PROYECTO FIN DE CARRERA

TOMA DE DECISIÓN UTILIZANDO MEDIDAS DE SIMILITUD Y GRADOS DE COMPATIBILIDAD ENTRE CONJUNTOS INTUICIONISTAS DIFUSOS DE ATANASSOV

Departamento de Automática y Computación

Alumno: Timoteo Alejandro Miller Corona

Tutor: Francisco Javier Fernández Fernández

Pamplona, 26 de julio de 2011

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

TABLAS

ILUSTRACIONES

CAPÍTULO 1 - INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Desde su aparición en 1965 (Hajek, 2010), la lógica difusa ha sido utilizada para representar, de una manera más cercana a la realidad, el conocimiento. Este acercamiento a la realidad y a la semántica utilizada para representarla incrementó cuando se introdujo el concepto de conjunto intuicionista difuso de Atanassov (Atanassov, 1983). Este nuevo concepto daba la posibilidad de representar tanto el conocimiento como el desconocimiento, representado por las funciones de pertenencia, no pertenencia y el índice difuso intuicionista de Atanassov del conjunto.

Dada esta utilidad para representar el conocimiento, los conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov han sido utilizados para una gran variedad de aplicaciones. Algunas de ellas son: programación lógica, ayuda a la toma de decisión, diagnóstico médico, etc… (Szmidt & Kacprzyk, 2010)
En ocasiones es necesario comparar diferentes conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov para poder descubrir similitudes entre ellos. Un ejemplo de ello es la ayuda a la toma de decisión. Cada decisión es representada como un conjunto de alternativas de las cuales se ha de escoger la mejor. Todas estas alternativas cumplen una serie de criterios comunes a todas ellas. Mediante encuestas a expertos, se puede averiguar el grado de pertenencia y no pertenencia de cada criterio en cada una de las alternativas. Una vez obtenidos estos valores, las alternativas de cada decisión han de ser comparadas de alguna manera, siendo las medidas de correlación y similitud utilizadas para ello. Una manera de realizar la comparación de las alternativas consiste en comparar todas las alternativas con un conjunto constante. Este conjunto constante tiene que representar la mejor alternativa posible, de tal manera que si alguna de las alternativas es igual a este conjunto, esa es la mejor. En el caso de que no sea así, se elegirá la que mayor grado de similitud o correlación tenga con este conjunto constante.

A lo largo del tiempo han surgido varias maneras diferentes para calcular las similitudes o correlaciones entre conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov. Una de las primeras maneras (Gerstenkorn & Mańko, 1991), representó la correlación entre dos conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov mediante la suma de los productos de las pertenencias y las no pertenencias.

Recientes estudios han presentado nuevas técnicas de ayuda a la toma de decisión, donde las alternativas están representadas por conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov y la importancia relativa (pesos) de los criterios por números difusos. Se puede dar el caso de que en algunos procesos de ayuda a la toma de decisiones se desconoce la importancia relativa de los criterios. Esta circunstancia impide la aplicación de estas nuevas técnicas (Ye, 2010).

En el trabajo de Jun Ye (Ye, 2010) se propone una técnica para solucionar al problema mencionado. Esta técnica utiliza el coeficiente de correlación de dos conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov, utilizando la entropía como peso. La entropía es utilizada para obtener los pesos de los criterios cuando se desconocen sus valores.

Aunque este trabajo se centrará en esta técnica de cálculo de pesos también existen otras maneras de obtener los valores de los pesos. Una de estas técnicas es la basada en la compatibilidad de dos conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov.

1.2. Propósito

En este proyecto estudiaremos distintas metodologías empleadas a la hora de ayudar a la toma de decisión. Las metodologías tratadas en este trabajo se basan en dos procedimientos distintos a la hora de ordenar las alternativas de cada decisión, siendo estos la similitud y la correlación entre conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov. Especial importancia tiene la metodología expuesta en el trabajo de (Ye, 2010), ya que el objetivo final es que consigamos una mejora en los resultados obtenidos mediante ese método.

La primera parte de este proyecto consistirá de la explicación, implementación y ejecución de distintas metodologías para la ayuda a la toma de decisión. Se debe tener en cuenta que dado que algunas de estas metodologías requieren de pesos en los criterios de las alternativas, también expondremos distintas técnicas para el cálculo de estos pesos.
La ejecución de todas las combinaciones posibles de técnicas de cálculo de pesos y metodologías de ordenación serán realizadas con dos casos ejemplo obtenidos del trabajo de (Ye, 2010).

Una vez obtenidos los resultados para cada una de las distintas metodologías de ayuda a la toma de decisión, procederemos a un análisis de los resultados obtenidos. En este análisis expondremos los patrones que se observan en las metodologías de ordenación de alternativas y en las técnicas de cálculo de pesos. Resaltaremos las clasificaciones que coincidan con las obtenidas en el método de (Ye, 2010).

Una vez analizados los métodos expuestos, pasaremos al estudio de la bi-entropía. Mediante este concepto mejoraremos el método expuesto en el trabajo de (Ye, 2010).
Con el fin de demostrar la mejora obtenida, presentaremos dos casos en los que no se puede diferenciar las dos mejores alternativas mediante el método de (Ye, 2010), pero, al añadir el concepto de bi-entropía si se podrá.

Finalmente exhibiremos las conclusiones obtenidas de la aplicación del concepto de la bi-entropía, resaltando sus futuras aplicaciones.

1.3. Estructura del Proyecto

El proyecto está dividido en seis partes muy diferenciadas que concuerdan con cada uno de los capítulos. El contenido de cada uno de los capítulos será expuesto a continuación:

CAPÍTULO 1 -Introducción: En esta sección introduciremos el tema tratado en este proyecto, así como la idea general del propósito del mismo.

CAPÍTULO 2 -Preliminares: Este capítulo contendrá todas las definiciones necesarias para entender, tanto las técnicas de cálculo de pesos como los métodos de ordenación de alternativas tratados en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 3 -Métodos: Las distintas técnicas empleadas para el cálculo de pesos serán tratadas en la primera mitad de esta sección. Una vez explicadas estas técnicas pasaremos a la exposición de los distintos métodos utilizados para la ayuda a la toma de decisión.

CAPÍTULO 4 -Resultados: En este apartado aplicaremos los métodos expuestos en el anterior capítulo a dos casos ejemplos obtenidos del trabajo de (Ye, 2010). Una vez obtenidos los resultados realizaremos su análisis.

CAPÍTULO 5 -Bi-entropía: El concepto de la bi-entropía será expuesto en esta sección. Para ello, previamente daremos unos conceptos básicos necesarios para la definición de la bi-entropía.

CAPÍTULO 6 -Conclusiones: Finalmente presentaremos las conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo de este proyecto, así como las aplicaciones futuras del concepto de la bi-entropía.

CAPÍTULO 2 - PRELIMINARES

2.1. Introducción

En la introducción, hemos explicado a grandes rasgos la idea general que tratamos en este proyecto. En este capítulo expandimos ese trasfondo pero entraremos en más detalle en los aspectos teóricos que son utilizados a lo largo de este proyecto. No todos los aspectos tratados en esta sección son necesarios para todas las metodologías pero en algunas de ellas sí son necesarios.

Los conceptos básicos para la comprensión de las metodologías expuestas son introducidos en el apartado de conceptos básicos donde explicamos, en primer lugar, los conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov y sus propiedades.

Después de eso, presentamos las negaciones difusas, presentes en algunas metodologías.

A continuación introducimos los operadores de agregación, los cuales, tienen una gran importancia a la hora de crear medidas de similitud mediante funciones de equivalencia restringida (REF).

Posteriormente describimos el concepto de correlación, extraído del campo de la estadística, aplicándola a conjuntos difusos. Varios de los métodos analizados se basan en este concepto a la hora de ordenar las alternativas. La correlación, en estadística, sirve para medir la fuerza y dirección de la relación lineal entre dos variables. (Bustince & Burillo, 1995)
El atributo de la fuerza indica las similitudes entre las variaciones de las dos variables sobre las que se calcula la correlación. Existe una correlación fuerte si cada vez que aumentan o disminuyen los valores de una variable los de la otra lo hacen de igual manera. En contraposición, una correlación es débil si existe una tendencia, en las dos variables, a aumentar o disminuir al mismo tiempo, no siempre coincidiendo. También se puede dar el caso de que las variaciones en las variables no sean de la misma magnitud.
En cambio, la dirección de la correlación mide la variación de los valores de una variable respecto a otra. La dirección puede ser positiva o negativa. En el caso de la dirección positiva, los aumentos o disminuciones de los valores son reflejados de

manera idéntica en la otra variable. Esto es, si una variable tiene tendencia a crecer, la otra variable también tendrá tendencia a crecer. Este mismo concepto es aplicable a los decrecimientos.
En cambio, en una correlación negativa los aumentos o disminuciones en las variables son reflejados, en la otra variable, por sus contrarios. Esto quiere decir que cuando una variable tiene tendencia a crecer, la otra tendrá tendencia a decrecer y viceversa. (Escuela andaluza de salud pública, 2010)

Tras la correlación introducimos el concepto de similitud entre conjuntos difusos. Esta idea representa lo parecidos que son dos conjuntos difusos. (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2007)

Por último describimos la definición de las funciones de equivalencia restringida, que juegan un papel muy importante en la creación de medidas de similitud. Las REF sirven para comparar dos conjuntos difusos. (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2008)

2.2. Conceptos básicos

2.2.1. Conjunto intuicionista difuso de Atanassov

El concepto de conjunto intuicionista difuso de Atanassov (A-IFS) fue introducido por Atanassov (Atanassov, 1983), como una generalización del concepto de conjunto difuso de Zadeh. Un conjunto intuicionista difuso A tiene la siguiente estructura sobre el universo X:

$$A = \left(\left(x, \mu_A(x), \nu_A(x)\right), x \in X\right)$$

donde μ_A, ν_A: X $\rightarrow$ [0,1], representan, respectivamente, el grado de pertenencia y no pertenencia del elemento x al conjunto intuicionista A. Además, se cumple que $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ para todo x ∈ X.

DEFINICIÓN: Definimos la entropía del elemento x perteneciente al conjunto intuicionista de Atanassov A como:

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$$

donde $\pi_A(x)$ representa el grado de intuicionismo del conjunto, es decir, la falta de información en la construcción de los grados de pertenencia y no pertenencia, cumpliendo $0 \leq \pi_A(x) \leq 1$ para todo x ∈ X.

PROPOSICIÓN: Dado un conjunto intuicionista difuso de Atanassov, A, si $\nu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$ se tiene que $\pi_A(x) = 0$ entonces A es un conjunto difuso normal.

2.2.1.1. A-IFS(X)

NOTACIÓN: Denotamos como A-IFS(X) al conjunto de todos los conjuntos difusos definidos en el referencial finito y no vacío X (el cardinal de X es n).

2.2.1.2. Orden entre conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov

DEFINICIÓN: Sean A y B ∈ A-IFS(X). Se dice que A < B si $\mu_A(i) < \mu_B(i)\ \ y\ \ \nu_A(i) > \nu_B(i)\ para\ todo\ i: 1 \dots n$.

Por contrapartida se tiene que A > B si $\mu_A(i) > \mu_B(i)\ \ y\ \ \nu_A(i) < \nu_B(i)\ para\ todo$ $i: 1 \dots n$.

Esta relación de orden extiende la habitual entre difusos. Debemos tener en cuenta que esta relación de orden entre conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov es sólo parcial, ya que existen algunos conjuntos que no son comprables.

EJEMPLO:

Sea $A = (x_1, 0.5, 0.5)$ y $B = (x_1, 0.25, 0.25)$. Observamos que $\mu_A(x) > \mu_B(x)$ pero como $\nu_A(x) > \nu_B(x)$ y teniendo en cuenta la definición de orden entre conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov, no podemos saber qué conjunto es mayor.

2.2.1.3. Entropía de un conjunto intuicionista difuso de Atanassov

DEFINICIÓN: Denotamos como la entropía de un conjunto intuicionista difuso de Atanassov a una función E: A-IFS(X) → [0,1] tal que cumple las siguientes propiedades (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2008):

1. $E(A) = 0 \text{ si y sólo si } A \text{ es no difuso}.$
2. $E(A) = 1 \text{ si y sólo si } A = \{x, \mu_A(x) = e \mid x \in X\} \text{ siendo } e \text{ el punto de equilibrio de la negación fuerte considerada}.$
3. $E(A) \leq E(B) \text{ si } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ cuando } \mu_B(x) \leq e \text{ y } \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \text{ cuando } \mu_B(x) \geq e.$
4. $E(A) = E\big(N(A)\big) \text{ siendo } N \text{ una negación fuerte}.$
5. $E\big(max(A, B)\big) + E\big(min(A, B)\big) = E(A) + E(B).$

La entropía de un conjunto intuicionista difuso de Atanassov mide lo desordenado que es un conjunto difuso.

Un ejemplo de entropía de un conjunto intuicionista de Atanassov se puede ver a continuación (Burillo & Bustince, 1996):

$$E(A) = \sum_{i=1}^{n} \pi_A(x_i)$$

2.2.2. Automorfismos

DEFINICIÓN: Una función φ: [0,1] → [0,1] decimos que es un automorfismo si cumple las siguientes propiedades:

1. $Es\ continua\ en\ [0,1]$.
2. $Es\ estrictamente\ creciente\ en\ [0,1]$.
3. $\varphi(0) = 0$.
4. $\varphi(1) = 1$.

2.2.3. Negaciones difusas

DEFINICIÓN: Sea *N*: [0,1] → [0,1]. *N* es una negación difusa si:

1. $N(0) = 1\ y\ N(1) = 0$.
2. $N(x) \leq N(y), si\ x \geq y\ (monotonía)$.

Una negación difusa es estricta, si además de las anteriores propiedades cumple las siguientes:

3. $N(x)\ es\ continua$.
4. $N(x) < N(y),\ para\ todo\ x > y\ con\ x, y \in [0,1]$.

Una negación difusa es involutiva si cumple la siguiente propiedad:

5. $N\big(N(x)\big) = x,\ para\ todo\ x \in [0,1]$.

Si una negación difusa es estricta e involutiva, entonces decimos que es una negación fuerte. Además de ello, si una negación es estricta entonces es involutiva. Está demostrado que una negación fuerte tiene un único punto de equilibrio *e*, tal que $N(e) = e$.

Para obtener más información relacionada con este tema consúltese el artículo (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2008)

2.2.3.1. Construcción de negaciones fuertes

DEFINICIÓN: Una función *N*: [0,1] → [0,1] es una negación fuerte si y sólo si existe un automorfismo φ en el intervalo [0,1] tal que:

$$N(x) = \varphi^{-1}\big(1 - \varphi(x)\big)$$

Para obtener más información relacionada con este tema consúltese el artículo (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2008)

EJEMPLOS:

1. Sea el automorfismo dado por $\varphi(x) = x$ con ello $\varphi^{-1}(x) = x$. Entonces se obtiene la siguiente negación fuerte: $N(x) = 1 - x$
2. Sea el automorfismo dado por $\varphi(x) = x^2$ con ello $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Entonces se obtiene la siguiente negación fuerte: $N(x) = \sqrt{1 - x^2}$
3. Sea el automorfismo dado por $\varphi(x) = \sqrt{x}$ con ello $\varphi^{-1}(x) = x^2$. Entonces se obtiene la siguiente negación fuerte: $N(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$

2.2.4. Operadores de agregación

Un operador de agregación es una función matemática que combina un conjunto de valores, obteniendo como resultado un único valor que los representa. De forma genérica se tiene que:

DEFINICIÓN: Decimos que la función M: $[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ con $n \geq 2$ es un operador de agregación si cumple las siguientes propiedades:

1. $M(0, \ldots, 0) = 0$.
2. $M(1, \ldots, 1) = 1$.
3. $Para\ cualquier\ par\ (x_1, \ldots, x_n)\ y\ (y_1, \ldots, y_n)\ de\ n - tuplas\ tal\ que\ \ x_i, y_i \in [0,1]\ para\ todo\ i \in \{1, \ldots, n\}, si\ x_i \leq y_i\ para\ todo\ i \in \{1, \ldots, n\},$ $entonces: M(x_1, \ldots, x_n) \leq M(y_1, \ldots, y_n)$.

A lo largo de este documento utilizaremos la siguiente definición de operador de agregación:

DEFINICIÓN: Un operador de agregación es una función M: $[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ con $n \geq 2$ tal que satisface, al menos, las siguientes propiedades:

1. $M(x_1, \ldots, x_n) = 0\ si\ y\ sólo\ si\ x_i = 0\ para\ todo\ i \in \{1, \ldots, n\}$.
2. $M(x_1, \ldots, x_n) = 1\ si\ y\ sólo\ si\ x_i = 1\ para\ todo\ i \in \{1, \ldots, n\}$.
3. $Para\ cualquier\ par\ (x_1, \ldots, x_n)\ y\ (y_1, \ldots, y_n)\ de\ n - tuplas\ tal\ que\ \ x_i, y_i \in [0,1]\ para\ todo\ i \in \{1, \ldots, n\}, si\ x_i \leq y_i\ para\ todo\ i \in \{1, \ldots, n\},$ $entonces: M(x_1, \ldots, x_n) \leq M(y_1, \ldots, y_n)$.

4. $M\ es\ una\ función\ simétrica\ en\ todos\ sus\ argumentos\ \left(M(x_1, \dots, x_n) = M\left(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}\right)\right)\ para\ cualquier\ permutación\ p\ en\ \{1, \dots, n\}$.

Obsérvese que esta definición es más estricta que la anterior.
Para obtener más información relacionada con este tema consúltese el artículo (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2008)

2.2.5. Correlación entre conjuntos difusos

El término de correlación es un concepto muy utilizado en estadística e ingeniería. Mediante el análisis de la correlación se puede examinar la relación de dos variables, con la ayuda de la medida de interdependencia (asociación entre ellas). Existen algunos casos que en vez de utilizar valores cuantitativos, se deben utilizar valores cualitativos para obtener la correlación entre las distintas entidades. En estos casos se pueden ordenar esas entidades en rangos, según la calidad de la información que se tiene de ellos (Chaudhuri & Bhattacharya, 2001).
Un caso especial surge cuando existe una valoración subjetiva de las entidades en vez de rangos. En este caso especial, se pueden formar conjuntos difusos con las valoraciones con el fin de comparar los valores de pertenencia de cada entidad a los conjuntos difusos. (Chaudhuri & Bhattacharya, 2001).
Un ejemplo de este caso es un sistema de ayuda a diagnosticar pacientes. El estado de salud que podría ser devuelto por el sistema, podría categorizar la enfermedad que sufre el paciente según los siguientes estados: sano, leve, moderado, grave y muy grave. Estos estados corresponderían a franjas de valores de una variable difusa que representa el estado de salud del paciente.

Dado que la medida de correlación será utilizada para la ordenación de algunas alternativas en este trabajo, se definirá a continuación.

DEFINICIÓN: La correlación, C, entre dos conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov es una función C: A-IFS(X) x A-IFS(X) → [0,1] tal que:

1. $C(A, B) = C(B, A)$.
2. $C(A, B) = \begin{cases} 0\ si\ A \neq B \\ 1\ si\ A = B \end{cases} siendo\ A, B\ no\ difusos$.

para todo A, B ∈ A-IFS(X). Se debe tener en cuenta que el valor "*crisp*" obtenido por la correlación está comprendido entre 0 y 1, inclusive.

2.2.6. Similitud entre conjuntos difusos

DEFINICIÓN: Sea una relación S: A-IFS(X) x A-IFS(X) → [0,1]. Decimos que S(A, B) es un grado de similitud entre A ∈ A-IFS(X) y B ∈ A-IFS(X) si cumple las siguientes propiedades:

1. $S(A,B) = S(B,A)$.
2. $S(A,N(A)) = 0 \; para \; todo \; A \in A - IFS(X), siendo \; N \; una \; negación \; difusa$.
3. $S(A,A) = 1 \; para \; todo \; A \in A - IFS(X)$.
4. $Para \; todo \; A,B,C,D \in A - IFS(X) \; si \; A \leq B \leq C \leq D \; entonces \; S(A,D) \leq S(B,C)$.

Una medida de similitud es llamada medida de proximidad si cumple la siguiente propiedad:

5. $S(A,B) = S(N(A),N(B)) \; con \; N(A) \; y \; N(B) \; las \; negaciones \; difusas \; de \; A \; y \; B$.

La similitud representa lo parecidos que son dos conjuntos difusos.

Para obtener más información relacionada con este tema consúltese el artículo (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2008)

2.2.7. Funciones de equivalencia restringida

DEFINICIÓN: Una función REF: $[0,1]^2$ → [0,1] es una función de equivalencia restringida asociada a una negación fuerte *N*, si cumple las siguientes propiedades:

1. $REF(x,y) = REF(y,x) \; para \; todo \; x,y \; \in \; [0,1]$.
2. $REF(x,y) = 1 \; si \; y \; sólo \; si \; x = y$.
3. $REF(x,y) = 0 \; si \; y \; sólo \; si \; x = 1 \; e \; y = 0 \; ó \; x = 0 \; e \; y = 1$.
4. $REF(x,y) = REF(N(x),N(y)) \; para \; todo \; x,y \in [0,1]$, $siendo \; N \; una \; negación \; fuerte$.
5. $Para \; todo \; x,y,z \in [0,1], si \; x \leq y \leq z \; entonces \; REF(x,y) \geq REF(x,z) \; y \; REF(y,z) \geq REF(x,z)$.

Las REF sirven para comparar dos conjuntos difusos.
Para obtener más información relacionada con este tema consúltese el artículo (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2008)

2.2.7.1. Construcción de REF

PROPOSICIÓN: Sean φ_1 y φ_2 dos automorfismos, entonces se tiene que la siguiente función es una REF:

$$REF(x,y) = {\varphi_1}^{-1}(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|)$$

con *N* la negación fuerte dado por $N(x) = {\varphi_2}^{-1}\big(1 - \varphi_2(x)\big)$.

Para obtener más información relacionada con este tema consúltese el artículo (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2006)

EJEMPLOS:

1. Sea $\varphi_1(x) = x$ y $\varphi_2(x) = x$. La REF formada a partir de estos dos automorfismos sería: $REF(x,y) = 1 - |x - y|$
2. Sea $\varphi_1(x) = x^2$ y $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$. La REF formada a partir de estos dos automorfismos sería: $REF(x,y) = \sqrt{1 - \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|}$

2.2.7.2. Construcción de medidas de similitud

PROPOSICIÓN: Sea M: $[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ tal que cumpla las propiedades 1, 2 y 3 de los operadores de agregación y REF: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ una función de equivalencia restringida. Entonces:

$$SM: A - IFS(X) \times A - IFS(X) \rightarrow [0,1], dado\ por$$

$$SM(A,B) = M_{i=1}^{n} REF\big(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)\big)$$

$es\ una\ medida\ de\ proximidad\ de$ (Fan & Xie, 1999).

Para obtener más información relacionada con este tema consúltese el artículo (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2008)

EJEMPLOS:

1. Dada la siguiente $REF(x,y) = 1 - |x - y|$ y el operador de agregación de la media aritmética: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, obtenemos la siguiente medida de similitud: $SM(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 - |\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)|)$

2. Dada la siguiente $REF(x, y) = 1 - |x - y|$ y el operador de agregación de la media aritmética: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, obtenemos la siguiente medida de similitud: $SM(A, B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1 - \left|\sqrt{\mu_A(u_i)} - \sqrt{\mu_B(u_i)}\right|}\right)$

CAPÍTULO 3 - MÉTODOS

3.1. Introducción

Una vez introducidos los conceptos básicos necesarios, en el anterior capítulo, pasaremos a la explicación de los métodos empleados en el proyecto.

En este capítulo explicaremos los distintos métodos utilizados para la ayuda a la toma de decisión. Dado que algunos métodos utilizan un cálculo ponderado de cada uno de sus elementos, esta sección estará dividida en dos partes. La primera parte se encargará del cálculo de los valores de ponderación o pesos, mientras que la segunda parte tratará la metodología empleada para clasificar y ordenar las alternativas, de mejor a peor.

Se debe tener en cuenta que la metodología empleada para el cálculo de cada una de las secciones, utiliza distintas agrupaciones de los conjuntos de elementos.
Un problema de toma de decisión consiste en un conjunto genérico de n alternativas con m criterios, que se puede ver en la tabla que se encuentra a continuación.

		CRITERIOS								
		C_1		C_2		C_3		…	C_m	
ALTERNATIVAS	A_1	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)		μ(x)	v(x)
	A_2	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)		μ(x)	v(x)
	A_3	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)		μ(x)	v(x)
	…									
	A_n	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)		μ(x)	v(x)

Tabla 1: Caso genérico de n alternativas con m criterios.

Cada fila representa una alternativa con sus pertenencias y no pertenencias a cada uno de los criterios, representados en las columnas. Estos valores han sido obtenidos mediante consultas a expertos. Cabe destacar que el cálculo de los pesos lo obtenemos mediante operaciones sobre los elementos de cada una de las columnas mientras que para el cálculo de los valores de ordenación lo realizamos sobre las filas. Esto quiere decir que para el cálculo del peso de C_1 las operaciones a realizar se harían con las pertenencias y no pertenencias de esa columna desde la alternativa 1 hasta la n. Estos pesos obtenidos indicaran la importancia que tendrá ese criterio, y serán utilizados para el proceso de ordenación de las alternativas. De manera genérica tenemos que los pesos se expresarían como:

$$w_j = \left(\mu_{A_1}(C_j), \nu_{A_1}(C_j)\right) \circledast \dots \circledast \left(\mu_{A_n}(C_j), \nu_{A_n}(C_j)\right)$$

$$siendo \circledast una\ operación\ cualquiera$$

Una vez obtenidos todos los pesos de los criterios, procederemos al cálculo de los valores de ordenación. Como ya hemos mencionado antes, los valores de ordenación serán calculados mediante operaciones en las filas. En este caso, y dado que hemos calculado los pesos de cada uno de los criterios, el valor de ordenación será igual a operaciones con las pertenencias y no pertenencias de cada uno de los criterios multiplicadas por sus respectivos pesos. De forma genérica tendremos que:

$$W_j = \left[\left(\mu_{A_j}(C_1), \nu_{A_j}(C_1)\right) \cdot w_1\right] \circledast \dots \circledast \left[\left(\mu_{A_j}(C_m), \nu_{A_j}(C_m)\right) \cdot w_m\right]$$

$$siendo \circledast una\ operación\ cualquiera$$

Una vez calculados los valores de ordenación, la mejor alternativa será la que mayor valor tenga.

Con el fin de ilustrar las distintas metodologías expuestas en esta sección, añadiremos ejemplos a las explicaciones de cada uno de los métodos. Utilizaremos el siguiente caso tanto para el cálculo de los pesos como para la clasificación de las alternativas:

3.1.1. Caso ejemplo

		CRITERIOS							
		C_1		C_2		C_3		C_4	
		μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)
ALTERNATIVAS	A_1	0.6	025	0.7	0.15	0.65	0.2	0.7	0.1
	A_2	0.55	0.25	0.65	0.25	0.8	0.1	0.65	0.15
	A_3	0.75	0.1	0.55	0.3	0.6	0.25	0.6	0.15
	A_4	0.65	0.1	0.7	0.25	0.6	0.2	0.75	0.15

Tabla 2: Caso ejemplo para el cálculo de los pesos y los valores de ordenación.

Este ejemplo consta de cuatro criterios con cuatro alternativas y por ello obtendremos cuatro pesos, uno para cada criterio, y cuatro valores de ordenación, uno para cada alternativa.

3.2. Cálculo de los pesos

3.2.1. Sin pesos

La primera y más simple metodología que podemos emplear para el cálculo de los pesos es la de darle un valor constante, por ejemplo 1. Mediante esta acción especificamos que todos los criterios de las alternativas tendrán igual importancia a la hora de aplicar los métodos de clasificación.

3.2.2. Método Max Min

En este método se utiliza el concepto de compatibilidad de dos conjuntos para obtener los valores de los pesos. Mediante este concepto medimos el grado de unión y concurrencia entre conjuntos difusos, obteniendo así la dependencia entre ellos. Cuanto mayor sea la compatibilidad de los conjuntos, mejor será la representación de los criterios y, por ello, se obtienen valores más altos en los pesos, dando más importancia a esos criterios.

Este concepto está definido en (Damiani, 2002, pág. 1079) donde la definición de la compatibilidad que es utilizada para el cálculo de los pesos es de la siguiente forma:

$$w_j = \max_{i=1..m}\left[\min\left(\mu_{A_i}(C_j), \pi_{A_i}(C_j)\right)\right]$$

A raíz de esta fórmula pueden surgir tres nuevos métodos. Estos tres nuevos métodos derivan de reemplazar el orden del max y el min y de cambiarlos por T-Normas y T-Conormas, respectivamente. Explicaremos estos métodos en las siguientes secciones.

Expondremos un ejemplo del cálculo de los pesos mediante este método a continuación, utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo:

$$w_1 = \max\left[\min(0.6, 0.15), \min(0.55, 0.2), \min(0.75, 0.15), \min(0.65, 0.25)\right] = 0.25;$$

$$w_2 = \max\left[\min(0.7, 0.15), \min(0.65, 0.1), \min(0.55, 0.15), \min(0.7, 0.05)\right] = 0.15;$$

$$w_3 = \max\left[\min(0.6, 0.15), \min(0.8, 0.1), \min(0.6, 0.15), \min(0.6, 0.2)\right] = 0.2;$$

$$w_4 = \max\left[\min(0.7, 0.2), \min(0.65, 0.2), \min(0.6, 0.25), \min(0.75, 0.1)\right] = 0.25;$$

3.2.3. Método Min Max

Este método está basado en el anteriormente explicado y surge de modificar el orden de las operaciones max y min. El resultado es el siguiente:

$$w_j = \min_{i=1..m}\left[\max\left(\mu_{A_i}(C_j), \pi_{A_i}(C_j)\right)\right]$$

Expondremos un ejemplo del cálculo de los pesos mediante este método a continuación, utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo:

$$w_1 = \min\left[\max(0.6, 0.15), \max(0.55, 0.2), \max(0.75, 0.15), \max(0.65, 0.25)\right] = 0.55;$$

$$w_2 = \min\left[\max(0.7, 0.15), \max(0.65, 0.1), \max(0.55, 0.15), \max(0.7, 0.05)\right] = 0.55;$$

$$w_3 = \min\left[\max(0.65, 0.15), \max(0.8, 0.1), \max(0.6, 0.15), \max(0.6, 0.2)\right] = 0.6;$$

$$w_4 = \min\left[\max(0.7, 0.2), \max(0.65, 0.2), \max(0.6, 0.25), \max(0.75, 0.1)\right] = 0.6;$$

3.2.4. Método T-Conorma T-Norma

Al igual que el anterior método, este deriva del Max Min pero en este caso sustituye la operación min por la T-Norma: P(x,y)=x·y; y la operación max por la T-Conorma: S(x,y)=x+y-x·y. El resultado de estas sustituciones es el siguiente:

$$w_j = \max_{i=1..m}\left[\min\left(\mu_{A_i}(C_j), \pi_{A_i}(C_j)\right)\right];$$

$$w_j = S_{i=1}^{m}\left[\mathrm{P}\left(\mu_{A_i}(C_j), \pi_{A_i}(C_j)\right)\right];$$

$$w_j = S_{i=1}^{m}\left[\mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j)\right];$$

$$w_j = S_{i=1,3,5,\ldots}^{m-1}\left[\mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j), \mu_{A_{i+1}}(C_j) \cdot \pi_{A_{i+1}}(C_j)\right];$$

$$\begin{aligned} w_j = {} & \left(\mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j)\right) + \left(\mu_{A_{i+1}}(C_j) \cdot \pi_{A_{i+1}}(C_j)\right) + \cdots + \left(\mu_{A_m}(C_j) \cdot \pi_{A_m}(C_j)\right) \\ & - \left[\left(\mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j)\right) \cdot \left(\mu_{A_{i+1}}(C_j) \cdot \pi_{A_{i+1}}(C_j)\right) \cdot \ldots \right. \\ & \left. \cdot \left(\mu_{A_m}(C_j) \cdot \pi_{A_m}(C_j)\right)\right]; \end{aligned}$$

$$w_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j)\right) - \prod_{i=1}^{m}\left(\mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j)\right)$$

Expondremos un ejemplo del cálculo de los pesos mediante este método a continuación, utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo:

$$w_1 = (0.6 \cdot 0.15 + 0.55 \cdot 02 + 0.75 \cdot 0.15 + 0.65 \cdot 0.25) \\ - (0.6 \cdot 0.15 \cdot 0.55 \cdot 0.2 \cdot 0.75 \cdot 0.15 \cdot 0.65 \cdot 0.25) \cong 0.4748;$$

$$w_2 = (0.7 \cdot 0.15 + 0.65 \cdot 01 + 0.55 \cdot 0.15 + 0.7 \cdot 0.05) \\ - (0.7 \cdot 0.15 \cdot 0.65 \cdot 0.1 \cdot 0.55 \cdot 0.15 \cdot 0.7 \cdot 0.05) \cong 0.2875;$$

$$w_3 = (0.65 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 01 + 0.6 \cdot 0.15 + 0.6 \cdot 0.2) \\ - (0.65 \cdot 0.15 \cdot 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.6 \cdot 0.15 \cdot 0.6 \cdot 0.2) \cong 0.3874;$$

$$w_4 = (0.7 + 0.2 + 0.65 + 0.2 + 0.6 + 0.25 + 0.75 + 0.1) \\ - (0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.65 \cdot 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.1) \cong 0.4498;$$

3.2.5. Método T-Norma T-Conorma

Este método sigue el mismo razonamiento que el anterior, sólo que en vez de basarse en el método Max Min se basa en el Min Max. El resultado es el siguiente:

$$w_j = \min_{i=1..m} \left[\max\left(\mu_{A_i}(C_j), \pi_{A_i}(C_j) \right) \right];$$

$$w_j = P_{i=1}^{m} \left[\mathrm{S}\left(\mu_{A_i}(C_j), \pi_{A_i}(C_j) \right) \right];$$

$$w_j = P_{i=1}^{m} [\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) - \mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j)];$$

$$w_j = P_{i=1,3,5,\dots}^{m-1} [\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) - \mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j), \mu_{A_{i+1}}(C_j) + \pi_{A_{i+1}}(C_j) - \mu_{A_{i+1}}(C_j) \\ \cdot \pi_{A_{i+1}}(C_j)];$$

$$w_j = \left(\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) - \mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j) \right) \\ \cdot \left(\mu_{A_{i+1}}(C_j) + \pi_{A_{i+1}}(C_j) - \mu_{A_{i+1}}(C_j) \cdot \pi_{A_{i+1}}(C_j) \right) \cdot \dots \\ \cdot \left(\mu_{A_m}(C_j) + \pi_{A_m}(C_j) - \mu_{A_m}(C_j) \cdot \pi_{A_m}(C_j) \right);$$

$$w_j = \prod_{i=1}^{m} \left(\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) - \mu_{A_i}(C_j) \cdot \pi_{A_i}(C_j) \right)$$

Expondremos un ejemplo del cálculo de los pesos mediante este método a continuación, utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo:

$$w_1 = (0.6 + 0.15 - 0.6 \cdot 0.15) \cdot (0.55 + 0.2 - 0.55 \cdot 0.2) \\ \cdot (0.75 + 0.15 - 0.75 \cdot 0.15) \cdot (0.65 + 0.25 - 0.65 \cdot 0.25) \cong 0.2453;$$

$$w_2 = (0.7 + 0.15 - 0.7 \cdot 0.15) \cdot (0.65 + 0.1 - 0.65 \cdot 0.1) \\ \cdot (0.55 + 0.15 - 0.55 \cdot 0.15) \cdot (0.7 + 0.05 - 0.7 \cdot 0.05) \cong 0.2253;$$

$$w_3 = (0.65 + 0.15 - 0.65 \cdot 0.15) \cdot (0.8 + 0.1 - 0.8 \cdot 0.1) \cdot (0.6 + 0.15 - 0.6 \cdot 0.15) \cdot (0.6 + 0.2 - 0.6 \cdot 0.2) \cong 0.2585;$$

$$w_4 = (0.7 + 0.2 - 0.7 \cdot 0.2) \cdot (0.65 + 0.2 - 0.65 \cdot 0.2) \cdot (0.6 + 0.25 - 0.6 \cdot 0.25) \cdot (0.75 + 0.1 - 0.75 \cdot 0.1) \cong 0.2969;$$

3.2.6. Método Jun Ye

Este último método para el cálculo de los pesos está definido en el trabajo de (Ye, 2010) y se obtiene de la siguiente manera:

$$w_j = \frac{1 - \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\pi_{A_i}(C_j)\right)}{n - \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\pi_{A_i}(C_j)\right)\right]}$$

El cálculo de los pesos en este caso se basa en el concepto de la entropía de un conjunto de criterios. Mediante este método, los conjuntos con menor entropía tendrán más importancia que los demás. Esta percepción viene de la teoría de la entropía donde, a ojos de los tomadores de decisiones, los elementos con mayor entropía son visto como menos importantes.

Expondremos un ejemplo del cálculo de los pesos mediante este método a continuación, utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo:

$$w_1 = \frac{1 - \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.2 + 0.15 + 0.25)}{4 - \left[\frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.2 + 0.15 + 0.25) + \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.05) + \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.2) + \frac{1}{4} \cdot (0.2 + 0.2 + 0.25 + 0.1)\right]} \cong 0.2416;$$

$$w_2 = \frac{1 - \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.05)}{4 - \left[\frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.2 + 0.15 + 0.25) + \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.05) + \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.2) + \frac{1}{4} \cdot (0.2 + 0.2 + 0.25 + 0.1)\right]} \cong 0.2639;$$

$$w_3 = \frac{1 - \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.2)}{4 - \left[\frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.2 + 0.15 + 0.25) + \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.05) + \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.2) + \frac{1}{4} \cdot (0.2 + 0.2 + 0.25 + 0.1)\right]} \cong 0.2528;$$

$$w_4 = \frac{1 - \frac{1}{4} \cdot (0.2 + 0.2 + 0.25 + 0.1)}{4 - \left[\frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.2 + 0.15 + 0.25) + \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.05) + \frac{1}{4} \cdot (0.15 + 0.1 + 0.15 + 0.2) + \frac{1}{4} \cdot (0.2 + 0.2 + 0.25 + 0.1)\right]} \cong 0.2416;$$

3.3. Clasificación de alternativas

En este apartado expondremos todos los métodos que hemos analizado con el fin de ordenar las alternativas. Esta ordenación de las alternativas es necesaria dado que en el proceso de toma de decisión, debe de haber una manera de saber que alternativa es la mejor. En este proyecto, asignaremos un valor a cada una de las alternativas para luego poder ordenarlas y poder averiguar cuál es la mejor, finalizando el proceso de toma de decisión.

Utilizaremos todos los métodos de esta sección para la comparación de dos conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov, y por ello deben ser ligeramente modificados.
La modificación que se debe llevar a cabo surge de la necesidad de un elemento constante, A^*, sobre el cual comparar todas las alternativas. La similitud o la correlación de cada una de las alternativas con este elemento constante, marcará el orden de las alternativas, clasificándolas. Dado que los criterios, constituidos por conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov, representan el conocimiento sobre ese criterio de cada alternativa, el valor ideal que deberían tener es el de un conjunto con pertenencia 1 y no pertenencia 0. Conceptualmente, este conjunto intuicionista difuso de Atanassov representa un elemento del que se sabe que con total certeza cumple ese criterio específico. Por esa razón, el elemento constante con el que se van a comparar todos los criterios deberá estar formado por conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov que tengan: $\mu_A(x)=1$, $\nu_A(x)=0$. La cantidad de conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov que formarán A^* será igual al número de criterios en cualquiera de las alternativas.

La elección de este elemento constante crea una gran simplificación en algunos métodos, dado sus valores de pertenencia y no pertenencia.

Con todo ello, los métodos que presentaremos a continuación son los resultantes de haber hecho la comparación con el elemento constante, siendo los valores más altos correspondientes a las mejores alternativas.

3.3.1. Cálculo de la correlación (Gerstenkorn & Mańko, 1991)

Una de las primeras definiciones de correlación entre dos conjuntos viene definida en el trabajo de (Gerstenkorn & Mańko, 1991), donde también se definen las propiedades que debe cumplir. La fórmula, expuesta en este trabajo, para el cálculo de la correlación es la siguiente:

$$C(A,B) = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_A(x)\cdot\mu_B(x) + \nu_A(x)\cdot\nu_B(x)\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_A{}^2(x) + \nu_A{}^2(x)\right)}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_B{}^2(x) + \nu_B{}^2(x)\right)}}$$

La fórmula calcula la correlación de dos conjuntos teniendo en cuenta sus energías, definidas como el sumatorio de la suma de sus pertenencias y no pertenencias al cuadrado.

Con el fin de obtener procedimientos para ordenar alternativas, podemos sustituir el conjunto difuso B por A^*, obteniendo como resultando lo siguiente:

$$W_i(A_i, A^*) = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{n}\mu_{A_i}(C_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}{}^2(C_j) + \nu_{A_i}{}^2(C_j)\right)}}$$

Podemos enriquecer esta fórmula añadiéndole los pesos calculados en la anterior sección pero no será modificada ya que la trataremos independientemente en la sección 3.3.2. Cálculo de correlación Jun Ye.

Podemos ver un ejemplo de la aplicación de este método a continuación utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo:

$$W_1(A_1, A^*) = \frac{1}{\sqrt{4}}\cdot\frac{0.6 + 0.7 + 0.65 + 0.7}{\sqrt{0.6^2 + 0.25^2 + 0.7^2 + 0.15^2 + 0.65^2 + 0.2^2 + 0.7^2 + 0.1^2}} \cong 0.9619;$$

$$W_2(A_2, A^*) = \frac{1}{\sqrt{4}}\cdot\frac{0.55 + 0.65 + 0.8 + 0.65}{\sqrt{0.55^2 + 0.25^2 + 0.65^2 + 025^2 + 0.8^2 + 0.1^2 + 0.65^2 + 0.15^2}} \cong 0.9507;$$

$$W_3(A_3, A^*) = \frac{1}{\sqrt{4}}\cdot\frac{0.75 + 0.55 + 0.6 + 0.6}{\sqrt{0.75^2 + 0.1^2 + 0.55^2 + 0.3^2 + 0.6^2 + 0.25^2 + 0.6^2 + 0.15^2}} \cong 0.9396;$$

$$W_4(A_4, A^*) = \frac{1}{\sqrt{4}}\cdot\frac{0.65 + 0.7 + 0.6 + 0.75}{\sqrt{0.65^2 + 0.1^2 + 0.7^2 + 0.25^2 + 0.6^2 + 0.2^2 + 0.75^2 + 0.15^2}} \cong 0.9618;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A1 > A4 >A2 > A3.

3.3.2. Cálculo de correlación Jun Ye

Este método definido en el trabajo (Ye, 2010) y basado en el trabajo de (Gerstenkorn & Mańko, 1991), clasifica las alternativas según los valores obtenidos de un coeficiente de correlación con pesos. Podemos observar el resultado en la siguiente fórmula:

$$W_i(A_i, A^*) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_{A_i}(C_j) \cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\mu_{A_i}{}^2(C_j) + \nu_{A_i}{}^2(C_j)\right) \cdot w_j}}$$

PROPOSICIÓN: Si multiplicamos la expresión de correlación de Ye por la constante $\frac{1}{\sqrt{n}}$ y hacemos los pesos iguales a 1 obtendremos la expresión $W_i(A_i, A^*) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_{A_i}(C_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}{}^2(C_j) + \nu_{A_i}{}^2(C_j)\right)}}$ tratada en 3.3.1 Cálculo de la correlación .

Podemos ver un ejemplo de la aplicación de este método a continuación utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo. Los valores de los pesos utilizados han sido calculados mediante el método 3.2.2. Método Max Min, pero podríamos haber utilizado cualquier otra metodología expuesta en la sección anterior. Los valores de los pesos son:

$$w_1 = 0.25;\ w_2 = 0.15;\ w_3 = 0.2;\ w_4 = 0.25;$$

$$W_1(A_1, A^*) = \frac{0.6 \cdot 0.25 + 0.7 \cdot 0.15 + 0.65 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.25}{\sqrt{(0.6^2 + 0.25^2) \cdot 0.25 + (0.7^2 + 0.15^2) \cdot 0.15 + (0.65^2 + 0.2^2) \cdot 0.2 + (0.7^2 + 0.1^2) \cdot 0.25}} \cong 0.8854;$$

$$W_2(A_2, A^*) = \frac{0.55 \cdot 0.25 + 0.65 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 0.2 + 0.65 \cdot 0.25}{\sqrt{(0.55^2 + 0.25^2) \cdot 0.25 + (0.65^2 + 0.25^2) \cdot 0.15 + (0.8^2 + 0.1^2) \cdot 0.2 + (0.65^2 + 0.15^2) \cdot 0.25}} \cong 0.8758;$$

$$W_3(A_3, A^*) = \frac{0.75 \cdot 0.25 + 0.55 \cdot 0.15 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.25}{\sqrt{(0.75^2 + 0.1^2) \cdot 0.25 + (0.55^2 + 0.3^2) \cdot 0.15 + (0.6^2 + 0.25^2) \cdot 0.2 + (0.6^2 + 0.15^2) \cdot 0.25}} \cong 0.8735;$$

$$W_4(A_4, A^*) = \frac{0.65 \cdot 0.25 + 0.7 \cdot 0.15 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.75 \cdot 0.25}{\sqrt{(0.65^2 + 0.1^2) \cdot 0.25 + (0.7^2 + 0.25^2) \cdot 0.15 + (0.6^2 + 0.2^2) \cdot 0.2 + (0.75^2 + 0.15^2) \cdot 0.25}} \cong 0.8902;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A4 > A1 >A2 > A3.

3.3.3. Cálculo de correlación de Pearson

Para el cálculo de este método, utilizaremos el principio de la correlación de Pearson definido para la estadística. Mediante la correlación de Pearson podemos observar cuánto se relacionan linealmente dos variables. La correlación de Pearson tendrá el valor de *1* si la relación es linealmente positiva (creciente), mientras que valdrá *-1* si la relación es linealmente negativa (decreciente). La fórmula de la correlación de Pearson en estadística es la siguiente:

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

donde: $cov(X,Y)$ es la covarianza de X e Y, σ_X es la desviación típica de la variable X y σ_Y es la desviación típica de la variable Y.

El uso de la correlación de Pearson transferido a la lógica difusa es explicado en (Szmidt & Kacprzyk, 2010), siendo la fórmula para calcularlo la siguiente:

$$C(A,B) = \frac{1}{3} \cdot (r_1 + r_2 + r_3)$$

$$r_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_A(x_j) - \overline{\mu_A}\right) \cdot \left(\mu_B(x_j) - \overline{\mu_B}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_A(x_j) - \overline{\mu_A}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\mu_B(x_j) - \overline{\mu_B}\right)^2}}$$

$$r_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_A(x_j) - \overline{\nu_A}\right) \cdot \left(\nu_B(x_j) - \overline{\nu_B}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_A(x_j) - \overline{\nu_A}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\nu_B(x_j) - \overline{\nu_B}\right)^2}}$$

$$r_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_A(x_j) - \overline{\pi_A}\right) \cdot \left(\pi_B(x_j) - \overline{\pi_B}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_A(x_j) - \overline{\pi_A}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\pi_B(x_j) - \overline{\pi_B}\right)^2}}$$

Los elementos $\bar{\mu}, \bar{\nu}$ y $\bar{\pi}$ representan las medias de la pertenencia, no pertenencia y el grado de intuicionismo del conjunto, respectivamente, de todos los elementos de sus respectivos conjuntos.

Al igual que en los métodos anteriores, sustituiremos el conjunto difuso B por A*, con el fin de obtener otra fórmula para clasificar las alternativas. Al llevar a cabo esta sustitución surge un problema en fórmula dado que los elementos $\left(\mu_B(x_j) - \overline{\mu_B}\right), \left(\nu_B(x_j) - \overline{\nu_B}\right)$ y $\left(\pi_B(x_j) - \overline{\pi_B}\right)$ son iguales a cero. El valor de cero viene dado porque los elementos de A* son todos iguales, lo que les hace ser iguales a la media. Esta circunstancia resulta en una indeterminación 0/0 en cada una de las divisiones, imposibilitándonos el cálculo de la correlación.

Con el fin de solucionar este problema, sustituiremos el conjunto intuicionista difuso de Atanassov, B, por los valores de los pesos. Esta sustitución genera dos maneras diferentes de solucionar la indeterminación.

1. En el primer caso intentaremos asemejar la estructura del método original, sustituyéndolo por el peso menos la media de los pesos, mientras que en el segundo remplazaremos el elemento problemático por los pesos.

2. El segundo caso surge a raíz de que si todos los pesos son iguales se volvería a tener el problema de la indeterminación 0/0, debido a que el peso menos la media valdría cero.

Ordenaremos las alternativas según su distancia al valor de 1, ya que sólo nos interesa una correlación positiva con el conjunto A*. Y, por tanto, cuanto más cerca esté una alternativa del valor 1, mejor es desde nuestro punto de vista.

3.3.3.1. Primera alternativa

$$W_i(A_i, A^*) = \frac{1}{3} \cdot (r_1 + r_2 + r_3)$$

$$r_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}(C_j) - \overline{\mu_{A_i}}\right) \cdot \left(w_j - \overline{w}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}(C_j) - \overline{\mu_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(w_j - \overline{w}\right)^2}}$$

$$r_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_{A_i}(C_j) - \overline{\nu_{A_i}}\right) \cdot \left(w_j - \overline{w}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_{A_i}(C_j) - \overline{\nu_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(w_j - \overline{w}\right)^2}}$$

$$r_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_{A_i}(C_j) - \overline{\pi_{A_i}}\right) \cdot \left(w_j - \overline{w}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_{A_i}(C_j) - \overline{\pi_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(w_j - \overline{w}\right)^2}}$$

Podemos ver un ejemplo de la aplicación de este método a continuación utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo. Los valores de los pesos utilizados han sido calculados mediante el método 3.2.2. Método Max Min, pero podríamos haber utilizado cualquier otra metodología expuesta en la sección anterior. Los valores de los pesos son:

$$w_1 = 0.25;\ w_2 = 0.15;\ w_3 = 0.2;\ w_4 = 0.25;$$

$$W_1(A_1, A^*) = \frac{1}{3}$$

$$\cdot\left(\frac{\left(0.6-\frac{53}{80}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.7-\frac{53}{80}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.65-\frac{53}{80}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.7-\frac{53}{80}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.6-\frac{53}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.7-\frac{53}{80}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}\right.$$

$$+\frac{\left(0.25-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.15-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.2-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.1-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.25-\frac{7}{40}\right)^2+\cdots+\left(0.1-\frac{7}{40}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}$$

$$\left.+\frac{\left(0.15-\frac{13}{80}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.15-\frac{13}{80}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.15-\frac{13}{80}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.2-\frac{13}{80}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.15-\frac{13}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.2-\frac{13}{80}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}\right)$$

$$\cong 0.1796;$$

$$W_2(A_2, A^*) = \frac{1}{3}$$

$$\cdot\left(\frac{\left(0.55-\frac{53}{80}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.65-\frac{53}{80}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.8-\frac{53}{80}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.65-\frac{53}{80}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.55-\frac{53}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.65-\frac{53}{80}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}\right.$$

$$+\frac{\left(0.25-\frac{3}{16}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.25-\frac{3}{16}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.1-\frac{3}{16}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.15-\frac{3}{16}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.25-\frac{3}{16}\right)^2+\cdots+\left(0.15-\frac{3}{16}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}$$

$$\left.+\frac{\left(0.2-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.1-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.1-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.2-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.15-\frac{3}{20}\right)^2+\cdots+\left(0.2-\frac{3}{20}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}\right)$$

$$\cong 0.0716;$$

$$W_3(A_3,A^*)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\left(0.75-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.55-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.6-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.6-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.75-\frac{5}{8}\right)^2+\cdots+\left(0.6-\frac{5}{8}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}\right.$$

$$+\frac{\left(0.1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.3-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.25-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.15-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.1-\frac{1}{5}\right)^2+\cdots+\left(0.15-\frac{1}{5}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}$$

$$\left.+\frac{\left(0.15-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.15-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.15-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.25-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.15-\frac{7}{40}\right)^2+\cdots+\left(0.2-\frac{7}{40}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}\right)$$

$\cong 0.2548;$

$$W_4(A_4,A^*)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\left(0.65-\frac{27}{40}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.7-\frac{27}{40}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.6-\frac{27}{40}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.75-\frac{27}{40}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.65-\frac{27}{40}\right)^2+\cdots+\left(0.75-\frac{27}{40}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}\right.$$

$$+\frac{\left(0.1-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.25-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.2-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.15-\frac{7}{40}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.1-\frac{7}{40}\right)^2+\cdots+\left(0.15-\frac{7}{40}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}$$

$$\left.+\frac{\left(0.25-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)+\left(0.05-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(0.15-\frac{17}{80}\right)+\left(0.2-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(0.2-\frac{17}{80}\right)+\left(0.1-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(0.25-\frac{17}{80}\right)}{\sqrt{\left[\left(0.25-\frac{3}{20}\right)^2+\cdots+\left(0.1-\frac{3}{20}\right)^2\right]\cdot\left[\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2+\cdots+\left(0.25-\frac{17}{80}\right)^2\right]}}\right)$$

$\cong -0.0743;$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A3 > A1 >A2 > A4.

3.3.3.2. Segunda alternativa

$$W_i(A_i,A^*)=\frac{1}{3}\cdot(r_1+r_2+r_3)$$

$$r_1=\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}(C_j)-\overline{\mu_{A_i}}\right)\cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}(C_j)-\overline{\mu_{A_i}}\right)^2\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(w_j\right)^2}}$$

$$r_2=\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_{A_i}(C_j)-\overline{\nu_{A_i}}\right)\cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_{A_i}(C_j)-\overline{\nu_{A_i}}\right)^2\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(w_j\right)^2}}$$

$$r_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_{A_i}(C_j) - \overline{\pi_{A_i}}\right) \cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_{A_i}(C_j) - \overline{\pi_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(w_j\right)^2}}$$

Podemos ver un ejemplo de la aplicación de este método a continuación utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo. Los valores de los pesos utilizados han sido calculados mediante el método 3.2.2. Método Max Min, pero podríamos haber utilizado cualquier otra metodología expuesta en la sección anterior. Los valores de los pesos son:

$$w_1 = 0.25;\ w_2 = 0.15;\ w_3 = 0.2;\ w_4 = 0.25;$$

$$W_1(A_1, A^*) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\left(0.6 - \frac{53}{80}\right) \cdot 0.25 + \left(0.7 - \frac{53}{80}\right) \cdot 0.15 + \left(0.65 - \frac{53}{80}\right) \cdot 0.2 + \left(0.7 - \frac{53}{80}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.6 - \frac{53}{80}\right)^2 + \cdots + \left(0.7 - \frac{53}{80}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}} \right.$$

$$+ \frac{\left(0.25 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.25 + \left(0.15 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.15 \left(0.2 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.2 + \left(0.1 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.25 - \frac{7}{40}\right)^2 + \cdots + \left(0.1 - \frac{7}{40}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}}$$

$$\left. + \frac{\left(0.15 - \frac{13}{80}\right) \cdot 0.25 + \left(0.15 - \frac{13}{80}\right) \cdot 0.15 + \left(0.15 - \frac{13}{80}\right) \cdot 0.2 + \left(0.2 - \frac{13}{80}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.15 - \frac{13}{80}\right)^2 + \cdots + \left(0.2 - \frac{13}{80}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}} \right)$$

$$\cong 0.0129;$$

$$W_2(A_2, A^*) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\left(0.55 - \frac{53}{80}\right) \cdot 0.25 + \left(0.65 - \frac{53}{80}\right) \cdot 0.15 + \left(0.8 - \frac{53}{80}\right) \cdot 0.2 + \left(0.65 - \frac{53}{80}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.55 - \frac{53}{80}\right)^2 + \cdots + \left(0.65 - \frac{53}{80}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}} \right.$$

$$+ \frac{\left(0.25 - \frac{3}{16}\right) \cdot 0.25 + \left(0.25 - \frac{3}{16}\right) \cdot 0.15 + \left(0.1 - \frac{3}{16}\right) \cdot 0.2 + \left(0.15 - \frac{3}{16}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.25 - \frac{3}{16}\right)^2 + \cdots + \left(0.15 - \frac{3}{16}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}}$$

$$\left. + \frac{\left(0.2 - \frac{3}{20}\right) \cdot 0.25 + \left(0.1 - \frac{3}{20}\right) \cdot 0.15 + \left(0.1 - \frac{3}{20}\right) \cdot 0.2 + \left(0.2 - \frac{3}{20}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.15 - \frac{3}{20}\right)^2 + \cdots + \left(0.2 - \frac{3}{20}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}} \right)$$

$$\cong 0.0224;$$

$$W_3(A_3, A^*) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\left(0.75 - \frac{5}{8}\right) \cdot 0.25 + \left(0.55 - \frac{5}{8}\right) \cdot 0.15 + \left(0.6 - \frac{5}{8}\right) \cdot 0.2 + \left(0.6 - \frac{5}{8}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.75 - \frac{5}{8}\right)^2 + \cdots + \left(0.6 - \frac{5}{8}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}} \right.$$

$$+ \frac{\left(0.1 - \frac{1}{5}\right) \cdot 0.25 + \left(0.3 - \frac{1}{5}\right) \cdot 0.15 + \left(0.25 - \frac{1}{5}\right) \cdot 0.2 + \left(0.15 - \frac{1}{5}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.1 - \frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(0.15 - \frac{1}{5}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}}$$

$$\left. + \frac{\left(0.15 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.25 + \left(0.15 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.15 + \left(0.15 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.2 + \left(0.25 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.15 - \frac{7}{40}\right)^2 + \cdots + \left(0.2 - \frac{7}{40}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}} \right)$$

$$\cong 0.0174;$$

$$W_4(A_4, A^*) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\left(0.65 - \frac{27}{40}\right) \cdot 0.25 + \left(0.7 - \frac{27}{40}\right) \cdot 0.15 + \left(0.6 - \frac{27}{40}\right) \cdot 0.2 + \left(0.75 - \frac{27}{40}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.65 - \frac{27}{40}\right)^2 + \cdots + \left(0.75 - \frac{27}{40}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}} \right.$$

$$+ \frac{\left(0.1 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.25 + \left(0.25 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.15 + \left(0.2 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.2 + \left(0.15 - \frac{7}{40}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.1 - \frac{7}{40}\right)^2 + \cdots + \left(0.15 - \frac{7}{40}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}}$$

$$\left. + \frac{\left(0.25 - \frac{3}{20}\right) \cdot 0.25 + \left(0.05 - \frac{3}{20}\right) \cdot 0.15 + \left(0.2 - \frac{3}{20}\right) \cdot 0.2 + \left(0.1 - \frac{3}{20}\right) \cdot 0.25}{\sqrt{\left[\left(0.25 - \frac{3}{20}\right)^2 + \cdots + \left(0.1 - \frac{3}{20}\right)^2\right] \cdot [0.25^2 + \cdots + 0.25^2]}} \right)$$

$$\cong -0.0151;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A2 > A3 >A1 > A4. Obsérvese que el orden es diferente.

3.3.4. Cálculo de similitud mediante la distancia de Hausdorff

El método de clasificación de las alternativas utilizado en este caso está basado en la distancia de Hausdorff. La distancia de Hausdorff es una medida de cuánto se parecen dos conjuntos compactos no vacíos, teniendo en cuenta su posición en un espacio métrico. La fórmula para expresar está medida de similitud, explicada en (Wen-Liang & Miin-Shen, 2004), viene dada en la siguiente fórmula:

$$d_H(A, B) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \max\left(\left|\mu_A(x_j) - \mu_B(x_j)\right|, \left|\nu_A(x_j) - \nu_B(x_j)\right|\right)$$

Dado que la distancia y la similitud son conceptos similares, podemos utilizar la distancia de Hausdorff para definir una medida de similitud.

Sea *f*:[0,1] → [0,1] una función monótona decreciente, dado que $0 \leq d_H(A,B) \leq 1$ se puede obtener $f(1) \leq f\big(d_H(A,B)\big) \leq f(0)$ que implica $0 \leq \frac{f(d_H(A,B)) - f(1)}{f(0)-f(1)} \leq 1$.

Con esto se obtiene una medida de similitud que viene por la siguiente fórmula:

$$S(A,B) = \frac{f\big(d_H(A,B)\big) - f(1)}{f(0) - f(1)}$$

DEMOSTRACIÓN

La distancia definida $d_H(A,B)$ cumple las siguientes propiedades (Wen-Liang & Miin-Shen, 2004) (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2008):

1. $0 \leq d_H(A,B) \leq 1$
2. $A = B \; si \; y \; sólo \; si \; d_H(A,B) = 0$
3. $d_H(A,B) = d_H(B,A)$
4. $Si \; A \subseteq B \subseteq C \; entonces \; d_H(A,B) \leq d_H(A,C) \; y \; d_H(B,C) \leq d_H(A,C) \; con$
   $A, B, C \; \in A - IFS(X)$

A raíz de esta proposición, S(A,B) cumple las propiedades de una medida de similitud.

Una vez definida esta medida de similitud sólo nos queda encontrar una función *f*.

La función más simple que se puede utilizar es $f(x) = 1 - x$. Otra función que se podría utilizar es $f(x) = e^{-x}$ que es muy utilizada en relaciones de similitud. Por último también podríamos utilizar la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Antes de que podamos utilizar estas medidas de similitud, que surgen de cada una de las tres funciones expresadas, tenemos que transformar la distancia de Hausdorff para que realice la comparación entre un A-IFS y el conjunto A*. La fórmula resultante es la siguiente:

$$d_{H_i} = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \max\Big(1 - \mu_{A_i}(C_j), \nu_{A_i}(C_j)\Big)$$

Con la transformación hecha, conseguimos definir las tres medidas de similitud que utilizaremos para la clasificación de las alternativas.

Podemos ver un ejemplo de la aplicación de este método a continuación utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo. Los valores de los pesos utilizados han sido calculados mediante el método 3.2.2. Método Max Min, pero podríamos haber utilizado cualquier otra metodología expuesta en la sección anterior. Los valores de los pesos son:

$$w_1 = 0.25;\ w_2 = 0.15;\ w_3 = 0.2;\ w_4 = 0.25;$$

$$d_{H_1} = 0.25 \cdot \max(0.4, 0.25) + 0.15 \cdot \max(0.3, 0.15) + 0.2 \cdot \max(0.35, 0.2) + 0.25 \cdot \max(0.3, 0.1) = 0.29;$$

$$d_{H_2} = 0.25 \cdot \max(0.45, 0.25) + 0.15 \cdot \max(0.35, 0.25) + 0.2 \cdot \max(0.2, 0.1) + 0.25 \cdot \max(0.35, 0.15) = 0.2925;$$

$$d_{H_3} = 0.25 \cdot \max(0.25, 0.1) + 0.15 \cdot \max(0.45, 0.3) + 0.2 \cdot \max(0.4, 0.25) + 0.25 \cdot \max(0.4, 0.15) = 0.31;$$

$$d_{H_4} = 0.25 \cdot \max(0.35, 0.1) + 0.15 \cdot \max(0.3, 0.25) + 0.2 \cdot \max(0.4, 0.2) + 0.25 \cdot \max(0.25, 0.15) = 0.275;$$

3.3.4.1. Método L

Este método deriva de la aplicación de la distancia de Hausdorff siendo la función aplicada $f(x) = 1 - x$. La fórmula resultante es:

$$W_i(A_i, A^*) = 1 - d_{H_i}$$

Dadas las distancias de Hausdorff calculadas en el antes, los factores de ordenación con esta función serían los siguientes:

$W_1(A^*, A_1) = 1 - 0.29 = 0.71;$

$W_2(A^*, A_2) = 1 - 0.2925 = 0.7075;$

$W_3(A^*, A_3) = 1 - 0.31 = 0.69;$

$W_4(A^*, A_4) = 1 - 0.275 = 0.725;$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A4 > A1 >A2 > A3.

3.3.4.2. Método E

En este caso la función aplicada es $f(x) = e^{-x}$ resultando la siguiente fórmula para la clasificación de las alternativas:

$$W_i(A_i, A^*) = \frac{e^{-d_{H_i}} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

Dadas las distancias de Hausdorff calculadas en el antes, los factores de ordenación con esta función serían los siguientes:

$$W_1(A^*, A_1) = \frac{e^{-0.29} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} \cong 0.6176;$$

$$W_2(A^*, A_2) = \frac{e^{-0.2925} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} \cong 0.5988;$$

$$W_3(A^*, A_3) = \frac{e^{-0.31} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} \cong 0.5783;$$

$$W_4(A^*, A_4) = \frac{e^{-0.275} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} \cong 0.6197;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A4 > A1 >A2 > A3.

3.3.4.3. Método C

Por último, la tercera fórmula vendrá dada por la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$, derivando en la siguiente ecuación:

$$W_i(A_i, A^*) = \frac{1 - d_{H_i}}{1 + d_{H_i}}$$

Dadas las distancias de Hausdorff calculadas en el antes, los factores de ordenación con esta función serían los siguientes:

$$W_1(A^*, A_1) = \frac{1 - 0.29}{1 + 0.29} \cong 0.5504;$$

$$W_2(A^*, A_2) = \frac{1 - 0.2925}{1 + 0.2925} \cong 0.5474;$$

$$W_3(A^*, A_3) = \frac{1 - 0.31}{1 + 0.31} \cong 0.5267;$$

$$W_4(A^*, A_4) = \frac{1 - 0.275}{1 + 0.275} \cong 0.5686;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A4 > A1 >A2 > A3.

3.3.5. Cálculo de similitud mediante el método de (Zhang & Fu, 2006)

El método que explicaremos en esta sección tiene origen en el expuesto en el trabajo de (Zhang & Fu, 2006). En este trabajo, se define una medida de similitud entre conjuntos difusos que se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$S_0(A,B) = 1 - \frac{1}{2\cdot n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)$$

En el trabajo de (Binyamin, Imran, Lazim, & Abd Fatah, 2010) se realiza un análisis de este método original para calcular la similitud, descubriendo ciertas limitaciones.

Sean A, B y C tres A-IFS representados por los siguientes valores para cada uno de sus tres elementos:

$$A = \{(x_1, 0.2, 0.6), (x_2, 0.2, 0.6), (x_3, 0.2, 0.5)\}$$

$$B = \{(x_1, 0.4, 0.6), (x_2, 0.2, 0.6), (x_3, 0, 0.3)\}$$

$$C = \{(x_1, 0.3, 0.7), (x_2, 0.3, 0.5), (x_3, 0.1, 0.4)\}$$

Podemos observar que si calculamos el valor de $S_0(A,C)$ y el de $S_0(B,C)$ obtenemos que $S_0(A,C) = S_0(B,C)$, lo que no permite distinguir entre los A-IFS A y B mediante este método.

En el trabajo de (Binyamin, Imran, Lazim, & Abd Fatah, 2010) se propone una solución a este problema mediante la modificación de la fórmula original. El resultado de dicha modificación se puede ver a continuación:

$$S_1(A,B) = 1 - \frac{1}{2\cdot n} \cdot\sum_{i=1}^{n}\Big(\big|\big(\mu_A(x_i) + \pi_A(x_i)\cdot\mu_A(x_i)\big) - \big(\mu_B(x_i) + \pi_B(x_i)\cdot\mu_B(x_i)\big)\big| + \big|\big(\nu_A(x_i) + \pi_A(x_i)\cdot\nu_A(x_i)\big) - \big(\nu_B(x_i) + \pi_B(x_i)\cdot\nu_B(x_i)\big)\big|\Big)$$

Aunque está modificación elimina las limitaciones que encontrábamos en la original, no está exenta de errores. El siguiente ejemplo expondrá un caso en el que la fórmula no devuelve los resultados esperados. Si tenemos los A-IFS: A, B y C con los siguientes valores:

$$A = \{(x_1, 0.2, 0.4), (x_2, 0.2, 0.4), (x_3, 0.2, 0.5)\}$$

$$B = \{(x_1, 0.3, 0.3), (x_2, 0.2, 0.4), (x_3, 0, 0.7)\}$$

$$C = \{(x_1, 0.3, 0.3), (x_2, 0.3, 0.5), (x_3, 0.1, 0.6)\}$$

Podemos observar que $S_1(A,C) = S_1(B,C) = 0.92$ por lo que, al igual que antes, los conjuntos no pueden ser diferenciados con este método.

Por esta razón, se introduce una segunda modificación con el fin de solucionar el problema resaltado. Esta modificación introduce, en la primera modificación de la fórmula, el resto de los valores de indecisión de los A-IFS. El resultado obtenido es el siguiente:

$$S_2(A,B) = 1 - \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \Big(\big| \big(\mu_A(x_i) + \pi_A(x_i) \cdot \mu_A(x_i)\big) - \big(\mu_B(x_i) + \pi_B(x_i) \cdot \mu_B(x_i)\big) \big| + \big| \big(\nu_A(x_i) + \pi_A(x_i) \cdot \nu_A(x_i)\big) - \big(\nu_B(x_i) + \pi_B(x_i) \cdot \nu_B(x_i)\big) \big| + \Big| \Big(1 - \big(\mu_A(x_i) + \pi_A(x_i) \cdot \mu_A(x_i)\big) - \big(\nu_A(x_i) + \pi_A(x_i) \cdot \nu_A(x_i)\big)\Big) - \Big(1 - \big(\mu_B(x_i) + \pi_B(x_i) \cdot \mu_B(x_i)\big) - \big(\nu_B(x_i) + \pi_B(x_i) \cdot \nu_B(x_i)\big)\Big) \Big| \Big)$$

Los tres métodos expuestos anteriormente pueden ser utilizados para la ordenación de las alternativas sustituyendo el A-IFS B por el A^*. Además de esa sustitución, y dado que se han calculado los pesos para cada uno de los criterios, podemos añadir estos pesos para enriquecer los métodos obtenidos, resultando en las fórmulas de las siguientes subsecciones.
Para obtener los métodos no modificados bastaría con suprimir las apariciones del elemento w_j.

3.3.5.1. Método original

$$W_i(A_i, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \Big(1 - \mu_{A_i}(C_j) + \nu_{A_i}(C_j)\Big) \cdot w_j$$

Podemos ver un ejemplo de la aplicación de este método a continuación utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo. Los valores de los pesos utilizados han sido calculados mediante el método 3.2.2. Método Max Min, pero podríamos haber utilizado cualquier otra metodología expuesta en la sección anterior. Los valores de los pesos son:

$$w_1 = 0.25;\ w_2 = 0.15;\ w_3 = 0.2;\ w_4 = 0.25;$$

$$W_1(A_1, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot [(0.4 + 0.25) \cdot 0.25 + (0.3 + 0.15) \cdot 0.15 + (0.35 + 0.2) \cdot 0.2 + (0.3 + 0.1) \cdot 0.25] = 0.945;$$

$$W_2(A_2, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot [(0.45 + 0.25) \cdot 0.25 + (0.35 + 0.25) \cdot 0.15 + (0.2 + 0.1) \cdot 0.2 + (0.35 + 0.15) \cdot 0.25] \cong 0.9438;$$

$$W_3(A_3, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot [(0.25 + 0.1) \cdot 0.25 + (0.45 + 0.3) \cdot 0.15 + (0.4 + 0.25) \cdot 0.2 + (0.4 + 0.15) \cdot 0.25] \cong 0.9416;$$

$$W_4(A_4, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot [(0.35 + 0.1) \cdot 0.25 + (0.3 + 0.25) \cdot 0.15 + (0.4 + 0.2) \cdot 0.2 + (0.25 + 0.15) \cdot 0.25] \cong 0.9481;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A4 > A1 >A2 > A3.

3.3.5.2. Primera mejora

$$W_i(A_i, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\left| 1 - \left(\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) \cdot \mu_{A_i}(C_j) \right) \right| + \nu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) \cdot \nu_{A_i}(C_j) \right) \cdot w_j$$

Podemos ver un ejemplo de la aplicación de este método a continuación utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo. Los valores de los pesos utilizados han sido calculados mediante el método 3.2.2. Método Max Min, pero podríamos haber utilizado cualquier otra metodología expuesta en la sección anterior. Los valores de los pesos son:

$$w_1 = 0.25;\ w_2 = 0.15;\ w_3 = 0.2;\ w_4 = 0.25;$$

$$W_1(A_1, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \{[|1 - (0.6 + 0.15 \cdot 0.6)| + 0.25 + 0.15 \cdot 0.25] \cdot 0.25 + [|1 - (0.7 + 0.15 \cdot 0.7)| + 0.15 + 0.15 \cdot 0.15] \cdot 0.15 + [|1 - (0.65 + 0.15 \cdot 0.65)| + 0.2 + 0.15 \cdot 0.2] \cdot 0.2 + [|1 - (0.7 + 0.2 \cdot 0.7)| + 0.1 + 0.2 \cdot 0.1] \cdot 0.25\} \cong 0.9536;$$

$$W_2(A_2, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \{[|1 - (0.55 + 0.2 \cdot 0.55)| + 0.25 + 0.2 \cdot 0.25] \cdot 0.25 + [|1 - (0.65 + 0.1 \cdot 0.65)| + 0.25 + 0.1 \cdot 0.25] \cdot 0.15 + [|1 - (0.8 + 0.1 \cdot 0.8)| + 0.1 + 0.1 \cdot 0.1] \cdot 0.2 + [|1 - (0.65 + 0.2 \cdot 0.65)| + 0.15 + 0.2 \cdot 0.15] \cdot 0.25\} \cong 0.9513;$$

$$W_3(A_3, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4}$$
$$\cdot \{[|1 - (0.75 + 0.15 \cdot 0.75)| + 0.1 + 0.15 \cdot 0.1] \cdot 0.25$$
$$+ [|1 - (0.55 + 0.15 \cdot 0.55)| + 0.3 + 0.15 \cdot 0.3] \cdot 0.15$$
$$+ [|1 - (0.6 + 0.15 \cdot 0.6)| + 0.25 + 0.15 \cdot 0.25] \cdot 0.2$$
$$+ [|1 - (0.6 + 0.25 \cdot 0.6)| + 0.15 + 0.25 \cdot 0.15] \cdot 0.25\} \cong 0.9501$$
$$W_4(A_4, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4}$$
$$\cdot \{[|1 - (0.65 + 0.25 \cdot 0.65)| + 0.1 + 0.25 \cdot 0.1] \cdot 0.25$$
$$+ [|1 - (0.7 + 0.05 \cdot 0.7)| + 0.25 + 0.05 \cdot 0.25] \cdot 0.15$$
$$+ [|1 - (0.6 + 0.2 \cdot 0.6)| + 0.2 + 0.2 \cdot 0.2] \cdot 0.2$$
$$+ [|1 - (0.75 + 0.1 \cdot 0.75)| + 0.15 + 0.1 \cdot 0.15] \cdot 0.25\} \cong 0.9567;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A4 > A1 >A2 > A3.

3.3.5.3. Segunda mejora

$$W_i(A_i, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot n}$$
$$\cdot \sum_{j=1}^{n} \Big[\Big|1 - \big(\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) \cdot \mu_{A_i}(C_j)\big)\Big| + \nu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) \cdot \nu_{A_i}(C_j)$$
$$+ \Big|1 - \Big|1 - \big(\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) \cdot \mu_{A_i}(C_j)\big)\Big|$$
$$- \big(\nu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) \cdot \nu_{A_i}(C_j)\big)\Big|\Big] \cdot w_j$$

Podemos ver un ejemplo de la aplicación de este método a continuación utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo. Los valores de los pesos utilizados han sido calculados mediante el método 3.2.2. Método Max Min, pero podríamos haber utilizado cualquier otra metodología expuesta en la sección anterior. Los valores de los pesos son:

$$w_1 = 0.25;\ w_2 = 0.15;\ w_3 = 0.2;\ w_4 = 0.25;$$

$$
\begin{aligned}
W_1(A_1, A^*) = 1 - \frac{1}{2\cdot 4}
&\cdot \big\{\big[|1-(0.6+0.15\cdot 0.6)| + 0.25 + 0.15\cdot 0.25 \\
&+ |1 - |1-(0.6+0.15\cdot 0.6)| - (0.25+0.15\cdot 0.25)|\big]\cdot 0.25 \\
&+ \big[|1-(0.7+0.15\cdot 0.7)| + 0.15 + 0.15\cdot 0.15 \\
&+ |1 - |1-(0.7+0.15\cdot 0.7)| - (0.15+0.15\cdot 0.15)|\big]\cdot 0.15 \\
&+ \big[|1-(0.65+0.15\cdot 0.65)| + 0.2 + 0.15\cdot 0.2 \\
&+ |1 - |1-(0.65+0.15\cdot 0.65)| - (0.2+0.15\cdot 0.2)|\big]\cdot 0.2 \\
&+ \big[|1-(0.7+0.2\cdot 0.7)| + 0.1 + 0.2\cdot 0.1 \\
&+ \big|1 - |1-(0.7+0.2\cdot 0.7) - (0.1+0.2\cdot 0.1)|\big|\big]\cdot 0.25\big\} \cong 0.8938;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_2(A_2, A^*) = 1 - \frac{1}{2\cdot 4}
&\cdot \{[|1-(0.55+0.2\cdot 0.55)| + 0.25 + 0.2\cdot 0.25 \\
&+ |1 - |1-(0.55+0.2\cdot 0.55)| - (0.25+0.2\cdot 0.25)|]\cdot 0.25 \\
&+ [|1-(0.65+0.1\cdot 0.65)| + 0.25 + 0.1\cdot 0.25 \\
&+ |1 - |1-(0.65+0.1\cdot 0.65)| - (0.25+0.1\cdot 0.25)|]\cdot 0.15 \\
&+ [|1-(0.8+0.1\cdot 0.8)| + 0.1 + 0.1\cdot 0.1 \\
&+ |1 - |1-(0.8+0.1\cdot 0.8)| - (0.1+0.1\cdot 0.1)|]\cdot 0.2 \\
&+ [|1-(0.65+0.2\cdot 0.65)| + 0.15 + 0.2\cdot 0.15 \\
&+ |1 - |1-(0.65+0.2\cdot 0.65)| - (0.15+0.2\cdot 0.15)|]\cdot 0.25\} \cong 0.8989;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_3(A_3, A^*) = 1 - \frac{1}{2\cdot 4}
&\cdot \{[|1-(0.75+0.15\cdot 0.75)| + 0.1 + 0.15\cdot 0.1 \\
&+ |1 - |1-(0.75+0.15\cdot 0.75)| - (0.1+0.15\cdot 0.1)|]\cdot 0.25 \\
&+ [|1-(0.55+0.15\cdot 0.55)| + 0.3 + 0.15\cdot 0.3 \\
&+ |1 - |1-(0.55+0.15\cdot 0.55)| - (0.3+0.15\cdot 0.3)|]\cdot 0.15 \\
&+ [|1-(0.6+0.15\cdot 0.6)| + 0.25 + 0.15\cdot 0.25 \\
&+ |1 - |1-(0.6+0.15\cdot 0.6)| - (0.25+0.15\cdot 0.25)|]\cdot 0.2 \\
&+ [|1-(0.6+0.25\cdot 0.6)| + 0.15 + 0.25\cdot 0.15 \\
&+ |1 - |1-(0.6+0.25\cdot 0.6)| - (0.15+0.25\cdot 0.15)|]\cdot 0.25\} \cong 0.8938
\end{aligned}
$$

$$W_4(A_4, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4}$$
$$\cdot \{[|1 - (0.65 + 0.25 \cdot 0.65)| + 0.1 + 0.25 \cdot 0.1$$
$$+ |1 - |1 - (0.65 + 0.25 \cdot 0.65)| - (0.1 + 0.25 \cdot 0.1)|] \cdot 0.25$$
$$+ [|1 - (0.7 + 0.05 \cdot 0.7)| + 0.25 + 0.05 \cdot 0.25$$
$$+ |1 - |1 - (0.7 + 0.05 \cdot 0.7)| - (0.25 + 0.05 \cdot 0.25)|] \cdot 0.15$$
$$+ [|1 - (0.6 + 0.2 \cdot 0.6)| + 0.2 + 0.2 \cdot 0.2$$
$$+ |1 - |1 - (0.6 + 0.2 \cdot 0.6)| - (0.2 + 0.2 \cdot 0.2)|] \cdot 0.2$$
$$+ [|1 - (0.75 + 0.1 \cdot 0.75)| + 0.15 + 0.1 \cdot 0.15$$
$$+ |1 - |1 - (0.75 + 0.1 \cdot 0.75)| - (0.15 + 0.1 \cdot 0.15)|] \cdot 0.25\} \cong 0.8938;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A2 = A4 >A1 = A3.

3.3.6. Cálculo de la similitud mediante REF (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2006)

En este trabajo se describe como crear funciones de similitud mediante agregaciones de REF.

El primer paso, por la proposición 1 del artículo (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2006), es encontrar dos automorfismos. Para este caso se utilizarán:

$$\varphi_1(x) = x \; donde \; {\varphi_1}^{-1}(x) = x$$
$$\varphi_2(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$$

Con estos dos automorfismos se crea la siguiente REF:

$$REF(x, y) = {\varphi_1}^{-1}(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|);$$
$$REF(x, y) = 1 - \left|\frac{e^x - 1}{e - 1} - \frac{e^y - 1}{e - 1}\right|;$$

Para crear una medida de similitud, por la proposición 4 del artículo (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2006), debemos utilizar un operador de agregación sobre la REF creada anteriormente. El operador que utilizaremos será el de la media aritmética: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. La medida de similitud resultante es la siguiente:

$$SM(A, B) = M_{i=1}^{n}\left[REF\left(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\right)\right];$$
$$SM(A, B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \left|\frac{e^{\mu_A(x_i)} - 1}{e - 1} - \frac{e^{\mu_B(x_i)} - 1}{e - 1}\right|\right];$$

Una vez obtenida la medida de similitud tendremos que adaptarla para que podamos utilizarla en la ordenación de las alternativas sustituyendo el A-IFS B por

A*. Además de esta sustitución añadiremos los pesos, resultando la siguiente fórmula de evaluación de alternativas:

$$W_i(A_i, A^*) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \left|\frac{e^{\mu_{A_i}(C_j)} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot w_j$$

Finalmente, escogeremos la alternativa con mayor evaluación.

Podemos ver un ejemplo de la aplicación de este método a continuación utilizando los valores del caso expuesto en la sección 3.1.1. Caso ejemplo. Los valores de los pesos utilizados han sido calculados mediante el método 3.2.2. Método Max Min, pero podríamos haber utilizado cualquier otra metodología expuesta en la sección anterior. Los valores de los pesos son:

$$w_1 = 0.25;\ w_2 = 0.15;\ w_3 = 0.2;\ w_4 = 0.25;$$

$$W_1(A_1, A^*) = \frac{1}{4}\left[\left(1 - \left|\frac{e^{0.6} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.25 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.7} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.15 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.65} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.2 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.7} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.25\right] \cong 0.1156;$$

$$W_2(A_2, A^*) = \frac{1}{4}\left[\left(1 - \left|\frac{e^{0.55} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.25 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.65} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.15 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.8} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.2 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.65} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.25\right] \cong 0.1157;$$

$$W_3(A_3, A^*) = \frac{1}{4}\left[\left(1 - \left|\frac{e^{0.75} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.25 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.55} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.15 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.6} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.2 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.6} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.25\right] \cong 0.1105;$$

$$W_4(A_4, A^*) = \frac{1}{4}\left[\left(1 - \left|\frac{e^{0.65} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.25 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.7} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.15 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.6} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.2 + \left(1 - \left|\frac{e^{0.75} - 1}{e - 1} - 1\right|\right) \cdot 0.25\right] \cong 0.1200;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A4 > A2 >A1 > A3.

3.3.7. Cálculo de la compatibilidad mediante el método de (Gorzałczany, 1987)

Aunque la compatibilidad que es explicada en este trabajo corresponde a los conjuntos intervalo-valorados, en el trabajo de (Bustince & Burillo, 1995) se define una aplicación para convertir un conjunto intervalo-valorado a un A-IFS.

DEFINICIÓN: Denotamos como un conjunto intervalo-valorado en X la expresión A dada por (Burillo & Bustince, 1996):

$$A = \{\langle x, M_A(x)\rangle \mid x \in X\}$$

donde la función $M_A: X \rightarrow D[0,1]$ define el grado de pertenencia de x a A.

Para cada $x \in X$, denotamos:

$$M_A(x) = [M_{AL}(x), M_{AU}(x)]$$

El paso de un conjunto intervalo-valorado difuso a un conjunto intuicionista de Atanassov viene dado por: $\mu(x) = \mathrm{M}_{AL}(x)$, $\nu(x) = 1 - M_{AU}(x)$, siendo $\mathrm{M}_{AL}(x)$ el extremo inferior del intervalo y $M_{AU}(x)$ el extremo superior del intervalo.

La fórmula para el cálculo de la compatibilidad, $\bar{\varphi}(A, A')$, es la siguiente:

$$\bar{\varphi}(A, A') = [\varphi^L(A, A'), \varphi^U(A, A')]$$

$$\varphi^L(A, A') = \min\big(\varphi_1(A, A'), \varphi_2(A, A')\big)$$

$$\varphi^U(A, A') = \max\big(\varphi_1(A, A'), \varphi_2(A, A')\big)$$

$$\varphi_1(A, A') = \frac{\max\limits_{x \in X}\left\{\min\big({\mu_A}^L(x), {\mu_{A'}}^L(x)\big)\right\}}{\max\limits_{x \in X}\big({\mu_A}^L(x)\big)}$$

$$\varphi_2(A, A') = \frac{\max\limits_{x \in X}\left\{\min\big({\mu_A}^U(x), {\mu_{A'}}^U(x)\big)\right\}}{\max\limits_{x \in X}\big({\mu_A}^U(x)\big)}$$

Si sustituimos A′ por A^* y además transformamos la fórmula para poder utilizarla con A-IFS, según el mapa explicado antes, siempre obtenemos el valor de 1 independientemente de los valores del A-IFS A. Este problema viene dado porque al realizar las operaciones de min con A^* siempre obtenemos el mismo valor en el dividendo que en el divisor.

Por esta razón este método no puede ser aplicado, en nuestro caso, ya que los problemas ocurren al comparar los criterios con A^*.

CAPÍTULO 4 - RESULTADOS

4.1. Introducción

En el anterior capítulo describimos todos los métodos empleados para la ordenación de las alternativas. Dichos métodos han sido implementados y probados con dos ejemplos extraídos del trabajo (Ye, 2010), para poder contrastar los resultados.

En este capítulo realizaremos un análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de los métodos estudiados. Por ello el capítulo quedará dividido en dos secciones, una para cada ejemplo.

Con el fin de facilitar el análisis, todos los resultados de cada uno de los ejemplos serán expuestos en una tabla. La tabla tendrá cada uno de los métodos utilizados para el cálculo de los pesos en sus columnas, mientras que los métodos utilizados para ordenar las alternativas estarán en las filas.
Expondremos los resultados como una serie de números, representando el orden de las alternativas de mayor a menor. Con ello, el número que se encuentre más a la izquierda representará el número de la mejor alternativa, para ese método de cálculo de pesos y de ordenación de alternativas.
Las casillas que están resaltadas en verde marcan los resultados que coinciden con los obtenidos en el trabajo de (Ye, 2010).
En caso de no ser aplicable el método, la casilla será rellenada con una línea discontinua, siendo este el caso de la primera implementación del método de Pearson cuando no hay pesos, dado que el resultado es la indeterminación 0/0.
Otro caso especial es el cálculo del método basado en la energía de un conjunto, que no se calcula en función de los valores de los pesos.

El código utilizado para obtener los resultados de los ejemplos que se exponen en este capítulo, se puede observar en los anexos A a E, inclusive.

4.2. Ejemplo 4.1

4.2.1. Valores de entrada

En este ejemplo tenemos un conjunto de cuatro alternativas representadas por tres criterios. Los valores de las pertenencias y no pertenencias de cada uno de los criterios se puede ver en la siguiente tabla:

		CRITERIOS					
		C_1		C_2		C_3	
		μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)
ALTERNATIVAS	A_1	0.45	0.35	0.50	0.30	0.20	0.55
	A_2	0.65	0.25	0.65	0.25	0.55	0.15
	A_3	0.45	0.35	0.55	0.35	0.55	0.20
	A_4	0.75	0.15	0.65	0.20	0.35	0.15

Tabla 3: Valores del Ejemplo 4.1 representado en (Ye, 2010).

4.2.2. Resultados

Podemos ver los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

		CÁLCULO DE PESOS					
		SIN PESOS	PESOS	MAX MIN	MIN MAX	T-C T-N	T-N T-C
MÉTODOS PARA ORDENAR LAS ALTERNATIVAS	JUN YE	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1
	MÉTODO L	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1
	MÉTODO E	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1
	MÉTODO C	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1
	ZF	4 2 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1
	ZF1	4 2 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1
	ZF2	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1
	PEARSON1	--------	2 4 3 1	1 3 4 2	2 4 3 1	1 3 4 2	2 4 3 1
	PEARSON2	1 4 2 3	2 4 3 1	1 3 4 2	2 4 3 1	1 3 4 2	2 4 3 1
	REF	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3
	ENERGÍA	2 4 3 1					

Tabla 4: Resultados del Ejemplo 4.1.

4.2.3. Análisis de los resultados

A la vista de la tabla observamos que el $63'\hat{3}\%$ de los resultados coincide con los obtenidos en el trabajo de (Ye, 2010), siendo este el resultado mayoritario de la tabla.

Los resultados demuestran que el método de (Ye, 2010) es casi independiente del procedimiento utilizado para el cálculo de los pesos, ya que sólo se obtiene valores distintos con el procedimiento Min Max.

Merece la pena observar que todos los resultados basados en la distancia de Hausdorff, métodos L, E y C, son iguales independientemente de la función utilizada para el cálculo de los valores de ordenación y de la metodología empleada para el cálculo de los pesos. Además de ello, todos concuerdan con los resultados de (Ye, 2010).

Mediante un análisis de los métodos basados en la fórmula de Zhang y Fu, observamos que los resultados del método original y su primera modificación son iguales, mientras que los resultados de la segunda modificación difieren. Podemos apreciar que si se calculan los pesos mediante los procedimientos de Max Min o de T-Conorma T-Norma, los resultados obtenidos son equivalentes a los de (Ye, 2010) y además son independientes de cuál de las fórmulas de Zhang y Fu haya sido utilizada. Aparte de eso, destacamos que la fórmula que obtiene los valores más similares a los de (Ye, 2010) es la segunda modificación, que sólo obtiene resultados distintos cuando los pesos son calculados mediante los procedimientos Min Max o T-Norma T-Conorma.

En el caso de los métodos basados en el coeficiente de Pearson, conseguimos los mismos resultados independientemente de la implementación utilizada. Solamente los resultados calculados mediante los procedimientos de cálculo de pesos Min Max, T-Norma y T-Conorma, coinciden con los obtenidos en el trabajo de (Ye, 2010).

Al obtener los resultados mediante el método basado en REF, advertimos que los resultados adquiridos son independientes del procedimiento del cálculo de los pesos. Además de ello, los resultados obtenidos mediante este método no se obtienen en ningún otro y por ello difieren de los obtenidos por (Ye, 2010).

Como era de esperar, los resultados de los métodos de (Ye, 2010) y del cálculo de la energía de un conjunto son iguales.

Referente a la influencia que tiene el procedimiento del cálculo de los pesos en los resultados, señalamos que, omitiendo algunos resultados, se dan tres parejas de métodos que tienen resultados casi idénticos. La primera pareja consta de los procedimientos sin y con pesos que son idénticos si se ignoran los métodos de Pearson. La segunda pareja la componen los procedimientos de Max Min y T-Conorma T-Norma, siendo sus resultados iguales. La tercera y última pareja está formada por Min Max y T-Norma T-Conorma, donde los resultados son iguales si no tenemos en cuenta el método de (Ye, 2010).

Cabe destacar que la similitud entre cada uno de los elementos de las dos últimas parejas era algo de esperar ya que son distintas maneras de representar un mismo concepto. Este no es el caso de la primera pareja, que a vista de los resultados se podría inferir que el cálculo de los pesos mediante el procedimiento de (Ye, 2010) es equivalente al de sin pesos.

4.3. Ejemplo 4.2

4.3.1. Valores de entrada

En este ejemplo tenemos un conjunto de tres alternativas representadas por cuatro criterios. Los valores de las pertenencias y no pertenencias de cada uno de los criterios se puede ver en la siguiente tabla:

		CRITERIOS							
		C_1		C_2		C_3		C_4	
		μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)
ALTERNATIVAS	A_1	0.85	0.10	0.75	0.10	0.70	0.15	0.70	0.10
	A_2	0.70	0.10	0.80	0.15	0.85	0.10	0.70	0.15
	A_3	0.80	0.10	0.85	0.10	0.75	0.15	0.70	0.15

Tabla 5: Valores de Ejemplo 4.2 representado en (Ye, 2010).

4.3.2. Resultados

Podemos ver los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

		CÁLCULO DE PESOS					
		SIN PESOS	PESOS	MAX MIN	MIN MAX	T-C T-N	T-N T-C
MÉTODOS PARA ORDENAR LAS ALTERNATIVAS	JUN YE	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2
	MÉTODO L	3 2 1	3 2 1	3 1 2	3 2 1	3 2 1	3 2 1
	MÉTODO E	3 2 1	3 2 1	3 1 2	3 2 1	3 2 1	3 2 1
	MÉTODO C	3 2 1	3 2 1	3 1 2	3 2 1	3 2 1	3 2 1
	ZF	3 1 2	3 2 1	3 1 2	3 1 2	3 1 2	3 1 2
	ZF1	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2
	ZF2	3 1 2	3 1 2	1 3 2	3 1 2	1 3 2	3 1 2
	PEARSON1	------	1 2 3	3 2 1	2 1 3	3 2 1	1 2 3
	PEARSON2	3 2 1	1 2 3	3 2 1	2 1 3	3 2 1	1 2 3
	REF	3 2 1	3 2 1	3 1 2	3 2 1	3 2 1	3 2 1
	ENERGÍA	1 3 2					

Tabla 6: Resultados del Ejemplo 4.2.

4.3.3. Análisis de los resultados

A la vista de la tabla distinguimos que el 25% de los resultados coincide con los obtenidos en el trabajo de (Ye, 2010), siendo el segundo resultado más repetido. El resultado mayoritario es el "3 2 1" ocupando el $43'\hat{3}\%$ de la tabla.

Podemos inferir, a la vista de la tabla, que la independencia de los resultados obtenidos por el método de (Ye, 2010) con respecto al procedimiento utilizado para el cálculo de los pesos, es mayor en este caso que en el ejemplo 4.1. La razón de ello es la igualdad de los resultados, independientemente del procedimiento utilizado para el cálculo de los pesos.

Al igual que con el ejemplo 4.1, advertimos que todos los resultados basados en la distancia de Hausdorff, métodos L, E y C, son iguales independientemente de la función utilizada. Cabe destacar que en este ejemplo los resultados si varían según el procedimiento utilizado para el cálculo de los pesos, en contraposición con el anterior ejemplo, siendo los valores diferentes los calculados mediante el procedimiento Max Min.
En este caso, a diferencia del ejemplo anterior, ninguno de los valores obtenidos mediante la distancia de Hausdorff coincide con los obtenidos por (Ye, 2010).

Los métodos basados en la fórmula de Zhang y Fu también tienen distintos patrones que los observados en el ejemplo 4.1. En este caso, los resultados que son más similares entre sí, son los del método original y los de la segunda modificación, que sólo difieren cuando el procedimiento para el cálculo de los pesos es Max Min o T-Norma T-Conorma. Son estos dos procedimientos los que más índice de equivalencia tienen con los resultados de (Ye, 2010), siendo diferentes solo en el método original. Este hecho ha sido observado en menor medida en el ejemplo 4.1, siendo todos iguales en ese caso.
A diferencia de lo observado en el anterior ejemplo, la fórmula que obtiene los valores más similares a los de (Ye, 2010) es la primera modificación, siendo los resultados iguales independientemente del procedimiento utilizado para el cálculo de los pesos.

En los métodos basados en el coeficiente de Pearson sólo señalamos una variación de los patrones observados en el ejemplo 4.1. Al igual que antes, los resultados son iguales independientemente de la implementación utilizada. La única diferencia con el otro ejemplo es que ninguno de los resultados coincide con los observados por (Ye, 2010).

En el método basado en REF percibimos que, al contrario que en el ejemplo 4.1, los resultados obtenidos son casi totalmente independientes del procedimiento de cálculo de pesos. Esto se debe a que los resultados obtenidos mediante el procedimiento Max Min difieren del resto. Al igual que en el anterior ejemplo ninguno de los resultados concuerda con los obtenidos por (Ye, 2010).

Al igual que en el ejemplo 4.1, los resultados de los métodos de (Ye, 2010) y del cálculo de la energía de un conjunto son iguales.

Referente a la influencia que tiene el procedimiento del cálculo de los pesos en los resultados y basándose en el patrón visto en el ejemplo 4.1, notamos que las parejas ya no son tan similares. La única pareja que obtiene valores similares, exceptuando los métodos de Pearson, es la de Min Max y T-Norma T-Conorma. Las otras dos parejas se han diferenciado más entre sí. Este hecho se puede observar en la primera pareja, sin y con pesos, que además de diferenciarse en los métodos de Pearson, también lo hacen ahora en el método original de Zhang y Fu.

La mayor diferenciación entre los valores de las parejas recae en la segunda, formada por Max Min y T-Conorma T-Norma. Esta pareja tenía, originalmente, todos sus valores iguales entre sí y en este ejemplo los valores obtenidos mediante la distancia de Hausdorff y basado en REF pasan a ser distintos.

En la tercera pareja, Min Max y T-Norma T-Conorma, también advertimos modificaciones ya que los valores sólo son iguales si omitimos los dos métodos del coeficiente de Pearson.

El hecho de obtener diferentes valores para un mismo concepto, representado en los elementos de cada una de las parejas, pone de manifiesto que hay diferencias a la hora de representar los conceptos. Este hecho se observa en los resultados obtenidos en este ejemplo. Esta observación se contrapone a la estudiada en el anterior ejemplo.

CAPÍTULO 5 - BI-ENTROPÍA

5.1. Introducción

En el anterior capítulo presentamos los resultados de algunos métodos de ordenación de alternativas, con distintas maneras de calcular los pesos. A la vista de los resultados, reparamos en que la mayoría de los resultados del Ejemplo 4.1 convergían en una ordenación. Esto no es el caso del Ejemplo 4.2 ya que sus resultados eran más dispersos. Si se comparasen las entropías medias de los elementos de estos ejercicios observamos una diferencia en los resultados obtenidos, dado que la entropía del Ejercicio 4.1 es $0.2041\hat{6}$ mientras que la del Ejercicio 4.2 es $0.11\hat{6}$. Esta diferencia en las entropías puede ser la causante de que los resultados, como conjuntos de valores distintos, sean tan diferentes.

En este capítulo se tratará una nueva medida de entropía, denominada la bi-entropía. Con el fin de explicar esta nueva medida, en la primera sección del este capítulo introduciremos los conceptos necesarios para definirla. Una vez expuestos los conceptos necesarios daremos la definición de bi-entropía. Al final del capítulo añadiremos esta nueva medida a uno de los métodos y demostremos que puede mejorar los resultados obtenidos.

5.2. Conceptos previos

5.2.1. Relaciones de indiferencia e incomparabilidad

La interpretación y sentido de estas relaciones tienen especial importancia en procesos de clasificación, ya que representan dos tipos de desconocimiento: incomparabilidad e ignorancia, respectivamente. Mediante estas relaciones se pueden utilizar sofisticadas estrategias de clasificación, incluyendo las que permiten el rechazo parcial de sus elementos.

La representación de la incomparabilidad en ejercicios de clasificación se da cuando un elemento puede pertenecer a varias clasificaciones simultáneamente. Por el contrario, la representación de ignorancia se da cuando un elemento no da indicios de pertenecer a ninguna clasificación.

Un ejemplo de esto queda patente en el siguiente ejercicio de clasificación donde los elementos pueden pertenecer a la clase blanca o negra, representados en la ilustración expuesta a continuación:

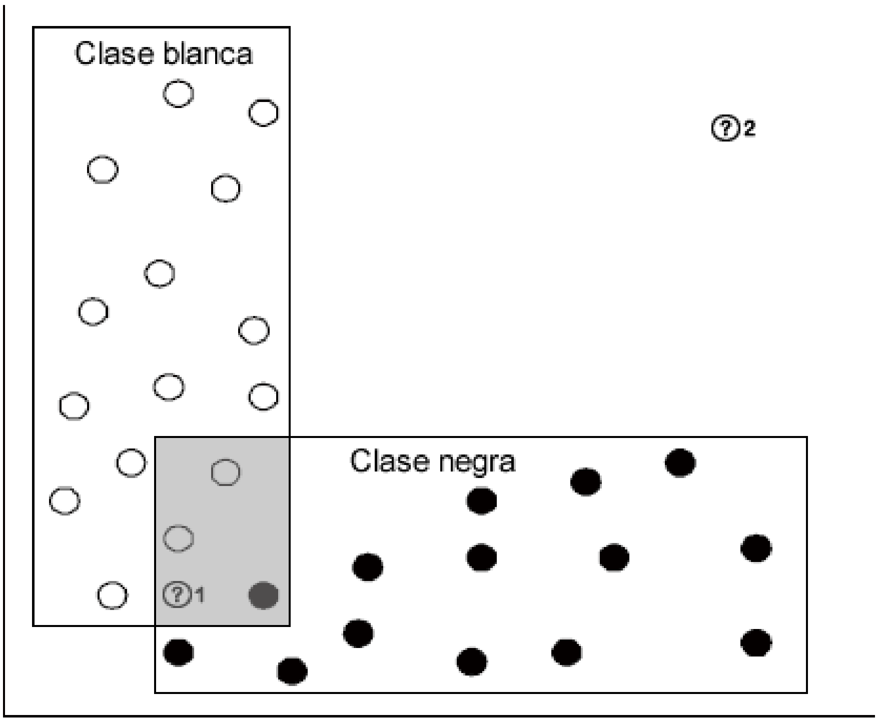

Ilustración 1: Representación gráfica de la incomparabilidad y la ignorancia. (Adaptado de Hüllermeier & Brinker, 2008)

Se puede observar que dada la distribución representada en el ejemplo, el elemento 1 tiene las mismas posibilidades de pertenecer a la clase blanca como a la negra. Esta característica es la que se representa mediante el concepto de incomparabilidad. En cambio, el elemento 2 no presenta cualidades de pertenecer a ningún de las dos clases, representando así el concepto de ignorancia.

Para obtener más información relacionada con este tema consúltese el artículo de (Hüllermeier & Brinker, 2008)

5.2.2. Funciones E_N

DEFINICIÓN: Una función E_N: [0,1] → [0,1] es una función asociada a una negación fuerte *N* que cumple las siguientes propiedades:

1. $E_N(x) = 0\ si\ sólo\ si\ x = 0\ ó\ x = 1$.
2. $E_N(x) = 1\ si\ sólo\ si\ x = e, donde\ e\ es\ el\ punto\ de\ equilibrio\ de\ N$.
3. $E_N(x) = E_N\big(N(x)\big)\ para\ todo\ x\ \in [0,1]$.
4. $Si\ y \geq x\ con\ x \geq e\ e\ y \leq x\ con\ x \leq e,\ entonces\ E_N(x) \geq E_N(y)$.

5.3. Definición de bi-entropía

La función de bi-entropía proporciona una herramienta funcional para aproximar el concepto de entropía teniendo en cuenta cada una de las variables por separado, y no en conjunto.

5.3.1. Función de bi-entropía

DEFINICIÓN: Una función H: $[0,1]^2 \to [0,1]$ es una función de bi-entropía asociada a una negación fuerte *N* si cumple las siguientes propiedades:

1. $H(x,y) = H(y,x)\ para\ todo\ x,y \in [0,1]$.
2. $H(x,y) = 0\ si\ y\ sólo\ si\ \{0,1\} \cap \{x,y\} = \emptyset$.
3. $H(x,y) = 1\ si\ sólo\ si\ x = y = e, donde\ e\ es\ el\ punto\ de\ equilibrio\ de\ N$.
4. $H(x,y) = H\big(N(x), N(y)\big)$.
5. $H\ es\ creciente\ en\ [0,e]^2\ y\ decreciente\ en\ [e,1]^2, con\ e \in\ ]0,1[\ el\ único\ punto\ tal\ que\ N(e) = e$.

5.3.2. Función de bi-entropía generalizada

DEFINICIÓN: Definimos función de bi-entropía generalizada como una función G_E: $[0,1]^2 \to [0,1]$, con $e \in\ ]0,1[$ tal que cumple las siguientes propiedades:

1. $G_E(x,y) = G_E(y,x)\ para\ todo\ x,y \in [0,1]$.
2. $G_E(x,y) = 0\ si\ x = 1\ ó\ y = 1$.
3. $G_E(x,y) = 1\ si\ y\ sólo\ si\ x = y = e$.
4. $G_E\ es\ decreciente\ en\ [e,1]^2$.
5. $G_E\ es\ creciente\ en\ [0,e]^2$.

5.3.3. Relación entre funciones de bi-entropía y bi-entropía generalizada

PROPOSICIÓN: Toda función de bi-entropía continua asociada a una negación *N* es una función de bi-entropía generalizada con *e* el punto de equilibrio de *N*.

5.3.4. Ejemplo de función de bi-entropía generalizada

PROPOSICIÓN: La siguiente función es una función de bi-entropía generalizada:

$$G_E(x,y) = min[2 \cdot (1-x), 2 \cdot (1-y), max(2 \cdot x, e), max(2 \cdot y, e)]$$

con $0 < e < \frac{1}{4}$.

5.4. Caso práctico

5.4.1. Objetivo

Una vez introducido el concepto de bi-entropía, lo aplicaremos a un caso práctico con la intención de obtener mejores resultados que los ya obtenidos. Para conseguir esto, buscaremos un caso en el que no se puedan diferenciar dos de las mejores alternativas, utilizando una de las metodologías expuestas en el CAPÍTULO 3 -Métodos. Una vez encontrado dicho caso aplicaremos el concepto de la bi-entropía a la metodología utilizada con el fin de observar si, así, las dos alternativas pueden ser diferenciadas.

5.4.2. Procedimiento

Dado que este proyecto fue inspirado por el trabajo de (Ye, 2010), intentaremos mejorar su metodología mediante la bi-entropía. Esto quiere decir que para el cálculo sin bi-entropía, tanto de los pesos como de los valores de ordenación de las alternativas, se utilizarán los siguientes métodos:

- **Cálculo de los pesos:** Método Jun Ye.
- **Cálculo de valores de ordenación:** Cálculo de correlación Jun Ye.

La modificación propuesta sobre este método consiste en sustituir la entropía por la bi-entropía en la técnica del cálculo de pesos. La fórmula de la bi-entropía utilizada está expuesta en 5.3.4 Ejemplo de función de bi-entropía generalizada. La técnica para el cálculo de los pesos resultante sería la siguiente:

$$w_j = \frac{1 - \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left[G_{E_{A_i}} \left(\mu_{A_i}(C_j), \nu_{A_i}(C_j) \right) \right]}{n - \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left[G_{E_{A_i}} \left(\mu_{A_i}(C_j), \nu_{A_i}(C_j) \right) \right] \right\}}$$

Se ha de tener en cuenta que la fórmula de la bi-entropía es calculada mediante dos valores, que en este caso se han hecho corresponder con la pertenencia y no pertenencia del elemento al conjunto intuicionista difuso de Atanassov.
La metodología para la obtención de los valores de ordenación no ha sido modificada.

Una vez creada la modificación se procederá a comprobar si realmente se mejoran los resultados obtenidos por el método de (Ye, 2010).

La búsqueda del caso práctico en el que no se diferenciaban las 2 mejores alternativas se ha conseguido mediante la construcción de un programa en Java. El código de dicho programa y todas las clases necesarias para su uso se puede ver en los siguientes apartados del anexo: APÉNDICE F - BiEntropiaThread.java y APÉNDICE G - BiEntropiaRun.java. A continuación daremos el pseudocódigo del algoritmo:

```
INICIACIÓN
  Establecer el número de alternativas;
  Establecer el número de criterios;
  Establecer el valor inicial de mu;
  Establecer el valor inicial de nu;
  Establecer el crecimiento de mu/decrecimiento de nu;
  Crear una matriz (número de alternativas)x(número de criterios*2)
  donde las filas representan las alternativas, las columnas pares
  tienen la pertenencia(mu) y las impares la no pertenencia(nu);
  Iniciar la matriz de alternativas de tal manera que las columnas
  pares tengan el valor inicial de mu y las impares el valor inicial
  de nu;
FIN INICIACIÓN
BEGIN
MIENTRAS no se hallan tratado todos los casos posibles HACER
  SI todas las alternativas son A-IFS válidos(MU+NU<0) ENTONCES
  Ordenar alternativas utilizando el método de Jun Ye original;
    SI tiene dos valores de ordenación iguales ENTONCES
    Ordenar las alternativas utilizando el método de Jun Ye mejorado
    mediante la bi-netropía;
      SI tiene no tiene valores de ordenación iguales ENTONCES
        Mostrar la matriz de alternativas;
      FIN SI
    FIN SI
  FIN SI
  Pasar al siguiente caso aumentando la mu o disminuyendo la nu según
  el valor establecido;
FIN MIENTRAS
END
```

Mediante este código obtenemos todos los casos en los que se obtienen dos resultados iguales aplicando el método de (Ye, 2010), pero esos casos se pueden diferenciar al utilizar la bi-entropía. Para realizar esta búsqueda, se analizan todas las combinaciones de valores posibles que pueden surgir en un caso con cuatro alternativas y cuatro criterios.
Se han elegido dos ejemplos, de todos los obtenidos, en los que se puede observar una mejora en los resultados obtenidos. Comentaremos dichos ejemplos en la siguiente sección.

5.4.3. Demostración

Como ya hemos mencionado antes estos ejemplos representan una mejora sobre los resultados obtenidos mediante el método de (Ye, 2010) gracias a la aplicación del concepto de la bi-entropía.
Para cada uno de estos dos ejemplo expondremos el valor obtenido mediante el método de (Ye, 2010), en el que no se podrán diferenciar las dos mejores alternativas, seguido de los valores obtenidos mediante el uso de la bi-entropía, consiguiendo una correcta diferenciación.

5.4.3.1. Ejemplo 1

Los valores correspondientes a este caso se pueden observar en la siguiente tabla:

		CRITERIOS							
		C_1		C_2		C_3		C_4	
		μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)	μ(x)	v(x)
ALTERNATIVAS	A_1	0.75	0.20	0.75	0.10	0.75	0.15	0.55	0.3
	A_2	0.65	0.25	0.70	0.25	0.75	0.15	0.70	0.20
	A_3	0.60	0.15	0.65	0.15	0.50	0.20	0.60	0.25
	A_4	0.65	0.25	0.70	0.20	0.75	0.15	0.55	0.35

Tabla 7: Primer caso ejemplo demostrando una mejora en los resultados.

Para este caso se obtienen los siguientes valores aplicando el método de (Ye, 2010) sin modificar:

$$W_1(A_1, A^*) = 0.9540460747365035;$$
$$W_2(A_2, A^*) = 0.9540460747365035;$$
$$W_3(A_3, A^*) = 0.9470163075640782;$$

$$W_4(A_4, A^*) = 0.930751308746271;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A1 = A2 >A3 > A4. Señalamos que las dos mejores alternativas tienen el mismo valor de ordenación imposibilitando saber cuál es mejor. Como se observará a continuación, mediante la introducción de la bi-entropía, podremos ordenar las alternativas sin ningún problema. Los resultados obtenidos de la aplicación de la bi-entropía son los siguientes:

$$W_1(A_1, A^*) = 0.9605651359318248;$$
$$W_2(A_2, A^*) = 0.9545818649325084;$$
$$W_3(A_3, A^*) = 0.9480736711264072;$$
$$W_4(A_4, A^*) = 0.9386568443190414;$$

El orden obtenido en este caso es: A1 > A2 >A3 > A4, obteniendo una correcta diferenciación.

5.4.3.2. Ejemplo 2

Los valores correspondientes a este caso se pueden observar en la siguiente tabla:

		CRITERIOS							
		C_1		C_2		C_3		C_4	
		μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)
ALTERNATIVAS	A_1	0.70	0.20	0.55	0.25	0.70	0.15	0.60	0.10
	A_2	0.70	0.15	0.55	0.10	0.70	0.20	0.60	0.25
	A_3	0.55	0.35	0.65	0.15	0.70	0.15	0.60	0.15
	A_4	0.50	0.40	0.70	0.10	0.65	0.15	0.65	0.15

Tabla 8: Segundo caso ejemplo demostrando una mejora en los resultados.

Para este caso se obtienen los siguientes valores aplicando el método de (Ye, 2010) sin modificar:

$$W_1(A_1, A^*) = 0.957033886125577;$$
$$W_2(A_2, A^*) = 0.957033886125577;$$
$$W_3(A_3, A^*) = 0.9383254565328146;$$
$$W_4(A_4, A^*) = 0.9274529971584827;$$

Por tanto, el orden de las alternativas sería el siguiente: A1 = A2 >A3 > A4. Señalamos que las dos mejores alternativas tienen el mismo valor de ordenación imposibilitando saber cuál es mejor. Como se observará a continuación, mediante la introducción de la bi-entropía, se podrá ordenar las alternativas sin ningún problema. Los resultados obtenidos de la aplicación de la bi-entropía son los siguientes:

$$W_1(A_1, A^*) = 0.9557589620694853;$$
$$W_2(A_2, A^*) = 0.9546098511737072;$$
$$W_3(A_3, A^*) = 0.9498123087197783;$$
$$W_4(A_4, A^*) = 0.9452869914191264;$$

El orden obtenido en este caso es: A1 > A2 >A3 > A4, obteniendo una correcta diferenciación.

Por tanto la bi-entropia proporciona un mecanismo que permite alcanzar una solución en problemas de toma de decisión en los que otros métodos no alcanzan a distinguir suficientemente entre las alternativas.

CAPÍTULO 6 - CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

Como se ha visto en el anterior capítulo, mediante el uso del concepto de la bi-entropía, conseguimos una mejora en los resultados obtenidos por el método de (Ye, 2010). Con la modificación de dicho método obtenemos la correcta diferenciación, en los casos en los que los valores de ordenación de las alternativas son iguales. Esta circunstancia puede no tener gran importancia cuando los valores que son iguales corresponden a las alternativas entre los valores más bajos. Esto es así dado que a la hora de realizar la decisión de cuál alternativa elegir se tomaran en cuenta las mejores, descartando las perores que podrían tener los mismos valores.
En cambio, si se diese el caso en el que mediante un método se obtuviesen los mismos valores de ordenación para las mejores alternativas, sería como si no se hubiese aplicado dicho método. La razón detrás de ello es que, aun aplicando un método, no se consigue distinguir entre las mejores alternativas dejándonos con el mismo grado de desconocimiento que al empezar. Cabe destacar que existe la posibilidad que algunas alternativas sean igual de buenas y por ello, independientemente del método utilizado, los valores de ordenación que se obtendrán serán iguales. En estos casos no existe ninguna solución, dado que esos casos son igual de buenos.
Aunque exista la posibilidad de encontrarse con estos casos igual de buenos, las posibilidades de que aparezcan en un caso real son muy escasas y dependen del método utilizado. Por ello una de las mejores cualidades de un método sería el que obtuviese la menor cantidad de alternativas con los mismos valores, pudiendo realizar así una mejor toma de decisión.

Esta reducción de alternativas con los mismos valores es tratada en este proyecto, intentando mejorar los resultados obtenidos mediante el método de (Ye, 2010). En este caso se ha utilizado el concepto de la bi-entropía y como se puede observar en el capítulo anterior se obtiene una correcta diferenciación en los ejemplos expuestos.

Dados los buenos resultados obtenidos mediante la aplicación del concepto de la bi-entropía al método de (Ye, 2010), cabe esperar que pueda mejorar otros métodos de ayuda a la toma de decisión. Partiendo de la manera en la que ha sido utilizada para el método de (Ye, 2010), todos los procedimientos que utilicen el cálculo de la entropía de un conjunto intuicionista difuso de Atanassov podrían ser modificados para utilizar la bi-entropía. Esta modificación lograría una mejora de los resultados obtenidos utilizando el método original.

Otra alternativa a la propuesta anteriormente sería la utilización de la bi-entropía como mediada de similitud entre conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov o la sustitución de ella por otro elemento que no fuese la entropía clásica.
Los resultados obtenidos mediante estas dos nuevas opciones han de ser estudiados para comprobar los posibles beneficios que se podrían obtener.

Cabe destacar que dado que el concepto de la bi-entropía es reciente aún queda por explorar muchas de sus posibilidades, siendo una de ellas la tratada en este documento, donde ha quedado patente la mejora que se pude obtener mediante su aplicación al campo de la ayuda a la toma de decisión.

BIBLIOGRAFÍA

Atanassov, K. (1983). *Intuitionistic fuzzy sets.* VII ITKR's Session, Sofia (deposed in Central Sci.-Technical Library of Bulg. Acad. of Sci., 1697/84) (in Bulgarian).

Binyamin, Y., Imran, T., Lazim, A., & Abd Fatah, W. (2010). A New Similarity Measure on Intuitionistic Fuzzy Sets. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences 5:2*, 70-74.

Burillo, P., & Bustince, H. (1996). Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems 78*, 305-316.

Bustince, H., & Burillo, P. (1995). Correlation of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems 74*, 237-244.

Bustince, H., Barrenechea, E., & Pagola, M. (2006). Restricted equivalence functions. *Fuzzy Sets and Systems 157*, 2333–2346.

Bustince, H., Barrenechea, E., & Pagola, M. (2007). Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measures of similarity. *FUZZY SETS AND SYSTEMS 158*, 496-516.

Bustince, H., Barrenechea, E., & Pagola, M. (2008). Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal EN-functions: Image thresholding invariant. *Pattern Recognition Letters 29*, 525–536.

Chaudhuri, B., & Bhattacharya, A. (2001). On correlation between two fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems 118*, 447-456.

Damiani, E. (2002). *Knowledge-Based Intelligent Information Engineering Systems and Allied Technologies.* Recuperado el 21 de Noviembre de 2010, de http://books.google.es/books?id=JpOPdzq-4PgC&pg=PA1079&lpg=PA1079&dq=%22compatibility#v=onepage&q=%22compatibility&f=false

Escuela andaluza de salud pública. (2010). *Divestadistica*. Recuperado el 6 de Junio de 2011, de http://www.divestadistica.es/es/diccionario_estadistico.html#C

Fan, J., & Xie, W. (1999). Some notes on similarity measure and proximity measure. *Fuzzy Sets Systems 101*, 403–412.

Gerstenkorn, T., & Mańko, J. (1991). Correlation of intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems 44*, 39-43.

Gorzałczany, M. (1987). A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems 21*, 1-17.

Hajek, P. (2010). Fuzzy Logic. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Edward N. Zalta.

Hüllermeier, E., & Brinker, K. (2008). Learning valued preference structures for solving classification problems. *Fuzzy Sets and Systems 159*, 2337 – 2352.

Szmidt, E., & Kacprzyk, J. (2010). Correlation of Intuitionistic Fuzzy Sets. *Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design, Volume 6178*, 169-177.

Wen-Liang, H., & Miin-Shen, Y. (2004). Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance. *Pattern Recognition Letters 25*, 1603–1611.

Ye, J. (2010). Fuzzy decision-making method based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment. *European Journal of Operational Research 205*, 202-204.

Zhang, C., & Fu, H. (2006). Similarity measures on three kinds of fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters 27*, 1307-1317.

APÉNDICE A - CONJUNTOINTUICIONISTA.JAVA

```
package ConjuntoDifuso;

public class ConjuntoIntuicionista {

    private double pertenencia;
    private double noPertenencia;

    /**
     * Constructor vacio.
     *
     */
    public ConjuntoIntuicionista() {
        this.pertenencia = 0.0;
        this.noPertenencia = 0.0;
    }

    /**
     * Constructor del conjunto intuicionista de Atanassov.
     *
     * @param pertenencia La pertenencia al conjunto intuicionista de
Atanassov.
     * @param noPertenencia La no pertenencia al conjunto intuicionista de
Atanassov.
     */
    public ConjuntoIntuicionista(double pertenencia, double noPertenencia) {
        if (pertenencia >= 0 && pertenencia <= 1 && noPertenencia >= 0 &&
noPertenencia <= 1
                && pertenencia + noPertenencia >= 0 && pertenencia +
noPertenencia <= 1) {
            this.pertenencia = pertenencia;
            this.noPertenencia = noPertenencia;
        } else {
            throw new ArithmeticException("Valores de pertenencia y no
pertenencia invalidos: u="
                    + pertenencia + " v=" + noPertenencia);
        }
    }

    public double getNoPertenencia() {
        return noPertenencia;
    }
```

```
    public void setNoPertenencia(double noPertenencia) {
        if (noPertenencia >= 0 && noPertenencia <= 1 && pertenencia +
noPertenencia >= 0 && pertenencia + noPertenencia <= 1) {
            this.noPertenencia = noPertenencia;
        } else {
            throw new ArithmeticException("Valor de no pertenencia invalido: "
+ noPertenencia);
        }
    }

    public double getPertenencia() {
        return pertenencia;
    }

    public void setPertenencia(double pertenencia) {
        if (pertenencia >= 0 && pertenencia <= 1 && pertenencia +
noPertenencia >= 0 && pertenencia + noPertenencia <= 1) {
            this.pertenencia = pertenencia;
        } else {
            throw new ArithmeticException("Valor de pertenencia invalido: " +
pertenencia);
        }
    }

    public void negar() {

        double aux = pertenencia;
        pertenencia = noPertenencia;
        noPertenencia = aux;
    }

    public double entropia() {
        return 1 - pertenencia - noPertenencia;
    }

    public double biEntropia() {
        double e = 1/8;
        return Math.min(Math.min(2*(1-pertenencia),2*(1-
noPertenencia)),Math.min(Math.max(2*pertenencia,e),Math.max(2*noPertenencia,e)
));
    }
}
```

APÉNDICE B - ALTERNATIVA.JAVA

```
package ConjuntoDifuso;

import java.util.ArrayList;
import java.util.Iterator;

public class Alternativa {

    private ArrayList<ConjuntoIntuicionista> criterios;

    /**
     * Constructor vacio.
     */
    public Alternativa() {
        criterios = new ArrayList<ConjuntoIntuicionista>();
    }

    /**
     * Constructor para crear una alternativa con diferentes criterios.
     *
     * @param criterios ArrayList con los criterios de cada uno de los
expertos.
     */
    public Alternativa(ArrayList<ConjuntoIntuicionista> criterios) {
        this.criterios = criterios;
    }

    public int getCantidadCriterios() {
        return criterios.size();
    }

    public Iterator<ConjuntoIntuicionista> getIterator() {
        return criterios.iterator();
    }

    public ConjuntoIntuicionista elementAt(int i) {
        if (i < criterios.size() && i >= 0) {
            return criterios.get(i);
        } else {
            throw new IndexOutOfBoundsException("Intentando acceder a un
indice ilegal. Size="
                    + criterios.size() + " i=" + i);
        }
    }
```

```
    public void addCriterio(ConjuntoIntuicionista c) {
        criterios.add(c);
    }
}
```

APÉNDICE C - OPCIONES.JAVA

```
package ConjuntoDifuso;

import java.util.ArrayList;
import java.util.Arrays;
import java.util.Iterator;

public class Opciones {

    private ArrayList<Alternativa> alternativas;
    private double[] pesosCriterios;
    private double[] coeficienteCorrelacion;

    /**
     * Constructor vacio.
     */
    public Opciones() {
        alternativas = new ArrayList<Alternativa>();
    }

    /**
     * Constructor con una seri de alternativas dadas.
     *
     * @param alternativas Las distintas alternativas de las cuales hay que
obtener la mejor.
     */
    public Opciones(ArrayList<Alternativa> alternativas) {
        this.alternativas = alternativas;
    }

    public void addAlternativa(Alternativa a) {
        alternativas.add(a);
    }

    public int getCantidadAlternativas() {
        return alternativas.size();
    }

    public void sinPesos() {
        pesosCriterios = new
double[alternativas.get(0).getCantidadCriterios()];
        Arrays.fill(pesosCriterios, 1.0);
    }
```

```
    /**
     * Calculo de la formula 6 del trabajo de Jun Ye.
     */
    public void calcularPesos() {

        pesosCriterios = new
double[alternativas.get(0).getCantidadCriterios()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        double sumHj = 0, entropia;
        int i;

        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            i = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                entropia = itrCriterios.next().entropia();
                sumHj += entropia;
                pesosCriterios[i] += entropia;
                i++;
            }
        }
        sumHj = alternativas.get(0).getCantidadCriterios() - sumHj /
getCantidadAlternativas();

        for (i = 0; i < pesosCriterios.length; i++) {
            pesosCriterios[i] = 1 - pesosCriterios[i] / alternativas.size();
            pesosCriterios[i] = pesosCriterios[i] / sumHj;
        }
    }

    /**
     * Calculo de la formula 6 del trabajo de Jun Ye con la bientropia en vez
de la entropia.
     */
    public void calcularPesosBE() {

        pesosCriterios = new
double[alternativas.get(0).getCantidadCriterios()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        double sumHj = 0, entropia;
        int i;
```

```
        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            i = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                entropia = itrCriterios.next().biEntropia();
                sumHj += entropia;
                pesosCriterios[i] += entropia;
                i++;
            }
        }
        sumHj = alternativas.get(0).getCantidadCriterios() - sumHj /
getCantidadAlternativas();

        for (i = 0; i < pesosCriterios.length; i++) {
            pesosCriterios[i] = 1 - pesosCriterios[i] / alternativas.size();
            pesosCriterios[i] = pesosCriterios[i] / sumHj;
        }
    }

    /**
     * Basado en http://books.google.es/books?id=JpOPdzq-
4PgC&pg=PA1079&lpg=PA1079&dq=%22compatibility+degree%22+IFS&source=bl&ots=rCLH
M4_1x5&sig=LB4TgWL8oe6BnKsANHLMOkSTsY4&hl=es&ei=-F_qTM-
DLobNhAftkKWvCA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=8&ved=0CEsQ6AEwBw#v=onepa
ge&q&f=false
     * Se calcula mediante la convinacion MaxMin
     */
    public void calcularCompativilidadMm() {

        pesosCriterios = new
double[alternativas.get(0).getCantidadCriterios()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        int i;

        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            i = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
```

```
//                pesosCriterios[i] = Math.max(pesosCriterios[i],
Math.min(c.getNoPertenencia(), c.getPertenencia()));
                pesosCriterios[i] = Math.max(pesosCriterios[i],
Math.min(c.entropia(), c.getPertenencia()));
                i++;
            }
        }
    }

    /**
     * Se calcula mediante la combinacion MinMax
     */
    public void calcularCompativilidadmM() {

        pesosCriterios = new
double[alternativas.get(0).getCantidadCriterios()];
        Arrays.fill(pesosCriterios, 1.0);
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        int i;

        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            i = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
//                pesosCriterios[i] = Math.min(pesosCriterios[i],
Math.max(c.getNoPertenencia(), c.getPertenencia()));
                pesosCriterios[i] = Math.min(pesosCriterios[i],
Math.max(c.entropia(), c.getPertenencia()));
                i++;
            }
        }
    }

    public void calcularCompativilidadTNTC() {

        pesosCriterios = new
double[alternativas.get(0).getCantidadCriterios()];
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;

        for (int i = 0; i < alternativas.get(0).getCantidadCriterios(); i++) {
```

```
            for (int j = 0; j < alternativas.size(); j++) {
                a = alternativas.get(j);
                c = a.elementAt(i);
                if (j == 0) {
                    pesosCriterios[i] = c.getPertenencia() + c.entropia() -
c.getPertenencia() * c.entropia();
                } else {
                    pesosCriterios[i] = pesosCriterios[i] *
(c.getPertenencia() + c.entropia() - c.getPertenencia() * c.entropia());
                }
            }
        }
    }

    public void calcularCompativilidadTCTN() {

        pesosCriterios = new
double[alternativas.get(0).getCantidadCriterios()];
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;

        for (int i = 0; i < alternativas.get(0).getCantidadCriterios(); i++) {
            for (int j = 0; j < alternativas.size(); j++) {
                a = alternativas.get(j);
                c = a.elementAt(i);
                if (j == 0) {
                    pesosCriterios[i] = c.getPertenencia() * c.entropia();
                } else {
                    pesosCriterios[i] = pesosCriterios[i] +
(c.getPertenencia() * c.entropia()) - pesosCriterios[i] * (c.getPertenencia()
* c.entropia());
                }
            }
        }
    }

    public void mostrarPesos() {
        for (int i = 0; i < pesosCriterios.length; i++) {
            System.out.println("P" + (i + 1) + "= " + pesosCriterios[i]);
        }
    }

    /**
     * Calculo de la formula 8 del trabajo de Jun Ye.
     */
    public void calcularCoeficienteCorrelacion() {
```

```
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        int i, j;
        double sumwju = 0, sqrsum = 0;

        i = 0;
        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            j = 0;
            sumwju = 0;
            sqrsum = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
                sumwju += pesosCriterios[j] * c.getPertenencia();
                sqrsum += pesosCriterios[j] * (Math.pow(c.getPertenencia(), 2)
+ Math.pow(c.getNoPertenencia(), 2));
                j++;
            }
            coeficienteCorrelacion[i] = sumwju / Math.sqrt(sqrsum);
            i++;
        }// </editor-fold>
    }

    public void mostrarCoeficientes() {
        for (int i = 0; i < coeficienteCorrelacion.length; i++) {
            System.out.println("W" + (i + 1) + "= " +
coeficienteCorrelacion[i]);
        }
    }

    /**
     * Basado en el trabajo Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets
based on Hausdorff distance
     * La eliminacion de la distancia Hausdorf puede que no afecte los
resultados
     */
    public void calcularSimilaridadL() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
```

```
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        int i, j;
        double sumwmax = 0;

        i = 0;
        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            j = 0;
            sumwmax = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
                sumwmax += pesosCriterios[j] * Math.max(1 -
c.getPertenencia(), c.getNoPertenencia());
                j++;
            }
            sumwmax /= a.getCantidadCriterios();
            coeficienteCorrelacion[i] = 1 - sumwmax;
            i++;
        }// </editor-fold>
    }

    /**
     * Basado en el trabajo Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets
based on Hausdorff distance
     * La eliminacion de la distancia Hausdorf puede que no afecte los
resultados
     */
    public void calcularSimilaridadE() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        int i, j;
        double sumwmax = 0;

        i = 0;
        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
```

```
            j = 0;
            sumwmax = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
                sumwmax += pesosCriterios[j] * Math.max(1 -
c.getPertenencia(), c.getNoPertenencia());
                j++;
            }
            sumwmax /= a.getCantidadCriterios();
            coeficienteCorrelacion[i] = (Math.pow(Math.E, -sumwmax) - 1 /
Math.E) / (1 - 1 / Math.E);
            i++;
        }// </editor-fold>
    }

    /**
     * Basado en el trabajo Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets
based on Hausdorff distance
     * La eliminacion de la distancia Hausdorf puede que no afecte los
resultados
     */
    public void calcularSimilaridadC() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        int i, j;
        double sumwmax = 0;

        i = 0;
        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            j = 0;
            sumwmax = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
                sumwmax += pesosCriterios[j] * Math.max(1 -
c.getPertenencia(), c.getNoPertenencia());
                j++;
            }
            sumwmax /= a.getCantidadCriterios();
            coeficienteCorrelacion[i] = (1 - sumwmax) / (1 + sumwmax);
```

```
            i++;
        }// </editor-fold>
    }

    /**
     * Basado en el trabajo A New Similarity Measure on Intuitionistic Fuzzy
Sets
     * metodo ZF (Pag 3, formula 1)
     */
    public void calcularSimilaridadZF() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;

        for (int i = 0; i < alternativas.get(0).getCantidadCriterios(); i++) {
            for (int j = 0; j < alternativas.size(); j++) {
                a = alternativas.get(j);
                c = a.elementAt(i);
                coeficienteCorrelacion[j] += pesosCriterios[i] * ((1 -
c.getPertenencia()) + (c.getNoPertenencia()));
//                coeficienteCorrelacion[j] += (1 - c.getPertenencia()) +
(c.getNoPertenencia());
            }
        }

        for (int i = 0; i < coeficienteCorrelacion.length; i++) {
            coeficienteCorrelacion[i] = 1 - (coeficienteCorrelacion[i] / (2 *
alternativas.size()));
        }// </editor-fold>
    }

    /**
     * Basado en el trabajo A New Similarity Measure on Intuitionistic Fuzzy
Sets
     * metodo ZF(b) (Pag 3, formula 2)
     */
    public void calcularSimilaridadZFb() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        double alpha, omega;
```

```
        for (int i = 0; i < alternativas.get(0).getCantidadCriterios(); i++) {
            for (int j = 0; j < alternativas.size(); j++) {
                a = alternativas.get(j);
                c = a.elementAt(i);
                omega = c.getPertenencia() + c.entropia() *
c.getPertenencia();
                alpha = c.getNoPertenencia() + c.entropia() *
c.getNoPertenencia();
                coeficienteCorrelacion[j] += pesosCriterios[i] *
(Math.abs(omega - 1) + Math.abs(alpha));
            }
        }

        for (int i = 0; i < coeficienteCorrelacion.length; i++) {
            coeficienteCorrelacion[i] = 1 - (coeficienteCorrelacion[i] / (2 *
alternativas.size()));
        }// </editor-fold>
    }

    /**
     * Basado en el trabajo A New Similarity Measure on Intuitionistic Fuzzy
Sets
     * metodo ZF(b) (Pag 4, formula 3)
     */
    public void calcularSimilaridadZFmod() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        double alpha, beta, omega;

        for (int i = 0; i < alternativas.get(0).getCantidadCriterios(); i++) {
            for (int j = 0; j < alternativas.size(); j++) {
                a = alternativas.get(j);
                c = a.elementAt(i);
                omega = c.getPertenencia() + c.entropia() *
c.getPertenencia();
                alpha = c.getNoPertenencia() + c.entropia() *
c.getNoPertenencia();
                beta = 1 - omega - alpha;
                coeficienteCorrelacion[j] += pesosCriterios[i] *
(Math.abs(omega - 1) + Math.abs(alpha) + Math.abs(beta));
            }
        }
```

```
        for (int i = 0; i < coeficienteCorrelacion.length; i++) {
            coeficienteCorrelacion[i] = 1 - (coeficienteCorrelacion[i] / (2 *
alternativas.size()));
        }// </editor-fold>
    }

    /**
     * Basado en el trabajo Correltion of intuitionistic fuzzy sets
     * metodo de correlacion entre fuzzy sets con correlacion de Pearson (Pag
4, formula 6).
     * En cada una de las de las formulas se a sustituido (ub(xi)-ub_) por el
peso menos su media
     * para solucionar el problema de 0/0.
     */
    public void calcularCorrelacionPearson1() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        double[] mediasU = new double[alternativas.size()];
        double[] mediasV = new double[alternativas.size()];
        double[] mediasE = new double[alternativas.size()];
        double mediaPesos = 0;
        double sumUA, sumVA, sumEA;
        double sumUB, sumVB, sumEB;
        int i = 0, j;

        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
                mediasU[i] += c.getPertenencia();
                mediasV[i] += c.getNoPertenencia();
                mediasE[i] += c.entropia();
            }
            i++;
        }

        for (i = 0; i < alternativas.size(); i++) {
            mediasU[i] /= alternativas.get(0).getCantidadCriterios();
            mediasV[i] /= alternativas.get(0).getCantidadCriterios();
            mediasE[i] /= alternativas.get(0).getCantidadCriterios();
```

```
        }

        for (i = 0; i < pesosCriterios.length; i++) {
            mediaPesos += pesosCriterios[i];
        }
        mediaPesos /= pesosCriterios.length;

        itrAlternativas = alternativas.iterator();
        i = 0;
        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            sumUA = 0;
            sumVA = 0;
            sumEA = 0;

            sumUB = 0;
            sumVB = 0;
            sumEB = 0;
            j = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
                sumUA += (c.getPertenencia() - mediasU[i]) *
(pesosCriterios[j] - mediaPesos);
                sumVA += (c.getNoPertenencia() - mediasV[i]) *
(pesosCriterios[j] - mediaPesos);
                sumEA += (c.entropia() - mediasE[i]) * (pesosCriterios[j] -
mediaPesos);

                sumUB += Math.pow(c.getPertenencia() - mediasU[i], 2) *
Math.pow(pesosCriterios[j] - mediaPesos, 2);
                sumVB += Math.pow(c.getNoPertenencia() - mediasV[i], 2) *
Math.pow(pesosCriterios[j] - mediaPesos, 2);
                sumEB += Math.pow(c.entropia() - mediasE[i], 2) *
Math.pow(pesosCriterios[j] - mediaPesos, 2);
                j++;
            }
            coeficienteCorrelacion[i] = ((sumUA / Math.sqrt(sumUB)) + (sumVA /
Math.sqrt(sumVB)) + (sumEA / Math.sqrt(sumEB))) / 3;
            i++;
        }// </editor-fold>
    }

    /**
     * Basado en el trabajo Correltion of intuitionistic fuzzy sets
```

```
     * metodo de correlacion entre fuzzy sets con correlacion de Pearson (Pag
4, formula 6).
     * En cada una de las de las formulas se a sustituido (ub(xi)-ub_) por los
pesos para solucionar
     * el problema de 0/0.
     */
    public void calcularCorrelacionPearson2() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        double[] mediasU = new double[alternativas.size()];
        double[] mediasV = new double[alternativas.size()];
        double[] mediasE = new double[alternativas.size()];
        double sum2Pesos = 0;
        double sumUA, sumVA, sumEA;
        double sumUB, sumVB, sumEB;
        int i = 0, j;

        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
                mediasU[i] += c.getPertenencia();
                mediasV[i] += c.getNoPertenencia();
                mediasE[i] += c.entropia();
            }
            i++;
        }

        for (i = 0; i < alternativas.size(); i++) {
            mediasU[i] /= alternativas.get(0).getCantidadCriterios();
            mediasV[i] /= alternativas.get(0).getCantidadCriterios();
            mediasE[i] /= alternativas.get(0).getCantidadCriterios();
        }

        for (i = 0; i < pesosCriterios.length; i++) {
            sum2Pesos += Math.pow(pesosCriterios[i], 2);
        }

        itrAlternativas = alternativas.iterator();
        i = 0;
```

```
        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            sumUA = 0;
            sumVA = 0;
            sumEA = 0;

            sumUB = 0;
            sumVB = 0;
            sumEB = 0;
            j = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
                sumUA += (c.getPertenencia() - mediasU[i]) *
pesosCriterios[j];
                sumVA += (c.getNoPertenencia() - mediasV[i]) *
pesosCriterios[j];
                sumEA += (c.entropia() - mediasE[i]) * pesosCriterios[j];

                sumUB += Math.pow(c.getPertenencia() - mediasU[i], 2) *
sum2Pesos;
                sumVB += Math.pow(c.getNoPertenencia() - mediasV[i], 2) *
sum2Pesos;
                sumEB += Math.pow(c.entropia() - mediasE[i], 2) * sum2Pesos;
                j++;
            }
            coeficienteCorrelacion[i] = ((sumUA / Math.sqrt(sumUB)) + (sumVA /
Math.sqrt(sumVB)) + (sumEA / Math.sqrt(sumEB))) / 3;
            i++;
        }// </editor-fold>
    }

    /**
     * Basado ne el trabajo Correlation of interval-valued intuitionistic
fuzzy sets
     * metodo de similiradid basado en la energia de un conjunto (Pag 4,
Definition 1)
     */
    public void calcularCorrelacionEnergia() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
```

```
        int i = 0, j;
        double sum2;

        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            j = 0;
            sum2 = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
//                coeficienteCorrelacion[i] += (c.getPertenencia()) *
pesosCriterios[j];
                coeficienteCorrelacion[i] += c.getPertenencia();
                sum2 += Math.pow(c.getPertenencia(), 2) +
Math.pow(c.getNoPertenencia(), 2);
                j++;
            }
            coeficienteCorrelacion[i] /= Math.sqrt(sum2 *
alternativas.get(0).getCantidadCriterios());
            i++;
        }// </editor-fold>

    }

    public void calcularSimilaridadREF() {
        // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Code">

        coeficienteCorrelacion = new double[alternativas.size()];
        Iterator<Alternativa> itrAlternativas = alternativas.iterator();
        Iterator<ConjuntoIntuicionista> itrCriterios;
        Alternativa a;
        ConjuntoIntuicionista c;
        int i, j;
        double sumwmax = 0;

        i = 0;
        while (itrAlternativas.hasNext()) {
            a = itrAlternativas.next();
            itrCriterios = a.getIterator();
            j = 0;
            sumwmax = 0;
            while (itrCriterios.hasNext()) {
                c = itrCriterios.next();
                sumwmax += pesosCriterios[j] * (1 -
Math.abs(((Math.pow(Math.E, c.getPertenencia())) / (Math.E - 1)) - 1));
                j++;
```

```
            }
            sumwmax /= a.getCantidadCriterios();
            coeficienteCorrelacion[i] = 1 - sumwmax;
            i++;
        }// </editor-fold>
    }

    public void ordernarAlternativas() {

        double[] aux = new double[coeficienteCorrelacion.length];
        System.arraycopy(coeficienteCorrelacion, 0, aux, 0,
coeficienteCorrelacion.length);

        int[] idx = new int[coeficienteCorrelacion.length];
        for (int i = 0; i < coeficienteCorrelacion.length; i++) {
            idx[i] = i + 1;
        }

        QuickSort.quicksort(aux, idx);

        System.out.print("El orden es: A" + idx[0]);
        for (int i = 1; i < idx.length; i++) {
            System.out.print(" > A" + idx[i]);
        }
        System.out.println(".");
    }

    public boolean isEqual(int cuantos) {
        for (int i = 1; i < cuantos; i++) {
            if (coeficienteCorrelacion[0] != coeficienteCorrelacion[i]) {
                return false;
            }
        }
        return true;
    }

    public boolean isEqualDeVerda(int num, int prec) {
        double x = round(coeficienteCorrelacion[0], prec);
        double y;
        for (int i = 1; i < num; i++) {
            y = round(coeficienteCorrelacion[i], prec);
            if (x != y) {
                return false;
            }
        }
        return true;
```

```
    }

    private double round(double d, int precision) {
        int exp = (int)Math.pow(10, precision);
        return d = (int)(d * exp + 0.5) / (double)exp;
    }
}
```

APÉNDICE D - QUICKSORT.JAVA

```
package ConjuntoDifuso;

/**
 *
 * @author http://stackoverflow.com/questions/951848/java-array-sort-quick-
way-to-get-a-sorted-list-of-indices-of-an-array
 */
public class QuickSort {

    public QuickSort() {
    }

    /**
     * Algoritmo QuickSort para ordenar de forma ascendiente los indices de un
array
     * en funcion de los valores en dichos indices.
     *
     * @param main Array a ordenar en funcion de los indices
     * @param index Array con los indices del main. Tiene la siguiente forma:
[1,2,3..]
     */
    public static void quicksort(double[] main, int[] index) {
        quicksort(main, index, 0, index.length - 1);
    }

    // quicksort a[left] to a[right]
    public static void quicksort(double[] a, int[] index, int left, int right)
{
        if (right <= left) {
            return;
        }
        int i = partition(a, index, left, right);
        quicksort(a, index, left, i - 1);
        quicksort(a, index, i + 1, right);
    }

    // partition a[left] to a[right], assumes left < right
    private static int partition(double[] a, int[] index, int left, int right)
{
        int i = left - 1;
        int j = right;
        while (true) {
            while (less(a[++i], a[right])) // find item on left to swap
```

```
            // a[right] acts as sentinel
            {
                while (less(a[right], a[--j])) // find item on right to swap
                {
                    if (j == left) {
                        break;          // don't go out-of-bounds
                    }
                }
            }
            if (i >= j) {
                break;                  // check if pointers cross
            }
            exch(a, index, i, j);              // swap two elements into
place
        }
        exch(a, index, i, right);              // swap with partition element
        return i;
    }

    // is x < y ?
    private static boolean less(double x, double y) {
        return (x > y);
//        return (x < y);
    }

    // exchange a[i] and a[j]
    private static void exch(double[] a, int[] index, int i, int j) {
        double swap = a[i];
        a[i] = a[j];
        a[j] = swap;
        int b = index[i];
        index[i] = index[j];
        index[j] = b;
    }
}
```

APÉNDICE E - SIMILIRADIDAD1.JAVA

```
package Metodos;

import ConjuntoDifuso.Alternativa;
import ConjuntoDifuso.ConjuntoIntuicionista;
import ConjuntoDifuso.Opciones;

public class Similiradidad1 {

    private Opciones datos;

    public Similiradidad1() {

//        Ejemplo 4.1.

        System.out.println("****************************");
        System.out.println("Cargando ejemplo 4.1...");
        System.out.println("****************************\n");
        initExample41();

        System.out.println("Sin pesos...");
        datos.sinPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando pesos...");
        datos.calcularPesos();
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando compativilidad MaxMin...");
        datos.calcularCompativilidadMm();
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando compativilidad MinMax...");
        datos.calcularCompativilidadmM();
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();
```

```
        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando compativilidad T-Conorma T-Norma...");
        datos.calcularCompativilidadTCTN();
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando compativilidad T-Norma T-Conorma...");
        datos.calcularCompativilidadTNTC();
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

//        Ejemplo 4.2.

        System.out.println("****************************");
        System.out.println("Cargando ejemplo 4.2...");
        System.out.println("****************************\n");
        initExample42();

        System.out.println("Sin pesos...");
        datos.sinPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando pesos...");
        datos.calcularPesos();
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando compativilidad MaxMin...");
        datos.calcularCompativilidadMm();
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando compativilidad MinMax...");
        datos.calcularCompativilidadmM();
```

```
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando compativilidad T-Conorma T-Norma...");
        datos.calcularCompativilidadTCTN();
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();

        System.out.println("Calculando compativilidad T-Norma T-Conorma...");
        datos.calcularCompativilidadTNTC();
        datos.mostrarPesos();
        System.out.println();

        aplicarMetodos();
    }

    private void initExample41() {

        datos = new Opciones();
        Alternativa a;
        a = new Alternativa();
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.45, 0.35));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.5, 0.3));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.2, 0.55));
        datos.addAlternativa(a);

        a = new Alternativa();
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.65, 0.25));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.65, 0.25));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.55, 0.15));
        datos.addAlternativa(a);

        a = new Alternativa();
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.45, 0.35));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.55, 0.35));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.55, 0.2));
        datos.addAlternativa(a);

        a = new Alternativa();
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.75, 0.15));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.65, 0.2));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.35, 0.15));
```

```
        datos.addAlternativa(a);

    }

    private void initExample42() {

        datos = new Opciones();
        Alternativa a;
        a = new Alternativa();
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.85, 0.1));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.75, 0.1));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.7, 0.15));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.7, 0.1));
        datos.addAlternativa(a);

        a = new Alternativa();
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.7, 0.1));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.8, 0.15));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.85, 0.1));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.7, 0.15));
        datos.addAlternativa(a);

        a = new Alternativa();
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.8, 0.1));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.85, 0.1));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.75, 0.15));
        a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(0.7, 0.15));
        datos.addAlternativa(a);
    }

    private void aplicarMetodos() {

        System.out.print("Calculando coeficientes de correlacion (Metodo de
Jun Ye)...");
        datos.calcularCoeficienteCorrelacion();
        System.out.println();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");

        System.out.println("Calculando similaridad segun Similarity measures
of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance metodo L (Pag 5,
formula 15)");
        datos.calcularSimilaridadL();
        datos.mostrarCoeficientes();
```

```
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");

        System.out.println("Calculando similaridad segun Similarity measures
of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance metodo E (Pag 5,
formula 16)");
        datos.calcularSimilaridadE();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");

        System.out.println("Calculando similaridad segun Similarity measures
of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance metodo C (Pag 5,
formula 17)");
        datos.calcularSimilaridadC();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");

        System.out.println("Calculando similaridad segun A New Similarity
Measure on Intuitionistic Fuzzy Sets, metodo ZF (Pag 3, formula 1)");
        datos.calcularSimilaridadZF();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");

        System.out.println("Calculando similaridad segun A New Similarity
Measure on Intuitionistic Fuzzy Sets, metodo ZF(b) (Pag 3, formula 2)");
        datos.calcularSimilaridadZFb();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");

        System.out.println("Calculando similaridad segun A New Similarity
Measure on Intuitionistic Fuzzy Sets, metodo ZF(mod) (Pag 4, formula 3)");
        datos.calcularSimilaridadZFmod();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");
```

```
        System.out.println("Calculando similaridad segun Correltion of
intuitionistic fuzzy sets, metodo de correlacion de Pearson (Pag 4, formula
6)");
        datos.calcularCorrelacionPearson1();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");

        System.out.println("Calculando similaridad segun Correltion of
intuitionistic fuzzy sets, metodo de correlacion de Pearson2 (Pag 4, formula
6)");
        datos.calcularCorrelacionPearson2();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");

        System.out.println("Calculando similaridad segun Correlation of
interval-valued intuitionistic fuzzy sets, metodo de similiradid basado en la
energia de un conjunto (Pag 4, Definition 1)");
        datos.calcularCorrelacionEnergia();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");

        System.out.println("Calculando similaridad segun REF, con a1: y=x y
a2: y=(e^x-1)/(e-1))");
        datos.calcularSimilaridadREF();
        datos.mostrarCoeficientes();
        System.out.println();
        datos.ordernarAlternativas();
        System.out.println("//////////////////////////////////\n");
    }

    /**
     * @param args the command line arguments
     */
    public static void main(String[] args) {

        Similiradidad1 s = new Similiradidad1();
    }
}
```

APÉNDICE F - BIENTROPIATHREAD.JAVA

```
package Metodos;

import ConjuntoDifuso.Alternativa;
import ConjuntoDifuso.ConjuntoIntuicionista;
import ConjuntoDifuso.Opciones;
import java.util.Arrays;

public class BiEntropiaThread extends Thread {

    private final int CRITERIOS = 4;                    //FASTEST 2     DEFAULT
4
    private final int ALTERNATIVAS = 4;                 //FASTEST 2     DEFAULT
4
    public final static double CRECIMIENTO = 0.05;      //FASTEST 0.10  DEFAULT
0.05
    private final int PRECISION = 2;                    //DEFAULT 2
    public final static double U = 0.5;                 //FASTEST 0.6   DEFAULT
0.5
    public final static double V = 0.4;                 //FASTEST 0.4   DEFAULT
0.5
    public final static double MAX = 0.8;               //FASTEST 0.8   DEFAULT
0.9
    public final static double MIN = 0.1;
    private double[][] elementos = new double[ALTERNATIVAS][CRITERIOS * 2];
    private Opciones datosE;
    private Opciones datosBE;
    private boolean parar = false;
    private int iguales = 0;
    private double initial;
    private double limite;

    public BiEntropiaThread(double i, double l) {

        this.initial = i;
        this.limite = l;
    }

    @Override
    public void run() {

        for (int i = 0; i < elementos.length - 2; i++) {
            init(elementos[i]);
        }
```

```
        elementos[ALTERNATIVAS - 1][CRITERIOS * 2 - 1] = initial;

        long iter = 0;
        StringBuilder txt = new StringBuilder("CHECK:\n");
        while (!parar) {

            if (iter >= 99999999) {
                txt.delete(7, txt.length());
                System.out.println(txt.append(mostrarIFS()));
                iter = 0;
            }
            iter++;

            if (isValid()) {
                datosE = createOpciones();
                datosBE = createOpciones();
                calcularIguales();
                iter = 0;
            }
            next(0);
        }
    }

    /**
     * Este metodo verifica si los conjuntos creados son legales, es decir que
la suma
     * entre la mu y la nu es menor o igual a 1.
     *
     * @return true si la suma de mu y nu es menor o igual 1, false en
cualquier otro caso.
     */
    private boolean isValid() {

        for (int i = 0; i < elementos.length; i++) {
            for (int j = 0; j < elementos[0].length; j += 2) {
                if (elementos[i][j] + elementos[i][j + 1] > 1.0) {
                    return false;
                }
            }
        }
        return true;
    }

    private void init(double[] arr) {
        Arrays.fill(arr, U);
        for (int i = 1; i <= arr.length - 1; i += 2) {
```

```
            arr[i] = V;
        }
    }

    private Opciones createOpciones() {
        Opciones datos = new Opciones();
        Alternativa a;

        for (int i = 0; i < elementos.length; i++) {
            a = new Alternativa();
            for (int j = 0; j < elementos[0].length; j += 2) {
                a.addCriterio(new ConjuntoIntuicionista(elementos[i][j],
elementos[i][j + 1]));
            }
            datos.addAlternativa(a);
        }
        return datos;
    }

    private void next(int alt) {

        elementos[alt][0] += CRECIMIENTO;
        for (int i = 0; i < elementos[alt].length; i++) {

            if (i % 2 == 0 && elementos[alt][i] > MAX) {
                elementos[alt][i] = U;
                elementos[alt][i + 1] -= CRECIMIENTO;
            } else if (i % 2 != 0 && elementos[alt][i] < MIN) {
                elementos[alt][i] = V;
                if (i + 1 < CRITERIOS * 2) {
                    elementos[alt][i + 1] += CRECIMIENTO;
                }
            } else {
                break;
            }
        }

        quitarImposibles();
        if (hasCheckedAll()) {
            parar = true;
        }

        if (hasCheckedArray(elementos[alt]) && alt < ALTERNATIVAS - 1) {
            next(alt + 1);
            init(elementos[alt]);
            elementos[ALTERNATIVAS - 1][CRITERIOS * 2 - 2] > 1.0) {
```

```
        }
    }

    private boolean hasCheckedArray(double[] arr) {
        for (int i = 0; i < arr.length; i++) {
            if (i % 2 == 0 && arr[i] + CRECIMIENTO > MAX) {
                continue;
            } else if (i % 2 == 1 && arr[i] - CRECIMIENTO < MIN) {
                continue;
            } else {
                return false;
            }
        }
        return true;
    }

    private boolean hasCheckedAll() {
        for (int i = 0; i < elementos.length; i++) {
            if (!hasCheckedArray(elementos[i])) {
                return false;
            }
        }
        return true;
    }

    private void quitarImposibles() {

        outer:
        for (int i = elementos.length - 1; i >= 0; i--) {
            for (int j = elementos[0].length - 1; j >= 0; j -= 2) {
                if (elementos[i][j] + elementos[i][j - 1] > 1.0) {
                    reiniciarHasta(i, j);
                    elementos[i][j] -= CRECIMIENTO;
                }
            }
        }
    }

    private void reiniciarHasta(int index1, int index2) {
        for (int i = 0; i < index1; i++) {
            init(elementos[i]);
        }
        for (int i = 0; i < index2; i++) {
            if (i % 2 == 0) {
                elementos[index1][i] = U;
            } else {
```

```
                elementos[index1][i] = V;
            }
        }
    }

    private void calcularIguales() {

        datosE.calcularPesos();
        datosE.calcularCoeficienteCorrelacion();

        if (datosE.isEqual(2) && !areRepeated()) {

            datosBE.calcularPesosBE();
            datosBE.calcularCoeficienteCorrelacion();
            if (!datosBE.isEqualDeVerda(2, PRECISION)) {
                System.out.println("Con entropia:");
                datosE.mostrarCoeficientes();
                System.out.println("Con bi-entropia:");
                datosBE.mostrarCoeficientes();
                System.out.println();
                System.out.println(mostrarIFS());
                System.out.println("////////////////////////////////");
                iguales++;
            }
        }
    }

    private boolean areRepeated() {

        for (int i = 0; i < elementos.length - 1; i++) {
            for (int j = i + 1; j < elementos.length; j++) {
                if (areTheSame(elementos[i], elementos[j])) {
                    return true;
                }
            }
        }
        return false;
    }

    private boolean areTheSame(double[] arr1, double[] arr2) {
        for (int i = 0; i < arr1.length; i++) {
            if (arr1[i] != arr2[i]) {
                return false;
            }
        }
        return true;
```

```
    }

    private StringBuilder mostrarIFS() {

        StringBuilder txt = new StringBuilder("");
        for (int i = 0; i < elementos.length; i++) {
            txt.append("A").append(i + 1).append("=");
            for (int j = 0; j < elementos[0].length; j++) {
                txt.append(" ").append(round(elementos[i][j]));
            }
            txt.append("\n");
        }
        return txt;
    }

    private double round(double d) {

        return d = (int) (d * 100 + 0.5) / 100.0;
    }
}
```

APÉNDICE G - BIENTROPIARUN.JAVA

```
package Metodos;

import java.util.concurrent.ExecutorService;
import java.util.concurrent.Executors;

public class BiEntropiaRun {

    public BiEntropiaRun() {
    }

    private void executeThreads() {

        ExecutorService executor;
        executor = Executors.newCachedThreadPool();

        BiEntropiaThread bet;
        for (double i = BiEntropiaThread.V; i >= BiEntropiaThread.MIN; i -=
BiEntropiaThread.CRECIMIENTO) {
            bet = new BiEntropiaThread(round(i), round(i-
BiEntropiaThread.CRECIMIENTO));
            executor.execute(bet);
        }
        executor.shutdown();
        while (!executor.isTerminated()) {
        }

    }

    private double round(double d) {
        return d = (int) (d * 100 + 0.5) / 100.0;
    }

    /**
     * @param args the command line arguments
     */
    public static void main(String[] args) {

        BiEntropiaRun ber = new BiEntropiaRun();
        ber.executeThreads();

    }
}
```

TOMA DE DECISIÓN UTILIZANDO MEDIDAS DE SIMILITUD Y GRADOS DE COMPATIBILIDAD ENTRE CONJUNTOS INTUICIONISTAS DIFUSOS DE ATANASSOV

Timothy Miller Corona

Índice

Introducción (I)

- Un sistema para la ayuda de toma de decisión es:
  - Un sistema informático utilizado para servir de apoyo, más que automatizar, el proceso de toma de decisiones
  - La decisión es una elección entre alternativas basadas en estimaciones de los valores de esas alternativas

Introducción (II)

- La ayuda para la toma de decisión necesita dos cálculos:
  - Cálculo de pesos
  - Clasificación de alternativas

Cálculo de pesos (I)

- Se calculan mediante operaciones en las columnas

		CRITERIOS								
		C_1		C_2		C_3		…	C_m	
ALTERNATIVAS	A_1	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$		$\mu(x)$	$\nu(x)$
	A_2	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$		$\mu(x)$	$\nu(x)$
	A_3	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$		$\mu(x)$	$\nu(x)$
	…									
	A_n	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$		$\mu(x)$	$\nu(x)$

- Serán empleados para dar prioridad a algunos criterios

Cálculo de pesos (II)

-

- Sin pesos

- Método Max Min
  - $w_j = \max_{i=1..m}\left[\min\left(\mu_{A_i}(C_j), \pi_{A_i}(C_j)\right)\right]$

- Método Min Max
  - $w_j = \min_{i=1..m}\left[\max\left(\mu_{A_i}(C_j), \pi_{A_i}(C_j)\right)\right]$

Cálculo de pesos (III)

- Método T-Conorma T-Norma
  - $w_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\mu_{A_i}(C_j)\cdot\pi_{A_i}(C_j)\right) - \prod_{i=1}^{m}\left(\mu_{A_i}(C_j)\cdot\pi_{A_i}(C_j)\right)$

- Método T-Norma T-Conorma
  - $w_j = \prod_{i=1}^{m}\left(\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) - \mu_{A_i}(C_j)\cdot\pi_{A_i}(C_j)\right)$

- Método Jun Ye
  - $w_j = \dfrac{1-\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(\pi_{A_i}(C_j)\right)}{n-\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(\pi_{A_i}(C_j)\right)\right]}$

Clasificación de alternativas (I)

- Se calculan mediante operaciones en las filas, junto con los pesos

		CRITERIOS								
		C_1		C_2		C_3		...	C_m	
ALTERNATIVAS	A_1	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$		$\mu(x)$	$\nu(x)$
	A_2	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$		$\mu(x)$	$\nu(x)$
	A_3	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$		$\mu(x)$	$\nu(x)$
	...									
	A_n	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$		$\mu(x)$	$\nu(x)$

- La que tenga el valor más alto será la mejor alternativa

- En general, se basan en medidas de correlación o similitud entre dos conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov

Clasificación de alternativas (II)

- Cálculo de la correlación (Gerstenkorn & Mańko, 1991)
  - Fórmula original
    - $C(A,B) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}(\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)+\nu_A(x)\cdot\nu_B(x))}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\mu_A{}^2(x)+\nu_A{}^2(x))}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\mu_B{}^2(x)+\nu_B{}^2(x))}}$
  - Fórmula adaptada
    - $W_i(A_i, A^*) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \mu_{A_i}(c_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}{}^2(c_j)+\nu_{A_i}{}^2(c_j)\right)}}$

Clasificación de alternativas (III)

- Cálculo de correlación Jun Ye
  - Fórmula original
    - $W_i(A_i, A^*) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_{A_i}(C_j) \cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\mu_{A_i}{}^2(C_j) + \nu_{A_i}{}^2(C_j) \right) \cdot w_j}}$

Clasificación de alternativas (IV)

- Cálculo de correlación de Pearson
  - Fórmula original
    - $C(A,B) = \frac{1}{3} \cdot (r_1 + r_2 + r_3)$
    - $r_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\mu_A(x_j) - \overline{\mu_A}) \cdot (\mu_B(x_j) - \overline{\mu_B})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\mu_A(x_j) - \overline{\mu_A})^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(\mu_B(x_j) - \overline{\mu_B})^2}}$
    - $r_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\nu_A(x_j) - \overline{\nu_A}) \cdot (\nu_B(x_j) - \overline{\nu_B})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\nu_A(x_j) - \overline{\nu_A})^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(\nu_B(x_j) - \overline{\nu_B})^2}}$
    - $r_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\pi_A(x_j) - \overline{\pi_A}) \cdot (\pi_B(x_j) - \overline{\pi_B})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\pi_A(x_j) - \overline{\pi_A})^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(\pi_B(x_j) - \overline{\pi_B})^2}}$

Clasificación de alternativas (V)

- Cálculo de correlación de Pearson
  - Primera fórmula adaptada
    - $W_i(A_i, A^*) = \frac{1}{3} \cdot (r_1 + r_2 + r_3)$
    - $r_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}(C_j) - \overline{\mu_{A_i}}\right)\cdot(w_j - \overline{w})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}(C_j) - \overline{\mu_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(w_j - \overline{w})^2}}$
    - $r_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_{A_i}(C_j) - \overline{\nu_{A_i}}\right)\cdot(w_j - \overline{w})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_{A_i}(C_j) - \overline{\nu_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(w_j - \overline{w})^2}}$
    - $r_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_{A_i}(C_j) - \overline{\pi_{A_i}}\right)\cdot(w_j - \overline{w})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_{A_i}(C_j) - \overline{\pi_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(w_j - \overline{w})^2}}$

Clasificación de alternativas (VI)

- Cálculo de correlación de Pearson
  - Segunda fórmula adaptada
    - $W_i(A_i, A^*) = \frac{1}{3} \cdot (r_1 + r_2 + r_3)$
    - $r_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}(C_j) - \overline{\mu_{A_i}}\right) \cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}(C_j) - \overline{\mu_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(w_j)^2}}$
    - $r_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_{A_i}(C_j) - \overline{\nu_{A_i}}\right) \cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\nu_{A_i}(C_j) - \overline{\nu_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(w_j)^2}}$
    - $r_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_{A_i}(C_j) - \overline{\pi_{A_i}}\right) \cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\pi_{A_i}(C_j) - \overline{\pi_{A_i}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(w_j)^2}}$

Clasificación de alternativas (VII)

-
- Cálculo de similitud mediante la distancia de Hausdorff
  - Fórmula original
    - $d_H(A,B) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \max\left(\left|\mu_A(x_j) - \mu_B(x_j)\right|, \left|\nu_A(x_j) - \nu_B(x_j)\right|\right)$
  - Fórmula adaptada
    - $d_{H_i} = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \max\left(1 - \mu_{A_i}(C_j), \nu_{A_i}(C_j)\right)$

Clasificación de alternativas (VIII)

- Cálculo de similitud mediante la distancia de Hausdorff
  - Método L
    - $W_i(A_i, A^*) = 1 - d_{H_i}$
  - Método E
    - $W_i(A_i, A^*) = \frac{e^{-d_{H_i}} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$
  - Método C
    - $W_i(A_i, A^*) = \frac{1 - d_{H_i}}{1 + d_{H_i}}$

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Clasificación de alternativas (IX)

- Cálculo de similitud mediante el método de (Zhang & Fu, 2006)
  - Método original
    - $S_0(A,B) = 1 - \frac{1}{2\cdot n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)$
  - Método adaptado
    - $W_i(A_i, A^*) = 1 - \frac{1}{2\cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \mu_{A_i}(C_j) + \nu_{A_i}(C_j)\right) \cdot w_j$

Clasificación de alternativas (X)

- Cálculo de similitud mediante el método de (Zhang & Fu, 2006)
  - Primera mejora del método original
    - $S_1(A,B) = 1 - \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} |(\mu_A(x_i) + \pi_A(x_i) \cdot \mu_A(x_i)) - (\mu_B(x_i) + \pi_B(x_i) \cdot \mu_B(x_i))| \\ |(\nu_A(x_i) + \pi_A(x_i) \cdot \nu_A(x_i)) - (\nu_B(x_i) + \pi_B(x_i) \cdot \nu_B(x_i))| \end{pmatrix}$
  - Primera mejora del método adaptada
    - $W_i(A_i, A^*) = 1 - \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} \left|1 - \left(\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) \cdot \mu_{A_i}(C_j)\right)\right| + \\ \nu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j) \cdot \nu_{A_i}(C_j) \end{pmatrix} \cdot w_j$

Clasificación de alternativas (XI)

- Cálculo de similitud mediante el método de (Zhang & Fu, 2006)
  - Segunda mejora del método original
    - $S_2(A,B) = 1 - \frac{1}{2\cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\begin{array}{c} |(\mu_A(x_i) + \pi_A(x_i)\cdot\mu_A(x_i)) - (\mu_B(x_i) + \pi_B(x_i)\cdot\mu_B(x_i))| + \\ |(\nu_A(x_i) + \pi_A(x_i)\cdot\nu_A(x_i)) - (\nu_B(x_i) + \pi_B(x_i)\cdot\nu_B(x_i))| + \\ \left| \begin{array}{c} (1 - (\mu_A(x_i) + \pi_A(x_i)\cdot\mu_A(x_i)) - (\nu_A(x_i) + \pi_A(x_i)\cdot\nu_A(x_i))) - \\ (1 - (\mu_B(x_i) + \pi_B(x_i)\cdot\mu_B(x_i)) - (\nu_B(x_i) + \pi_B(x_i)\cdot\nu_B(x_i))) \end{array} \right| \end{array} \right)$
  - Segunda mejora del método adaptada
    - $W_i(A_i, A^*) = 1 - \frac{1}{2\cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left[\begin{array}{c} |1 - (\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j)\cdot\mu_{A_i}(C_j))| + \\ \nu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j)\cdot\nu_{A_i}(C_j) + \\ ||1 - |1 - (\mu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j)\cdot\mu_{A_i}(C_j))| - (\nu_{A_i}(C_j) + \pi_{A_i}(C_j)\cdot\nu_{A_i}(C_j))|| \end{array} \right] \cdot w_j$

upna Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Clasificación de alternativas (XII)

- Cálculo de la similitud mediante REF (Bustince, Barrenechea, & Pagola, 2006)
  - Método original
    - $SM(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \left|\frac{e^{\mu_A(x_i)}-1}{e-1} - \frac{e^{\mu_B(x_i)}-1}{e-1}\right|\right];$
  - Método adaptado
    - $W_i(A_i, A^*) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \left|\frac{e^{\mu_{A_i}(c_j)}-1}{e-1} - 1\right|\right) \cdot w_j$

Comparación de metodologías (I)

- Ejemplo 1

MÉTODOS PARA ORDENAR LAS ALTERNATIVAS	CÁLCULO DE PESOS					
	SIN PESOS	PESOS	MAX MIN	MIN MAX	T-C T-N	T-N T-C
JUN YE	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1
MÉTODO L	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1
MÉTODO E	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1
MÉTODO C	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1
ZF	4 2 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1
ZF1	4 2 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1
ZF2	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1	2 4 3 1	4 2 3 1
PEARSON1	--------	2 4 3 1	1 3 4 2	2 4 3 1	1 3 4 2	2 4 3 1
PEARSON2	1 4 2 3	2 4 3 1	1 3 4 2	2 4 3 1	1 3 4 2	2 4 3 1
REF	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3
ENERGÍA	2 4 3 1					

Comparación de metodologías (II)

- Ejemplo 2

MÉTODOS PARA ORDENAR LAS ALTERNATIVAS	CÁLCULO DE PESOS: SIN PESOS	PESOS	MAX MIN	MIN MAX	T-C T-N	T-N T-C
JUN YE	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2
MÉTODO L	3 2 1	3 2 1	3 1 2	3 2 1	3 2 1	3 2 1
MÉTODO E	3 2 1	3 2 1	3 1 2	3 2 1	3 2 1	3 2 1
MÉTODO C	3 2 1	3 2 1	3 1 2	3 2 1	3 2 1	3 2 1
ZF	3 1 2	3 2 1	3 1 2	3 1 2	3 1 2	3 1 2
ZF1	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2	1 3 2
ZF2	3 1 2	3 1 2	1 3 2	3 1 2	1 3 2	3 1 2
PEARSON1	------	1 2 3	3 2 1	2 1 3	3 2 1	1 2 3
PEARSON2	3 2 1	1 2 3	3 2 1	2 1 3	3 2 1	1 2 3
REF	3 2 1	3 2 1	3 1 2	3 2 1	3 2 1	3 2 1
ENERGÍA	1 3 2					

Bi-entropía (I)

- Utilizar la bi-entropía para mejorar la ayuda a toma de decisión
- Basarse en las investigaciones realizadas por Jun Ye
- Obtener mejores resultados que los obtenidos por Jun Ye

Bi-entropía (II)

- La función de bi-entropía proporciona una herramienta funcional para aproximar el concepto de entropía teniendo en cuenta cada una de las variables por separado, y no en conjunto.

- Fórmula de bi-entropía generalizada
  - $G_E(x,y) = min[2 \cdot (1-x), 2 \cdot (1-y), max(2 \cdot x, e), max(2 \cdot y, e)]$

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Bi-entropía (III)

-
- Método original (Jun Ye)
  - Cálculo de pesos
    - $w_j = \dfrac{1-\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(\pi_{A_i}(C_j)\right)}{n-\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(\pi_{A_i}(C_j)\right)\right]}$
  - Ordenación de alternativas
    - $W_i(A_i, A^*) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\mu_{A_i}(C_j)\cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}{}^2(C_j)+\nu_{A_i}{}^2(C_j)\right)\cdot w_j}}$

Bi-entropía (IV)

-
- Método enriquecido con la bi-entropía
  - Cálculo de pesos
    - $w_j = \dfrac{1-\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left[G_{E\,A_i}\left(\mu_{A_i}(C_j),\nu_{A_i}(C_j)\right)\right]}{n-\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left[G_{E\,A_i}\left(\mu_{A_i}(C_j),\nu_{A_i}(C_j)\right)\right]\right\}}$
  - Ordenación de alternativas
    - $W_i(A_i, A^*) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\mu_{A_i}(C_j)\cdot w_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{A_i}{}^2(C_j)+\nu_{A_i}{}^2(C_j)\right)\cdot w_j}}$

Bi-entropía (V)

- Caso ejemplo 1

		CRITERIOS							
		C_1		C_2		C_3		C_4	
		$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$	$\mu(x)$	$\nu(x)$
ALTERNATIVAS	A_1	0.75	0.20	0.75	0.10	0.75	0.15	0.55	0.3
	A_2	0.65	0.25	0.70	0.25	0.75	0.15	0.70	0.20
	A_3	0.60	0.15	0.65	0.15	0.50	0.20	0.60	0.25
	A_4	0.65	0.25	0.70	0.20	0.75	0.15	0.55	0.35

Bi-entropía (VI)

- Valores obtenidos mediante el método de Jun Ye
  - $W_1(A_1, A^*) = 0.9540460747365035;$
  - $W_2(A_2, A^*) = 0.9540460747365035;$
  - $W_3(A_3, A^*) = 0.9470163075640782;$
  - $W_4(A_4, A^*) = 0.930751308746271;$

- Valores obtenidos mediante la aplicación de la bi-entropía
  - $W_1(A_1, A^*) = 0.9605651359318248;$
  - $W_2(A_2, A^*) = 0.9545818649325084;$
  - $W_3(A_3, A^*) = 0.9480736711264072;$
  - $W_4(A_4, A^*) = 0.938656844319041 4;$

Bi-entropía (VII)

- Caso ejemplo 2

		CRITERIOS							
		C_1		C_2		C_3		C_4	
		μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)	μ(x)	ν(x)
ALTERNATIVAS	A_1	0.70	0.20	0.55	0.25	0.70	0.15	0.60	0.10
	A_2	0.70	0.15	0.55	0.10	0.70	0.20	0.60	0.25
	A_3	0.55	0.35	0.65	0.15	0.70	0.15	0.60	0.15
	A_4	0.50	0.40	0.70	0.10	0.65	0.15	0.65	0.15

Bi-entropía (VIII)

- Valores obtenidos mediante el método de Jun Ye
  - $W_1(A_1, A^*) = 0.957033886125577;$
  - $W_2(A_2, A^*) = 0.957033886125577;$
  - $W_3(A_3, A^*) = 0.938325456532814 6;$
  - $W_4(A_4, A^*) = 0.9274529971584827;$

- Valores obtenidos mediante la aplicación de la bi-entropía
  - $W_1(A_1, A^*) = 0.9557589620694853;$
  - $W_2(A_2, A^*) = 0.9546098511737072;$
  - $W_3(A_3, A^*) = 0.9498123087197783;$
  - $W_4(A_4, A^*) = 0.9452869914191264;$

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Conclusiones

- El uso de la bi-entropía permite la elección de la mejor alternativa en los casos donde el método de Jun Ye no es capaz de establecer una diferenciación
- Esta mejora también puede ser aplicada en los distintos métodos expuestos anteriormente estimando obtener una mejor diferenciación