Sobre órdenes admisibles en el conjunto de números borrosos discretos y su aplicación en problemas de toma de decisiones

Juan Vicente Riera*†, Sebastia Massanet*†, Humberto Bustince‡, Javier Fernández‡
* *Grupo de investigación en Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)*
Departamento de Ciencias Matemáticas e Informática
Universitat de les Illes Balears, 07122 Palma, España
†*Instituto de Investigación Sanitaria de las Islas Baleares (IdISBa), 07010 Palma, España*
‡ *Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas,*
Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosadia, 31006 Pamplona, Spain
E-mails: jvicente.riera@uib.es, s.massanet@uib.es, bustince@unavarra.es, fcojavier.fernandez@unavarra.es

***Abstract*—Este trabajo es un resumen del artículo [1] publicado en Mathematics para su presentación en la Multiconferencia CAEPIA'21 KeyWorks.**

***Index Terms*—Número borroso discreto, Orden Total, Orden admisible, Ranking de números borrosos.**

I. Resumen

Está bien establecido en la comunidad científica que el esquema tradicional para la solución de un análisis de decisiones lingüísticas en un problema de toma de decisiones multicriterio (MCDM) consta de tres partes [2]:

1) La elección de los términos lingüísticos y/o su semántica.
2) La elección de un operador de agregación para dicha información lingüística.
3) La elección de las mejores alternativas. Este paso se divide en dos fases:
   i. Fase de agregación de la información lingüística.
   ii. Fase de explotación, en la que se establece un orden jerárquico entre las alternativas, según el valor de la interpretación lingüística colectiva (o agregada), para elegir las mejores alternativas.

De este esquema surge la necesidad de estudiar y desarrollar nuevos modelos lingüísticos computacionales que permitan representar, agregar y ordenar dicha información lingüística y que sirvan como una herramienta de apoyo para ayudar a los expertos a expresar de la manera más flexible sus preferencias [3]. Entre estos modelos lingüísticos queremos destacar, en este trabajo, el modelo lingüistico multigranular basado en números borrosos discretos [4], [5].

Como se ha mencionado anteriormente, a la hora de tomar una decisión final en un problema toma de decisiones es necesario elegir la mejor alternativa o conjunto de alternativas entre todos los alternativas disponibles y, por tanto, es necesario establecer un ordenamiento jerárquico de las mismas basadas en las preferencias dadas por los expertos.

El estudio de las relaciones de orden (totales o parciales) no es sólo un tema importante desde el punto de vista teórico, sinó que cabe destacar su relevancia en muchos problemas aplicados tales como: problemas de toma de decisión, inteligencia artificial, problemas de optimización, etc. Es obvio que la elección del orden dependerá del modelo lingüístico computacional borroso y de cada problema particular de toma de decisiones. Por esta razón, el estudio de órdenes borrosos en el contexto de los conjuntos borrosos ha sido, y sigue siendo, un tema muy candente. En particular, en el marco de los números borrosos discretos se han desarrollado pocas investigaciones y las existentes en la literatura, se basan en adaptaciones de órdenes definidos en el conjunto de números borrosos y en la utilización de índices de clasificación, los cuales, desde nuestro punto de vista, presentan algunos comportamientos no adecuados en algunas aplicaciones. Por ello, la motivación principal de nuestra investigación fue la construcción de dos familias de órdenes admisibles diferentes en el conjunto de números borrosos discretos cuyo soporte es un intervalo cerrado de una cadena finita $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ que no se basan en ninguna función índice.

A continuación expondremos las definiciones y resultados más importantes para la comprensión del trabajo.

Definición 1 (**[6]**)**:** Sea A un conjunto no vacío, un orden parcial $\preceq$ es una relación binaria sobre A que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un conjunto A con un orden parcial $\preceq$ se llama conjunto parcialmente ordenado y se denota por $(A, \preceq)$. Si en un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$ todos sus elementos a, b son comparables, es decir, se tiene siempre que $a \preceq b$ o $b \preceq a$, el orden parcial $\preceq$ se llama orden lineal (o total) (en este caso A se llama cadena).

Denotemos por $L([0,1])$ el conjunto de subintervalos cerrados del intervalo unidad, $L([0,1]) = \{[a,b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$.

Definición 2 (**[6]**)**:** Sea $(L([0,1]), \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. El orden $\preceq$ se llama admisible, si es un orden lineal en $L([0,1])$ y refina el orden clásico entre intervalos, esto es, para todo $[a,b], [c,d] \in L([0,1])$, $[a,b] \preceq [c,d]$

siempre que $[a,b] \leq_2 [c,d]$ donde $\leq_2$ denota el orden clásico entre intervalos.

Definición 3: Un subconjunto borroso A de $\mathbb{R}$ con función de pertenencia $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ se llama *número borroso discreto*, o *dfn* de manera abreviada, si su soporte es finito, es decir, existen $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2 < ... < x_n$ tales que supp$(A) = \{x_1, ..., x_n\}$, y existen números naturales s, t con $1 \leq s \leq t \leq n$ tales que:

1) A(x_i)=1 para todo i con $s \leq i \leq t$. (*core*)
2) $A(x_i) \leq A(x_j)$ para todo i, j tal que $1 \leq i \leq j \leq s$.
3) $A(x_i) \geq A(x_j)$ para todo i, j tal que $t \leq i \leq j \leq n$.

Denotaremos por $\mathcal{A}_1^{L_n}$ el conjunto de los números borrosos discretos cuyo soporte es un subintevalo de la cadena finita L_n. Denotaremos por supp(A) el soporte de A, es decir, el conjunto $\{x \in L_n : A(x) > 0\}$. Consideraremos $A^\alpha = \{x \in L_n : A(x) \geq \alpha\}$ para todo $\alpha \in (0,1]$ el α-corte de A. Unos α-cortes que jugarán un papel importante en los órdenes propuestos son los cortes de los llamados α-niveles relevantes.

Definición 4: Sea A un número borroso discreto tal que supp$(A) = \{x_1, ..., x_n\}$. Entonces $\alpha \in (0,1]$ es un α-nivel relevante para A si existe $x_i \in$ supp(A) tal que $A(x_i) = \alpha$.

El interés por el estudio del conjunto $\mathcal{A}_1^{L_n}$ es debido a que este tipo de subconjuntos borrosos pueden ser usados para modelar expresiones lingüísticas que describan las opiniones de los expertos en un problema de toma de decisión (ver por ejemplo, [4], [5]).

En este trabajo se proponen dos tipos de órdenes admisibles en el conjunto $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Definición 5: Sean $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ dos números borrosos discretos cuyos α-niveles relevantes son $S_A = \{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k = 1\}$ siendo $k \leq n+1$, $S_B = \{\beta_1 < \cdots < \beta_m = 1\}$ siendo $m \leq n+1$ respectivamente, y $S_{AB} = S_A \cup S_B = \{\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_t = 1\}$ con $1 \leq t \leq k+m-1$. Consideremos un orden admisible $\prec_\delta$ en $\Pi[L_n] = \{[a,b] \ : \ 0 \leq a \leq b \leq n, \ a,b \in L_n\}$. Diremos que $A = B$ si, y sólo si, sus conjuntos de nivel S_{AB} son iguales, esto es, $A^{\gamma_i} = B^{\gamma_i}$ para todo $i \in I = \{1, \ldots, t\}$. Diremos que $A \prec_{\Delta_\delta^\uparrow} B$ si, y sólo si, $A \neq B$ y existe un número natural $j \in I$ tal que $A^{\gamma_j} \prec_\delta B^{\gamma_j}$ y $A^{\gamma_i} = B^{\gamma_i}$ para todo $i < j$. Diremos que $A \preceq_{\Delta_\delta^\uparrow} B$ si, y sólo si $A = B$ or $A \prec_{\Delta_\delta^\uparrow} B$.

Teorema 1: La relación binaria $\preceq_{\Delta_\delta^\uparrow}$ es un orden admisible en $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

El segundo orden total que introdujimos sigue un patrón similar al primero, pero la comparación de los α-cortes se realiza desde la parte superior (núcleo) hasta la inferior. Definamos formalmente esta idea.

Definición 6: Sean $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ dos números borrosos discretos cuyos α-niveles relevantes son $S_A = \{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k = 1\}$ siendo $k \leq n+1$, $S_B = \{\beta_1 < \cdots < \beta_m = 1\}$ siendo $m \leq n+1$ respectivamente, y $S_{AB} = S_A \cup S_B = \{\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_t = 1\}$ con $1 \leq t \leq k+m-1$. Consideremos un orden admisible $\prec_\delta$ en $\Pi[L_n] = \{[a,b] \ : \ 0 \leq a \leq b \leq n, \ a,b \in L_n\}$. Diremos que $A = B$ si, y sólo si, sus conjuntos de nivel en S_{AB} son iguales, esto es, $A^{\gamma_i} = B^{\gamma_i}$ para todo $i \in I = \{1, \ldots, t\}$. Diremos que $A \prec_{\Delta_\delta^\downarrow} B$ si, y sólo si, $A \neq B$ y existe un número natural $j \in I$ tal que $A^{\gamma_j} \prec_\delta B^{\gamma_j}$ y $A^{\gamma_i} = B^{\gamma_i}$ para todo $i > j$. Diremos que $A \preceq_{\Delta_\delta^\downarrow} B$ si, y sólo si, $A = B$ o $A \prec_{\Delta_\delta^\downarrow} B$.

Teorema 2: La relación binaria $\preceq_{\Delta_\delta^\downarrow}$ es un orden admisible en $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Finalmente queremos exponer algunas reflexiones sobre estas dos familias de ordenes admisibles en $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Si bien ambos órdenes tienen una definición bastante similar y se basan en la comparación secuencial de los α-cortes, su interpretación desde el punto de vista de la toma de decisiones es muy diferente.

En la primera familia $\prec_{\Delta_\delta^\uparrow}$, la comparación se realiza desde el soporte hasta el núcleo y, por lo tanto, el orden prioriza α-cortes inferiores. Si los números borrosos discretos representan evaluaciones lingüísticas proporcionadas por expertos en un problema de toma de decisiones, el orden tiene en cuenta primero el soporte, que incluye todas las posibles etiquetas lingüísticas consideradas por el experto. Por tanto, este orden podría entenderse como una valoración conservadora, cualquier valor dentro del soporte se considera para tomar la decisión. Ésta es una estrategia común para generar órdenes en el conjunto de números borrosos.

Por otro lado, la segunda familia $\prec_{\Delta_\delta^\downarrow}$ decide el orden comparando los α-cortes del núcleo con el soporte priorizando α-cortes más altos. En un problema de toma de decisiones, el orden tiene en cuenta primero el núcleo, que incluye solo las etiquetas lingüísticas expresadas por el experto como aquellas con mayor valor de pertenencia. Por lo tanto, este orden podría entenderse como una evaluación más optimista, excluyendo primero cualquier etiqueta lingüística no incluida en el núcleo. En consecuencia, la elección de una de las dos familias dependerá de la actitud del grupo de expertos.

Acknowledgment

Este trabajo ha estado parcialmente financiado por los proyectos FEDER/Ministerio de Economía, Industria y Competitividad - AEI/TIN2016-75404-P y PID2019-108392GB-I00 (AEI/10.13039/501100011033).

References

[1] J. V. Riera, S. Massanet, H. Bustince, J. Fernández, "On admissible orders on the set of discrete fuzzy numbers for application in Decision Making Problems," Mathematics 9(1), pp. 1–16, 2021.

[2] F. Herrera, F. Herrera-Viedma,"Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under linguistic information," Fuzzy Sets Syst. 115, pp. 67—82, 2000.

[3] J. Morente-Molinera, I. Pérez, M. Ureña, E. Herrera-Viedma, " On multi-granular fuzzy linguistic modeling in group decision making problems: A systematic review and future trends," Knowl. Based Syst. 74, pp. 49–60, 2015.

[4] S. Massanet, J. V. Riera, J. Torrens, E. Herrera-Viedma, "A new linguistic computational model based on discrete fuzzy numbers for computing with words", Inf. Sci. 258, pp. 277-–290, 2014.

[5] J.V. Riera, S. Massanet, E. Herrera-Viedma, J. Torrens, "Some interesting properties of the fuzzy linguistic model based on discrete fuzzy numbers to manage hesitant fuzzy linguistic information", Appl. Soft Comput.,36, pp. 383–391, 2015.

[6] L. De Miguel, H. Bustince, J. Fernandez, E. Induráin, A. Kolesárová, R. Mesiar, "Construction of admissible linear orders for interval-valued Atanassov intuitionistic fuzzy sets with an application to decision-making", Inf. Fusion 27, pp. 189–197, 2016.