

E.T.S. de Ingeniería Industrial,  
Informática y de Telecomunicación

# El espacio de McCullough-Miller

Máster Universitario en  
Modelización e Investigación Matemática, Estadística y  
Computación

## Trabajo Fin de Máster

Realizado por: Peio Ardaiz Galé

Tutelado por: Conchita Martínez Pérez

Cotutelado por: Marisol Gómez Fernández

Pamplona, 1 de julio de 2022

upna

Universidad Pública de Navarra  
Nafarroako Unibertsitate Publikoa



# El espacio de McCullough-Miller

## Índice

<b>Resumen</b>	III
<b>Introducción</b>	IV
<b>1. El grupo libre y su grupo de automorfismos</b>	1
<b>2. El poset de Whitehead</b>	3
2.1. Árboles $n$ -etiquetados . . . . .	3
2.2. Particiones base . . . . .	5
2.3. Marcas . . . . .	9
<b>3. El complejo de McCullough-Miller</b>	11
3.1. Construcción y propiedades . . . . .	11
3.2. Ejemplos para valores pequeños de $n$ . . . . .	12
<b>4. Lemas de reductividad</b>	14
4.1. Refinamiento, disyunción y compatibilidad . . . . .	15
4.2. Los lemas de factorización y existencia . . . . .	17
4.3. El Lema de Collins-Zieschang . . . . .	19
<b>5. Contractibilidad de <math>MM_n</math></b>	21
5.1. Lemas de posets . . . . .	21
5.2. Prueba de la contractibilidad . . . . .	21
<b>6. RAAGs</b>	26
6.1. El complejo de McCullough-Miller en RAAGs . . . . .	26
6.1.1. Grafo lineal de cuatro vértices . . . . .	28
6.1.2. Grafo lineal de cinco vértices . . . . .	28
6.1.3. Receta para la construcción de $MM_n$ en RAAGs asociados a un grafo lineal . . . . .	29
6.2. Futuras líneas de investigación . . . . .	30



# Resumen

En este trabajo vamos a estudiar el complejo de McCullough-Miller, que se obtiene mediante la realización simplicial del poset Whitehead. Este poset se construye induciendo un orden parcial en cierto conjunto de árboles etiquetados; los elementos del poset también se pueden expresar como familias de particiones del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . La principal motivación para estudiar este complejo es que admite una acción del grupo de automorfismos simétricos puros del grupo libre. A lo largo del trabajo se probará que el complejo es conexo, de dimensión  $n - 2$  y contractible. Se puede utilizar esta información para obtener propiedades acerca de la torsión y ciertas condiciones homológicas de finitud del grupo de los automorfismos externos del grupo libre.

Por último se generalizará el complejo de McCullough-Miller a ciertos ejemplos de grupos de Artin de ángulo recto (RAAGs), que son grupos obtenidos a partir de grafos.

**Palabras clave**— Complejo de McCullough-Miller, poset de Whitehead, grupo libre, automorfismos simétricos puros, complejo simplicial, RAAGs.

# Abstract

In this dissertation we are going to study the McCullough-Miller complex, which is obtained through the simplicial realization of the Whitehead poset. This poset is built by inducing a partial order on a certain set of labelled trees; the elements of the poset can also be seen as families of partitions of the set  $\{1, \dots, n\}$ . The main motivation to study this complex is that it admits an action of the group of pure symmetric automorphisms. We will prove that the complex is connected,  $n - 2$ -dimensional and contractible. This information can be used to deduce properties about torsion and homological finiteness of the outer automorphisms of the free group.

At last, this construction will be generalized to some particular cases of right-angled Artin groups (RAAGs); which are groups obtained from a graph.

**Keywords**— McCullough-Miller complex, Whitehead poset, free group, pure symmetric automorphisms, simplicial complex, RAAGs.

# Introducción

La mayor parte de este trabajo se basa en explicar la construcción del complejo de McCullough-Miller,  $MM_n$ , asociado a  $F_n$ , el grupo libre con base prefijada  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ; así como a demostrar sus propiedades principales (es conexo, de dimensión  $n - 2$  y contractible). Este estudio fue realizado por D. McCullough y A. Miller en [5] para el producto libre (del cual el grupo libre es un caso particular) con el objetivo de obtener resultados acerca del grupo de automorfismos del producto libre, especialmente acerca del subgrupo de automorfismos simétricos y del grupo de automorfismos externos (se pueden consultar en la referencia anterior). Es posible obtener dichos resultados debido a que los automorfismos simétricos actúan sobre el complejo.

Sin embargo, aunque el desarrollo de la primera parte del trabajo se basa en [5], el objetivo no es obtener resultados sobre  $Aut(F_n)$ , sino generalizar la construcción de  $MM_n$  a algunos casos particulares de RAAGs (grupos de Artin de ángulo recto). Esto se llevará a cabo en el último capítulo del trabajo.

A continuación, vamos a explicar de manera más detallada el contenido del trabajo. Empezaremos por definir el poset de Whitehead. Es un poset finito, con un elemento minimal, cuyos elementos se pueden expresar de dos maneras equivalentes. Una, mediante arboles etiquetados con los elementos del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ ; otra, mediante familias de particiones del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Estos elementos serán los soportes de los automorfismos simétricos puros que actuarán sobre ellos. El complejo de McCullough-Miller está asociado a la clase de *bases simétricamente equivalentes* de nuestra base prefijada  $X$ . Se obtendrá como la realización simplicial de un poset, dicho poset se construye uniendo copias del poset de Whitehead, una para cada clase de conjugación de bases dentro de la clase de *bases simétricamente equivalentes*. En  $MM_n$  hay unos vértices especiales asociados a los elementos minimales del poset de Whitehead, los llamaremos núcleos. Se cumplen las siguientes propiedades.

- i) El conjunto de núcleos se corresponde biyectivamente con las clases de conjugación de bases dentro de la clase de *bases simétricamente equivalentes*.
- ii) La estrella cerrada de cada núcleo se puede identificar con la realización simplicial del poset de Whitehead.
- iii)  $MM_n$  es la unión de las estrellas cerradas de los núcleos.

El resultado principal del trabajo es que  $MM_n$  es contractible. La demostración se lleva a cabo uniendo inductivamente las estrellas de los núcleos de  $MM_n$ . La contractibilidad es importante ya que simplifica el estudio de propiedades de finitud en los automorfismos externos.

Por último, trabajaremos con los RAAGs, grupos obtenidos a partir de grafos. Definiremos sus automorfismos simétricos puros y construiremos  $MM_n$  para algunos casos de este tipo de grupos.

# 1. El grupo libre y su grupo de automorfismos

El grupo libre y su grupo de automorfismos juegan un papel muy importante en la construcción del complejo de McCullough-Miller. Por ello, en este capítulo se van a definir varios conceptos que aparecerán a lo largo del trabajo.

**Definición 1.1** (Grupo libre). Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de símbolos y  $X^{-1} = \{x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}\}$  su conjunto de símbolos inversos. Sea  $T = X \cup X^{-1}$ . Una palabra en  $X$  es cualquier producto de símbolos de  $T$ . Si un elemento de  $X$  queda al lado de su inverso los podemos simplificar eliminando ambos de la palabra; es el único tipo de simplificaciones que se pueden hacer. Si a una palabra no se le pueden aplicar más simplificaciones le llamamos palabra reducida. El grupo libre  $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  es el conjunto de palabras reducidas en  $X$ , donde la operación de grupo es la concatenación (seguida de una reducción en caso de ser necesario) y la identidad la palabra vacía. A  $X$  le llamamos base prefijada del grupo libre.

Se ha de construido  $F_n$  de esta forma porque es una manera rápida y sencilla de tener una idea clara de qué es y cómo funciona el grupo libre; y es suficiente para seguir sin problema el trabajo. No obstante, es importante remarcar que la construcción rigurosa del grupo libre es más larga y algo más complicada. En el Capítulo 2 de [7] se puede encontrar completa.

**Definición 1.2** (Forma normal). Una forma normal para el grupo libre  $F_n$  con base  $X$  es tomar una palabra reducida sobre  $X$  para cada elemento en  $F_n$ . Esta palabra es única.

**Definición 1.3** (Grupo de automorfismos de  $F_n$ ). Denotamos por  $Aut(F_n)$  el grupo de automorfismos del grupo libre, está formado por aquellos endomorfismos que llevan a  $X$  a otra base de  $F_n$ .

Jakob Nielsen demostró en 1924 que dicho grupo está generado por cuatro automorfismos:

- $\alpha_1$ : Permuta cíclicamente los elementos de la base,  $\alpha_1(\{x_1, \dots, x_n\}) = \{x_n, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ .
- $\alpha_2$ : Intercambia  $x_1$  con  $x_2$  y fija el resto de elementos.
- $\alpha_3$ : Cambia  $x_1$  por  $x_1^{-1}$  y fija el resto de elementos.
- $\alpha_4$ : Cambia  $x_1$  por  $x_1x_2$  y fija el resto de elementos.

La demostración se puede encontrar en [4].

**Definición 1.4** (Grupo de automorfismos simétricos). El grupo de automorfismos simétricos de  $F_n$ , denotado  $\Sigma_n$ , es un subgrupo de  $Aut(F_n)$  formado por aquellos automorfismos que envían  $x_i \in X$  a un conjugado de  $x_j \in X$ .

**Definición 1.5** (Grupo de automorfismos simétricos puros). El grupo de automorfismos simétricos puros de  $F_n$ , denotado  $P\Sigma_n$ , es un subgrupo de índice  $n!$  de  $\Sigma_n$  formado por los automorfismos simétricos que envían  $x_i \in X$  a un conjugado de si mismo.

**Definición 1.6** (Automorfismos simétricos de Whitehead). Sea  $\alpha \in Aut(F_n)$  y  $X$  la base de  $F_n$ ; decimos que  $\alpha$  es un automorfismo simétrico de Whitehead si conjuga a todos los elementos de un cierto  $L \subseteq X$  por potencias de un mismo  $x_i \in X$  y fija al resto de elementos de  $X$ .

Es obvio que los automorfismos simétricos de Whitehead son generadores del grupo de automorfismos simétricos puros. Siempre podemos expresar un automorfismo simétrico puro como producto de automorfismos simétricos de Whitehead.

**Definición 1.7** (Grupo de automorfismos internos). El grupo de automorfismos internos de  $F_n$ , denotado  $\text{Inn}(F_n)$ , es el subgrupo de  $\text{P}\Sigma_n$  formado por aquellos automorfismos que envían a cualquier elemento de  $F_n$  a su conjugado por un elemento fijo  $g \in F_n$ .

**Definición 1.8** (Grupo de automorfismos externos).  $\text{Inn}(F_n)$  es un subgrupo normal de  $F_n$ , por lo que podemos definir el grupo cociente  $\text{Out}(F_n) = F_n/\text{Inn}(F_n)$ , al que llamamos grupo de automorfismos externos. También podemos definir  $\text{OP}\Sigma_n = \text{P}\Sigma_n/\text{Inn}(F_n)$ , llamado grupo de automorfismos simétricos puros externo.



## 2. El poset de Whitehead

Vamos a construir el poset de Whitehead. Este poset será el que de pie posteriormente a la construcción del complejo de McCullough-Miller vía su realización simplicial. Vamos a dar dos definiciones equivalentes de los elementos del poset, que utilizaremos según conveniencia. La primera forma de verlos será como árboles, parte de cuyos vértices están etiquetados, y la segunda mediante particiones del conjunto  $[n] = \{1, \dots, n\}$ .

### 2.1. Árboles $n$ -etiquetados

**Definición 2.1** (Árbol bipartido  $n$ -etiquetado). Un Árbol bipartido  $n$ -etiquetado es un árbol  $T$  junto a una biyección de  $[n]$  a un subconjunto de los vértices de  $T$ ; de forma que la imagen de  $[n]$  incluye a todos los vértices de valencia 1 (vértices exteriores) y exactamente uno de los vértices de cada arista pertenece a la imagen. Aquellos vértices que están en la imagen se denominan vértices etiquetados. Dos de estos árboles son equivalentes si existe un isomorfismo de grafos que preserve el etiquetado entre ellos.

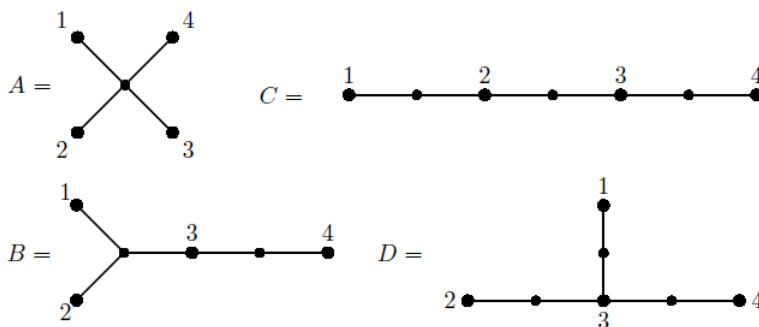


Figura 1: Ejemplos de árboles bipartidos 4-etiquetados, figura obtenida de [1]

**Definición 2.2** (Grado). Si un árbol bipartido  $n$ -etiquetado  $T$  tiene  $m$  vértices sin etiquetar, entonces su grado es  $grd(T) = m - 1$ .

De esta forma, por ejemplo, el árbol formado por un vértice sin etiquetar de valencia  $n$  y  $n$  vértices etiquetados de valencia 1, como el árbol  $A$  de la Figura 1, tendrá grado 0 (es además el único con este grado).

Supongamos que tenemos un árbol  $T$ , con dos aristas distintas  $e_1, e_2$ , que comparten un vértice etiquetado  $v$ , y cuyos vértices sin etiquetar son  $u_1, u_2$ . Podemos obtener un nuevo árbol  $T'$  identificando las aristas  $e_1, e_2$  y los vértices  $u_1, u_2$ . Se dice que  $T'$  se obtiene a partir de  $T$  plegando por  $v$ . Como resultado de esta operación, el número de vértices etiquetados del árbol no varía, pero hay un vértices menos sin etiquetar, por lo que  $grd(T') = grd(T) - 1$ . Un árbol admitirá pliegues siempre que exista algún vértice etiquetado de valencia mayor o igual que 2.

De manera similar, si un árbol tiene un vértice sin etiquetar con valencia mayor o igual que 3 (los vértices sin etiquetar como mínimo deben tener valencia 2), podemos desplegar sobre él, tomando una de sus aristas y separándola en dos siguiendo un proceso contrario al

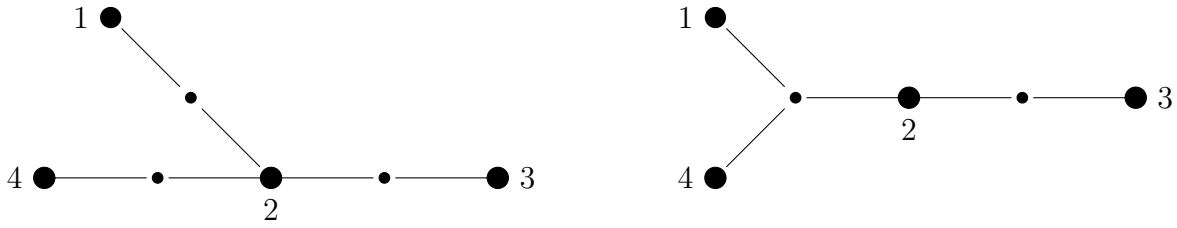


Figura 2: De izquierda a derecha, pliegue sobre el vértice  $v_2$ .

del pliegue, de esta forma se obtiene un árbol con el mismo número de vértices etiquetados, pero uno más sin etiquetar.

En la Figura 2 podemos observar como se produce un pliegue sobre el vértice etiquetado  $v_2$  para pasar de un árbol de grado 2 a uno de grado 1. Si observamos la figura de derecha a izquierda, vemos como desplegar sobre un vértice sin etiquetar (es el único vértice sobre el que podemos desplegar, ya que es el único sin etiquetar con valencia mayor o igual que 3) para pasar de un árbol de grado 1 a uno de grado 2. De esta forma podemos pasar de un árbol de tipo  $B$  a uno de tipo  $D$  y viceversa. Partiendo del árbol de tipo  $B$  de la Figura 1, si plegamos sobre  $v_2$  obtendríamos uno de tipo  $A$ . Si desplegamos de forma que  $v_2$  quede con valencia 3 (como ocurre en la figura de derecha a izquierda) obtenemos uno de tipo  $D$ ; si desplegamos de forma que  $v_1$  o  $v_4$  queden con valencia 2 entonces obtenemos uno de tipo  $C$ . No se puede pasar de uno de tipo  $C$  a uno de tipo  $D$  (ambos tienen el mismo grado).

**Definición 2.3** (Orden parcial y poset). Un orden parcial es una relación dentro de un conjunto  $P$  que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se diferencia de uno total en que no todos los elementos de  $P$  tienen por qué estar relacionados entre sí. Un conjunto con un orden parcial entre sus elementos es un poset.

Los pliegues y despliegues definidos anteriormente inducen un orden parcial en el conjunto de los árboles bipartidos  $n$ -etiquetados.  $T = T'$  si son árboles iguales, y  $T < T'$  si podemos obtener  $T$  a partir de  $T'$  realizando una serie de pliegues. En el caso de los árboles 4-etiquetados, las posibles formas de los árboles son las cuatro de la Figura 1; se tiene que  $A < B < C$  y  $A < B < D$ ;  $C$  y  $D$  no están relacionados.

**Definición 2.4** (El poset de Whitehead). El Poset de Whitehead  $W_n$  es el poset formado por todos los árboles bipartidos  $[n]$ -etiquetados (para cierto  $n$ ), bajo el orden parcial inducido por los pliegues y despliegues definidos anteriormente. El grado definido para los árboles bipartidos  $[n]$ -etiquetados coincide con el grado de ese árbol visto como un elemento del poset  $W_n$ .

**Definición 2.5** (Vértice nuclear). Existe un único elemento de grado 0 en  $W_n$ , que ya hemos mencionado anteriormente, se le denomina vértice nuclear o trivial. Lo denotaremos  $\mathcal{O}$ .

El poset de Whitehead es un poset graduado. Para ello hay que ver que el grado que hemos definido (número de vértices sin etiquetar menos 1) cumple las dos condiciones de la definición de poset graduado. Como ya hemos visto anteriormente, se cumple que si  $T < T'$ , entonces  $grad(T) < grad(T')$ , ya que obtendremos  $T$  realizando como mínimo un pliegue, lo que nos da  $grad(T) + 1 \leq grad(T')$ . Por otra parte, supongamos que  $T'$  cubre a  $T$ , esto quiere

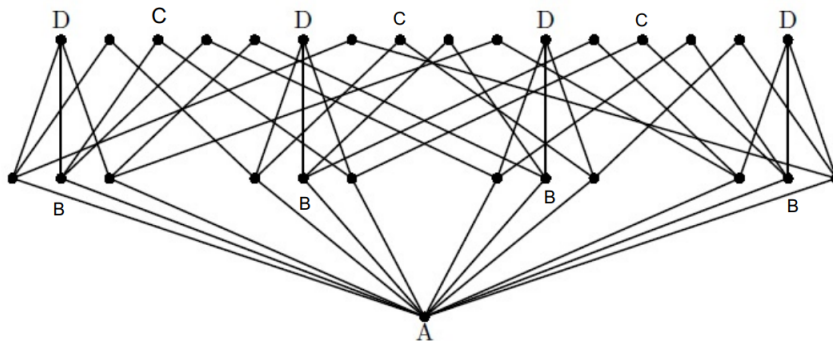


Figura 3: Representación de  $W_4$ , figura obtenida de [1]

decir que no existe ningún árbol  $P$  tal que  $T < P < T'$ ; por tanto, obtenemos  $T$  a partir de  $T'$  realizando un único pliegue, luego  $\text{grad}(T) + 1 = \text{grad}(T')$ , con lo que se cumple la segunda condición, y queda demostrado que está graduado.

En la Figura 3 tenemos la representación gráfica de  $W_4$ , todos los elementos de la segunda fila son árboles de tipo  $B$ , que difieren en los vértices etiquetados. En la fila superior tenemos vértices de tipo  $C$  y  $D$ , todos los que quedan sin etiquetar son de tipo  $C$ .

**Lema 2.1.** *La realización simplicial del poset de Whitehead,  $|W_n|$ , tiene dimensión  $n - 2$ .*

*Demostración.* Consideramos una cadena de árboles en  $W_n$  correspondiente a una secuencia de pliegues. Cada pliegue reduce en uno la cantidad de vértices sin etiquetar. Vamos a ver que el elemento maximal de la cadena tiene a lo sumo  $n - 1$  vértices sin etiquetar. Esto es obvio para  $W_2$ , suponemos que es cierto para  $W_{n-1}$ . Tomamos ahora un árbol en  $W_n$ , eliminamos un vértice etiquetado de valencia uno y su arista adyacente. En el nuevo árbol tenemos un vértice sin etiquetar de valencia 1. Eliminamos ahora ese vértice y su arista adyacente y obtenemos un árbol en  $W_{n-1}$ . Este árbol tiene a lo sumo  $n - 2$  vértices sin etiquetar, luego un árbol de  $W_n$  tiene a lo sumo  $n - 1$ . Además, siempre existe como mínimo un árbol de ese tipo, por ejemplo, los árboles del tipo  $C$  en la Figura 1. Dado que el vértice nuclear, que es el elemento minimal, tiene un único vértice sin etiquetar, nunca tendremos cadenas de longitud mayor que  $n - 1$ , y además siempre tendremos alguna de esa longitud. Por tanto  $|W_n|$  tiene dimensión  $n - 2$ .  $\square$

## 2.2. Particiones base

Vamos a definir los elementos de  $W_n$  de una manera equivalente, que será la que utilizaremos principalmente. Es algo menos visual que los árboles, pero en general mejor para trabajar.

**Definición 2.6** (Partición base, factor operativo y pétalos). Una partición base de  $\{1, \dots, n\}$  es una partición del conjunto de forma que hay un subconjunto distinguido que contiene un único elemento, llamado factor operativo. El resto de subconjuntos se denominan pétalos.

A partir de un árbol bipartido  $n$ -etiquetado podemos obtener  $n$  particiones base, una para cada vértice etiquetado. Se obtienen de la siguiente forma: Tomamos  $v_i$  un vértice etiquetado de  $T$ . La etiqueta de dicho vértice, es decir,  $i$ , es uno de los subconjuntos de la

partición (el factor operativo). El resto de subconjuntos se obtienen uniendo las etiquetas de cada una de las componentes conexas de  $T \setminus \{v_i\}$ , cada uno de estos subconjuntos es un pétalo. A una partición de este tipo la denotamos  $T_i$ , partición base con factor operativo  $i$ , al factor operativo lo denotamos  $Q(T_i)$ . Por ejemplo, tomando el primer árbol de la Figura 2, obtenemos las siguientes cuatro particiones base:

- $T_1: \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$
- $T_2: \{\{2\}, \{1\}, \{3\}, \{4\}\}$
- $T_3: \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}$
- $T_4: \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}$

**Definición 2.7** (Longitud). Definimos la longitud de de una partición base  $l(T_i)$  como el número de pétalos que tiene dicha partición.

En el ejemplo anterior  $l(T_1) = l(T_3) = l(T_4) = 1$  y  $l(T_2) = 3$ .

**Definición 2.8** (Cruces). Dos pétalos  $A \in T_i, B \in P_j$  se cruzan si  $i \neq j$  (es decir, el factor operativo debe ser distinto),  $A \cap B \neq \emptyset$  e  $i \notin B, j \notin A$  (es decir, ninguno de los pétalos puede contener al factor operativo de la otra partición). El número de cruces entre dos particiones se denota  $cr(T_i, P_j)$ . Decimos que dos particiones son disjuntas si su número de cruces es 0 y sus factores operativos son distintos. Dos particiones son disjuntas si y solo si existe un pétalo  $A \in T_i$  y otro  $B \in P_j$  tales que  $A \cup B = [n]$ . Las particiones triviales siempre son disjuntas de cualquier otra partición.

Las particiones base se pueden representar mediante diagramas planos en forma de *flor*. El factor operativo es el centro y, como es de esperar, cada pétalo es un pétalo que sale de él. En la Figura 4 tenemos la flor asociada a  $\{\{2\}, \{1, 3\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{4\}\}$ , partición base de [7] con factor operativo 2.

Podemos omitir en el dibujo uno de los pétalos, ya que no perdemos información (todo número que no esté dentro de un pétalo pertenece al que hemos eliminado), cuando lo hacemos, denotamos a dicho pétalo componente del infinito. Esto es útil a la hora de representar los cruces de manera visual. Dado que para que un pétalo  $A \in T_i$  se cruce con uno  $B \in P_j$ , ninguno de ellos puede contener al factor operativo de la otra partición, el pétalo de  $T_i$  que contenga a  $j$  y el de  $P_j$  que contenga a  $i$  serán las componente de infinito de sus respectivas representaciones. De esta forma evitamos cruces en el dibujo que no se corresponden con cruces según la definición. Podemos observar en la Figura 5 un ejemplo con las particiones  $T_i = \{\{1\}, \{6\}, \{8\}, \{7, 4\}, \{3, 5, 2\}\}$  y  $P_j = \{\{3\}, \{4\}, \{3, 5, 2\}, \{1, 7, 4, 8, 6\}\}$ ; las componentes del infinito son  $\{3, 5, 2\}$  en  $T_i$  y  $\{1, 7, 4, 8, 6\}$  en  $P_j$ .

Para cada árbol se puede obtener una familia de  $n$  particiones base, todas con factor operativo distinto y disjuntas dos a dos. Del mismo modo, para cada familia de particiones base de ese tipo ( $n$  particiones base con factor operativo distinto y disjuntas dos a dos) se puede obtener un árbol bipartido  $[n]$ -etiquetado. Veamos como: En primer lugar, dibujamos la flor de una de las particiones base. Posteriormente vamos añadiendo el resto de particiones al dibujo tomando las componentes del infinito de forma que no haya cruces con las ya dibujadas; esto siempre será posible debido a que son disjuntas dos a dos (puede ocurrir que

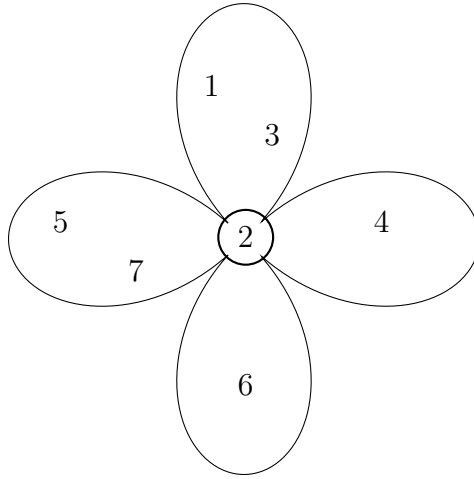


Figura 4: Flor de la partición  $\{\{2\}, \{1, 3\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{4\}\}$

una flor quede dentro del pétalo de otra). Por último en cada elemento del conjunto  $\{1, \dots, n\}$  le asociamos un vértice etiquetado y en cada pétalo colocamos uno sin etiquetar y unimos. Podemos ver un ejemplo hecho con las particiones obtenidas del primer árbol de la Figura 2 en la Figura 6; en las cuatro figuras de arriba se han ido añadiendo las particiones base en orden (primero  $T_1$ , luego  $T_2$ ...) y en la de abajo se han añadido y unido los vértices.

Esto induce una biyección que nos permite expresar los elementos de  $W_n$  de dos maneras equivalentes; por una parte los árboles bipartidos  $[n]$ -etiquetados, y por otra podemos definirlos como familias de particiones bases disjuntas dos a dos y cuyos factores operativos abarcan  $[n]$ . Cuando una partición base está formada únicamente por dos subconjuntos (uno el factor operativo y otro con el resto de elementos de  $[n]$ ) le llamaremos partición trivial; la familia de todas las particiones triviales da lugar al vértice nuclear. Como norma general, a lo largo del trabajo denotaremos a los elementos de  $W_n$  por  $T$  y los llamaremos árboles.  $T_i$  serán las particiones base que se obtienen de un árbol, donde  $i$  marca el factor operativo. Vamos a dar varias definiciones asociadas a esta construcción.

**Definición 2.9** (Orden de particiones base). Decimos que una partición  $T_i \leq P_i$  (es decir, deben tener el mismo factor operativo para poder compararlas) cuando cada pétalo de  $P_i$  está contenido en un pétalo de  $T_i$ , es decir, todo pétalo de  $T_i$  se puede obtener uniendo pétalos de  $P_i$ . Cuando esto ocurre se tiene que  $l(T_i) \leq l(P_i)$ .

**Definición 2.10.** Sean dos vértices  $T, P$ , decimos que  $T \leq P$  si  $T_i \leq P_i, \forall i \in [n]$ .

El orden definido por los pliegues y el definido mediante particiones base son equivalentes. De una manera intuitiva, cuando plegamos sobre un vértice etiquetado lo que estamos haciendo es unir dos pétalos de su partición base, luego es natural que para obtener un vértice menor lo que hagamos sea unir pétalos. El vértice nuclear en este caso es aquel cuyas particiones base son todas la partición trivial.

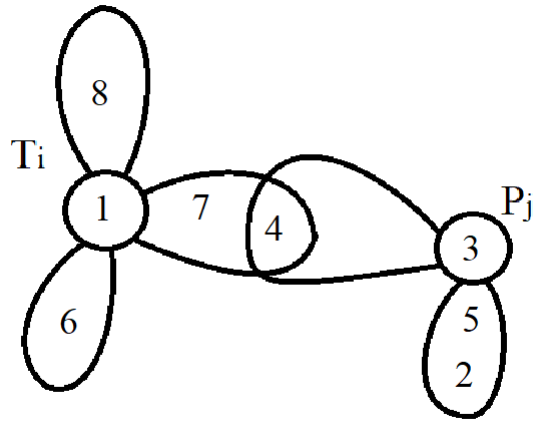


Figura 5: Cruce de las particiones  $T_i, P_j$

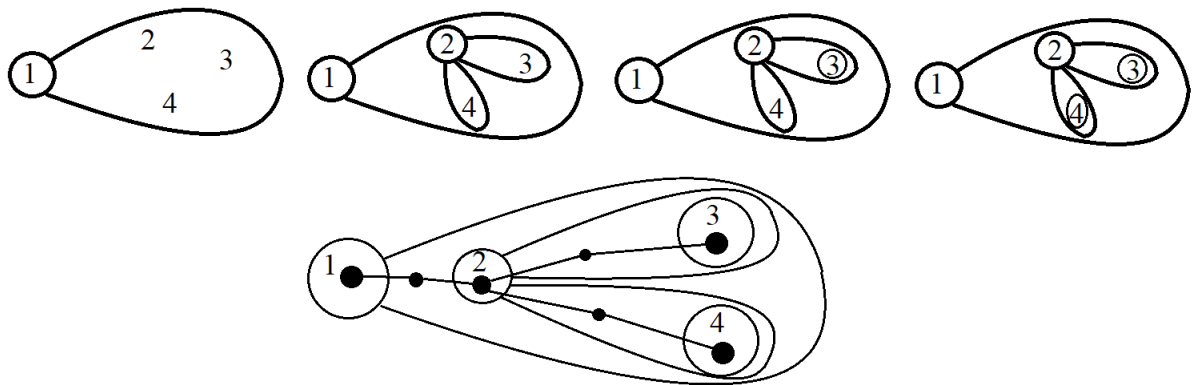


Figura 6: Obtención de un árbol a partir de las particiones base

## 2.3. Marcas

Las marcas nos van a permitir trabajar con el grupo de automorfismos simétricos puros del grupo libre dentro del poset de Whitehead.

**Definición 2.11** (Marca y base simétricamente equivalente). Sea  $G$  el grupo libre y  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  una base prefijada. Llamamos marca de un árbol bipartido etiquetado  $T$  a una base del grupo libre  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ , donde el elemento  $y_i$  es un conjugado de  $x_i$ , y está asociado con el vértice  $i$  de  $T$ . En tal caso, decimos que el árbol está marcado. A las bases de la forma de  $Y$  les llamamos bases simétricamente equivalentes a  $X$ , y forman una clase de equivalencia.

De aquí en adelante trabajaremos con árboles marcados. Por simplicidad, las etiquetas de los vértices etiquetados dejarán de ser los números de de 1 a  $n$  para pasar a ser los elementos de una base de  $F_n$ . Las particiones base serán particiones de dicha base en vez de particiones de  $[n]$  (de ahí el nombre). Cuando no sea necesario no especificaremos la base con la que trabajamos.

**Definición 2.12** (Automorfismo soportado). Sea  $\alpha \in P\Sigma_n$  un automorfismo simétrico de Whitehead y  $T_i$  una partición base, decimos que  $\alpha$  está soportado por  $T_i$  si

- $\alpha(y_i) = y_i$
- $\alpha(y_k) = y_i^{-j} y_k y_i^j, \forall k \in \{1, \dots, n\}$ , es decir, para cada  $k$  existe  $j$  de forma que  $y_k$  queda conjugado por  $y_i^j$
- Todo elemento de la base que pertenezca a un mismo pétalo de  $T_i$  queda conjugado por la misma potencia de  $y_i$  al aplicarle  $\alpha$ .

Sea  $T$  un árbol y  $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_r$  un automorfismo simétrico puro (cada  $\alpha_i$  es un automorfismo simétrico de Whitehead). Decimos que  $\alpha$  está soportado por  $T$  si cada  $\alpha_i$  está soportado por alguna partición base  $T_j$ .

**Definición 2.13** (Soporte completo). Decimos que  $T_i$  es un soporte completo de  $\alpha$  si soporta  $\alpha$  y además  $\alpha$  conjugua por una potencia distinta de  $y_i$  cada uno de los pétalos de la partición. Si  $\alpha \neq id$ , entonces el soporte completo queda únicamente determinado por  $\alpha$ .

**Lema 2.2.** Sean  $T_i, P_j$  dos particiones base disjuntas y sean  $\alpha, \beta \in P\Sigma_n$  soportados por  $T_i$  y  $P_j$  respectivamente. Sean  $\alpha(y_j) = y_i^{-p} y_j y_i^p, \beta(y_i) = y_j^{-q} y_i y_j^q, g = [y_i^p, y_j^q]$ , entonces  $[\alpha, \beta] = \mu_g$ ; donde  $\mu_g$  es el automorfismo interno inducido por  $g$ . En consecuencia los automorfismos externos inducidos por  $\alpha$  y  $\beta$  conmutan.

*Demostración.* Sean  $A \in T_i$  el pétalo que contiene a  $j$  y  $B \in P_j$  el pétalo que contiene a  $i$ , sea  $a = y_i^{-p}, b = y_j^{-q}$ . Entonces  $\alpha_1 = \mu_a \alpha$  fija a todos los elementos en  $A$  y  $\beta_1 = \mu_b \beta$  fija todos los elementos en  $B$ . Por ser disjuntas las particiones,  $[n] - B \subseteq A$  y se tiene que  $\alpha_1, \beta_1$  conmutan. Aplicando todo lo visto

$$\begin{aligned}
 1 &= \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \\
 &= \mu_a^{-1} \alpha \mu_b^{-1} \alpha^{-1} \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} \beta \mu_a \beta^{-1} \mu_b \\
 &= \mu_a^{-1} \mu_{\alpha(b)}^{-1} [\alpha, \beta] \mu_{\beta(a)} \mu_b \\
 &= \mu_a^{-1} \mu_{a^{-1} b^{-1} a} [\alpha, \beta] \mu_{b^{-1} a b} \mu_b
 \end{aligned}$$

y el lema se obtiene. □

**Lema 2.3.** *Sea  $\alpha$  un automorfismo de  $F_n$  y  $T$  un árbol obtenido de una base  $Y$ ; si  $\rho$  es un automorfismo simétrico puro soportado por  $T$  entonces  $\alpha^{-1}\rho\alpha$  es un automorfismo simétrico puro soportado por  $\alpha(T)$ , árbol obtenido de  $\alpha(Y)$ .*

La demostración de este lema se reduce a una mera verificación de las definiciones.



### 3. El complejo de McCullough-Miller

#### 3.1. Construcción y propiedades

Podemos definir una relación de equivalencia entre árboles bipartidos  $[n]$ -etiquetados marcados, viene dada de la siguiente forma: sean  $(B_1, T)$  y  $(B_2, P)$  dos árboles  $[n]$ -etiquetados marcados ( $B_1, B_2$  son bases simétricamente equivalentes y  $T, P$  los árboles), dichos árboles estarán relacionados si existe  $\alpha \in P\Sigma_n$  soportado por  $(B_1, T)$  tal que  $\alpha(B_1) = B_2$  y  $\alpha(T) = P$ . La clase de equivalencia obtenida se denotará  $[B_1, T]$ . El orden parcial existente entre los árboles induce un orden parcial entre las clases de equivalencia anteriores.  $[B_2, P] \leq [B_1, T]$  cuando exista  $\alpha \in P\Sigma_n$  soportado por  $(B_1, T)$  tal que  $\alpha(B_1) = B_2$  y  $P \leq \alpha(T)$ . La transitividad se cumple ya que si  $\alpha, \beta \in P\Sigma_n$  son soportados respectivamente por  $(B_1, T)$  y  $(\alpha(B_1), P)$  con  $\alpha(T) \leq P$ , y sea  $(\beta\alpha(B_1), Q)$  tal que  $\beta(P) \leq Q$ . Aplicando el Lema 2.2 se tiene que  $\beta\alpha = \alpha\alpha^{-1}\beta\alpha$  también está soportado por  $(B_1, T)$ . El conjunto de clases de equivalencias obtenidas es un poset, al que llamaremos poset de McCullough-Miller, cuya realización simplicial es el complejo de McCullough-Miller, lo denotamos  $MM_n$ .

En la realización simplicial del poset los vértices son representados por elementos  $[B, T]$ , en los que juega un papel especial el vértice  $[B, \mathcal{O}]$ , donde  $\mathcal{O}$  es el árbol de grado 0; lo denotaremos núcleo.

**Definición 3.1** (Complejo de McCullough-Miller). El complejo de McCullough-Miller  $MM_n$  es la realización simplicial del poset de árboles bipartidos  $[n]$ -etiquetados marcados, modulo la relación de equivalencia dada por identificar dos árboles en caso de que uno de ellos soporte un automorfismo tal que, al aplicárselo a dicho árbol marcado, obtengamos el otro (en concreto, para poder estar relacionados los árboles tienen que tener *la misma forma*). Más adelante probaremos que dicho complejo es contractible.

Tal y como se han definido las marcas y los automorfismos soportados, todas las bases de  $F_n$  que tenemos en cuenta son simétricamente equivalentes, ya que los elementos de las bases son siempre un conjugado de un elemento de la base prefijada  $X$ . Los automorfismos de  $P\Sigma_n$  son precisamente aquellos que envían  $X$  a otra base simétricamente equivalente. Se puede obtener un  $MM_n$  para cada clase de bases simétricamente equivalentes. Podemos definir  $MM_n$  como la realización simplicial del poset

$$\{ [B, T] \mid B \text{ es simétricamente equivalente a } X \}$$

**Proposición 3.1.**  $[B_1, \mathcal{O}] = [B_2, \mathcal{O}] \iff B_1$  y  $B_2$  son bases conjugadas.

*Demostración.* Supongamos que  $[B_1, \mathcal{O}] = [B_2, \mathcal{O}]$ , en tal caso existe  $\alpha \in P\Sigma_n$  soportado por  $(B_1, \mathcal{O})$  tal que  $\alpha(B_1) = B_2$ . Por estar soportado tenemos que cierto  $x_i \in B_1$  cumple que  $\alpha(x_i) = x_i$ . Por otra parte, teniendo en cuenta la estructura de  $\mathcal{O}$ , tenemos que el conjunto de vértices  $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$  pertenece a la misma componente de  $\mathcal{O} \setminus \{v_i\}$ , luego al aplicarles  $\alpha$  todos quedan conjugados por la misma potencia de  $x_i$ . Sea dicha potencia  $x_i^m = a$ , tenemos que  $\alpha(B_1) = a^{-1}B_1a = B_2$  luego son conjugadas.

Si las bases son conjugadas, por la definición de la relación de equivalencia es claro que  $[B_1, \mathcal{O}] = [B_2, \mathcal{O}]$ .  $\square$

**Definición 3.2** (Estrella superior). El conjunto de los elementos del poset mayores o iguales que un elemento  $[B, T]$  se denomina estrella superior de  $[B, T]$ .

Cada elemento en la estrella superior de  $[B, \mathcal{O}]$  es de la forma  $[B, T]$ , con  $T \in W_n$  únicamente determinado. Por tanto, enviar  $[B, T]$  a  $T$  define un isomorfismo de posets entre la estrella superior de  $[B, \mathcal{O}]$  y  $W_n$ . Por tanto, el poset de McMullough-Miller es la unión las estrellas superior de los distintos núcleos, cada una de ellas isomorfa a  $W_n$ .

**Definición 3.3** (Estrella). La estrella de  $[B, T]$  en  $MM_n$  es la realización simplicial de su estrella superior. La estrella de  $[B, \mathcal{O}]$  es isomorfa a  $|W_n|$ .

**Lema 3.1** ( $MM_n$  es conexo). *Los núcleos  $[B_1, \mathcal{O}]$  y  $[B_2, \mathcal{O}]$  están conectados si  $B_1$  y  $B_2$  son simétricamente equivalentes, por lo que  $MM_n$  es conexo.*

*Demostración.* Las estrellas intersecan si y solo si hay un vértice que puede ser representado tanto como  $[B_1, T]$  como  $[B_2, P]$ . Si existe  $\alpha$  un automorfismo simétrico puro soportado por  $(B_1, T)$  tal que  $\alpha(B_1) = B_2$ , entonces  $[B_1, T] = [B_2, \alpha(T)]$ . Por el contrario, si  $[B_1, T] = [B_2, P]$ , por la definición existe un automorfismo simétrico puro  $\alpha$  soportado por  $(B_1, T)$  tal que  $(\alpha(B_1), \alpha(T)) = (B_2, P)$ .  $\square$

**Lema 3.2** (Dimensión de  $MM_n$ ). *El complejo de McCullough-Miller tiene dimensión  $n - 2$ .*

*Demostración.* Como acabamos de ver,  $MM_n$  está formado por la unión de de complejos isomorfos a  $|W_n|$  (uno para cada núcleo). Por el Lema 2.1 tenemos que cada uno de estos complejos es de dimensión  $n - 2$ , por lo tanto su unión también lo es.  $\square$

El interés de este complejo radica en que  $P\Sigma_n$  induce una acción sobre sus vértices de la siguiente manera, para un  $\alpha \in P\Sigma_n$

$$\alpha([B, T]) = [\alpha(B), \alpha(T)]$$

es obvio que el resultado sigue siendo un vértice de  $MM_n$ , que la identidad fija los vértices y que se respeta el producto; luego es una acción bien definida. Además, los automorfismos internos  $\text{Inn}(F_n) \leq P\Sigma_n$  son estabilizadores de la acción, ya que al aplicarlos siempre obtenemos una base conjugada a la original, por lo que no nos salimos de de la clase de equivalencia  $[B, T]$ . Este hecho permite inducir una acción a los automorfismo simétricos puros externos  $\text{OP}\Sigma_n = P\Sigma_n/\text{Inn}(F_n)$ . Además, si denotamos por  $\bar{\alpha}$  la imagen de un  $\alpha \in P\Sigma_n$  en  $\text{OP}\Sigma_n$ , se tiene que  $\alpha$  es estabilizador de un vértice para la acción de  $P\Sigma_n$  si y solo si  $\bar{\alpha}$  es estabilizador del vértice para la acción  $\text{OP}\Sigma_n$ . Esta acción y principalmente el estudio de los estabilizadores permite obtener propiedades sobre estos grupos de automorfismos.

### 3.2. Ejemplos para valores pequeños de $n$

Vamos a ver algunos ejemplos de  $MM_n$  para valores pequeños de  $n$ , cabe remarcar que solo se podría representar gráficamente hasta  $n = 5$ , y que incluso en ese caso resultaría bastante complicado ya que las ramificaciones de  $W_n$  aumentan rápidamente cuando  $n$  crece.

Para el caso  $n = 2$ , tenemos que en  $W_2$  hay un único elemento, y por tanto en  $MM_n$  también. La dimensión, como ya hemos demostrado, será 0. Esto implica, por ejemplo, que dos bases simétricamente equivalentes son también conjugadas si  $n = 2$ . En consecuencia  $\Sigma_2$  y  $\text{O}\Sigma_2$  son estabilizadores de vértices (no solo los puros, sino los simétricos en general), de hecho:

$$\text{O}\Sigma_2 = C_2.$$

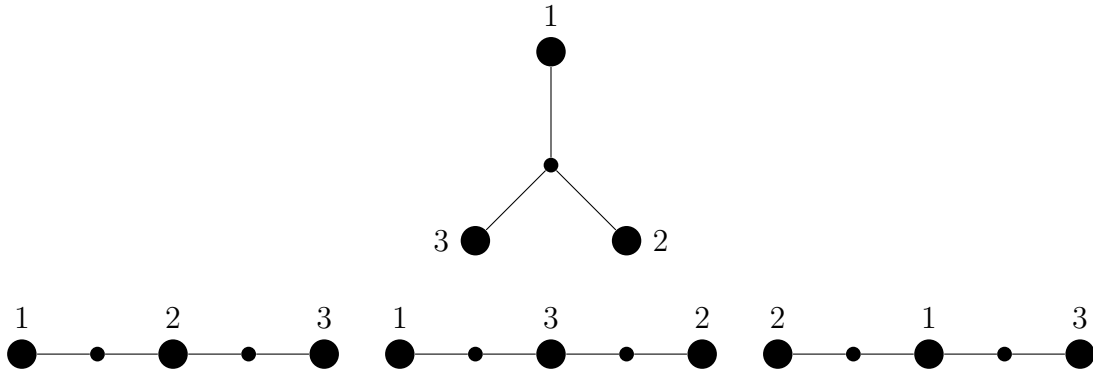


Figura 7: Elementos de  $W_3$

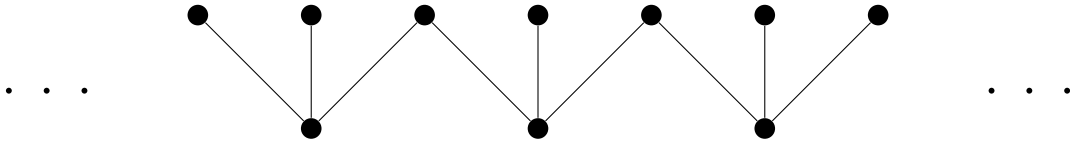


Figura 8: Idea intuitiva de  $MM_3$

Para  $n = 3$ , tenemos que  $MM_n$  tiene dimensión 1. En  $W_3$  tenemos cuatro elementos, el trivial junto con tres árboles de la misma forma pero que difieren en el etiquetado como podemos ver en la Figura 7. En este caso el árbol del poset  $W_3$  coincide con su realización simplicial  $|W_3|$  y es un árbol.  $MM_3$  será la unión de árboles de este tipo, uno para cada clase de bases conjugadas, podemos imaginarlo como un árbol como el de la Figura 8, dicha figura es una simplificación, ya que las estrellas de los núcleos no tienen por qué intersectarse de una manera tan ordenada, pero ayuda a tener una imagen del complejo en la cabeza. En este caso se tiene que:

$$O\Sigma_3 \cong OP\Sigma_3 \times S_3 \cong F_3 \times S_3.$$

En el caso de  $n = 4$ , tenemos que  $MM_4$  tiene dimensión 2, por tanto sus simplices serán puntos, aristas y triángulos, y es algo más complicado de describir.  $W_4$  está formado por 29 vértices, podemos observarlos en la Figura 3. En el complejo, cada vértice de tipo  $B$  está relacionado con dos de tipo  $C$  y uno de tipo  $D$ ; cada vértice de tipo  $C$  con dos de tipo  $B$  y cada vértice de tipo  $D$  con tres de tipo  $B$ , todos ellos con el núcleo que es de tipo  $A$ . Su realización simplicial,  $|W_4|$ , será el cono sobre el complejo 1-dimensional que podemos observar en la Figura 9; hay que tener en cuenta que en dicha figura hay que identificar las aristas antipodales de la circunferencia discontinua, de forma que el vértice de tipo  $D$  quede conectado con el de tipo  $B$  del lado contrario. Como la estrella de cada núcleo es isomorfa a  $|W_4|$ , tenemos que lo que aparece en la figura es el link de un núcleo  $[B, \mathcal{O}]$ . Para construir el cono añadiríamos un vértice correspondiente al núcleo y una arista entre cada vértice de la figura y el del núcleo, estas aristas darán lugar a 36 triángulos.  $MM_4$  está pavimentado por conos de este tipo.

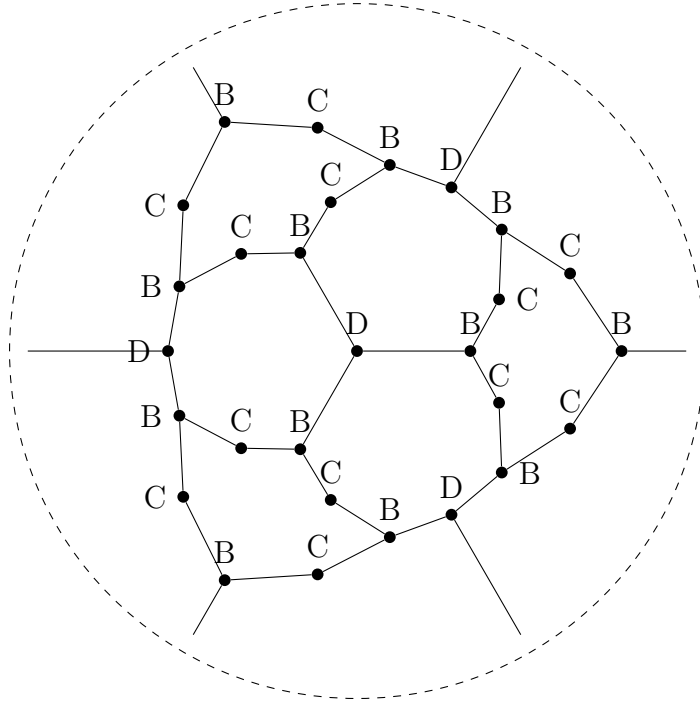


Figura 9: Link de  $[B, \mathcal{O}]$  en  $MM_4$

## 4. Lemas de reductividad

En este capítulo enunciaremos una serie de lemas técnicos y operaciones sobre las particiones base que necesitaremos en la demostración del resultado principal del trabajo, la contractibilidad de  $MM_n$ . Dichos lemas y operaciones estarán relacionados principalmente con la longitud de una palabra de  $F_n$  respecto a una base y la posibilidad de reducirla mediante automorfismos.

**Definición 4.1** (Distancia). Sea  $g \in F_n$  y  $B_1$  una base; entonces, la distancia de  $g$  relativa a  $B_1$ ,  $|g|_{B_1}$ , es la longitud cíclica de la forma normal de  $g$  respecto a  $B_1$  (la longitud cíclica es la longitud mínima de todas las permutaciones cíclicas de la forma normal). Si  $B_2$  es una base conjugada a  $B_1$ , entonces  $|g|_{B_1} = |g|_{B_2}$ , por tanto podemos definir  $|g|_v$  como la distancia de  $g$  relativa a  $v = [B_1, \mathcal{O}]$  un núcleo de  $MM_n$ .

**Lema 4.1.** Sea  $B$  una base de  $F_n$  y  $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ , entonces  $|g|_B = |\alpha(g)|_{\alpha(B)}$ .

**Definición 4.2** (Altura). Sea  $\mathcal{W}$  un conjunto finito de elementos de  $F_n$ . Definimos para un núcleo  $v$  la altura de  $v$  (con respecto a  $\mathcal{W}$ ) como la suma de las distancias:

$$\|v\| = \sum_{w \in \mathcal{W}} |w|_v.$$

**Definición 4.3** (Reductividad). Sea  $\alpha \in \text{P}\Sigma(F_n)$  y  $v = [B, \mathcal{O}]$  un núcleo de  $MM_n$ . Definimos la *reductividad de  $\alpha$  en  $v$*  (con respecto a  $\mathcal{W}$ ) como  $\text{red}(\alpha, v) = \|v\| - \|\alpha(v)\|$ . También podemos referirnos a ella como  $\text{red}(\alpha, B)$ . Un vértice  $(B, T) \in W_n$  se dice que es *reductivo en  $v$*  si existe un  $\alpha$  un automorfismo simétrico puro soportado por  $(B, T)$  tal que  $\alpha(v) \neq v$  y

$red(\alpha, v) \geq 0$ . En este caso también decimos que  $\alpha$  es *reductivo en  $v$* . Si se puede encontrar un  $\alpha$  tal que  $red(\alpha, v) > 0$  decimos que  $(B, T)$  y  $\alpha$  son *estrictamente reductivos en  $v$* . De manera similar, podemos referirnos a una partición base  $(B, T_1)$  de  $(B, T)$  como *(estrictamente) reductiva* si existe un  $\alpha \in P\Sigma_n$  soportado por  $(B, T_1)$  tal que  $\alpha(v) \neq v$  y  $red(\alpha, v) \geq 0$  ( $red(\alpha, v) > 0$ ). La reductividad de  $(B, T_1)$  en  $B$ ,  $red(T_1, B)$ , es el máximo de todas las  $red(\alpha, B)$  con  $\alpha \in P\Sigma_n$  y soportado por  $(B, T_1)$ . Decimos que la partición base  $(B, T_i)$  es *completamente (estrictamente) reductiva* si existe  $\alpha \in P\Sigma_n$  (estrictamente) reductivo cuyo soporte completo es  $(B, T_i)$ .

## 4.1. Refinamiento, disyunción y compatibilidad

Sean  $T_i$  y  $P_j$  dos particiones base de una misma base  $B$  (la omitiremos para no hacer pesada la notación), con distinto factor operativo. Definimos dos nuevas particiones,  $T'_i$  y  $T''_i$ , llamadas respectivamente refinamiento de  $T_i$  respecto a  $P_j$  y disyunción de  $T_i$  respecto a  $P_j$ . Sea  $T_i(m)$  el pétalo de  $T_i$  que contiene a  $Q(T_j) = j$ ; y sea  $P_j(n)$  el pétalo de  $P_j$  que contiene a  $Q(T_i) = i$ . Definimos  $Z(P_j) = B - P_j(n)$  y  $Z(T_i) = B - T_i(m)$ . Es útil a la hora de representar gráficamente tomar  $T_i(m)$  y  $P_j(n)$  como las componentes del infinito de sus respectivas particiones.

**Definición 4.4** (Refinamiento de particiones base).  $T'_i$  es la partición base que se obtiene a partir de  $T_i$  dividiendo los pétalos que se cruzan con  $P_j$  en las partes que cruzan y las que no. Podemos expresarlo como la partición obtenida a partir de  $T_i$  manteniendo el factor operativo y  $T_i(m)$ , y el resto de pétalos son  $T_i(k) \cap P_j(l)$ ,  $l \neq n$  (estos son los pétalos nuevos que se obtienen al separar las partes que cruzan), o  $T_i(k) - Z(P_j)$  (estos son tanto los pétalos que no se cruzaban como los pétalos nuevos obtenidos una vez quitada la parte que cruzaba).

**Definición 4.5** (Disyunción de particiones base).  $T''_i$  es la partición base obtenida a partir de  $T_i$  moviendo todos los elementos de los pétalos de  $T_i$  se que cruzan con  $P_j$  a  $T_i(m)$ , es decir, a la componente del infinito. Podemos expresarlo de la siguiente manera, el factor operativo se mantiene, formamos un nuevo pétalo mediante la unión  $T_i(m) \cup Z(P_j)$  y el resto de pétalos se obtienen como  $T_i(k) - Z(P_j)$ .

La formulación de estas dos operaciones mediante conjuntos puede resultar pesada; pero, en general, es suficiente con tener la idea de que lo que hacemos es al refinar es dividir pétalos cuando se cruzan, y en la disyunción enviamos los elementos que estaban en el cruce a la componente del infinito. Podemos observar un ejemplo en la Figura [10](#). Las particiones son  $P_j = \{\{3\}, \{2\}, \{4, 8\}, \{1, 6, 7, 5\}\}$ ,  $T_i = \{\{1\}, \{5\}, \{6\}, \{4, 7\}, \{8, 3, 2\}\}$ ,  $T'_i = \{\{1\}, \{6\}, \{7\}, \{4\}, \{5\}, \{8, 3, 2\}\}$  y  $T''_i = \{\{1\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{4, 8, 3, 2\}\}$

Las siguiente propiedades se deducen directamente de la definición:

- 1.  $Q(T_i) = Q(T'_i) = Q(T''_i)$ , los factores operativos se mantienen.
- 2.  $cr(T_i, P_j) = cr(T'_i, P_j)$  y  $cr(T''_i, S_1) = 0$ .
- 3.  $T_i \leq T'_i$  y  $T''_i \leq T'_i$ .
- 4. Si  $T_i$  y  $P_j$  son disjuntos, entonces  $T_i = T'_i = T''_i$ . En concreto, esto siempre ocurre si  $T_i$  o  $P_j$  son una partición base trivial.

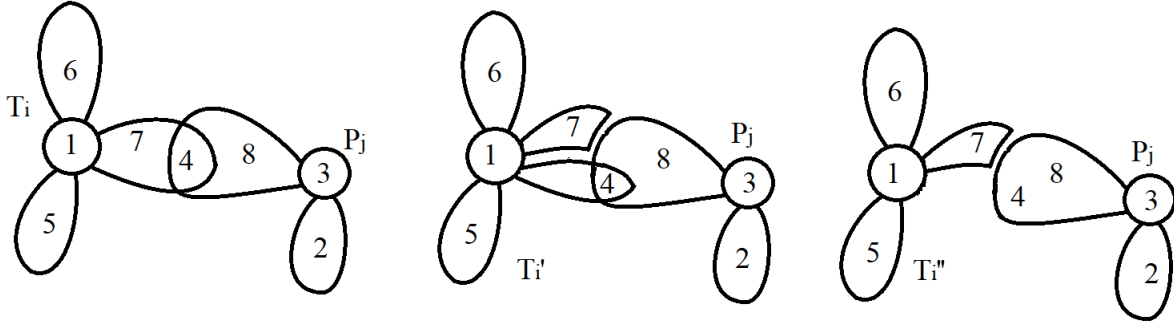


Figura 10: Refinamiento y disyunción de  $T_i$

Vamos a extender los conceptos de refinamiento y disyunción de particiones base a árboles. Para ello introduciremos la noción de  $P_j$ -contenido. Fijamos  $P_k$  una partición base de  $B$ . Supongamos que  $T_i, T_j$  son particiones base (podemos suponerlas del mismo árbol) con factor operativo distinto al de  $P_k$ . Tomamos  $Z(T_i)$  y  $Z(T_j)$  (los complementos del pétalo que contiene a  $Q(P_k)$ , tal como se ha definido anteriormente). Decimos que  $T_i$  está  $P_k$ -contenida en  $T_j$  si  $Z(T_i) \subseteq Z(T_j)$ . Supongamos ahora que  $T$  es un vértice. Decimos que  $T_i$  es  $P_k$ -interior en  $T$  si se cruza con  $P_k$  y es minimal con respecto al orden parcial de  $P_k$ -contenido en la colección de particiones base de  $T$  que cruzan con  $P_j$ .

**Definición 4.6** ( $T$  admisibilidad). Sean  $P_k$  una partición base de  $B$ ,  $T$  un árbol y  $L \subseteq B$  tal que si  $l \in L$ , entonces  $T_l$  es  $P_k$ -interior en  $T$  o disjunta con  $P_k$ . Un conjunto satisfaciendo tal condición se dice  $T$ -admisibile.

**Definición 4.7** (Refinamiento y disyunción de árboles). Sean  $P_k$  una partición base de  $B$ ,  $T$  un árbol y  $L \subseteq B$  un conjunto  $T$ -admisibile. El  $P_k$ -refinamiento de  $T$  con respecto a  $L$  es el vértice  $T'$  obtenido cambiando cada partición base de  $T$  cuyo factor operativo esté en  $L$  por su refinamiento respecto a  $P_k$ . De manera similar, la  $P_k$ -disyunción de  $T$  con respecto a  $L$  es el vértice  $T''$  obtenido cambiando todas las particiones base de  $T$  cuyo factor operativo está en  $L$  por su disyunción respecto a  $P_k$ .

Hay que tener en cuenta que no se puede refinar  $T$  respecto a un conjunto no admisibile, ya que en tal caso las particiones base de  $T$  dejarían de ser disjuntas dos a dos, por lo que el resultado no sería un árbol. Además, si  $T < S$  y  $L$  es  $T$ -admisibile,  $L$  no tiene por qué ser  $S$ -admisibile. Puede ocurrir de la siguiente manera: para un cierto  $l$ ,  $T_l$  es  $P_k$ -interior en  $T$ , pero al producir  $S_l$  a partir  $T_l$  (cabe recordar que para producir particiones base mayores dividimos pétalos y para producir menores los colapsamos) el pétalo de  $T_l$  que contiene a  $Q(P_k)$  se divide de tal forma que  $S_l$  no es  $P_k$ -interior. Podemos obtener el siguiente lema directamente de las definiciones.

**Lema 4.2.** Sea  $P_k$  una partición base. Supongamos que  $T$  y  $S$  son dos árboles tales que  $T < S$  y sea  $L$  un conjunto  $T$  y  $S$ -admisibile. Sean  $T', S'$  los  $P_k$ -refinamientos y  $T'', S''$  las  $P_k$ -disyunciones de  $T, S$  con respecto a  $L$ . Entonces  $T' \leq S'$  y  $T'' \leq S''$ .

**Definición 4.8** (Compatibilidad). Una partición base  $T_i$  se dice compatible con una partición base  $P_j$  si  $Q(T_i) = Q(P_j)$  o son disjuntas. De manera equivalente,  $T_i$  es compatible con

$P_j$  si y solo si  $cr(T_i, P_j) = 0$ . Una colección de árboles  $\{T^1, \dots, T^k\}$  es una colección compatible si cada partición base  $T_i^p$  es compatible con cada  $T_j^q$ . Si una colección  $\{T^1, \dots, T^k\}$  tiene supremo en  $W_n$ , entonces lo denotamos  $T^1 \vee \dots \vee T^k$  y le llamamos la unión de  $\{T^1, \dots, T^k\}$ .

**Lema 4.3.** *Una colección  $\{T^1, \dots, T^k\}$  de árboles es compatible si y solo si tiene supremo. Es más, si  $\{T^1, \dots, T^k\}$  tiene cota superior, entonces tiene supremo.*

*Demostración.* Veamos que si tiene supremo es compatible. En primer lugar hay que recordar que las particiones base de un árbol  $T$  son disjuntas dos a dos; si  $T < P$  entonces  $P$  se puede obtener dividiendo pétalos de las particiones base de  $T$ , por tanto las particiones base de  $T$  y las de  $P$  también son disjuntas, ya que si dos particiones eran disjuntas, por mucho que dividamos pétalos no van a aparecer cruces. Por tanto se tiene que las particiones base de cualquier árbol de la colección son disjuntas con las del supremo. Por último, supongamos que  $T$  y  $P$  son árboles de la colección y que tienen alguna partición no disjunta. En tal caso, si hacemos divisiones de los pétalos de  $P$  las particiones seguirán sin ser disjuntas, pero esto da lugar a una contradicción, ya que si empezamos a dividir  $P$  en algún momento llegaríamos al supremo, y tendríamos que una partición base de  $T$  se cruza con una del supremo.

La otra implicación la demostraremos de manera constructiva: si  $T_i^1, T_i^2$  son particiones base con el mismo factor operativo, definimos su unión  $T_i^1 \vee T_i^2$  como la partición base con el mismo factor operativo y cuyos pétalos son las intersecciones no vacías de los pétalos de las dos anteriores,  $T_i^1(j) \cap T_i^2(k)$ . De manera más general, dada una colección  $\{T_i^1, \dots, T_i^m\}$  de particiones base con el mismo factor operativo, definimos  $T_i^1 \vee \dots \vee T_i^m$  inductivamente como  $(\dots ((T_i^1 \vee T_i^2) \vee T_i^3) \dots) \vee T_i^m$ . Para una colección de vértices compatibles  $\{T^1, \dots, T^k\}$  definimos  $T^1 \vee \dots \vee T^k$  como el árbol cuyas particiones base no triviales son la unión de todas las particiones base no triviales de la familia con el mismo factor operativo.  $\square$

**Lema 4.4.** *Sean  $T_i, P_j$  dos particiones base con distinto factor operativo, y  $T_i', T_i'', P_j', P_j''$  sus respectivos refinamientos y disyunciones de la una respecto a la otra. Si  $T_i, P_j$  son compatibles con una colección de particiones base, entonces también lo son  $T_i', T_i'', P_j', P_j''$ .*

La demostración se reduce al estudio de distintos casos según los factores operativos sean iguales o distintos.

## 4.2. Los lemas de factorización y existencia

Recordemos que cada clase de conjugación de bases de  $F_n$  se corresponde con un núcleo  $v = [B, \mathcal{O}]$  en  $MM_n$ .

Vamos a enunciar un lema previo que necesitaremos en la próxima demostración. Es un caso particular del Lema 2.5 de [2].

**Lema 4.5.** *Sean  $\alpha, \beta \in P\Sigma_n$ . Sea  $u \in F_n$ ,  $v = \alpha(u)$ ,  $w = \beta(u)$ . Si el conjunto de elementos de  $X$  que quedan conjugados al aplicar los automorfismos es disjunto (es decir, si  $\alpha$  conjuga cierto  $x_i$ , entonces  $\beta$  lo fija), entonces  $\alpha^{-1}\beta = \beta\alpha^{-1}$ ,*

$$|\beta(v)| - |v| = |\beta(u)| - |u| \quad y \quad |\alpha(w)| - |w| = |\alpha(u)| - |u|.$$

**Lema 4.6.** *Sea  $B$  una base de  $F_n$  y sea  $v$  su correspondiente núcleo. Supongamos que  $\alpha, \beta$  son dos automorfismos simétricos de Whitehead, que pueden ser soportados por particiones base disjuntas. Entonces  $\text{red}(\alpha, \beta(v)) = \text{red}(\alpha, v)$ .*

*Demostración.* Si  $\alpha$  o  $\beta$  son la identidad el resultado es obvio. En otro caso, consideramos  $T_i, P_j$  los soportes completos de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Dado que  $\alpha$  y  $\beta$  están soportados por particiones base disjuntas,  $T_i$  y  $P_j$  también lo son, ya que se pueden obtener de esas dos bases disjuntas uniendo pétalos. Queremos aplicar el Lema 4.5, pero solo se puede aplicar cuando tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son la identidad en  $i$  y  $j$ ; esto, unido a que las particiones son disjuntas, hace que se cumplan las condiciones del lema previo. Para ello vamos a llevar a cabo un proceso de normalización. Los automorfismos simétricos de Whitehead fijan el factor operativo de la partición que los soporta y conjugan a los elementos de una mismo pétalo por la misma potencia del elemento fijado. Podemos definir una aplicación *pétalo* que asocia cada pétalo de una partición con la potencia del factor operativo por la que es conjugado (observar que una vez fijada esta aplicación el automorfismo simétrico de Whitehead queda fijado). Tomamos  $x$  la aplicación pétalo asociada a  $\alpha$ , sea  $A$  el pétalo de  $T_i$  que contiene a  $Q(P_j) = j$  y  $x(A)$  la potencia de  $x_i$  por la queda conjugado  $A$ , definimos

$$\hat{x} = x(A)^{-1}x,$$

y  $\hat{\alpha}$  el automorfismo simétrico de Whitehead cuya aplicación pétalo es  $\hat{x}$ . Este nuevo automorfismo es la identidad tanto en  $i$  (ya que al conjugar un elemento por una potencia suya siempre obtenemos el elemento inicial) como en el el pétalo que contiene a  $j$ , y por tanto en  $j$ . Definimos  $\hat{\beta}$  de manera equivalente, de forma que además de ser la identidad en  $j$  lo sea también en el pétalo que contiene a  $i$ . Se tiene que  $\text{red}(\alpha, v) = \text{red}(\hat{\alpha}, v)$  ya que difieren en la conjugación por un automorfismos interno que fija  $v$ . Dado que también fija  $\beta(v)$  y  $\beta(v) = \hat{\beta}(v)$ , tenemos que  $\text{red}(\alpha, \beta(v)) = \text{red}(\hat{\alpha}, \beta(v)) = \text{red}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}(v))$ .

Ahora podemos aplicar el Lema 4.5 a  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  y obtenemos que para  $g \in F_n$

$$|g|_v - |\hat{\alpha}^{-1}(g)|_v = |\hat{\beta}^{-1}(g)|_v - |\hat{\alpha}^{-1}\hat{\beta}^{-1}(g)|_v$$

Usando los Lemas 4.1 y 2.2

$$\begin{aligned} |g|_{\hat{\beta}(v)} - |g|_{\hat{\alpha}\hat{\beta}(v)} &= |\hat{\beta}^{-1}(g)|_v - |\hat{\beta}^{-1}\hat{\alpha}^{-1}(g)|_v \\ &= |\hat{\beta}^{-1}(g)|_v - |\hat{\alpha}^{-1}\hat{\beta}^{-1}(g)|_v \\ &= |g|_v - |\hat{\alpha}^{-1}(g)|_v \\ &= |g|_v - |g|_{\hat{\alpha}(v)}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \text{red}(\alpha, \beta v) &= \text{red}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}v) = \\ \sum_{g \in \mathcal{W}} |g|_{\hat{\beta}v} - |g|_{\hat{\alpha}\hat{\beta}v} &= \sum_{g \in \mathcal{W}} |g|_v - |g|_{\hat{\alpha}v} = \text{red}(\hat{\alpha}, v) = \text{red}(\alpha, v) \end{aligned}$$

□

Este lema se generaliza al siguiente, en el que trabajamos con un automorfismo simétrico puro soportado por un árbol.



**Lema 4.7** (Lema de factorización). *Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  una base de  $F_n$  y  $T \in W_n$  un árbol. Supongamos que  $\alpha_i$  es un automorfismo simétrico de Whitehead soportado por  $(X, T_i)$  para cada  $i$ . Entonces*

$$\text{red}(\alpha_n \cdots \alpha_2 \alpha_1, v) = \sum_{i=1}^n \text{red}(\alpha_i, v).$$

*Demostración.* De la definición de reductividad, es fácil comprobar que

$$\text{red}(\alpha_n \cdots \alpha_2 \alpha_1, v) = \text{red}(\alpha_1, v) + \text{red}(\alpha_2, \alpha_1(v)) + \cdots + \text{red}(\alpha_n, \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1(v))$$

Supongamos que  $i > j \geq 1$ . Entonces

$$\alpha'_i = (\alpha_{j-1} \cdots \alpha_1) \alpha_i (\alpha_{j-1} \cdots \alpha_1)^{-1}$$

y

$$\alpha'_j = (\alpha_{j-1} \cdots \alpha_1) \alpha_j (\alpha_{j-1} \cdots \alpha_1)^{-1}$$

son automorfismos simétricos de Whitehead soportados por por particiones bases disjuntas de  $\alpha_{j-1} \cdots \alpha_1(X)$ . Por el Lema [2.2](#), representan los mismos automorfismos externos que  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$ . Usando el Lema [4.6](#) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{red}(\alpha_i, \alpha_j \cdots \alpha_1(v)) &= \text{red}(\alpha'_i, \alpha'_j \alpha_{j-1} \cdots \alpha_1(v)) = \\ \text{red}(\alpha'_i, \alpha_{j-1} \cdots \alpha_1(v)) &= \text{red}(\alpha_i, \alpha_{j-1} \cdots \alpha_1(v)) \end{aligned}$$

Aplicándolo repetidamente obtenemos

$$\text{red}(\alpha_i, \alpha_{i-1} \cdots \alpha_2 \alpha_1(v)) = \text{red}(\alpha_i, \alpha_{i-2} \cdots \alpha_2 \alpha_1(v)) = \cdots = \text{red}(\alpha_i, v)$$

para cada  $i = 2, \dots, k$ , y se tiene el lema.  $\square$

**Lema 4.8** (Lema de existencia). *Sea  $v = [B, \mathcal{O}]$  un núcleo de  $MM_n$  cuya altura respecto a un conjunto de palabras  $\mathcal{W}$  no es minimal. Entonces existe un automorfismo simétrico puro estrictamente reductivo asociado a  $B$ .*

*Demostración.* Sea  $v = [B, \mathcal{O}]$  un núcleo cuya altura  $\|u\|$  con respecto a  $\mathcal{W}$  no es minimal. Sabemos que  $u = [X, \mathcal{O}]$  tiene altura minimal, y como  $X$  y  $B$  son bases simétricamente equivalentes, existe  $\alpha \in P\Sigma_n$  tal que  $\alpha(B) = X$ , y por tanto dicho  $\alpha$  será estrictamente reductivo en  $v$ .  $\square$

### 4.3. El Lema de Collins-Zieschang

Sean  $T_i, P_j$  dos particiones base con distinto factor operativo, y sean  $m, n$  tales que  $Q(P_j) \in T_i(m)$  y  $Q(T_i) \in P_j(n)$  ( $T_i(m)$  y  $P_j(n)$  son pétalos de las particiones). En esta sección denotaremos por  $T'_i$  y  $T''_i$  a la disyunción el refinamiento de  $T_i$  respecto a  $P_j$ ; del mismo modo denotaremos  $P'_j$  y  $P''_j$  a las de  $P_j$  respecto a  $T_i$ .

Antes de enunciar el siguiente lema, necesitamos definir una nueva aplicación pétalo. Sean  $\alpha \in P\Sigma_n$  soportado por  $(X, T_i)$  y  $x$  su aplicación pétalo asociada, definimos  $x''$  como

$$x''(H) = \begin{cases} x(Q(P_j)) & \text{si } H \in X - P_j(n) \\ x(H) & \text{si } H \in P_j(n) \end{cases}$$

donde  $H$  son los pétalos de la partición. El resultado es altamente dependiente de  $P_j$ . Al automorfismo simétrico puro asociado a esta aplicación pétalo lo denotamos  $\alpha_0$ . Cabe destacar que  $\alpha_0$  está soportado por  $T_i''$ ; de manera intuitiva, si observamos la Figura [10](#), dado que tomamos  $P_j(n)$  como la componente del infinito de  $P_j$ ,  $X - P_j(n)$  coincide con la flor de  $P_j$ . Por otra parte,  $P_j(n)$  coincide con la flor de  $T_i''$  junto con posibles elementos que estuvieran tanto en la componente del infinito de una partición como en la de la otra (en este caso concreto ninguno). Una vez visto esto es fácil ver que está soportado por  $T_i''$ . Definimos similarmente  $\sigma$  y  $\sigma_0$  intercambiando los papeles de  $T_i$  y  $P_j$ .

Vamos a enunciar un lema previo que necesitaremos en la próxima demostración. Es un caso particular del Lema 2.6 de [\[2\]](#).

**Lema 4.9.** *Sean  $\alpha, \beta$  automorfismos simétricos de Whitehead con distinto factor operativo. Sea  $w \in F_n$ . Supongamos que  $X_1$  es el subconjunto formado por todos los elementos  $X$  que no quedan fijados al aplicar  $\alpha$ , e  $X_2$  el equivalente para  $\beta$ . Supongamos que la intersección de  $X_1$  y  $X_2$  es no trivial. Entonces*

$$|\alpha_0(w)| + |\beta_0(w)| \leq |\alpha(w)| + |\beta(w)|.$$

**Lema 4.10** (Lema de Collins-Zieschang). *Sean  $T_i, P_j$  particiones base con distinto factor operativo y sean  $\alpha, \sigma$  dos automorfismos simétricos de Whitehead cuyos soportes completos son  $T_i$  y  $P_j$  respectivamente y sea el vértice nuclear  $v = [X, \mathcal{O}]$ . Entonces*

$$\text{red}(\alpha_0, v) + \text{red}(\sigma_0, v) \geq \text{red}(\alpha, v) + \text{red}(\sigma, v).$$

*Demostración.* Sean  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\sigma}$  definidas como en la demostración del Lema [4.6](#). Entonces  $\hat{\alpha}$  está soportado por  $(X, T_i)$  y  $\hat{\alpha}(v) = \alpha(v)$ , y las respectivas propiedades se cumplen para  $\sigma$  y  $\hat{\sigma}$ . Es más, las definiciones implican que  $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}$  y  $\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}$ . Usando estas igualdades, la afirmación del Lema [4.9](#) toma la siguiente forma

$$\left| \hat{\alpha}^{-1}(g) \right|_v + \left| \hat{\sigma}^{-1}(g) \right|_v \geq \left| \hat{\alpha}_0^{-1}(g) \right|_v + \left| \hat{\sigma}_0^{-1}(g) \right|_v$$

Aplicando dos veces el Lema [4.1](#) tenemos

$$\begin{aligned} |g|_{\alpha(v)} + |g|_{\sigma(v)} &= |g|_{\hat{\alpha}(v)} + |g|_{\hat{\sigma}(v)} \\ &= \left| \hat{\alpha}^{-1}(g) \right|_v + \left| \hat{\sigma}^{-1}(g) \right|_v \\ &\geq \left| \hat{\alpha}_0^{-1}(g) \right|_v + \left| \hat{\sigma}_0^{-1}(g) \right|_v \\ &= |g|_{\hat{\alpha}_0(v)} + |g|_{\hat{\sigma}_0(v)} \\ &= |g|_{\alpha_0(v)} + |g|_{\sigma_0(v)} \end{aligned}$$

y el lema se obtiene sumando sobre todas las  $g \in \mathcal{W}$ . □

## 5. Contractibilidad de $MM_n$

En esta sección demostraremos el resultado principal del trabajo, la contractibilidad de  $MM_n$ . Se trata de una demostración larga con bastantes detalles, por lo que se hará un esquema de la misma con los pasos principales, que después se irán detallando. La idea de la demostración es ir añadiendo inductivamente las estrellas de los núcleos, demostrando que la intersección con las estrellas previamente acumuladas es contractibles, de esta forma podremos deducir que la unión es contractible.

### 5.1. Lemas de posets

Antes de entrar en la demostración, vamos a enunciar dos lemas sobre homotopía en posets que necesitaremos más adelante.

**Definición 5.1** (Aplicación poset). Sean  $X, Y$  dos posets. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación poset si mantiene el orden o lo invierte. Una aplicación poset induce una aplicación simplicial se denota por  $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ .

**Lema 5.1.** *Si un poset tiene elemento maximal o minimal, entonces su realización simplicial es contractible.*

*Demostración.* El resultado se obtiene ya que en dichos casos la realización simplicial es un cono.  $\square$

**Definición 5.2** (Estrella superior e inferior). Para  $x \in X$  (también puede ser considerado como un vértice en  $|X|$ ) la estrella superior es el subconjunto (parcialmente ordenado)  $st_+(x) = \{z \in X \mid z \geq x\} \subseteq X$ . La estrella inferior  $st_-(x)$  se define de manera equivalente pero con  $z \leq x$ . Denotamos sus realizaciones simpliciales por  $|st_+(x)|$  y  $|st_-(x)|$ ; son subcomplejos contractibles de  $|X|$ .

**Lema 5.2.** *Sean  $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones poset. Si  $f(x) \geq g(x) \forall x \in X$ , entonces  $|f|$  es homotópica a  $|g|$  relativa al subcomplejo de  $|X|$  generado por  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ .*

La demostración se puede encontrar en el resultado 1.3 de [6]. En el caso de que  $f : X \rightarrow X$  sea una aplicación poset con  $f(x) \geq x$  (o  $f(x) \leq x$ ) para todo  $x$ , este lema implica (tomando  $g$  como la identidad) que la imagen  $|f(X)|$  es un retracto por deformación débil de  $|X|$ .

Usaremos también el siguiente criterio para saber si  $|f|$  es una equivalencia de homotopía; aparece en la Proposición 1.6 de [6].

**Lema 5.3.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación poset. Si la realización simplicial de  $f^{-1}(st_+(y))$  (respectivamente de  $f^{-1}(st_-(y))$ ) es contractible para cada  $y \in Y$ , entonces  $|f|$  es una equivalencia de homotopía.*

### 5.2. Prueba de la contractibilidad

Para pegar las estrellas en el orden correcto, debemos definir la altura  $\cdot$ . Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  la base prefijada de  $F_n$ , definimos  $\mathcal{W}_0$  como la colección de  $n(n-1)/2$  elementos  $\{x_i x_j \mid i < j\}$ . Para un núcleo  $v \in MM_n$  definimos  $\|v\|$  la altura de  $v$  respecto a  $\mathcal{W}_0$ .

Para la base  $X$ , el núcleo  $v = [X, \mathcal{O}]$  tiene altura  $n(n-1)$ . Además, tenemos el siguiente lema.

**Lema 5.4.** *Si  $v$  es un núcleo de  $MM_n$ , entonces  $\|v\| \geq n(n-1)$  y la igualdad se da si y solo si  $v = [X, \mathcal{O}]$ .*

*Demostración.* Sea  $v = [\mathcal{H}, \mathcal{O}]$ . La base  $\mathcal{H}$  es simétricamente equivalente a  $X$ , luego después de una posible conjugación la podemos escribir como  $\mathcal{H} = \{x_1, h_2^{-1}x_2h_2, \dots, h_n^{-1}x_nh_n\}$ . Es obvio que  $|x_ix_j|_v \geq 2$ , con lo que la primera afirmación queda demostrada. Pasamos a probar la segunda, escribimos cada  $h_i = a_1 \cdots a_k$  en su forma reducida respecto a  $\mathcal{H}$ . Para que se de la igualdad, es necesario que  $2 = |x_1x_i|_v = |x_1h_ih_i^{-1}x_ih_ih_i^{-1}|_v$ , como no se pueden dar cancelaciones entre  $h_i$  y  $h_i^{-1}x_ih_i$  ni entre  $h_i^{-1}x_ih_i$  y  $h_i^{-1}$  (vistas como palabras de  $\mathcal{H}$ ) se tiene que  $h_i = x_1^{-1}$ , luego  $\mathcal{H}$  es una base conjugada de  $X$  y  $v = [X, \mathcal{O}]$ .  $\square$

Dentro del conjunto de los núcleos que tengan la misma altura estableceremos un buen orden (dicho orden no tiene relación ni con la altura ni con el orden del poset de Whitehead, es simplemente un buen orden que podemos inducir en el conjunto gracias al axioma de elección), un conjunto está bien ordenado si es un conjunto no vacío totalmente ordenado y todo subconjunto no vacío tiene elemento mínimo. Para evitar confusión usaremos el símbolo  $\prec$  en este orden. Una vez definida la altura, que nos marcará el orden de pegado de las estrellas vamos hacer una serie de definiciones de elementos que van a aparecer en la demostración.

- $K_m$ : Unión de las estrellas (cerradas) de los núcleos de  $MM_n$  de altura  $\leq m$ .
- $K_{\prec u}$ : Para un núcleo  $u$  de altura  $m$ ,

$$K_{\prec u} = K_{m-1} \cup \left( \bigcup_{v \prec u} st(v) \right),$$

en la ecuación anterior,  $v \prec u$  hace referencia al buen orden inducido entre los núcleos de la misma altura señalado anteriormente. La  $st(v)$  por el contrario, se obtiene con el orden habitual del poset.

- $R' := K_{\prec u} \cap st(u)$ .
- $R$ : Subcomplejo completo de  $R'$  generado por los vértices de  $R'$  cuyas particiones base no triviales son reductivas respecto a  $u$ .
- $S$ : Subcomplejo completo de  $R$  generado por los vértices de  $R$  que contienen una partición base estrictamente reductiva. Se tiene (lo probaremos más adelante) que  $S = R \cap K_{m-1}$ .

**Teorema 5.1.**  *$MM_n$  es contractible.*

Dado que  $K = \cup K_m$  es un complejo simplicial, es suficiente con demostrar inductivamente que  $K_m$  es contractible. Probaremos por inducción en el buen orden elegido que cada  $K_{\prec u} \cup st(u)$  es contractible. Por la hipótesis de inducción suponemos que  $K_{\prec u}$  es contractible. Dado que  $st(u)$  también es contractible, basta con demostrar que  $R' = K_{\prec u} \cap st(u)$  es contractible. La demostración se llevará a cabo de la siguiente forma:

- Paso 1: Probamos que  $R'$  es homotópicamente equivalente a  $R$ .
- Paso 2: Probamos que  $R$  es homotópicamente equivalente a  $S$ .
- Paso 3: Probamos que  $S$  es contractible, con lo que la demostración quedará terminada.

**Lema 5.5.** Sean  $u = [\mathcal{H}, \mathcal{O}]$  y  $v = [\mathcal{H}, T]$  un vértice en  $R'$ . Sea  $[\mathcal{H}, \Theta(T)]$  el vértice obtenido cambiando cada partición base de  $T$  con reductividad negativa por la partición trivial con el mismo factor operativo (por tanto,  $[\mathcal{H}, \Theta(T)] \leq v$ ). Entonces  $[\mathcal{H}, \Theta(T)] \in R'$ .

*Demostración.* Dado que  $v \in R'$ , se tiene que  $v \in st(u) \cap st(w)$  para algún vértice nuclear  $w = [\mathcal{G}, \mathcal{O}]$  de  $K_{<u}$  con  $\|w\| \leq \|u\|$ . Como  $[\mathcal{H}, T] = [\mathcal{G}, T]$  existe  $\alpha$ , un automorfismo simétrico puro, soportado por  $(\mathcal{H}, T)$  tal que  $\alpha(\mathcal{H})$  es conjugada de  $\mathcal{G}$  y se tiene que  $red(\alpha, u) \geq 0$ . Escribimos  $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_n\}$  y  $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$  donde  $\alpha_i$  está soportado por  $(\mathcal{H}, T_i)$ . Si algún  $\alpha_i$  es estrictamente reductivo entonces  $[\mathcal{H}, \Theta(T)]$  es estrictamente reductivo, ya que la partición base  $T_i$  no habrá cambiado, pues no puede tener reductividad negativa, luego  $\alpha_i$  está soportado por  $(\mathcal{H}, \Theta(T))$ . En consecuencia está contenido en  $st(u) \cap K_{m-1} \subseteq R'$ . Si ningún  $\alpha_i$  es estrictamente reductivo (en  $u$ ) entonces como el Lema de Factorización 4.7 implica que

$$\sum_{i=1}^n red(\alpha_i, u) = red(\alpha, u)$$

y sabemos que  $red(\alpha, u) \geq 0$  se tiene que todos los  $\alpha_i$  son cero reductivos. Si  $(\mathcal{H}, T_i)$  tiene reductividad negativa, entonces  $\alpha_i$  debe fijar  $u$ , luego eliminando ese  $\alpha_i$  de  $\alpha$  obtenemos  $\alpha'$  que cumple que  $\alpha'(u) = \alpha(u) = w$  y está asociado a  $[\mathcal{H}, \Theta(T)]$  (ya que hemos eliminado los posibles factores problemáticos), luego ese vértice está en  $R'$ .  $\square$

**Proposición 5.1.**  $R'$  es homotópicamente equivalente a  $R$ .

*Demostración.* Los vértices de  $R'$  y de  $R$  forman subposets del link de  $u$  en el poset de McCullough-Miller (poset cuya realización simplicial da lugar a  $MM_n$ ), y como  $R'$  y  $R$  son subcomplejos completos de  $MM_n$  coinciden con las respectivas realizaciones simpliciales de estos subposets. Por el 5.5 la aplicación  $f$  definida en  $R'$  que envía cada  $v = [\mathcal{H}, T]$  a  $[\mathcal{H}, \Theta(T)]$  tiene imagen en  $R$ . Es una aplicación poset idempotente con  $f(v) \leq v$  y cuyos puntos fijos son los vértices de  $R$ . Por el Lema 5.2, esto demuestra que  $R$  es un retracto por deformación fuerte de  $R'$ .  $\square$

Tomemos  $S$  tal y como ha sido definida anteriormente. Claramente  $S \subseteq R \cap K_{m-1}$ , pero además, si  $v \in R \cap K_{m-1}$ , entonces una aplicación del Lema 4.7 muestra que  $v \in S$ , luego  $S = R \cap K_{m-1}$ . Esto es importante, ya que  $R$  era claramente dependiente del orden elegido para ordenar los vértices de altura  $m$ , pero  $S$  no, ya que podemos definirlo como el subcomplejo de  $st(u)$  generado por los vértices que tienen al menos una partición base estrictamente reductiva y cuyas particiones base no triviales son reductivas.

A partir de ahora trabajaremos en la estrella del núcleo  $u = [\mathcal{H}, \mathcal{O}]$ . En concreto, todas las particiones base son particiones base de  $\mathcal{H}$ , y todos los árboles pertenecen al  $W_n$  generado por  $\mathcal{H}$ . Abreviaremos  $red(T_i, \mathcal{H})$  a  $red(T_i)$ .

**Lema 5.6.** Sea  $Z_1, \dots, Z_r$  una colección compatible (Def. 4.8) de particiones base completamente reductivas. Entonces existe una partición base completamente estrictamente reductiva  $P_j$  compatible con cada  $Z_i$ .

La demostración se basa en usar el Lema 4.8 para tener un automorfismo estrictamente reductivo asociado a  $\mathcal{H}$ . Se toma un soporte completo de dicho automorfismo minimal respecto al número de  $Z_i$ 's que cruza y se demuestra por reducción al absurdo que no cruza con ningún  $Z_i$  y por tanto es compatible. Se puede encontrar en el Lema 4.8 de [5].

En 2.8 definimos  $cr(T_i, P_j)$  el número de cruces entre dos particiones base. Podemos generalizarlo al de un árbol con una partición base como

$$cr(T, P_j) = \sum_i cr(T_i, P_j)$$

**Proposición 5.2** (Contractibilidad de S). *Sea  $Z_1, \dots, Z_r$  una colección compatible de particiones base completamente reductivas. Sea  $T$  el subcomplejo de  $S$  generado por todos los vértices de  $S$  compatibles con  $Z_1, \dots, Z_r$ . Entonces  $T$  es contractible. En particular, el propio  $S$ , cuyos vértices son compatibles con la colección vacía de particiones base, es contractible.*

*Demostración.* Definimos un par admisible  $(L, f)$  como un par donde  $L$  es una subdivisión de  $T$  y  $f : L \rightarrow T$  es una aplicación simplicial homotópica a la identidad. Uno de esos pares es  $(T, 1_T)$ .

Por el Lema 5.6, existe una partición base completamente estrictamente reductiva compatible con  $Z_1, \dots, Z_r$ ; entre todas las que haya tomamos una que sea maximal respecto a la reductividad, la denotamos  $P_j$ . Sea  $P$  el árbol cuya única partición base no trivial es  $P_j$ ,  $P \in T$ , luego  $T$  no es vacía. Para un par admisible  $(L, f)$  definimos  $m(L, f)$  como el máximo de  $\{cr(f(v), P_j) \mid v \in \text{Vert}(L)\}$ , y  $M(L, f)$  como el subcomplejo completo de  $L$  generado por los vértices cuyo número de cruces es maximal, es decir,  $\{v \in \text{Vert}(L) \mid cr(f(v), P_j) = m(L, f)\}$ .

Sea  $\mathcal{T}_0$  el poset de árboles compatibles con  $P_j$ . Enviar  $v$  a  $v \vee P$  (es conveniente recordar el Lema 4.3) induce una aplicación  $g$  de  $|\mathcal{T}_0|$  en si mismo homotópica a la identidad por el Lema 5.2. Aplicando dicho lema de nuevo, la aplicación identidad en la imagen de  $g$  es homotópica a la aplicación constante en  $P$ . Por tanto, la identidad en  $|\mathcal{T}_0|$  es homotópica a la aplicación constante en  $P$ . Supongamos que  $m(L, f) = 0$ , en ese caso la imagen de  $f$  está en  $|\mathcal{T}_0|$ , luego  $f$  es homotópica a una aplicación constante. Como  $f$  era homotópica a la identidad, esto demuestra que  $T$  es contractible.

Para terminar la demostración, habría que probar que  $m(L, f) = 0$ . Para ello se demuestra que para todo par admisible  $(L, f)$  existe un par admisible  $(L^{00}, f_2)$ , donde  $L^{00}$  es la segunda subdivisión baricéntrica de  $L$  tal que  $m(L^{00}, f_2) < m(L, f)$ ; luego eventualmente llegaríamos a un par con  $m = 0$ . La demostración es larga y técnica, se basa en tomar  $M(L, f)$  como subcomplejo distinguido en  $L$  y estudiar el nuevo par  $(L^0, f_1)$ , distinguiendo casos según la intersección con  $M(L, f)$ , demostrando además que  $f_1$  es simplicial. Y posteriormente hacer un trabajo similar con  $(L^{00}, f_2)$ . Se puede encontrar en la demostración del Lema 4.9 de [5]. □

En lo que queda de demostración nos referiremos a ciertos subposets de  $W_n$ , el poset de Whitehead obtenido a partir de  $\mathcal{H}$ . Sea  $\mathcal{R}$  el subposet formado por los vértices de  $R$  y sea  $\mathcal{S}$  el subposet de  $\mathcal{R}$  que consiste en los vértices de  $S$  (luego  $|\mathcal{R}| = R, |\mathcal{S}| = S$ ).  $\mathcal{S}$  consiste en los elementos de  $\mathcal{R}$  que tienen al menos una partición base estrictamente reductiva.

Si  $r \in R$ , definimos  $R(r) = |st_+(r)| \cap R$ , esto equivale a la realización simplicial de la estrella superior de  $r$  en el subposet  $\mathcal{R}$ , luego es contractible. Ahora supongamos que  $\{r_1, \dots, r_k\}$  es una colección compatible de vértices de  $R$ . Por el Lema 4.3, el conjunto anterior

tiene supremo  $r_1 \vee \cdots \vee r_k$  en  $W_n$ . Si  $w$  es una cota superior de  $\{r_1, \dots, r_k\}$  en  $W_n$ , entonces el árbol obtenido cambiando todas las particiones base de  $w$  que no sean reductivas por particiones triviales sigue siendo una cota superior y por el Lema 5.5, está en  $R$ . Por tanto el supremo está en  $\mathcal{R}$ . Se tiene que

$$R(r_1) \cap \cdots \cap R(r_k) = R(r_1 \vee \cdots \vee r_k),$$

que es un subcomplejo contractible de  $R$ .

Sea  $\mathcal{C}_r$  la colección de todos los subcomplejos  $R(r)$  donde  $r \in \mathcal{R}$  y cada partición base no trivial de  $r$  es completamente reductiva. Por tanto,  $\mathcal{C}_r$  es un recubrimiento de  $R$  por subcomplejos. Sea  $\mathcal{N}(\mathcal{C}_r)$  el nervio de  $\mathcal{C}_r$ , es decir, el poset formado por colecciones compatibles de vértices  $\{r_1, \dots, r_k\}$  donde las particiones base no triviales de cada  $r_i$  son completamente reductivas, con el orden parcial dado por la inclusión de subconjuntos.

Definimos  $f_R : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{C}_r)$  tomando  $f_R(v)$  como

$$\{r \in \mathcal{R} \mid r \leq v \text{ y las particiones base no triviales de } r \text{ son completamente reductivas}\}$$

donde  $v \in R$ . Esta función es una aplicación poset y

$$\begin{aligned} |f_R^{-1}(\text{st}_+(\{r_1, r_2, \dots, r_k\}))| &= |\{v \in \mathcal{R} \mid v \geq r_i \ \forall i\}| \\ &= R(r_1 \vee \cdots \vee r_k). \end{aligned}$$

Por tanto, el Lema 5.3 implica que  $|f_R|$  es una equivalencia de homotopía. Podemos obtener otra función  $f_S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{C}_R)$  restringiendo  $f_R$  a  $\mathcal{S}$ , por tanto  $f_S(v)$  es

$$\{r \in \mathcal{R} \mid r \leq v \text{ y las particiones base no triviales de } r \text{ son completamente reductivas}\}$$

donde  $v$  es un vértice en  $S$ . Esta función es también una aplicación poset y

$$\begin{aligned} |f_S^{-1}(\text{st}_+(\{r_1, r_2, \dots, r_k\}))| &= |\{v \in \mathcal{S} \mid v \geq r_i \ \forall i\}| \\ &= |\text{st}_+(r_1 \vee \cdots \vee r_k) \cap S| \end{aligned}$$

**Proposición 5.3.**  *$R$  es homotópicamente equivalente a  $S$*

*Demostración.* Vamos a ver que, dada  $\{r_1, \dots, r_k\}$  una colección compatible de vértices cuyas particiones base son completamente reductivas,  $|\text{st}_+(r_1 \vee r_2 \vee \cdots \vee r_k) \cap S|$  es contractible, de donde, usando el Lema 5.3, se tiene que  $|f_S|$  es una equivalencia homotópica. Sea  $\mathcal{T}$  el subposet de  $\mathcal{S}$  formado por todos los vértices compatibles con  $\{r_1, \dots, r_k\}$ . Por la Proposición 5.2,  $|\mathcal{T}|$  es contractible. Hay una aplicación poset  $h : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  dada por  $h(v) = v \vee r_1 \vee \cdots \vee r_k$ . Como  $h(v) \geq v$ , el Lema 5.2 implica que la realización simplicial de  $\mathcal{T}$  es homotópicamente equivalente a la realización de  $h(\mathcal{T}) = \text{st}_+(r_1 \vee r_2 \vee \cdots \vee r_k) \cap S$ .

Resumiendo, hemos visto que hay aplicaciones poset tal que

$$\mathcal{R} \xrightarrow{f_R} \mathcal{N}(\mathcal{C}_R) \xleftarrow{f_S} \mathcal{S}$$

que inducen equivalencias de homotopía en las realizaciones simpliciales. En particular  $R = |\mathcal{R}|$  es homotópicamente equivalente a  $S = |\mathcal{S}|$ .  $\square$

Por tanto, uniendo las Proposiciones 5.1, 5.2, 5.3 queda demostrado que  $\text{MM}_n$  es contractible.

## 6. RAAGs

Si se traslada la construcción de  $MM_n$  a otros tipos de grupos distintos del grupo libre o el producto libre, podríamos conseguir resultados similares acerca de sus grupos de automorfismos. En este capítulo se van a dar los primeros pasos hacia la generalización de la construcción de  $MM_n$  a grupos de Artin de ángulo recto (RAAGs).

**Definición 6.1** (Grafos). Denotaremos  $\Gamma$  a un grafo finito simplicial y  $V(\Gamma)$  y  $E(\Gamma)$  a sus vértices y aristas respectivamente. Dado  $v \in V(\Gamma)$ , el link  $\text{lk}(v)$  de  $v$  es el conjunto de los vértices que están conectados con  $v$  por una arista. La estrella de  $v$   $\text{st}(v) := \text{lk}(v) \cup v$ .

**Definición 6.2** (Right-angled Artin group). Sea  $\Gamma$  un grafo finito simplicial, el grupo de Artin de ángulo recto, RAAG (Right-angled Artin group), definido por  $\Gamma$  es el grupo con presentación

$$A_\Gamma = \langle v \in V(\Gamma) \mid [v, w] = 1 \iff vw \in E(\Gamma) \rangle$$

Es decir, es el grupo generado por los vértices del grafo, con la condición de que dos elementos conmutan si están conectados por una arista. Dos ejemplos sencillos son los casos extremos en los que  $\Gamma$  no tiene aristas, en cuyo caso  $A_\Gamma$  es el grupo libre; o en los que  $\Gamma$  es un grafo completo, en cuyo caso  $A_\Gamma$  es un grupo abeliano libre.

### 6.1. El complejo de McCullough-Miller en RAAGs

Antes de empezar a describir como sería el complejo para este tipo de grupos, vamos a analizar las diferencias entre  $P\Sigma_n$  y  $P\Sigma(A_\Gamma)$ . Si tomamos  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  como sistema generador, hay que tener en cuenta que cualquier conjunto obtenido como resultado de conjugar cualquier  $x_i$  por una potencia de  $x_j$  sigue siendo una base en el grupo libre. En los RAAGs, como queda patente en el Teorema [6.1](#), las posibles conjugaciones por el elemento  $x_i$  que nos devuelven una base quedan determinadas por las componentes conexas de  $\Gamma - \text{st}(x_i)$ . Esto se debe a que los elementos que conmutan en la base original deben corresponderse con elementos que conmutan en la base obtenida tras la conjugación. Veamos un ejemplo.

Tomamos  $A_\Gamma$  el RAAG generado por el grafo lineal de cinco vértices, que podemos observar en la Figura [11](#). Tenemos que

$$A_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_5 \mid [x_1, x_2] = 1, [x_2, x_3] = 1, [x_3, x_4] = 1, [x_4, x_5] = 1 \rangle$$

Si queremos conjugar por  $x_1$ , tenemos que  $x_3, x_4, x_5$  deben quedar conjugados por la misma potencia de  $x_1$ , de lo contrario los resultados no conmutarían entre ellos; para  $i \neq j$ , y  $k = i - j$

$$x_1^{-i} x_3 x_1^i x_1^{-j} x_4 x_1^j = x_1^{-i} x_3 x_1^k x_4 x_1^j \neq x_1^{-j} x_4 x_1^{-k} x_3 x_1^i = x_1^{-j} x_4 x_1^j x_1^{-i} x_3 x_1^i$$

sin embargo, la igualdad si que se da para  $i = j$ . Las conjugaciones por  $x_1$  no afectan a  $x_1$  ni a  $x_2$ , por lo que los únicos automorfismos simétricos puros asociados a conjugaciones por  $x_1$  son las potencias de  $\varphi_{x_1}$ , donde  $\varphi_{x_1}$  es el automorfismo interno asociado a  $x_1$ . Lo mismo ocurre con las conjugaciones por  $x_2, x_4$  y  $x_5$ . Esto se debe a que al quitarle  $\Gamma$  la estrella de cada uno de ellos, solo obtenemos una componente conexa. El caso de  $x_3$  es distinto.



$\Gamma - st(x_3)$  da lugar a dos posibles componentes conexas;  $x_1$  o  $x_5$ . En este caso todos los automorfismos simétricos puros asociados a conjugaciones por  $x_3$  están generados por dos automorfismos;  $\alpha_{A,x_3}$  que conjuga por  $x_3$  a  $x_1$  y fija al resto, y  $\alpha_{B,x_3}$ , que conjuga por  $x_3$  a  $x_5$  y fija al resto. En resumen, tenemos que

$$P\Sigma(A_\Gamma) = \langle \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \alpha_{A,x_3}, \alpha_{B,x_3}, \varphi_{x_4}, \varphi_{x_5} \rangle$$

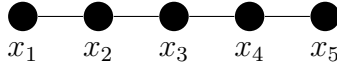


Figura 11:  $\Gamma$

En general, tenemos que los generadores serán automorfismos internos cuando la estrella del elemento por el que conjugamos no *rompe*  $\Gamma$  (es decir, cuando al eliminar dicha estrella queda una única componente conexa); mientras que cuando aparezcan mas de una componente conexa tendremos un generador para cada una de ellas. Es obvio que el número de generadores es mucho menor que en el grupo libre.

**Definición 6.3** (Automorfismos de RAAGs). Sea  $A_\Gamma$  el RAAG definido por el grafo  $\Gamma$ . Consideramos su grupo de automorfismos  $\text{Aut}(A_\Gamma)$ . En vista de lo comentado en el párrafo anterior, para un grafo de  $n$  vértices, se puede ver  $\text{Aut}(A_\Gamma)$  como un grupo entre  $\text{Aut}(F_n)$  y  $\text{GL}(n, \mathbb{Z}) = \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ . M. R. Laurence [3] y H. Servatius [8] dieron un conjunto finito de generadores para  $\text{Aut}(A_\Gamma)$  para un  $\Gamma$  arbitrario. Son los siguientes:

- i) *Automorfismos gráficos*: Son los elementos de  $\text{Aut}(A_\Gamma)$  inducidos por las simetrías de  $\Gamma$ .
- ii) *Inversiones*: Dado  $v \in V(\Gamma)$ , la inversión en  $v$  es el automorfismo que envía  $v$  a  $v^{-1}$  y fija el resto de generadores.
- iii) *Transvecciones*: Dados  $v, w \in V(\Gamma)$ , con  $\text{lk}(v) \subset \text{st}(w)$ , la transvección  $t_{vw}$  es el automorfismo de  $A_\Gamma$  dado por

$$\begin{cases} t_{vw}(v) = vw \\ t_{vw}(z) = z, z \neq v. \end{cases}$$

- iv) *Conjugaciones parciales*: Dado  $v \in V(\Gamma)$  y una componente conexa  $A$  de  $\Gamma - \text{st}(v)$ , la conjugación parcial de  $A$  por  $v$  es el automorfismo  $c_{A,v}$  de  $A_\Gamma$  dado por

$$\begin{cases} c_{A,v}(w) = v^{-1}wv, w \in A \\ c_{A,v}(z) = z, z \notin A. \end{cases}$$

Para generalizar  $\text{MM}_n$  a RAAGs necesitamos conocer cuales son los automorfismos simétricos puros de  $A_\Gamma$ , es decir, aquellos que envían cada generador de  $A_\Gamma$  a un conjugado de sí mismo. Laurence provó en [3] el siguiente resultado.

**Teorema 6.1.**  $P\Sigma(A_\Gamma)$  coincide con el subgrupo de  $\text{Aut}(A_\Gamma)$  generado por las conjugaciones parciales.

Visto esto, podemos empezar a pensar en la construcción del complejo. El primer paso será construir el equivalente al poset de Whitehead. Para ello es importante pensar cual era la razón de ser de los árboles bipartidos  $[n]$ -etiquetados marcados. Utilizamos los árboles como soportes de los automorfismos simétricos puros, es decir, los necesitamos para que todos los automorfismos simétricos puros actúen. En el caso del grupo libre, todos los árboles daban soporte como mínimo a un automorfismo simétrico puro que no está soportado en ningún otro árbol. Por el contrario, en los RAAGs, en general, el número de automorfismos simétricos puros se ve reducido, lo que hace que muchos árboles sean redundantes, ya que soportan los mismos automorfismos, y por tanto serán eliminados del poset.

### 6.1.1. Grafo lineal de cuatro vértices

Veamos lo que ocurre si tomamos  $\Gamma$  el grafo lineal de cuatro vértices. En este caso

$$A_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_4 \mid [x_1, x_2] = 1, [x_2, x_3] = 1, [x_3, x_4] = 1 \rangle.$$

Ningún vértice *rompe* el grafo, por lo que

$$P\Sigma(A_\Gamma) = \langle \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3}, \varphi_{x_4} \rangle = \text{Inn}(A_\Gamma).$$

Es obvio que  $\varphi_{x_1}$  está soportado por la partición base  $\{\{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}$ , es decir, la partición trivial con factor operativo  $x_1$ ;  $\varphi_{x_2}$  por la de factor operativo  $x_2$  y lo mismo ocurre con el resto. La unión de las cuatro particiones triviales da lugar al vértice nuclear (el árbol de grado 0). Por tanto, tenemos que todos los generadores de  $P\Sigma(A_\Gamma)$  están soportados por el árbol de grado 0, luego también lo estará cualquier otro automorfismo simétrico puro, ya que se puede expresar como producto de los generadores. Esto que justifica que para definir el poset de Whitehead solo es necesario un único elemento. Como los automorfismos simétricos puros coinciden con los automorfismos internos, se tiene que cualquier otra base que podamos obtener aplicándolos será conjugada a la original. Recordemos que en  $MM_n$  había un núcleo asociado a cada clase de conjugación de bases, como en este caso es única, tenemos un único núcleo.

En resumen, en el poset de Whitehead,  $W_n$ , hay un único elemento: el vértice nuclear. Por tanto  $|W_n|$  es un vértice, el núcleo. En el complejo de McCullough-Miller hay una única copia de  $|W_n|$  ya que hay una única clase de conjugación de bases, luego  $MM_n$ , en este caso, se reduce a un único vértice, un núcleo. De hecho, en este caso, dos bases son simétricamente equivalentes si y solo si son conjugadas. Además, es obvio que el grupo de automorfismos simétricos puros externos es el trivial.

### 6.1.2. Grafo lineal de cinco vértices

El RAAG asociado a este grafo ya lo hemos estudiado anteriormente, así como descrito una familia generadora del grupo de sus automorfismos simétricos puros. Tenemos que

$$A_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_5 \mid [x_1, x_2] = 1, [x_2, x_3] = 1, [x_3, x_4] = 1, [x_4, x_5] = 1 \rangle$$

$$P\Sigma(A_\Gamma) = \langle \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \alpha_{A,x_3}, \alpha_{B,x_3}, \varphi_{x_4}, \varphi_{x_5} \rangle.$$

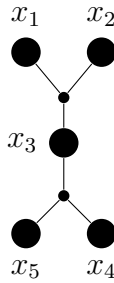


Figura 12: Soporte de  $\alpha_{A,x_3}$  y  $\alpha_{B,x_3}$

En este caso  $\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_4}, \varphi_{x_5}$  están soportados por el vértice nuclear, pero  $\alpha_{A,x_3}$  y  $\alpha_{B,x_3}$  no, ya que la partición base asociada a  $x_3$  en el vértice nuclear es  $\{\{x_3\}, \{x_1, x_2, x_4, x_5\}\}$ , y ninguno de los dos automorfismos anteriores conjugan a todo el pétalo (en un caso se queda  $x_1$  sin conjugar y en el otro  $x_5$ ). Por tanto necesitamos como mínimo otro árbol que nos aporte una partición base. Buscaremos la más simple, que será una con dos pétalos. Existen varias opciones, por ello, vamos a establecer un criterio para que la partición no dependa de la elección. Tomaremos como partición base aquella con factor operativo  $x_3$ , y en cada pétalo estarán los generadores de cada componente conexa de  $\Gamma - st(x_3)$ ; quedan por incluir los vértices de  $lk(x_3)$ , como lo conjugación no les afecta, pueden ir en cualquier pétalo (las posibles distintas elecciones no afectan al complejo, ya que los automorfismos simétricos puros actúan igual en cada una de ellas). En este caso tomamos  $\{\{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_4, x_5\}\}$ , que mantiene la estructura de  $\Gamma$ . Construimos el árbol cuyas particiones base son dicha partición y el resto particiones triviales. El árbol obtenido es el de la Figura 12. Por tanto,  $W_n$  tiene dos elementos, el vértice nuclear y el árbol que hemos construido para dar soporte a  $\alpha_{A,x_3}$  y  $\alpha_{B,x_3}$ . Su realización simplicial,  $|W_n|$ , será el núcleo y una arista que lo une con otro vértice.

Podemos definir ya  $MM_n$ , teniendo en cuenta que el paso de una clase de conjugación de bases a otra viene dado por aplicar  $\alpha_{A,x_3}$  o  $\alpha_{B,x_3}$ ; y que ambos están soportados por el vértice asociado al árbol de la Figura 12, se tiene que todos los núcleos están conectados con dicho vértice. Por tanto,  $MM_n$  se compone de un núcleo para cada clase de conjugación de bases (dentro de las simétricamente equivalentes a  $X = \{x_1, \dots, x_5\}$ ), y todos ellos conectados a un único vértice asociado al árbol que hemos construido como soporte. Dado que el complejo simplicial obtenido es un cono, se tiene que es contractible. Además, el grupo de automorfismos externos puros es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , ya que el producto de  $\alpha_{A,x_3}$  por  $\alpha_{B,x_3}$  es un interno.

$$\text{OP}\Sigma(A_\Gamma) \cong \mathbb{Z}.$$

### 6.1.3. Receta para la construcción de $MM_n$ en RAAGs asociados a un grafo lineal

Vamos a dar una receta para construir el complejo de McCullough-Miller para RAAGs basándonos en lo visto hasta ahora. Dado un grafo  $\Gamma$ :

- 1) En primer lugar describimos los generadores del grupo de automorfismos simétricos puros. Teniendo en cuenta que están generados por las conjugaciones parciales,

tomamos cada vértice  $v$  de  $\Gamma$  y observamos cuantas componentes se obtienen al hacer  $\Gamma - st(v)$ . Si solo hay una, obtenemos como generados  $\varphi_v$ , el automorfismo interno asociado a dicho vértice; si hay más de una, obtenemos un generador que conjuga cada una de las componentes y fija el resto de vértices.

- 2) Una vez obtenidos los generadores de los automorfismos simétricos puros, podemos saber cuales van a ser las posibles marcas; serán las imágenes de la base prefijada por el grupo generado por dichos automorfismos.
- 3) Construimos los árboles necesarios para que todos los automorfismos simétricos puros tengan soporte completo. El vértice nuclear (árbol de grado 0) siempre estará, y da soporte a los automorfismos internos. Para los generadores que no sean automorfismos internos, es decir, para aquellos obtenidos de vértices que *rompen* el grafo en dos componentes conexas (esto se debe a que es lineal), tendremos que añadir más árboles. Estos se construirán de la siguiente manera: Supongamos que  $\Gamma - st(v)$  separa el grafo en 2 componentes conexas, tendremos asociados dos generadores. Buscamos el árbol más simple que los soporte. Para ello buscamos la partición más sencilla, que tendrá 2 pétalos. De entre las distintas opciones, tomamos aquella partición que tiene a  $v$  como vértice nuclear, y en cada pétalo los elementos de las componentes de  $\Gamma - v$  (cuidado, ahora solo quitamos del grafo  $v$ , no toda su estrella); de esta forma obtendremos una partición que soporta a los dos generadores. Después añadimos particiones triviales para el resto de factores operativos hasta obtener un árbol. Realizamos este proceso para cada uno de los vértices cuya estrella rompa el grafo. Cabe destacar que los árboles tendrán siempre dos vértices sin etiquetar, luego el complejo será de 1-dimensional.

## 6.2. Futuras líneas de investigación

Una vez definida esta forma de construir el complejo para los RAAGs lineales, las futuras cuestiones a resolver son:

- Encontrar una receta que generalice la dada para grafos lineales a RAAGs asociados a grafos no lineales.
- Comprobar si se puede obtener un complejo contractible para cualquier RAAG.
- Tal como se ha definido la construcción para los lineales, tanto el grupo de automorfismos simétricos puros como el de simétricos puros externos actúan sobre el complejo. Calcular los estabilizadores de los símlices.

## Referencias

- [1] N. Brady, J. McCammond, J. Meier, A. Miller, *The Pure Symmetric Automorphisms of a Free Group Form a Duality Group*, J. Algebra. 246, Issue 2, 881-896, 2001.
- [2] D. Collins, H. Zieschang, *Rescuing the Whitehead method for free products I: Peak reduction*, Mathematische Zeitschrift. 185, 487-504, 1984.
- [3] M. R. Laurence, *A generating set for the automorphism group of a graph group*, J. London Math. Soc. (2). 52(2), 318-334, 1995.
- [4] J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*, Mathematische Annalen. 91, 169-209, 1924.
- [5] D. McCullough, A. Miller, *Symmetric Automorphisms of Free Products*, Memoirs of the AMS. 582, 1996.
- [6] D. Quillen, *Homotopy properties of the poset of nontrivial  $p$ -subgroups of a group*, Advances in Mathematics. 28, 101-128, 1978.
- [7] D.J.S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics vol. 80, Springer, 1996.
- [8] H. Servatius, *Automorphism of graph groups*, J. Algebra. 126, 34-60, 1989.