

GEOMETRÍA PLANA

María Pérez Prados

DIFICULTADES Y ERRORES
MANIFESTADOS POR ESTUDIANTES DE
1º DE E.S.O. DURANTE EL APRENDIZAJE
DE GEOMETRÍA PLANA

TFM 2013

upna
Universidad
Pública de Navarra
Nafarroako
Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL
PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1º E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

**Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria
y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas**

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

**Dificultades y errores manifestados
por estudiantes de 1º de E.S.O.
durante el aprendizaje de
geometría plana**

María Pérez Prados

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Introducción general

Parte I: La geometría en el currículo vigente y en los libros de texto

1. El contenido geométrico en el currículo vigente

1.1.Contenidos en Educación Primaria	15
1.2.Contenidos en E.S.O.....	17
1.3.Contenidos en Bachillerato	21

2. Los criterios de evaluación del contenido geométrico en el currículo vigente

2.1.Criterios de evaluación en Educación Primaria.....	25
2.2.Criterios de evaluación en E.S.O.....	26
2.3.Criterios de evaluación en Bachillerato.....	29

3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con del contenido geométrico en el currículo vigente

3.1.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 5° de Primaria.....	33
3.2.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6° de Primaria.....	37
3.3.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1° de E.S.O.....	40
3.4.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2° de E.S.O.....	44
3.5.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3° de E.S.O.....	48

Parte II: Análisis de un proceso de estudio de la geometría en 1° de E.S.O.

4. El contenido geométrico en el libro de texto de referencia

4.1. Objetos matemáticos involucrados	55
4.2. Análisis global de la unidad didáctica.....	61

5. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

5.1. Dificultades.....	67
5.2. Errores y su posible origen.....	68

6. El proceso de estudio

6.1. Distribución del tiempo de la clase.....	75
6.2. Actividades adicionales planificadas.....	77
6.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista.....	77

7. Experimentación

7.1. Muestra y diseño de la experimentación.....	79
7.2. Cuestionario. Comportamientos esperados.....	80
7.3. Resultados	92
7.4. Discusión de los resultados	101

8. Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

8.1. Síntesis.....	103
8.2. Conclusiones.....	103
8.3. Cuestiones abiertas.....	105

Referencias.....	107
-------------------------	------------

Anexos.....	109
--------------------	------------

Anexo I. Unidad didáctica del libro de texto

Anexo II. Cuestionarios

Anexo III. Hojas de apuntes

ÍNDICE DE TABLAS

	Página
Tabla 1. Contenidos en Educación Primaria.....	16
Tabla 2. Contenidos en 1° de E.S.O.....	17
Tabla 3. Contenidos en 2° de E.S.O.....	18
Tabla 4. Contenidos en 3° de E.S.O.....	19
Tabla 5. Contenidos en 4° de E.S.O.....	20
Tabla 6. Contenidos en 1° de Bachiller.....	21
Tabla 7. Contenidos en 2° de Bachiller.....	22
Tabla 8. Criterios de evaluación en Educación Primaria.....	25
Tabla 9. Criterios de evaluación en 1° de E.S.O.....	26
Tabla 10. Criterios de evaluación en 2° de E.S.O.....	27
Tabla 11. Criterios de evaluación en 3° de E.S.O.....	28
Tabla 12. Criterios de evaluación en 4° de E.S.O.....	29
Tabla 13. Criterios de evaluación en 1° de Bachiller.....	30
Tabla 14. Criterios de evaluación en 2° de Bachiller.....	31
Tabla 15. Análisis del lenguaje en contenidos de geometría.....	56
Tabla 16. Análisis de las situaciones en contenidos de geometría.....	57
Tabla 17. Análisis de los procedimientos en contenidos de geometría.....	58
Tabla 18. Análisis de los conceptos en contenidos de geometría.....	59
Tabla 19. Análisis de las propiedades en contenidos de geometría.....	60
Tabla 20. Análisis de los argumentos en contenidos de geometría.....	61
Tabla 21. Relación entre los contenidos fijados en la normativa y los presentes en el cuaderno.....	64
Tabla 22. Relación entre los criterios de evaluación fijados en la normativa y los presentes en el cuaderno.....	65
Tabla 23. Distribución del tiempo en las sesiones.....	76
Tabla 24. Actividades propuestas en las sesiones.....	78

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar las matemáticas en el currículo vigente y en los libros de texto y detectar las dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1º de E.S.O. durante el aprendizaje de un tema de geometría plana.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en E.S.O. y en Bachillerato con relación al tema de geometría.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre las dificultades y errores manifestados durante el proceso de aprendizaje de geometría plana, que se ha puesto en marcha en un aula de 1º de E.S.O. en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo finaliza con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

La geometría en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento del contenido de geometría en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en E.S.O. y en Bachillerato.

El análisis se divide en tres capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a geometría en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 1º de E.S.O. así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el tercer capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

El contenido geométrico en el currículo vigente

El objetivo de este capítulo es analizar los contenidos mínimos de geometría establecidos en la normativa vigente para el tercer ciclo de primaria y para secundaria.

Así pues, los textos consultados para realizar este estudio han sido:

- Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Los contenidos, que se han organizado en base a cinco descriptores, se presentan en las siguientes tablas:

1.1. Contenidos en Educación Primaria

Descriptor	Contenido 5° y 6° Primaria
<p>C1: Estimación y cálculo de magnitudes</p>	<p><u>Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes</u></p> <p>Longitud, peso/masa, capacidad y superficie</p> <ul style="list-style-type: none"> - Desarrollo de estrategias personales para medir figuras de manera exacta y aproximada. - Realización de mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales. - Equivalencias entre unidades de una misma magnitud. - Estimación de longitudes, superficies, pesos y capacidades de objetos y espacios conocidos; elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida. - Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en mediciones y estimaciones. - Utilización de unidades de superficie. - Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición. <p>Medida de ángulos</p> <ul style="list-style-type: none"> - El ángulo como medida de un giro o abertura. Medida de ángulos y uso de instrumentos convencionales para medir ángulos. - Utilización de la medición y las medidas para resolver problemas y comprender y transmitir informaciones. - Interés por utilizar con cuidado y precisión diferentes instrumentos de medida y herramientas tecnológicas, y por emplear unidades adecuadas.

Descriptor	Contenido 5º y 6º Primaria
<p>C2: Figuras geométricas en el plano y en el espacio</p>	<p><u>Bloque 3. Geometría</u></p> <p>La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ángulos en distintas posiciones. - Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros... - La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas. - Utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para la construcción y exploración de formas geométricas. <p>Formas planas y espaciales</p> <ul style="list-style-type: none"> - Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo. - Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición. - Interés por la precisión en la descripción y representación de formas geométricas
<p>C3: Simetría y semejanza</p>	<p><u>Bloque 3. Geometría</u></p> <p>Regularidades y simetrías</p> <ul style="list-style-type: none"> - Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos. - Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado. - Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones. - Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones ante situaciones de incertidumbre relacionadas con la organización y utilización del espacio. Confianza en las propias posibilidades para utilizar las construcciones geométricas y los objetos y las relaciones espaciales para resolver problemas en situaciones reales. - Interés por la presentación clara y ordenada de los trabajos geométricos.
<p>C4: Mapas y Coordenadas</p>	<p style="text-align: center;">-</p>
<p>C5: Trigonometría</p>	<p style="text-align: center;">-</p>

Tabla 1. Contenidos en Educación Primaria

1.2. Contenidos en E.S.O.

Descriptor	Contenido 1° de E.S.O.
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	–
C2.1: Figuras geométricas en el plano	<p><u>Bloque 4. Geometría</u></p> <p>Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico.</p> <p>Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz.</p> <p>Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos.</p> <p>Polígonos regulares. La circunferencia y el círculo.</p> <p>Construcción de polígonos regulares con los instrumentos de dibujo habituales.</p> <p>Medida y cálculo de ángulos en figuras planas.</p> <p>Estimación y cálculo de perímetros de figuras. Estimación y cálculo de áreas mediante fórmulas, triangulación y cuadriculación.</p>
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	–
C3.1: Simetría	<p><u>Bloque 4. Geometría</u></p> <p>Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.</p> <p>Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.</p>
C3.2: Semejanza	–
C4: Mapas y Coordenadas	–
C5: Trigonometría	–

Tabla 2. Contenidos en 1° de E.S.O.

Descriptor	Contenido 2º de E.S.O.
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	-
C2.1: Figuras geométricas en el plano	-
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	<p><u>Bloque 4. Geometría</u></p> <p>Poliedros y cuerpos de revolución. Desarrollos planos y elementos característicos. Clasificación atendiendo a distintos criterios. Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.</p> <p>Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.</p> <p>Utilización de procedimientos tales como la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento, deformación o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.</p>
C3.1: Simetría	-
C3.2: Semejanza	<p><u>Bloque 4. Geometría</u></p> <p>Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza.</p> <p>Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes.</p> <p>Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.</p>
C4: Mapas y Coordenadas	-
C5: Trigonometría	-

Tabla 3. Contenidos en 2º de E.S.O.

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1° E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

Descriptor	Contenido 3° de E.S.O.
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	-
C2.1: Figuras geométricas en el plano	<u>Bloque 4. Geometría</u> Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico.
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	-
C3.1: Simetría	<u>Bloque 4. Geometría</u> Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento. Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas. Planos de simetría en los poliedros. Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.
C3.2: Semejanza	<u>Bloque 4. Geometría</u> Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.
C4: Mapas y Coordenadas	<u>Bloque 4. Geometría</u> Coordenadas geográficas y husos horarios. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.
C5: Trigonometría	-

Tabla 4. Contenidos en 3° de E.S.O.

Descriptor	Contenido 4º de E.S.O. Opción A	Contenido 4º de E.S.O. Opción B
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	–	–
C2.1: Figuras geométricas en el plano	–	–
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	<u>Bloque 4. Geometría</u> Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.	–
C3.1: Simetría	–	–
C3.2: Semejanza	<u>Bloque 4. Geometría</u> Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana.	<u>Bloque 4. Geometría</u> Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
C4: Mapas y Coordenadas	–	–
C5: Trigonometría	–	<u>Bloque 4. Geometría</u> Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.

Tabla 5. Contenidos en 4º de E.S.O.

1.3. Contenidos en Bachillerato

Descriptor	Contenido Ciencias y Tecnología 1° de Bachillerato	Contenido Ciencias Sociales 1° de Bachillerato
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	–	–
C2.1: Figuras geométricas en el plano	–	–
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	–	–
C3.1: Simetría	–	–
C3.2: Semejanza	–	–
C4: Mapas y Coordenadas	–	–
C5: Trigonometría	2. <u>Geometría:</u> – Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.	–
C6: Vectores y rectas en el plano y en el espacio	2. <u>Geometría:</u> – Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector. – Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. – Idea de lugar geométrico en el plano. Cónica	–

Tabla 6. Contenidos en 1° de Bachiller

Descriptor	Contenido Ciencias y Tecnología 2º de Bachillerato	Contenido Ciencias Sociales 2º de Bachillerato
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	–	–
C2.1: Figuras geométricas en el plano	–	–
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	–	–
C3.1: Simetría	–	–
C3.2: Semejanza	–	–
C4: Mapas y Coordenadas	–	–
C5: Trigonometría	–	–
C6: Vectores y rectas en el plano y en el espacio	<p>2. <u>Geometría:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> – Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico. – Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes. 	–

Tabla 7. Contenidos en 2º de Bachiller

La normativa refleja que, en el tercer ciclo de Primaria, las nociones de geometría a estudiar sean las de medida de longitudes, superficies, capacidades y ángulos; representación en el plano y en el espacio; figuras planas; cuerpos geométricos; simetría y semejanza.

Teniendo en cuenta que el dominio del concepto de medida es básico para el desarrollo del conocimiento geométrico de los alumnos en secundaria, éste debe ser el contenido más trabajado durante 5º y 6º de Primaria. Las nociones de figuras planas y cuerpos geométricos son igualmente contenidos muy relevantes por lo que es importante el estudio introductorio de éstos, fijando como objetivo para este ciclo el reconocimiento de todas las figuras geométricas así como la identificación de simetrías y de semejanzas.

Los contenidos fijados en la normativa para 1° de E.S.O. tratan únicamente sobre figuras en el plano (cálculo de ángulos, perímetros, áreas, simetrías, etc.). Tras la introducción realizada durante el tercer ciclo de Primaria, es adecuada la profundización en el estudio de estas figuras, analizando sus propiedades y relaciones. Aprovechando el estudio de este tema, es apropiado tratar los movimientos en el plano (simetrías, traslaciones y giros) en 1° de E.S.O. aunque, según la normativa, sean nociones a trabajar en 3° de E.S.O..

Respecto a los contenidos geométricos de 2° de E.S.O., la normativa refleja el estudio de las figuras en el espacio, el cálculo de volúmenes, la semejanza y los Teoremas de Tales y Pitágoras. Éste es el contenido más adecuado para trabajar durante 2° de E.S.O. ya que en 1° de E.S.O. se ha profundizado únicamente en el estudio de las figuras en el plano y el estudio de la semejanza en cursos anteriores ha sido muy superficial.

Como contenidos de 3° de E.S.O., la normativa indica el estudio de los movimientos en el plano, los cuerpos geométricos a partir de sus propiedades y los lugares geométricos. Este último concepto supone dar un cambio en la metodología de estudio realizada hasta el momento ya que el análisis de las propiedades de los cuerpos geométricos supone ampliar la perspectiva y construir un conocimiento geométrico más completo. Al ser una noción que enriquece los conocimientos adquiridos en cursos anteriores, debe ser la más importante a estudiar en este curso. Los movimientos en el plano y la semejanza serían conceptos de repaso ya que se habrían estudiado en profundidad en los dos cursos anteriores. Aunque no lo indica la normativa, sería adecuado introducir el tema de trigonometría en 3° de E.S.O. ya que en cursos posteriores va a adquirir gran protagonismo e importancia.

En 4° de E.S.O., la normativa indica que se estudie trigonometría (únicamente en la Opción B), figuras en el plano, figuras en el espacio y semejanza. Aparte de estos conceptos, sería conveniente el estudio de vectores y rectas de manera introductoria.

Para el nivel de 1° de Bachiller de Ciencias y Tecnología la normativa refleja el estudio en profundidad de trigonometría, vectores en el plano y ecuaciones de la recta. Los vectores en el espacio y las ecuaciones de la recta y del plano en el espacio se indican para el nivel de 2° de Bachiller, en la rama de Ciencias y Tecnología. Según lo reflejado en la normativa, en Bachiller de Ciencias Sociales no se estudia ninguna noción relacionada con geometría. Es adecuado que el estudio de geometría en Bachiller se centre en estas nociones ya que son conceptos nuevos que no se han trabajado en el primer ciclo de secundaria.

Capítulo 2

Los criterios de evaluación de geometría en el currículo vigente

El objetivo de este capítulo es analizar los criterios de evaluación que refleja la normativa vigente (indicada en el capítulo 1) para los temas de geometría en el tercer ciclo de primaria y en secundaria. Igualmente, los criterios de evaluación se organizan en base a cinco descriptores y se presentan en las siguientes tablas:

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

Descriptor	Criterios de evaluación 5° y 6° de Primaria
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	4. Seleccionar, en contextos reales, los más adecuados entre los instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresar con precisión medidas de longitud, superficie, peso/masa, capacidad y tiempo. Con este criterio se pretende detectar la capacidad de escoger los instrumentos de medida más pertinentes en cada caso, y de estimar la medida de magnitudes de longitud, capacidad, masa y tiempo haciendo previsiones razonables. También se quiere comprobar la capacidad de utilizar con corrección las unidades de medida más usuales, convertir unas unidades en otras de la misma magnitud, y que los resultados de las mediciones que se realizan se expresan en las unidades de medida más adecuadas. Así mismo, se valorará la capacidad de explicar oralmente y por escrito, con progresiva autonomía, los razonamientos.
C2: Figuras geométricas en el plano y en el espacio	—
C3: Simetrías, giros y semejanza	5. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno.
C4: Mapas y Coordenadas	6. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.
C5: Trigonometría	—

Tabla 8. Criterios de evaluación en Educación Primaria

2.2. Criterios de evaluación en E.S.O.

Descriptor	Criterios de evaluación 1º de E.S.O.
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	5. Estimar y calcular perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando la unidad de medida adecuada. Se pretende valorar la capacidad de estimar algunas medidas de figuras planas por diferentes métodos y de emplear la unidad y precisión más adecuada. Se valorará también el empleo de métodos de descomposición por medio de figuras elementales para el cálculo de áreas de figuras planas del entorno.
C2.1: Figuras geométricas en el plano	4. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	—
C3.1: Simetrías y giros	—
C3.2: Semejanza	—
C4: Mapas y Coordenadas	—
C5: Trigonometría	—

Tabla 9. Criterios de evaluación en 1º de E.S.O.

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1º E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

Descriptor	Criterios de evaluación 2º de E.S.O.
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	—
C2.1: Figuras geométricas en el plano	—
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	<p>4. Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada.</p> <p>Mediante este criterio se valora la capacidad para comprender y diferenciar los conceptos de longitud, superficie y volumen y seleccionar la unidad adecuada para cada uno de ellos. Se trata de comprobar, además, si se han adquirido las capacidades necesarias para estimar el tamaño de los objetos. Más allá de la habilidad para memorizar fórmulas y aplicarlas, este criterio pretende valorar el grado de profundidad en la comprensión de los conceptos implicados en el proceso y la diversidad de métodos que se es capaz de poner en marcha.</p>
C3.1: Simetrías y giros	—
C3.2: Semejanza	—
C4: Mapas y Coordenadas	—
C5: Trigonometría	—

Tabla 10. Criterios de evaluación en 2º de E.S.O.

Descriptor	Criterios de evaluación 3º de E.S.O.
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	—
C2.1: Figuras geométricas en el plano	—
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	—
C3.1: Simetrías y giros	<p>4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.</p> <p>Con este criterio se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, para que puedan ser utilizados como un recurso más de análisis en una formación natural o en una creación artística. El reconocimiento de los movimientos lleva consigo la identificación de sus elementos característicos: ejes de simetría, centro y amplitud de giro, etc. Igualmente los lugares geométricos se reconocerán por sus propiedades, no por su expresión algebraica. Se trata de evaluar, además, la creatividad y capacidad para manipular objetos y componer movimientos para generar creaciones propias.</p>
C3.2: Semejanza	—
C4: Mapas y Coordenadas	—
C5: Trigonometría	—

Tabla 11. Criterios de evaluación en 3º de E.S.O.

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1° E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

Descriptor	Criterios de evaluación 4° de E.S.O. (Opción A)	Criterios de evaluación 4° de E.S.O. (Opción B)
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	4. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.	3. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar la capacidad de desarrollar estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.
C2.1: Figuras geométricas en el plano	—	—
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	—	—
C3.1: Simetrías y giros	—	—
C3.2: Semejanza	—	—
C4: Mapas y Coordenadas	—	—
C5: Trigonometría	—	—

Tabla 12. Criterios de evaluación en 4° de E.S.O.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Descriptor	Criterios de evaluación Ciencias y Tecnología 1° de Bachillerato	Criterios de evaluación Ciencias Sociales 1° de Bachillerato
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	—	—

Descriptor	Criterios de evaluación Ciencias y Tecnología 1º de Bachillerato	Criterios de evaluación Ciencias Sociales 1º de Bachillerato
C2.1: Figuras geométricas en el plano	<p>2. Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; así como, identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas.</p> <p>Se pretende evaluar la capacidad para representar geoméricamente una situación planteada, eligiendo y aplicando adecuadamente las definiciones y transformaciones geométricas que permitan interpretar las soluciones encontradas; en especial, la capacidad para incorporar al esquema geométrico las representaciones simbólicas o gráficas auxiliares como paso previo al cálculo. Asimismo, se pretende comprobar la adquisición de las capacidades necesarias en la utilización de técnicas propias de la geometría analítica para aplicarlas al estudio de las ecuaciones reducidas de las cónicas y de otros lugares geométricos sencillos.</p>	—
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	—	—
C3.1: Simetría	—	—
C3.2: Semejanza	—	—
C4: Mapas y Coordenadas	—	—
C5: Trigonometría	—	—
C6: Vectores y rectas en el plano y en el espacio	<p>3. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones.</p> <p>La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el plano.</p>	—

Tabla 13. Criterios de evaluación en 1º de Bachiller

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1° E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

Descriptor	Criterios de evaluación Ciencias y Tecnología 2° de Bachillerato	Criterios de evaluación Ciencias Sociales 2° de Bachillerato
C1: Estimación y cálculo de magnitudes	—	—
C2.1: Figuras geométricas en el plano	—	—
C2.2: Figuras geométricas en el espacio	—	—
C3.1: Simetría	—	—
C3.2: Semejanza	—	—
C4: Mapas y Coordenadas	—	—
C5: Trigonometría	<p>3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto.</p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.</p>	—
C6: Vectores y rectas en el plano y en el espacio	<p>2. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en tres dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones.</p> <p>La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el espacio de tres dimensiones.</p>	—

Tabla 14. Criterios de evaluación en 2° de Bachiller

Respecto a los criterios de evaluación, la normativa indica que, en el tercer ciclo de Primaria, se debe evaluar la capacidad de seleccionar instrumentos de medida y utilizar las unidades adecuadas; estimar magnitudes; manejar las nociones de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y área; interpretar mapas y planos y ser capaz de explicar oralmente y por escrito los razonamientos seguidos.

En 1º de E.S.O., la normativa refleja que debe evaluarse la capacidad de estimar y calcular perímetros, áreas y ángulos en figuras planas; utilizar las unidades de medida adecuadas y reconocer y describir figuras planas utilizando la terminología adecuada.

En 2º de E.S.O., la normativa marca la evaluación de la capacidad de estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y de utilizar las unidades de medida apropiadas. A diferencia de 1º de E.S.O., donde se valora el uso de los conceptos aprendidos de una manera memorística para su posterior aplicación, en 2º de E.S.O. se valora la comprensión de las nociones y la capacidad del alumno de decidir qué estrategias aplicar en cada situación.

Los criterios de evaluación de 3º de E.S.O. consisten en la valoración de la capacidad de reconocimiento y comprensión de los movimientos en el plano y de los lugares geométricos así como su empleo para el desarrollo artístico y creativo del alumno.

En 4º de E.S.O., se evalúa la capacidad de escoger las estrategias adecuadas para la obtención de medidas desconocidas en situaciones reales. El alumno debe demostrar el conocimiento y la comprensión de las nociones adquiridas en cursos anteriores y ser capaz de seleccionar aquellas que sean necesarias para resolver cualquier situación propuesta.

En 1º de Bachiller, la normativa marca que se evalúe la capacidad de esquematizar y representar geoméricamente situaciones reales como paso previo a la resolución, eligiendo las técnicas apropiadas e interpretando y valorando los resultados obtenidos. Además, se evalúa la capacidad de uso del lenguaje vectorial, de resolución de problemas y de interpretación de los resultados. Lo más característico en este nivel es la importancia de la interpretación y valoración de las conclusiones obtenidas.

En 2º de Bachiller, los criterios de evaluación son muy parecidos a los de 1º, evaluándose la capacidad de representar un problema mediante lenguaje algebraico, gráfico o vectorial, resolverlo e interpretar críticamente la solución obtenida.

Así pues, estos criterios evolucionan de manera significativa en el currículo. En Primaria y 1º de E.S.O. se valoran las capacidades memorísticas mientras que en 2º, 3º y 4º de E.S.O. se valora además, la comprensión de los conceptos memorizados y la elección de los más apropiados para resolver situaciones planteadas. En Bachiller, la evaluación es más completa, englobando no sólo la capacidad de memorizar conceptos, comprenderlos y seleccionar los apropiados para resolver situaciones concretas, sino también la capacidad de interpretar y analizar críticamente las soluciones obtenidas.

Capítulo 3

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con del contenido geométrico en el currículo vigente

A lo largo de este capítulo se va a estudiar la coherencia entre el contenido geométrico reflejado en el currículo vigente y la actividad matemática que se deduce de los ejercicios, problemas y cuestiones en los libros de texto. Para ello, se han analizado los temas correspondientes a geometría en libros de texto de 5º y 6º de primaria así como de 1º, 2º y 3º de E.S.O..

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 5º de Primaria

Se ha analizado el libro de texto de 5º de Primaria *Matemáticas 5 primaria* de la editorial SM. Los contenidos están estructurados en 15 temas, dedicando los 4 últimos a geometría:

- Rectas y ángulos.
- Las figuras planas.
- Movimientos en el plano.
- Los cuerpos geométricos.

Las actividades están presentes en cada hoja, tras una explicación teórica se plantean entre 2 y 4 actividades relacionadas con el contenido pero, es al final del tema donde toman protagonismo ya que se proponen 3 hojas con actividades.

Según la tipología, las actividades se presentan aproximadamente en la siguiente proporción:

- Ejercicios 61 %
- Problemas 31 %
- Cuestiones 8 %
- Situaciones 0 %

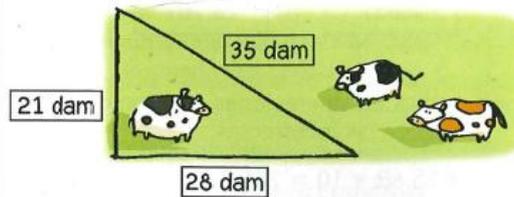
Se han seleccionado varios ejemplos de cada clase para ilustrar el tipo de actividades propuestas en el libro:

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe ser capaz de utilizar con corrección las unidades de medida y convertir unas unidades en otras de la misma magnitud. Además, debe comprender el concepto de perímetro así como explicar oralmente y por escrito los razonamientos y las estrategias utilizadas para solucionar el problema.

Ejemplo:

39 Luis quiere cercar con tablones de madera una parcela triangular como la del dibujo.



Si cada tablón mide 5 m, ¿cuántos tablones necesita?

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Mediante este problema se espera que el alumno comprenda el enunciado, conozca los grados que tiene una circunferencia y sepa realizar operaciones con ángulos. Además, debe argumentar las estrategias seguidas para resolver el problema.

Ejemplo:

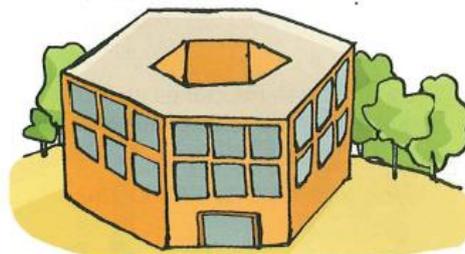
35 Pedro vendió 6 trozos de tartas circulares. Si cada trozo formaba un ángulo de 90° , ¿cuántas tartas vendió?

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe reconocer formas geométricas, utilizar los conceptos de longitud y área y las unidades de medida adecuadas y demostrar su capacidad de visión espacial. Además, se valora la capacidad de explicar oralmente y por escrito, los razonamientos utilizados en la resolución del problema.

Ejemplo:

38 ¿Qué forma tiene este colegio? Si todas las paredes tienen el mismo número de ventanas, ¿cuántas ventanas tiene? Si cada ventana tiene una superficie de 2 m^2 , ¿cuánta tela será necesaria para poner cortinas a todas las ventanas del colegio?

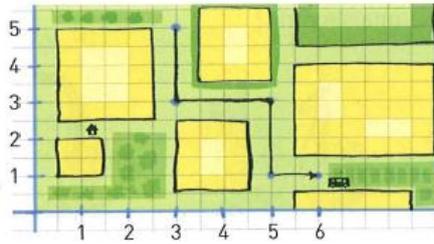


Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Este ejercicio pretende detectar en el alumno la capacidad de interpretar una representación espacial, identificar coordenadas en gráficas sencillas y describir posiciones y movimientos. Además, evalúa el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y ejes de coordenadas.

Ejemplo:

- 44 Soraya está en el punto (3, 5) del mapa y quiere llegar a la parada de autobús que está en el punto (6, 1). Indica los puntos por los que tiene que pasar.

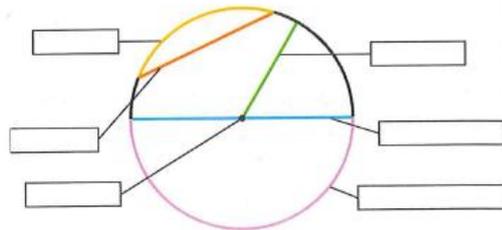


Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe identificar y nombrar los elementos de la circunferencia. Este ejercicio valora la capacidad de conocer de manera memorística estas nociones.

Ejemplo:

- 28 Copia en tu cuaderno este dibujo y completa con los nombres que faltan.

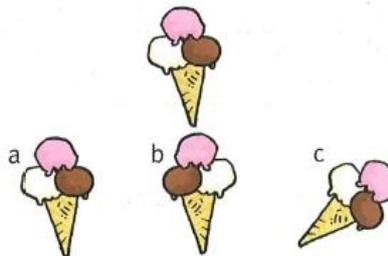


Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe reconocer simetrías, traslaciones y giros de un objeto dado y utilizar los términos correspondientes para dar información.

Ejemplo:

- 32 Observa el modelo e indica cuál de las figuras que se muestran a continuación representan una simetría, una traslación o un giro.



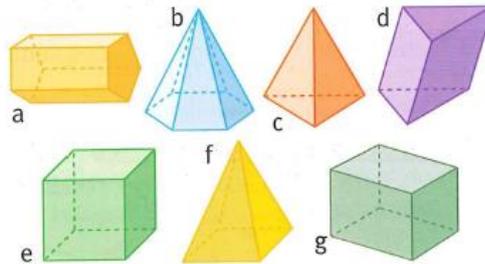
Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe reconocer formas planas e identificar los elementos y reconocer figuras espaciales. Esta actividad valora la interiorización de estos conceptos.

Ejemplo:

27 Observa estas figuras y escribe en tu cuaderno.

- El nombre del polígono de la base de cada figura.
- El número de bases.
- El número de caras.
- El nombre que recibe cada figura.



Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Cuestión que pretende comprobar la comprensión de los conceptos de rectas perpendiculares y secantes.

Ejemplo:

21. ¿Todas las rectas secantes son perpendiculares? ¿Todas las rectas perpendiculares son secantes?
22. ¿Qué tipo de ángulos forman dos rectas perpendiculares?

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Cuestión que permite valorar la comprensión del concepto de simetría así como su relación con los diámetros de un círculo. Este tipo de cuestiones permiten que los alumnos comprendan los conceptos de una manera práctica y no únicamente memorística.

Ejemplo:

- 47 ¿Cuántos diámetros tiene un círculo?
¿Cuántos ejes de simetría? ¿Qué relación existe entre los diámetros de un círculo y sus ejes de simetría?



3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º de Primaria

Se ha analizado el libro de texto de 6º de Primaria *Matemáticas 6 Primaria* de la editorial SM. Al igual que el libro de 5º, los contenidos están estructurados en 15 temas, dedicando 4 de ellos a contenidos de geometría:

- Los ángulos y su medida.
- Los polígonos.
- La circunferencia y el círculo.
- Los cuerpos geométricos.

Las actividades se distribuyen del mismo modo que en el libro de 5º de Primaria y, según la tipología, se presentan aproximadamente en la siguiente proporción:

- Ejercicios 60 %
- Problemas 34 %
- Cuestiones 6 %
- Situaciones 0 %

Se han seleccionado varios ejemplos de cada clase para ilustrar el tipo de actividades propuestas en el libro:

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe mostrar su capacidad para sumar y restar ángulos así como explicar el proceso seguido para la resolución del problema.

Ejemplo:

30 ¿Qué ángulo forman la porción de Rebeca y la de Alfonso? ¿Y la de Rebeca y Begoña? ¿Y la de Begoña y Alfonso? ¿Y las tres juntas?



Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe identificar en el problema la noción de longitud de una circunferencia y demostrar su conocimiento así como utilizar las unidades de medida adecuadas. Se valora la comprensión y la argumentación de los procedimientos seguidos en la resolución.

Ejemplo:

35 Un circo tiene una pista circular de 70 m de radio. Si al comenzar el espectáculo el presentador da una vuelta a la pista, ¿cuántos metros recorre?

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe conocer la noción de superficie y aplicarla para el cálculo de áreas de figuras planas así como ser capaz de comparar superficies de figuras planas por medición. Además, debe explicar el procedimiento seguido para la resolución del problema.

Ejemplo:

25 Miguel quiere pegar estas fotos en una cartulina que tiene 45 cm de ancho y 60 cm de largo. ¿Cabrán todas en la cartulina?

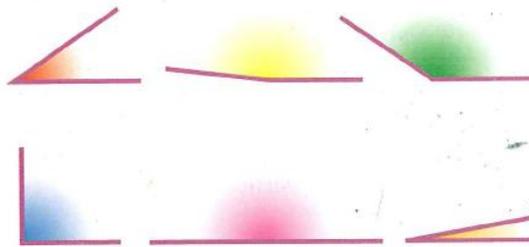


Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe ser capaz de utilizar los instrumentos convencionales para medir ángulos, clasificarlos según su amplitud y emplear las unidades adecuadas.

Ejemplo:

19 Mide y ordena estos ángulos de mayor a menor amplitud. Clasifícalos en ángulos agudos, rectos, obtusos y llanos.

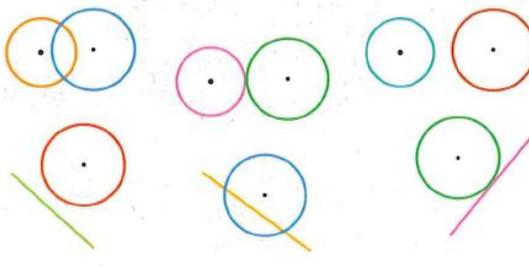


Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Este ejercicio pretende evaluar la interiorización de los conceptos de posiciones relativas de rectas y circunferencias.

Ejemplo:

27 Copia estas figuras e indica debajo el nombre que reciben según su posición.

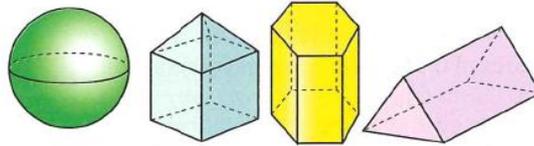


Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe reconocer cuerpos geométricos planos e identificar poliedros. Esta actividad valora el conocimiento memorístico de estos conceptos así como la capacidad de visión espacial.

Ejemplo:

17. ¿Qué forma tienen las caras de un poliedro?
Indica cuáles de estas figuras son poliedros.

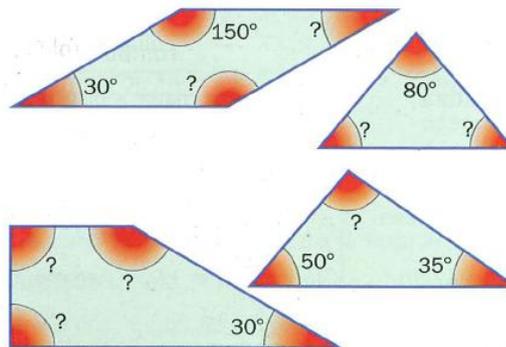


Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe conocer el valor de la suma de los ángulos de triángulos y cuadriláteros. Mediante esta actividad se puede detectar si se ha aprendido esta noción y sabe utilizarla en situaciones concretas.

Ejemplo:

19. Calcula los ángulos que faltan en estos polígonos.



Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Esta cuestión valora la comprensión y la diferenciación de los conceptos de circunferencia y círculo.

Ejemplo:

22. ¿Cuál es la diferencia entre un círculo y una circunferencia?

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Esta cuestión evalúa el conocimiento de los poliedros y sus características así como la comprensión de estas nociones y su interiorización.

Ejemplo:

25. Indica si estas afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Corrige las falsas.

- El tetraedro es una pirámide triangular.
- El cubo es un prisma cuadrangular.
- Hay 4 poliedros regulares.
- El menor número de caras de un poliedro es 4.

Las actividades que incluyen los dos libros de texto analizados son muy coherentes con los contenidos y con los criterios de evaluación marcados en la normativa para el tercer ciclo de Primaria.

En cuanto al contenido, los libros incluyen actividades sobre todos los puntos indicados en la normativa excepto sobre el concepto de semejanza. Tampoco existen propuestas de actividades que permitan el trabajo de la geometría con programas informáticos.

Aparte de los conceptos propios de la etapa, estos libros incluyen actividades que suponen el estudio de contenidos que no son propios del curso como la mediatriz y la bisectriz, la circunferencia y el círculo o las posiciones relativas de rectas y circunferencias y el cálculo de volúmenes.

En esta etapa se deben reconocer tanto figuras planas como cuerpos geométricos en tres dimensiones y conocer sus elementos además de saber calcular longitudes y ángulos en figuras planas. Por tanto, no es necesario incluir el cálculo de volúmenes e incluso tampoco el cálculo de áreas en estos cursos ya que se pueden trabajar más adelante.

Respecto a los criterios de evaluación, los libros se ajustan a lo indicado en la normativa ya que las actividades que más predominan son los ejercicios en los que la finalidad es evaluar la adquisición de los conocimientos por parte de los alumnos y no tanto la comprensión de éstos, que se evaluaría a través de los problemas.

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de E.S.O.

Se ha analizado el libro de texto de 1º de E.S.O. *Matemáticas 1* de la editorial SM. Los contenidos están estructurados en tres bloques:

- Números.
- Álgebra, funciones y estadística.
- Geometría y medida.

El último bloque, correspondiente a geometría, lo forman 4 unidades:

- Formas geométricas.
- Figuras planas.
- Longitudes y áreas.
- Cuerpos geométricos. Volúmenes.

Las actividades están presentes en todas las hojas, tras una explicación teórica se plantean entre 2 y 4 actividades relacionadas con el contenido pero es al final de cada tema, donde toman protagonismo ya que se proponen 5 hojas con actividades.

Según la tipología, las actividades se presentan aproximadamente en la siguiente proporción:

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1° E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

- Ejercicios 65 %
- Problemas 31 %
- Cuestiones 4 %
- Situaciones 0 %

Se han seleccionado varios ejemplos de cada clase para ejemplificar el tipo de actividades propuestas en el libro:

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Mediante este problema se pretende evaluar la capacidad de aplicación de conceptos básicos de circunferencias (longitud, diámetro, etc.) para abordar situaciones de la vida cotidiana. Además, se quiere comprobar la comprensión del enunciado y la capacidad de argumentar los procedimientos utilizados para la resolución del problema.

Ejemplo:

- 73** En la noria de la figura, ¿a qué distancia se encuentra cada cestillo si el diámetro de la noria es de 75 centímetros?



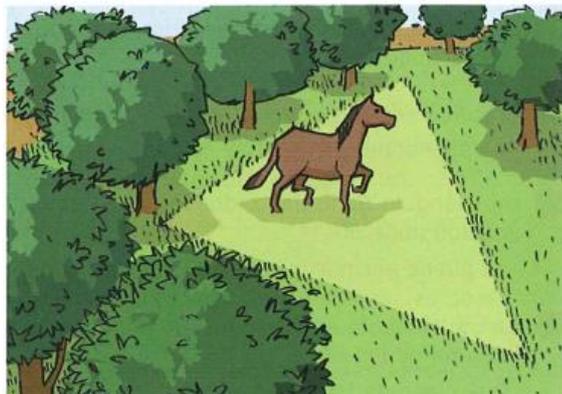
Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe conocer las rectas notables de un triángulo así como sus propiedades y ser capaz de utilizar estos conceptos para abordar diferentes problemas de la vida cotidiana. Además, se valora la capacidad de construir gráficamente estos elementos.

Ejemplo:

- 76** Los abuelos de Pablo tienen un prado sin cercar en forma triangular y un caballo. Quieren atar el caballo de modo que desde un punto pueda ir lo más lejos posible, alcanzando solamente a dos lados del prado pero sin pacer la hierba de la vecina.

- a) ¿Dónde tienen que colocar la estaca?
- b) Haz la construcción correspondiente.



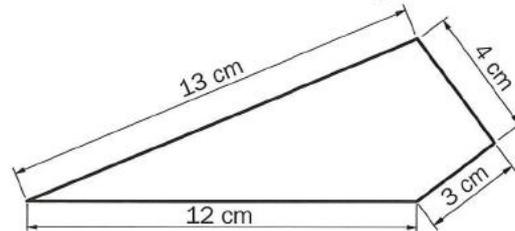
Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Este problema evalúa la capacidad de calcular el área de figuras planas mediante descomposición, por medio de figuras elementales, y el uso de fórmulas. Además, valora la comprensión del enunciado y el uso de las unidades de medida adecuadas.

Ejemplo:

- 65 Julia ha construido una casita de muñecas con unos trozos de madera que ha encontrado. El diseño de la casa no es regular por la forma que tenía la madera.

Ahora la va a decorar y en el suelo va a poner un papel adhesivo que parece parquet. ¿Cuántos centímetros cuadrados necesita para el suelo del dormitorio si su forma es la del dibujo?



Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Mediante esta actividad se evalúa la capacidad de construcción de polígonos regulares con los instrumentos de dibujo habituales, el conocimiento del concepto de circunferencia circunscrita y el cálculo de una magnitud desconocida a partir de otras conocidas. El alumno debe tener los conocimientos necesarios para describir figuras geométricas planas y analizar las relaciones entre éstas.

Ejemplo:

- 6 Dibuja un octógono de 3,5 centímetros de lado.
- ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita?
 - ¿Cómo construirías un cuadrado a partir del octógono? ¿Cuánto mediría su lado?

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio que valora la capacidad de construcción de la mediatriz de un segmento y la comprobación de las propiedades de ésta.

Ejemplo:

- 19 Dibuja un segmento vertical de 7 centímetros de longitud.
- Traza su mediatriz utilizando regla y compás.
 - Comprueba que el punto de corte de la mediatriz con el segmento es su punto medio.

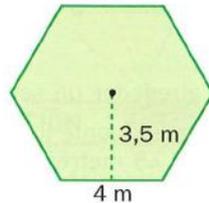
Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Mediante este ejercicio se valora la capacidad de cálculo de áreas de figuras planas mediante el uso de fórmulas y descomposición en figuras elementales. Se valora además, el uso de la unidad de medida adecuada en cada caso.

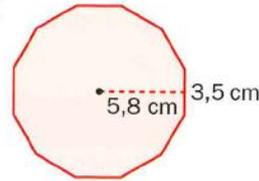
Ejemplo:

49 Halla el área de estos polígonos regulares.

a)

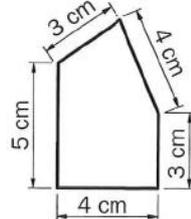


b)

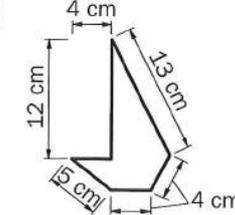


51 Determina el área por triangulación.

a)



b)



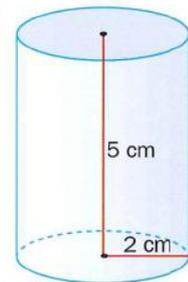
Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Este ejercicio es de aplicación directa de las fórmulas para el cálculo del volumen de poliedros y cuerpos de revolución. El alumno debe convertir las unidades y expresar el resultado en las unidades de medida adecuadas.

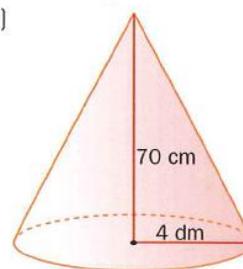
Ejemplo:

77 Determina el volumen de estos cuerpos cuyas medidas se indican en las siguientes figuras.

a)



b)



Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Mediante esta cuestión el alumno debe demostrar la comprensión de los conceptos de ángulo recto, agudo y obtuso así como su capacidad de expresión de sus ideas y de argumentación.

Ejemplo:

47 Si \hat{A} es un ángulo agudo y \hat{B} es obtuso, ¿pueden sumar 90° ? ¿Por qué?

Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: Esta actividad evalúa el conocimiento y la comprensión de las propiedades de los triángulos y la capacidad de expresión y argumentación.

Ejemplo:

22 ¿Es posible construir un triángulo con los lados iguales a 4, 6 y 10 centímetros? ¿Por qué?

10 ¿Se puede construir un triángulo de manera que sus ángulos midan 105° , 45° y 35° ?

Razona la respuesta.

Todos los conceptos reflejados en la normativa vigente están incluidos en los tres primeros temas del bloque III. El último tema está dedicado al cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos, contenido que no corresponde a este curso ya que, según indica la normativa, las figuras en el espacio son trabajadas en 2º de E.S.O.. Como he comentado anteriormente, es más apropiado que en 1º de E.S.O. solo se profundice en el estudio de figuras planas por lo que este último tema no sería necesario incluirlo en el libro.

En cuanto a los criterios de evaluación, el tipo de actividades que predominan en el libro son los ejercicios por lo que únicamente permiten evaluar el aprendizaje de los conceptos y su aplicación teórica. Mediante los problemas, es posible evaluar la capacidad de resolución de situaciones y examinar los métodos utilizados por los estudiantes y la variedad de herramientas que disponen.

A diferencia de los libros de Primaria y cumpliendo con el punto de la normativa “empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos”, el libro presenta una propuesta de actividades a realizar con el programa *Cabri-Geometre II* que permite dibujar figuras geométricas así como realizar el cálculo de ángulos y áreas.

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de E.S.O.

Se ha analizado el libro de texto de 2º de E.S.O. *Matemáticas 2* de la editorial SM. El libro se estructura del mismo modo que el de 1º de E.S.O. y las unidades cuyos contenidos son de geometría, y por tanto objeto de análisis, son:

- Medidas. Teorema de Pitágoras.
- Semejanza. Teorema de Tales.
- Cuerpos geométricos.
- Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.

Según la tipología, las actividades se presentan en la siguiente proporción:

- Ejercicios 32 %
- Problemas 60 %
- Cuestiones 8 %
- Situaciones 0 %

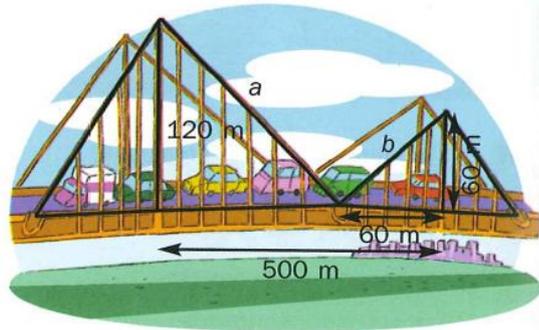
Se han seleccionado varios ejemplos para ejemplificar el tipo de actividades propuestas en el libro:

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe calcular medidas desconocidas a partir de otras dadas mediante la identificación de triángulos rectángulos y el uso del Teorema de Pitágoras. Además de la memorización de las fórmulas necesarias este problema pretende valorar la comprensión de los conceptos implicados.

Ejemplo:

- 69 Calcula las longitudes a y b de los tirantes del puente de 500 metros representado en la figura.



Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Mediante este problema se evalúa la comprensión del enunciado, el conocimiento de las propiedades de los poliedros y la memorización de las fórmulas necesarias para el cálculo del volumen de estas figuras. Además, el alumno debe expresar el resultado utilizando las unidades de medida adecuadas.

Ejemplo:

- 27 En un recipiente con forma de prisma de base un cuadrado de 8 centímetros de lado y altura 12 centímetros se introduce una bola de hierro de 8 centímetros de diámetro. Calcula el volumen de agua necesario para llenar el recipiente.

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio que requiere la aplicación de la fórmula necesaria para el cálculo del volumen de un cuerpo de revolución. Además, requiere el conocimiento de los elementos de un cilindro y la capacidad de dibujarlo dadas sus medidas.

Ejemplo:

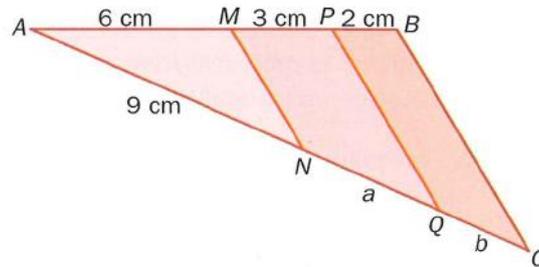
- 5 Dibuja un cilindro de 4 centímetros de diámetro y 6 centímetros de altura. Calcula su área total.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Mediante este ejercicio se evalúa la capacidad de identificar figuras semejantes y aplicar el Teorema de Tales para obtención de medidas desconocidas.

Ejemplo:

- 35** Halla la medida de los segmentos a y b de la siguiente figura.



Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio que valora la capacidad de construir el desarrollo plano de poliedros y cuerpos de revolución así como la identificación y el análisis de cada figura geométrica presente en el desarrollo.

Ejemplo:

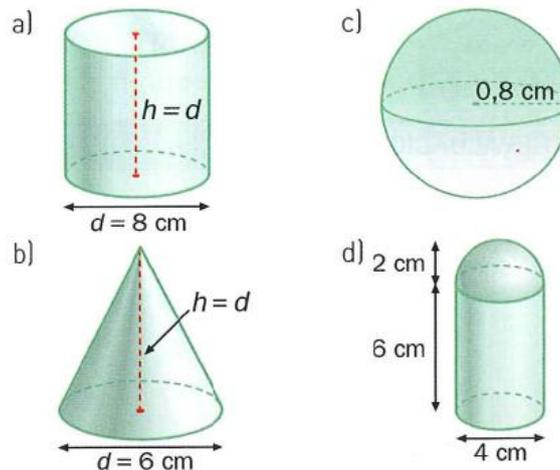
- 85** Construye el desarrollo plano de un cono de 8 centímetros de diámetro y 10 cm de generatriz, indicando las dimensiones de cada figura.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio que requiere la identificación de los cuerpos geométricos y la memorización de las fórmulas necesarias para el cálculo de los volúmenes. Además, es necesaria la utilización de la descomposición en cuerpos conocidos y la expresión del resultado en las unidades de medida adecuadas.

Ejemplo:

- 75** Calcula el volumen de los siguientes cuerpos.



Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: Cuestión que requiere el conocimiento del concepto de triángulo rectángulo y sus elementos así como el dibujo con las herramientas adecuadas. Además, se evalúa la comprensión del concepto de figuras semejantes y la capacidad de expresión y de argumentación de la respuesta dada.

Ejemplo:

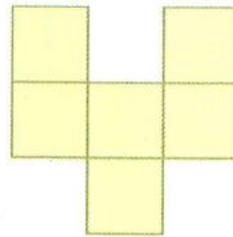
- 3 Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 15 y 8 centímetros. Si se unen sus puntos medios, ¿resulta un triángulo semejante a él?
Razona la respuesta.

Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: El alumno debe razonar sobre el desarrollo plano de figuras geométricas e identificar si el desarrollo dado puede pertenecer al de un cubo. El ejercicio requiere argumentar la solución dada.

Ejemplo:

- 55 ¿Puede ser esta figura el desarrollo plano de un cubo?



En relación al currículo vigente, el libro se ajusta a los contenidos marcados en la normativa. El primer tema *Medidas. Teorema de Pitágoras*, contiene medidas de tiempo y ángulos así como la aproximación y cálculo de errores y el segundo tema *Semejanza. Teorema de Tales* incluye dos apartados dedicados a la interpretación de mapas y planos. Estos conceptos no están indicados en la normativa pero son nociones ya introducidas en el tercer ciclo de Primaria por lo que, al ser una ampliación y repaso de algo ya estudiado, es adecuada su inclusión.

Respecto a los criterios de evaluación, la normativa indica que se deben comprender los procesos de medida empleados para el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes así como expresar cada concepto con la unidad adecuada. Al contrario que en los libros de texto de cursos anteriores, el tipo de actividades que predominan son los problemas que permiten evaluar estas capacidades de comprensión de las nociones estudiadas.

Al igual que en 1° de E.S.O., aunque en este caso sin que lo indique la normativa, se propone el uso del programa *Cabri-Geometre* para el estudio del Teorema de Pitágoras, las medidas de ángulos, el desarrollo de figuras planas y la semejanza de triángulos.

3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de E.S.O.

Se ha analizado el libro de texto de 3º de E.S.O. *Matemáticas 3* de la editorial SM. El libro se estructura en cinco bloques: Números; Álgebra; Geometría; Sucesiones y funciones; Estadística y probabilidad. Las unidades revisadas, del tercer bloque, son:

- Geometría del plano.
- Traslaciones, giros y simetrías en el plano.
- Figuras y cuerpos geométricos.

Las actividades se distribuyen del mismo modo que en los libros de 1º y 2º de E.S.O.. Según la tipología, las actividades se presentan en la siguiente proporción:

- Ejercicios 43 %
- Problemas 55 %
- Cuestiones 2 %
- Situaciones 0 %

Se han seleccionado varios ejemplos para ilustrar el tipo de actividades propuestas en el libro:

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe comprender el enunciado y traducirlo al lenguaje gráfico, identificar las relaciones de semejanza y aplicar el Teorema de Tales para el cálculo de las medidas desconocidas.

Ejemplo:

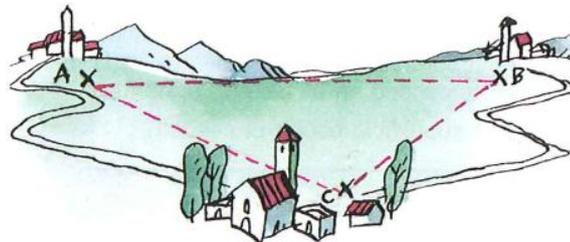
- 12** Un alumno dibuja dos rectas r y s , secantes. A continuación, marca en r tres puntos A , B y C , que distan entre sí 3 y 4 centímetros, respectivamente. Por esos puntos traza rectas paralelas que cortan a s en A' , B' y C' . Si la distancia entre A' y B' es 6 centímetros, ¿cuál es la distancia entre $A'C'$ y $B'C'$?

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Identificación de la figura geométrica formada y reconocimiento del lugar geométrico a partir de la propiedad dada.

Ejemplo:

- 56** Tres pueblos A , B y C quieren construir una piscina común para sus habitantes, de forma que quede a la misma distancia de los tres.
¿En qué punto deben construirla?



Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: El alumno debe reconocer los movimientos en el plano e identificar sus elementos característicos, en este caso la amplitud total de giro.

Ejemplo:

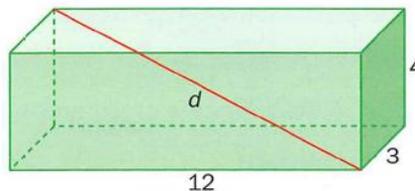
- 90 A una figura se le aplica un giro de centro O y amplitud de 200° y, a continuación, un nuevo giro con el mismo centro y amplitud 230° .
Explica cuál es el giro resultante.

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Problema que requiere la identificación de triángulos rectángulos y la aplicación del Teorema de Pitágoras para el cálculo de una medida desconocida. Se pretende valorar la capacidad del alumno para enfrentarse a la resolución de problemas y aplicar las estrategias aprendidas.

Ejemplo:

- 29 Las aristas del ortoedro de la figura miden 12, 4 y 3 centímetros, respectivamente. Halla la longitud de la diagonal d .



Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio que requiere el conocimiento de figuras geométricas planas, la capacidad de representación gráfica y la identificación de los ejes de simetría.

Ejemplo:

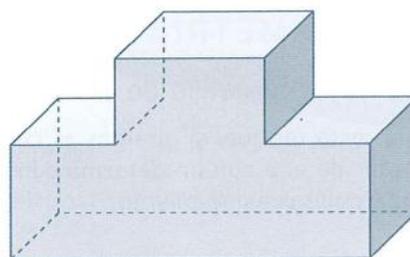
- 59 Señala un eje de simetría en un:
a) Pentágono regular.
b) Triángulo rectángulo isósceles.

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio que evalúa la capacidad de identificación de todos los planos de simetría en figuras geométricas así como la comprensión del concepto de eje de simetría.

Ejemplo:

- 31 Queremos cortar el cuerpo de la figura, de manera que quede dividido en dos trozos exactamente iguales. Dibuja todos los posibles planos de simetría para resolver el problema.



Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: El alumno debe comprender los movimientos del plano, en este caso los giros, a través del análisis de una expresión de la vida cotidiana.

Ejemplo:

69 Juan y Andrés se encuentran después de mucho tiempo sin verse:

¿Cómo te va la vida? —pregunta Juan.

¡Muy diferente! —le contesta Andrés—. Mi vida ha dado un giro de trescientos sesenta grados.

¿Qué error matemático encuentras en la contestación de Andrés?

Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: Esta cuestión permite la reflexión sobre los ejes de simetría en cuerpos de revolución, en particular en esferas. Además, se valora el conocimiento de los conceptos de husos horarios y la curiosidad del alumno en la investigación de elementos de cuerpos conocidos.

Ejemplo:

48 ¿Cuántos ejes de simetría puedes trazar en una esfera?

57 ¿Existe algún paralelo que mida lo mismo que un meridiano? En caso afirmativo, di cuál es.

En relación al currículo vigente, el libro se ajusta a los contenidos marcados en la normativa, incluyendo todos los puntos indicados en ella. Además, incluye otra serie de nociones que ya se han visto en cursos anteriores y sirven de repaso como rectas y puntos notables de triángulos, semejanza en polígonos, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Para explicar el tema de movimientos en el plano, en concreto las traslaciones, se introduce la noción de vector en el plano. Según la normativa este concepto se encuadra en 1º de Bachiller pero es apropiado ya que se introduce de una manera muy básica y en un contexto acorde con lo que se va a estudiar.

El libro presenta gran cantidad de problemas por lo que, respecto a los criterios de evaluación, las actividades permiten evaluar no sólo el conocimiento sino la comprensión de las nociones de movimientos en el plano y lugares geométricos.

Al igual que en 2º de E.S.O., se propone el uso del programa *Cabri-Geometre* para trabajar los movimientos en el plano. Mediante este tipo de actividad es posible evaluar la creatividad y la capacidad artística del alumno.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de la geometría en 1º E.S.O.

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio, llevado a cabo con un grupo de alumnos de 1º de E.S.O., sobre contenidos de geometría plana.

El análisis se desarrolla a lo largo de cuatro capítulos. En el primer capítulo, se analiza el libro de texto utilizado en este proceso: los objetos matemáticos presentes en él así como la estructura de sus contenidos y actividades. En el segundo capítulo, se prevén las dificultades relacionadas con geometría y el posible origen de las mismas. En el tercero, se planifica el proceso de estudio del tema: la distribución de los tiempos en clase y las actividades y tareas a proponer a los alumnos. En el cuarto y último capítulo, se detalla la puesta en práctica del proceso, utilizando como metodología de investigación la ingeniería didáctica.

La síntesis y conclusiones reflejadas en la parte final de este bloque se extraen del análisis comparativo entre las previsiones esperadas y los resultados observados durante la experimentación.

Capítulo 4

El contenido geométrico en el libro de texto de referencia

El material de referencia utilizado para el análisis de un proceso de estudio de geometría en secundaria ha sido el cuadernillo número 5 de matemáticas de 1° de E.S.O., de la editorial SM. Esta editorial tiene una colección de cuadernillos de trabajo para cada curso de secundaria y, para 1° de E.S.O., dispone de los siguientes:

1. Números naturales
2. Fracciones y decimales
3. Números enteros
4. Proporcionalidad, gráficas y estadística
5. Geometría
6. Medida

Así pues, se ha utilizado y analizado el cuadernillo número 5 de Geometría, incluido en el anexo I, cuyos contenidos son de geometría plana.

Asimismo, para el análisis de la lección se ha tomado como texto de referencia el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* publicado en la Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa por J. Godino, V. Font y M. R. Wilhelmi en 2006. Este texto analiza una lección de un libro de 5° grado de educación primaria a través del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática.

4.1. Objetos matemáticos involucrados

Para examinar el contenido del cuadernillo, se han analizado los principales objetos y relaciones implicadas en la resolución de problemas de geometría plana en el nivel de 1° de E.S.O., tomando como referencia el análisis realizado en el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* antes citado.

Los elementos estudiados son: el lenguaje (verbal, gráfico y simbólico) utilizado, las situaciones o problemas planteadas, los procedimientos o acciones realizados en relación a estos problemas, los conceptos o nociones presentes, las propiedades relevantes para el desarrollo del tema y los argumentos o razonamientos para la resolución de actividades.

LENGUAJE			
Tema	Verbal	Gráfico	Simbólico
Rectas en el plano	Punto, Recta, Plano, Paralela, Secante, Perpendicular, Punto de corte, Semirrecta.	Rectas y semirrectas para identificar posiciones relativas y puntos de corte.	A, ... : Puntos a, ... : Rectas
Ángulos en el plano	Ángulo, Vértice, Lado, Amplitud, Agudo, Recto, Obtuso, Llano, Grado, Minuto, Segundo, Complementario, Suplementario, Consecutivo, Opuesto por el vértice.	Ángulos para su medición y clasificación. Planos para identificar perpendicularidades, paralelismo y calcular ángulos.	A, ... : Puntos a, ... : Rectas Â, ... : Ángulos ° : Grados ' : Minutos " : Segundos

LENGUAJE			
Tema	Verbal	Gráfico	Simbólico
Mediatriz y bisectriz	Mediatriz, Segmento, Bisectriz, Punto medio, Arco, Distancia, Diagonal.	Rectas y ángulos para identificar y dibujar mediatrices y bisectrices. Dibujos que representan situaciones contextualizadas en las que se aplican estos conceptos.	A, ... : Puntos a, ... : Rectas XA, ... : Distancia ente X y A
Polígonos	Línea poligonal, Triángulo, Cuadrilátero, Pentágono, Hexágono, Heptágono, Octógono, Eneágono, Decágono, Regular, Irregular, Cóncavo, Convexo.	Polígonos para clasificación y cálculo de ángulos. Dibujos que representan situaciones contextualizadas representando polígonos.	A, ... : Polígonos Â, ... : Ángulos
Triángulos	Equilátero, Isósceles, Escaleno, Acutángulo, Rectángulo, Obtusángulo.	Triángulos para clasificación y cálculo de ángulos y lados e identificación de triángulos iguales.	-
Rectas notables de un triángulo	Mediana, Altura, Circuncentro, Circunferencia circunscrita, Incentro, Circunferencia inscrita, Ortocentro, Baricentro.	Triángulos para dibujar e identificar rectas notables.	A, ... : Puntos a, ... : Rectas
Cuadriláteros	Paralelogramo, Cuadrado, Rectángulo, Rombo, Romboide, Trapecio, Trapezoide, Paralela.	Cuadriláteros para clasificación y cálculo de ángulos.	A, ... : Cuadriláteros Â, ... : Ángulos
El círculo y la circunferencia	Circunferencia, Círculo, Centro, Diámetro, Radio, Cuerda, Arco, Sector circular, Segmento circular, Zona circular, Corona Circular, Longitud, Exterior, Interior, Tangente, Secante.	Circunferencias y rectas para identificar posiciones relativas. Elementos de la circunferencia y figuras circulares para su identificación.	A, ... : Circunferencias a, ... : Rectas L: Longitud π r: Radio d: Distancia
Ángulos en la circunferencia	Ángulo Central, Ángulo Inscrito.	Circunferencias con ángulos centrales e inscritos para su cálculo.	Â, ... : Ángulos
Construcción de polígonos regulares	Polígono estrellado.	Triángulos, polígonos regulares y estrellados para explicar el método de construcción.	A, ... : Puntos a, ... : Rectas Â, ... : Ángulos

Tabla 15. Análisis del lenguaje en contenidos de geometría

SITUACIONES		
Tema	Problemas descontextualizados (intra matemáticos)	Problemas contextualizados
Rectas en el plano	Dibujar semirrectas, rectas paralelas, perpendiculares y secantes y marcar puntos de corte.	-
Ángulos en el plano	Medir ángulos y expresar su medida en °, ' y ''. Sumar y restar ángulos. Clasificar parejas de ángulos según sean complementarios, suplementarios, consecutivos, etc.	Identificar calles perpendiculares en un plano real. Transcribir un enunciado sobre una situación real al lenguaje gráfico e identificar en el dibujo las nociones de paralelismo y perpendicularidad así como calcular ángulos.
Mediatriz y bisectriz	Identificar y dibujar mediatrices y bisectrices de segmentos y ángulos. Calcular distancias y ángulos.	Aplicar el concepto y las propiedades de mediatriz y bisectriz para resolver situaciones reales dadas.
Polígonos	Identificar y clasificar polígonos. Calcular los ángulos de un polígono.	Identificar polígonos en lugares/situaciones reales y calcular sus medidas.
Triángulos	Clasificar triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos. Identificar triángulos iguales. Dibujar triángulos conociendo sus medidas.	-
Rectas notables de un triángulo	Identificar y dibujar rectas notables en triángulos dados.	Resolver una situación real utilizando las propiedades de las rectas notables.
Cuadriláteros	Clasificar cuadriláteros y calcular las medidas de sus ángulos, lados y diagonales.	-
El círculo y la circunferencia	Calcular la longitud y el radio de una circunferencia. Dibujar e identificar posiciones relativas entre rectas y circunferencias y entre circunferencias.	Dibujar una situación dada a través de un enunciado e identificar los elementos estudiados en el tema.
Ángulos en la circunferencia	Calcular el valor del ángulo central e inscrito de una circunferencia.	-
Construcción de polígonos regulares	Dibujar triángulos conociendo: 3 lados; 2 lados y 1 ángulo; 1 lado y 2 ángulos. Dibujar polígonos regulares y estrellados utilizando el método general.	Identificar diferentes polígonos estrellados en una situación real.

Tabla 16. Análisis de las situaciones en contenidos de geometría

Tema	PROCEDIMIENTOS
Rectas en el plano	Aplicar las nociones de recta, semirrecta, paralelismo y perpendicularidad. Utilizar instrumentos de dibujo (reglas) para dibujar rectas.
Ángulos en el plano	Aplicar las nociones de complementario, suplementario consecutivo, etc. Utilizar instrumentos de dibujo (transportador de ángulos y reglas) para medir y dibujar ángulos y rectas. Realizar operaciones (sumas y restas) con ángulos. Descontextualizar el enunciado de problemas. Resolución de problemas de ángulos.
Mediatriz y bisectriz	Aplicar las nociones de mediatriz y bisectriz para identificarlas. Utilizar instrumentos de dibujo (compás y reglas) para dibujar mediatrices y bisectrices. Descontextualizar el enunciado de problemas.
Polígonos	Aplicar las definiciones para clasificar polígonos. Utilizar la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos de un polígono. Descontextualizar el enunciado de problemas. Aplicar el concepto de perímetro para la resolución de problemas.
Triángulos	Aplicar las definiciones para clasificar triángulos e identificar triángulos iguales. Utilizar instrumentos de dibujo (transportador de ángulos, reglas y compás) para dibujar triángulos.
Rectas notables de un triángulo	Utilizar instrumentos de dibujo (reglas y compás) para dibujar rectas notables de triángulos. Aplicar las nociones de rectas notables para identificarlas en triángulos. Descontextualizar el enunciado de problemas.
Cuadriláteros	Aplicar las definiciones para clasificar cuadriláteros.
El círculo y la circunferencia	Utilizar la fórmula para el cálculo de la longitud de una circunferencia. Aplicar las definiciones de posiciones relativas su identificación y su representación. Utilizar instrumentos de dibujo (compás) para dibujar circunferencias. Descontextualizar el enunciado de problemas.
Ángulos en la circunferencia	Aplicar la definición de ángulo central e inscrito así como la relación entre ambos para calcular estos ángulos en circunferencias dadas.
Construcción de polígonos regulares	Utilizar instrumentos de dibujo (transportador de ángulos, reglas y compás) para dibujar triángulos, polígonos regulares y polígonos estrellados. Descontextualizar el enunciado de problemas.

Tabla 17. Análisis de los procedimientos en contenidos de geometría

CONCEPTOS		
Tema	Previos	Emergentes
Rectas en el plano	Punto, Recta, Semirrecta.	Paralela, Perpendicular, Secante.
Ángulos en el plano	Vértice, Semirrecta, Suma, resta y multiplicación de números enteros, Valor del ángulo central de una circunferencia, Giros.	Ángulo, Agudo, Recto, Obtuso, Llano, Grado, minuto y segundo, Complementario, Suplementario, Consecutivo, Opuesto por el vértice, Suma y resta de ángulos.
Mediatriz y bisectriz	Segmento, Perpendicular, Punto medio, Ángulo, Vértice, Operaciones con ángulos (división y multiplicación).	Mediatriz, Bisectriz, Propiedades, Ángulo interior y exterior.
Polígonos	Línea poligonal, Lado, Ángulo, Operaciones con ángulos (división), Perímetro.	Triángulo, Cuadrilátero, Pentágono, Hexágono, Heptágono, Octógono, Eneágono, Decágono, Convexo, Cóncavo, Regular, Irregular, Suma de los ángulos de un polígono.
Triángulos	Triángulo, Lado, Ángulo, Suma de los ángulos de un triángulo.	Equilátero, Isósceles, Escaleno, Acutángulo, Obtusángulo, Rectángulo.
Rectas notables de un triángulo	Triángulo, mediatriz, bisectriz, perpendicular, punto medio, ángulo, vértice.	Mediana, Altura, Circuncentro, Circunferencia circunscrita, Incentro, Circunferencia inscrita, Ortocentro, Baricentro.
Cuadriláteros	Paralela, Lados, Ángulos, Diagonal.	Paralelogramo, Cuadrado, Rectángulo, Rombo, Romboide, Trapecio, Trapezoide.
El círculo y la circunferencia	Recta, Operaciones con números decimales (multiplicación).	Circunferencia, Círculo, Centro, Diámetro, Radio, Cuerda, Arco, Sector circular, Segmento circular, Zona circular, Corona Circular, Longitud de la circunferencia, Recta exterior, interior, tangente y secante.
Ángulos en la circunferencia	Circunferencia, Arco, Radio, Centro, Ángulo, Secante, Tangente, Polígonos, Suma de ángulos de un polígono, Ángulos suplementarios.	Ángulo central, Ángulo inscrito
Construcción de polígonos regulares	Triángulo, Lado, Ángulo, Polígonos, Segmento, Circunferencia, Arco, Diámetro.	Método para construcción de triángulos, Método general de construcción de polígonos regulares, Teorema de Tales, Polígonos estrellados.

Tabla 18. Análisis de los conceptos en contenidos de geometría

Tema	PROPIEDADES
Rectas en el plano	<p>Por un punto se pueden trazar infinitas rectas y por dos puntos solo se puede trazar una recta.</p> <p>Las rectas paralelas nunca se cortan y las secantes se cortan en un punto.</p> <p>Si señalamos un punto en una recta esta queda dividida en 2 semirrectas.</p>
Ángulos en el plano	<p>Ángulos suplementarios suman 180° y complementarios: suman 90°.</p> <p>1 grado = 60 minutos = 3600 segundos.</p> <p>Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.</p>
Mediatriz y bisectriz	<p>Cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo.</p> <p>Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del mismo.</p> <p>La bisectriz de un ángulo interior coincide con la del ángulo exterior.</p>
Polígonos	<p>Suma de los ángulos de un polígono = $(n^\circ \text{ de lados} - 2) \cdot 180^\circ$</p> <p>Un polígono regular tiene todos sus ángulos y sus lados iguales.</p>
Triángulos	<p>Dos triángulos son iguales si tienen: Los tres lados iguales, Iguales dos lados y el ángulo que forman, Iguales dos ángulos y un lado.</p>
Rectas notables de un triángulo	<p>La circunferencia circunscrita a un triángulo pasa por los vértices del mismo y tiene por centro el punto de corte de las tres medianas.</p> <p>La circunferencia inscrita a un triángulo es tangente a los lados del mismo y tiene por centro el punto de corte de las tres bisectrices.</p> <p>En un triángulo rectángulo, el punto de corte de las alturas se encuentra sobre el vértice del ángulo recto, el punto de corte de las mediatrices se sitúa en el punto medio de la hipotenusa y el punto de corte de las medianas y el de las bisectrices es un punto interior al triángulo.</p> <p>En un triángulo acutángulo, el punto de corte de las alturas, el de las medianas, el de las mediatrices y el de las bisectrices es un punto interior al triángulo.</p> <p>En un triángulo obtusángulo, el punto de corte de las alturas y el de las mediatrices es un punto exterior al triángulo y el punto de corte de las medianas y el de las bisectrices es un punto interior al triángulo.</p>
Cuadriláteros	-
El círculo y la circunferencia	<p>Longitud de la circunferencia = $2 \cdot \pi \cdot r$ ($\pi \approx 3.14$)</p> <p>Posiciones relativas entre recta y circunferencia: Recta exterior: $d > r$, Recta tangente: $d = r$, Recta secante: $d < r$</p>
Ángulos en la circunferencia	<p>Medida del ángulo central = Medida del arco que abarca</p> <p>Medida del ángulo inscrito = Mitad de la medida del arco que abarca</p> <p>Ángulo central de una circunferencia = 360°</p>
Construcción de polígonos regulares	-

Tabla 19. Análisis de las propiedades en contenidos de geometría

ARGUMENTOS
Uso del método deductivo: El tipo de razonamiento parte de principios generales para aplicarlos a casos concretos. Las propiedades y definiciones se comprueban en casos particulares,

Tabla 20. Análisis de los argumentos en contenidos de geometría

Estos seis elementos están relacionados entre sí dando lugar al desarrollo del tema de geometría plana estudiado. El lenguaje utilizado en el cuadernillo es el que describe las explicaciones teóricas (los conceptos) y las actividades o situaciones planteadas. La resolución de estas actividades implica el conocimiento de las propiedades que permiten argumentar los procedimientos seguidos en cada caso.

Una vez analizada la presencia de estos elementos así como sus relaciones se ha realizado, en el siguiente apartado, el análisis global del cuadernillo.

4.2. Análisis global de la unidad didáctica

El cuadernillo de matemáticas utilizado engloba conceptos de geometría plana que se estructuran en 4 bloques:

I. Elementos geométricos en el plano

1. Rectas en el plano
2. Ángulos en el plano
3. Mediatriz y bisectriz

II. Polígonos

4. Polígonos
5. Triángulos
6. Rectas notables de un triángulo
7. Cuadriláteros

III. Circunferencias y círculos

8. El círculo y la circunferencia
9. Ángulos en la circunferencia

IV. Construcción de polígonos regulares

10. Construcción de polígonos regulares

Cada apartado comienza con una breve explicación teórica sobre el concepto a estudiar, seguido de una actividad resuelta denominada “paso a paso” que refuerza la noción explicada. Algunas páginas incluyen cuadros pequeños que resaltan nociones importantes para la resolución de las actividades.

La figura 1 muestra un ejemplo de la explicación teórica dada en el cuadernillo para uno de los temas estudiados, rectas notables de un triángulo, y la figura 2 presenta el ejercicio resuelto que sigue a esta explicación.

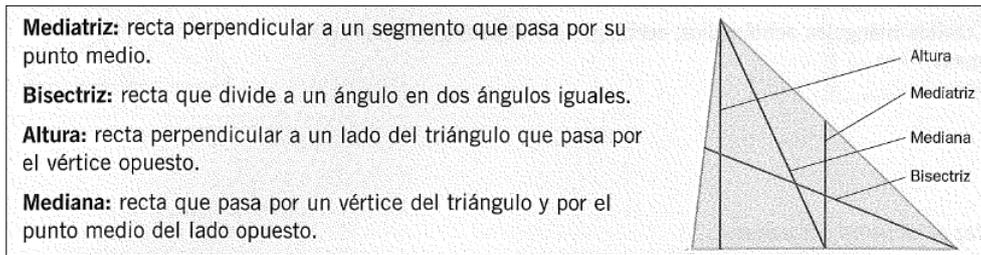


Figura 1. Explicación teórica apartado 6: Rectas notables de un triángulo

PASO A PASO

66 Dibuja las mediatrices del triángulo del dibujo y señala el circuncentro. Dibuja además la circunferencia circunscrita.

Circuncentro es el punto de corte de las tres mediatrices.
 La **circunferencia circunscrita** tiene por centro el circuncentro y pasa por los tres vértices del triángulo.

- 1.º Trazamos las mediatrices de los lados AB, AC y BC.
- 2.º El punto de corte de las tres mediatrices será el circuncentro, O.
- 3.º Con centro en O y radio OA, trazamos la circunferencia circunscrita.

Figura 2. Actividad resuelta apartado 6: Rectas notables de un triángulo y cuadro explicativo de conceptos necesarios para resolver las actividades

Tras la explicación teórica y la resolución de un ejercicio, se proponen entre 2 y 6 páginas de actividades en cada tema del cuaderno. La mayor parte de las actividades son ejercicios de aplicación directa de los conceptos teóricos estudiados y no problemas en los que el alumno tenga que pensar qué noción aplicar para resolverlo y demostrar su comprensión. Así pues, según la tipología, las actividades del cuadernillo se presentan en la siguiente proporción:

- Ejercicios 77 %
- Problemas 20 %
- Cuestiones 3 %
- Situaciones 0 %

Las siguientes figuras muestran un ejercicio y un problema tipo que plantea el cuadernillo en el tema 6.

73 Encuentra el ortocentro de los siguientes triángulos. ¿Qué observas?

a)

b)

Figura 3. Ejercicio tipo apartado 6: Rectas notables de un triángulo

Contenido 1º de E.S.O. reflejado en normativa	Unidad del Cuaderno
Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos. Polígonos regulares.	4. Polígonos 5. Triángulos 6. Rectas notables de un triángulo 7. Cuadriláteros
La circunferencia y el círculo.	8. El círculo y la circunferencia 9. Ángulos en la circunferencia
Construcción de polígonos regulares con los instrumentos de dibujo habituales.	10. Construcción de polígonos regulares
Medida y cálculo de ángulos en figuras planas.	2. Ángulos en el plano
Estimación y cálculo de perímetros de figuras. Estimación y cálculo de áreas mediante fórmulas, triangulación y cuadriculación.	-
Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.	-
Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.	-

Tabla 21. Relación entre los contenidos fijados en la normativa y los presentes en el cuaderno

Como refleja la tabla, el cuadernillo no presenta contenidos sobre estimación y cálculo de áreas de figuras planas. Respecto al cálculo de perímetros, sí que incluye alguna actividad en la que se debe calcular la longitud de una circunferencia y otras en las que se requiere, de manera implícita, el cálculo de perímetros de figuras planas pero, no aparece la noción explícita de perímetro en el cuaderno.

54 Un labrador quiso repartir en partes iguales su finca de forma hexagonal (hexágono regular) entre sus seis hijos e hijas. La valla que rodea la finca mide 120 metros.
¿Qué forma tendrán las fincas de los hijos?
Si el metro de valla cuesta 25 euros, ¿cuánto le costará a cada hijo vallar su finca?

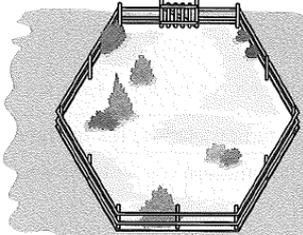


Figura 7. Problema que requiere el cálculo del perímetro de un hexágono

Relacionado con el tema de simetrías, el cuadernillo no incluye ninguna unidad ni actividad en la que se estudie este concepto. Tampoco se proponen actividades ni se hace referencia al uso de programas informáticos para trabajar elementos de geometría plana.

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1° E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

En relación a los criterios de evaluación, las actividades del libro permiten valorar el reconocimiento de las figuras planas así como su descripción y el conocimiento de sus elementos y propiedades. El tipo de actividad predominante no tiene relación con problemas de la vida cotidiana (son ejercicios descontextualizados) por lo que no se puede evaluar la capacidad de utilizar la geometría en situaciones ordinarias.

Respecto al criterio de evaluación número 5, al no estar incluidos los conceptos de cálculo de áreas y perímetros en figuras planas, el cuaderno no se ajusta completamente a este punto. Las actividades propuestas permiten valorar la capacidad de estimar y calcular algunas medidas de figuras planas (ángulos y perímetros) así como utilizar las unidades de medida adecuadas.

Criterios de evaluación 1° de E.S.O.	Unidad del Cuaderno
<p>4. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada.</p> <p>Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.</p>	<p>Todas las unidades del cuaderno</p>
<p>5. Estimar y calcular perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando la unidad de medida adecuada.</p> <p>Se pretende valorar la capacidad de estimar algunas medidas de figuras planas por diferentes métodos y de emplear la unidad y precisión más adecuada. Se valorará también el empleo de métodos de descomposición por medio de figuras elementales para el cálculo de áreas de figuras planas del entorno.</p>	<p>2. Ángulos en el plano</p> <p>4. Polígonos</p> <p>5. Triángulos</p> <p>7. Cuadriláteros</p> <p>8. El círculo y la circunferencia</p> <p>9. Ángulos en la circunferencia</p>

Tabla 22. Relación entre los criterios de evaluación fijados en la normativa y los presentes en el cuaderno

El uso de este es adecuado como material complementario a un libro de texto o apuntes de la materia. Para su empleo como único material en el aula no es un material completo, ya que presenta una explicación teórica de los conceptos muy escasa y superficial.

Además, el tipo de actividades propuestas no tiene relación con situaciones de la vida cotidiana, las actividades son únicamente de aplicación de los conceptos matemáticos memorizados (ejercicios descontextualizados) por lo que resultan poco eficaces para la construcción de un aprendizaje significativo. Asimismo, este tipo de actividad resulta poco motivadora para los alumnos provocando que se cuestionen la utilidad de la geometría y su aplicación en la vida cotidiana.

Capítulo 5

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

El objetivo de este capítulo es reflexionar sobre las dificultades y errores previsibles en un proceso de aprendizaje de geometría plana y estudiar su posible origen. Este análisis puede ayudar al desarrollo de metodologías de enseñanza que tengan en cuenta estos obstáculos para evitarlos, minimizarlos o utilizarlos como un elemento más del proceso de aprendizaje. Los temas 8 y 9 del cuadernillo no han sido objeto de análisis ya que, por falta de tiempo, no se han trabajado con los estudiantes durante el periodo de prácticas.

5.1. Dificultades

El aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos y estas pueden ser de origen didáctico (asociadas al método de enseñanza), epistemológico (intrínsecamente relacionadas con el propio concepto matemático) o cognitivo (ligadas a las características de desarrollo del alumno). Tras analizar el contenido de geometría presente en el cuadernillo, se han previsto las dificultades que pueden aparecer durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de este tema.

Así pues, se espera que los alumnos muestren confusión a la hora de identificar elementos o figuras geométricas representadas en una posición diferente a la habitual. Por ejemplo, en el tema de rectas es muy probable que los alumnos cometan errores al identificar rectas perpendiculares si estas no se presentan en forma de cruz, es decir, una recta en posición vertical y la otra en horizontal. En el tema de ángulos, reconocer ángulos llanos representados con distinta orientación que la horizontal puede resultarles complicado al igual que clasificar triángulos, cuando estos se muestran en una posición diferente a la usual, en particular si se trata de triángulos rectángulos.

Asimismo, se prevén dificultades en el trazado de las rectas notables de un triángulo, en particular de las alturas, esperando que los alumnos dibujen solo una de ellas, generalmente la correspondiente al lado horizontal del triángulo. Este obstáculo puede darse también en el trazado de las mediatrices y medianas. El trazado de las alturas de un triángulo puede resultar más complejo en triángulos rectángulos y obtusángulos que en triángulos acutángulos.

Además, es muy probable que los estudiantes presenten dificultades para clasificar polígonos y cuadriláteros así como para diferenciar polígonos regulares e irregulares.

También, es muy probable que a los alumnos les resulte complicado resolver problemas contextualizados en los que tienen que descontextualizar el enunciado, ya que no es un tipo de actividad de aplicación directa de los conceptos estudiados.

Por último, se prevé que los alumnos no usen correctamente las herramientas de dibujo. El manejo de las reglas para trazar rectas paralelas y perpendiculares puede ser una tarea compleja al igual que el empleo del transportador de ángulos para realizar mediciones o dibujar ángulos. Del mismo modo, el uso del compás puede ser un obstáculo a la hora de trazar mediatrices de segmentos o bisectrices de ángulos así como al construir triángulos, trazar sus rectas notables o dibujar polígonos.

5.2. Errores y su posible origen

Para analizar las posibles causas que originan los errores antes descritos se ha tenido en cuenta el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, que plantea la existencia de cinco niveles en la evolución del proceso de construcción del pensamiento geométrico. Estos niveles van desde el puramente visual, propio de los niños de primeros cursos de primaria, hasta el pensamiento lógico formal desarrollado por los matemáticos.

Así pues, como nos encontramos con alumnos de primer curso de educación secundaria, hay que tener en cuenta que el alumno comienza a construir la imagen mental de un concepto de una manera global, a partir de ejemplos concretos, por su aspecto físico sin realizar un análisis matemático de los elementos o analizar las propiedades, utilizando habilidades básicamente visuales. Debido a este proceso de aprendizaje, los ejemplos presentados a los alumnos en el momento del estudio de conceptos geométricos juegan un papel fundamental, siendo de mayor importancia que las definiciones verbales dadas.

Por tanto, el uso del cuadernillo como único material empleado en el aula no contribuye favorablemente al aprendizaje de geometría ya que, como la mayoría de los libros, presenta un único dibujo para cada concepto definido provocando que los alumnos construyan unos esquemas conceptuales estándar sobre estas figuras y no las reconozcan si se las presentan en una posición diferente.

Así, por ejemplo, si todos los cuadrados que se presentan a los alumnos tienen un lado horizontal sobre el que se apoyan, muchos de los estudiantes incluirán este atributo en su imagen conceptual y pensarán que debe cumplirse para que esa figura sea un cuadrado. Esta es la principal causa de la mayor parte de los errores cometidos en geometría. En el tema 5: *Triángulos* y en el tema 7: *Cuadriláteros* del cuadernillo se enseña la clasificación de estas figuras presentando un único dibujo para cada tipo:

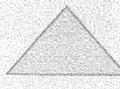
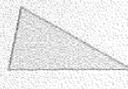
Según sus lados , los triángulos pueden ser:			Según sus ángulos , los triángulos pueden ser:		
Equilátero	Isósceles	Escaleno	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
					
Tres lados iguales	Dos lados iguales	Tres lados distintos	Tres ángulos agudos	Un ángulo recto	Un ángulo obtuso

Figura 8. Explicación teórica tema 5: Triángulos

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1º E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

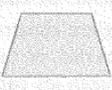
Clasificación de los cuadriláteros según el paralelismo de sus lados					
Paralelogramos: lados opuestos paralelos				No paralelogramos	
Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide	Trapezio	Trapezoide
					
Lados y ángulos iguales	Ángulos iguales	Lados iguales y ángulos iguales dos a dos	Lados y ángulos iguales dos a dos	Un par de lados paralelos	Ningún lado paralelo

Figura 9. Explicación teórica tema 7: Cuadriláteros

Los alumnos interiorizan estas representaciones gráficas y, al presentarles la misma figura pero en otra posición, cometen errores al clasificarla:

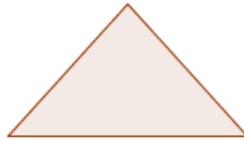


Figura 10. Triángulo rectángulo clasificado como triángulo acutángulo

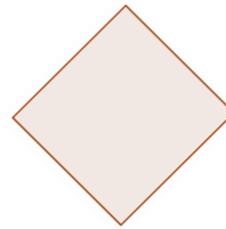


Figura 11. Cuadrado clasificado como rombo

La misma causa provoca el error manifestado en el tema 1: *Rectas en el plano* donde los alumnos estudian las rectas paralelas, secantes y perpendiculares identificándolas únicamente con estas representaciones:

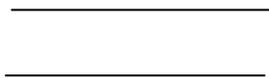


Figura 12. Rectas paralelas

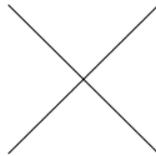


Figura 13. Rectas secantes

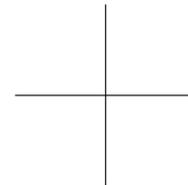
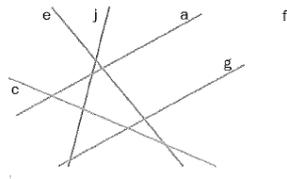


Figura 14. Rectas perpendiculares

Además, los alumnos no identifican el punto de corte de dos rectas cuando para hallarlo es necesario prolongar alguna de ellas. Este error se ve agravado por el ejercicio resuelto que presenta el tema de rectas en el plano donde en el apartado c indica, erróneamente, que las rectas c y f no son secantes:

1 Observa las rectas del dibujo y contesta a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cómo son las rectas a y g?
 b) ¿Y las rectas e y j?
 c) ¿Con cuántas rectas se corta la recta c?

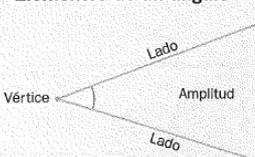


a) Las rectas a y g no se cortan por tanto son
 b) Las rectas e y j se cortan en un punto por tanto son
 c) La recta c

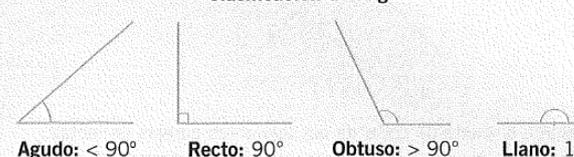
Figura 15. Ejercicio resuelto en el tema Rectas en el plano

Igualmente, en el tema 2: *Ángulos en el plano* se presentan los tipos de ángulos con un lado horizontal paralelo al borde inferior del cuadernillo lo que provoca que los alumnos incluyan en su esquema conceptual de ángulo dicho atributo. De esta forma consideran que siempre deben dibujarlos así y tienen dificultades en identificarlos y medirlos cuando se presentan con otra orientación.

Elementos de un ángulo



Clasificación de ángulos



Agudo: $< 90^\circ$ Recto: 90° Obtuso: $> 90^\circ$ Llano: 180°

Figura 16. Explicación teórica tema 2: *Ángulos en el plano*

Esta causa provoca que al plantear problemas en los que hay que identificar ángulos en diferentes posiciones, los alumnos presenten muchas dificultades para resolverlos ya que no reconocen ángulos llanos dados en otras orientaciones lo cual es esencial para la resolución de ejercicios de este tipo:

21 En el siguiente cuadrado se han representado los límites de cinco fincas rurales. Se quieren medir los ángulos que forman entre sí, pero solo los propietarios de la finca 1 y la finca 5 han permitido el acceso. Estas son las mediciones de dichos ángulos: 2 ángulos rectos, uno de 60° y el otro de 120° . ¿Podrías completar con esos datos los ángulos que faltan?

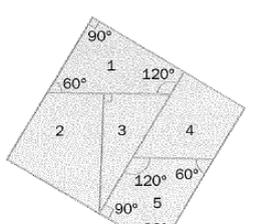


Figura 17. Ejercicio tipo que presenta dificultad para el cálculo de ángulos

Este error se traslada al tema de polígonos donde los alumnos presentan dificultad para clasificarlos según sus ángulos ya que para ello es necesario identificar ángulos mayores y menores de 180° . Al no estar representados de la forma habitual los alumnos tienen problemas y necesitan el uso del transportador de ángulos para su clasificación.

En el estudio de las bisectrices, el mismo motivo origina problemas a la hora de trazar bisectrices de ángulos mayores que 180° ya que en los ejemplos y actividades presentados en el cuadernillo siempre se traza la bisectriz de ángulos menores que 180° .

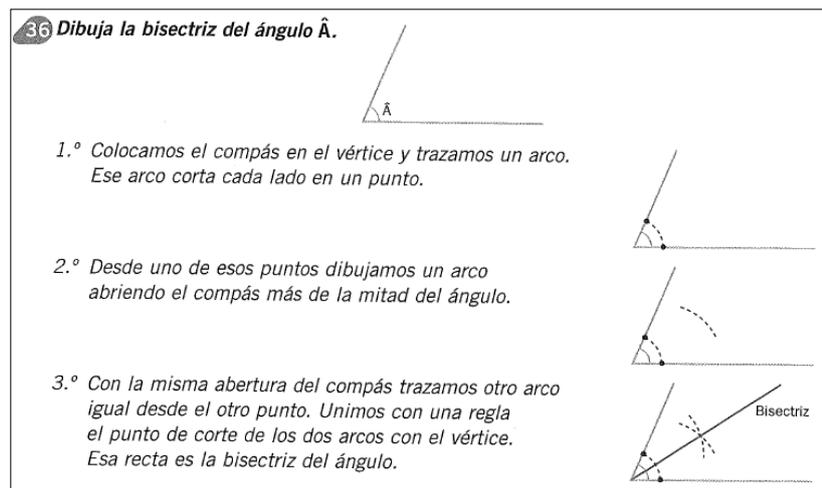
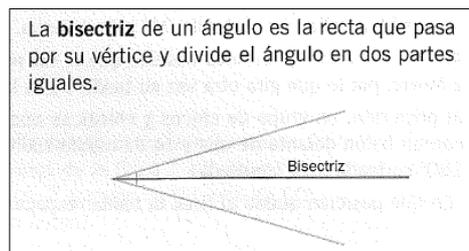


Figura 18. Explicación teórica Bisectriz

Los alumnos han interiorizado este proceso de construcción y al presentarles una variación en el ángulo manifiestan dudas de cómo realizarlo. En el siguiente ejercicio los alumnos podrían trazar sin dificultad la bisectriz de todos los ángulos excepto del ángulo del apartado c:

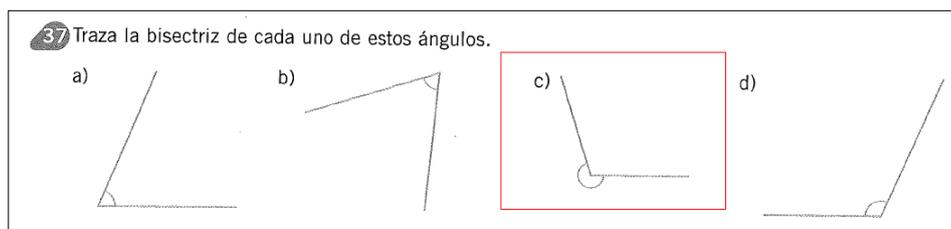


Figura 19. Ejercicio tipo sobre bisectrices del cuadernillo

Respecto a la definición de bisectriz cabe destacar el error que presenta el libro al definirla como recta que divide al ángulo en dos partes iguales en vez de cómo semirrecta que divide al ángulo en dos partes iguales.

El tema 6: *Rectas notables de un triángulo* es un tema conflictivo ya que su estudio presenta diversas dificultades en los alumnos. Estos no identifican las tres alturas de un triángulo (o las tres medianas o mediatrices), dibujando una sola línea, la correspondiente a la base del triángulo que, generalmente, es paralela al borde del papel.

La explicación teórica sobre este tema que incluye el cuadernillo es tan escasa que puede llevar a esta confusión:

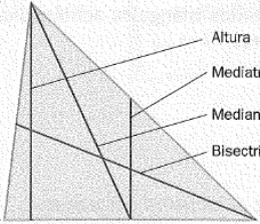
<p>Mediatriz: recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio.</p> <p>Bisectriz: recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.</p> <p>Altura: recta perpendicular a un lado del triángulo que pasa por el vértice opuesto.</p> <p>Mediana: recta que pasa por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto.</p>	
--	--

Figura 20. Explicación teórica Rectas notables de un triángulo

Además, los alumnos tienen la concepción de que las rectas notables del triángulo se sitúan siempre dentro de este ya que la mayor parte de los ejemplos las muestran así.

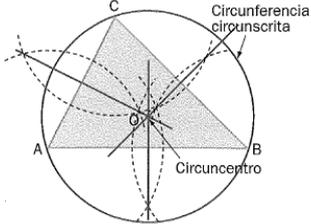
<p>66 Dibuja las mediatrices del triángulo del dibujo y señala el circuncentro. Dibuja además la circunferencia circunscrita.</p>	<p>Circuncentro es el punto de corte de las tres mediatrices.</p> <p>La circunferencia circunscrita tiene por centro el circuncentro y pasa por los tres vértices del triángulo.</p>
	<ol style="list-style-type: none"> 1.º Trazamos las mediatrices de los lados AB, AC y BC. 2.º El punto de corte de las tres mediatrices será el circuncentro, O. 3.º Con centro en O y radio OA, trazamos la circunferencia circunscrita.

Figura 21. Explicación teórica Mediatrices de un triángulo

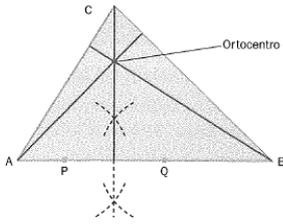
<p>71 Dibuja las alturas del triángulo y señala el ortocentro.</p>	<p>Ortocentro es el punto de corte de las tres alturas de un triángulo.</p>
	<ol style="list-style-type: none"> 1.º Para trazar la altura desde el vértice C, trazamos con centro en C un arco que corte al lado AB en dos puntos P y Q. 2.º Con centros en P y Q, trazamos dos arcos de igual radio hasta que se corten en otros dos puntos por los que se traza la perpendicular. 3.º Unimos la perpendicular trazada con el vértice C y obtenemos la altura. 4.º Siguiendo el mismo procedimiento trazamos las alturas desde A y desde B. 5.º El punto de corte de las tres alturas es el ortocentro.

Figura 22. Explicación teórica Alturas de un triángulo

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1° E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

El siguiente ejercicio puede generar dificultad para identificar las rectas notables de un triángulo ya que la presencia de demasiadas rectas lo vuelve complejo.

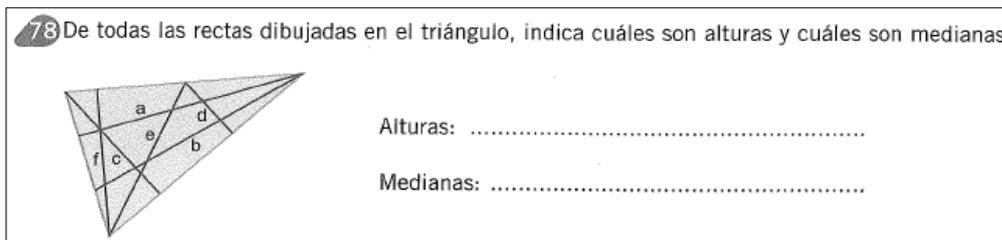


Figura 23. Ejercicio tipo Rectas notables de un triángulo

Así pues, el uso de diversos materiales que presenten variados ejemplos y contraejemplos de los conceptos definidos sería la solución para evitar este tipo de error didáctico.

Otro de los errores indicados en el apartado 5.1, que se manifiesta en casi todos los temas del cuadernillo, es la dificultad para manejar herramientas de dibujo (reglas, compás y transportador de ángulos) para realizar construcciones geométricas.

Este problema puede ser causado por la falta de familiarización de los alumnos con este material y la falta de práctica en su uso. Tanto en el tercer ciclo de primaria como en secundaria los alumnos estudian la asignatura de educación plástica y visual, que está más centrada en el dibujo artístico que en el técnico. Es en bachiller donde los alumnos estudian la asignatura de dibujo técnico y por tanto, utilizan frecuentemente estas herramientas y su uso se vuelve más cotidiano.

Por tanto, se debe insistir en el manejo de estos materiales durante el aprendizaje de geometría plana aunque, en 1° de E.S.O., la exactitud en las representaciones tiene una menor importancia que la comprensión del concepto.

Este motivo es la principal causa de las dificultades manifestadas en el desarrollo del tema 10. Construcción de polígonos regulares. A pesar de que a los alumnos les resulta sencilla la comprensión de los pasos a seguir para la construcción de polígonos, no tienen un buen manejo del compás y la regla por lo que cometen muchos errores de precisión en el trazo de las figuras.

Por último, el origen de la dificultad para descontextualizar el enunciado de un problema contextualizado puede ser la metodología de enseñanza. Dependiendo de las relaciones entre la geometría y las situaciones de la vida cotidiana que se muestren al explicar los conceptos, los alumnos tendrán mayor o menor dificultad en comprender los enunciados de problemas e identificar en estos conceptos geométricos para su resolución.

Por tanto, es importante realizar actividades variadas, desde ejercicios descontextualizados que sirvan para la interiorización de los conceptos y su aplicación, hasta problemas contextualizados donde se presenten circunstancias reales que los alumnos tengan que relacionar con los conceptos geométricos aprendidos y descubrir su aplicación y su uso. Así pues, la geometría en secundaria no debe presentarse como algo intra matemático cuyo uso se reduce únicamente al aula sino como algo de gran utilidad en diversos contextos.

Capítulo 6

El proceso de estudio

Tras realizar el análisis del contenido del libro de texto así como estudiar las posibles dificultades y errores sobre geometría y el origen de los mismos se ha planificado cómo impartir este contenido, distribuyendo los tiempos y organizando el tipo de actividad a realizar.

Así pues, durante el periodo de prácticas, se ha impartido clase de geometría plana a un grupo de estudiantes de 1º de E.S.O. Para ello, se ha utilizado el cuaderno de matemáticas número cinco de la editorial SM, analizado en el capítulo 4.

La práctica se ha desarrollado durante cuatro semanas, contando con un total de dieciséis sesiones de cincuenta minutos de duración cada una.

Para organizar los tiempos a emplear en cada tema, se ha elaborado un plan en el que se han distribuido los contenidos del cuadernillo a lo largo de las sesiones, planificando los ejercicios y tareas a realizar. Además, se ha decidido realizar la evaluación de los alumnos mediante tres exámenes, uno con contenidos de los tres primeros temas, otro sobre los temas 4, 5, 6 y 7 y el último con contenidos de los temas 8, 9 y 10.

Debido al ritmo de aprendizaje de los alumnos la planificación inicial se ha modificado, faltando tiempo para explicar los temas 8 y 9 y para realizar el último examen.

6.1. Distribución del tiempo de la clase

Como se ha indicado anteriormente, las sesiones tienen una duración de 50 minutos. Según el tipo de actividad, cada sesión se ha estructurado en tres partes diferenciadas con una duración aproximada de:

- 10-15 minutos: explicación de conceptos teóricos
- 25-30 minutos: trabajo individual de los alumnos (resolución de actividades)
- 15-20 minutos: corrección de ejercicios y propuesta de actividades de tarea

Los temas del cuadernillo se han trabajado a lo largo de las sesiones distribuyéndose del siguiente modo:

Sesión	Temas estudiados	Material utilizado
1	1. Rectas en el plano 2. Ángulos en el plano	Cuaderno matemáticas SM
2	2. Ángulos en el plano	Cuaderno matemáticas SM
3	3. Mediatriz y bisectriz	Cuaderno matemáticas SM
4	3. Mediatriz y bisectriz	Cuaderno matemáticas SM Hoja apuntes 1
5	Examen temas 1,2 y 3	
6	4. Polígonos 5. Triángulos	Cuaderno matemáticas SM Hoja actividades 1
7	4. Polígonos 5. Triángulos	Cuaderno matemáticas SM
8	4. Triángulos 10. Construcción de polígonos regulares	Cuaderno matemáticas SM
9	10. Construcción de polígonos regulares	Cuaderno matemáticas SM Hoja apuntes 2
10	6. Rectas notables de un triángulo	Cuaderno matemáticas SM Geogebra Hoja actividades 2 Hoja actividades 3
11	6. Rectas notables de un triángulo	Cuaderno matemáticas SM Hoja apuntes 3 Hoja de repaso para examen
12	Examen temas 4, 5, 6 y 10	
13	7. Cuadriláteros	Cuaderno matemáticas SM Hoja actividades 4
14	Excursión	
15	Fiesta	
16	7. Cuadriláteros	Cuaderno matemáticas SM Hoja actividades 5

Tabla 23. Distribución del tiempo en las sesiones

6.2. Actividades adicionales planificadas

Aparte de las actividades propuestas en el cuadernillo, se han diseñado hojas de actividades para reforzar los conceptos y detectar las dificultades de los alumnos (hojas incluidas en el anexo II). Además, se ha proporcionado a los alumnos hojas de apuntes complementarias a los temas del cuadernillo (hojas incluidas en el anexo III).

En una de las sesiones se ha utilizado el programa Geogebra para el estudio del tema de *Rectas notables de un triángulo*. Este software matemático permite el trazado dinámico de construcciones geométricas por lo que es de gran utilidad frente a la representación estática de figuras geométricas en la pizarra.

Como recurso didáctico introductorio de los temas de polígonos, triángulos y cuadriláteros se ha planificado el uso del Geoplano, ya que su carácter manipulativo ayuda a que los alumnos comprendan con mayor facilidad los conceptos geométricos estudiados. Por falta de tiempo esta actividad no se ha realizado durante el periodo de prácticas.

6.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista

La actividad autónoma que han realizado los alumnos durante las clases y en horario extraescolar como tarea ha consistido en realizar los ejercicios del cuadernillo y de 5 hojas entregadas por el profesor. La finalidad de proponer las hojas de actividades ha sido:

- Hoja 1: Evaluar los conocimientos previos sobre el tema de triángulos y de polígonos.
- Hoja 2 y Hoja 3: Reforzar los contenidos de rectas notables en triángulos. Estas hojas incluyen la representación de rectas notables en todo tipo de triángulos (rectángulos, acutángulos y obtusángulos).
- Hoja de repaso para el examen: Repasar los temas 4, 5, 6 y 10 y dar a conocer el tipo de actividades a proponer en el examen.
- Hoja 4: Reforzar los conocimientos sobre cuadriláteros y analizar las dificultades que presentan los alumnos.
- Hoja 5: Repasar los conceptos dados e identificar si los alumnos cometen los errores más comunes de estos temas.

Así pues, los ejercicios realizados, corregidos en clase y los propuestos como tarea se han distribuido a lo largo de las sesiones del siguiente modo:

Sesión	Ejercicios realizados en clase	Ejercicios corregidos en clase	Ejercicios propuestos de tarea
1	1 al 6	1 al 6	7 al 13
2	14 al 24	7 al 24	-
3	25 al 43	7 al 24	25 al 43
4	-	25 al 43	-
5	Examen temas 1,2 y 3		
6	Hoja de actividades 1	Hoja de actividades 1	43 al 49
7	50 al 54	43 al 54	55 al 65
8	-	55 al 65	112 al 125
9	-	112-125	66 al 81
10	Hoja de actividades 2	-	Hoja de actividades 3
11	Hoja de actividades 4	66 al 81	-
12	Examen temas 4, 5, 6 y 10		
13	Hoja actividades 5	-	82 al 87
14	Excursión		
15	Fiesta (01 de Mayo)		
16	-	82 al 87	-

Tabla 24. Actividades propuestas en las sesiones

Capítulo 7

Experimentación

Tras analizar los errores que se pueden cometer en el estudio de geometría y las causas de los mismos, se ha estudiado la presencia de éstos durante un proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría plana a grupo de estudiantes de 1º de E.S.O. Para ello, se les ha impartido el tema y han realizado varios cuestionarios (2 exámenes y 5 hojas de actividades propuestas como tarea) para contrastar los comportamientos esperados con los resultados obtenidos.

7.1. Muestra y diseño de la experimentación

La muestra utilizada para el proceso de experimentación ha sido un grupo de estudiantes de 1º de E.S.O. a los que se les ha impartido clase de geometría plana durante las sesiones de prácticas.

Este grupo lo forman 15 alumnos, 4 chicas y 11 chicos, de edades comprendidas entre 12 y 14 años. El colegio en el que estudian no ofrece educación primaria, cada uno de los alumnos ha estudiado el curso anterior en un centro diferente así que los conocimientos previos sobre geometría que poseen los alumnos no son los mismos.

La metodología seguida para el diseño de la experimentación ha sido la ingeniería didáctica que, en términos generales, busca caracterizar a priori una situación y confrontarla con un análisis a posteriori de la realidad observada. El proceso experimental de esta ingeniería consta de cuatro fases:

- Estudio preliminar: Identificar los problemas existentes en el aprendizaje de geometría plana, realizando un análisis epistemológico, didáctico y cognitivo de los mismos.
- Análisis a priori: Establecer hipótesis sobre las causas de estas dificultades.
- Experimentación: Impartir el contenido de geometría y realizar actividades con una muestra concreta de alumnos registrando los resultados producidos.
- Análisis a posteriori: Validar o refutar las hipótesis planteadas en el análisis a priori tras confrontarlas con los datos obtenidos en la fase de experimentación.

Tras haber realizado el análisis a priori, en este capítulo se desarrolla la fase de experimentación y el análisis a posteriori. Las conclusiones de este trabajo se obtienen tras contrastar el análisis a priori con los resultados de la experimentación, realizando una valoración de los mismos teniendo en cuenta las expectativas previas.

7.2. Cuestionario. Comportamientos esperados

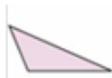
Debido a que el objetivo de la experimentación es recoger datos de una muestra para contrastarlos con las hipótesis planteadas, los cuestionarios propuestos se han elaborado teniendo en cuenta los errores previstos, para comprobar su presencia o no en el grupo. Estos cuestionarios se presentan en forma de exámenes y de hojas de actividades para realizar individualmente como tarea o durante las sesiones.

Debido a que la calificación obtenida en los exámenes influye en la nota de la asignatura de los alumnos, se decide no elaborarlos con el objetivo de detectar los errores previstos sino con el objetivo de comprobar si los alumnos han comprendido el tipo de actividad realizada en clase y han estudiado las nociones dadas. Así pues, las hojas que poseen un mayor interés de análisis son las propuestas como actividades.

En total, se han diseñado 5 hojas de actividades y 2 exámenes que se detallan a continuación:

- Hoja de actividades nº 1: Realizada por los alumnos antes de estudiar los temas de polígonos y triángulos con el objetivo de identificar sus conocimientos previos.

1. Une con flechas:

Equilátero	Tiene tres lados distintos	
Escaleno	Tiene tres lados iguales	
Isósceles	Tiene dos lados iguales	
Acutángulo	Tiene tres ángulos agudos	
Rectángulo	Tiene un ángulo obtuso	
Obtusángulo	Tiene un ángulo recto	

2. Completa la tabla

Nombre del polígono	Número de lados
Cuadrilátero	4
Decágono	
	6
Octógono	
Heptágono	
	3
Pentágono	
Eneágono	

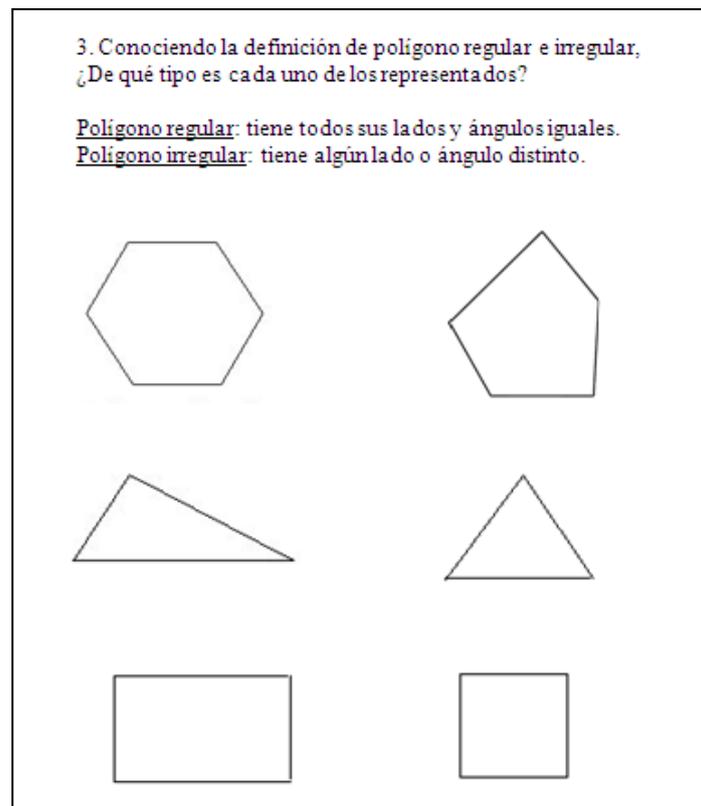


Figura 24. Hoja de actividades n° 1

La primera cuestión consiste en clasificar triángulos, según la medida de sus lados y según sus ángulos. Los alumnos deben relacionar el nombre del triángulo con su definición (propiedad) y con su representación gráfica. Se espera que los alumnos tengan facilidad para vincular la definición con el dibujo pero, que tengan dificultad para relacionar éstas con el nombre del triángulo. Al ser una actividad realizada antes de estudiar estos conceptos, cuyo objetivo es evaluar los conocimientos previos de los alumnos, los triángulos se han representado en su posición más habitual.

La segunda pregunta consiste en completar la tabla con el nombre de un polígono dado el número de lados de éste y viceversa. Es muy probable que los alumnos conozcan el número de lados de un octógono, un heptágono y un decágono, ya que la morfología de estas palabras permite deducir este dato. También se espera que los alumnos conozcan el número de lados de un pentágono debido a que es una figura muy utilizada en cursos anteriores. Por el contrario, se supone que los alumnos van a tener dificultad en conocer el número de lados de un eneágono por ser una palabra poco habitual y por tanto, poco conocida por los alumnos. Respecto al nombre de un polígono, se presume que los alumnos van a tener mayor éxito para conocer el nombre del triángulo frente al del hexágono por ser la primera una figura presente en gran parte de objetos de la vida cotidiana y estudiada como forma básica geométrica desde primeros cursos de primaria.

El tercer ejercicio consiste en clasificar los polígonos dados según sean regulares o irregulares. Se espera que los alumnos no tengan problemas en clasificar estos polígonos ya que se les proporciona la definición de regular e irregular y sólo tienen que comprobar cuál de las dos se cumple midiendo los lados y los ángulos de cada figura.

- Hoja de actividades nº 2: El objetivo de estas actividades es reforzar la práctica en la construcción de rectas notables de todo tipo de triángulos (rectángulos, acutángulos y obtusángulos). Se ha propuesto como tarea después de dedicar una sesión a la explicación de las rectas notables de un triángulo utilizando el programa Geogebra.

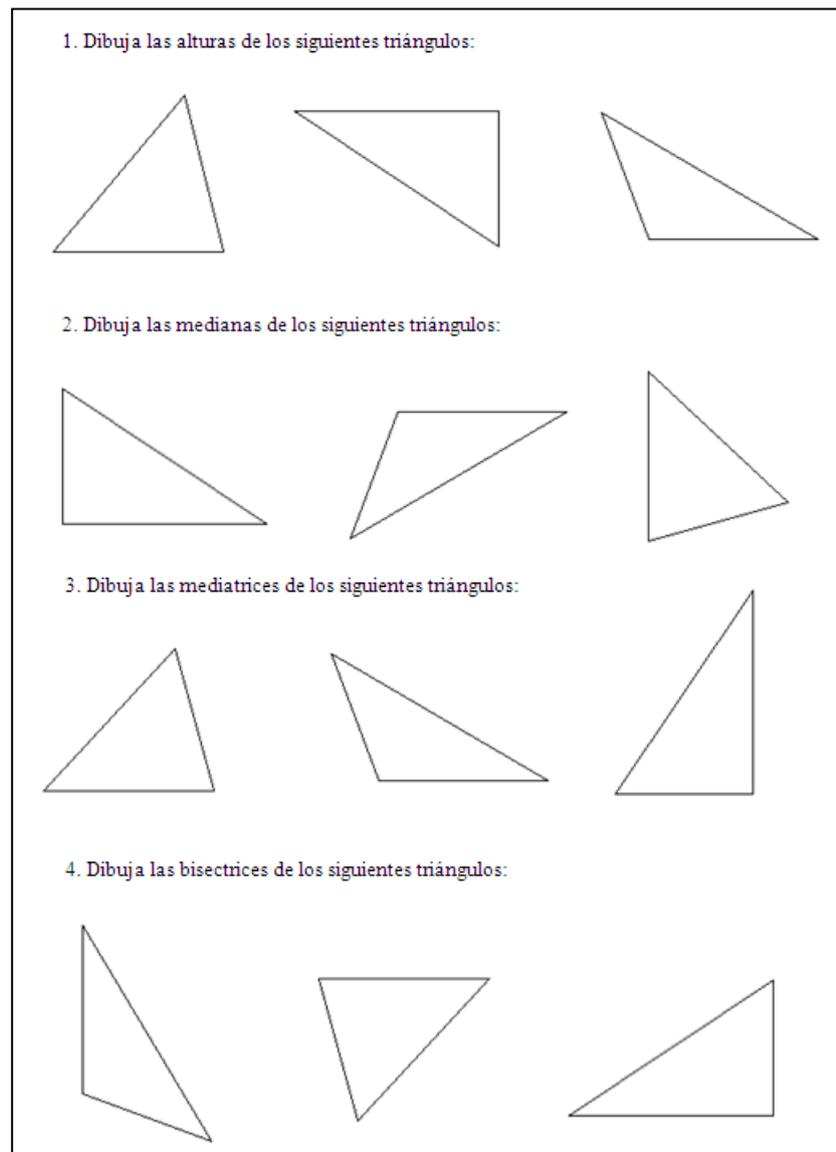


Figura 25. Hoja de actividades nº 2

Los alumnos deben trazar las rectas notables de cada uno de los triángulos dados. Durante el estudio de las rectas notables con el programa Geogebra, se ha hecho hincapié en la situación del ortocentro, circuncentro, incentro y baricentro en cada tipo de triángulo (rectángulo, acutángulo y obtusángulo).

En el primer ejercicio, donde se pide dibujar las alturas de los triángulos, se espera que algunos alumnos sólo dibujen una altura, la correspondiente al lado horizontal del triángulo. Además, se presume que aquellos alumnos que dibujen las tres alturas tengan mayor dificultad en dibujar las del triángulo rectángulo (ya que dos alturas coinciden con los catetos) y las del triángulo obtusángulo (debido a que dos de las alturas son exteriores al triángulo). Las alturas del triángulo acutángulo se suponen más sencillas de trazar.

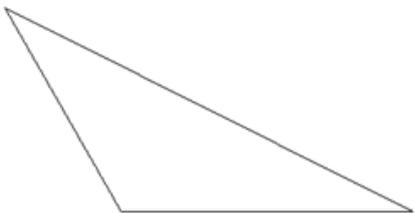
En el ejercicio 2, se espera que la mayoría de los alumnos dibujen las medianas correctamente aunque, es posible que algún alumno confunda las medianas con las mediatrices (debido al parecido entre las palabras) o dibuje únicamente una mediana y no las tres como se pide.

Los ejercicios 3 y 4 consisten en dibujar las mediatrices y bisectrices de los triángulos dados. Al ser conceptos ya vistos en un tema anterior, se espera que los alumnos no tengan problemas en trazarlas, presentándose como un posible error el realizar únicamente una mediatriz y una bisectriz, la del lado horizontal del triángulo y la de un ángulo cualquiera.

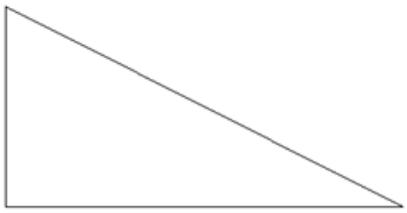
Esta actividad requiere el uso del compás y de la regla por lo que gran parte de los alumnos pueden tener dificultades en el manejo de estas herramientas de dibujo y las construcciones realizadas pueden ser poco precisas.

- Hoja de actividades nº 3: Al igual que la hoja 2, el objetivo es reforzar la práctica en la construcción de las rectas notables de un triángulo. Esta hoja se ha propuesto como tarea después de la sesión con el programa Geogebra.

1. Dibuja las alturas del siguiente triángulo y marca el ortocentro.



2. Dibuja las mediatrices del siguiente triángulo y marca el circuncentro. Dibuja la circunferencia circunscrita al triángulo.



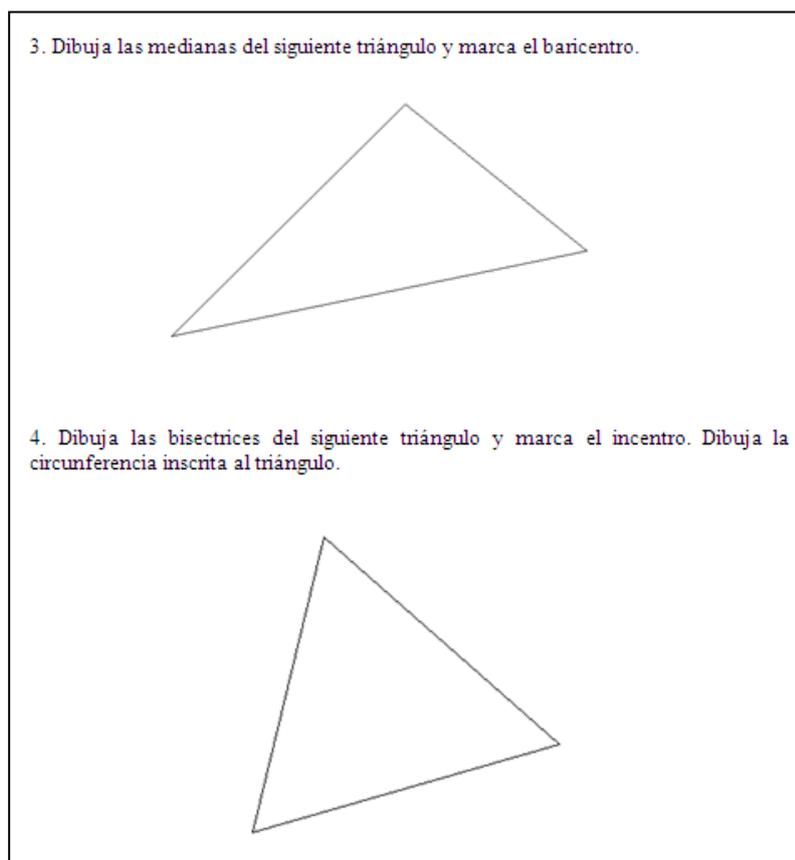


Figura 26. Hoja de actividades nº 3

Al tratarse de la evaluación de los mismos conceptos, los comportamientos esperados en esta actividad son los mismos que los de la actividad anterior. Se ha elegido proponer el dibujo de las alturas en un triángulo obtusángulo para reforzar esta construcción que resulta ser una de las más confusas debido a que dos de las alturas dibujadas son exteriores al triángulo.

Para las mediatrices se ha elegido un triángulo rectángulo ya que el circuncentro se sitúa en el punto medio de la hipotenusa lo cual puede suponer mayor dificultad que si éste se situara en un punto interior al triángulo. En los dos últimos ejercicios se han utilizado triángulos acutángulos sin ninguna finalidad ya que las medianas, al igual las bisectrices, son siempre interiores al triángulo. Se espera que los alumnos no tengan ninguna dificultad en realizar estas construcciones.

Al igual que en la actividad anterior, se prevé que el trazo de las rectas sea poco preciso. Esto puede provocar que las rectas no se corten en un punto y por tanto los alumnos no puedan marcarlo como se pide en las actividades.

- Hoja de actividades nº 4: El objetivo de esta actividad es identificar los errores más habituales que cometen los alumnos en la clasificación de cuadriláteros. Se ha propuesto para realizarla después de la sesión de explicación del tema 7, donde se ha prevenido a los alumnos de los fallos que se suelen cometer y, para evitarlos, se les ha explicado el tema representando en la pizarra diversos cuadriláteros, dibujados en diferentes posiciones.

1. Completa la tabla marcando con una X si es paralelogramo o no paralelogramo y escribiendo el nombre del cuadrilátero:

Figura	Paralelogramo	No Paralelogramo	Nombre
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
I			

Figura 27. Hoja de actividades nº 4

Se prevé que algunos alumnos cometan errores al clasificar la figura A y la figura F debido a que la posición en la que están representadas no es la habitual. Así, se espera que los alumnos clasifiquen la figura A como un rombo y la F como un romboide.

Igualmente, debido a la posición en la que se han dibujado, la clasificación del trapecio de la figura D y del trapecio de la figura H puede resultar difícil para los alumnos. Además, se espera que los alumnos tengan problemas para identificar el

trapezoide de la figura I e incluso crean que no es un cuadrilátero, ya que se trata de una representación poco común.

En consecuencia, de esta actividad se espera comprobar que los alumnos no emplean las definiciones para la clasificación de los cuadriláteros sino que emplean habilidades básicamente visuales, como se ha argumentado en el capítulo 5.

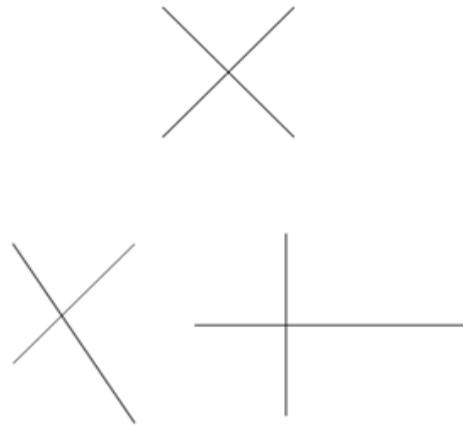
- Hoja de actividades nº 5: El objetivo de esta actividad es identificar la presencia de los errores más habituales que se cometen en geometría. Se ha propuesto el último día de clase como repaso de lo estudiado durante las sesiones de prácticas.

1. Dibuja dos rectas paralelas.

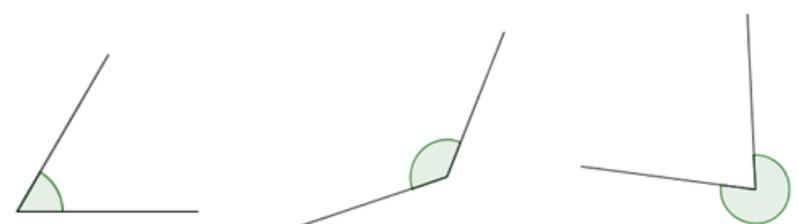
2. Dibuja dos rectas perpendiculares.

3. Dibuja una semirrecta.

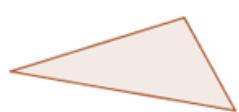
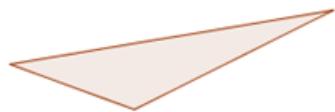
4. De las siguientes rectas, ¿cuáles son secantes y cuáles perpendiculares?



5. Dibuja la bisectriz de los siguientes ángulos



6. Rodea la opción correcta en cada caso:

		
Obtusángulo Acutángulo Rectángulo	Obtusángulo Acutángulo Rectángulo	Obtusángulo Acutángulo Rectángulo

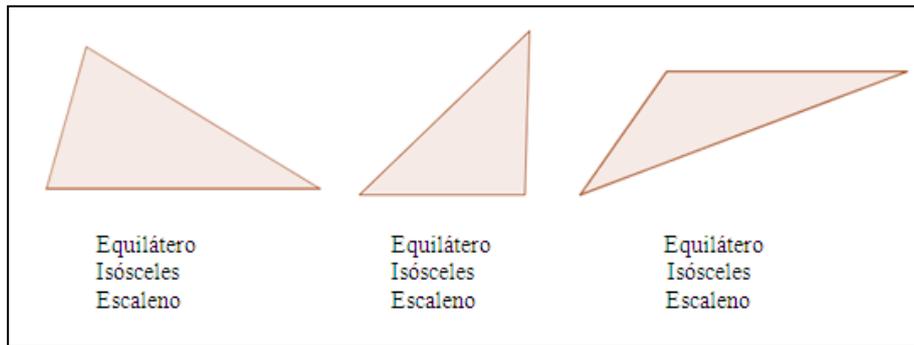


Figura 28. Hoja de actividades nº 5

Mediante los tres primeros ejercicios se pretende analizar el tipo de representaciones que realizan los alumnos al dibujar rectas paralelas, rectas perpendiculares y semirrectas para comprobar si son las mismas que se presentan en los libros de texto.

Con el ejercicio 4 se pretende evaluar si los alumnos son capaces de identificar rectas perpendiculares cuando éstas se presentan en posición diferente a la habitual. Igualmente, el ejercicio 6 pretende comprobar si los alumnos son capaces de clasificar triángulos cuando éstos se presentan en posiciones diferentes a las utilizadas comúnmente.

El ejercicio 5, se ha realizado para detectar si los alumnos tienen dificultad para dibujar la bisectriz de un ángulo cóncavo ya que, habitualmente en los libros de texto se traza la bisectriz de ángulos convexos.

- Examen 1: Primer examen realizado tras el estudio de los tres primeros temas del cuadernillo con el objetivo de evaluar los conocimientos adquiridos por los alumnos sobre estas nociones.

Teoría (3 puntos)

1. Completa estas frases (1 punto)

- a) Un ángulo de 37° es un ángulo.....
- b) Un ángulo de 135° es un ángulo.....
- c) Un ángulo llano tiene una amplitud de..... grados
- d) Dos ángulos complementarios suman..... grados
- e) Dos ángulos suplementarios suman..... grados

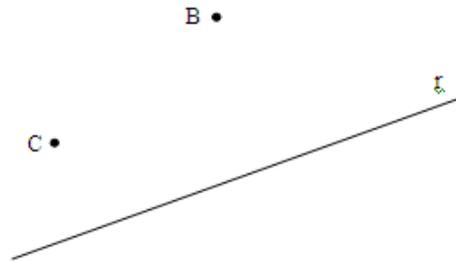
2. a) ¿Cómo se llama la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio? (0,5 puntos)

b) ¿Cómo se llaman dos rectas secantes que al cortarse forman cuatro ángulos rectos? (0,5 puntos)

3. Define bisectriz de un ángulo (1 punto)

Ejercicios (5 puntos)

4. a) Dibuja una recta que pase por el punto B y sea paralela a la recta r. **(0,5 puntos)**
 b) Dibuja otra recta que sea perpendicular a r y pase por el punto C. **(0,5 puntos)**
 c) ¿Cómo son las dos rectas que has dibujado entre sí? **(0,5 puntos)**
 d) Marca el punto de corte de las dos rectas que has dibujado. **(0,5 puntos)**



5. a) Traza, con el transportador un ángulo de 30° . Construye su ángulo complementario y calcula su medida. **(0,5 puntos)**
 b) Traza con el transportador un ángulo de 165° . Construye su ángulo suplementario y calcula su medida. **(0,5 puntos)**
6. Realiza las siguientes operaciones: **(1 punto)**
- a) $74^\circ 12' - 28^\circ 20' =$
 b) $7^\circ 42' + 12^\circ 30' =$

7. Completa la tabla: **(1 punto)**

Grados °	Minutos ´	Segundos ´´
8 °		
	780 ´	

Problemas (2 puntos)

8. En un ángulo de 45° se traza la bisectriz. ¿Cuántos ángulos aparecen? ¿Cuánto mide cada uno? **(1 punto)**
9. Los pueblos A y B están a una distancia de 18 km. Van a construir unas vías de tren. Nadie quiere que pase por su pueblo así que deciden que pase justo por el medio de los dos y en perpendicular. Haz un dibujo esquemático del problema y calcula la distancia a la que estarán las vías del tren de cada pueblo. **(1 punto)**

Figura 29. Examen nº 1

Como se ha indicado anteriormente, las calificaciones obtenidas en los exámenes son parte de la nota de la asignatura de los alumnos por lo que estos ejercicios no se han propuesto con el fin de detectar errores sino que se han diseñado para evaluar los conocimientos que los alumnos deben adquirir sobre los temas estudiados.

La parte teórica del examen pretende comprobar si los alumnos han estudiado las definiciones de los conceptos trabajados en clase. No se espera detectar ninguna dificultad, únicamente la falta de tiempo dedicado al estudio.

El objetivo de los ejercicios propuestos es evaluar la capacidad de aplicación de las nociones estudiadas en actividades concretas. Se espera que los alumnos no tengan dificultad para dibujar las rectas que se piden en el ejercicio 4. Es probable que el trazado de estas sea poco preciso lo cual genere dudas para identificar la perpendicularidad entre las rectas dibujadas. Igualmente, se espera que los alumnos resuelvan el ejercicio 5 correctamente pudiendo existir alguna complicación referente al uso del transportador de ángulos o confundiendo el concepto de ángulos complementarios y suplementarios.

En el ejercicio 6, los alumnos pueden olvidar realizar las transformaciones necesarias para calcular la resta de ángulos dando un resultado erróneo al igual que si olvidan simplificar el resultado obtenido. Para resolver el ejercicio 7, los alumnos deben conocer las equivalencias ente grados minutos y segundos y aplicar los conocimientos para multiplicar o dividir por lo que se espera que la gran mayoría resuelva este ejercicio con éxito.

Finalmente, los problemas propuestos de han elaborado con la finalidad de evaluar la capacidad de comprensión y aplicación de las nociones estudiadas. Se prevé que los alumnos tengan mayor dificultad a la hora de resolver el problema 9 ya que deben descontextualizar el enunciado y realizar un dibujo esquemático para poder relacionarlo con la noción de mediatriz y así calcular la distancia pedida.

Examen 2: Segundo examen realizado tras el estudio de los temas 4, 5, 6 y 10 del cuadernillo con el objetivo de evaluar los conocimientos adquiridos por los alumnos.

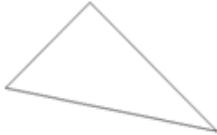
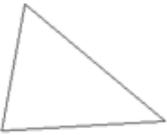
Teoría (3 puntos)

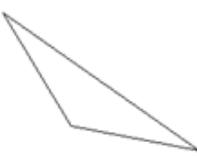
1. Completa estas frases: (1 punto)

- a) El punto de corte de las alturas de un triángulo se denomina.....
- b) El baricentro es el punto donde se cortan las..... de un triángulo.
- c) El punto de corte de las tres bisectrices de un triángulo se denomina.....
- d) El punto de corte de las tres mediatrices de un triángulo se denomina.....

2. Define circunferencia circunscrita (1 punto)

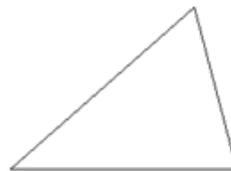
3. Completa las tablas: (1 punto)

Clasificación de los triángulos según sus ángulos			
			

Clasificación de los triángulos según sus lados			
			

Ejercicios (5 puntos)

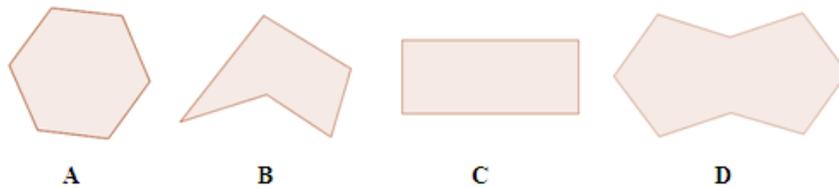
4. Utilizando la regla, dibuja las alturas de este triángulo e indica el punto de corte. (1 punto)



5. Construye triángulos con los siguientes datos: (2 puntos)

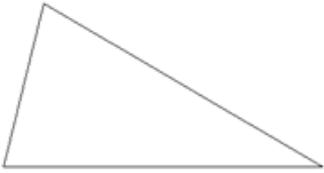
- a) Conociendo los 3 lados: 4, 5 y 6 cm
- b) Conociendo 1 lado y 2 ángulos: 4 cm, 45° y 30°

6. Completa la tabla con la información sobre los polígonos: (1 punto)



Polígono	Número de lados	Suma de los ángulos	Nombre
A			
B			
C			
D			

7. Dibuja las mediatrices de este triángulo y comprueba que se cortan en el circuncentro. Traza desde ese punto la circunferencia circunscrita. Utiliza regla y compás. (1 punto)



Problemas (2 puntos)

8. Marta ha medido los ángulos del salón de su casa que tiene forma pentagonal y ha obtenido las siguientes medidas: 60° , 210° , 122° , 98° . ¿Cuánto mide el quinto ángulo? (1 punto)

9. Luis quiere construir una finca con forma de triángulo regular de 24 metros de lado. ¿Cuántos metros de valla necesitará comprar para construirla? A última hora cambia de opinión y decide construir la finca con el material ya comprado pero con forma de hexágono regular ¿Cuánto medirá el lado de esta finca? (1 punto)

Figura 30. Examen n° 2

Al igual que en el examen anterior, la primera parte se ha propuesto para comprobar el estudio de los conceptos teóricos. El ejercicio 3 va a ser utilizado para comprobar si los alumnos realizan un análisis matemático para clasificar las figuras o utilizan habilidades básicamente visuales.

Los ejercicios 4 y 7 requieren el dibujo de las rectas notables de un triángulo. Para que los alumnos tengan más probabilidades de realizar esta construcción con éxito, se han dibujado triángulos acutángulos que, según se ha dicho anteriormente, generan menor dificultad para dibujar tanto las alturas como las mediatrices.

El ejercicio 5 pretende evaluar el manejo de las herramientas de dibujo para construir triángulos. Se espera que los alumnos realicen las construcciones sin dificultad ya que se han realizado varias prácticas de este tipo durante las sesiones de clase.

Para contestar al ejercicio 6, los alumnos deben recordar la fórmula utilizada para el cálculo de la suma de los ángulos de un polígono. Además, el nombre del polígono debe recoger su clasificación según el número de lados, según sea regular o irregular y según sus ángulos. Se espera que los alumnos cometan errores en este último apartado.

La última parte del examen presenta problemas contextualizados, lo cual supone una dificultad a la hora de resolverlos. Los alumnos deben comprender el enunciado para relacionarlo con las nociones geométricas estudiadas y aplicar las necesarias para su resolución.

7.3. Resultados

Una vez los alumnos han realizado las hojas de actividades y los exámenes, se han obtenido los resultados que van a servir para identificar cuáles de las dificultades previstas en el trabajo se manifiestan en este grupo de estudiantes.

- Resultados obtenidos de la hoja de actividades nº 1:

En el primer ejercicio, ocho de trece alumnos relacionan correctamente la definición con el dibujo dado mientras que los que sólo cuatro de trece relacionan correctamente la definición con el nombre del triángulo. Los cuatro alumnos que efectúan bien esta última relación también han respondido correctamente a la otra.

NOMBRE:
APELLIDOS:

1. Une con flechas:

Equilátero — Tiene tres lados distintos

Escaleno — Tiene tres lados iguales

Isósceles — Tiene dos lados iguales

Acutángulo — Tiene tres ángulos agudos

Rectángulo — Tiene un ángulo obtuso

Obtusángulo — Tiene un ángulo recto

2. Completa la tabla

Nombre del polígono	Número de lados
Cuadrilátero	4
Decágono	10
Hexágono	6
Octógono	8
Heptágono	7
Triángulo	3
Pentágono	5
Eneágono	11

Figura 31. Ejercicio 1 y 2 hoja de respuestas nº 1 de uno de los alumnos

En el segundo ejercicio, ocho de trece alumnos responden correctamente al número de lados de un pentágono, heptágono, octógono, eneágono y decágono. Cabe destacar que casi la mitad de los alumnos (seis de trece) cometen el error de identificar un eneágono con un polígono de once lados.

La mayor parte los alumnos, diez de trece, indica correctamente el nombre del triángulo y siete de trece nombra correctamente el hexágono. Todos los alumnos que conocen el nombre del hexágono nombran también correctamente el triángulo.

En la tercera pregunta, todos los alumnos clasifican correctamente el hexágono como regular y el pentágono como irregular. Tres de trece catalogan erróneamente el primer triángulo como polígono regular y estos tres estudiantes junto con otros dos clasifican el segundo triángulo como irregular. Es destacable que la mayoría de los alumnos, once de trece, clasifican el rectángulo como un polígono regular y todos los alumnos responden correctamente el cuadrado. Las únicas dos personas que clasifican el rectángulo como polígono regular, realizan la clasificación de todas las figuras correctamente.

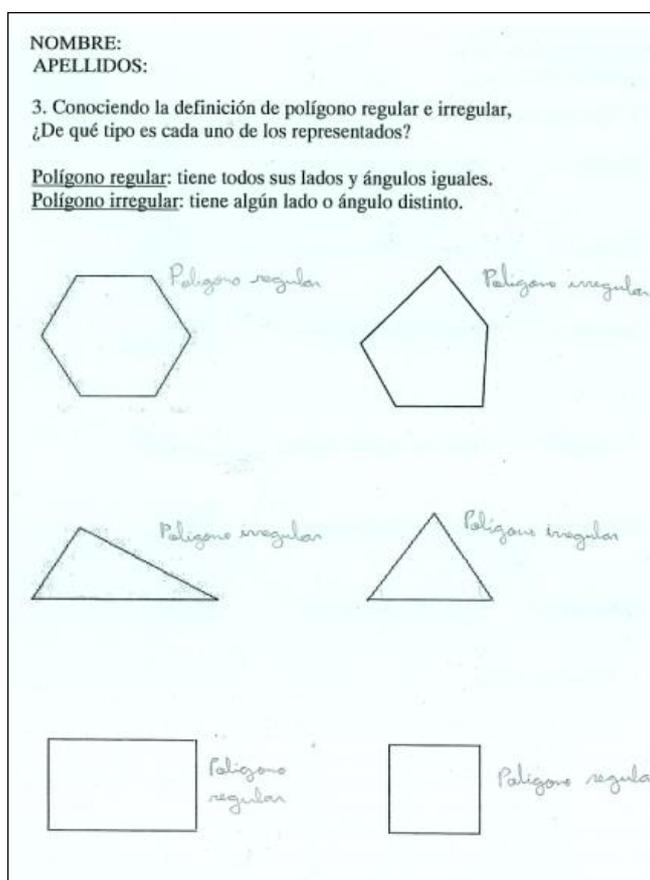


Figura 32. Ejercicio 3 hoja de respuestas nº 1 de uno de los alumnos

- Resultados obtenidos de las hojas de actividades nº 2 y nº 3:

En el ejercicio 1 de la hoja 2, nueve de doce alumnos trazan sólo una de las alturas del triángulo. Los tres alumnos que trazan las tres alturas, dibujan correctamente las del triángulo acutángulo pero no las de los triángulos rectángulo y obtusángulo.

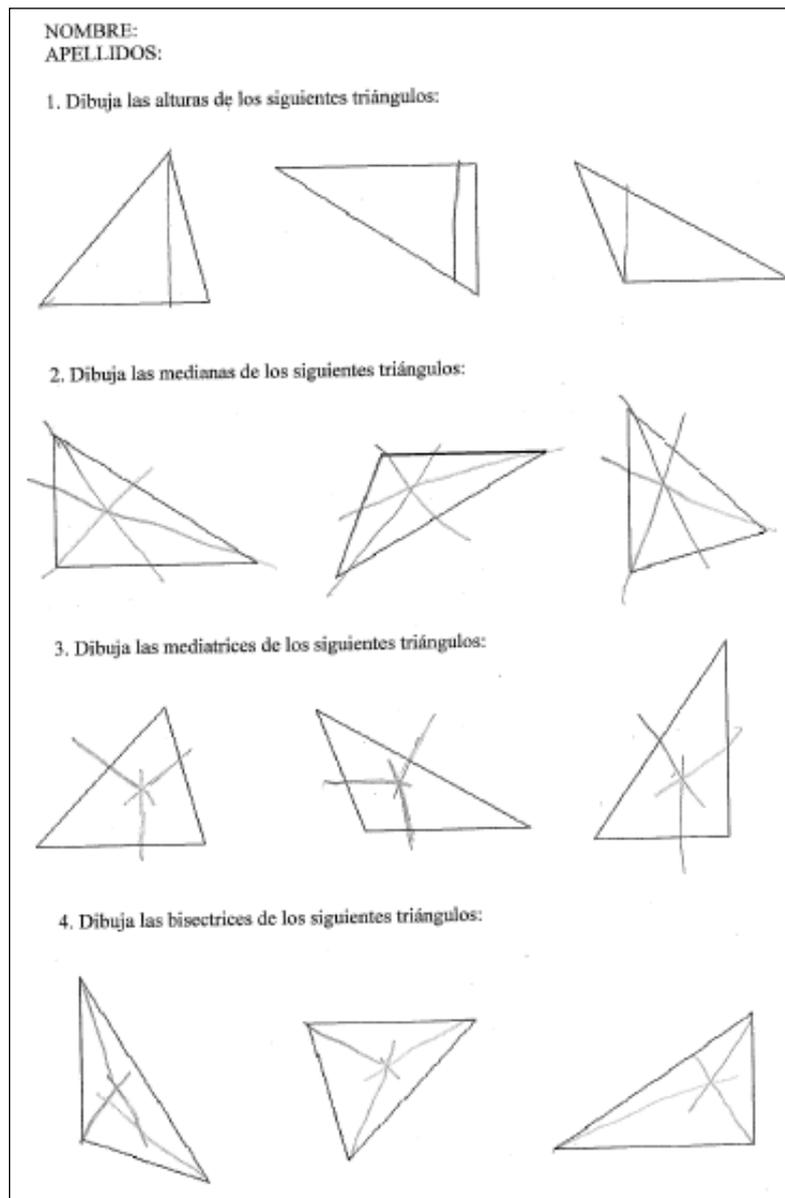


Figura 33. Hoja de respuestas nº 2 de uno de los alumnos

En el ejercicio 2, cinco de doce alumnos trazan correctamente las medianas de los triángulos. El mismo número de alumnos dibuja únicamente una mediana y el resto, dos de doce, confunde los conceptos trazando las mediatrices en lugar de las medianas. La mayoría de los estudiantes realiza correctamente los ejercicios 3 y 4 y solo cuatro de doce dibuja una sola mediatriz y una única bisectriz en cada triángulo.

Respecto al uso del compás y de la regla, solo tres alumnos realizan un manejo preciso y correcto mientras que el resto no utiliza estas herramientas optando por dibujar las rectas notables a mano.

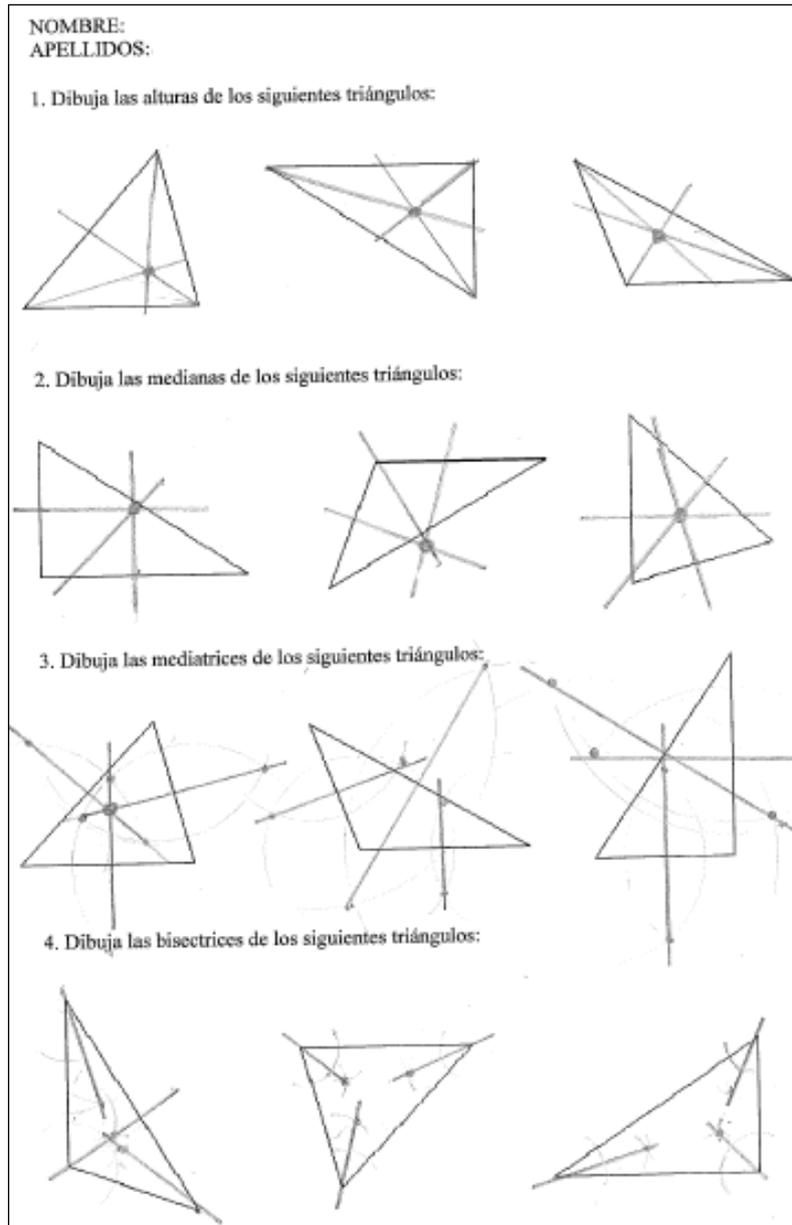


Figura 34. Hoja de respuestas nº 2 de otro alumno

Las actividades de la hoja 3 se resuelven correctamente por todos los alumnos. En general realizan unas construcciones poco precisas, sin utilizar el compás ni la regla y, aquellos alumnos que las usan, lo hacen con poca precisión obteniendo unos dibujos que no cumplen las propiedades (como ejemplo, ningún alumno ha trazado la circunferencia circunscrita que pase por los tres vértices del triángulo).

NOMBRE:
 APELLIDOS:

1. Dibuja las mediatrices de los siguientes triángulos y marca el circuncentro. Dibuja la circunferencia circunscrita al triángulo.

NOMBRE:
 APELLIDOS:

2. Dibuja las bisectrices de los siguientes triángulos y marca el incentro. Dibuja la circunferencia inscrita al triángulo.

Figura 35. Hoja de respuestas nº 3 de uno de los alumnos

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1º E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

- Resultados obtenidos de la hoja de actividades nº 4:

La mayoría de los alumnos cataloga la figura A de manera correcta, como un cuadrado, y solo dos de catorce la clasificada como un rombo. La figura F es clasificada erróneamente como un romboide por once estudiantes y diez alumnos identifican la figura D con un trapezio. Todos los alumnos clasifican correctamente las figuras I y H.

NOMBRE:
APELLIDOS

1. Completa la tabla marcando con una X si es paralelogramo o no paralelogramo y escribiendo el nombre del cuadrilátero:

Figura	Paralelogramo	No Paralelogramo	Nombre
A	X	No	Rombo
B		X	Trapezoide
C	X	No	Romboide
D	X	X	Trapezoide
E	X		Cuadrado
F	X		Romboide
G	X		Rectángulo
H		X	Trapezo
I		X	Trapezoide

Figura 36. Hoja de respuestas nº 4 de uno de los alumnos

- Resultados obtenidos de la hoja de actividades nº 5:

La mayoría de los alumnos representan las rectas paralelas y las rectas perpendiculares del mismo modo que aparecen comúnmente en los libros de texto:



La mayoría de los estudiantes reconoce las rectas perpendiculares del ejercicio 4 cuando estas no se representan en la posición habitual (nueve de doce alumnos) y todos trazan correctamente las bisectrices de los tres ángulos del ejercicio 5 aunque, solo tres de ellos utiliza el compás para su construcción, mientras que el resto las realiza a mano.

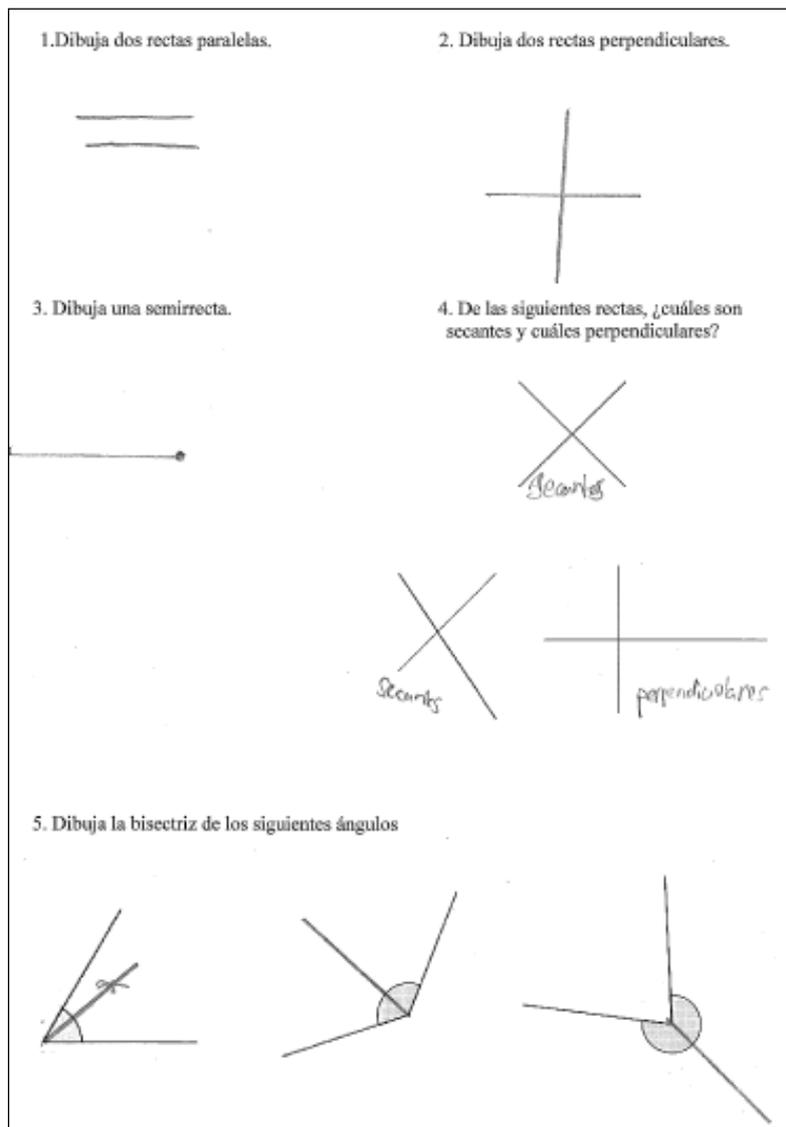


Figura 37. Hoja de respuestas nº 5 de uno de los alumnos

Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1º E.S.O. durante el aprendizaje de geometría plana

Las tablas inferiores reflejan las respuestas dadas por los alumnos en el ejercicio 6. Se indica el número de alumnos que ha seleccionado cada respuesta:

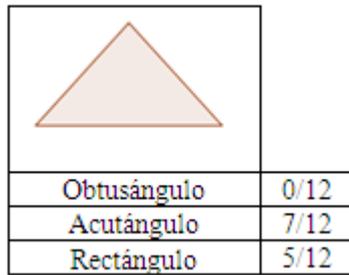


Figura 38. Triángulo rectángulo

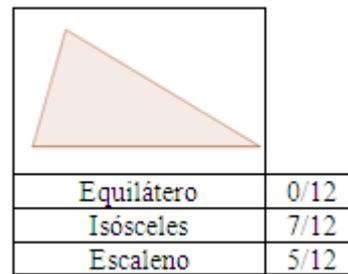


Figura 41. Triángulo isósceles

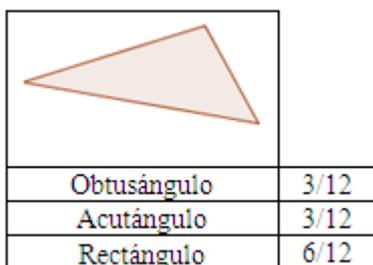


Figura 39. Triángulo obtusángulo

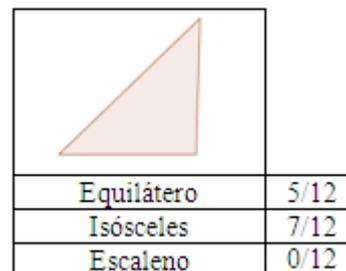


Figura 42. Triángulo isósceles

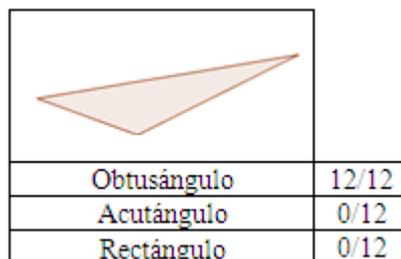


Figura 40. Triángulo obtusángulo



Figura 43. Triángulo escaleno

- Resultados obtenidos de los exámenes:

Como se ha indicado anteriormente, los exámenes no tienen gran interés de análisis. Aún así, los errores que más se han repetido son los siguientes:

En el segundo examen, los alumnos tienen dificultad para trazar las alturas del triángulo del ejercicio 4. Solo seis personas de catorce realizan este ejercicio correctamente. La figura 44 muestra una de las producciones de un estudiante que confunde las alturas con las medianas.

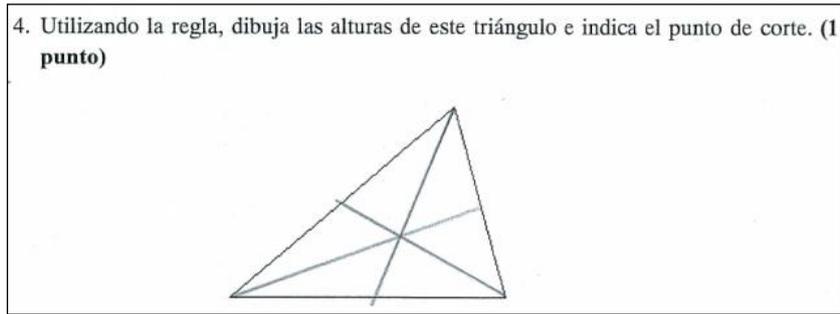


Figura 44. Respuesta de un alumno al ejercicio 4 del examen 2

También, la mayoría de los estudiantes, once de catorce, presenta dificultad a la hora de clasificar los polígonos, cometiendo errores al diferenciar los cóncavos de los convexos como se refleja en la figura 45.

6. Completa la tabla con la información sobre los polígonos: (1 punto)

Polígono	Número de lados	Suma de los ángulos	Nombre
A	6	$S = (6-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$	Hexágono, regular, convexo
B	5	$S = (5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$	Polígono, irregular, cóncavo
C	4	$S = (4-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$	cuadrilátero, regular, convexo
D	8	$S = (8-2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ$	octágono, irregular, cóncavo

$\rightarrow 180$ $6) 180$ $7) 180$ $8) 180$
 $\frac{1}{180}$ $\frac{2}{360}$ $\frac{2}{360}$ $\frac{2}{360}$

Figura 45. Respuesta de un alumno al ejercicio 6 del examen 2

Por último, el uso de las herramientas de dibujo es poco preciso y todos los alumnos obtienen construcciones inexactas como la que se muestra en la siguiente figura.

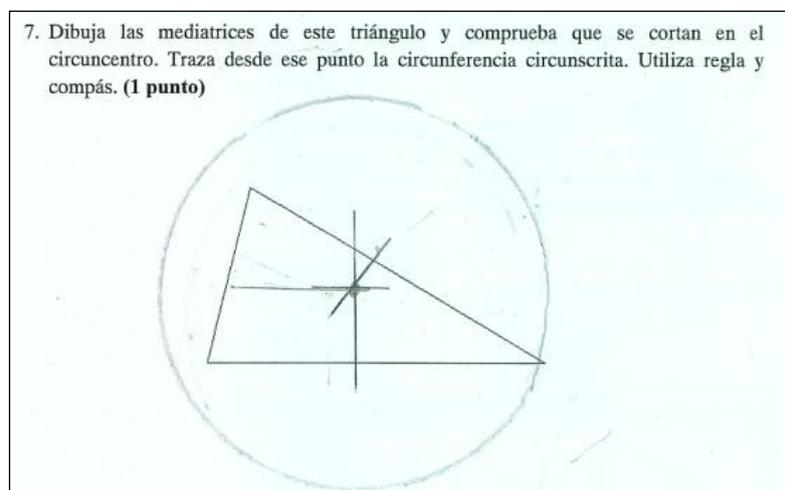


Figura 46. Respuesta de un alumno al ejercicio 7 del examen 2

7.4. Discusión de los resultados

Una vez recogidas las producciones realizadas por los alumnos se puede realizar el análisis a posteriori, la última fase de la ingeniería didáctica, que consiste en validar o refutar las previsiones planteadas en el análisis a priori.

La dificultad para identificar figuras geométricas representadas en una posición diferente a la habitual se verifica analizando las respuestas obtenidas en el ejercicio 6 de la hoja de actividades nº 5. Como se esperaba, más de la mitad de los alumnos clasifican de manera incorrecta el triángulo rectángulo y el obtusángulo (figuras 38 y 39) ya que se presentan en una posición distinta a la usual y no tienen ningún problema al identificar el triángulo de la figura 40 que está representado en una posición habitual. Además, el ejercicio 6 del segundo examen refuerza esta predicción ya que los alumnos cometen muchos errores al diferenciar los polígonos cóncavos y los convexos. Este error puede deberse a la dificultad de los alumnos para diferenciar ángulos mayores y menores de 180° cuando estos no están dibujados con uno de sus lados en posición horizontal.

Al contrario de lo previsto, los alumnos clasifican correctamente un cuadrado representado en la posición habitual de un rombo. Esto puede deberse a que, durante la explicación teórica, se ha hecho hincapié en indicar los fallos más comunes que suelen cometerse y se han mostrado cuadriláteros en diversas y variadas posiciones para que los alumnos aprendan a clasificarlos por sus propiedades y no por el aspecto que tengan a primera vista. En cambio, en la hoja de actividades nº 4 los alumnos sí han cometido errores al clasificar la figura F que, aunque su aspecto es de un romboide, se trata de un rombo ya que tiene todos sus lados iguales.

Por otro lado, observando las respuestas dadas por los estudiantes en la tercera pregunta de la hoja de actividades nº 1, se puede afirmar que los alumnos presentan dificultades a la hora de clasificar polígonos. Es llamativo que la mayoría de los alumnos consideren que un rectángulo es un polígono regular. Esto puede deberse a que los estudiantes identifican los polígonos regulares con figuras conocidas como cuadrados, rectángulos o triángulos o bien a que realicen la clasificación teniendo en cuenta únicamente la igualdad de sus ángulos sin considerar la desigualdad de sus lados o viceversa.

Las previsiones formuladas en relación a las dificultades para el trazado de las alturas en triángulos se han cumplido, ya que como se refleja en el ejercicio 1 de la hoja de actividades nº 2, la mayoría de los alumnos sólo trazan una de las alturas del triángulo. Además, aquellos alumnos que trazan las tres alturas, dibujan de manera correcta únicamente las del triángulo acutángulo verificando así que las dificultades son mayores cuando se trata de triángulos obtusángulos y rectángulos.

Por último, se ha comprobado la falta de práctica en el manejo de las herramientas básicas de dibujo, en particular del compás y la regla, a través del análisis de las producciones realizadas por los alumnos.

Capítulo 8

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

8.1. Síntesis

Este trabajo fin de máster se realiza con el objetivo de estudiar los contenidos de geometría en el currículo vigente y en los libros de texto y analizar las dificultades y errores manifestados por un grupo de estudiantes de primer curso de E.S.O. durante un proceso de aprendizaje de geometría plana.

Así pues, el trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte, se revisa el contenido geométrico presente en la normativa vigente y su reflejo en los libros de texto utilizados en las aulas de primaria y secundaria.

En la segunda parte, se propone un proceso de estudio sobre las dificultades y errores manifestados durante el proceso de aprendizaje de geometría plana, que se ha puesto en marcha en un aula de 1º de E.S.O. en el marco del Practicum II del Máster. Para ello, se analiza el material utilizado en este proceso, se prevén los errores y dificultades que pueden aparecer durante las sesiones y se detalla la organización de éstas.

Finalmente, se contrastan los datos extraídos de las clases con las predicciones realizadas antes de realizar la fase de experimentación. La metodología de investigación empleada para elaborar esta segunda parte del trabajo es la ingeniería didáctica.

8.2. Conclusiones

Tras el análisis realizado en el trabajo, se puede concluir que:

1.- Los libros de texto utilizados en las aulas de primaria y secundaria son coherentes con los contenidos de geometría fijados en la normativa vigente, aunque no presentan suficientes propuestas para trabajar contenidos geométricos mediante el uso de programas informáticos.

2.- Las actividades que incluyen los libros de texto son las adecuadas para evaluar a los alumnos siguiendo los criterios de evaluación marcados en la normativa vigente. Así, tanto en 5º y 6º de primaria como en 1º de E.S.O. el tipo de actividad predominante son los ejercicios; en cambio, en los libros de 2º y 3º de E.S.O., prevalecen los problemas.

3.- La geometría es un tema que genera diversas dificultades en los estudiantes durante su aprendizaje (reflejadas en el capítulo 7) y la mayor parte de éstas se corresponden con las dificultades previstas (detalladas en el capítulo 5). Este hecho permite al docente elaborar propuestas didácticas con el objetivo de evitar o minimizar la aparición de estos errores. Por tanto, resulta esencial tener muy en cuenta el conocimiento de estos errores a la hora de planificar las sesiones en el aula y escoger el tipo de actividades a proponer a los alumnos.

4.- El uso de pocos recursos en el aula provoca que los alumnos construyan un esquema conceptual estándar sobre las figuras o elementos geométricos. Esto genera dificultades a la hora de reconocerlas si se presentan representados en otra posición o en un contexto diferente.

5.- El trazado de las rectas notables de un triángulo es una de las tareas que resulta más complicada a los alumnos, cometiendo como error común el dibujar una sola de las rectas, generalmente la correspondiente a la base del triángulo.

6.- La escasez de ejemplos mostrados en el aula durante las sesiones de explicación del tema de rectas notables, provoca que los alumnos tengan la concepción de que éstas se sitúan siempre dentro del triángulo, generándose gran dificultad, por ejemplo, a la hora de trazar las alturas en triángulos rectángulos y obtusángulos.

7.- Resulta imprescindible el uso de diversos materiales que permitan exponer a los alumnos ejemplos variados que ayuden a comprender mejor cada concepto estudiado y así, se eviten o minimicen los errores citados. El estudio de geometría utilizando programas de ordenador como Geogebra, con el que se pueden realizar construcciones dinámicas, puede resultar muy útil a los alumnos para construir un aprendizaje significativo.

8.- Los estudiantes no están familiarizados con el uso de las herramientas de dibujo (reglas, compás y transportador de ángulos) y, debido a la falta de práctica en su manejo, realizan las construcciones con dificultad y sus producciones son poco precisas.

9.- Los alumnos presentan mayor dificultad para solucionar problemas contextualizados que para resolver ejercicios intra matemáticos. Es importante realizar diversos tipos de actividades: desde ejercicios descontextualizados que sirvan para la interiorización de los conceptos y para dominar su aplicación, hasta problemas contextualizados donde se presenten circunstancias reales en las que los alumnos tengan que relacionar con los conceptos geométricos aprendidos, descubriendo su aplicación y su utilidad en otros contextos aparte del escolar. El hecho de realizar actividades variadas resulta motivador para los estudiantes.

10.- La planificación realizada para el desarrollo de las sesiones en el aula debe modificarse continuamente, conforme avanza el curso, en función del ritmo de aprendizaje de los alumnos y de las necesidades que se van generando día a día.

8.3. Cuestiones abiertas

Tras la realización del proyecto, quedan algunas cuestiones abiertas:

1.- Respecto a la normativa, ¿sería conveniente distribuir los contenidos de geometría de un modo diferente a lo largo de los cursos una vez se conocen las dificultades que presentan los alumnos en esta materia? ¿Deberían utilizarse diferentes métodos de evaluación, aparte de los exámenes o cuestionarios tradicionales, para lograr una valoración de los estudiantes que se ajuste más a la realidad?

Si se tiene en cuenta, a la hora de evaluar a los alumnos, no sólo la capacidad de memorizar conceptos, comprenderlos y seleccionar los apropiados para resolver situaciones concretas sino también la capacidad de interpretar y analizar críticamente las soluciones obtenidas, esta evaluación reflejaría el auténtico aprendizaje de los estudiantes.

2.- Respecto al método de enseñanza, ¿los errores se hubieran manifestado en una proporción menor o incluso no se hubieran dado si se hubiese empleado una metodología diferente durante las sesiones en el aula?

Si se hubiesen utilizado ejemplos y contraejemplos variados para intensificar la comprensión de aquellas nociones que se conoce presentan mayor dificultad y se hubieran empleado otros materiales aparte del cuadernillo, como el uso del Geoplano, sesiones con Geogebra en la que los alumnos fueran los que utilizaran el programa y no sólo el profesor, etc., los resultados obtenidos y por tanto, las conclusiones, hubiesen sido diferentes.

3.- Respecto a los alumnos, ¿el aprendizaje hubiera sido más completo si se hubieran realizado desde primaria mayor cantidad de problemas contextualizados y menor cantidad de ejercicios? ¿Y si el método de enseñanza utilizado en el cuadernillo, empleado durante las sesiones de prácticas, hubiera sido inductivo en vez de deductivo?

Si el tipo de actividad realizada en el aula se hubiese planteado combinando los dos métodos, el aprendizaje hubiera resultado más completo. Los alumnos, aparte de aplicar los conceptos para la resolución de actividades, hubieran descubierto algunas nociones por ellos mismos partiendo de ejemplos concretos, resultando la interiorización de éstos más efectiva. Igualmente, los alumnos comprenderían mejor las nociones estudiadas si el tipo de actividad realizada integrara un mayor porcentaje de problemas contextualizados con una menor cantidad de ejercicios.

Referencias

BOE núm. 293, Viernes 8 diciembre 2006, REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.

BOE núm. 5, Viernes 5 enero 2007, REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

BOE núm. 266, Martes 6 noviembre 2007, REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Aranzubía, V., Santaolalla, E., Gómez, M., Pérez, E. (2009). *Matemáticas 5 primaria*. Madrid: Ediciones SM

Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J., Pérez, E. (2009). *Matemáticas 6 primaria*. Madrid: Ediciones SM

Bujanda, M., Mansilla, S., Bellón, M., Fernández, I. (2008). *Matemáticas 1*. Madrid: Ediciones SM

Vizmanos, J., Anzola, M., Bujanda, M., Mansilla, S. (2009). *Matemáticas 2*. Madrid: Ediciones SM

Vizmanos, J., Anzola, M., Bellón, M., Hervás, J., Fernández, I. (2009). *Matemáticas 3*. Madrid: Ediciones SM

García, F., Valencia, F.J. (2010). *Geometría 1º ESO*. Madrid: Ediciones SM

Serrano, L. (2008). Elementos geométricos y formas planas. En Castro E. (Eds.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. (pp. 379-398). Madrid: Editorial Síntesis, S.A.

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 125-148). Barcelona: Editorial Horsori.

Godino, J., Font, V., R. Wilhelmi, M. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 131-155

Barrantes, M., Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo abierto*. 27 (1), 55-71

Anexos