Uso de t-normas para el estudio de la convexidad en conjuntos difusos intervalo-valuados

1st Pedro Huidobro
Dept. Statistics, O.R & M.E.
University of Oviedo
Oviedo, Spain
huidobropedro@uniovi.es

2nd Pedro Alonso
Dept. Mathematics
University of Oviedo
Oviedo, Spain
palonso@uniovi.es

3rd Humberto Bustince
Dept. of Statistics, Computing and Mathematics
University of Navarra
Navarra, Spain
bustince@unavarra.es

4th Vladimír Janiš
Dept. Mathematics
Matej Bel University
Banská Bystrica, Slovakia
vladimir.janis@umb.sk

5th Susana Montes
Dept. Statistics, O.R & M.E.
University of Oviedo
Oviedo, Spain
montes@uniovi.es

***Resumen*—En muchos problemas reales no se pueden tomar medidas de forma exacta. Así, los conjuntos difusos surgieron como una forma de intentar tratar con la incertidumbre de la forma más eficiente posible. Por otro lado, debe señalarse que la convexidad es un concepto interesante en varias áreas dentro de las matemáticas. Teniendo esto en cuenta, en este documento proponemos una extensión del concepto de convexidad para conjuntos difusos intervalo-valuados basada en el uso de t-normas para intervalos. Para ello, y teniendo en consideración la literatura científica existente respecto de t-normas, presentamos una definición de t-norma aplicada a intervalos. Por último, comprobamos que nuestra definición de convexidad, utilizando t-normas, preserva la convexidad a través de intersecciones, es decir, que la intersección de dos conjuntos difusos intervalo-valuados convexos es también convexa.**

***Index Terms*—Conjuntos difusos intervalo-valuados, t-normas, convexidad**

I. Introducción

En la vida real no todas las mediciones son exactas, por ello, en 1965, Zadeh [29] introdujo los conjuntos difusos para lidiar con la imprecisión. Desde entonces, muchos autores los han estudiado, así como a sus extensiones. Una de las más conocidas es la que da lugar a los conjuntos difusos intervalo-valuados, que fueron en la década de 1970 presentados independientemente por Zadeh [30], Grattan-Guiness [13], Jahn [16] y Sambuc [22]. Hoy en día, los estudios sobre este tipo de conjuntos han aumentado gracias a su aplicabilidad (ver [5], [7], [12], [22], [26]).

Por otro lado, la convexidad es una herramienta muy útil en muchos campos de las matemáticas (ver por ejemplo [17]–[19], [25]).

Este estudio ha sido parcialmente patrocinado por el programa español MINECO (TIN-2017-87600-P: P. Alonso; PGC2018-098623-B-I00: P. Huidobro and S. Montes), MICIN (PID2019!108392GB!I00: H. Bustince), la ayuda no. 1/0150/21 proporcionada por la agencia de subvenciones eslovaca VEGA (V. Janiš) y el programa de ayudas Severo Ochoa PA-20PF-BP19-169 (P. Huidobro).

Cuando Zadeh presentó los conjuntos difusos, estudió también su convexidad. Desde entonces, numerosos autores han trabajado sobre este tema, así como sobre la convexidad de sus extensiones, por ejemplo Ammar y Metz [1], Diaz et al. [8], Gupta y Dabgar [14], Ramik y Vlach [21], Sarkar [23], Syau y Lee [24], Yang [28] o Zhang et al. [31].

Según nuestro conocimiento, la convexidad en conjuntos difusos intervalo-valuados no ha sido estudiada en profundidad, por lo que Huidobro et al. [15] han trabajado recientemente en esa dirección.

Este trabajo está organizado del siguiente modo. Primero, en la sección 2, haremos una presentación de los conceptos necesarios para los desarrollos llevados a cabo. A continuación, en la sección 3 estudiaremos las t-normas para intervalos cerrados contenidos en el $[0, 1]$. Finalmente, analizaremos si la convexidad de conjuntos difusos intervalo-valuados se preserva por intersecciones.

II. Conceptos básicos

Denotaremos por X al conjunto de referencia. Un conjunto difuso μ_A puede caracterizarse por una función de pertenencia $\mu_A : X \to [0, 1]$. La colección de todos los conjuntos difusos sobre X se representa como $FS(X)$. Un conjunto difuso intervalo-valuado está caracterizado por una función $A : X \to L([0, 1])$, donde $A(x) = [\underline{A(x)}, \overline{A(x)}]$ y $\underline{A(x)} \leq \overline{A(x)}$ para todo $x \in X$, y $L([0, 1])$ son todos los intervalos cerrados contenidos en el $[0, 1]$. Denotaremos como $IVFS(X)$ a la colección de todos los conjuntos difusos intervalo-valuados en X. Podemos observar que los conjuntos difusos intervalo-valuados son una generalización de los conjuntos difusos, donde la función de pertenencia toma como valor intervalos.

El primer problema que encontramos es cómo ordenar los elementos. Mientras que en $\mathbb{R}$ hay un orden natural ($a \leq b$ sii $b - a$ no es un número negativo), en $L([0, 1])$ no ocurre lo mismo. Algo que parece lógico, a la hora de considerar órdenes, es respetar el orden reticular (*lattice order* en inglés)

[11], definido como $a \preceq_{Lo} b$ if $\underline{a} \le \underline{b}$ y $\overline{a} \le \overline{b}$ para cualquier $a = [\underline{a}, \overline{a}]$ y $b = [\underline{b}, \overline{b}]$ en $L([0,1])$. En este trabajo seguiremos las ideas de Bustince et al. [6] usando órdenes admisibles, que son órdenes totales refinando el order reticular. Para un estudio más detallado del uso de órdenes admisibles entre intervalos ver [15].

***Definición** 2.1:* [6] Sea $(L([0,1]), \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. El orden $\preceq$ se dice admisible si verifica

i) $\preceq$ es un orden total en $L([0,1])$,
ii) para todo $[\underline{a}, \overline{a}], [\underline{b}, \overline{b}] \in L([0,1])$, $[\underline{a}, \overline{a}] \preceq [\underline{b}, \overline{b}]$ cuando $[\underline{a}, \overline{a}] \le_{Lo} [\underline{b}, \overline{b}]$.

Los órdenes admisibles pueden generarse con funciones de agregación, así que recordemos su definición.

***Definición** 2.2:* [4], [20] Sea $\mathcal{A} : \bigcup_{i=1}^{n} [0,1]^n \to [0,1]$ cumpliendo

i) $\mathcal{A}(0,0,\ldots,0) = 0, \mathcal{A}(1,1,\ldots,1) = 1$,
ii) $\mathcal{A}$ es monótona en cada variable,

entonces $\mathcal{A}$ se llama función de agregación.

Hemos restringido el método propuesto por Bustince et al. [6] al intervalo $[0,1]$, ya que aunque el resultado original trabaja con funciones en $\mathbb{R}$, nosotros estamos centrados en el intervalo [0,1]:

***Proposición** 2.1:* Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} : [0,1]^2 \to [0,1]$ dos funciones de agregación continuas y sean $(u^*, v^*), (u', v') \in \{(u,v) \in [0,1]^2 \,|\, u \le v\}$. Las igualdades $\mathcal{A}(u^*, v^*) = \mathcal{A}(u', v')$ y $\mathcal{B}(u^*, v^*) = \mathcal{B}(u', v')$ sólo pueden darse si $(u^*, v^*) = (u', v')$. Definida la relación $\preceq_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ en $L([0,1])$ por $a \preceq_{\mathcal{A},\mathcal{B}} b$ si y solo si

$$\mathcal{A}(\underline{a}, \overline{a}) < \mathcal{A}(\underline{b}, \overline{b})$$

o

$$\mathcal{A}(\underline{a}, \overline{a}) = \mathcal{A}(\underline{b}, \overline{b}) \text{ y } \mathcal{B}(\underline{a}, \overline{a}) \le \mathcal{B}(\underline{b}, \overline{b})).$$

Entonces $\preceq_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ es un orden admisible en $L([0,1])$.

Con este método, no solo podemos construir nuevos órdenes admisibles, sino que también podemos comprobar que algunos de los órdenes más conocidos para intervalos son, en efecto, órdenes admisibles. Por ejemplo:

- Orden lexicográfico tipo 1 [6]: $a \preceq_{Lex1} b \Leftrightarrow \underline{a} < \underline{b}$ o $\underline{a} = \underline{b}$ y $\overline{a} \le \overline{b}$, donde $\mathcal{A}(x,y) = x$ and $\mathcal{B}(x,y) = y$.
- Orden lexicográfico tipo 2 [6]: $a \preceq_{Lex2} b \Leftrightarrow \overline{a} < \overline{b}$ o $\overline{a} = \overline{b}$ y $\underline{a} \le \underline{b}$, donde $\mathcal{A}(x,y) = y$ and $\mathcal{B}(x,y) = x$.
- Orden de Xu y Yager [27]: $a \preceq_{YX} b \Leftrightarrow \underline{a} + \overline{a} < \underline{b} + \overline{b}$ o $\underline{a} + \overline{a} = \underline{b} + \overline{b}$ y $\overline{a} - \underline{a} \le \overline{b} - \underline{b}$, donde $\mathcal{A}(x,y) = x + y$ and $\mathcal{B}(x,y) = y - x$.

Por otro lado, dados dos conjuntos difusos μ_A y μ_B, se dice que μ_A está contenido en μ_B si $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ [29]. Basándose en esta idea, si A y B son dos conjuntos difusos intervalo-valuados, decimos que A está o-contenido en B, y lo denotamos como $A \subseteq_o B$, si $A(x) \preceq_o B(x)$ para todo $x \in X$, donde $\preceq_o$ es una relación de orden en $L([0,1])$. Teniendo en cuenta este punto de vista, Huidobro et al. [15] definieron la intersección de conjuntos difusos intervalo-valuados.

***Definición** 2.3:* [15] Sean A, B dos conjuntos difusos intervalo-valuados en X y sea $\preceq_o$ una relación de orden en $L([0,1])$. Se llama o-intersección de A y B, $A \cap_o B$, al mayor conjunto difuso intervalo-valuado o-contenido en A y B.

En [15], Huidobro et al. probaron que esta definición depende del orden considerado en $L([0,1])$, obteniéndose distintas intersecciones para los distintos órdenes, pero con algo en común si se utilizan órdenes totales.

***Proposición** 2.2:* [15] Sea $\preceq_o$ un orden total en $L([0,1])$. Para cualquier $A, B \in IVFS(X)$, la o-intersección de A y B es el conjunto difuso intervalo-valuado definido por:

$$A \cap_o B(x) = \begin{cases} A(x) & \text{si } A(x) \preceq_o B(x), \\ B(x) & \text{si } B(x) \preceq_o A(x). \end{cases}$$

En consecuencia, resulta evidente que si A está o-incluido en B, entonces la intersección de A y B es A, ya que es el conjunto más grande contenido en ambos.

III. T-NORMAS PARA INTERVALOS

En esta sección repasaremos algunas de las definiciones que se pueden encontrar en la literatura sobre t-normas para después presentar nuestra propuesta.

Las t-normas en $[0,1]$ son funciones $t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ asociativas, conmutativas y crecientes en cada argumento verificando que $t(1,u) = u$ para todo $u \in [0,1]$. Para intervalos, Gehrke et al. [10] consideraron el orden reticular y el contenido usual. Partieron de que dado un punto $c \in L([0,1])$, tiene un intervalo asociado $[c,c]$ y con varias premisas más llegaron a la siguiente definición:

***Definición** 3.1:* [10] Una operación binaria T en $L([0,1])$ que es asociativa y conmutativa es una t-norma si para todo $a, b, c \in L([0,1])$ se cumplen las siguientes propiedades:

i) $T([u,u],[v,v])$ es un intervalo degenerado (origen y extremo coincidentes), donde $u, v \in [0,1]$,
ii) $T(a, b \vee c) = T(a,b) \vee T(a,c)$,
iii) $T(a, b \wedge c) = T(a,b) \wedge T(a,c)$,
iv) $T(a, [1,1]) = a$,
v) $T([0,1], [\underline{a}, \overline{a}]) = [0, \overline{a}]$,

donde $\vee$ y $\wedge$ se definen como:

$$[\underline{a}, \overline{a}] \vee [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} \vee \underline{b}, \overline{a} \vee \overline{b}],$$
$$[\underline{a}, \overline{a}] \wedge [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} \wedge \underline{b}, \overline{a} \wedge \overline{b}].$$

Además, también dieron una caracterización de las t-normas para intervalos.

***Teorema** 3.1:* [10] Toda t-norma en $L([0,1])$ se puede poner de la forma $T(a,b) = [t(\underline{a}, \underline{b}), t(\overline{a}, \overline{b})]$, donde t es una t-norma en $[0,1]$.

Además, fueron capaces de relajar la última condición de la definición si el operador binario es convexo, es decir, si $T(a,b) \le_{Lo} c \le_{Lo} T(d,e)$, entonces existen $r, s \in L([0,1])$ con $a \le_{Lo} r \le_{Lo} d$ y $b \le_{Lo} s \le_{Lo} e$ de manera que $c = T(r,s)$.

***Teorema** 3.2:* [10] Un operador binario convexo, conmutativo y asociativo, T en $L([0,1])$, es una t-norma si para todo $a, b, c \in L([0,1])$ se verifican las siguientes propiedades:

i) $T([u,u],[v,v])$ es un intervalo degenerado (origen y extremo coincidentes), donde $u, v \in [0,1]$,
ii) $T(a, b \vee c) = T(a,b) \vee T(a,c)$,

iii) $T(a, b \wedge c) = T(a, b) \wedge T(a, c)$,
iv) $T(a, [1, 1]) = a$,
v) $T([0, 1], [0, 1]) = [0, 1]$.

Bedregal y Takahashi [3] propusieron una extensión de la definición dada por Gehrke et al.:

Definición *3.2:* [3] Una aplicación T en $L([0, 1])$ es una t-norma para intervalos si para todo $a, b, c, d \in L([0, 1])$ se verifica:

i) $T(a, b) = T(b, a)$,
ii) $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c))$,
iii) si $a \leq_{Lo} b$ y $c \leq_{Lo} d$, entonces $T(a, c) \leq_{Lo} T(b, d)$,
iv) si $a \subseteq b$ y $c \subseteq d$, entonces $T(a, c) \subseteq T(b, d)$,
v) $T(a, [1, 1]) = a$.

De este modo obtenemos t-normas para intervalos partiendo de t-normas.

Proposición *3.1:* [3] Sean t_1 y t_2 dos t-normas en $[0, 1]$. Si $t_1 \leq t_2$, entonces la aplicación $I[t_1, t_2]$, definida como $I[t_1, t_2](a, b) = [t_1(\underline{a}, \underline{b}), t_2(\overline{a}, \overline{b})]$, es una t-norma para intervalos llamada t-norma para intervalos derivada de t_1 y t_2.

Cuando consideramos un intervalo como un conjunto de números reales, tras hallar la intersección de a y b, $a \cap b$, tiene sentido que si $a_1 \subseteq a$ y $b_1 \subseteq b$, entonces $a_1 \cap b_1 \subseteq a \cap b$ [32]. Sin embargo, nosotros estamos considerando que un intervalo es una descripción imprecisa de la funcion de pertenencia, ya que estamos usando conjuntos difusos intervalo-valuados. Desde esta perspectiva, la monotonía en la inclusión es equivalente a ser creciente, esto es, si $A, B \in IVFS(X)$, $A \subseteq_o B$ si y solo si $A(x) \preceq_o B(x), \forall x \in X$.

Por ello, en este trabajo consideraremos la definición propuesta por Deschrijver [9]. En ella, elimina la cuarta condición de la Definición 3.2.

Definición *3.3:* [9] Una t-norma en $L([0, 1])$ es una función $T : L([0, 1]) \times L([0, 1]) \to L([0, 1])$ conmutativa, asociativa, creciente en ambos argumentos con respecto a $\leq_{Lo}$ y cumpliendo que $T([1, 1], a) = a$ para todo $a \in L([0, 1])$.

Partiendo de esta definición, podríamos definir t-norma para intervalos como:

Definición *3.4:* Sea $\preceq_o$ un orden en $L([0, 1])$. Una t-norma en $L([0, 1])$ es una función $T : L([0, 1]) \times L([0, 1]) \to L([0, 1])$ conmutativa, asociativa, creciente en ambos argumentos con respecto a $\leq_o$ y tal que $T([1, 1], a) = a$ para todo $a \in L([0, 1])$.

Una de las t-normas más conocidas es la función mínimo. En nuestro caso, el mínimo también es t-norma para intervalos.

Proposición *3.2:* Sea $\preceq_o$ un orden admisible en $L([0, 1])$. La aplicación $T_M : L([0, 1]) \times L([0, 1]) \to L([0, 1])$ definida como $T_M([\underline{a}, \overline{a}], [\underline{b}, \overline{b}]) = \text{mín}\{[\underline{a}, \overline{a}], [\underline{b}, \overline{b}]\}$ para cualquier $[\underline{a}, \overline{a}]$, $[\underline{b}, \overline{b}] \in L([0, 1])$ es una t-norma para intervalos.

Como hemos visto previamente, son interesantes aquellos casos donde podemos relacionar t-normas para intervalos con t-normas para números (ver [2], [3], [9]).

Definición *3.5:* Sea T una t-norma en $L([0, 1])$. T se dice representable si existen dos t-normas, t_1, t_2 tal que $T(a, b) = [t_1(\underline{a}, \underline{b}), t_2(\overline{a}, \overline{b})]$, para todo $a, b \in L([0, 1])$.

En general es más sencillo usar t-normas representables para intervalos, ya que simplifican la dificultad del problema.

Proposición *3.3:* Sean t_1, t_2 dos t-normas con $t_1 \leq t_2$. La función $T : L([0, 1]) \times L([0, 1]) \to L([0, 1])$ definida como $T(a, b) = [t_1(\underline{a}, \underline{b}), t_2(\overline{a}, \overline{b})]$ es una t-norma para intervalos con respecto al orden reticular.

Nota *3.1:* Este resultado no es cierto para cualquier orden. Si consideramos un ejemplo de orden admisible como es el orden lexicográfico tipo 1, podemos obtener que $[0{,}2, 0{,}7] \preceq_{Lex1} [0{,}3, 0{,}4]$. Sin embargo, considerando que t_1 y t_2 sean la t-norma mínimo, llegamos a que $T([0{,}1, 0{,}8], [0{,}2, 0{,}7]) = [0{,}1, 0{,}7]$ y $T([0{,}1, 0{,}8], [0{,}3, 0{,}4]) = [0{,}1, 0{,}4]$. Por tanto, $T([0{,}1, 0{,}8], [0{,}2, 0{,}7]) \not\preceq_{Lex1} T([0{,}1, 0{,}8], [0{,}3, 0{,}4])$, y podemos concluir que T no es creciente en la segunda componente.

Para otros órdenes admisibles pueden conseguirse contraejemplos similares.

En la Proposición 3.3 hemos obtenido un método para obtener t-normas aplicadas a intervalos a partir de t-normas, sin embargo, hemos visto en la Nota 3.1 que esto no siempre es posible. De hecho, hemos encontrado una caracterización en el siguiente resultado:

Proposición *3.4:* Sea $\preceq_o$ un orden total en $L([0, 1])$ y sean t_1 y t_2 dos t-normas en $[0, 1]$. Si consideramos la aplicación T definida como $T(a, b) = [t_1(\underline{a}, \underline{b}), t_2(\overline{a}, \overline{b})]$, entonces tenemos que T es una t-norma para intervalos si y solo si T es creciente en el segundo argumento.

IV. CONVEXIDAD DE CONJUNTOS DIFUSOS INTERVALO-VALUADOS UTILIZANDO T-NORMAS

En este trabajo hemos considerado la definición de convexidad propuesta por Huidobro et al. [15]:

Definición *4.1:* Sea $(X, \leq)$ un espacio ordenado y sea $\preceq_o$ una relación de orden en $L([0, 1])$. Un conjunto difuso intervalo-valuado A en X se dice o-convexo, si para cada $x \leq y \leq z$ en X se cumple $A(x) \preceq_o A(y)$ o $A(z) \preceq_o A(y)$.

Claramente esta definición generaliza la idea de convexidad en conjuntos difusos propuesta por Zadeh [29], ya que si consideramos un conjunto difuso μ_A como conjunto difuso intervalo-valuado, esto es, $A(x) = [\mu_A(x), \mu_A(x)], \forall x \in X$, diremos que A es convexo si se cumple $A(x) \preceq_o A(y)$ o $A(z) \preceq_o A(y)$. Esto es equivalente a decir que $[\mu_A(x), \mu_A(x)] \preceq_o [\mu_A(y), \mu_A(y)]$ o $[\mu_A(z), \mu_A(z)] \preceq_o [\mu_A(y), \mu_A(y)]$, que con el uso de cualquier orden que refine al orden reticular, por ejemplo cualquiera de los órdenes admisibles, equivale a $\mu_A(x) \leq \mu_A(y)$ o $\mu_A(z) \leq \mu_A(y)$. Con esto recuperamos la definición de convexidad para conjuntos difusos propuesta por Zadeh, que venía dada por: μ_A es convexo si y solo si $\mu_A(y) \geq \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_A(z)\}$ para $x < y < z$.

Cuando trabajamos con órdenes totales, esta definición es equivalente a $\text{mín}\{A(x),\ A(z)\} \preceq_o A(y)$, y nosotros hemos podido comprobar satisfactoriamente que el mínimo es una t-norma para intervalos. Partiendo de esa idea, reemplazaremos el mínimo por otra t-norma para intervalos. Por lo que proponemos la siguiente definición:

Definición *4.2:* Sea $(X, \leq)$ un espacio ordenado, sea $\preceq_o$ una relación de orden total en $L([0, 1])$ y sea T una t-norma para intervalos. Un conjunto difuso intervalo-valuado A en X

se dice T-o-convexo, si para cada $x \leq y \leq z$ en X se cumple $T(A(x), A(z)) \preceq_o A(y)$.

Comprobemos la validez de la definición comprobando su compatibilidad con la intersección.

***Proposición** 4.1:* Sea $(X, \leq)$ un espacio ordenado, sea $\preceq_o$ una relación de orden total en $L([0,1])$ y sea T una t-norma para intervalos. La intersección de dos conjuntos difusos intervalo-valuados T-o-convexos es T-o-convexa.

Este resultado apoya nuestra definición de t-normas para intervalos mientras que las otras consideradas no conservaban esta propiedad. Veamos un ejemplo.

***Ejemplo** 4.1:* Consideremos el orden lexicográfico tipo 1 y la Definición 3.1. Según esta definición, el operador $T^*(a, b) = [\text{mín}\{\underline{a}, \underline{b}\}, \quad \text{mín}\{\overline{a}, \overline{b}\}]$ es una t-norma en $L([0,1])$. Consideremos $X = \{x, y, z\}$ con $x < y < z$ y los conjuntos difusos intervalo-valuados A y B definidos por $A(x) = [0{,}3, 1]$, $A(y) = [0{,}3, 0{,}8]$ y $A(z) = [0{,}7, 0{,}8]$, y $B(x) = [0{,}4, 0{,}5]$, $B(y) = [0{,}5, 0{,}7]$ y $B(z) = [0{,}6, 0{,}9]$.

La intersección resulta ser $(A \cap_{Lex1} B)(x) = [0{,}3, 1]$, $(A \cap_{Lex1} B)(y) = [0{,}3, 0{,}8]$ y $(A \cap_{Lex1} B)(z) = [0{,}6, 0{,}9]$. Es fácil comprobar que A y B son T^*-$Lex1$-convexos, pero $A \cap_{Lex1} B$ no, ya que $T^*(A \cap_{Lex1} B(x), A \cap_{Lex1} B(z)) = T^*([0{,}3, 1], [0{,}6, 0{,}9]) = [0{,}3, 0{,}9] \npreceq_{Lex1} [0{,}3, 0{,}8] = A \cap_{Lex1} B(y)$. Este contraejemplo es válido también para la Definición 3.2.

V. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una definición de t-norma para intervalos. Utilizando este concepto, hemos generalizado la noción de convexidad para conjuntos difusos intervalo-valuados y hemos podido comprobar que la definición propuesta es compatible con la intersección de conjuntos difusos intervalo-valuados.

Referencias

[1] E. Ammar and J. Metz. On fuzzy convexity and parametric fuzzy optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, 49(2):135 – 141, 1992.

[2] B. Bedregal and A. Takahashi. Interval t-norms as interval representations of t-norms. In *The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2005. FUZZ '05.*, pages 909–914, 2005.

[3] B. Bedregal and A. Takahashi. The best interval representations of t-norms and automorphisms. *FuzzySetsandSystems*, 157:3220–3230, 2006.

[4] G. Beliakov, H. Bustince, and T. Calvo. *A Practical Guide to Averaging Functions*. Springer, 2016.

[5] H. Bustince and P. Burillo. Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations: Application to approximate reasoning. *Fuzzy Sets and Systems*, 113(2):205 – 219, 2000.

[6] H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, and R. Mesiar. Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 220:69 – 77, 2013.

[7] C. Cornelis, G. Deschrijver, and E.E. Kerre. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory. *International Journal of Approximate Reasoning*, 35:55 – 95, 2004.

[8] S. Díaz, E. Induráin, V. Janiš, J. V. Llinares, and S. Montes. Generalized convexities related to aggregation operators of fuzzy sets. *Kybernetika*, 53:383 – 393, 2017.

[9] G. Deschrijver. Arithmetic operators in interval-valued fuzzy set theory. *Information Sciences*, 177(14):2906–2924, 2007.

[10] M. Gehrke, C. Walker, and E. Walker. Some comments on interval valued fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 11(10):751–759, 1996.

[11] J.A Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 18(1):145 – 174, 1967.

[12] M.B. Gorzalczany. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 21:1 – 17, 1987.

[13] I. Grattan-Guinness. Fuzzy membership mapped onto intervals and many-valued quantities. *Mathematical Logic Quarterly*, 22(1):149 – 160, 1976.

[14] S.K. Gupta and D. Dangar. Duality for a class of fuzzy nonlinear optimization problem under generalized convexity. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 13:131 – 150, 2014.

[15] P. Huidobro, P. Alonso, V. Janiš, and S. Montes. Orders preserving convexity under intersections for interval-valued fuzzy sets. In Marie-Jeanne Lesot, Susana Vieira, Marek Z. Reformat, João Paulo Carvalho, Anna Wilbik, Bernadette Bouchon-Meunier, and Ronald R. Yager, editors, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pages 493 – 505, Cham, 2020. Springer International Publishing.

[16] K.U. Jahn. Intervall-wertige mengen. *Mathematische Nachrichten*, 68:115 – 132, 1975.

[17] Y. Kim, Z. Xi, and J. Lien. Disjoint convex shell and its applications in mesh unfolding. *Computer-Aided Design*, 90:180 – 190, 2017.

[18] M. Li, W. Yang, and X. Zhang. Projection on convex set and its application in testing force closure properties of robotic grasping. In *Intelligent Robotics and Applications*, volume 6425, pages 240 – 251. Springer, 11 2010.

[19] L. Liberti. Reformulation and convex relaxation techniques for global optimization. *Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies*, 2(3):255 – 258, 2004.

[20] R. Mesiar and M. Komorníková. Aggregation functions on bounded posets. In Chris Cornelis, Glad Deschrijver, Mike Nachtegael, Steven Schockaert, and Yun Shi, editors, *35 Years of Fuzzy Set Theory: Celebratory Volume Dedicated to the Retirement of Etienne E. Kerre*, pages 3 – 17, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer.

[21] J. Ramik and M Vlach. *Generalized Concavity in Fuzzy Optimization and Decision Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[22] R. Sambuc. Function phi-flous, application a l'aide au diagnostic en pathologie thyroidienne. *These de Doctorat en Medicine*, 1975.

[23] D. Sarkar. Concavoconvex fuzzy set. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:267 – 269, 1996.

[24] Y. Syau and E Lee. Fuzzy convexity and multiobjective convex optimization problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 52(3):351 – 362, 2006.

[25] M. Tofighi, O. Yorulmaz, K. Kose, D.C. Kahraman, R. Cetin-Atalay, and A.E. Cetin. Phase and tv based convex sets for blind deconvolution of microscopic images. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 10(1):81 – 91, 2015.

[26] I.B. Turksen and Z. Zhong. An approximate analogical reasoning schema based on similarity measures and interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 34:323 – 346, 1990.

[27] Z.S. Xu and R.R. Yager. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, 35(4):417 – 433, 2006.

[28] X. Yang. A property on convex fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 126:269 – 271, 2002.

[29] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353, 1965.

[30] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information Sciences*, 8(3):199 – 249, 1975.

[31] J. Zhang, Q. Zheng, X. Ma, and L. Li. Relationships between interval-valued vector optimization problems and vector variational inequalities. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 15:33 – 55, 2016.

[32] Q. Zuo. Description of strictly monotonic interval and/or operations. *Reliable Computing*, pages 23 – 25, 1995.