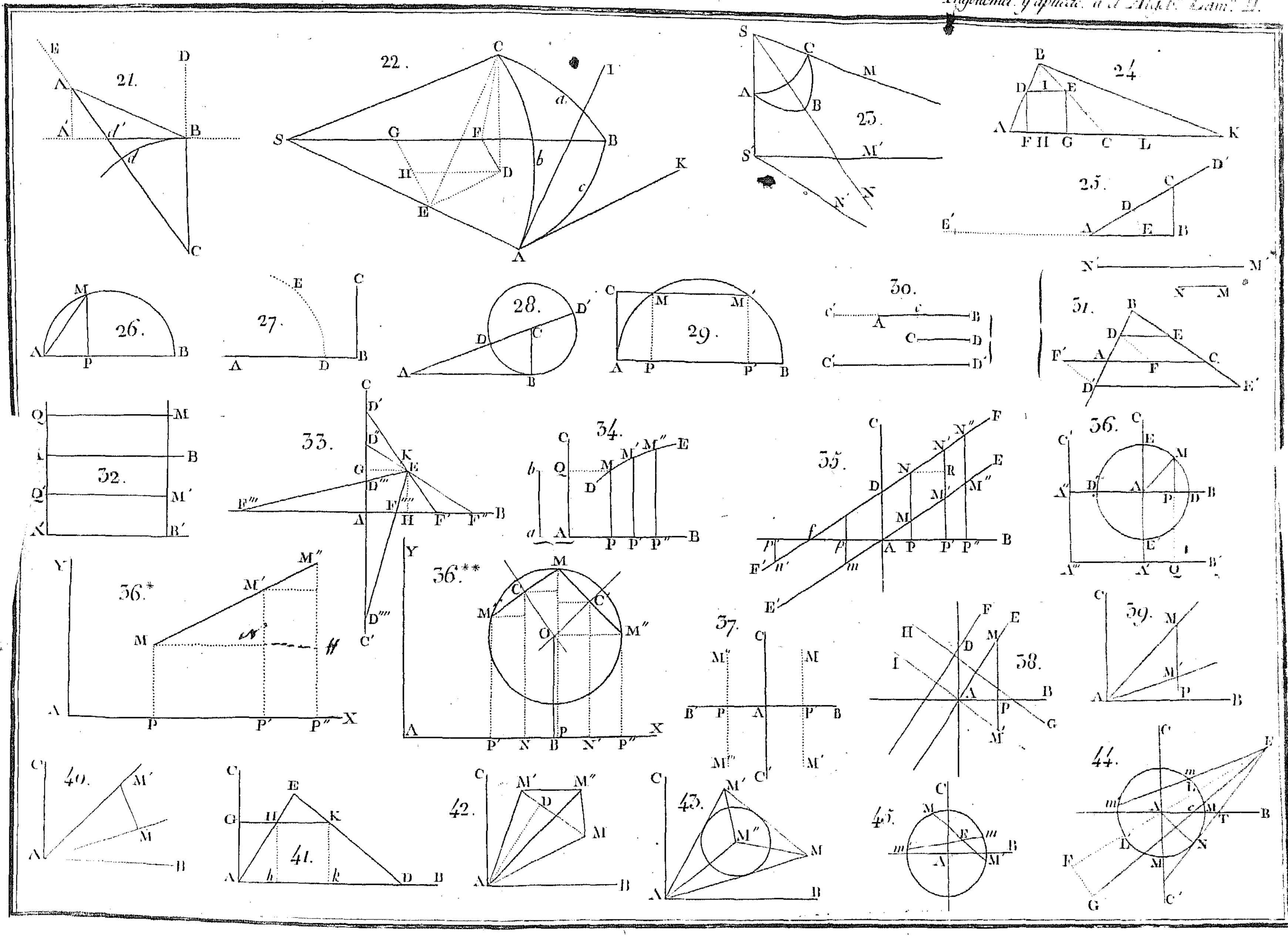
| Pág. | Lin. | Dice | Debe decir |
|---|---|---|---|
| 214. | 5. | B $=-$ E. | $\beta=-$ E. |
| 215. | 17. | OP $=x$PM $=y$. | OP $=x$, PM $=y$. |
| 215. | 18. | FP $=c-x$F′P $=c+x$. | FP $=c-x$, F′P $=c+x$. |
| 216. | 3. | $2a-<=$. | $2a-z=$. |
| 216. | 7. | $4a^2-4az^2+=$. | $4a^2-4az+z^2=0$. |
| 216. | 22. | $p$ é $y'$. | $x$ é $y$. |
| 219. | 3. | En la margen falta poner Fig. | 53. |
| 219. | 11. | $z^2=c^2-2cx+x^2y'^2$. | $z^2=c^2-2cx+x^2+y^2$. |
| 220. | 28. | En la margen falta poner Fig. | 54. |
| 222. | 29. | $A't^2+C'u'^2-E'u'=0$. | $A't'^2+C'u'^2-E'u'=0$. |
| 224. | 1. | $\frac{2b^2}{a^2}=P$. | $\frac{2b^2}{a^2}=p$. |
| 227. | 16. | $y=nt+qn$. | $y=nt+qu$. |
| 227. | 17. | $+pn$. | $+pu$. |
| 230. | 2. | $\frac{t^2}{b'^2}-\frac{u^2}{b'^2}=-1$. | $\frac{t^2}{b'^2}-\frac{u^2}{a'^2}=-1$. |
| 232. | 22. | F y H′. | F y H. |
| 232. | 24. | OF. | OE. |
| 235. | 23. | $b^2m^2p^2$. | $=b^4m^2p^2$. |
| 236. | 20. | cuadrado. | cuadrando. |
| 238. | 10. | $\frac{n^2=b^2(a^2-b^2)}{m^2a^2(b'^2-b^2)}$. | $\frac{n^2}{m^2}=\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2(b'^2-b^2)}$. |
| 241. | 2. | $\delta$. | $\varphi$. |
| 241. | 11. | $z=\frac{b^2}{a+\cos.\varphi}$. | $z=\frac{b^2}{a+c\cos.\varphi}$. |
| 242. | 21. | como. | cono. |
| 242. | 26. | cúspides. | cúspide. |
| 243. | 12. | C′O′S′. | C′O′S. |
| 243. | 14. | S′O′. | SO′. |
| 243. | 15. | A′O′S′. | A′O′S. |
| 243. | 16. | S′O′. | SO′. |
| 244. | 3. | $a$SB. | $a$S$b$. |
| 244. | 18. | E′J′P′. | E′J$p'$. |
| 249. | 9. | $\frac{(BA-\frac{1}{3}m-n\alpha)}{(A^2-n)A'}z^2$. | $\frac{(\beta A-\frac{1}{3}m-n\alpha)^2}{(A^2-n)A'}z$. |
| 249. | 20. | recta en cuestion no. | recta no. |

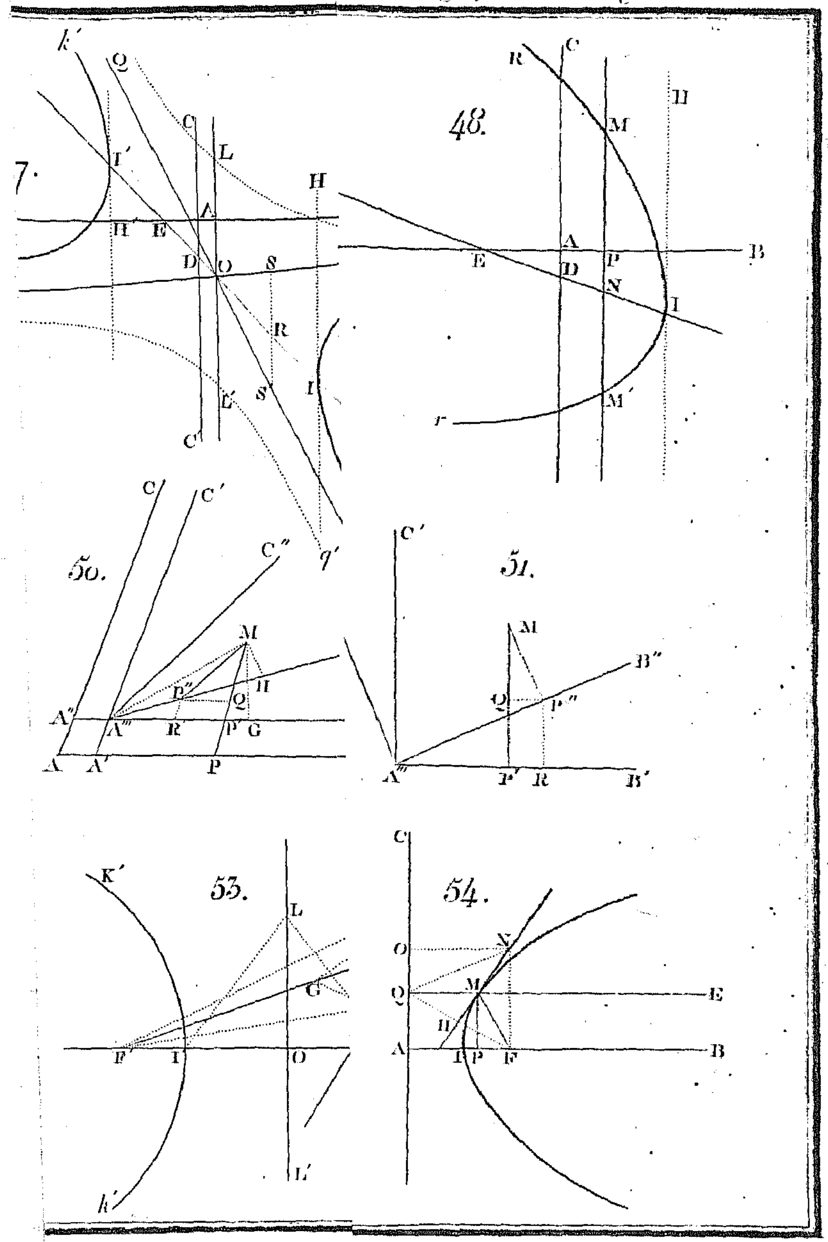


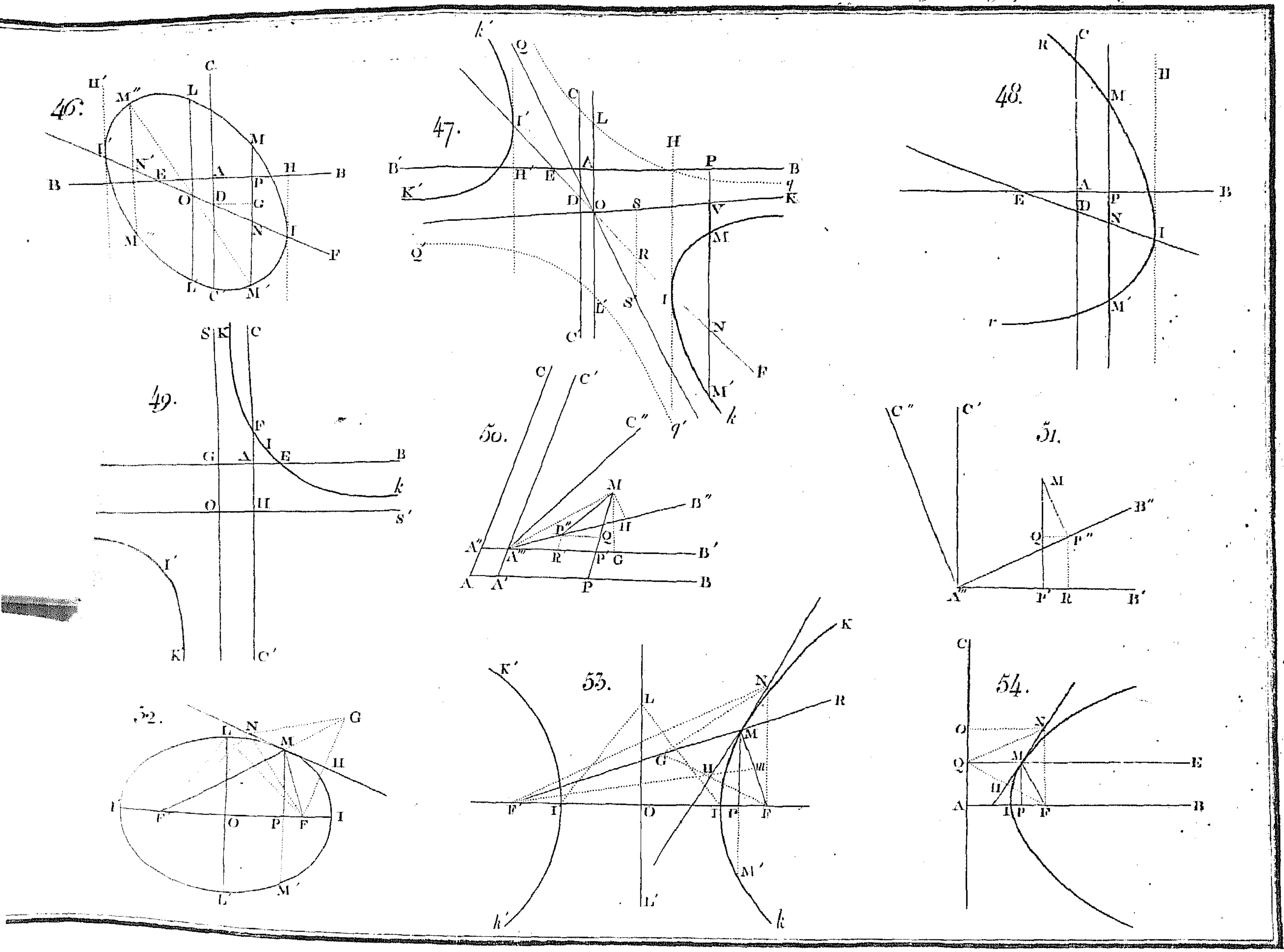


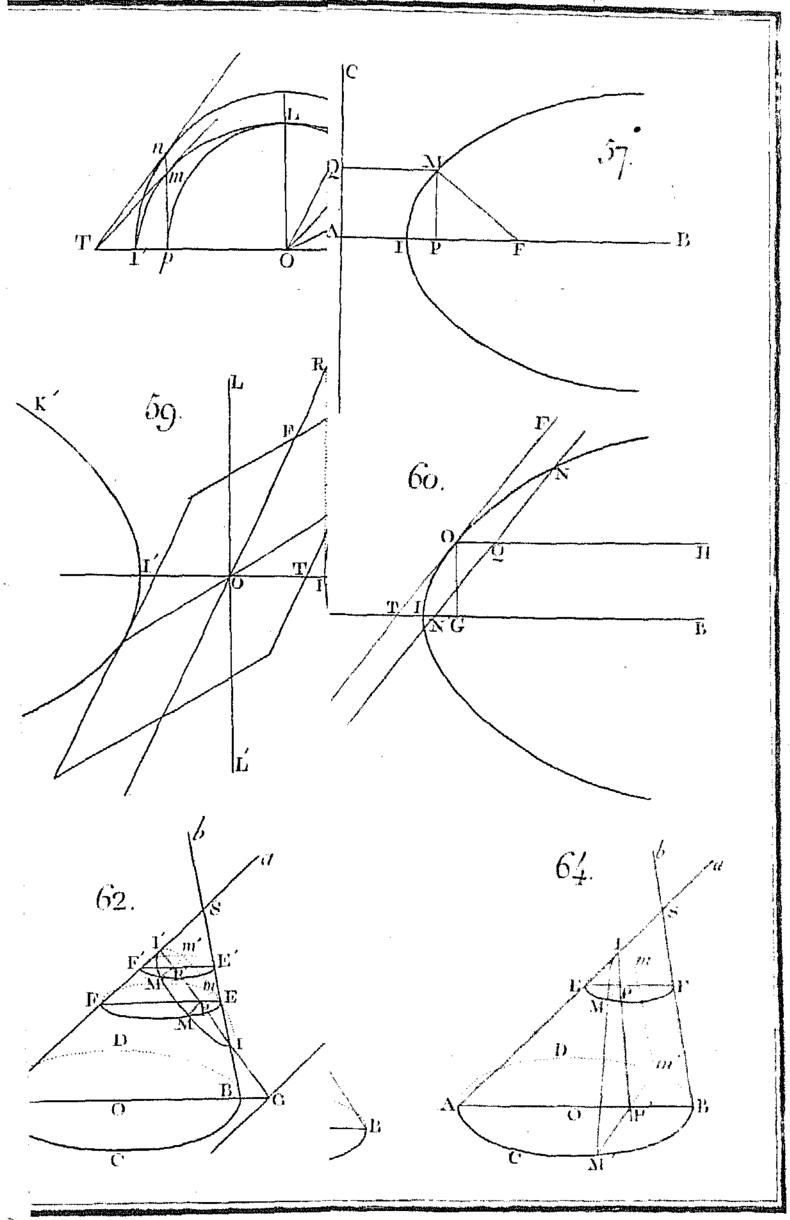

1.
2.
3.
4.
4*
5.
5.*
5.**
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.


24.
25.
28.
29.
31.
34.
36.
37
38.
39.
43.
44.

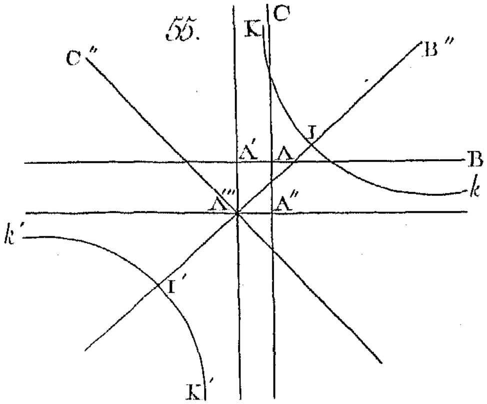

21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
36.*
36.**
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.


7.
48.
50.
51.
53.
54.

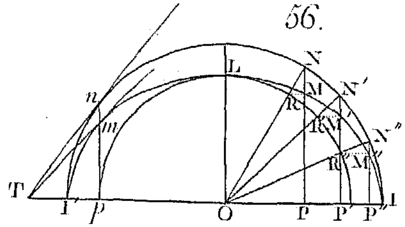

46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.


57.
59.
60.
62.
64.

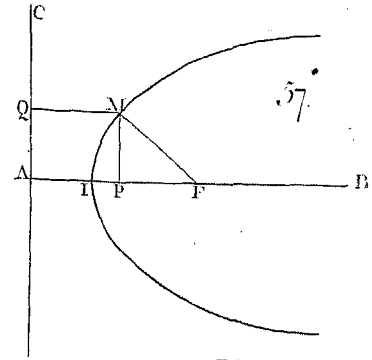
55.



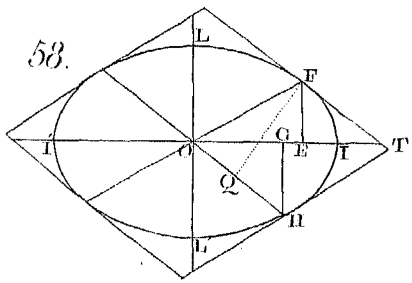
56.



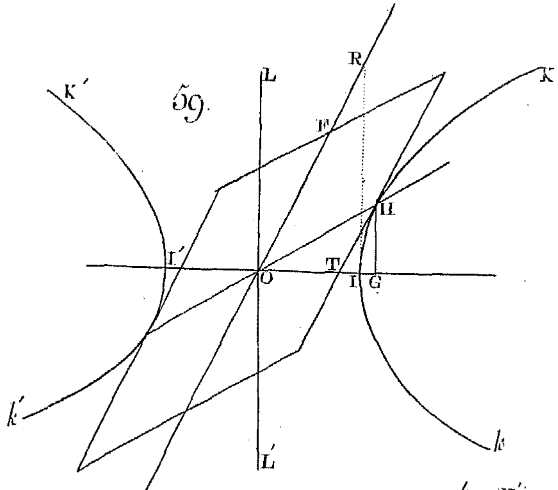
57.



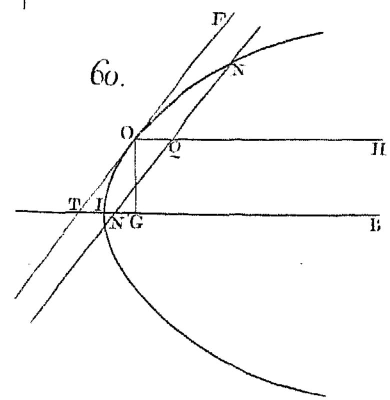
58.



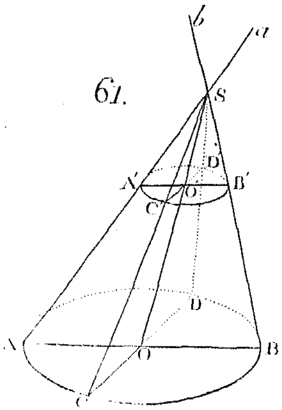
59.



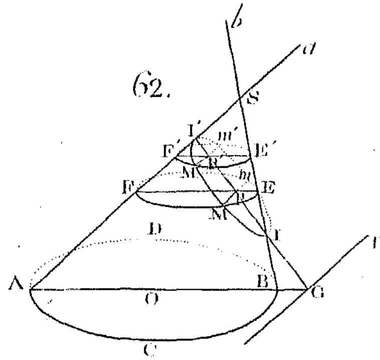
60.



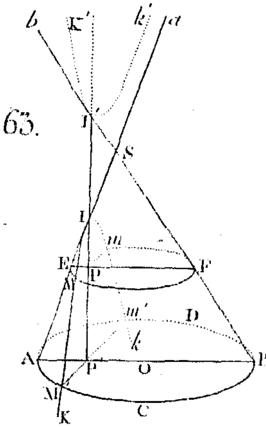
61.



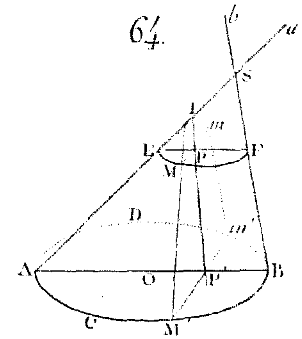
62.

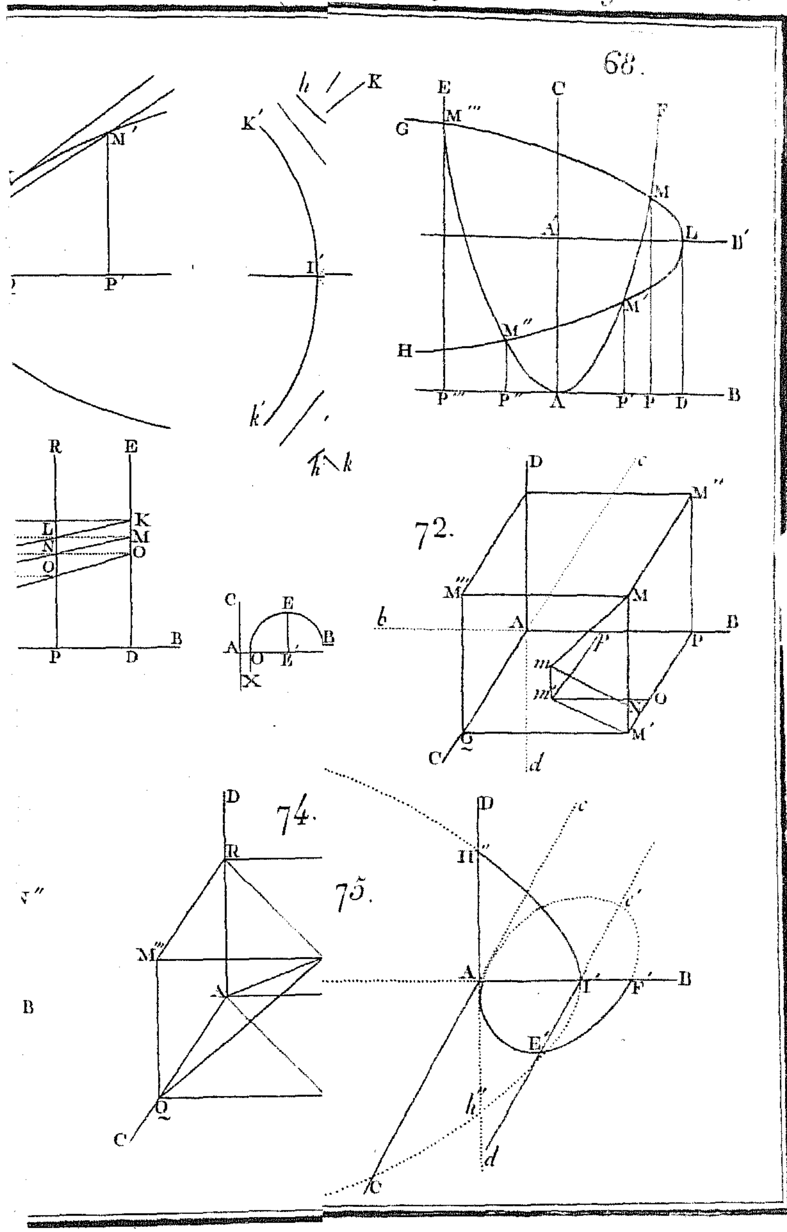


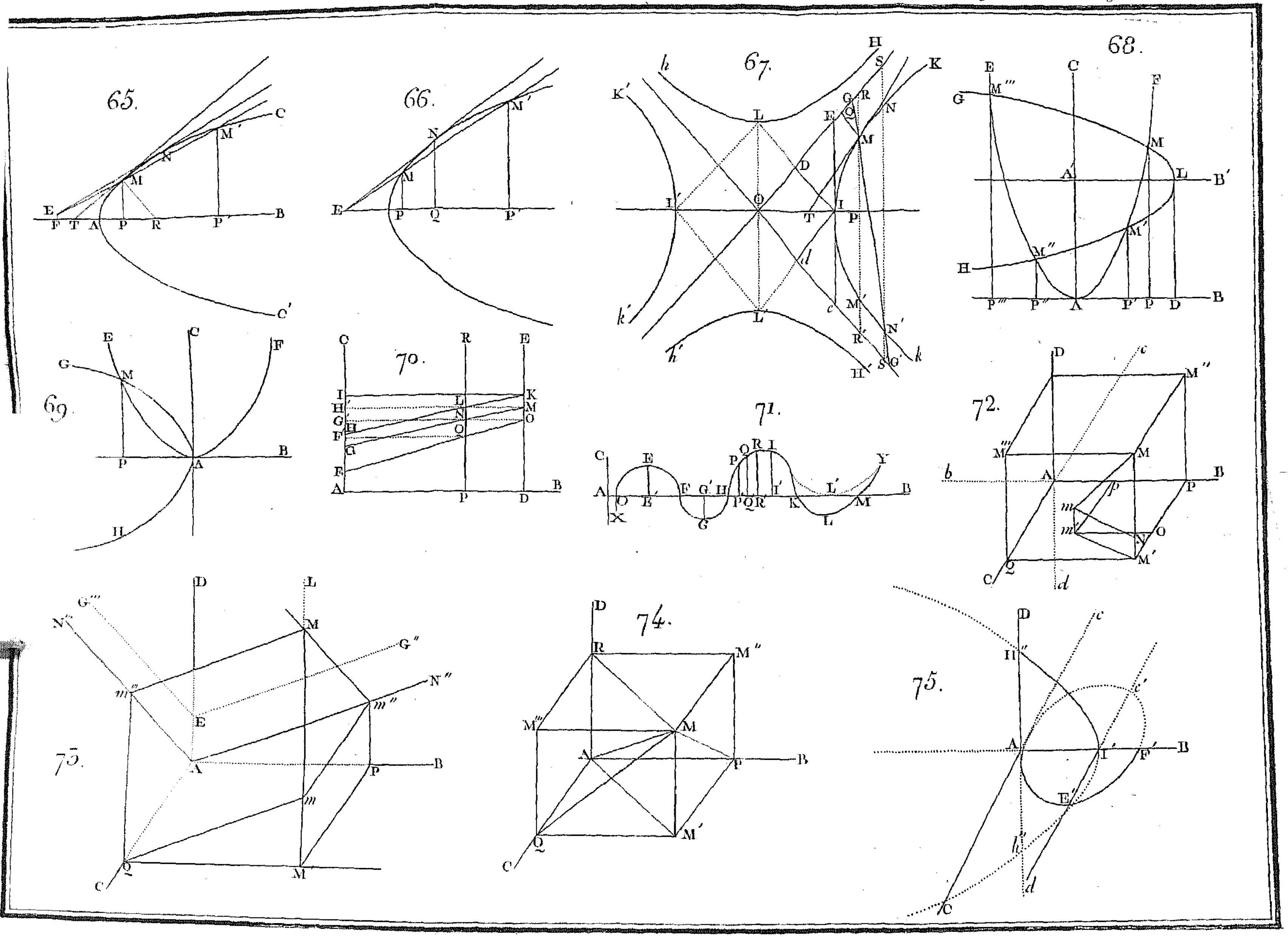
63.



64.




68.
72.
74.
75.


65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.