PROGRESIONES

JULEN LUQUIN ECHAVARRI

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS POR ALUMNOS DE 4º ESO

TFM 2012

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Resolución de problemas de progresiones aritméticas y geométricas por alumnos de 4º ESO

Julen Luquin Echávarri

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Página

Introducción general 5

Parte I: Las progresiones aritméticas y geométricas en el currículo vigente y en los libros de texto 7

1. Las progresiones aritméticas y geométricas en el currículo vigente 11

1.1. Contenidos en Educación Primaria 11

1.2. Contenidos en E.S.O. 12

1.3. Contenidos en Bachillerato 13

2. Los criterios de evaluación de progresiones aritméticas y geométricas en el currículo vigente. 15

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria 15

2.2. Criterios de evaluación en ESO 16

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato 18

3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las progresiones aritméticas y geométricas en el currículo vigente 19

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO 19

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO 20

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO 23

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller 26

3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachiller 28

4. Resultados 31

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto 31

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo 34

4.3. Coherencia de los libros 34

Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las progresiones aritméticas y geométricas en 4º ESO 37

5. Progresiones aritméticas y geométricas en el libro de texto de referencia 41

5.1. Objetos matemáticos involucrados 41

5.2. Análisis global de la unidad didáctica 43

5.3. Análisis ontosemiótico de configuraciones parciales 45

5.4. Otros aspectos relevantes 62

6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica 65

6.1. Dificultades 65

6.2. Errores y su posible origen 66

7. El proceso de estudio 67

7.1. Distribución del tiempo de la clase 67

7.2. Actividades adicionales planificadas 68

7.3. La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista 69
8. Experimentación 71
8.1. Método 71
8.2. Muestra y diseño de la experimentación 72
8.3. El cuestionario 72
8.4. Cuestiones y comportamientos esperados 73
8.5. Resultados 73
8.6. Discusión de los resultados 80
Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas 83
Breve síntesis 83
Conclusiones generales del trabajo 83
Cuestiones abiertas 83
Referencias 85
Anexos 87
A. Unidad didáctica del libro de texto 89
B. Cuestionario formulado 97

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la resolución de problemas de progresiones aritméticas y geométricas por alumnos de 1º ESO.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre funciones, que se ha puesto en marcha en un aula de 4º de ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido ad hoc, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Las progresiones aritméticas y geométricas en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las progresiones aritméticas y geométricas en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a las funciones en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 4º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

.

Capítulo 1:
Las progresiones aritméticas y geométricas en el currículo vigente

En este primer capítulo se a analiza el contenido de mínimos presente en el currículo oficial, para la educación Primaria, Secundaria y Bachillerato, para el tema de sucesiones y progresiones.

Estos contenidos de mínimos están recogidos en los Boletines Oficiales del Estado, encontrándose en B.O.E. número 293, más concretamente el Real Decreto 1513/2006, en el B.O.E. número 5, más concretamente en el Real Decreto 1631/2006 y en el B.O.E. número 266, más concretamente en el Real Decreto 1467/2007.

Se han agrupado en tres grupos: Educación Primaria, Secundaria y Bachiller, para facilitar su comprensión y análisis evolutivo.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

En Primaria se expone el primer y segundo ciclo, dado que en el tercero no figura ningún descriptor del contenido.

<table>
<tr><th colspan="2">Primer ciclo de primaria</th></tr>
<tr><td>Descriptor</td><td>Contenido</td></tr>
<tr><td>C1: Recurrencia</td><td>Bloque 1 Números y operaciones.
- Orden y relaciones entre números.
- Cálculo de dobles y mitades de cantidades.
- Disposición para utilizar los números, sus relaciones y operaciones.

Bloque 3. Geometría.
- Búsqueda de elementos de regularidad en figuras y cuerpos a partir de la manipulación de objetos.</td></tr>
<tr><td>C2: Sucesiones</td><td>Bloque 1 Números y operaciones.
- Familiarización con el uso de la calculadora para la generación de series y composición y descomposición de números.</td></tr>
<tr><td>C3: Progresiones</td><td>___</td></tr>
</table>

Figura 1. *Contenido primer ciclo de primaria*

Segundo ciclo de primaria	
Descriptor	Contenido
C1: Recurrencia	Bloque 1 Números y operaciones. - Orden y relaciones entre números. - Disposición para desarrollar aprendizajes autónomos en relación con los números, sus relaciones y operaciones.
C2: Sucesiones	___
C3: Progresiones	___

Figura 2. *Contenido segundo ciclo de primaria*

1.2. Contenidos en E.S.O.

Primer ciclo de ESO		
Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
C1: Recurrencia	___	Bloque 3. Álgebra. - Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
C2: Sucesiones	Bloque 3. Álgebra. - Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.	___
C3: Progresiones	___	___

Figura 3. *Contenido primer ciclo de ESO*

Segundo ciclo de ESO			
Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4º opción A	Contenido 4º opción B
C1: Recurrencia	Bloque 3. Álgebra. - Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes.	___	___
C2: Sucesiones	Bloque 3. Álgebra. - Análisis de sucesiones numéricas. - Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.	___	___
C3: Progresiones	Bloque 3. Álgebra. - Progresiones aritméticas y geométricas.	Bloque 2. Números. - Interés simple y compuesto	___

Figura 4. *Contenido segundo ciclo de ESO*

1.3. Contenidos en Bachillerato

Bachillerato – Ciencias y Tecnología		
Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
C1: Recurrencia	___	___
C2: Sucesiones	3. Análisis. - Aproximación al concepto de límite de una función.	___
C3: Progresiones	___	___

Figura 5. *Contenido Bachillerato - Ciencias y Tecnología*

Bachillerato – Ciencias Sociales		
Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
C1: Recurrencia	___	___
C2: Sucesiones	1. Aritmética y algebra. - Resolución de problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, amortizaciones, capitalizaciones y números índice. Parámetros económicos y sociales.	___
C3: Progresiones	___	___

Figura 6. *Contenido Bachillerato – Ciencias Sociales*

Capítulo 2:

Los criterios de evaluación de progresiones aritméticas y geométricas en el currículo vigente.

En este segundo capítulo se recopilan los criterios de evaluación que existen para el tema de progresiones aritméticas y geométricas, que se recoge en los Reales Decretos 1513/2006, 1631/2006 y 1467/2007.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

No figura ningún criterio de evaluación del contenido en el currículo para primaria.

2.2. Criterios de evaluación en ESO

Primer ciclo de ESO	
Descriptor	Criterios de evaluación 1º
C1: Recurrencia	___
C2: Sucesiones	3. Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas. Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida. Se pretende, asimismo, valorar el uso del signo igual como asignador y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Forma parte de este criterio también la obtención del valor numérico en fórmulas simples con una sola letra.
C3: Progresiones	___
Descriptor	Criterios de evaluación 2º
C1: Recurrencia	2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.
C2: Sucesiones	___
C3: Progresiones	___

Figura 7. *Criterios de evaluación en primer ciclo de ESO*

Segundo ciclo de ESO	
Descriptor	Criterios de evaluación 1º
C1: Recurrencia	___
C2: Sucesiones	3. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos. A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.
C3: Progresiones	___
Descriptor	Criterios de evaluación 4º opción B
C1: Recurrencia	___
C2: Sucesiones	___
C3: Progresiones	2. Aplicar porcentajes y tasas a la resolución de problemas cotidianos y financieros, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo en función de la cantidad y complejidad de los números. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar porcentajes, tasas, aumentos y disminuciones porcentuales a problemas vinculados a situaciones financieras habituales y a valorar la capacidad de utilizar las tecnologías de la información para realizar los cálculos, cuando sea preciso.

Figura 8. *Criterios de evaluación en segundo ciclo de ESO*

No figura ningún criterio de evaluación del contenido en el currículo para 4º E.S.O. opción B.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

No figura ningún criterio de evaluación del contenido en el currículo de bachillerato de ciencias y tecnología.

Bachillerato – Ciencias Sociales		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
C1: Recurrencia	___	___
C2: Sucesiones	3. Utilizar los porcentajes y las formulas de interés simple y compuesto para resolver problemas financieros e interpretar determinados parámetros económicos y sociales. Este criterio pretende comprobar si se aplican los conocimientos básicos de matemática financiera a supuestos prácticos, utilizando, si es preciso, medios tecnológicos al alcance del alumnado para obtener y evaluar los resultados.	___
C3: Progresiones	___	___

Figura 9. *Criterios de evaluación en Bachillerato – Ciencias Sociales*

Capítulo 3:

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las progresiones aritméticas y geométricas en el currículo vigente

En este capítulo se ha procedido a analizar los libros de texto que son usados diariamente en el I.E.S. Sancho III, "el Mayor", en el cual se desarrolló el periodo de prácticas docentes.

Se identifica en cada curso desde 2º de E.S.O. hasta 2º de Bachiller los problemas, ejercicios y cuestiones tipo, que aparecen en ellos relacionados con las sucesiones y progresiones.

Para la realización de esta sección se ha contado con la colaboración de los profesores del Centro de los diferentes cursos para saber si se trabaja o no estos aspectos matemáticos en los cursos determinados.

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO

En 2º de la E.S.O. no se trabajan las sucesiones ni progresiones en el Centro. El libro empleado es Matemáticas 2º E.S.O. de la editorial Santillana.

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO

El libro empleado para este curso es Matemáticas 3º E.S.O. de la editorial Teide. Los ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones ejemplares analizados se han tomado del sexto tema (Tema 6 Sucesiones, Progresiones, Aplicaciones).

Sucesiones

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Hallar los términos de una sucesión.

1. Escribe los dos términos que siguen de las siguientes sucesiones:

a) 3, 5, 7, 9, 11, ... d) 1, 4, 9, 16, 25, ...

b) 4, 8, 16, 32, 64, ... e) 1,012; 1,01200112; 1,012001120001112; 1,012001120001112000011112; ...

c) −3, −1, 1, 3, 5, ... f) 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, 33, ...

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Hallar el término general.

2. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... c) 5, 10, 15, 20, 25, 30, ... e) 1, 4, 11, 26, 57, 120, 247, ...

b) 6, 9, 12, 15, 18, ... d) 10, 30, 50, 70, 90, ... f) 2, 5, 8, 11, 14, ...

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Hallar los términos de una sucesión aplicando el término general.

3. Escribe siete términos de la sucesión definida en la que: $a_1 = 3$ y $a_n = a_{n-1} + 7$

4. Escribe cinco términos de la siguiente sucesión: $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

5. Escribe los seis primeros términos de una sucesión en la que: $a_1 = -1$ y $a_n = -2 \cdot a_{n-1}$

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Operaciones con sucesiones.

6. Dadas las sucesiones $[a_n] = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 2n-1$ y $[b_n] = 2, 6, 10, 14, 18, \ldots, 2n-2$ halla:

a) $7 \cdot [a_n]$ c) $[a_n] + [b_n]$ e) $5 \cdot [a_n] - 2 \cdot [b_n]$ g) $[a_n] \cdot [b_n]$

b) $\frac{1}{2} \cdot [b_n]$ d) $2 \cdot [a_n] - [b_n]$ f) $[a_n] + 3 \cdot [b_n]$ h) $[a_n] \cdot [a_n]$

Figura 10. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO de sucesiones*

Progresiones aritméticas
Actividad tipo: Ejercicio Descripción: Reconocer una progresión aritmética y hallar el término general. **7.** Averigua si las siguientes sucesiones forman una progresión aritmética y halla el término general de cada una de ellas. **a)** 5, 4, 3, 2, 1, 0 **c)** 4, 5, 9, 14, 23, 37 **e)** 8, 4, 0, −4, −8, −12 **b)** 7, 10, 13, 16, 23, 27, 30, 33 **d)** 1, 4, 9, 16 **f)** 13, 23, 33, 43, 53
Actividad tipo: Ejercicio Descripción: Hallar la suma de los términos de una progresión aritmética. **8.** Halla la suma de los términos indicados en las siguientes progresiones aritméticas: **a)** $a_1 = 10,\ a_2 = 18,\ a_3 = 26,\ n = 10$ **d)** $a_1 = 9,\ a_{19} = 66,\ n = 24$ **b)** $a_1 = 15,\ d = -3,\ n = 25$ **e)** $a_5 = 15,\ a_{10} = 30,\ n = 25$ **c)** $a_{15} = -9,\ d = 2,\ n = 20$ **f)** $a_1 = 5,\ a_2 = 12,\ n = 32$
Actividad tipo: Ejercicio Descripción: Interpolación de n términos aritméticos entre dos números dados. 9. Interpola nueve términos aritméticos entre 128 y 184. 10. Interpola ocho términos aritméticos entre 23 y 113. 11. Interpola catorce términos aritméticos entre 100 y 250.

Figura 11. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO de progresiones aritméticas*

Progresiones geométricas

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Aplicación el término general hallar los términos y la razón de la progresión geométrica.

13. Sabiendo que en una progresión $a_1 = 1$ y $r = 3$, halla el quinto elemento.

14. Siendo $a_6 = 27$ y sabiendo que es el último término de una progresión cuya razón es 3. Halla todos los términos de la progresión.

15. En una progresión geométrica $a_3 = 1$ y $a_7 = 256$. Halla a_1, la razón y los 7 primeros términos de la progresión.

16. Halla a_9 y a_1 en la progresión geométrica en la que $r = \frac{1}{2}$, $a_5 = 1$ y $n = 9$.

Actividad tipo: Situación

Descripción: Aplicación del término general para hallar n

17. Las bacterias se reproducen por bipartición. Si tenemos una bacteria en un cultivo y se duplica cada minuto, ¿en cuánto tiempo habrá 1 048 576 bacterias?

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Suma de n primeros términos de una progresión geométrica

18. Suma los 10 primeros términos de la siguiente progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16, ... a_{10}

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Suma de todos los términos de una progresión geométrica decreciente.

19. Dada la progresión decreciente con infinitos términos 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ..., averigua el valor de la suma de todos sus términos.

20. Halla la suma de los términos de la siguiente progresión geométrica: 32, 16, 8, 4, ... a_8

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Hallar el producto de los términos de los términos de una progresión geométrica.

21. Halla el producto de los términos de la siguiente progresión geométrica: 2, 6, 18, 54, ... a_8

Figura 12. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO de progresiones geométricas*

Intereses bancarios
Actividad tipo: Ejercicio Descripción: Aplicación de la fórmula general de capitalización simple o compuesta para el cálculo de capital inicial, final y el tanto por ciento anual. 28. Calcula el capital final de 1 600 € al 3 % anual a un interés compuesto durante 5 años. 29. Averigua cuál es el interés que obtendremos si depositamos un capital de 2 400 € al 5 % anual a un interés compuesto durante 4 años. 30. ¿Cuál es el capital inicial que se ha depositado en una entidad financiera durante 5 años al 5 % anual para obtener un capital final de 25 526 €? 31. Hemos puesto un capital de 2 000 € durante dos años al *r* % anual y nos han ingresado 2 332,8 €. ¿Sabes decir cuál ha sido el *r* % aplicado? 32. Calcula el capital final de 16 000 € al 8 % anual a un interés compuesto durante 5 años siendo el pago de intereses mensual.

Figura 13. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO de intereses bancarios*

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO

El material didáctico empleado para el curso de 4º de E.S.O. es el cuadernillo realizado por el propio Centro. Los ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones ejemplares analizados se han tomado de la quinta lección (Lección 5 Funciones y progresiones).

Progresiones aritméticas
Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: Hallar los términos de una progresión aritmética.
100 Escribe los cinco primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas: a) $a_1=2/3$, $d=-1/2$ b) $a_1=3\sqrt{2}$, $d=2\sqrt{2}$ c) $a_1=-12$, $d=3/2$ d) $a_1=2\sqrt{a}$, $d=3\sqrt{a}$ e) $a_1=5x^2$, $d=-2x^2$ f) $a_1=a$, $d=a/4$
Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: Aplicar la propiedad principal de las progresiones aritméticas.
101 ¿Forman parte de una progresión aritmética las expresiones a+2b, 2a+4b, 3a+6b, 4a+8b? Si a+2b es el tercer término, calcula el primero y el noveno. 102 Calcula x para que x, x^2, $4x^2$ estén en progresión aritmética. 103 Calcula k para que 8k+4, 6k−2, 2k−7 estén en progresión aritmética.

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Hallar los términos de una progresión aritmética aplicando el término general.

104 Calcula: a) a_{25} en 9, 5, 1, −3…; b) a_8 en $-2/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, $4/\sqrt{3}$…

105 En los siguientes ejercicios se dan algunos datos de una progresión aritmética y se pide el cálculo de otros:

a) $a_1=23$, $a_{17}=31$; d
b) $a_6=3$, $a_{14}=-1$; a_1
c) $a_{19}=-14$, $a_{24}=16$; a_{10}
d) $a_{10}=25$, $d=5$; a_1
e) $a_1=-5$, $d=1/3$; a_{120}
f) $a_1=5$, $d=3$, $a_n=104$; n
g) $a_3=5$, $a_4=18$; $a_n=707$; n
h) $a_2+a_3=10$, $a_1 \cdot a_6=-16$; a_1

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Interpolar n medios aritméticos o diferenciales.

106 Interpola los medios aritméticos que se indica:

a) cinco entre 3/5 y 23/5
b) seis entre −18 y −4
c) cuatro entre −12 y 13
d) cinco entre $\sqrt{3}$ y $\sqrt{27}$

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

108 Calcula la suma de los:

a) cuarenta primeros múltiplos de 3.
b) múltiplos de 6 comprendidos entre 100 y 1000.
c) múltiplos de 11 menores que 300.

Actividad tipo: Cuestión

Descripción: Aplicación del término de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética en un problema descontextualizado.

109 La suma de n números naturales consecutivos, tomados a partir del 11, es 1715. Calcula n.

110 La suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética es 210; su término central es 14. Halla n.

Actividad tipo: Problema

Descripción: Aplicación del término de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética en un problema contextualizado.

114 Un jardinero tiene que echar un cubo de agua al pie de cada uno de los treinta árboles que hay a un lado del camino. Los árboles están a 6 m de distancia, y el pozo 10 m antes del primer árbol. Halla el camino que habrá recorrido después de terminar el riego y volver al pozo.

Figura 14. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO de progresiones aritméticas*

Progresiones geométricas

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Hallar los términos de una progresión geométrica aplicando el término general.

119 Calcula los términos que se indican en las siguientes progresiones geométricas:

a) a_8 en 5, 3, 9/5…

b) a_{12} en x, $x^2/4$, $x^3/16$…

c) a_{10} en $2\sqrt{3}$, 12, $24\sqrt{3}$…

d) a_{16} en -8, 4, -2…

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Aplicar la propiedad principal de las progresiones geométricas para hallar valores para la incógnita y formar una progresión.

120 Halla el valor de x para que estén en progresión geométrica los números: a) 2x+1, 4x+2, 7x+5; b) x+2, 4x-2, 6x+2.

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Interpolar n medios geométricos o proporcionales.

122 Interpola los medios geométricos que se indican:

a) cinco entre 32/81 y 9/2

b) cuatro entre $\sqrt{3}$ y $4\sqrt{6}$

c) seis entre 2187 y 1

d) tres entre 0,3 y 0,00003

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Calcular la suma de todos los términos de una progresión geométrica decreciente.

124 Calcula la suma de todos los términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) 3, 1, 1/3, 1/9, …

b) 6, 3, 3/2, 3/4, …

c) a_1=81, r=1/3

d) 1, -1/3, 1/9, -1/27, …

Actividad tipo: Cuestión

Descripción: Aplicación del término de la suma y del producto de los n primeros términos de una progresión geométrica en un problema descontextualizado.

120 Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328509, sabiendo que el mayor de ellos excede en 115 a la suma de los otros dos.

Actividad tipo: Problema

Descripción: Aplicación del término de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente en un problema contextualizado.

129 Una rana da saltos en línea recta, hacia adelante, cada vez salta la mitad del salto anterior. Parte del extremo de una charca circular de 5 m de radio. En el primer salto se coloca a 3 m del centro. ¿Llegará la rana al centro del estanque?

Actividad tipo: Problema

Descripción: Obtención de suma de superficies o perímetros de figuras geométricas planas a partir de progresiones geométricas decrecientes.

Inscribe en un cuadrado de 2 m de lado un círculo; en éste un cuadrado; en éste un círculo, y así de nuevo indefinidamente. Halla la suma de las áreas de todos los cuadrados.

Actividad tipo: Problema

Descripción: Aplicación y comparación de progresiones aritméticas y geométricas en problemas contextualizados.

130 Un mendigo pide hospitalidad a un avaro, haciéndole la siguiente proposición: "Yo pagaré 1 euro por el primer día; 2, por el segundo; 3, por el tercero, y así sucesivamente. En cambio usted me dará 0,001 céntimos el primer día; 0,002, el segundo; 0,004, el tercero, y así sucesivamente, duplicando siempre la cantidad anterior". El avaro encontró esta proposición como un buen negocio y consintió el arreglo por 30 días. Haz la liquidación total al final del plazo.

Figura 14. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO de progresiones geométricas*

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller

El material didáctico empleado para el curso de 1º Bachiller de Ciencias y Tecnología es el cuadernillo realizado por el propio Centro. En este bachiller no se trabajan las sucesiones ni progresiones en el Centro.

El material didáctico empleado para el curso de 1º Bachiller de Ciencias Sociales es el libro Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I de la editorial Oxford. Los ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones ejemplares analizados se han tomado de los temas 3 y 5 (3 Matemática financiera y 5 Límite y continuidad).

Progresiones aritméticas y geométricas

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Hallar el término general de una progresión aritmética o geométrica.

1 Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$

b) $5, 3, 1, -1, -3, \ldots$

2 Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8\ldots$

b) $-3, 3, -3, 3, -3, \ldots$

Figura 15. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller de progresiones*

Intereses bancarios
Actividad tipo: Cuestión Descripción: Aplicación de la fórmula general de capitalización simple o compuesta para el cálculo de capital inicial, final y el tanto por ciento anual. **6** Se han depositado 60 000 € al 3,4 % anual de interés simple durante un período de 48 meses. ***a)*** ¿Qué intereses producen? ***b)*** ¿Cuál es el capital final? **Solución:** ***a)*** 8 160 € ***b)*** 68 160 €
Actividad tipo: Problema Descripción: Cálculo del T.A.E. **13** Una entidad bancaria ofrece un 8 % de interés nominal anual, con una liquidación semestral de intereses. Una segunda entidad bancaria ofrece un 7,5 % de interés anual con liquidación trimestral de intereses. ¿Qué entidad tiene el T.A.E. más alto y por tanto es más conveniente para colocar el capital?
Actividad tipo: Cuestión Descripción: Cálculo del capital acumulado. **15** Una persona que inicia un plan de pensiones deposita a principio de cada año 4 000 € en el banco, el cual le garantiza el 5,5 % de interés nominal. ¿De cuánto dinero dispondrá al cabo de 13 años? **Solución:** 77 170,29 € **16** Un hombre suscribe un plan de pensiones por un período de 20 años con una cuota mensual de 150 €. Si la entidad bancaria le asegura un 9 % de interés anual, ¿de qué cantidad podrá disponer al final de los 20 años? **Solución:** 100 934,40 €
Actividad tipo: Cuestión Descripción: Cálculo de la cuota de amortización. **19** Determina las cuotas semestral y anual que se deben satisfacer para devolver 15 000 € al 7 % anual en 3 años. **Solución:** 2 815,02 € de cuota semestral y 5 715,77 € de cuota anual **20** Una persona decide comprar un piso que le cuesta 300 000 €. Como tiene 100 000 € ahorrados, pide una hipoteca al banco, que le conceden al 3,2 % anual a devolver en 20 años. ¿Qué cuota debe satisfacer trimestralmente? **Solución:** 3 394,41 €

Figura 16. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller de intereses bancarios*

Sucesiones

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Determinar el tipo de sucesión.

1 Determina, calculando algunos de sus términos, qué tipo de sucesión es cada una de las siguientes:

a) $\frac{n+1}{n}$ c) 2^{-n+1} e) $(-2)^n$

b) $\frac{n-2}{n-1}$ d) $2^{1/n}$ f) $\left(\frac{-1}{n}\right)^n$

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Adición de sucesiones.

2 Copia y completa la siguiente tabla para la resta de las sucesiones x_n e y_n:

$-$	$\lim_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\lim_{n\to\infty} y_n = b$			
$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$			
$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$			

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Adición de límites de una sucesión.

4 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} (3n^2 + 10\,000 - n^4)$

b) $\lim_{n\to\infty} [4n^3 + 2n - (5n^2 + 4)^2]$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2 - 2n^5}}{2n^2 + 6}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^6 + 2n^2}{3n^6 + 2}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 2n + 3}{1 - n^3}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 2n - 5}{2n^2 + 5n - n^3}$

Solución: a) $-\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) 1/3 e) 0 f) -4

Figura 17. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller de sucesiones*

3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachiller

En 2º Bachiller de Ciencias Sociales no se trabajan las sucesiones ni progresiones en el Centro. El material didáctico empleado para este curso es el libro Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de la editorial Oxford.

El material didáctico empleado para el curso de 2º Bachiller de Ciencias y Tecnología es el cuadernillo realizado por el propio Centro. En él aparece el límite de sucesiones.

Sucesiones
Actividad tipo: Ejercicio Descripción: Hallar el límite y clasificar las sucesiones. Clasifica las siguientes sucesiones indicando en su caso el límite: a) 7,7,7… b) 1/3,1/9,1/27… c) 1,-1,2,-2,3,-3… d) 1'6,1'66,1'666… e) -2,-4,-6,-8… f) 7,-1,7,-2,7,-3… g) 3,3'1,3,3'01,3,3'001… h) -1,2,-1,3,-1,4… i) 1,10,2,100,3,1000… j) 0,1/2,2/3,3/4,4/5… ¿Tienen límite las siguientes sucesiones? a) $a_n=1+(-1)^n$ b) $b_n=[2^n+(-2)^n]/2^n$

Figura 18. *Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachiller de sucesiones*

Capítulo 4:
Resultados

En este capítulo se pretende reunir y obtener las conclusiones del trabajo realizado en los anteriores apartados. En primer lugar se ha tratado las presencias y ausencias en el currículo y libros de texto y a continuación se ha observado la coherencia de estos libros en relación con el currículo.

Se ha comparado el enfoque dado a las progresiones en el currículo vigente, en los libros de texto empleados y en el trabajo de investigación “Series geométricas generalizadas” de Marisol Gómez y Esteban Induráin.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Las progresiones no es un aspecto matemático que se trabaje en todos los cursos de la misma manera y a pesar de que puede ser un aspecto matemático que parezca no encontrar su lugar, se puede conseguir una continuidad a partir de 3º de E.S.O. que es el curso en el que se introducen por primera vez la progresiones aritméticas y geométricas y hasta las matemáticas del Bachiller de Ciencias Sociales.

Como se ha comentado, las progresiones aritméticas y geométricas se introducen en 3º de E.S.O., si bien antes se han buscado regularidades y se ha ido trabajando las sucesiones y recurrencia.

En 4º de E.S.O. el currículo recoge que se vuelvan a impartir y se introduzca el interés simple y compuesto.

En ambos bachilleres se ven las sucesiones al aproximarse al concepto de límite y calcular límites de sucesiones. La diferencia se introduce en el Bachiller de Ciencias Sociales al impartir éste matemáticas aplicadas a las finanzas. En ellas se trabajan las progresiones aritméticas y geométricas y se estudian aspectos relacionados con las finanzas como son: el interés simple y compuesto, tasas, amortizaciones, capitalizaciones, etc.

Por lo tanto es un aspecto matemático que comienza en 3º E.S.O. al que se van añadiendo conocimientos en 4º y en Bachiller de Ciencias Sociales.

En los libros empleados por el Centro las progresiones no se trabajan ni en 2º de E.S.O., Matemáticas 2º ESO de la editorial Santillana, ni en 2º de Bachiller, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de la editorial Anaya.

En el libro de 3º de E.S.O., Matemáticas 3º ESO de la editorial Teide se trabajan en el tema 6 (Tema 6 Sucesiones. Progresiones).

En 4º de E.S.O. la lección 5 Funciones y progresiones del cuadernillo elaborado en el propio Centro recoge este aspecto matemático.

En el libro realizado por el propio Centro para 1º Bachiller de Ciencias y Tecnología aparecen brevemente en el límite de sucesiones.

Por último, en el libro de 1º Bachiller de Ciencias Sociales Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de la editorial Oxford se trabajan en el tema 3 y tema 5 (Tema 3 Matemáticas financieras y Tema 5 Limite y continuidad).

A continuación se muestra los descriptores de los temas que se presentan en los índices de los libros empleados por el Centro:

Libro	Editorial
Matemáticas 3º ESO	Teide
Tema 6	Tema 6 Sucesiones. Progresiones 1. Sucesiones Reglas de formación Término general de una sucesión Sucesiones recurrentes Operaciones con sucesiones Representación gráfica de una sucesión. 2. Progresiones Progresiones aritméticas Progresiones geométricas 3. Aplicaciones Interés compuesto Interés compuesto con capitalización en periodos fraccionarios

Figura 19. *Descriptores presentes en el índice del libro de 3º ESO*

Libro	Editorial
Matemáticas 4º ESO	Propio Centro
Tema 5	Tema 5 Funciones y progresiones. 10. Progresiones aritméticas Definición Término general Interpolación de n medios aritméticos o diferenciales Suma de los n primeros términos. 11. Progresiones geométricas Definición Término general Interpolación de n medios geométricos o proporcionales Producto de los n primeros términos Suma de los n primeros términos Suma de todos los términos de una progresión geométrica decreciente.

Figura 20. *Descriptores presentes en el índice del libro de 4º ESO*

Libro	Editorial
1º Bachiller de Ciencias Sociales Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales	Oxford
Tema 3	Tema 3 Matemáticas financieras 1. Sucesiones 2. Interese bancarios 3. Anualidades
Tema 5	Tema 5 Límite y continuidad 1. Idea intuitiva de límite de una sucesión 2. Operaciones con sucesiones 3. Cálculo de límites de funciones

Figura 21. *Descriptores presentes en el índice del libro de 1º Bachillerato*

El libro de referencia tomado, es el trabajo de investigación Series geométricas generalizadas realizado por Marisol Gómez y Esteban Induráin. El propio resumen dice: *Persiguiendo fines didácticos, analizamos distintas generalizaciones del concepto de serie geométrica, haciendo aparecer conexiones profundas con distintas ramas de la Matemática*. Por ello, resultó interesante su elección.

Se trata de un texto que posee conocimiento superiores a los que se obtienen en bachillerato. En él se tratan especialmente la suma de progresiones geométricas y aplicaciones contractivas.

A pesar de que expresan que pretende ser un texto pensado para un público menos especializado la dificultad de este hace que no se puede tomar nada de él para el curso en el que se impartieron las clases de las prácticas. De hecho el cuadernillo utilizado en el Centro no demuestra la fórmula de la suma de los términos para una sucesión geométrica decreciente.

El texto de investigación hace referencia a otros aspectos matemáticos y todo lo expuesto lo razona y demuestra. Los razonamientos y demostraciones en todo momento son genéricos.

Otra de las frases halladas en el texto es: *el conjunto de contextos en los que pueden llegar a considerarse series geométricas convergentes es amplio y variado, incluso no exento de cierto exotismo.* El trabajo de investigación amplía el campo en el que hasta ahora había trabajado al alumno en prácticas.

Se trata de un texto que amplia los conocimientos de la suma de las progresiones geométricas entre otros aspectos que está dirigido más a los profesores.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Se puede observar una clara coherencia entre los libros de texto y el currículo vigente. Se esperaba que así fuese, dado que el currículo oficial, recogido en los reales decretos, marca los contenidos mínimos que deben ser enseñados en cada ciclo por lo que los libros deben contenerlos para cumplir su finalidad.

A pesar de ello, si cualquier aspecto faltase en el libro de texto, es responsabilidad del departamento el cumplir con el currículo.

En el Centro en el que se realizó las prácticas en la clase de 3º de E.S.O. se introducen las progresiones, si bien en el curso 4º de E.S.O. opción B se profundiza y se adquiere el conocimiento pretendido para esta etapa. El cuaderno empleado en 4º de E.S.O. profundiza en las progresiones aritméticas y geométricas a pesar de no recoge el conocimiento del interés simple y compuesto planteado por el currículo.

En el libro empleado en 1º Bachiller de Ciencias Sociales, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de la editorial Oxford, recoge lo exigido por el currículo. Define brevemente las sucesiones y las progresiones aritméticas y geométricas. A continuación trabaja los objetos más específicos de las matemáticas financieras: intereses bancarios (interés simple, interés compuesto, T.A.E.) y anualidades de capitalización y de amortización.

4.3. Coherencia de los libros

Las progresiones son un aspecto matemático que puede resultar difícil de relacionar y situar en el libro de texto.

En el libro de 3º de E.S.O., Matemáticas 3º ESO de la editorial Teide, las sucesiones y progresiones forma una lección completa. Esta lección se sitúa justo antes de comenzar con la geometría y como terminación del apartado de álgebra.

En 4º de E.S.O. las progresiones aritméticas y geométricas son los apartados décimo y undécimo de la 5º lección, Funciones y progresiones.

Estos aspectos matemáticos no se introducirían con los aspectos geométricos tratados en este curso ni con probabilidad y estadística. Se podrían impartir en el primer apartado del cuadernillo en donde se trabajan las potencias y las raíces, en el apartado de números y álgebra.

A pesar de que como se ha comentado en este curso actualmente no se trabajan los aspectos más relacionados con las matemáticas financieras como son el interés simple y compuesto, en los últimos problemas de funciones se trabaja con funciones que representan estos. Por lo tanto, este puede ser el enlace buscado en el cuadernillo a pesar de que los alumnos no sean conscientes de ello.

Con todo ello, se pasa de los tipos de funciones a las progresiones y los alumnos lo entienden como dos aspectos diferentes que se dan en una misma unidad. Esto se agrava más aún cuando el profesor habitual ha dado una parte y el alumno en prácticas la otra.

En 1º Bachiller se introducen antes que las funciones (Tema 3 Matemáticas financieras, Tema 4 Funciones) y se retoman en el Tema 6 como aproximación al concepto de límite.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de las progresiones aritméticas y geométricas en 4º ESO

Esta segunda parte está basada en el tema impartido durante el periodo de prácticas realizado en el I.E.S. Sancho III, “el Mayor”, de Tafalla con alumnos de 4º E.S.O.

Se realiza un análisis didáctico de la resolución por parte de los alumnos de problemas de progresiones aritméticas y progresiones geométricas. Para ello, se divide esta parte en cuatro capítulos. En el primer capítulo se lleva a cabo un análisis de cómo trata el libro el tema de progresiones aritméticas y geométricas. El segundo capítulo, hace mención a los problemas que pueden encontrar los alumnos en este tema. El tercer capítulo, analiza el proceso de estudio. Por último, el cuarto capítulo analiza la experimentación y los resultados esperados.

Capítulo 5:
Progresiones aritméticas y geométricas en el libro de texto de referencia

En este apartado se va a analizar la parte de progresiones de la lección número 5, Funciones y progresiones, para 4º de E.S.O. del libro realizado en el propio instituto, I.E.S. Sancho III “el Mayor” de Tafalla. Este es el libro de texto de referencia utilizado durante el periodo de prácticas en el Centro.

Se ha tomado como texto de referencia el artículo de *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*, de Juan D. Godino, Vincenç Font y Miguel R. Wilhelmi de 2006 para la realización de este apartado.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

Al analizar los objetos matemáticos involucrados, se realiza un análisis semejante al expuesto en el artículo análisis ontosemíotico de una lección sobre la suma y resta.

<table>
<tr><td>Lenguaje</td></tr>
<tr><td>Progresiones aritméticas

- Verbal
Números reales.
Sucesión de números, progresión aritmética, término, diferencia, término general, medios aritméticos o diferenciales, suma de términos.
Interpolar.
- Simbólico
a_n; $a_1, a_2, a_3 \dots$; d ; S_n ; $+$; $-$; . ; $=$; “(” ; ”)” ; $a_3 = (a_1 + d) + d$</td></tr>
<tr><td>Progresiones geométricas

- Verbal
Números reales.
Sucesión de números, progresión geométrica, término, razón, término general, medios geométricos o proporcionales, producto, suma de términos.
Interpolar.
- Simbólico
a_n; $a_1, a_2, a_3 \dots$; r ; P_n ; S_n ; S ; $+$; $-$; . ; / ; ^{n} ; “(” ; ”)” ; $<$; $=$;
$P_n = X_1{}^n . r^{n(n-1)/2}$</td></tr>
</table>

Conceptos
Previos - Números reales - Propiedades de las potencias - Interpolación - Sucesiones
Emergentes - Progresiones aritméticas - Progresiones geométricas

Propiedades
Progresiones aritméticas - Término general de una progresión aritmética Conociendo el 1er término: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ Conociendo el valor que ocupa cualquier otro término de la progresión: $a_n = a_m + (n - m) \cdot d$ - Interpolación de términos. Construir una progresión aritmética que tenga por extremos los números dados. - Suma de términos equidistantes. Se cumple que la suma de términos equidistantes es igual a la suma de los extremos. - Suma de n términos consecutivos. La mitad de la suma del primer y último término por el número de estos nos da la suma de n términos consecutivos.
Progresiones geométricas - Término general de una progresión geométrica Si conocemos el 1er término: $a_n = a_1 . r^{n-1}$ Si conocemos el valor que ocupa cualquier otro término de la progresión: $a_n = a_m . r^{n-m}$ - Interpolación de términos Construir una progresión geométrica que tenga por extremos los números dados. - Suma de n términos consecutivos Conociendo el primer término y la razón se obtiene la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. - Suma de los términos de una progresión geométrica decreciente Conociendo el primer término y la razón se obtiene la suma de todos los términos de una progresión geométrica decreciente. - Producto de dos términos equidistantes Se cumple que el producto de términos equidistantes es igual al producto de los extremos. - Producto de los n primeros términos Conociendo el primer término y la razón se obtiene el producto de los n primeros términos de una progresión geométrica.

Situaciones
- Problemas descontextualizados de: hallar las incógnitas para que los términos estén en progresión, hallar el término n-ésimo, hallar el dato que falta a partir de los dados, interpolar los medios aritméticos / geométricos, suma de los términos. - Problemas contextualizados en los que: se hallan los valores de los términos sabiendo la suma de estos, se calcula la suma de los términos.

Procedimientos
- Aplicación de la propiedad, del término general, de la fórmula del producto de los n primeros términos de la progresión, de la suma de los términos. - Descontextualización del enunciado del problema.

Argumentos
- Comprobación de las propiedades en casos particulares. - Justificación de las propiedades utilizando elementos genéricos.

Figura 22. *Configuración epistémica "empírica" de las progresiones aritméticas y geométricas*

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

En una misma lección se trabajan las funciones y progresiones. Los temas dados se presentan como los puntos décimo y decimoprimero de la lección 5.

LECCIÓN 5 FUNCIONES Y PROGRESIONES	
I	El concepto de función.
II	Construcción de funciones a partir de una dada.
III	Estudio de la paridad de una función.
IV	Monotonía y extremos.
V	Tendencia. Continuidad. Discontinuidades.
VI	Operaciones elementales con funciones.
VII	Funciones racionales enteras.
VIII	Funciones racionales fraccionarias.
IX	Funciones exponenciales.
X	Progresiones aritméticas.
XI	Progresiones geométricas.

Figura 23. *Índice lección 5*

No hay una introducción para recordar lo dado en cursos anteriores de sucesiones y progresiones. Es objeto del profesor realizar esta primera introducción si la ve pertinente.

Ambos apartados, X.- Progresiones aritméticas y XI.- Progresiones geométricas, poseen una estructura similar:

X.- PROGRESIONES ARITMÉTICAS	XI.- PROGRESIONES GEOMÉTRICAS
1.-Definición	1.-Definición
2.-Término general	2.-Término general
3.- Interpolación de n medios aritméticos o diferenciales.	3.- Interpolación de n medios geométricos o proporcionales.
	4.- Producto de lo n primeros términos.
4.-Suma de los n primeros términos.	5.-Suma de los n primeros términos.
	6.-Suma de todos los términos.

Figura 24. *Estructura apartados X y XI*

En ambos se desarrolla el tema y los algoritmos que aparecen son con lápiz y papel. No se introducen técnicas alternativas a estos algoritmos.

No hay ninguna especie de “Resumen” ni “Recuerda” en el que se presente a los alumnos aquello que es esencial de lo que se ha estudiado anteriormente.

Tampoco se propone ninguna autoevaluación.

Durante el apartado de teoría no hay ningún ejercicio ni problema explicativo. No se encuentra en el libro ningún ejercicio o problema resuelto. Estos dos aspectos suponen una enorme carencia que tiene que ser compensada por el profesor.

Al terminar el apartado de teoría se encuentra el apartado de problemas y por último las soluciones numéricas de estos ejercicios / problemas. Los problemas del tema X.- Progresiones aritméticas van del 101 al 118 inclusive, mientras que los del tema XI.- Progresiones geométricas van del 119 al 132. Encontramos primero ejercicios y problemas descontextualizados y al final problemas contextualizados de cada apartado. Son problemas respetuosos con el medio ambiente que no fomentan el consumo y en los que se recuerdan las piezas geométricas regulares planas.

En todo momento nombra a los términos de las sucesiones mediante X_1, X_2, X_3 .... Esto no supone un problema puesto que se define correctamente, si bien se hubiese preferido utilizar a_1, a_2, a_3 ... para los términos de las sucesiones.

5.3. Análisis ontosemiótico de configuraciones parciales

X.- Progresiones aritméticas.

1.- Los autores comienzan con la definición genérica y completa del aspecto matemático:

1.- Definición

Una sucesión de números reales x_1, x_2, x_3… es una *progresión aritmética* si cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad constante, llamada *diferencia* y representada por d.

* * *

Por tanto, decir que x_1, x_2, x_3… es una progresión aritmética de diferencia d equivale a decir que $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3=\dots=d$

Figura 23. *Definición progresión aritmética*

La definición es correcta y completa. A continuación justifica la propiedad utilizando elementos genéricos.

Los alumnos deben de tener los conocimientos previos de que números son los números reales y qué es una sucesión de números. Define la sucesión de números reales como X_1, X_2, X_3 .... Del mismo modo da nombre a esa cantidad constantes, diferencia, y define la manera de representarla, d.

Se emplea el lenguaje verbal y simbólico sin llevar a ninguna confusión. No se utiliza el gráfico.

Es correcto comenzar con la definición que nos da la propiedad específica de las progresiones aritméticas.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio resuelto que facilite la comprensión del aspecto tratado. Aspecto que complementa el profesor.

Se han tenido en cuenta los problemas finales de la unidad relacionados con esta primera parte para realizar la descripción de la configuración epistémica asociada a esta primera sección:

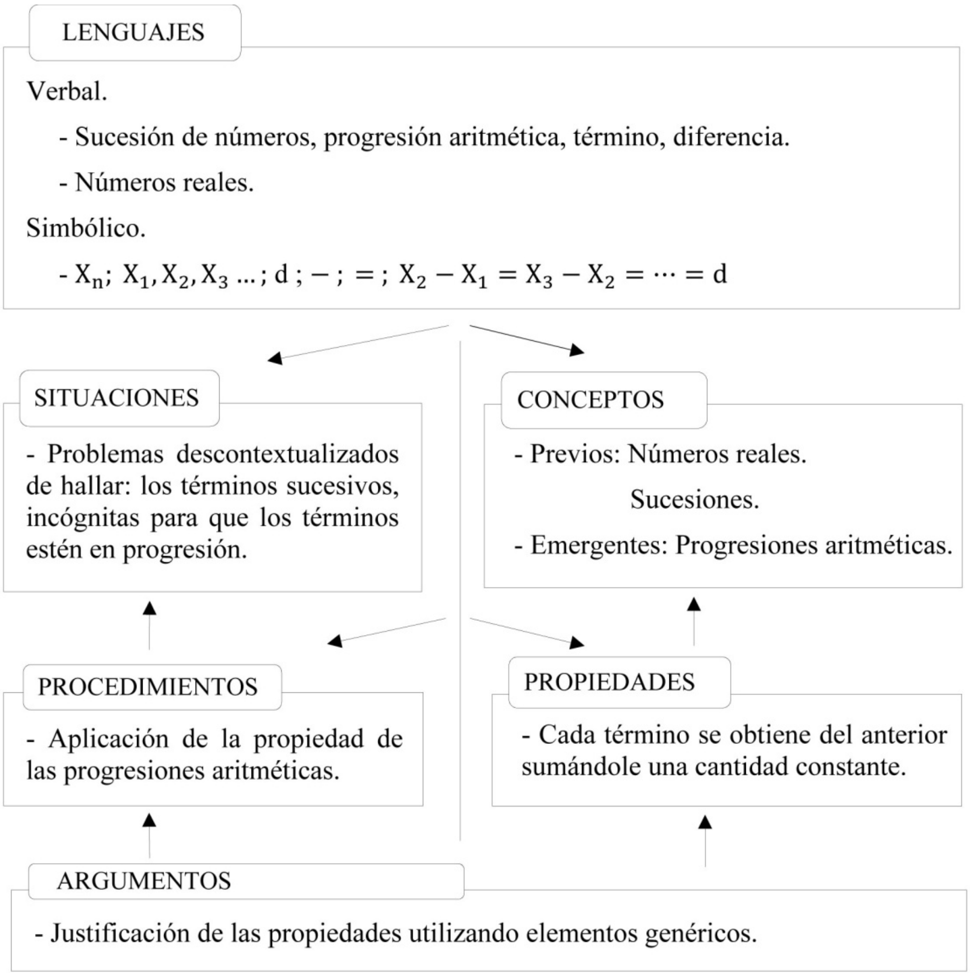
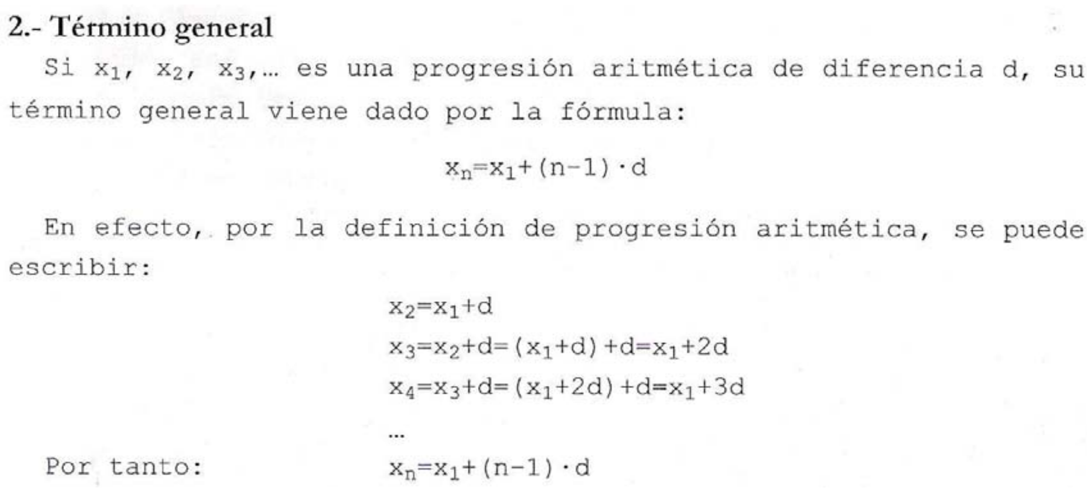


Figura 24. *Configuración epistémica de la definición de progresión aritmética*

2.- Los autores definen el término general:



2.- Término general

Si x_1, x_2, x_3,… es una progresión aritmética de diferencia d, su término general viene dado por la fórmula:

$$x_n = x_1 + (n-1) \cdot d$$

En efecto, por la definición de progresión aritmética, se puede escribir:

$$x_2 = x_1 + d$$
$$x_3 = x_2 + d = (x_1 + d) + d = x_1 + 2d$$
$$x_4 = x_3 + d = (x_1 + 2d) + d = x_1 + 3d$$
$$\ldots$$

Por tanto: $x_n = x_1 + (n-1) \cdot d$

Figura 25. *Término general progresión aritmética*

Se presenta el término general y después se muestra como se halla.

Se toma los valores X_1, X_2, X_3 ... como valores genéricos de una progresión aritmética. Del mismo se define la diferencia como d.

Se emplea el lenguaje verbal y simbólico sin llevar a ninguna confusión. No se utiliza el gráfico.

La demostración de cómo se obtiene el término general es sencilla y clara, no debe suponer ningún problema a los estudiantes.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio que facilite la comprensión del aspecto tratado.

Descripción de la configuración epistémica asociada a esta segunda sección:

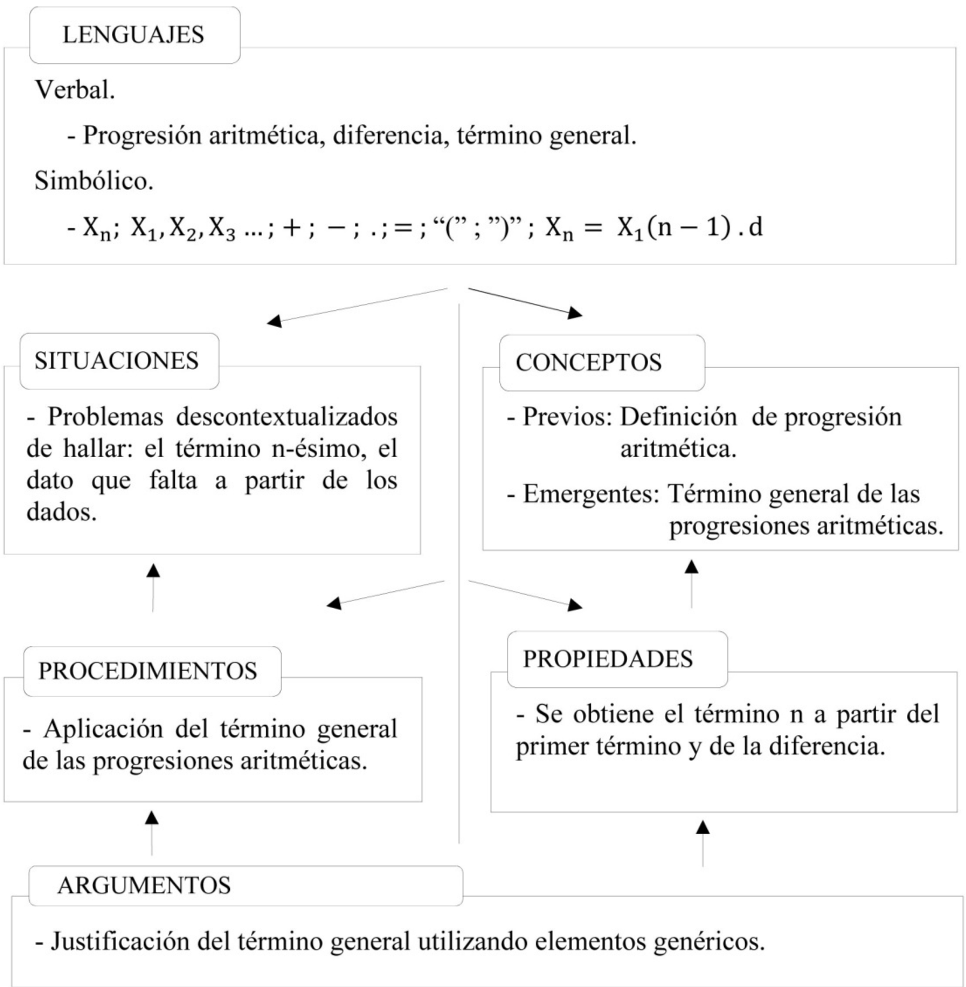


Figura 26. *Configuración epistémica del término general de progresión aritmética*

3.- En este apartado se trata la interpolación de n medios aritméticos.

3.- Interpolación de n medios aritméticos o diferenciales

Interpolar n medios aritméticos entre dos números p y q es intercalar n términos entre ellos de manera que estén en progresión aritmética, siendo p y q los *extremos*.

Figura 27. *Interpolación de n medios aritméticos o diferenciales*

Se emplea el lenguaje verbal y simbólico sin llevar a ninguna confusión. No se utiliza el gráfico.

Define p y q como los extremos de la sucesión y n el número de términos entre ellos. A pesar de que se define cada término el llamar n al número de término entre los extremos puede llevar a la confusión, puesto que hasta ahora n se ha tomado como el número de términos de la sucesión siendo en este caso el número de términos de la sucesión m = n + 2. A continuación se presenta un dibujo utilizado para explicar la lección realizado por el profesor:

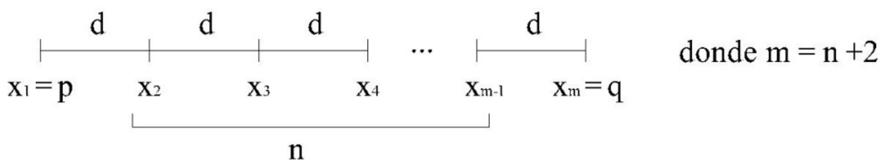


Figura 28. *Explicación interpolación de n medios aritméticos o diferenciales*

Se pretende que los alumnos hallen esos valores mediante sus propias fórmulas o tanteo. Esto puede ser correcto para casos en los que los números sean “sencillos”. El profesor optó por aportar una fórmula que se obtiene a partir del término general y del dibujo presentado. Para la compresión de esta explicación los alumnos deben de tener los conocimientos previos de las progresiones aritméticas dados.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio que facilite la comprensión del aspecto tratado.

Descripción de la configuración epistémica asociada a esta tercera sección:

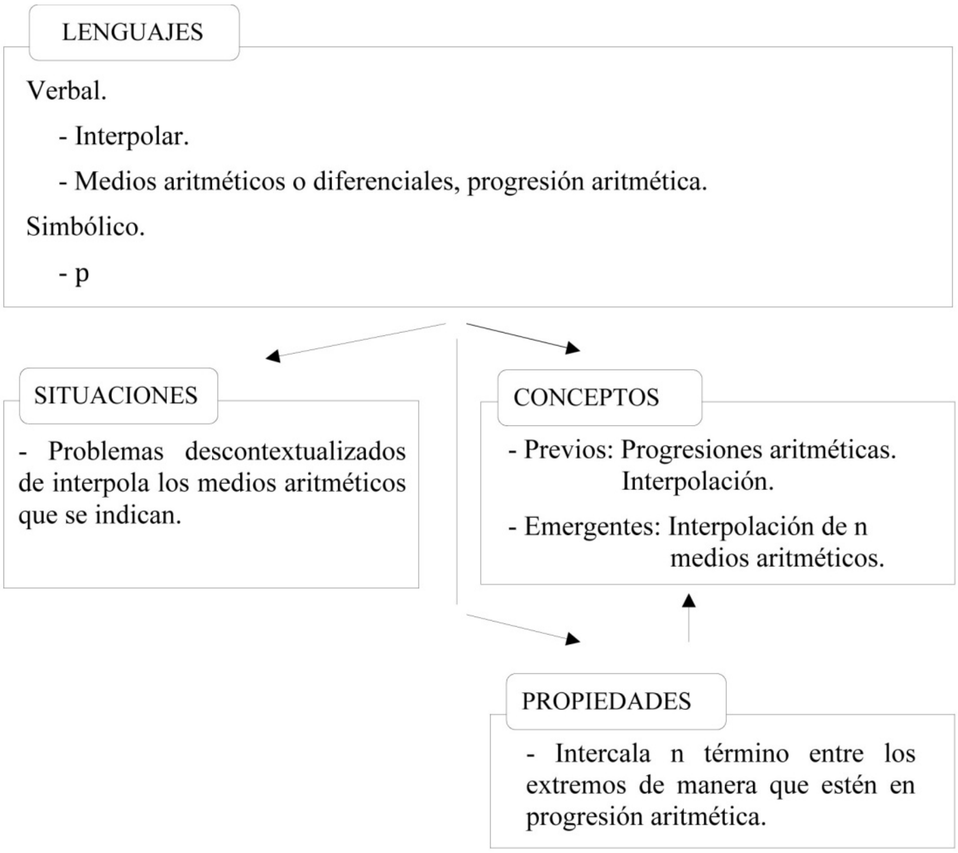


Figura 29. *Configuración epistémica de la interpolación de n medios aritméticos o diferenciales*

4.- En este último apartado de las progresiones aritméticas se trabaja la suma de los n primeros términos:

4.- Suma de los n primeros términos

Si x_1, x_2, x_3, … es una progresión aritmética, la suma de sus n primeros términos, S_n, viene dada por la fórmula:

$$S_n=\frac{x_1+x_n}{2}\cdot n$$

En efecto, por un lado:

$$S_n=x_1+x_2+x_3+...+x_n=x_1+(x_1+d)+(x_1+2d)+...+[x_1+(n-1)d]=$$
$$=nx_1+[d+2d+...+(n-1)d]$$

Por otro:

$$S_n=x_n+x_{n-1}+x_{n-2}+...+x_1=x_n+(x_n-d)+(x_n-2d)+...+[x_n-(n-1)d]=$$
$$=nx_n-[d+2d+...+(n-1)d]$$

Sumando ambas expresiones, queda:

$$2\cdot S_n=nx_1+nx_n=(x_1+x_n)\cdot n$$

Despejando S_n:

$$S_n=\frac{x_1+x_n}{2}\cdot n$$

Figura 30. *Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética*

Se presenta el término general y después se muestra como se halla.

Los alumnos deben de tener los conocimientos previos de las progresiones aritméticas dados.

Se toma los valores X_1, X_2, X_3 ... como valores genéricos de una progresión aritmética. Del mismo se define la suma de sus n primeros términos como S_n.

Se emplea el lenguaje verbal y simbólico sin llevar a ninguna confusión. No se utiliza el gráfico.

Es correcta la demostración si bien en la mayoría de libros observados se relata la historia de Gauss que ayuda a comprender mejor el aspecto tratado.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio que facilite la comprensión del aspecto tratado.

Descripción de la configuración epistémica asociada a esta cuarta sección:

LENGUAJES

Verbal.

- Progresión aritmética, suma de términos.

Simbólico.

- X_n; $X_1, X_2, X_3 \ldots$; S_n ; $+$; $-$; $.$; $/$; $=$; "(" ; ")"

SITUACIONES

- Problemas descontextualizados de suma de términos.
- Problemas contextualizados en los que: se hallan los valores de los términos sabiendo la suma de estos, se calcula la suma.

CONCEPTOS

- Previos: Progresión aritmética.
- Emergentes: Suma de los n primeros término de una progresión aritmética.

PROCEDIMIENTOS

- Descontextualización del enunciado del problema.
- Aplicación del término general y de la suma de los términos.

PROPIEDADES

- Se obtiene la suma de los n primeros términos conociendo el primer y el último término.

ARGUMENTOS

- Justificación del término general utilizando elementos genéricos.

Figura 31. *Configuración epistémica de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética*

Apartado XI.- Progresiones geométricas

1.- Los autores comienzan con la definición genérica y completa del aspecto matemático:

1.- Definición

Una sucesión de números reales x_1, x_2, x_3... es una *progresión geométrica* si cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad constante, llamada *razón* y representada por r.

* * *

Por tanto, decir que x_1, x_2, x_3... es una progresión geométrica de razón r equivale a decir que $x_2/x_1=x_3/x_2=x_4/x_3= \dots =r$.

Figura 32. *Definición progresión geométrica*

La definición no es completa. El profesor debe añadir que la razón no puede tomar el valor cero. Del mismo modo se puede explicar con ejemplos que la razón puede ser positiva o negativa y que no tiene por qué ser un número entero. A continuación justifica la propiedad utilizando elementos genéricos.

Los alumnos deben de tener los conocimientos previos de que números son los números reales y qué es una sucesión de números. Define la sucesión de números reales como X_1, X_2, X_3 .... Del mismo modo da nombre a esa cantidad constantes por la que se multiplican, razón, y define la manera de representarla, r.

Se emplea el lenguaje verbal y simbólico sin llevar a ninguna confusión. No se utiliza el gráfico.

Es correcto comenzar con la definición que nos da la propiedad específica de las progresiones geométricas.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio que facilite la comprensión del aspecto tratado.

Descripción de la configuración epistémica asociada a esta primera sección:

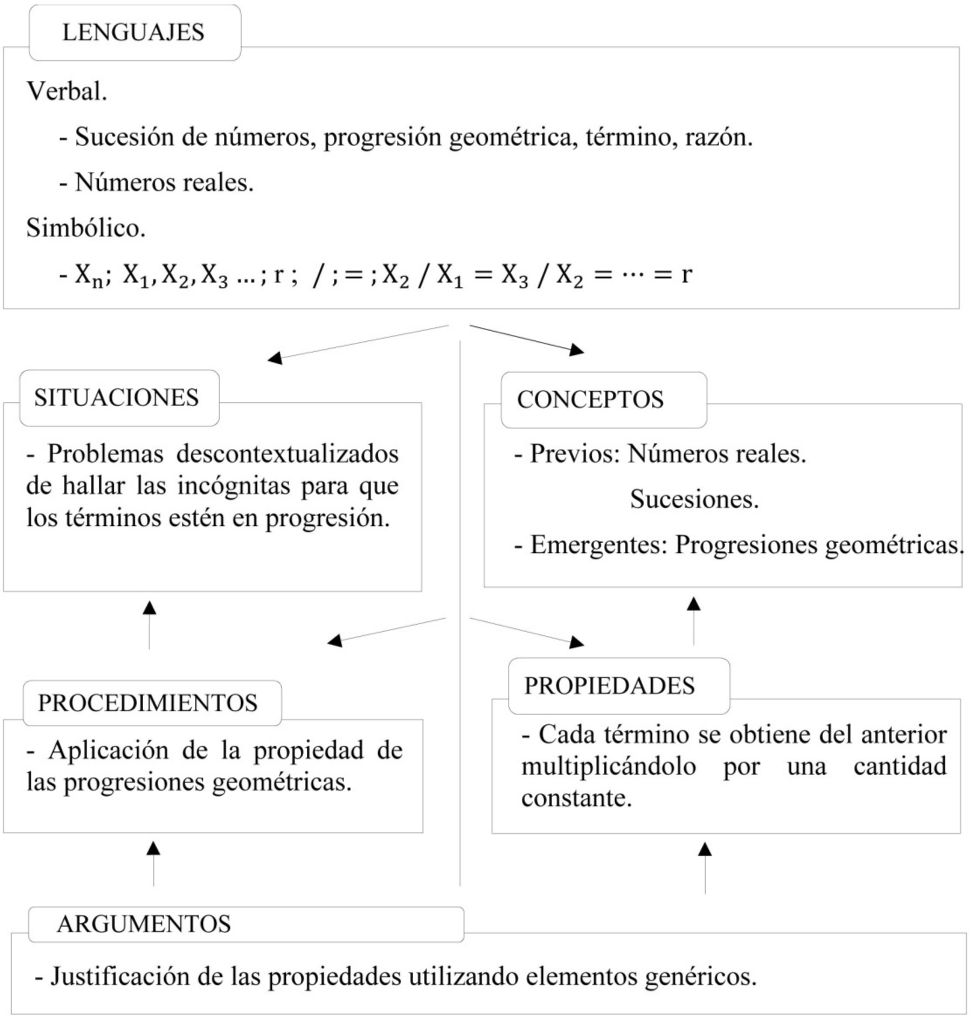


Figura 33. *Configuración epistémica de la definición de progresión geométrica*

2.- Los autores definen el término general:

2.- Término general

Si x_1, x_2, x_3, … es una progresión geométrica de razón r, su término general viene dado por la fórmula:

$$x_n = x_1 \cdot r^{n-1}$$

En efecto, por la definición de progresión geométrica, se puede escribir:

$$x_2 = x_1 \cdot r$$
$$x_3 = x_2 \cdot r = (x_1 \cdot r) \cdot r = x_1 \cdot r^2$$
$$x_4 = x_3 \cdot r = (x_1 \cdot r^2) \cdot r = x_1 \cdot r^3$$
$$\ldots$$

Por tanto: $x_n = x_1 \cdot r^{n-1}$

Figura 34. *Término general progresión geométrica*

Se presenta el término general y después se muestra como se halla.

Se toma los valores X_1, X_2, X_3 ... como valores genéricos de una progresión geométrica. Del mismo se define la razón como r.

Se emplea el lenguaje verbal y simbólico sin llevar a ninguna confusión. No se utiliza el gráfico.

La demostración de cómo se obtiene el término general es sencilla y clara, no debe suponer ningún problema a los estudiantes.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio que facilite la comprensión del aspecto tratado.

Descripción de la configuración epistémica asociada a esta segunda sección:

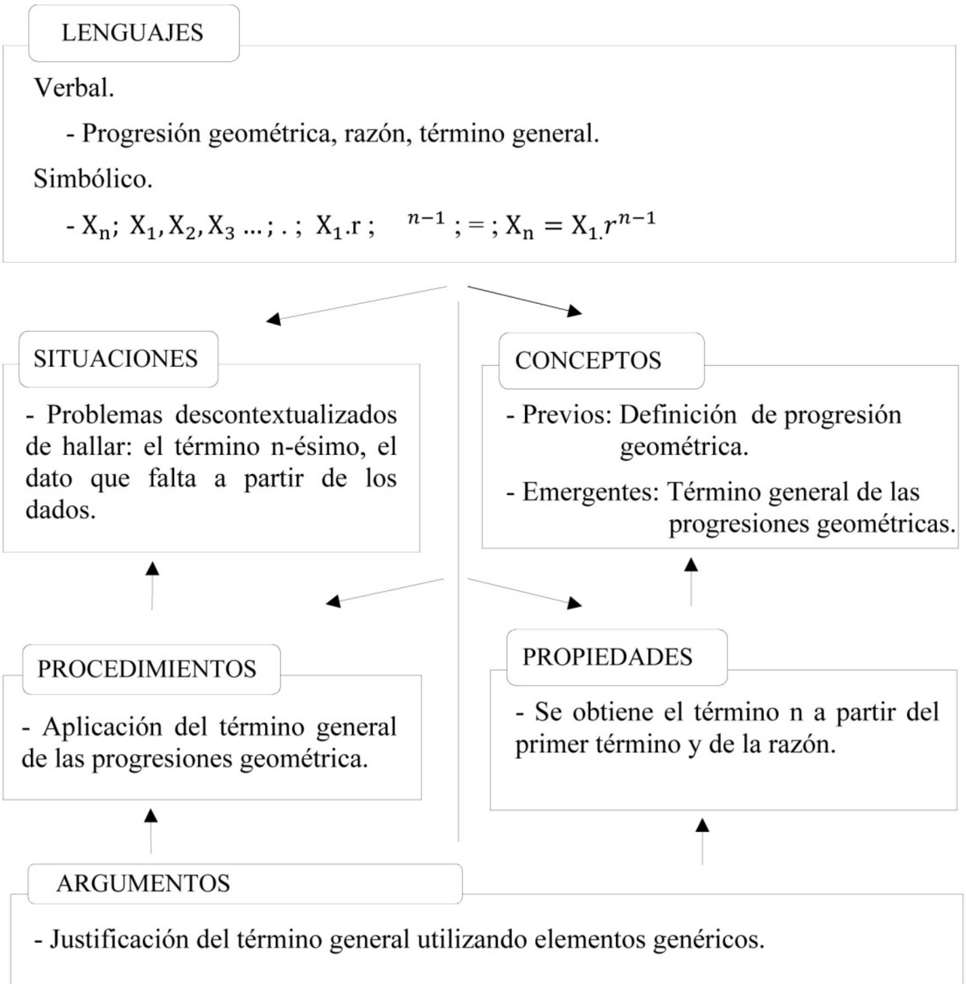
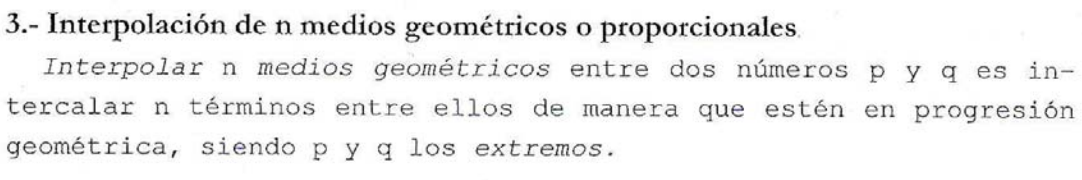


Figura 35. *Configuración epistémica del término general de progresión geométrica*

3.- Se trata la interpolación de n medios aritméticos.



3.- Interpolación de n medios geométricos o proporcionales

Interpolar n *medios geométricos* entre dos números p y q es intercalar n términos entre ellos de manera que estén en progresión geométrica, siendo p y q los *extremos*.

Figura 36. *Interpolación de n medios geométricos o proporcionales*

Se emplea el lenguaje verbal y simbólico sin llevar a ninguna confusión. No se utiliza el gráfico.

Define p y q como los extremos de la sucesión y n el número de términos entre ellos. A pesar de que se define cada término el llamar n al número de término entre los extremos puede llevar a la confusión, puesto que hasta ahora n se ha tomado como el número de términos de la sucesión siendo en este caso el número de términos de la sucesión m = n + 2.

Se pretende que los alumnos hallen esos valores mediante sus propias fórmulas o tanteo. Esto puede ser correcto para casos en los que los números sean “sencillos”. El profesor optó por aportar una fórmula que se obtiene a partir del término general. Para la compresión de esta explicación los alumnos deben de tener los conocimientos previos de las progresiones geométricas dados.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio que facilite la comprensión del aspecto tratado.

Descripción de la configuración epistémica asociada a esta tercera sección:

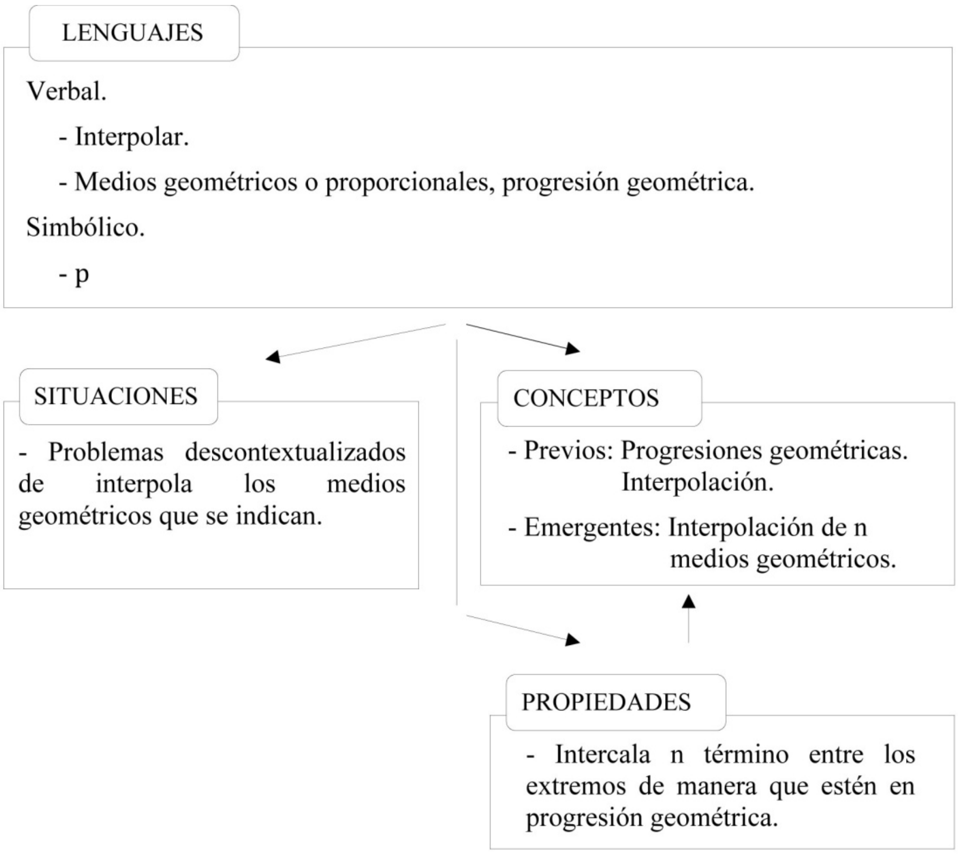
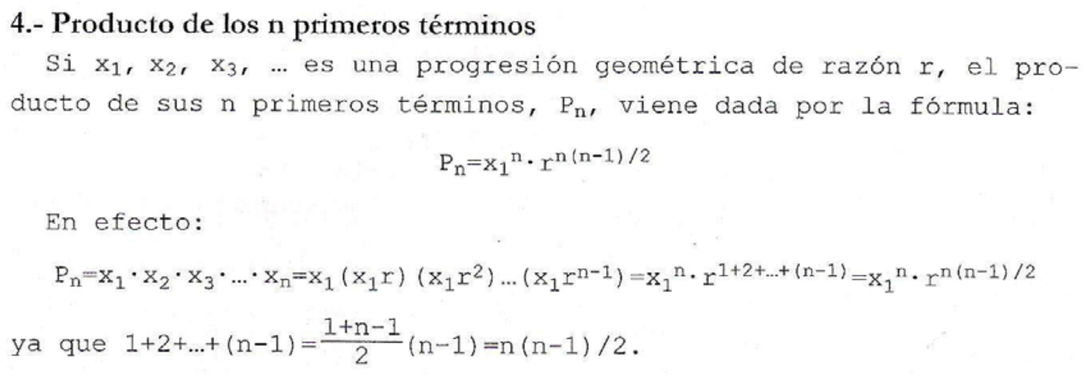


Figura 37. *Configuración epistémica de la interpolación de n medios geométricos o proporcionales*

4.- Se trata el producto de los n primeros términos de una sucesión geométrica.



4.- Producto de los n primeros términos

Si x_1, x_2, x_3, … es una progresión geométrica de razón r, el producto de sus n primeros términos, P_n, viene dada por la fórmula:

$$P_n = x_1{}^n \cdot r^{n(n-1)/2}$$

En efecto:

$$P_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1(x_1r)(x_1r^2)\ldots(x_1r^{n-1}) = x_1{}^n \cdot r^{1+2+\ldots+(n-1)} = x_1{}^n \cdot r^{n(n-1)/2}$$

ya que $1+2+\ldots+(n-1) = \frac{1+n-1}{2}(n-1) = n(n-1)/2$.

Figura 38. *Producto de los n primeros términos de una progresión geométrica*

Se presenta la fórmula y después se muestra como se halla.

Se toma los valores X_1, X_2, X_3 ... como valores genéricos de una progresión geométrica. Del mismo se define la razón como r y el producto de sus n primeros términos como P_n.

Se emplea el lenguaje verbal y simbólico sin llevar a ninguna confusión. No se utiliza el gráfico.

La demostración de cómo se obtiene el término general se podía haber expresado como las anteriores de forma vertical en vez de en horizontal que parece más densa y no facilita su compresión. Además en la explicación no se explica que

$$1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{1+n-1}{2} - (n-1) = n.(n-1)/2$$

sea la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética. Conociendo la dificultad de la demostración debería ser expresado mejor.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio que facilite la comprensión del aspecto tratado.

Descripción de la configuración epistémica asociada a esta cuarta sección:

LENGUAJES

Verbal.

- Progresión geométrica, razón, producto

Simbólico.

- X_n; $X_1, X_2, X_3 \ldots$; P_n ; . ; / ; ^{n}; "(" ; ")" ; = ; $P_n = X_1{}^n . r^{n(n-1)/2}$

SITUACIONES

- Problemas descontextualizados de hallar el dato que falta a partir de los dados.

CONCEPTOS

- Previos: Progresiones geométricas.
  Progresiones aritméticas.
- Emergentes: Producto de los n primeros término de una progresión geométrica.

PROCEDIMIENTOS

- Aplicación de la fórmula del producto de los n primeros términos de la progresión.

PROPIEDADES

- Se obtiene el producto de los n primeros términos a partir del primer término y la razón.

ARGUMENTOS

- Justificación del término general utilizando elementos genéricos.

Figura 39. *Configuración epistémica del producto de los n primeros términos*

5.-Se trabaja la suma de los n primeros términos:

5.- Suma de los n primeros términos

Si $x_1, x_2, x_3, \ldots$ es una progresión geométrica, la suma de sus n primeros términos, S_n, viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{x_n \cdot r - x_1}{r-1}$$

En efecto:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$

Si se multiplican los dos miembros por r, queda:

$$S_n \cdot r = x_1 \cdot r + x_2 \cdot r + x_3 \cdot r + \ldots + x_{n-2} \cdot r + x_{n-1} \cdot r + x_n \cdot r$$

O lo que es lo mismo:

$$S_n \cdot r = x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n + x_n \cdot r$$

De esta identidad se resta la primera:

$$S_n \cdot r - S_n = x_n \cdot r - x_1$$

Se saca factor común S_n:

$$S_n (r-1) = x_n \cdot r - x_1$$

Se despeja S_n:

$$S_n = \frac{x_n \cdot r - x_1}{r-1}$$

Figura 40. *Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica*

Se presenta el término general y después se muestra como se halla.

Los alumnos deben de tener los conocimientos previos de las progresiones geométricas dados.

Se toma los valores X_1, X_2, X_3 ... como valores genéricos de una progresión geométrica. Del mismo se define la suma de sus n primeros términos como S_n.

Se emplea el lenguaje verbal y simbólico sin llevar a ninguna confusión. No se utiliza el gráfico.

La demostración es correcta y se explica paso a paso, si bien se puede aplicar la fórmula del término general para expresar la suma de los n primeros término, S_n, en función del primer término, X_1, y la razón, r. Además esto nos facilitaría la demostración de siguiente apartado.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio que facilite la comprensión del aspecto tratado.

Descripción de la configuración epistémica asociada a esta quinta sección:

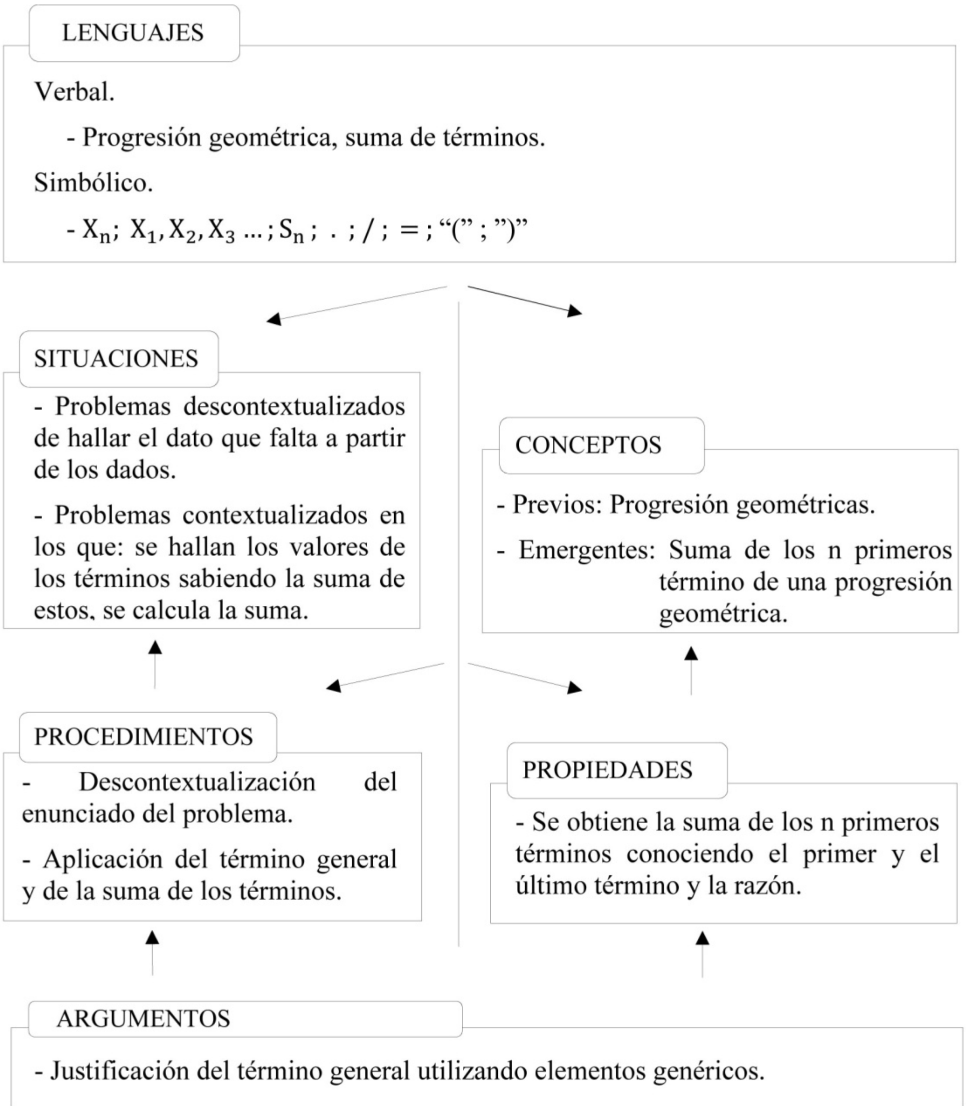


Figura 41. *Configuración epistémica de la suma de los n primeros términos*

6.- En esta última sección de las progresiones geométricas se trabaja la suma de todos términos:

6.- Suma de todos los términos

Si x_1, x_2, x_3,... es una progresión geométrica de razón comprendida entre -1 y 1 $(-1<r<1)$, la suma de todos sus términos, S, viene dada por la fórmula:

$$S=\frac{x_1}{1-r}$$

No la vamos a demostrar ahora, lo haremos más adelante.

Figura 42. *Suma de todos los términos de una progresión geométrica decreciente*

El enunciado no está completo. Sería más correcto: Suma de todos los término de una progresión geométrica decreciente.

Se presenta el término general y se expresa que no se va a demostrar.

Los alumnos deben de tener los conocimientos previos de las progresiones geométricas dados.

Se toma los valores X_1, X_2, X_3 ... como valores genéricos de una progresión geométrica. Del mismo se define la suma de sus términos como S.

Se echa en falta algún ejemplo concreto o ejercicio que facilite la comprensión del aspecto tratado.

Descripción de la configuración epistémica asociada a esta quinta sección:

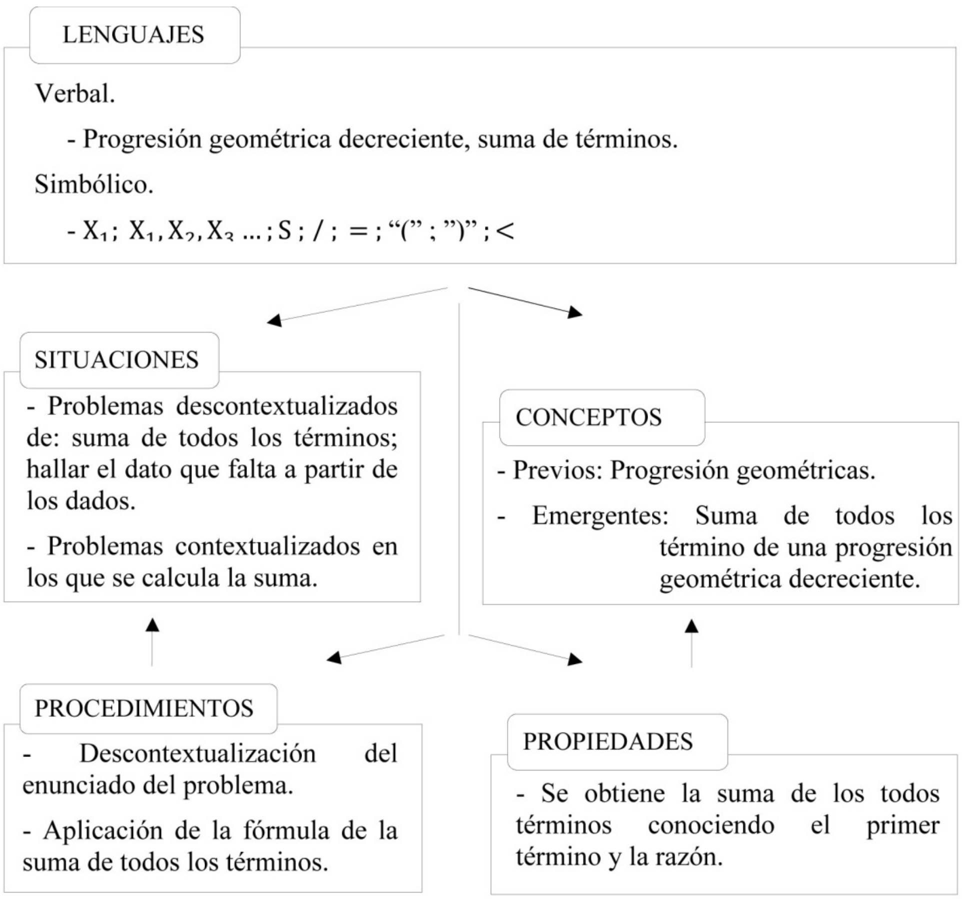


Figura 41. *Configuración epistémica de la suma de todos los términos*

5.4. Otros aspectos relevantes

Desde el principio se pretendió seguir con el material, el cuadernillo realizado por el propio Centro, empleado habitualmente en el aula de 4º de la E.S.O. opción B. A pesar de ello, para la preparación de las clases se emplearon otros libros como el de Santillana y el de Anaya de 4º E.S.O. de matemáticas para obtener una visión global del aspecto matemático que se pretendía impartir.

En ningún momento se pretendió desconfiar del material, puesto que fui alumno en su día del Centro y por experiencia sabía que eran en el aspecto matemático correctos. Estos cuadernillos se emplean en los cursos superiores: 4º E.S.O. y en Bachillerato, si bien se está trabajando en la elección de libros para estos cursos para los próximos años y dejar estos cuadernillos como apuntes para el profesorado.

Así pues, se decidió seguir el cuadernillo a la vez que se introdujeron aspectos observados en los libros mencionados anteriormente. La configuración final se recoge en el Anexo A.

A continuación se menciona como se trabajo y que aspectos se añadieron:

X.- Progresiones aritméticas.

1.-Definición:

La definición es correcta y completa. Conocedor de la dificultad que suponen se realizaron a continuación un par de ejercicios en los que se aplica la propiedad de la cantidad constante.

2.- Término general:

Se aportó un término en el que no es necesario el conocimiento del primer término de la sucesión, X_1, si no uno cualquiera, X_m:

$$X_m = X_1 + (m-1).d \qquad X_n = X_1 + (n-1).d$$

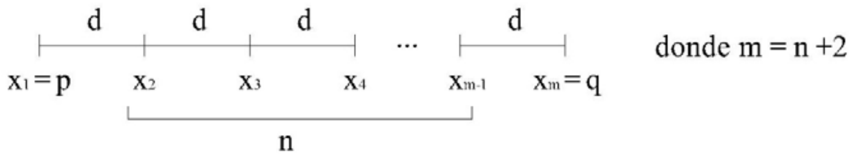
$$X_1 = X_m - (m-1).d \qquad X_n = X_m - (m-1).d + (n-1).d$$

$$X_n = X_m + (n-m).d$$

Tras la explicación teórica se realizaron ejercicios para que supiesen que representa cada elemento de los términos dados.

3.- Interpolación de n medios aritméticos o diferenciales:

Se completó con un término general que se argumentó. Para ello se utilizó el siguiente gráfico y explicó que al interpolar n medios aritméticos se forma una progresión aritmética de n+2 términos.



A continuación se les dio el término general para hallar la distancia:

$$X_1 = p \qquad X_m = X_1 + (\mathrm{m} - 1).\,\mathrm{d}$$

$$X_m = q \qquad q = p + (\mathrm{n} + 2 - 1).\,\mathrm{d}$$

$$m = n + 2 \qquad q = p + (\mathrm{n} + 1).\,\mathrm{d}$$

$$d = \frac{q-p}{n+1}$$

4.- Suma de los n primeros términos:

Se comenzó realizando una pequeña introducción proponiéndoles que hallasen la suma de los primeros diez números enteros mediante la calculadora. A continuación se les propuso lo mismo pero con los cien primeros. Se les comentó que este ejercicio se le pidió a Gauss y él lo resolvió de la siguiente manera, y se procedió a la teoría del cuadernillo.

Se realizaron abundante ejercicios y problemas.

XI.- Progresiones geométricas.

1.-Definición:

Se completó la definición diciendo que la razón no podía tener valor cero. Se añadió que la razón no tiene por qué ser de signo positivo ni se un número entero y se expusieron dos ejemplos:

$$\mathrm{r} = -2 \;\rightarrow\; 3, -6, 12, -24$$

$$\mathrm{r} = 1/4 \;\rightarrow\; 12, 3, 0.75, 01875, \ldots$$

2.- Término general:

Se aportó un término en el que no es necesario el conocimiento del primer término de la sucesión, X_1, si no uno cualquiera, X_m:

$$X_m = X_1.\,r^{m-1} \qquad X_n = X_1.\,r^{n-1}$$

$$X_1 = \frac{X_m}{r^{m-1}} \qquad X_n = \frac{X_m}{r^{m-1}}.\,r^{n-1}$$

$$X_n = X_m.\,r^{(n-1)-(m-1)}$$

$$X_n = X_m.\,r^{n-m}$$

Tras la explicación teórica se realizaron ejercicios para que supiesen que representa cada elemento de los términos dados.

3.- Interpolación de n medios aritméticos o diferenciales:

Se completó con un término general para hallar la razón que se argumentó. Se explicó que al interpolar n medios geométricos se forma una progresión geométrica de n+2 términos:

$$X_1 = p \qquad\qquad X_m = X_1 . r^{m-1}$$

$$X_m = q \qquad\qquad q = p . r^{n+2-1}$$

$$m = n + 2 \qquad\qquad r = \sqrt[n+1]{\frac{q}{p}}$$

5.- Suma de los n primeros términos:

Aplicando el término general se dio la suma de los n primeros términos en función del primer término y la razón:

$$S_n = \frac{X_n . r - X_1}{r-1} \qquad\qquad S_n = \frac{X_1 . r^{n-1} . r - X_1}{r-1}$$

$$X_n = X_1 . r^{n-1} \qquad\qquad S_n = \frac{X_1 . r^n - X_1}{r-1}$$

$$S_n = X_1 . \frac{r^n - 1}{r-1}$$

6.- Suma de todos los términos:

Se completó el título, Suma de todos los términos de una progresión geométrica decreciente; se realizaron diferentes gráficas para r >1, 1 > r > 0, 0 > r > -1 y -1 > r; y se argumentó el término para 1 > r > 0.

Al no conocer el término límite de una función se trato de tendencia y se dieron valores con la calculadora.

Capítulo 6:
Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se recogen los errores y dificultades esperados que cometa el alumno a la hora de enfrentarse a esta unidad didáctica sobre progresiones aritméticas y geométricas.

6.1. Dificultades

Previsibles.

Es necesaria la realización de un gran número de ejemplos y ejercicios con el fin de que comprendan y se habitúen a la notación.

Mayor dificultad en el empleo de las progresiones geométricas que en el de las progresiones aritméticas.

Dificultad de comunicación. Los alumnos son muy poco participativos. Supuso una dificultad al no saber si comprendían los aspectos tratados y a la hora de hallar las dificultades y errores.

Hallados

Encuentran dificultad al aplicar la propiedad característica de cada uno de los tipos de progresiones trabajados. Les cuesta calcular una incógnita o un valor para que una serie de números estén en progresión aritmética o geométrica.

Al definir y razonar determinados aspectos a pesar de entenderlos. Por ejemplo, al razonar la solución de un ejercicio en el que se pide hallar el número de términos de la progresión, ninguno da como valido un valor negativo pero la gran mayoría no especifica que n deba ser un número natural.

Resolución de sistemas en el que alguna ecuación es de segundo grado, como sucede a menudo en ejercicios de progresiones geométricas.

El empleo de números irracionales.

El trabajo con exponentes y radicales, falta de conocimientos de las propiedades de estos aspectos.

6.2. Errores y su posible origen

La falta de conocimientos de las propiedades de las potencias los lleva a cometer errores.

La dificultad del trabajo con números irracionales los lleva a equivocarse. Algunos de los estudiantes dan valores aproximados, reduciéndolos a números racionales.

Al tener que simplificar expresiones algebraicas un grupo notable de alumnos comete errores, especialmente con exponentes y números irracionales como se ha comentado.

Interpolación de n medios tanto en progresiones aritméticas como en geométricas. Puede ser debido a que no se explica adecuadamente o de manera superficial en el libro y los alumnos no trabajan este aspecto al resultarles costo y dudar de su importancia.

Capítulo 7: El proceso de estudio

En este capítulo se detallan las 6 sesiones impartidas para tratar el tema de progresiones aritméticas y geométricas. El número de sesiones se ajustó a la planificación que llevaba el profesor de este curso de 4º E.S.O. del I.E.S. Sancho III "el Mayor" de Tafalla. Antes de la evaluación los estudiantes dispusieron de dos sesiones de dudas que ayudaron a una mejor compresión de la lección 5, Funciones y progresiones.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

El curso en el que se impartieron las clases es el de 4º E.S.O. Opción B. Las clases son de 55 minutos. A continuación se adjuntan diferentes tablas que detallan la distribución del tiempo.

Sesión 1			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo docencia
Resolución problemas de funciones	10 min.	Profesor	Dialógica
Teoría: Definición y término general de las progresiones aritméticas	20 min.	Profesor	Magistral
Ejercicios magistrales	15 min.	Profesor	Dialógica
Ejercicios propuestos en clase	10 min.	Alumnos	Constructivista

Sesión 2			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo docencia
Corrección de ejercicios	10 min.	Profesor	Dialógica
Teoría: Término general e interpolación de n medios aritméticos o diferenciales.	20 min.	Profesor	Magistral
Ejercicios magistrales	15 min.	Profesor	Dialógica
Ejercicios propuestos en clase	5 min.	Alumnos	Constructivista

Sesión 3			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo docencia
Teoría: Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.	20 min.	Profesor	Magistral
Ejercicios magistrales	25 min.	Profesor	Dialógica
Ejercicios propuestos en clase	10 min.	Alumnos	Constructivista

Sesión 4			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo docencia
Corrección de ejercicios	25 min.	Profesor	Dialógica
Teoría: Definición y término general de las progresiones geométricas.	20 min.	Profesor	Magistral
Ejercicios magistrales	10 min.	Profesor	Dialógica

Sesión 5			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo docencia
Teoría: Interpolación de n medios geométricas o proporcionales y producto de los n primeros números.	30 min.	Profesor	Magistral
Ejercicios magistrales	20 min.	Profesor	Dialógica
Ejercicios propuestos en clase	5 min.	Alumnos	Constructivista

Sesión 6			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo docencia
Teoría Suma de los n primeros términos y suma de todos los términos de una progresión geométricas decreciente.	30 min.	Profesor	Magistral
Ejercicios magistrales	20 min.	Profesor	Dialógica

Sesión 7 y 8			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo docencia
Aclaración de dudas y preparación examen lección 5.	55 min.	Compartida	Dialógica

Figura 42. *Distribución del tiempo de las clases impartidas*

7.2. Actividades adicionales planificadas

No se realizó ninguna actividad adicional planifica especial. Se siguió el guión del cuadernillo y se añadieron de los aspectos tratados anteriormente.

Con respecto a la utilización de programas informáticos, proyectores, etc.… comentar que no es lo habitual la utilización de estos en el Centro actualmente. Si bien el próximo curso se contará con la nueva ampliación en la que estas prestaciones estarán más presentes y seguro que se aplicaran con mayor frecuencia.

7.3. La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista

En los cursos inferiores como son; 1º, 2º y 3º de la E.S.O. se manda tarea. En los cursos superiores simplemente se propone la realización de ejercicios.

En estos cursos superiores el profesor no controla los ejercicios realizados a diferencia de los cursos inferiores.

Al comenzar la clase se pregunta si tienen alguna duda o no saben realizar algún ejercicio o problema.

Tras finalizar la clase se procura comentarles que ejercicios son los correspondientes al apartado trabajado para que vayan realizándolos. El tiempo de trabajo diario estimado para los alumnos de 4º E.S.O. opción B es de 45 minutos.

Capítulo 8:

Experimentación

En este capítulo se analiza la experimentación que se llevó a cabo con los alumnos de 4º E.S.O. del I.E.S. Sancho III, "el Mayor" a los que les impartió clase durante el segundo periodo de prácticas.

8.1. Método

La evolución de una teoría en didáctica de las matemáticas puede determinarse por el contraste entre un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. La teoría busca validar las hipótesis que formula (*a priori*). Los hechos observados permiten (*a posteriori*) validar o refutar, total o parcialmente, las hipótesis enunciadas.

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) permite abordar el contraste experimental necesario, que permita determinar condiciones de *reproducibilidad* de situaciones didácticas. Aquí, las *variables didácticas* actúan de "contraste o reactivo" que permiten de manera controlada provocar en los sujetos modificaciones en sus estrategias de acción para adaptarlas al medio.

El estudio de la adecuación de las variables didácticas para determinar cambios en las estrategias de acción representa un instrumento de validación interna de las conclusiones que puedan extraerse de una observación concreta. En estas condiciones, se puede definir una situación *reproducible*; es decir, en condiciones similares, con un control del medio, la construcción del conocimiento pretendido será la misma.

La cuestión de la reproducibilidad de las situaciones incide sobre la fiabilidad de las observaciones y, sobre todo, sobre su validez. La fiabilidad presupone una estabilidad en el funcionamiento del sistema didáctico; el contraste repetido entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* permite hacer evolucionar las condiciones del medio (incluidas las intervenciones del profesor) que garanticen la construcción del saber pretendido, de tal manera que la situación devenga reproducible. Es entonces cuando su *validez* puede ser aceptada, puesto que la situación es exitosa y aplicable de manera estable.

En este trabajo, la parte I "Las progresiones aritméticas y geométricas en el currículo vigente y en los libros de texto" constituye el estudio previo de la dimensión de enseñanza, desde una perspectiva eminentemente institucional; a saber:

1. El contenido matemático en el currículo vigente, incluidas las orientaciones y criterios de evaluación.
2. El desarrollo de estas directrices oficiales en los libros de texto escolares.

Este estudio precede al análisis *a priori* realizado en los capítulos 5, 6 y 7, donde se abordan las dimensiones:

- *Epistemológica*: las matemáticas presentes en la unidad didáctica objeto de estudio.
- *Cognitiva*: dificultades y errores de los estudiantes en el aprendizaje de la unidad didáctica.
- *De enseñanza*: descripción del proceso de estudio implementado.

En el capítulo 8, este análisis *a priori* es contrastado con los resultados de la experimentación, permitiendo una valoración de los mismos basada en las "expectativas previas" (*discusión de los resultados*), que supone la fase última del método de la ingeniería didáctica.

8.2. Muestra y diseño de la experimentación

La muestra que se tomó fue la clase de 4º de E.S.O. de ciencias del I.E.S. Sancho III, "el Mayor", de Tafalla. En ella participaron 22 alumnos que conforman un grupo homogéneo, perteneciente en su mayoría a un estrato de clase media.

El objetivo principal de este estudio es observar características especiales en la resolución de problemas de progresiones aritméticas y geométricas. El cuestionario estuvo supeditado al curso normal de la clase, siendo la prueba calificadora de esta sección de la 5º lección Funciones y progresiones.

8.3. El cuestionario

La prueba evaluatoria de la 5º lección se compone de la parte de funciones y el cuestionario de progresiones, siendo del nivel de dificultad correspondiente al curso y con una duración de 55 minutos para la realización de ambas partes. A continuación se muestra el cuestionario:

1.- (1,0 p) Define progresión geométrica y demuestra la fórmula del término general de una progresión geométrica.

2.- (1,50 p) La suma de n números naturales consecutivos, tomados a partir del 11, es 1715. Calcula n.

3.- (1,25 p) Interpola cuatro medios geométrico entre los números $\sqrt{3}$ y $4.\sqrt{6}$.

4.- (1,50 p) Dado un cuadrado de 2 metros de lado, se unen dos a dos los puntos medios de los lados obteniéndose un nuevo cuadrado en el que se practica la misma operación. Procediéndose así indefinidamente, ¿cuál es la suma de las áreas y de los perímetros de todos los cuadrados así obtenidos?

8.4. Cuestiones y comportamientos esperados

En esta sección se analizan las cuestiones planteadas y los comportamientos esperados, dando como razonable el hecho de que algunos alumnos cometan los errores previstos y tengan las dificultades esperadas que se comentan en el capítulo 6 de esta memoria.

El primer ejercicio de los cuatro propuestos es el más teórico. La definición y la demostración vienen perfectamente explicadas en el cuadernillo. La definición se espera que no sea completa en la mayoría de los casos, dado que muchos de ellos darán su propia versión omitiendo aspectos relevantes. No se espera que tengan problemas para realizar la demostración.

El segundo enunciado es de progresiones aritméticas. Se espera que se realicen mejor los problemas de progresiones aritméticas que de las progresiones geométricas. Se trata de un problema en el que la dificultad radica en conocer bien los términos y ser capaz de hallarlos a partir del enunciado correctamente. Esta dificultad supone la comprensión adecuada del apartado de progresiones aritméticas. Se espera que esta comprensión no haya sido completa por parte de todos los alumnos y algunos de ellos tengan problemas en la identificación de los términos. A pesar de ello no se esperan malos resultados puesto que se han realizado ejercicios similares.

El tercer ejercicio trata de la interpolación de n medios geométricos. No posee gran dificultad ni es necesaria una gran comprensión del aspecto. Se ha explicado y realizado varios ejercicios en clase. Del los diferentes tipos de problemas planteados es el más mecánico de realizar y se esperan buenos resultados.

El cuarto problema trata la suma de todos los términos de una progresión geométrica decreciente. La dificultad radica en hallar la razón de la progresión por lo que se espera que la mayoría de ellos sean capaces de hallar la solución correcta para la del área y encuentren mayor dificultad a la hora de hallar la de los perímetros. En un primer lugar se iba a pedir sólo la suma de los perímetros. Se pensó que los resultados podían ser malos. Al final se pidieron ambos dado que la realización de la suma de las áreas puede ayudar a la realización de la suma de los perímetros. Se dio mayor valor a la resolución de esta última que a la de las áreas.

8.5. Resultados

El cuestionario forma parte de la prueba evaluatoria de la 5º lección, Funciones y progresiones, de 4º de E.S.O. de ciencias del I.E.S. Sancho III, “el Mayor”, de Tafalla en la que participaron 22 alumnos.

A continuación se procede a nombrar las variables de estudio presentes en el cuestionario:

- V01: Definición de progresión geométrica.
- V02: Demostración de la fórmula del término general de una progresión geométrica.

- V03: Identificar cada término de la fórmula de la suma de los n primeros términos a partir de un enunciado.
- V04: Razonar los valores hallados en una progresión aritmética.
- V05: Identificar los términos y hallar la razón en un enunciado de interpolación de n medios geométricos.
- V06: Simplificación de radicales.
- V07: Obtener la razón de una progresión geométrica decreciente a partir de un enunciado de figuras geométricas regulares gráficamente.
- V08: Obtener la razón de una progresión geométrica decreciente a partir de un enunciado de figuras geométricas regulares algebraicamente.

Tras identificar las variables de análisis, se analiza una a una los resultados obtenidos de los alumnos.

- V01: 8 de los 22 alumnos dieron una definición completa y correcta.

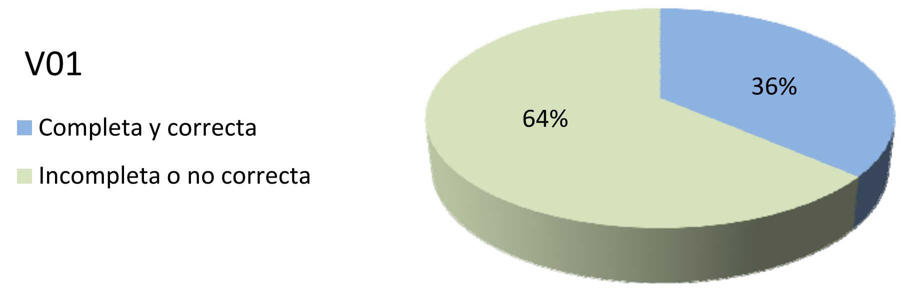


Figura 43. *Resultados V01*

- V02: 15 de los 22 alumnos demostraron correctamente el término general de una progresión geométrica.

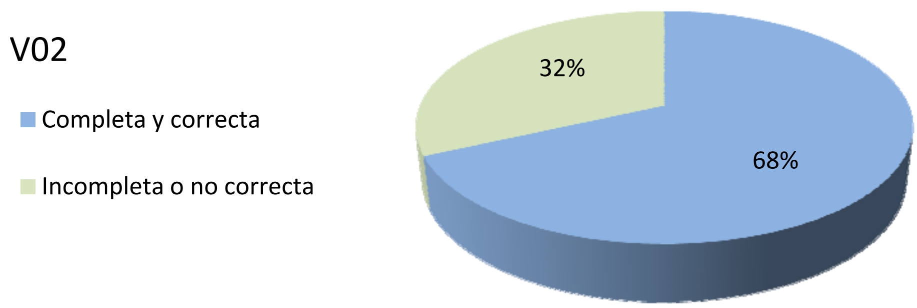


Figura 44. *Resultados V02*

- V03: Todos los alumnos identificaron correctamente los términos de la progresión aritmética a partir del enunciado.

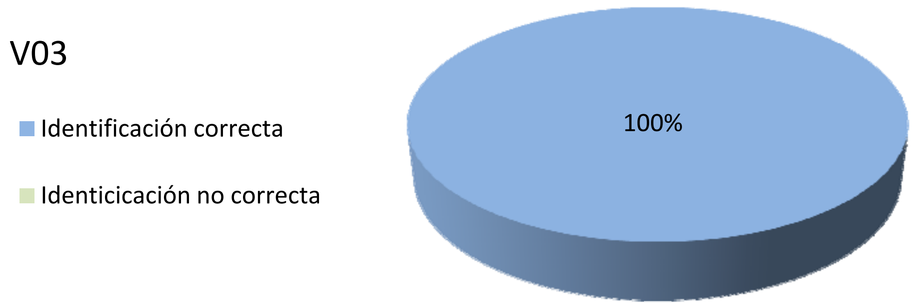


Figura 45. *Resultados V03*

- V04: 5 de los 22 alumnos razonaron correctamente la solución.

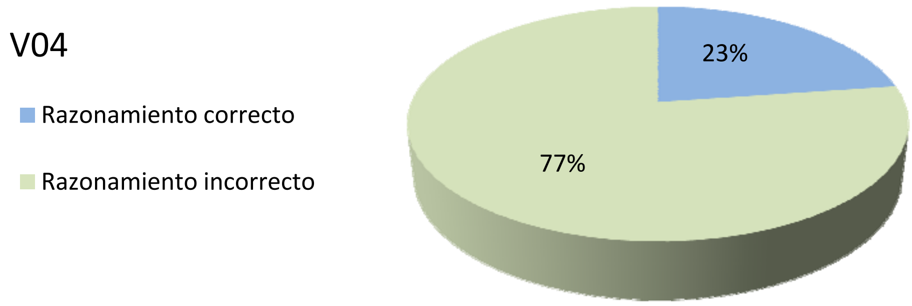


Figura 46. *Resultados V04*

- V05: 13 de los 22 alumnos identificaron los términos y hallaron la razón.

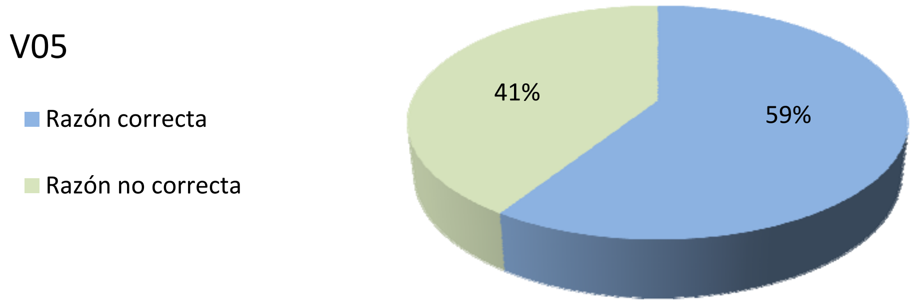


Figura 47. *Resultados V05*

- V06: 6 de los 22 alumnos simplificaron correctamente los radicales.

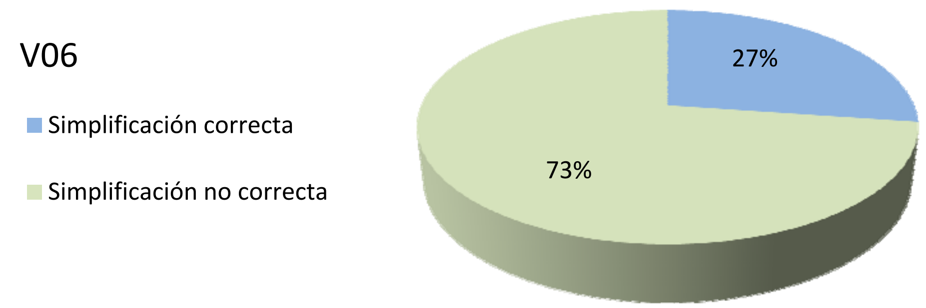


Figura 48. *Resultados V06*

- V07: 20 de los 22 alumnos dieron una definición completa y correcta.

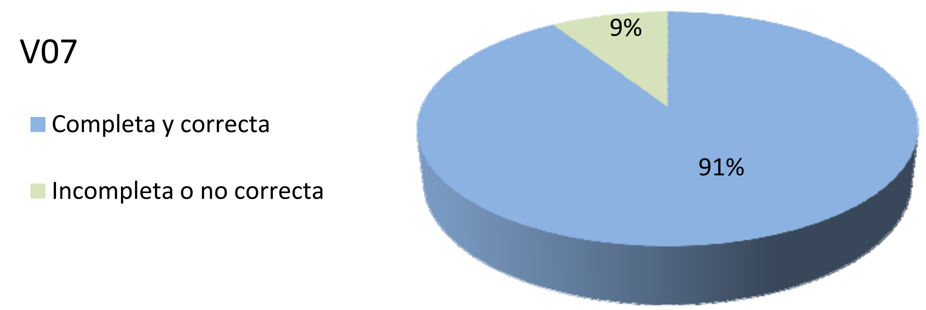


Figura 49. *Resultados V07*

- V08: 15 de los 22 alumnos dieron una definición completa y correcta.

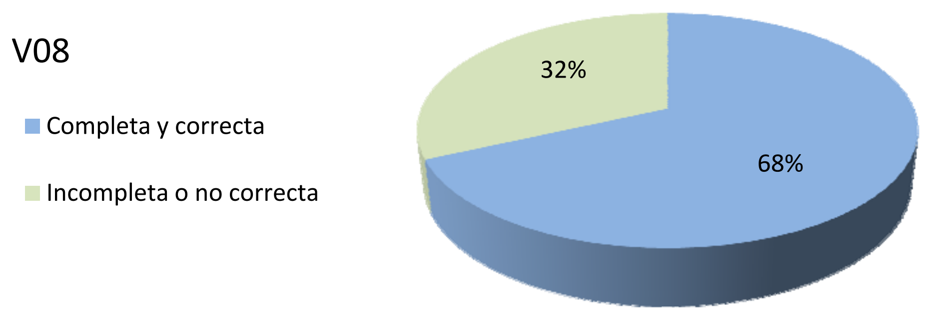


Figura 50. *Resultados V08*

A modo de resumen de los resultados se presenta una gráfica con todas las variables presentadas:

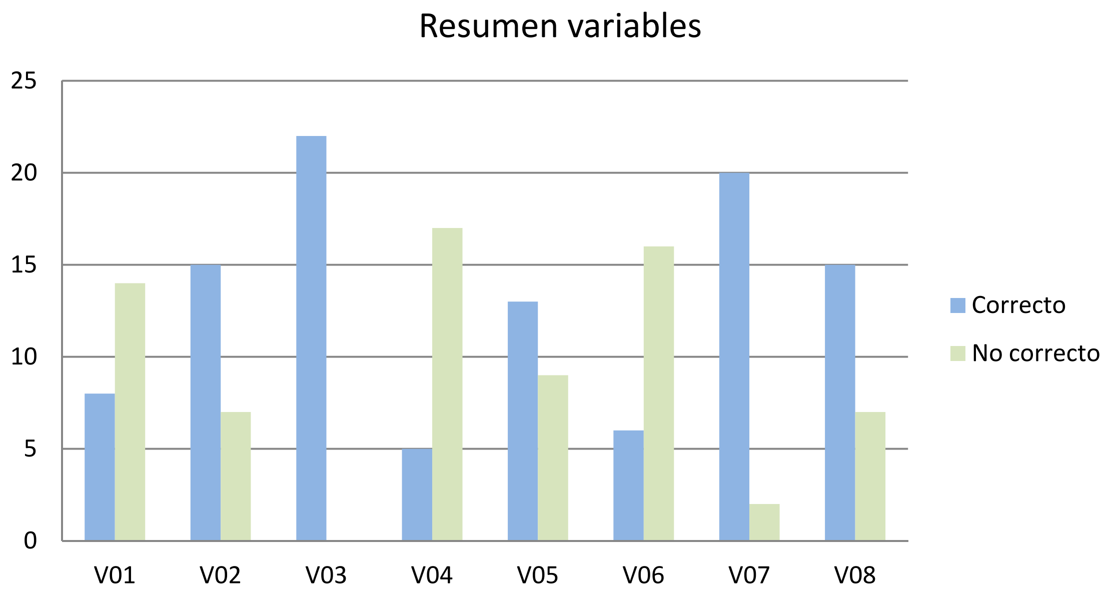


Figura 51. *Resumen variables*

A continuación se presentan los resultados y valores obtenidos en cada problema, en cada sección (funciones sobre 4.75 y progresiones sobre 5.25) y la nota en conjunto de los 22 alumnos.

Resultados prueba evaluatoria							
Alumno	Nota 1º (1.00)	Nota 2º (1.50)	Nota 3º (1.25)	Nota 4º (1.50)	Nota progresiones	Nota funciones	Nota final
A01	0.50	1.30	0.40	0.50	2.70	3.85	6.65
A02	0.80	1.30	1.25	1.40	4.75	3.65	8.40
A03	1.00	1.20	1.25	1.50	4.95	3.75	8.70
A04	0.80	1.20	0.20	0.60	2.80	3.05	5.85
A05	0.20	1.30	0.40	0.60	2.50	1.20	3.70
A06	1.00	1.30	0.00	1.30	3.60	0.90	4.50
A07	0.40	1.30	1.10	1.50	4.30	3.25	7.55
A08	0.70	1.20	0.30	1.40	3.60	2.35	5.95
A09	0.70	1.30	1.00	1.50	4.50	3.95	8.45
A10	1.00	1.20	0.00	1.20	3.40	2.65	6.05
A11	0.20	0.20	0.00	0.20	0.60	1.20	1.80
A12	0.80	1.30	0.00	1.00	3.10	3.20	6.30
A13	0.70	1.20	0.00	0.00	1.90	1.70	3.60
A14	1.00	1.20	0.40	0.60	3.20	3.45	6.65
A15	0.70	1.20	1.25	1.30	4.45	3.10	7.55
A16	0.80	0.20	0.80	1.20	3.00	4.25	7.25
A17	0.60	1.50	1.25	1.20	4.55	3.45	8.00
A18	0.50	1.50	0.20	0.20	2.40	3.30	5.70
A19	0.50	0.00	0.80	0.40	1.70	2.60	4.30
A20	0.50	1.50	0.00	0.00	2.00	0.90	2.90
A21	1.00	1.50	1.25	1.50	5.25	4.50	9.75
A22	0.50	1.50	0.00	1.00	3.00	2.70	5.70

Figura 52. *Resultados prueba evaluatoria*

Se estudia los porcentajes de aprobados en la parte de progresiones aritméticas y geométricas y del total de la prueba evaluatoria.

No superan la parte de progresiones de la prueba evaluatoria 6 de los 22 alumnos, dos de ellos con más de 4,5 puntos sobre 10.

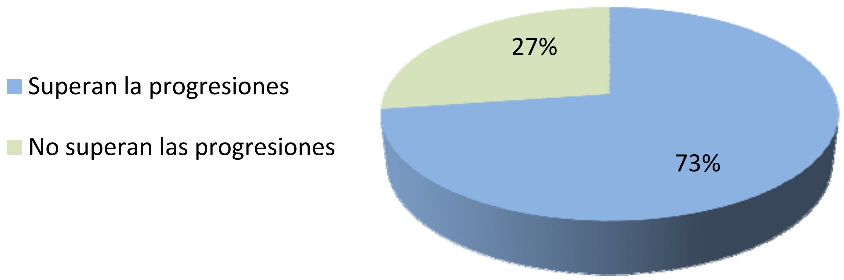


Figura 53. *Resultados de la parte de progresiones*

No superan la parte de funciones de la prueba evaluatoria 6 de los 22 alumnos, uno de ellos con 4,95 sobre 10.

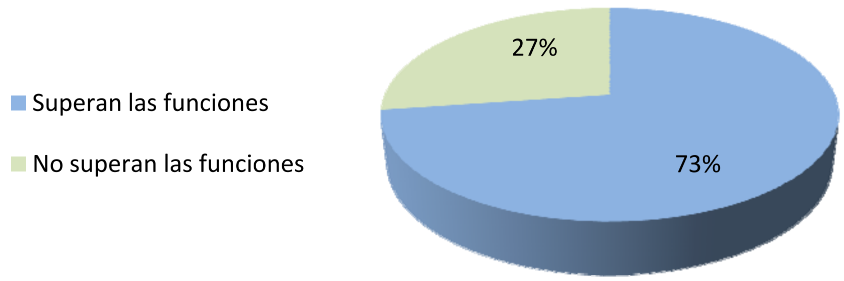


Figura 54. *Resultados de la parte de funciones*

A pesar de que el número total de no aprobados en el computo global es de 6 alumnos hay que explicar que dos alumnos a pesar de tener una de las partes no superadas aprueban, y que otros dos alumnos no superan una de las dos partes y tampoco la prueba evaluatoria.

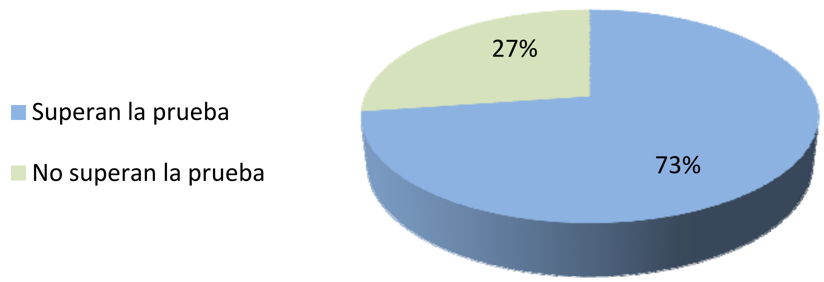


Figura 55. *Resultados de ambas partes*

A modo de resumen se engloban los resultados en la siguiente gráfica:

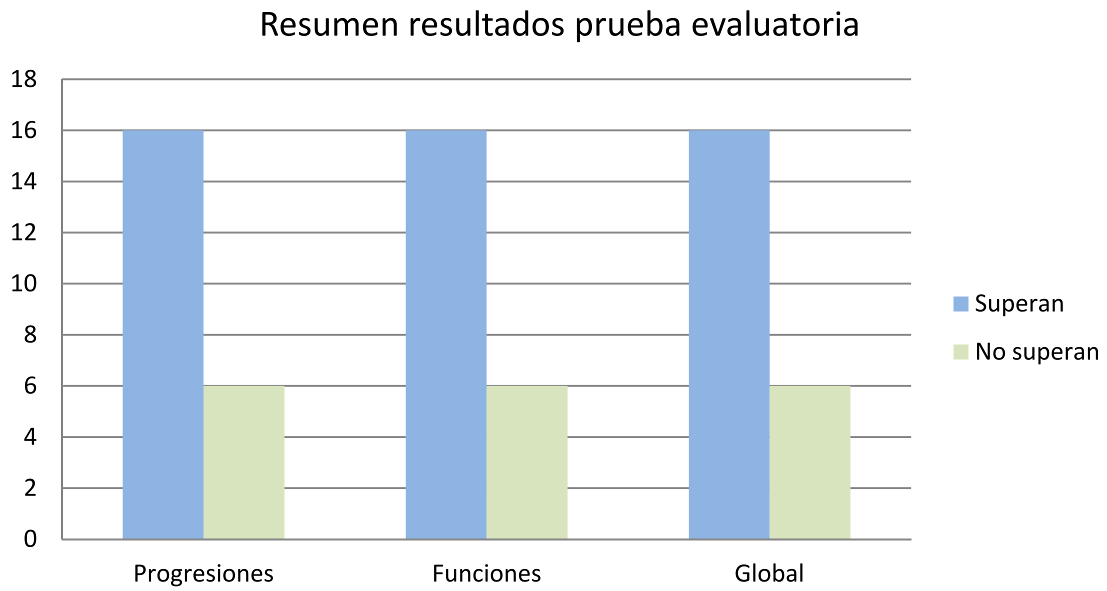


Figura 56. *Resumen resultados prueba evaluatoria*

8.6. Discusión de los resultados

En este apartado se van a tratar los resultados obtenidos. Se comienza comparándolos con los resultados esperados y a continuación se resaltaran los aspectos más relevantes.

Los resultados de la primera variable de estudio son los esperados. Sólo 8 alumnos de los 22 han sido capaces de dar una definición completa y correcta de progresión geométrica. Esto no significa que los 14 alumnos restantes no sepan qué es una progresión geométrica, si no que muchos de ellos la definieron omitiendo aspectos relevantes o no supieron expresarla como es debido.

Los resultados de la segunda variable de estudio son mucho más positivos, tal y como se esperaba. 15 de los 22 alumnos han realizado correctamente la demostración de la fórmula del término general de una progresión geométrica. Es una demostración sencilla con la que no tienen problema a poco que la estudien.

El segundo ejercicio trajo consigo resultados no esperados pero perfectamente explicables.

Los resultados de la tercera variable de estudio no se esperaban tan buenos. Los estudiantes comprendieron perfectamente cada término de las progresiones aritméticas y supieron hallarlos en el enunciado.

Con respecto a la cuarta variable de estudio es necesario precisar que la inmensa mayoría de los alumnos no dieron por buena la solución negativa para el valor de n. Sin embargo, el razonamiento correcto y completo, porque n debe ser un número natural, lo dieron sólo 5 de los 22 alumnos.

El tercer problema de la parte de progresiones dio un resultado curioso. Se esperaban unos buenos resultados puesto que solo eran meter los números y esperar a lo que salía, no hacía falta razonar mucho si se aplicaba la fórmula dada en clase.

El 59% de los alumnos identifican bien los términos, de todas formas se esperaba un mayor porcentaje. Esto puede ser debido a que en el cuadernillo no se exponía ninguna fórmula y se trataba del aspecto menos trabajado. Por ello quizás lo estudiantes pensaron que no era algo importante y no esperaban que cayese en la prueba.

La sexta variable no se consideró en un primer momento. Fue el reflejo de una de las lecciones aprendidas. Al dar progresiones no sólo se están dando este aspecto matemático, se está enseñando matemáticas. No hay que olvidarse de aspectos que a pesar de que no son el centro de la lección aparecen y hay que explicarlos correctamente: operaciones con radicales, exponenciales, resolución de sistemas con ecuaciones de segundo grado, etc. La mayor dificultad de este problema fueron los variables empleadas. Si en vez de utilizarse $\sqrt{3}$ y $4.\sqrt{6}$ se hubiese propuesto el mismo problema con números naturales el porcentaje de acierto hubiese sido mucho mayor. El 27% de los alumnos supo realizar las operaciones necesarias para la simplificación de radicales necesaria para hallar los términos correctamente.

Tal y como se esperaba en el último problema de la parte de progresiones hubo alumnos que supieron halar la suma de las áreas y no lograron la de los perímetros.

Esto se debe a que la séptima variable de estudio la resolvieron correctamente el 91 % de los alumnos. Estos alumnos logran la razón mediante la visualización del problema en el dibujo de las figuras geométricas. Observan que le área del cuadrado interior es la mitad que el exterior.

Los resultados en la octava variable de estudio no fueron tan buenos, el 68% de los alumnos la resolvió adecuadamente. Para calcular la razón de los perímetros se tiene que hallar primero el lado del cuadrado interior aplicando el Teorema de Pitágoras. Después hallar el perímetro y realizar la división del segundo cuadrado, en este caso el menor, entre el primero, el mayor.

Al impartir las clases en todo momento se centro todo el esfuerzo en que los alumnos comprendiesen bien las progresiones aritméticas y geométricas. Sin embargo, otros aspectos como la resolución de sistemas de ecuaciones con alguna de ellas de segundo grado, la simplificación de radicales, etc. se dieron por conocidos y no se prestó quizás la atención debida.

Es sorprendente la cantidad de errores cometidos debido a estos aspectos. En mi opinión, es necesario prestarles la atención debida y exigírselos para que el propio alumno dé la importancia que es debido a estos aspectos, más aún en estas matemáticas que las cursan los estudiantes que pretenden seguir estudiándolas en bachillerato. De este modo durante esta etapa se procuraría corregirlos y no tener deficiencias al comenzar con el bachillerato.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

En este trabajo se ha realizado una aproximación progresiva al concepto matemático de las progresiones.

En la primera parte, se ha hecho una revisión bibliográfica de las progresiones en diversas fuentes, analizando y comparando el distinto tratamiento que se les da en cada una de ellas.

En la segunda parte, aprovechando la experiencia docente en el grupo de alumnos de 4º E.S.O. del I.E.S. Sancho III, "el Mayor" en el periodo de prácticas se ha analizado como afrontan los alumnos los problemas que se encuentran en el tema progresiones.

Conclusiones generales del trabajo

El primer aspecto relevante que se obtiene es que es posible conseguir una continuidad en 3º y 4º de la E.S.O. y 1º Bachiller cuando se trabajan las progresiones.

Los conceptos matemáticos se afianzan a base de ejercicios y problemas. Se realizaron abundantes ejercicios y problemas durante el periodo de prácticas, puesto que la mayor carencia del libro de texto empleado es que no posee ejercicios resueltos.

En una clase modélica en el aspecto de comportamiento y respecto pueden surgir dificultades. Esto se debe a la poca participación por parte de los alumnos, dificultad de comunicación.

La organización del profesor tutor del Centro se valoró positivamente. Los alumnos conocen las fechas de los exámenes con antelación para que se organicen adecuadamente. Además, antes de cada prueba evaluatoria disponen de un par de días para resolver las dudas que tengan.

Cuestiones abiertas

Como consecuencia de todo el proceso de estudio y análisis de este trabajo, surgen varias cuestiones cuya respuesta quedan al análisis y valoración de cada lector.

Una vez situados estos aspectos matemáticos en los cursos correspondientes, se podría tratar qué momento del curso es el más adecuado para impartirlos. Qué conocimientos previos son necesarios. Para qué aspectos son interesantes estos conocimientos. Con qué aspectos están más relacionados, etc.

Sabiendo que el curso que viene se emplearán libros de textos en vez de los actuales cuadernillos del propio centro sería adecuado realizar un cuestionario similar para conocer el impacto o no que tenga este cambio.

El alumno en prácticas llega al aula en una situación poco natural. La clase se conoce y el profesor la tiene controlada. Esto sería diferente si se tratase del principio de curso. El alumno es un personaje nuevo en escena que debe amoldarles e impartir los contenidos que se dan en ese momento. Todo esto puede hacer que la actitud de los alumnos no sea la habitual y los resultados se vean influenciados por ello.

Parece interesante la idea de que el alumno en prácticas volviese a impartir el mismo aspecto matemático al año siguiente con un grupo similar para comparar los resultados. En este segundo caso el alumno en prácticas partiría con la experiencia de estas prácticas.

Del mismo modo parece interesante comparar los resultados obtenidos con otra clase similar del mismo Centro.

Referencias

Artigue, M. (1989). *Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 282–307.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (Especial), 133–156.

Universidad de Navarra (1997). *Series geométricas generalizadas*. Autor: Marisol Gómez, Esteban Induráin.

Santillana (2007). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid

Teide (2010). *Matemáticas 3º ESO*. Barcelona. Autor: Enrique Llácer Gimeno

Oxford (2008). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Madrid. Autor: E. Bascós i Excruela, Z. Pena i Terrén

Anaya (2009). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid.

I.E.S. Sancho III, “ el Mayor”. Cuadernillos realizados por el propio centro para los cursos 4º E.S.O., 1º y 2º Bachiller Ciencias y Tecnología.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007a). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. BOE 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007b). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO. BOE 5, de 5 enero, 677–773.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Cuestionario formulado

A. Unidad didáctica del libro de texto

5-12

dada por:

- $\exp_a(x)=a^x$
- $\mathrm{Dom}(\exp_a)=R$

Las funciones exponenciales más usuales son las que tienen por bases los números 10 y e.

No hay que confundir las funciones exponenciales con las funciones *potenciales*. En las primeras la x aparece en el exponente y en las segundas en la base. Por ejemplo, $f(x)=x^3$ es una función potencial, mientras que $f(x)=3^x$ es una función exponencial.

Si a=1, $f(x)=a^x=1^x=1$, cualquiera que sea x. Se trata de la función constante uno, ya estudiada.

X.- Progresiones aritméticas

1.- Definición

Una sucesión de números reales x_1, x_2, x_3… es una *progresión aritmética* si cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad constante, llamada *diferencia* y representada por d.

* * *

Por tanto, decir que x_1, x_2, x_3… es una progresión aritmética de diferencia d equivale a decir que $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3=\dots=d$

2.- Término general

Si x_1, x_2, x_3,… es una progresión aritmética de diferencia d, su término general viene dado por la fórmula:

$$x_n=x_1+(n-1)\cdot d$$

En efecto, por la definición de progresión aritmética, se puede escribir:

$$x_2=x_1+d$$
$$x_3=x_2+d=(x_1+d)+d=x_1+2d$$
$$x_4=x_3+d=(x_1+2d)+d=x_1+3d$$
$$\dots$$

Por tanto: $x_n=x_1+(n-1)\cdot d$

3.- Interpolación de n medios aritméticos o diferenciales

Interpolar n *medios aritméticos* entre dos números p y q es intercalar n términos entre ellos de manera que estén en progresión aritmética, siendo p y q los *extremos*.

5-13

4.- Suma de los n primeros términos

Si x_1, x_2, x_3, ... es una progresión aritmética, la suma de sus n primeros términos, S_n, viene dada por la fórmula:

$$S_n=\frac{x_1+x_n}{2}\cdot n$$

En efecto, por un lado:

$$S_n=x_1+x_2+x_3+...+x_n=x_1+(x_1+d)+(x_1+2d)+...+[x_1+(n-1)d]=$$
$$=nx_1+[d+2d+...+(n-1)d]$$

Por otro:

$$S_n=x_n+x_{n-1}+x_{n-2}+...+x_1=x_n+(x_n-d)+(x_n-2d)+...+[x_n-(n-1)d]=$$
$$=nx_n-[d+2d+...+(n-1)d]$$

Sumando ambas expresiones, queda:

$$2\cdot S_n=nx_1+nx_n=(x_1+x_n)\cdot n$$

Despejando S_n:

$$S_n=\frac{x_1+x_n}{2}\cdot n$$

XI.- Progresiones geométricas

1.- Definición

Una sucesión de números reales x_1, x_2, x_3... es una *progresión geométrica* si cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad constante, llamada *razón* y representada por r.

* * *

Por tanto, decir que x_1, x_2, x_3... es una progresión geométrica de razón r equivale a decir que $x_2/x_1=x_3/x_2=x_4/x_3=...=r$.

2.- Término general

Si x_1, x_2, x_3, ... es una progresión geométrica de razón r, su término general viene dado por la fórmula:

$$x_n=x_1\cdot r^{n-1}$$

En efecto, por la definición de progresión geométrica, se puede escribir:

$$x_2=x_1\cdot r$$
$$x_3=x_2\cdot r=(x_1\cdot r)\cdot r=x_1\cdot r^2$$
$$x_4=x_3\cdot r=(x_1\cdot r^2)\cdot r=x_1\cdot r^3$$

5-14

...

Por tanto: $x_n=x_1\cdot r^{n-1}$

3.- Interpolación de n medios geométricos o proporcionales

Interpolar n *medios geométricos* entre dos números p y q es intercalar n términos entre ellos de manera que estén en progresión geométrica, siendo p y q los *extremos*.

4.- Producto de los n primeros términos

Si x_1, x_2, x_3, ... es una progresión geométrica de razón r, el producto de sus n primeros términos, P_n, viene dada por la fórmula:

$$P_n=x_1^n\cdot r^{n(n-1)/2}$$

En efecto:

$$P_n=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n=x_1(x_1r)(x_1r^2)\ldots(x_1r^{n-1})=x_1^n\cdot r^{1+2+\ldots+(n-1)}=x_1^n\cdot r^{n(n-1)/2}$$

ya que $1+2+\ldots+(n-1)=\frac{1+n-1}{2}(n-1)=n(n-1)/2$.

5.- Suma de los n primeros términos

Si $x_1,x_2,x_3,\ldots$ es una progresión geométrica, la suma de sus n primeros términos, S_n, viene dada por la fórmula:

$$S_n=\frac{x_n\cdot r-x_1}{r-1}$$

En efecto:

$$S_n=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n$$

Si se multiplican los dos miembros por r, queda:

$$S_n\cdot r=x_1\cdot r+x_2\cdot r+x_3\cdot r+\ldots+x_{n-2}\cdot r+x_{n-1}\cdot r+x_n\cdot r$$

O lo que es lo mismo:

$$S_n\cdot r=x_2+x_3+x_4+\ldots+x_{n-1}+x_n+x_n\cdot r$$

De esta identidad se resta la primera:

$$S_n\cdot r-S_n=x_n\cdot r-x_1$$

Se saca factor común S_n:

$$S_n(r-1)=x_n\cdot r-x_1$$

Se despeja S_n:

$$S_n = \frac{x_n \cdot r - x_1}{r-1}$$

6.- Suma de todos los términos

Si x_1, x_2, x_3,… es una progresión geométrica de razón comprendida entre -1 y 1 ($-1<r<1$), la suma de todos sus términos, S, viene dada por la fórmula:

$$S = \frac{x_1}{1-r}$$

No la vamos a demostrar ahora, lo haremos más adelante.

99 Un piso se compró hace 5 años por 250000 euros. Si se ha revalorizado de forma constante en un 15% anual, ¿por cuánto podría venderse?

100 Escribe los cinco primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1=2/3$, $d=-1/2$ b) $a_1=3\sqrt{2}$, $d=2\sqrt{2}$ c) $a_1=-12$, $d=3/2$
d) $a_1=2\sqrt{a}$, $d=3\sqrt{a}$ e) $a_1=5x^2$, $d=-2x^2$ f) $a_1=a$, $d=a/4$
g) $a_n=3n-5$ h) $a_n=-2n+3$

101 ¿Forman parte de una progresión aritmética las expresiones a+2b, 2a+4b, 3a+6b, 4a+8b? Si a+2b es el tercer término, calcula el primero y el noveno.

102 Calcula x para que x, x^2, $4x^2$ estén en progresión aritmética.

103 Calcula k para que 8k+4, 6k-2, 2k-7 estén en progresión aritmética.

104 Calcula: a) a_{25} en 9,5,1,-3…; b) a_8 en $-2/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, $4/\sqrt{3}$…

105 En los siguientes ejercicios se dan algunos datos de una progresión aritmética y se pide el cálculo de otros:

a) $a_1=23$, $a_{17}=31$; d b) $a_6=3$, $a_{14}=-1$; a_1
c) $a_{19}=-14$, $a_{24}=16$; a_{10} d) $a_{10}=25$, $d=5$; a_1
e) $a_1=-5$, $d=1/3$; a_{120} f) $a_1=5$, $d=3$, $a_n=104$; n
g) $a_3=5$, $a_4=18$; $a_n=707$; n h) $a_2+a_3=10$, $a_1\cdot a_6=-16$; a_1
i) $a_2+a_3=19$, $a_5+a_7=40$; a_{98} j) $a_{11}+a_{14}=21$, $a_1+a_9=6$; d
k) $a_1=12$, $a_5+a_9=4a_8$; a_5, a_9 l) $a_2+a_{11}=37$, $a_4=13$; a_1

106 Interpola los medios aritméticos que se indica:

a) cinco entre 3/5 y 23/5 b) seis entre -18 y -4
c) cuatro entre -12 y 13 d) cinco entre $\sqrt{3}$ y $\sqrt{27}$

107 En los siguientes ejercicios se dan algunos datos de una progresión aritmética y se pide el cálculo de otros:

a) $a_1=4$, $d=2$; a_8, S_8 b) $a_1=3$, $a_n=21$, $S_n=120$; d, n
c) $a_1=23$, $d=-2$, $S_n=140$; a_n, n d) $a_1=9$, $a_{52}=162$; d, S_{52}
e) $a_1=2$, $d=2$; a_{100}, S_{100} f) $a_1=6$, $S_{16}=16$; d, a_{16}
g) $a_2=-10$, $a_9=8$; S_{10} h) $S_{10}=155$, $a_1\cdot a_{10}=58$; a_1, d
i) $a_8=4a_1$, $S_8=140$; a_4, a_5 j) $a_5=18$; S_9

108 Calcula la suma de los:

a) cuarenta primeros múltiplos de 3.
b) múltiplos de 6 comprendidos entre 100 y 1000.
c) múltiplos de 11 menores que 300.
d) múltiplos de 7 comprendidos entre 1000 y 10000.
e) números pares de tres cifras.
f) veinte primeros múltiplos de 4 mayores que 98.

g) cincuenta primeros múltiplos de 3 que no sean pares.

109 La suma de n números naturales consecutivos, tomados a partir del 11, es 1715. Calcula n.

110 La suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética es 210; su término central es 14. Halla n.

111 Tres números están en progresión aritmética y son tales que aumentados, respectivamente, en 5, 4 y 7 unidades, son proporcionales a 5, 6 y 9. Calcúlalos.

112 La suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética es 160. Los extremos son 12 y 20. Calcula n y d.

113 Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, cuya suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Calcula las edades de los cuatro.

114 Un jardinero tiene que echar un cubo de agua al pie de cada uno de los treinta árboles que hay a un lado del camino. Los árboles están a 6 m de distancia, y el pozo 10 m antes del primer árbol. Halla el camino que habrá recorrido después de terminar el riego y volver al pozo.

115 En una plantación de frutales hay 63 filas de árboles. Cada fila tiene 3 árboles más que la anterior. La fila decimoséptima tiene 58 árboles. Halla el número de árboles que hay en la primera fila, en la última y el número total de la plantación.

116 En una sala de teatro la primera fila de butacas dista de la pantalla 8,6 m y la sexta está a 13,4 m. ¿En qué fila estará una persona que dista de la pantalla 23 m?

117 Un número está formado por tres cifras en progresión aritmética, siendo su suma igual a 15. Si se multiplica la cifra de las centenas por 129 se obtiene el número en cuestión. ¿Cuál es ese número?

118 Calcula el valor de los ángulos de un pentágono sabiendo que están en progresión aritmética, y que la diferencia entre el menor y el mayor es 140º.

119 Calcula los términos que se indican en las siguientes progresiones geométricas:

a) a_8 en 5, 3, 9/5… b) a_{12} en x, $x^2/4$, $x^3/16$…

c) a_{10} en $2\sqrt{3}$, 12, $24\sqrt{3}$… d) a_{16} en -8, 4, -2…

e) a_6 en $3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$… f) a_{10} en $\sqrt{3}$, 3, $\sqrt{27}$…

120 Halla el valor de x para que estén en progresión geométrica los números: a) 2x+1, 4x+2, 7x+5; b) x+2, 4x-2, 6x+2.

121 En los siguientes ejercicios se dan algunos datos de una pro-

gresión geométrica y se pide el cálculo de otros:

a) $a_6=972$, $r=3$; a_1 b) $a_1=1/46656$, $r=6$; a_7

c) $a_1=0,73$, $r=0,01$; a_6 d) $a_1=2$, $r=\sqrt[4]{2}$; a_{17}

e) $a_1=3$, $a_4=1/243$; r f) $a_{10}=2560$, $r=2$; a_{14}

g) $a_5=9/64$, $r=-3/4$; a_1 h) $a_1=-4$, $a_2=1$; a_6

122 Interpola los medios geométricos que se indican:

a) cinco entre 32/81 y 9/2 b) cuatro entre $\sqrt{3}$ y $4\sqrt{6}$

c) seis entre 2187 y 1 d) tres entre 0,3 y 0,00003

123 En los siguientes ejercicios se dan algunos datos de una progresión geométrica y se pide el cálculo de otros:

a) $a_1 \cdot a_5=25$; a_3 b) $a_1=\sqrt{3}$, $r=3$; P_6

c) $a_1=2$, $a_4=54$; P_4 d) $a_1 \cdot a_3=36$, $a_4=24$; a_5

e) $a_6=243$, $r=3$; S_6 f) $a_1=2$, $a_3=18$, S_6

g) $r=1/2$, $S_6=252$; a_1 h) $a_1+a_2=12$, $a_3+a_4=108$; r, S_7

i) $a_1=7$, $a_n=448$, $S_n=889$; r, n j) $S_3=63$, $a_3-a_1=27$; a_2

k) $S_3=26$, $P_3=216$; a_1, a_2, a_3 l) $P_5=9^5$, $a_5=3a_3$; a_1, a_5

124 Calcula la suma de todos los términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) 3, 1, 1/3, 1/9, … b) 6, 3, 3/2, 3/4, …

c) $a_1=81$, $r=1/3$ d) 1, -1/3, 1/9, -1/27, …

125 En las siguientes progresiones geométricas *decrecientes*, se dan unos datos y se piden otros:

a) $S=2$, $a_1=1/2$; r b) $S=18$, $a_2-a_1=-2$; a_1, r c) $S=64$, $a_2=16$; a_1, r

126 Tres números, cuya suma es 36, están en progresión aritmética. Si se les suma 1, 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica. Calcúlalos.

127 Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328509, sabiendo que el mayor de ellos excede en 115 a la suma de los otros dos.

128 Halla las fracciones generatrices de los decimales:

a) $0,4\widehat{09}$ b) $0,\widehat{81}$ c) $1,\widehat{26}$ d) $1,2\widehat{41}$ e) $0,0\widehat{01}$

129 Una rana da saltos en línea recta, hacia adelante, cada vez salta la mitad del salto anterior. Parte del extremo de una charca circular de 5 m de radio. En el primer salto se coloca a 3 m del centro. ¿Llegará la rana al centro del estanque?

130 Un mendigo pide hospitalidad a un avaro, haciéndole la siguiente proposición: "Yo pagaré 1 euro por el primer día; 2, por el segundo; 3, por el tercero, y así sucesivamente. En cambio usted me dará 0,001 céntimos el primer día; 0,002, el

segundo; 0,004, el tercero, y así sucesivamente, duplicando siempre la cantidad anterior". El avaro encontró esta proposición como un buen negocio y consintió el arreglo por 30 días. Haz la liquidación total al final del plazo.

131 Dado un triángulo equilátero de 3 cm de lado, se unen dos a dos los puntos medios de sus lados, obteniéndose un nuevo triángulo en el que se practica la misma operación. Procediendo así indefinidamente, ¿cuál es la suma de los perímetros y de las áreas de todos los triángulos obtenidos?

132 Inscribe en un cuadrado de 2 m de lado un círculo; en éste un cuadrado; en éste un círculo, y así de nuevo indefinidamente. Halla la suma de las áreas de todos los cuadrados.

B. Cuestionario formulado

MATEMÁTICAS B EXAMEN Nº 5 09/05/2012

NOMBRE Y APELLIDOS: ....

4. (1,0 p) Define progresión geométrica y demuestra la fórmula del término general de una progresión geométrica.

5. (1,50 p) La suma de n números naturales consecutivos, tomados a partir del 11 es 1715. Calcula n.

MATEMÁTICAS B EXAMEN Nº 5 09/05/2012

NOMBRE Y APELLIDOS: ....

6. (1,25 p) Interpola cuatro medios geométricos entre los números $\sqrt{3}$ y $4 \cdot \sqrt{6}$

7. (1,50 p) Dado un cuadrado de 2 metros de lado, se unen dos a dos los puntos medios de los lados obteniéndose un nuevo cuadrado en el que se practica la misma operación. Procediéndose así indefinidamente, ¿Cuál es la suma de las **áreas y de los perímetros** de todos los cuadrados así obtenidos?.

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:
Juan Carlos Ballabriga, Departamento de Ingeniería matemática e Informática