Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Análisis de la enseñanza de la proporcionalidad en 1º de E.S.O y en 1º de E.S.P.A.

Govardhan Ghanshyam Uttamchandani

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

LISTA DE GRÁFICAS

Página

LISTA DE IMÁGENES

Página

LISTA DE TABLAS

Página

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo realizar un análisis de la enseñanza de la proporcionalidad en 1º de E.S.O y en 1º de E.S.P.A.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo en la educación Obligatoria y para Personas Adultas en Primaria, Secundaria y Bachillerato. También se analiza el tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto de la educación obligatoria en el tercer ciclo de Primaria, en E.S.O. y en Bachillerato.

En la segunda parte se propone un proceso de enseñanza de la noción de proporcionalidad desde el enfoque aritmético y adaptado a las características y necesidades de las personas adultas, que se ha puesto en marcha en un aula de 1º de E.S.P.A en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido ad hoc, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

.

Parte I:

La proporcionalidad en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la proporcionalidad en el currículo en la educación Obligatoria y para Personas Adultas en Primaria, Secundaria y Bachillerato. También se analiza el tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto de la educación obligatoria en el tercer ciclo de Primaria, en E.S.O. y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a la proporcionalidad en cada uno de los grados de las dos modalidades. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 1º de E.S.O., así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

.

1. La proporcionalidad en el currículo vigente

En este capítulo se analiza el currículo oficial definido para la proporcionalidad en la educación Obligatoria y para Personas Adultas en Primaria, Secundaria y Bachillerato.

El currículo vigente de la educación obligatoria está desarrollado en los Boletines Oficiales del Estado, más concretamente en:

- MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.
- MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. BOE 5, de 5 enero, 677–773.
- MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre. BOE 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

El currículo vigente de la educación para personas adultas se desarrolla por comunidad autónoma. En nuestro caso, se toma como referencia lo dispuesto en el Boletín Oficial de Navarra:

- CFN (2009). Decreto Foral 61/2009, de 20 de Julio. BON 109, de 4 de Septiembre, 11447-11502.
- CFN (2008). Decreto Foral 49/2008, de 12 de Mayo. BON 70, de 6 de Junio, 6552- 6643.

Para facilitar la comprensión, el análisis del currículo se realiza agrupando por las etapas de Primaria, Secundaria y Bachillerato. En las tablas 1 y 2 se indican de forma resumida los contenidos relacionados con la proporcionalidad en el currículo vigente, para la educación obligatoria y para personas adultas, respectivamente.

Tabla 1.- Descriptores referentes a la proporcionalidad en el currículo de educación obligatoria

	Primaria	E.S.O.					Bachillerato Ciencias		Bachillerato Sociales	
Descriptor	3er ciclo	1º	2º	3º	º (opción A	º (opción B	1º	2º	1º	2º
C1	F1-P	F1-1ESO	F1-2ESO	F1-3ESO	F1-4AESO	F1-4BESO	–	–	F1-1Bach	F1-2Bach
C2	F2-P	F2-1ESO	F2-2ESO	F2-3ESO	F2-4AESO	F2-4BESO	–	F2-2Bach	–	–
C3	–	F3-1ESO	F3-2ESO	F3-3ESO	F3-4AESO	F3-4BESO	F3-1Bach	–	F3-1Bach	–
C4	–	F4-1ESO	F4-2ESO	F4-3ESO	F4-4AESO	F4-4BESO	F4-1Bach	–	F4-1Bach	–

Tabla 2.- Descriptores referentes a la proporcionalidad en el currículo de educación para personas adultas

	Primaria	E.S.P.A.				Bachillerato	
Descriptor	3er ciclo	1º	2º	3º	4º	1º	2º
C1	F1-P	F1-1ESPA	F1-2ESPA	–	–	–	–
C2	F2-P	F2-1ESPA	F2-2ESPA	F2-3ESPA	–	–	–
C3	F3-P	–	F3-2ESPA	F3-3ESPA	F3-4ESPA	–	–
C4	F4-P	–	F4-2ESPA	–	F4-4ESPA	–	–

Leyenda:

- Ci: Descriptor del contenido específico que es abordado en cada uno de los grados. Más concretamente, los descriptores son:
    - C1: Proporcionalidad aritmética
    - C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica
    - C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales
    - C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal
- Fi-grado: Formulación relativa a un contenido relacionado con Ci en un determinado grado
- La ralla (—) significa que en ese grado no se explicita un contenido en el currículo vigente.

A continuación se indica el detalle de los contenidos relacionados con la proporcionalidad en el currículo vigente.

1.1. Contenidos en Educación Obligatoria

1.1.1. Educación Primaria

Tabla 3.- Contenidos en Tercer ciclo de Primaria de educación Obligatoria

Descriptor	Contenido
C1: Proporcionalidad aritmética	- Bloque 1. Números y operaciones Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. Calculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales. - Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes Equivalencias entre unidades de una misma magnitud.
C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	- Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición. - Bloque 3. Geometría Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo. Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos. Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.
C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	-
C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	-

1.1.2. E.S.O.

Tabla 4a.- Contenidos en Primer ciclo de E.S.O.

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
C1: Proporcionalidad aritmética	- Bloque 2. Números. Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa. Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales.	- Bloque 2. Números. Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes. Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. Aumentos y disminuciones porcentuales. Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.
C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	- Bloque 4. Geometría. Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano. Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.	- Bloque 4. Geometría. Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.

Tabla 3b.- Contenidos en Primer ciclo de E.S.O. (cont.)

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	- Bloque 5. Funciones y gráficas. Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.	- Bloque 5. Funciones y gráficas. Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	- Bloque 6. Estadística y probabilidad. Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.	- Bloque 6. Estadística y probabilidad. Diferentes formas de recogida de información. Organización de los datos en tablas. Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.

Tabla 5a.- Contenidos en Segundo ciclo de E.S.O.

Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4ºA	Contenido 4ºB
C1: Proporcionalidad aritmética	- Bloque 2. Números. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada.	- Bloque 2. Números. Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.	- Bloque 2. Números. Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales.
C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	- Bloque 4. Geometría. Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.	- Bloque 4. Geometría. Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana.	- Bloque 4. Geometría. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Tabla 4b.- Contenidos en Segundo ciclo de E.S.O. (cont.)

Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4ºA	Contenido 4ºB
C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	- Bloque 5. Funciones y gráficas. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.	- Bloque 5. Funciones y gráficas. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales. Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.	- Bloque 5. Funciones y gráficas. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales. Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.
C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	- Bloque 6. Estadística y probabilidad. Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.	- Bloque 6. Estadística y probabilidad. Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja.	- Bloque 6. Estadística y probabilidad. Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja.

1.1.3. Bachillerato

Tabla 6.- Contenidos en Bachillerato educación Obligatoria – Ciencias y Tecnología

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
C1: Proporcionalidad aritmética	-	
C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	-	- Bloque 2. Geometría Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	- Bloque 3. Análisis Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.	-
C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	- Bloque 4. Estadística y Probabilidad Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal.	-

Bachillerato – Ciencias Sociales

Tabla 7.- Contenidos en Bachillerato educación Obligatoria – Ciencias Sociales

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
C1: Proporcionalidad aritmética	- Bloque 1. Aritmética y álgebra Resolución de problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, amortizaciones, capitalizaciones y números índice. Parámetros económicos y sociales.	- Bloque 1. Aritmética y álgebra Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Programación lineal. Aplicaciones a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos. Interpretación de las soluciones.
C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	-	-
C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	- Bloque 2. Análisis Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales. Tasa de variación. Tendencias.	-
C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	- Bloque 3. Probabilidad y estadística Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados.	-

1.2. Contenidos en Educación para Personas Adultas

1.2.1. Enseñanzas Iniciales II – Ámbito científico tecnológico

Tabla 8.- Contenidos en Enseñanzas Iniciales II – Ámbito científico tecnológico

Descriptor	Contenido
C1: Proporcionalidad aritmética	- 1. Números y operaciones Uso de números enteros, decimales y fracciones en situaciones reales. Proporcionalidad: significado y expresiones más usuales (%, factor de proporción). - 2. Medidas y magnitudes Transformación de unidades de medida en otras de la misma magnitud.
C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	- 3. Geometría: Figuras en el plano y en el espacio. Elementos (puntos, rectas, planos) y relaciones básicas (paralelismo y perpendicularidad). Proporcionalidad geométrica: escala, planos y mapas. –Representación gráfica de espacios y elementos mediante planos y croquis sencillos a escala. –Aplicación de la proporcionalidad en figuras geométricas. Resolución de problemas.
C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	4. Interpretación, representación y tratamiento de la información: El número como dato. Obtención de datos y elaboración de tablas. Interpretación de tablas. Reconocimiento de relaciones de proporcionalidad. Elaboración e interpretación de gráficas sencillas.
C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	- 4. El lenguaje matemático. –Utilización de diferentes instrumentos y técnicas para representar y almacenar la información (cuaderno de trabajo, tablas, esquemas, resúmenes, gráficas...).

1.2.2. E.S.P.A.

Tabla 9a.- Contenidos en E.S.P.A. nivel I

Descriptor	Módulo 1	Módulo 2
C1: Proporcionalidad aritmética	- Bloque 2. Números Identificación y utilización de magnitudes proporcionales en situaciones de la vida cotidiana. Aplicación a la resolución de problemas en lasque intervenga la proporcionalidad directa e inversa: descuentos, tasas, intereses y repartos proporcionales. Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Aumentos y disminuciones porcentuales. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales. Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes.	- Bloque 2. Números Fracciones en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Representación gráfica. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente.
C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	- Bloque 3. Geometría Simetría de figuras planas, Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.	- Bloque 3. Geometría El triángulo rectángulo. El teorema de Pitágoras. El teorema de Tales. Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Utilización de los teoremas de Pitágoras y de Tales para obtener medidas. Escalas y planos. Uso de instrumentos de dibujo para la realización de planos sencillos.

Tabla 8b.- Contenidos en E.S.P.A. nivel II (cont.)

Descriptor	Módulo 1	Módulo 2
C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	-	- Bloque 4. Funciones y gráficas Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. Tablas de valores. Coordenadas cartesianas. Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores o de un enunciado. Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	-	Bloque 5. Estadística Recogida de información. Organización de los datos en tablas. Frecuencias absolutas y relativas. Análisis de los aspectos más destacados de gráficos estadísticos. Realización de gráficos estadísticos a partir de tablas.

Tabla 10a.- Contenidos en E.S.P.A. nivel II

Descriptor	Módulo 3	Módulo 4
C1: Proporcionalidad aritmética	-	-
C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	- Bloque 3. Geometría Revisión de la geometría del plano y del espacio. Utilización de la composición y descomposición de figuras y cuerpos para facilitar la resolución de problemas geométricos. Aplicación de los teoremas de Thales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. Coordenadas geográficas y husos horarios. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.	-
C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	- Bloque 4. Funciones y gráficas Distintas formas de expresar una relación funcional; verbal, tablas, gráfica y algebraica. Estudio gráfico y algebraico de las funciones de primer grado. Uso de las tecnologías de la información para el análisis de funciones y gráficas. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.	- Bloque 4. Funciones y gráficas Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.

Tabla 9b.- Contenidos en E.S.P.A. nivel II (cont.)

Descriptor	Módulo 3	Módulo 4
C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	-	- Bloque 5. Estadística Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado. Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.

1.2.3. Educación Superior para Personas Adultas - Bachillerato

Tabla 11.- Educación para Personas Adultas - Bachillerato

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
C1: Proporcionalidad aritmética	-	-
C2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	-	-
C3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	-	-
C4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	-	-

2. Los criterios de evaluación de la proporcionalidad en el currículo vigente

En este capítulo se analizan los criterios de evaluación en el currículo oficial definido para la proporcionalidad en la educación Obligatoria y para Personas Adultas en Primaria, Secundaria y Bachillerato.

El currículo vigente de la educación obligatoria está desarrollado en los Boletines Oficiales del Estado, más concretamente en:

- MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.

- MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. BOE 5, de 5 enero, 677–773.

- MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre. BOE 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

El currículo vigente de la educación para personas adultas se desarrolla por comunidad autónoma. En nuestro caso, se toma como referencia lo dispuesto en el Boletín Oficial de Navarra:

- CFN (2009). Decreto Foral 61/2009, de 20 de Julio. BON 109, de 4 de Septiembre, 11447-11502.

- CFN (2008). Decreto Foral 49/2008, de 12 de Mayo. BON 70, de 6 de Junio, 6552- 6643.

Para facilitar la comprensión, el análisis del currículo se realiza agrupando por las etapas de Primaria, Secundaria y Bachillerato. En las tablas 12 y 13 se indican de forma resumida los criterios de evaluación relacionados con la proporcionalidad en el currículo vigente.

Tabla 12.- Descriptores referentes a la proporcionalidad en el currículo de educación obligatoria

	Primaria	E.S.O.					Bachillerato Ciencias		Bachillerato Sociales	
Descriptor	3er ciclo	1º	2º	3º	º (opción A	º (opción B	1º	2º	1º	2º
CE1	F1-P	F1-1ESO	F1-2ESO	F1-3ESO	F1-4AESO	F1-4BESO	–	–	F1-1Bach	F1-2Bach
CE2	F2-P	F2-1ESO	F2-2ESO	F2-3ESO	F2-4AESO	F2-4BESO	–	F2-2Bach	–	–
CE3	–	F3-1ESO	F3-2ESO	F3-3ESO	F3-4AESO	F3-4BESO	F3-1Bach	–	F3-1Bach	–
CE4	–	F4-1ESO	F4-2ESO	F4-3ESO	F4-4AESO	F4-4BESO	F4-1Bach	–	F4-1Bach	–

Tabla 13 Descriptores referentes a la proporcionalidad en el currículo de educación para personas adultas

	Primaria	E.S.P.A.				Bachillerato	
Descriptor	3er ciclo	1º	2º	3º	4º	1º	2º
CE1	F1-P	F1-1ESPA	F1-2ESPA	F1-3ESPA	F1-4ESPA	–	–
CE2	F2-P	F2-1ESPA	–	–	–	–	–
CE3	F3-P	–	F3-2ESPA	F3-3ESPA	F3-4ESPA	–	–
CE4	F4-P	–	F4-2ESPA	–	F4-4ESPA	–	–

Leyenda:

- CEi: Descriptor del criterio evaluación específico que es abordado en cada uno de los grados. Más concretamente, los descriptores son:
    - CE1: Proporcionalidad aritmética
    - CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica
    - CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales
    - CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal
- Fi-grado: Formulación relativa a un criterio de evaluación relacionado con CEi en un determinado grado
- La ralla (—) significa que en ese grado no se explicita un contenido en el currículo vigente.

A continuación se indica el detalle de los contenidos relacionados con la proporcionalidad en el currículo vigente.

2.1. Criterios de Evaluación en Educación Obligatoria

2.1.1. Primaria

Tabla 14.- Criterios de Evaluación en Tercer ciclo de Educación Primaria

Descriptor	Contenido
CE1: Proporcionalidad aritmética	3. Utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana. Se trata de valorar la capacidad para utilizar con cierta agilidad estrategias personales de cálculo mental en situaciones de cálculo sencillas.
CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	5. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. Este criterio pretende evaluar capacidades de orientación y representación espacial. Asimismo, se pretende identificar y reproducir manifestaciones artísticas que incluyan simetrías y traslaciones. 6. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende valorar si conocen las propiedades básicas de cuerpos y figuras planas.
CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	-
CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	-

2.1.2. E.S.O.

Tabla 15a.- Criterios de Evaluación en Primer ciclo de Educación Secundaria

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
CE1: Proporcionalidad aritmética	3. Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas. Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida. Se pretende, asimismo, valorar el uso del signo igual como asignador y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones.	2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.
CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	4. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.	2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.

Tabla 15b.- Criterios de Evaluación en Primer ciclo de Educación Secundaria (cont.)

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.
CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	6. Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas. Se trata de verificar, en casos sencillos y relacionados con su entorno, la capacidad de desarrollar las distintas fases de un estudio estadístico: formular la pregunta o preguntas que darán lugar al estudio, recoger la información, organizarla en tablas y gráficas, hallar valores relevantes (media, moda, valores máximo y mínimo, rango) y obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos. También se pretende valorar la capacidad para utilizar la hoja de cálculo, para organizar y generar las gráficas más adecuadas a la situación estudiada.

Tabla 16a.- Criterios de Evaluación en Segundo ciclo de Educación Secundaria

Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4ºA	Contenido 4ºB
CE1: Proporcionalidad aritmética	2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos. A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.	2. Aplicar porcentajes y tasas a la resolución de problemas cotidianos y financieros, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo en función de la cantidad y complejidad de los números. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar porcentajes, tasas, aumentos y disminuciones porcentuales a problemas vinculados a situaciones financieras habituales y a valorar la capacidad de utilizar las tecnologías de la información para realizar los cálculos, cuando sea preciso.	3. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar la capacidad de desarrollar estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.

Tabla 16b.- Criterios de Evaluación en Segundo ciclo de Educación Secundaria (cont.)

Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4ºA	Contenido 4ºB
CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. Con este criterio se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, para que puedan ser utilizados como un recurso más de análisis en una formación natural o en una creación artística. El reconocimiento de los movimientos lleva consigo la identificación de sus elementos característicos: ejes de simetría, centro y amplitud de giro, etc. Igualmente los lugares geométricos se reconocerán por sus propiedades, no por su expresión algebraica. Se trata de evaluar, además, la creatividad y capacidad para manipular objetos y componer movimientos para generar creaciones propias.	4. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.	3. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar la capacidad de desarrollar estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.

Tabla 16c.- Criterios de Evaluación en Segundo ciclo de Educación Secundaria (cont.)

Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4ºA	Contenido 4ºB
CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.	5. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernirá qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.

Tabla 16d.- Criterios de Evaluación en Segundo ciclo de Educación Secundaria (cont.)

Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4ºA	Contenido 4ºB
CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	6. Elaborar e interpretar informaciones estadísticas teniendo en cuenta la adecuación de las tablas y gráficas empleadas, y analizar si los parámetros son más o menos significativos. Se trata de valorar la capacidad de organizar, en tablas de frecuencias y gráficas, información de naturaleza estadística, atendiendo a sus aspectos técnicos, funcionales y estéticos (elección de la tabla o gráfica que mejor presenta la información), y calcular, utilizando si es necesario la calculadora o la hoja de cálculo, los parámetros centrales (media, mediana y moda) y de dispersión (recorrido y desviación típica) de una distribución. Asimismo, se valorará la capacidad de interpretar información estadística dada en forma de tablas y gráficas y de obtener conclusiones pertinentes de una población a partir del conocimiento de sus parámetros más representativos.	6. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.	5. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales en distribuciones unidimensionales y valorar cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas. En este nivel adquiere especial significado el estudio cualitativo de los datos disponibles y las conclusiones que pueden extraerse del uso conjunto de los parámetros estadísticos. Se pretende, además, que se tenga en cuenta la representatividad y la validez del procedimiento de elección de la muestra y la pertinencia de la generalización de las conclusiones del estudio a toda la población.

2.1.3. Bachillerato

Tabla 17a.- Criterios de Evaluación en Educación Obligatoria - Bachillerato Ciencias

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
CE1: Proporcionalidad aritmética	-	-
CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	-	2. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en tres dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones. La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el espacio de tres dimensiones.
CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global.	-

Tabla17b.- Criterios de Evaluación en Educación Obligatoria - Bachillerato Ciencias (cont.)

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente. Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.	-

Tabla 18a.- Criterios de Evaluación en Educación Obligatoria - Bachillerato Sociales

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
CE1: Proporcionalidad aritmética	3. Utilizar los porcentajes y las fórmulas de interés simple y compuesto para resolver problemas financieros e interpretar determinados parámetros económicos y sociales. Este criterio pretende comprobar si se aplican los conocimientos básicos de matemática financiera a supuestos prácticos, utilizando, si es preciso, medios tecnológicos al alcance del alumnado para obtener y evaluar los resultados.	2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas. Este criterio está dirigido a comprobar la capacidad de utilizar con eficacia el lenguaje algebraico tanto para plantear un problema como para resolverlo, aplicando las técnicas adecuadas. No se trata de valorar la destreza a la hora de resolver de forma mecánica ejercicios de aplicación inmediata, sino de medir la competencia para seleccionar las estrategias y herramientas algebraicas; así como la capacidad de interpretar críticamente el significado de las soluciones obtenidas.
CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	-	-

Tabla 18b.- Criterios de Evaluación en Educación Obligatoria - Bachillerato Ciencias (cont.)

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	4. Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas. Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas. 5. Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos. Este criterio está relacionado con el manejo de datos numéricos y en general de relaciones no expresadas en forma algebraica. Se dirige a comprobar la capacidad para ajustar a una función conocida los datos extraídos de experimentos concretos y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas.	-
CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	6. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional es de carácter funcional o aleatorio e interpretar la posible relación entre variables utilizando el coeficiente de correlación y la recta de regresión. Se pretende comprobar la capacidad de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información gráfica aportada por una nube de puntos; así como la competencia para extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden. En este sentido, más importante que su mero cálculo es la interpretación del coeficiente de correlación y la recta de regresión en un contexto determinado.	-

2.2. Criterios de Evaluación en Educación para Personas Adultas

2.2.1. Enseñanzas Iniciales II – Ámbito científico tecnológico

Tabla 19.- Criterios de Evaluación Enseñanzas Iniciales II

Descriptor	Contenido
CE1: Proporcionalidad aritmética	4. Utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana. 5. Realizar mediciones en contextos reales, seleccionando las unidades e instrumentos usuales, teniendo en cuenta la magnitud que se va a medir, la naturaleza del objeto y el grado de precisión requerido, haciendo previamente estimaciones razonables y expresando correctamente las medidas tomadas. Asimismo, realiza con soltura intercambios de dinero en situaciones reales de compra y venta.
CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	4. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.
CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	5. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares.
CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	6. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato..

2.2.2. E.S.P.A.

Tabla 20a.- Criterios de Evaluación E.S.P.A. nivel I

Descriptor	Módulo 1	Módulo 2
CE1: Proporcionalidad aritmética	3. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata asimismo de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.	1. Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. 2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata asimismo de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.
CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	5. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.	-

Tabla 20b.- Criterios de Evaluación E.S.P.A. nivel I (cont.)

Descriptor	Módulo 1	Módulo 2
CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	-	4. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de las otras dos: verbal o numérica. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.
CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	-	5. Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas. Se trata de verificar, en casos sencillos y relacionados con su entorno la capacidad de desarrollar las distintas fases de un estudio estadístico: formular la pregunta o preguntas que darán lugar al estudio, recoger la información, organizarla en tablas y gráficas, hallar valores relevantes (media, moda, valores máximo y mínimo, rango) y obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos. También se pretende valorar la capacidad para utilizar la hoja de cálculo, para organizar y generar las gráficas más adecuados a la situación estudiada.

Tabla 21a.- Criterios de Evaluación E.S.P.A. nivel II

Descriptor	Módulo 3	Módulo 4
CE1: Proporcionalidad aritmética	2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos. A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.	3. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.
CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	-	-

Tabla 21b.- Criterios de Evaluación E.S.P.A. nivel II (cont.)

Descriptor	Módulo 3	Módulo 4
CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer de ese modo la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo, de entre los estudiados: lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso las tecnologías de la información. 5. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.
CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	-	6. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, correspondientes a distribuciones discretas y continuas, y valorar cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas. Se trata de valorar la capacidad de organizar la información estadística en tablas y gráficas y calcular los parámetros que resulten más relevantes, con ayuda de la calculadora o la hoja de cálculo.

2.2.3. Bachillerato en educación para Personas Adultas

Tabla 22.- Criterios de Evaluación Educación Personas Adultas - Bachillerato

Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
CE1: Proporcionalidad aritmética	-	-
CE2: Semejanza. Proporcionalidad geométrica	-	-
CE3: Funciones y gráficas. Modelos lineales	-	-
CE4: Tablas y gráficas en estadística. Representación lineal	-	-

3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la proporcionalidad en el currículo vigente

En este capítulo se analizan los libros de texto correspondientes a la educación obligatoria, identificando en cada curso desde 5º de Primaria hasta 3º de E.S.O. los problemas, ejercicios y cuestiones tipo, que aparecen en los mismos.

Los libros de texto analizados de Primaria corresponden al año 2002 de la editorial Santillana y los de Secundaria al año 2007 de la editorial Oxford University Press. Para más detalle consultar el apartado "Referencias" de este mismo documento.

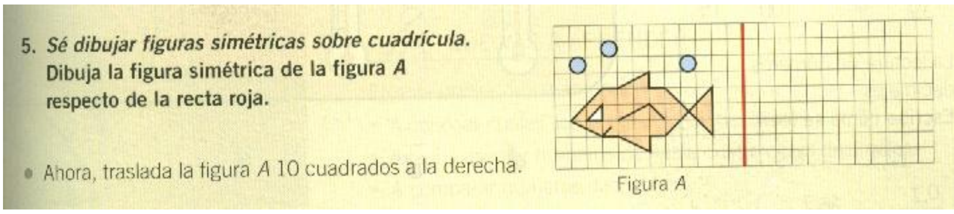
3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 5º Educación Primaria

A continuación se muestran cuestiones, ejercicios, problemas y situaciones relativas a 5º de Primaria obtenidas del libro de texto: García P., Rodríguez M., Uriondo J.L. (2002). *Matemáticas 5.* Editorial Santillana.

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Realización de dibujos simétricos y translaciones en una hoja cuadriculada.

Ejemplo:


5. *Sé dibujar figuras simétricas sobre cuadrícula.*
Dibuja la figura simétrica de la figura *A* respecto de la recta roja.

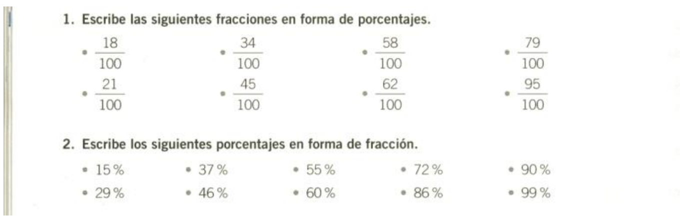
• Ahora, traslada la figura *A* 10 cuadrados a la derecha.

Matemáticas 5. Santillana 2002, Página 101

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio descontextualizado en el que se solicita calcular porcentajes a partir de fracciones y viceversa.

Ejemplo:


1. Escribe las siguientes fracciones en forma de porcentajes.

• $\frac{18}{100}$ • $\frac{34}{100}$ • $\frac{58}{100}$ • $\frac{79}{100}$

• $\frac{21}{100}$ • $\frac{45}{100}$ • $\frac{62}{100}$ • $\frac{95}{100}$

2. Escribe los siguientes porcentajes en forma de fracción.

• 15 % • 37 % • 55 % • 72 % • 90 %

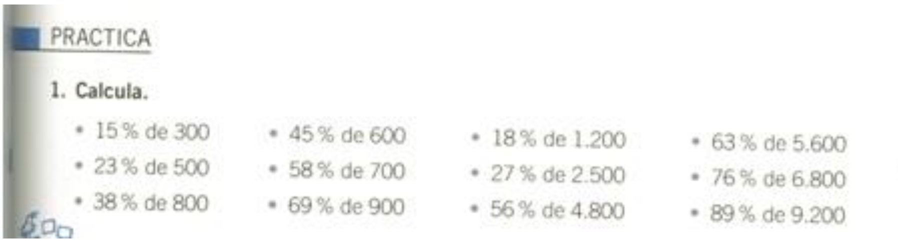
• 29 % • 46 % • 60 % • 86 % • 99 %

Matemáticas 5. Santillana 2002, Página 110

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Cálculo de valores absolutos asociados a porcentajes y el total.

Ejemplo:



PRACTICA

1. Calcula.

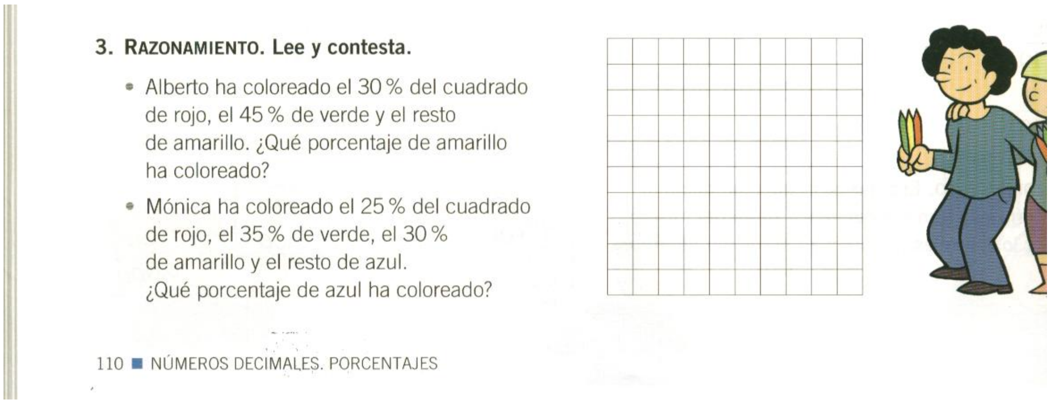
• 15 % de 300	• 45 % de 600	• 18 % de 1.200	• 63 % de 5.600
• 23 % de 500	• 58 % de 700	• 27 % de 2.500	• 76 % de 6.800
• 38 % de 800	• 69 % de 900	• 56 % de 4.800	• 89 % de 9.200

Matemáticas 5. Santillana 2002, Página 111

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Visualización del significado de porcentaje y su relación con el total mediante herramientas gráficas.

Ejemplo:



3. RAZONAMIENTO. Lee y contesta.

- Alberto ha coloreado el 30 % del cuadrado de rojo, el 45 % de verde y el resto de amarillo. ¿Qué porcentaje de amarillo ha coloreado?
- Mónica ha coloreado el 25 % del cuadrado de rojo, el 35 % de verde, el 30 % de amarillo y el resto de azul. ¿Qué porcentaje de azul ha coloreado?

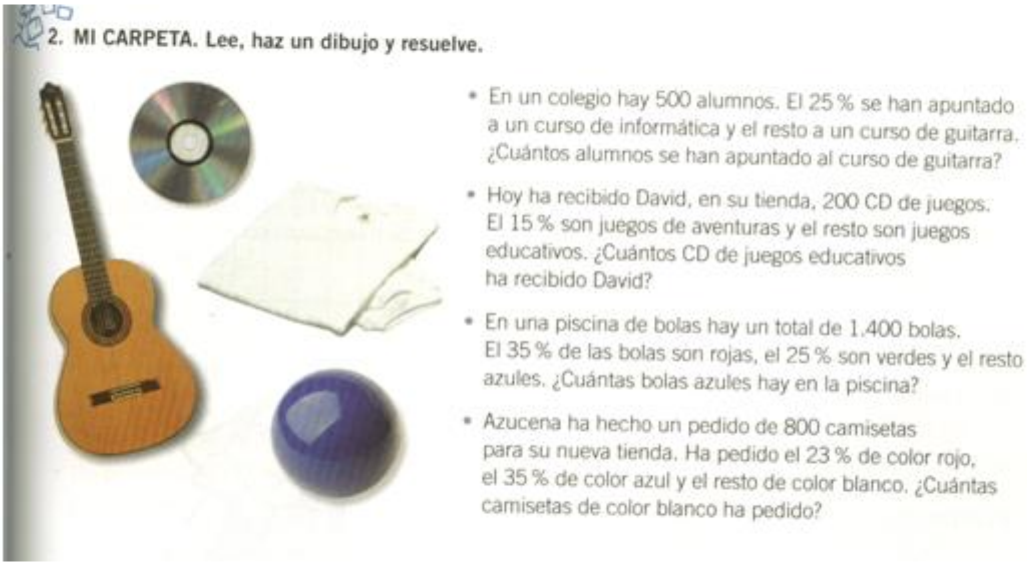
110 ■ NÚMEROS DECIMALES. PORCENTAJES

Matemáticas 5. Santillana 2002, Página 110

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problemas contextualizados en los que el dato a encontrar es un valor absoluto. En ningún problema se pide calcular el porcentaje.

Ejemplo:



2. MI CARPETA. Lee, haz un dibujo y resuelve.

- En un colegio hay 500 alumnos. El 25 % se han apuntado a un curso de informática y el resto a un curso de guitarra. ¿Cuántos alumnos se han apuntado al curso de guitarra?
- Hoy ha recibido David, en su tienda, 200 CD de juegos. El 15 % son juegos de aventuras y el resto son juegos educativos. ¿Cuántos CD de juegos educativos ha recibido David?
- En una piscina de bolas hay un total de 1.400 bolas. El 35 % de las bolas son rojas, el 25 % son verdes y el resto azules. ¿Cuántas bolas azules hay en la piscina?
- Azucena ha hecho un pedido de 800 camisetas para su nueva tienda. Ha pedido el 23 % de color rojo, el 35 % de color azul y el resto de color blanco. ¿Cuántas camisetas de color blanco ha pedido?

Matemáticas 5. Santillana 2002, Página 111

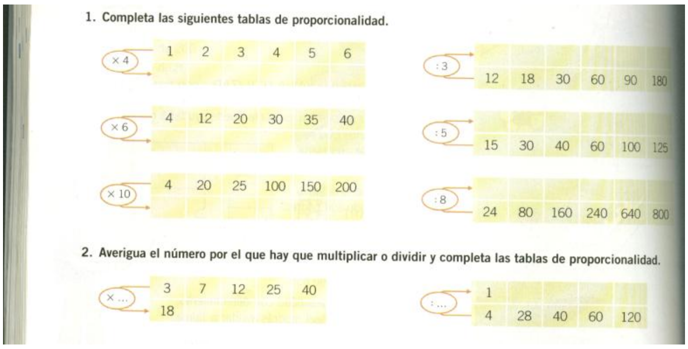
3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º Educación Primaria

A continuación se muestran cuestiones, ejercicios, problemas y situaciones relativas a 5º de Primaria obtenidas del libro de texto: García P., Uriondo J.L., Rodríguez M. (2002). *Matemáticas 6.* Editorial Santillana.

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio descontextualizado en el que se introduce al cálculo de proporciones mediante el uso de tablas.

Ejemplo:



1. Completa las siguientes tablas de proporcionalidad.

× 4						
	1	2	3	4	5	6

× 6						
	4	12	20	30	35	40

× 10						
	4	20	25	100	150	200

: 3						
	12	18	30	60	90	180

: 5						
	15	30	40	60	100	125

: 8						
	24	80	160	240	640	800

2. Averigua el número por el que hay que multiplicar o dividir y completa las tablas de proporcionalidad.

× ...					
	3	7	12	25	40
	18				

: ...					
	1				
	4	28	40	60	120

Matemáticas 6. Santillana 2002, Página 101

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problemas contextualizados de cálculo de proporcionalidad directa sin indicar que se realicen con tablas, aunque lo más probable es que el estudiante las utilice porque así es como se le está guiando

Ejemplo:

4. Lee y resuelve.

- Marisa recorre 15 km en 2 horas. ¿Cuántos kilómetros recorre Marisa en 8 horas a ese ritmo?
- Jaime utiliza 50 bolsas iguales para envasar 150 kg de naranjas. ¿Cuántos kilos de naranjas envasa en 40 bolsas iguales?
- Un pastelero utiliza 10 litros de leche para hacer 20 tartas iguales. ¿Cuántos litros de leche necesita para hacer 18 tartas iguales?
- En hacer un plato combinado para 4 personas, Luisa emplea 300 g de arroz. ¿Cuántos gramos de arroz se necesitan para hacer este plato combinado para 6 personas?
- Paco gasta 75 kg de pienso en dar de comer a los animales de su granja durante 30 días. ¿Para cuántos días tendrá con 300 kg de pienso?

Matemáticas 6. Santillana 2002, Página 149

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicios para asociar las diferentes formas de representar una fracción decimal.

Ejemplo:

1. Completa las siguientes igualdades.

- $0{,}12 = \frac{\square}{100} = 12\,\%$
- $0{,}04 = \frac{4}{\square} = 4\,\%$
- $\square = \frac{25}{100} = 25\,\%$
- $0{,}09 = \frac{\square}{100} = \square\,\%$

Matemáticas 6. Santillana 2002, Página 150

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problemas contextualizados para el cálculo de porcentajes

Ejemplo:

2. Lee y contesta.

De cada 100 alumnos de un colegio, 45 son niños y 55 son niñas. ¿Cuál es el porcentaje de niños en ese colegio? ¿Y el de niñas?

En un parque hay, de cada 100 árboles, 19 pinos y el resto son álamos. ¿Qué porcentaje de pinos hay en el parque? ¿Y de álamos?

En las rebajas de unos grandes almacenes, por cada 100 € de compra, descuentan 30 €. ¿Qué tanto por ciento de descuento hacen?

En una biblioteca hay un total de 100 libros; 25 son de historia, 38 de literatura y el resto de poesía. ¿Qué porcentaje representan los libros de cada clase?

Matemáticas 6. Santillana 2002, Página 150

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema X **Cuestión** □ Situación

Descripción: Reflexión al estudiante sobre el significado de porcentaje.

Ejemplo:

3. **RAZONAMIENTO. Lee y explica tu respuesta.**

En una clase el 25 % de los alumnos tiene un perro, el 15 % tiene un gato y el 65 % no tiene ni perro ni gato. Según estos datos, ¿puedes asegurar que en esa clase hay alumnos que tienen los dos animales? ¿Por qué?

Matemáticas 6. Santillana 2002, Página 150

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problemas contextualizados de aumentos y disminuciones porcentuales

Ejemplo:

2. **Observa el cartel que hay a la entrada de unos almacenes y calcula.**
   - ¿Cuál será el precio actual de unos pantalones que antes de las rebajas costaban 60 €?
   - ¿Cuánto dinero tienen que descontar en un equipo musical que antes de las rebajas costaba 270 €?

30 % de descuento en todos los artículos

Matemáticas 6. Santillana 2002, Página 151

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Introducción a aplicaciones de la proporcionalidad: escalas. Es un buen ejemplo de aplicación de la noción de proporcionalidad.

Ejemplo:

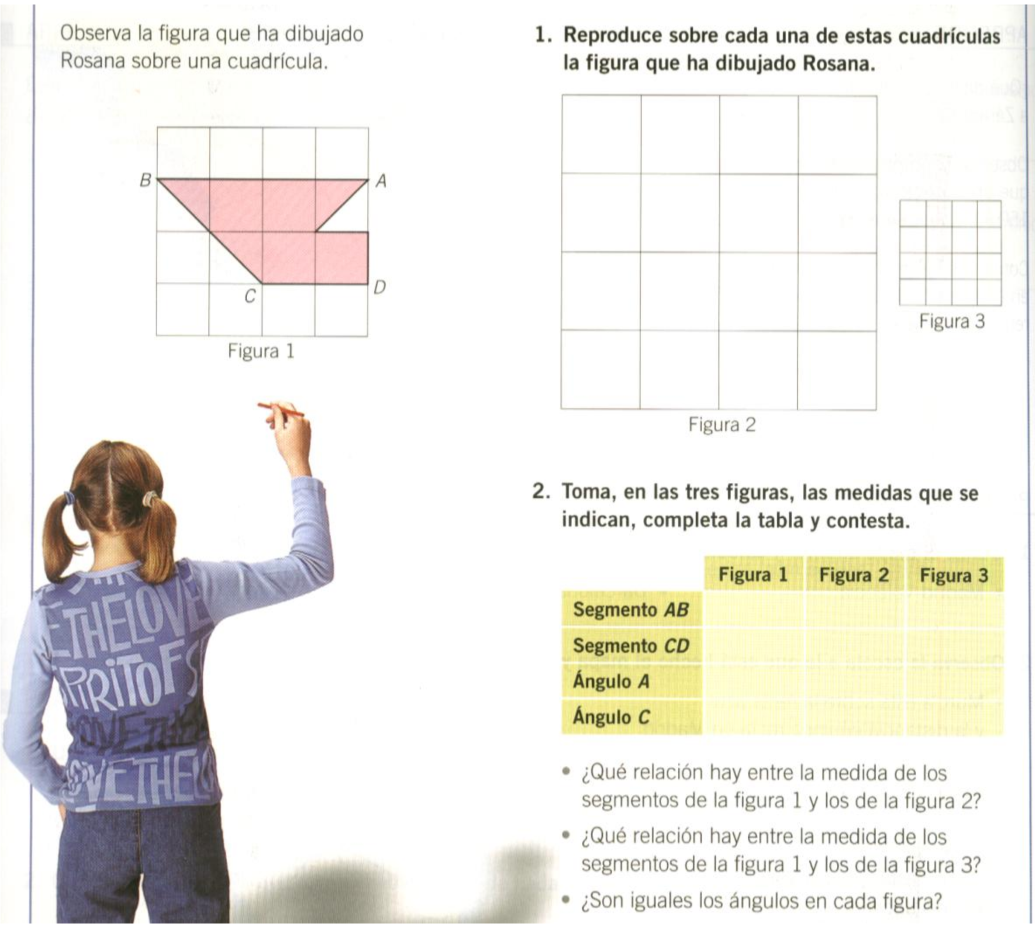
2. **Observa la escala a la que está hecho el mapa y señala con un punto las ciudades que se indican.**
   - Murcia está sobre la recta azul y la distancia en línea recta de Madrid a Murcia es de 345 km.
   - Badajoz está sobre la línea verde y la distancia en línea recta de Madrid a Badajoz es de 330 km.
   - Oviedo está sobre la línea amarilla y la distancia en línea recta de Madrid a Oviedo es de 375 km.
   - Sevilla está sobre la línea roja y la distancia en línea recta de Madrid a Sevilla es de 410 km.

Matemáticas 6. Santillana 2002, Página 153

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Buen problema para afianzar la noción de proporcionalidad mediante el uso de dibujos en cuadrícula, combinado además con la representación de medidas en tabla.

Ejemplo:



Observa la figura que ha dibujado Rosana sobre una cuadrícula.

1. **Reproduce sobre cada una de estas cuadrículas la figura que ha dibujado Rosana.**

2. **Toma, en las tres figuras, las medidas que se indican, completa la tabla y contesta.**

	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Segmento *AB*			
Segmento *CD*			
Ángulo *A*			
Ángulo *C*			

- ¿Qué relación hay entre la medida de los segmentos de la figura 1 y los de la figura 2?
- ¿Qué relación hay entre la medida de los segmentos de la figura 1 y los de la figura 3?
- ¿Son iguales los ángulos en cada figura?

Matemáticas 6. Santillana 2002, Página 154

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º ESO

A continuación se muestran cuestiones, ejercicios, problemas y situaciones relativas a 1º de E.S.O obtenidas del libro de texto: Uriondo J.L. (2007). *Matemáticas,* 1º Secundaria. Editorial Oxford University Press. Serie Trama.

Actividad tipo: X Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicios contextualizados de aplicación relativos a la noción de razón.

Ejemplo:

1 Ana pesa 54 kg y mide 160 cm, mientras que su primo Álvaro pesa 70 kg y mide 150 cm. Escribe con una razón la relación entre el peso y la altura de Ana y Álvaro.

2 En un país hay 5 mujeres por cada 3 hombres:

a) Expresa en forma de razón la relación entre el número de hombres y el de mujeres.

b) Expresa en forma de razón la relación entre el número de mujeres y el de hombres.

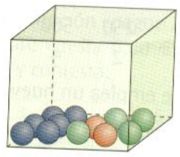
c) ¿Cuántos hombres hay por cada mujer?

d) ¿Cuántas mujeres hay por cada habitante?

3 Observa el número de bolas de cada color que hay en la urna y expresa con una razón:

a) La relación entre el número de bolas rojas y el de bolas azules.

b) La relación entre el número de bolas verdes y el de bolas azules.



c) La relación entre el número de bolas azules y el total de bolas.

Matemáticas 1º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 113

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicios descontextualizados de relación entre razones y proporción.

Ejemplo:

5 Averigua el valor de *n* para que haya proporción:

a) $\frac{2}{4} = \frac{7}{n}$ *c)* $\frac{n}{3,4} = \frac{0,4}{1,7}$ *e)* $\frac{2,5}{n} = \frac{10}{12}$

b) $\frac{5}{4} = \frac{n}{18}$ *d)* $\frac{6}{1,2} = \frac{7,2}{n}$ *f)* $\frac{n}{0,5} = \frac{4}{8}$

Matemáticas 1º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 113

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema □ Cuestión X Situación

Descripción: Situaciones de la vida cotidiana en la que se muestra la relación de proporcionalidad entre magnitudes

Ejemplo:

2 ¿Cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales?

a) La velocidad a la que circula un vehículo y el tiempo que tarda este en hacer un recorrido.

b) La longitud del lado de un cuadrado y su perímetro.

c) La medida del lado de un cuadrado y su área.

d) La talla de una camisa y su precio.

e) El número de folios de un documento y su grosor.

f) La cantidad de arroz necesaria para hacer una paella y el número de raciones obtenidas.

g) El número de socios de un club y el dinero que recauda este por las cuotas anuales.

h) La velocidad a la que circula un vehículo y el espacio recorrido en un tiempo determinado.

Matemáticas 1º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 115

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicios contextualizados y descontextualizados de magnitudes directamente proporcionales

Ejemplo:

4 Cierta compañía de telefonía cobra 0,06 € por establecimiento de llamada y 0,03 €/min a partir de los 2 primeros minutos, que son gratis. Completa la tabla en tu cuaderno e indica si el coste de una llamada es directamente proporcional a su duración:

Tiempo (min)	1	2	3	4
Precio (€)				

5 Copia y completa estas tablas para que las magnitudes *A* y *B* sean directamente proporcionales:

a)

A	3	4	7	
B		10		27,5

b)

A	1	2,5	3	
B		8		4

c)

A	0,1	0,2	0,3	
B			0,15	2

Matemáticas 1º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 115

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Reflexión para el estudiante de cuál es la técnica más adecuada para la resolución del problema.

Ejemplo:

3 Alejandro compra 1,4 kg de peras por 1,75 €. ¿Cuánto le costarán 2 kg? ¿Y 2,5 kg? ¿Y 3 kg? Antes de responder, piensa qué estrategia es más conveniente para resolver este problema: la reducción a la unidad o una regla de tres.

Matemáticas 1º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 117

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problema típico de aumentos y disminuciones porcentuales.

Ejemplo:

13 ¿Cuánto habrá que pagar por la impresora del anuncio si el IVA que se le aplica es del 16 %?

Matemáticas 1º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 121

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Buen ejercicio para que el estudiante empiece a asociar proporcionalidad con modelo lineal.

Ejemplo:

1 Una entrada de cine cuesta 6 €.

a) Confecciona una tabla de valores en la que figure el precio de 0, 1, 2, 3, 5, 8 y 10 entradas.

b) Dibuja una gráfica con los datos de la tabla del apartado anterior. ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Se puede prolongar la gráfica por el tercer cuadrante? Razona tus respuestas.

c) Utiliza la gráfica para calcular el precio de 6, 7 y 9 entradas, y añade a la tabla los valores obtenidos.

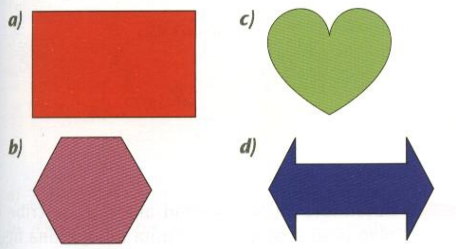
Matemáticas 1º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 151

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Introducción a la búsqueda de patrones de simetría en figuras diversas.

Ejemplo:

2 Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y dibuja sus ejes de simetría y, en el caso de que lo tengan, el centro de simetría.



Matemáticas 1º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 189

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO

A continuación se muestran cuestiones, ejercicios, problemas y situaciones relativas a 2º de E.S.O obtenidas del libro de texto: Uriondo J.L. (2007). *Matemáticas*, 2º Secundaria. Editorial Oxford University Press. Serie Trama.

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicios varios para expresar mediante una razón o averiguar el término que falta en una proporción.

Ejemplo:

1 Para hacer un bizcocho, Eva mezcla 4,5 medidas de harina con 3 medidas de azúcar. Escribe:

a) La razón entre el contenido de harina y el de azúcar.

b) La razón entre el contenido de azúcar y el de harina.

c) El número de medidas de harina que se mezcla con cada medida de azúcar.

1 Averigua el término que falta:

a) $\frac{0,5}{1,5} = \frac{6}{x}$ *d)* $\frac{x}{1,6} = \frac{10,5}{8}$

b) $\frac{4}{0,2} = \frac{7}{x}$ *e)* $\frac{0,8}{4} = \frac{-2,4}{x}$

c) $\frac{5}{x} = \frac{22,5}{18}$ *f)* $\frac{2}{x} = \frac{x}{8}$

Matemáticas 2º Secundaria, Oxford University Press 2007, Páginas 55 y 57

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicios descontextualizados de proporcionalidad directa e inversa, orientados a resolver mediante la ayuda de tablas.

Ejemplo:

2 Copia y completa las siguientes tablas sabiendo que *A* y *B* son magnitudes directamente proporcionales. Indica la constante de proporcionalidad directa que permite calcular el valor de *B* que le corresponde a un valor cualquiera de *A*.

a)

A	B
0,5	8
2	
4,5	
	88

b)

A	1	6	7,5	
B		4,8		8

c)

A	1	3	4	
B		4,5		18

2 Copia y completa estas tablas sabiendo que *A* y *B* son magnitudes inversamente proporcionales y calcula la constante de proporcionalidad inversa:

a)

A	B
6	
8	3
12	

b)

A	0,5	1	2	
B		4		0,5

c)

A	1	3		6
B		4	2,4	

Matemáticas 2º Secundaria, Oxford University Press 2007, Páginas 59 y 61

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problemas contextualizados de proporcionalidad directa e inversa.

Ejemplo:

5 Si 1,450 kg de jamón cuestan 10 € 44 cent:

a) ¿Cuál es el precio de 850 g?

b) ¿Qué cantidad de jamón te dan por 3,60 €?

3 Un ganadero tiene pienso suficiente para alimentar a 40 vacas durante 15 días. Si adquiere 10 vacas más, ¿para cuántos días tendrá pienso?

Matemáticas 2º Secundaria, Oxford University Press 2007, Páginas 59 y 61

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema X **Cuestión** □ Situación

Descripción: Evaluar la compresión de la proporcionalidad compuesta mediante el uso de la regla de tres.

Ejemplo:

7 El número de días que 3 obreros tardan en levantar un muro de 2 m de altura depende de la longitud del muro y del número de horas que trabajan al día. Indica qué se está calculando con la siguiente regla de tres compuesta y cuál de las proporciones propuestas es la correcta:

N.º de días	Long. muro (m)	Horas al día
2	30	6
x	40	8

a) $\frac{2}{x} = \frac{30}{40} \cdot \frac{6}{8}$ *b)* $\frac{2}{x} = \frac{40}{30} \cdot \frac{6}{8}$ *c)* $\frac{2}{x} = \frac{30}{40} \cdot \frac{8}{6}$

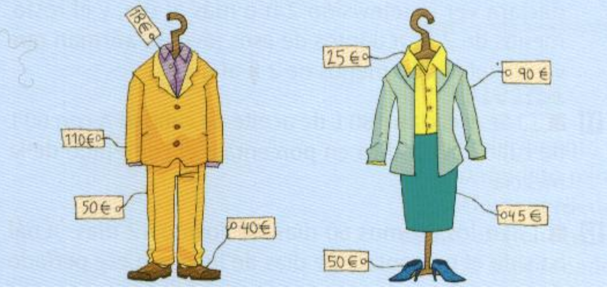
Matemáticas 2º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 63

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problemas de aumentos y disminuciones porcentuales

Ejemplo:

20 Al llegar la temporada de rebajas, Irene y Valentín deciden rebajar la ropa de caballero en un 15 % y la de señora en un 20 %. Ayúdales a cambiar los precios de estos dos artículos de su escaparate.



Matemáticas 2º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 80

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Cálculo de capital y de intereses

Ejemplo:

41 ¿Cuánto tarda un capital de 26 500 € al 5 % anual en generar unos intereses de 662,50 €?

Matemáticas 2º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 80

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Relación proporcionalidad con funciones lineales, introduciendo así implícitamente la noción de linealidad.

Ejemplo:

2 Si un kilo de plátanos cuesta 1,50 €, haz una tabla de valores y dibuja la gráfica de la función que indica el precio de una bandeja de plátanos en función de su peso.

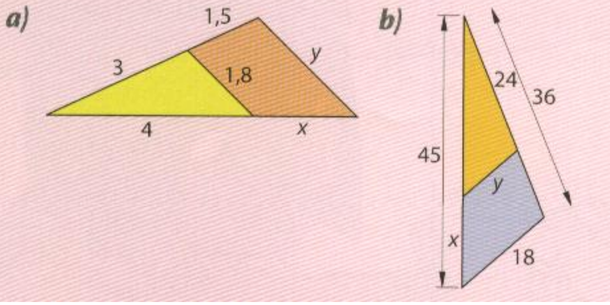
Matemáticas 2º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 131

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Aplicación del teorema de Tales.

Ejemplo:

2. Calcula cuánto miden x e y, considerando que las medidas están dadas en centímetros:



Matemáticas 2º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 179

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: En los ejercicios de representación de sectores no se suele tener en cuenta los ángulos necesarios, siendo generalmente difíciles de realizar manualmente.

Ejemplo:

2 La siguiente tabla refleja cómo ha metido los goles un equipo de fútbol durante un campeonato. Haz un diagrama de sectores que la represente.

Balón parado	Penalti	Pase	Jugada individual	Error defensivo
8	6	28	6	4

Matemáticas 2º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 247

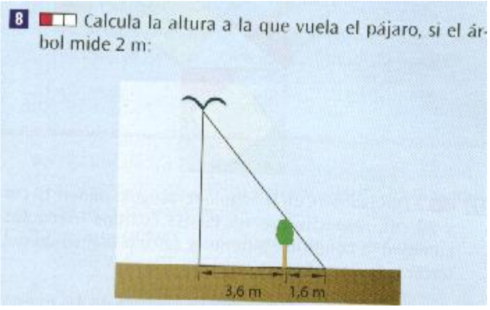
3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO

A continuación se muestran cuestiones, ejercicios, problemas y situaciones relativas a 3º de E.S.O. obtenidas del libro de texto: Pérez S., Lobo B., Uriondo J.L. (2007). *Matemáticas,* 3º Secundaria. Editorial Oxford University Press. Serie Trama.

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado de aplicación del teorema de Tales

Ejemplo:

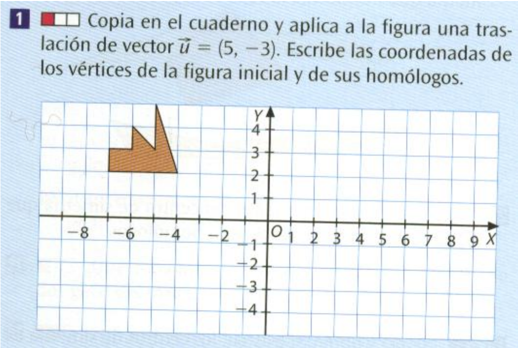


Matemáticas 3º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 123

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicios de translaciones con ayuda de una cuadrícula.

Ejemplo:

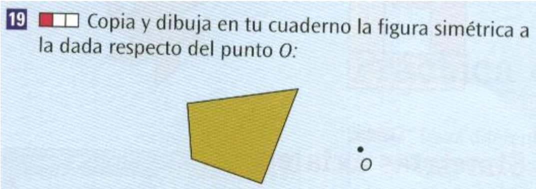


Matemáticas 3º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 161

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Dificultad añadida al ejercicio por tener que pasar figuras no regulares al cuaderno, para poder realizar simetrías y translaciones

Ejemplo:



Matemáticas 3º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 162

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Refuerzo de noción de proporcionalidad con linealidad mediante la anotación algebraica, la realización de tablas de valores y representación gráfica.

Ejemplo:

1 Si el precio del chocolate es 5 €/kg, expresa algebraicamente la función que relaciona el precio con el peso del chocolate. Haz una tabla de valores y representa gráficamente esta función.

Matemáticas 3º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 193

Actividad tipo: □ Ejercicio X **Problema** □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problema contextualizado que asocia las nociones de proporcionalidad y linealidad.

Ejemplo:

3 Un ciclista sale de su casa a las 9.00 h con una velocidad constante de 8 km/h.

a) Escribe la expresión algebraica del espacio que recorre en función del tiempo. ¿Es una función lineal?

b) ¿Son las variables directamente proporcionales? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

c) Construye una tabla de valores y representa la función en unos ejes de coordenadas.

d) ¿Cuál es la pendiente de la recta? ¿Y su ordenada en el origen?

e) ¿A qué hora habrá recorrido 4 km? ¿Y 20 km?

Matemáticas 3º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 201

Actividad tipo: X **Ejercicio** □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: En los ejercicios de representación de sectores no se suele tener en cuenta los ángulos necesarios, siendo generalmente difíciles de realizar manualmente. En este caso tampoco son ángulos habituales, pero al ser el diagrama sólo de tres sectores parece asumible.

Ejemplo:

1 Dibuja el diagrama de sectores correspondiente a la siguiente distribución de alumnos de un instituto:

- 1.º y 2.º de ESO: 220 alumnos.
- 3.º y 4.º de ESO: 190 alumnos.
- 1.º y 2.º de Bachillerato: 130 alumnos.

Matemáticas 3º Secundaria, Oxford University Press 2007, Página 217

4. Resultados

Para finalizar esta primera parte, se compara el enfoque de la proporcionalidad desde el currículo vigente, en los libros de texto y con el texto de referencia de Marcos. C Marcos y Martinez J. *Compendio de Matemáticas*, Ediciones S.M.

También se han tenido en cuenta otros textos valiosos como UNED (1976), *Programa de especialización de profesorado de E.G.B.*, Matemáticas II, y Chevallard Y., Bosh M., Gascón Josep (1997). *ESTUDIAR MATEMÁTICAS: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial Horsori., pero se escoge el de *Compendio de Matemáticas*, por su cercanía con la educación secundaria.

En este último apartado también se realiza un análisis de la coherencia de los libros de texto en relación con el currículo. Los libros de texto utilizados son los mencionados en apartados anteriores. Para más detalle consultar el apartado "Referencias" de este mismo documento.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

El primer hecho a destacar es que tanto en el currículo y por ende en los libros de texto los objetos matemáticos están dispuestos para un aprendizaje en espiral, es decir, cada año se repasa lo visto en el anterior y se amplía en algún aspecto.

En este sentido, la noción de proporcionalidad se empieza introduciendo en 5º de primaria a través de objetos geométricos en el que se enseña a realizar dibujos simétricos y translaciones. En 6º de Primaria, por un lado, se continúa con objetos geométricos como las escalas, y por otro se inicia en la proporcionalidad a través de porcentajes.

Este comportamiento de aprendizaje en espiral continúa en secundaria. Para una mejor visualización, se presentan a continuación los descriptores de los temas relacionados con la noción de proporcionalidad en los libros de texto.

Tabla 23.- Descriptores de la noción de proporcionalidad en libros de texto de tercer ciclo de primaria

5º PRIMARIA	6º PRIMARIA
<u>*Figuras planas. Simetría*</u> ➢ Simetría y translación	<u>*Proporcionalidad. Porcentajes*</u> ➢ Series de números proporcionales ➢ Porcentajes. Problemas ➢ Escalas

Tabla 24 Descriptores de la noción de proporcionalidad en libros de texto de 1º, 2º y 3º E.S.O.

1º E.S.O.	2º E.S.O.	3º E.S.O.
Proporcionalidad directa ➢ Razón y proporción ➢ Magnitudes directamente proporcionales ➢ Problemas de proporcionalidad directa ➢ Porcentajes ➢ Problemas de disminuciones y aumentos porcentuales *Tablas y gráficas* ➢ Funciones: tablas y gráficas ➢ Interpretación de gráficas ➢ Tablas estadísticas ➢ Gráficos estadísticos *Elementos del plano y simetrías* ➢ Rectas ➢ Partes de una recta ➢ Ángulos ➢ Clasificación y relaciones entre ángulos ➢ Simetrías	*Proporcionalidad* ➢ Razón entre dos números ➢ Proporciones ➢ Proporcionalidad directa ➢ Proporcionalidad inversa ➢ Proporcionalidad compuesta *Aplicaciones de la proporcionalidad* ➢ Porcentajes ➢ Aumentos y disminuciones porcentuales ➢ Capitales e intereses ➢ Escalas y repartos *Funciones* ➢ Funciones lineales ➢ Función de proporcionalidad inversa *Semejanza* ➢ Segmentos proporcionales ➢ Teorema de Tales ➢ Aplicaciones del teorema de Tales ➢ Figuras semejantes ➢ Triángulos semejantes ➢ Aplicaciones de la semejanza de triángulos *Estadística* ➢ Datos y tablas de frecuencias ➢ Gráficos estadísticos	*Teorema de Tales y Pitágoras* ➢ Teorema de Tales *Movimientos* ➢ Traslaciones ➢ Giros ➢ Simetrías respecto de una recta ➢ Simetrías respecto de un punto ➢ Elementos invariantes de un movimiento ➢ Composición de movimientos ➢ Frisos y mosaicos ➢ Planos de simetría y ejes de rotación de poliedros *Coordenadas geográficas* ➢ Geometría en la esfera ➢ La Tierra ➢ Interpretación de mapas *Función afín* ➢ Casos particulares de la función afín *Tablas y gráficos estadísticos* ➢ Diagramas de barras, histograma y polígono de frecuencias ➢ Diagrama de sectores y diagrama lineal

Si se analizan los libros de texto con el texto de referencia se observan presencias o similitudes y ausencias o diferencias. En primer lugar se van a comentar las presencias, para a continuación comentar las ausencias.

La primera presencia es la iniciación a la proporcionalidad mediante la introducción de la definición de razón. En esta misma línea, tanto en el texto de referencia como en los libros de texto se relaciona razón con fracción.

La siguiente gran similitud es la definición de proporción que se realiza como la igualdad de dos razones. Tanto en el texto de referencia como en el libro de texto se describen los componentes o términos, es decir, extremos y medios, de una proporción.

El siguiente punto de similitud, es la definición del Teorema fundamental, en el que se indica que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Cabe mencionar que en los libros de texto no se enmarca como teorema fundamental, si no como una propiedad.

Otra presencia es que el siguiente paso en la explicación de la noción de proporcionalidad es la inclusión de las magnitudes proporcionales. Primero se definen y se explican las magnitudes directamente proporcionales para a continuación explicar las magnitudes inversamente proporcionales. Por último se explica la proporcionalidad compuesta.

La última gran presencia es la presentación de la regla de tres como técnica para la resolución de problemas de proporcionalidad directa, inversa y compuesta, en los que dados unos valores proporcionales y uno nuevo, se pide hallar el valor proporcional que corresponde con este último.

La primera ausencia que se encuentra, es que en el texto de referencia se definen “proporciones continuas” mientras que en los libros de texto no se mencionan.

Otra diferencia es que en los libros de texto no se realizan demostraciones. Así por ejemplo, en el texto de referencia se demuestra el Teorema fundamental de la proporcionalidad, pero no así en los libros de texto.

Una ausencia importante es que en los libros de texto no se indican todas las propiedades que cabría explicar de las proporciones y que sí son expuestas y demostradas en el libro de texto de referencia.

Otra ausencia destacable, es que en los libros de texto además de presentar la regla de tres como técnica para la resolución de problemas, se presenta la técnica de reducción a la unidad, mientras que en el libro de texto de referencia no se menciona.

También es destacable que en los libros de texto se trabaja mucho con porcentajes, mientras que en el texto de referencia ni se menciona.

Otra ausencia importante es que los libros de texto se mencionan varias aplicaciones de la proporcionalidad, como aumentos y disminuciones porcentuales, cálculo de capital e intereses, escalas y repartos, mientras que en el texto de referencia no se menciona.

Por último comentar que en el texto de referencia el tratamiento de los objetos matemáticos se realiza desde un punto de vista más formal, mientras que en los libros de texto actuales el tratamiento es menos formal, más guiado, explicando objeto a objeto, con varios ejemplos, cuestiones, ejercicios y problemas de aplicación antes de pasar al siguiente objeto, dando cierta sensación de estanqueidad.

Como conclusión final, tras analizar el currículo, los libros de texto de secundaria y el texto de referencia es que aunque la noción de proporcionalidad está presente en diferentes puntos del currículo (simetrías y semejanzas, proporcionalidad aritmética, funciones, linealidad, etc.) y podría generarse un adecuado aprendizaje en espiral, en la realidad esto no llega a producirse porque los diferentes objetos matemáticos a pesar de estar relacionados, se separan en diferentes temas prácticamente independientes entre sí, por lo que no se produce un aprendizaje valioso y duradero en el tiempo.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Tras analizar los libros de texto con el currículo se observa que en general los libros de texto contienen los contenidos mínimos especificados en el currículo. Esto, por otra parte, es lógico, ya que si los libros pretenden servir de ayuda a los docentes y a los estudiantes en la acción educativa lo natural es que éstos contengan los contenidos mínimos.

Por otro lado, sí que es importante destacar que los libros de texto suelen incorporar contenido adicional a lo establecido en el currículo oficial. Si se analiza los libros de texto, se puede afirmar que el contenido añadido que se aporta por los libros de texto suele consistir en adelantar conceptos que en el currículo están definidos para más adelante o añadir aplicaciones de los objetos matemáticos. Por ejemplo, en 2º de E.S.O. se expone el cálculo de capitales e intereses.

Por último comentar como caso significativo de contenido adicional que añaden los libros de texto, cabe mencionar que en el currículo no se menciona la enseñanza de ninguna técnica para la resolución de problemas de proporcionalidad, pero en los libros de texto aparecen técnicas tan conocidas como la regla de tres, o la técnica de reducción a la unidad.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de la proporcionalidad en 1º E.S.P.A.

Esta segunda parte está basada en el tema impartido durante el periodo de prácticas realizado en el instituto Félix Urabayen, con estudiantes de 1º de E.S.P.A.

Se hace un análisis didáctico de la resolución por parte de los estudiantes de problemas de proporcionalidad directa e inversa. Para ello, se divide esta parte en cuatro capítulos. En el primer capítulo se hace un análisis de cómo trata el libro el tema de proporcionalidad. En el segundo capítulo, se hace mención a los problemas que pueden encontrar los alumnos con este tema. En el tercer capítulo, se analiza el proceso de estudio y en el cuarto capítulo se analiza la experimentación con los resultados esperados.

.

5. El contenido matemático en el libro de texto de referencia

En este capítulo se va a analizar el tema “Proporcionalidad” del libro de referencia *Matemáticas 1* del centro donde realicé las prácticas correspondientes al Practicum II. En este centro, por tener la particularidad de que es un instituto para personas adultas, editan sus propios libros para así poder adaptar el currículo específico para personas adultas a las necesidades de los estudiantes.

Para la realización de este capítulo, se usará como texto de referencia el artículo de *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*, de Juan D. Godino, Vincenç Font y Miguel R. Wilhelmi de 2006.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

Para analizar los objetos matemáticos involucrados, haremos un análisis semejante al realizado en el artículo de referencia (Pág. 139).

LENGUAJE

Verbal

Proporcionalidad, directa, inversa, , “a más, más”, “a más, menos”, razón, igualdad, semejanza, simetría, linealidad, magnitud, fracción, aumento, disminución, regla de tres, porcentaje, reducción a la unidad, repartos, etc.

Tablas

Representación de pares de datos para ver la relación entre las magnitudes de estudio.

Gráfico

Dibujos en los que se presentan situaciones contextualizadas de proporcionalidad entre dos magnitudes

Simbólico

“+ +”, “+ -”, $\frac{4}{6} = \frac{10}{x}$, $x = \frac{6*10}{4}$,

Velocidad		*Tiempo viaje*
90 km/h	-------	2
60 km/h	-------	x

SITUACIONES

- Cuestiones en las que se presentan dos magnitudes y se pide indicar su relación y cómo es (directa o inversa).
- Problemas contextualizados en los que dadas dos magnitudes relacionadas y unos datos se piden calcular otros, comparar, etc.
- Problemas descontextualizados de proporcionalidad.

CONCEPTOS

Previos

- Fracciones
- Magnitudes, unidades
- Simetrías, semejanzas, escala

Emergentes

- Razón
- Proporción
- Porcentaje

PROCEDIMIENTOS

- Descontextualización del enunciado del problema.
- Contextualización de enunciados descontextualizados.
- Utilizar la regla de tres
- Valerse del método de reducción a la unidad, para calcular repartos directamente proporcionales.
- Resolver problemas utilizando tablas y gráficos.
- Reconocer simetrías en figuras planas para resolver problemas
- Cálculo de intereses como aplicación de la proporcionalidad.

PROPIEDADES

- Si dos magnitudes son directamente proporcionales al aumentar una, aumenta la otra en la misma proporción.
- Si dos magnitudes son inversamente proporcionales al aumentar una, disminuye la otra en la misma proporción.
- Los porcentajes son útiles para expresar variaciones.
- Los valores de dos magnitudes directamente proporcionales se pueden representar mediante una recta creciente que pase por el origen de coordenadas.

- Los valores de dos magnitudes inversamente proporcionales se pueden representar mediante una recta decreciente que pase por el origen de coordenadas.

- En una figura plana si aumenta o reduce un lado, para mantener la simetría los otros lados deberán aumentar o disminuir en la proporción.

- Propiedades de figuras de planas y su utilidad para la clasificación de figuras.

ARGUMENTOS

- Comprobación de las propiedades en casos particulares.

- Justificación de las propiedades, utilizando elementos genéricos.

- Identificación de relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

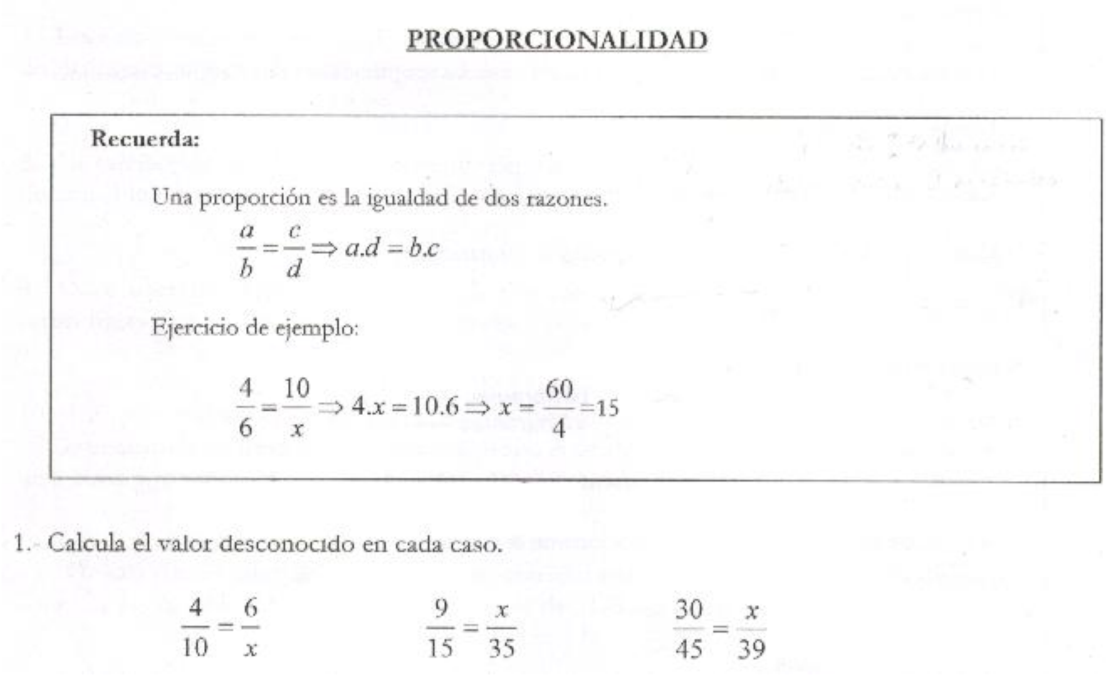
Para el análisis de la unidad didáctica de “Proporcionalidad” en 1º de E.S.P.A y E.S.O. se apoya respectivamente en los libros:

- *Matemáticas I* editado en el propio instituto Félix Urabayen y del cual se adjunta en el anexo A las páginas integras. El tema de “Proporcionalidad” se estructura de la siguiente forma:
    - ✓ Definición de proporción, ejemplos y ejercicios.
    - ✓ Magnitudes y proporcionalidad. Cuestiones.
    - ✓ Regla de tres directa e inversa. Ejemplos.
    - ✓ Ejercicios y problemas de proporcionalidad directa e inversa.
    - ✓ Ejercicios y problemas de porcentajes.
    - ✓ Ejercicios y problemas de repartos.
    - ✓ Aplicación de la proporcionalidad: Cálculo de intereses. Definición y ejercicios.

- *Matemáticas* de 1º de Secundaria, serie Trama, de la editorial Oxford University Press, del cual se adjunta en el Anexo B las páginas integras. Se toma como referencia el tema 6 - “Proporcionalidad directa” que se estructura de la siguiente forma:
    - ✓ Razón y proporción
    - ✓ Magnitudes directamente proporcionales
    - ✓ Problemas de proporcionalidad directa
    - ✓ Porcentajes
    - ✓ Problemas de disminuciones y aumentos porcentuales
    - ✓ Estrategias para resolver problemas
    - ✓ Ejercicios y problemas

Razón y proporción, ejemplos y ejercicios

- E.S.P.A



PROPORCIONALIDAD

Recuerda:

Una proporción es la igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$$

Ejercicio de ejemplo:

$$\frac{4}{6}=\frac{10}{x} \Rightarrow 4.x = 10.6 \Rightarrow x = \frac{60}{4} = 15$$

1.- Calcula el valor desconocido en cada caso.

$$\frac{4}{10}=\frac{6}{x} \qquad \frac{9}{15}=\frac{x}{35} \qquad \frac{30}{45}=\frac{x}{39}$$

Imagen 1.- Definición de proporción en el libro de referencia del instituto

Se realiza la introducción a la proporcionalidad de la forma habitual en todos los textos, es decir, mediante la definición: "*Una proporción es la igualdad de dos razones*". Se ilustra además con la igualdad de dos razones expresadas de forma genérica y se muestra un ejemplo de resolución.

A continuación se plantean unos ejercicios que son resueltos de forma dialógica con los estudiantes, para que los estudiantes vayan cogiendo habilidad con el cálculo de una igualdad de razones.

Se les indica que el método para calcular el valor desconocido, "x", se obtiene de aplicar el siguiente proceso:

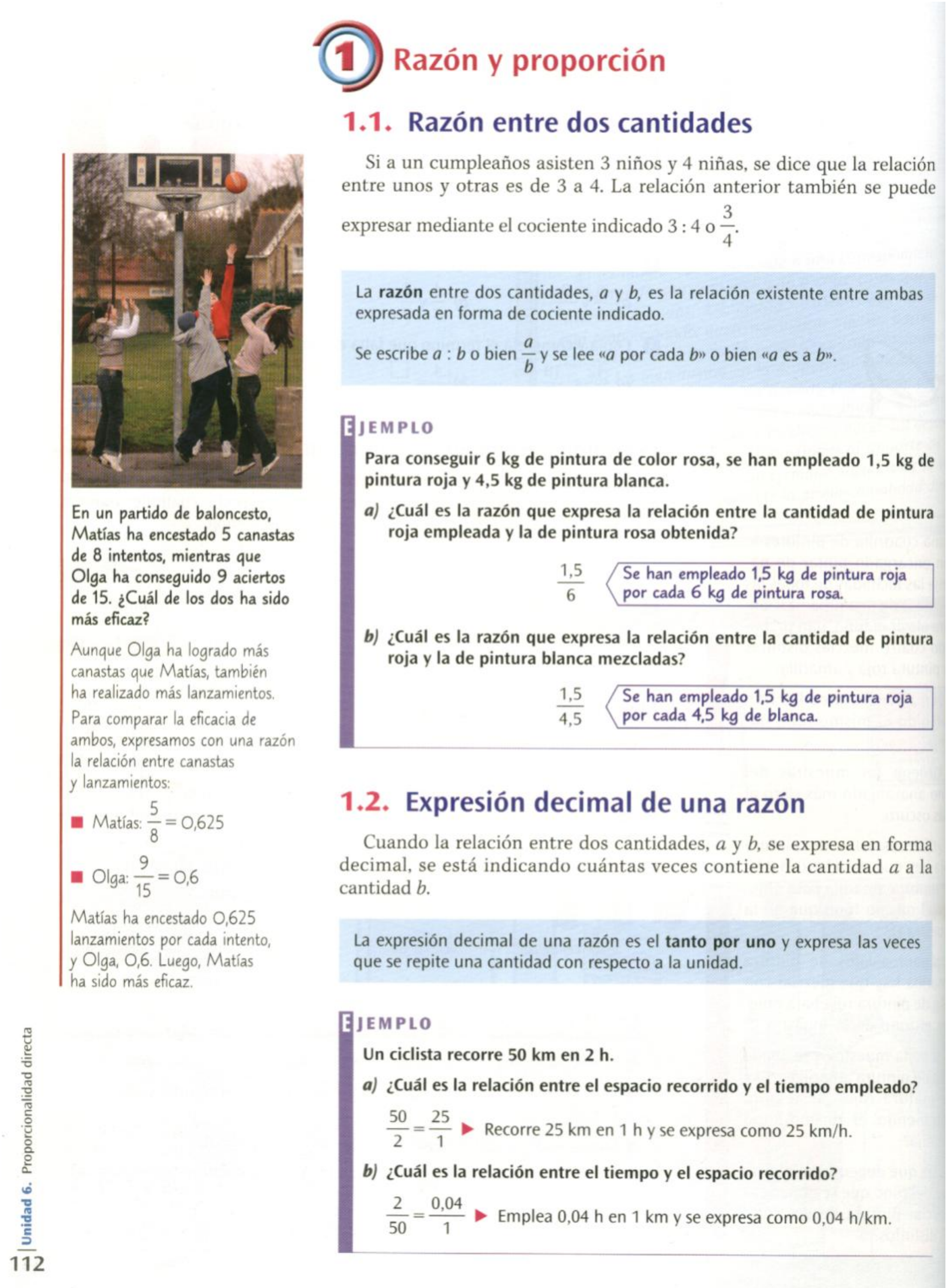
1. Multiplicar el número que aparece en el lado de la igualdad con "x" con el número que está en diagonal con dicho número.

2. Al resultado de la multiplicación anterior dividirlo entre el término que está en diagonal con la "x".

Por ejemplo:

$$\frac{4}{10}= \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{10 * 6}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

- E.S.O.



1 Razón y proporción

1.1. Razón entre dos cantidades

Si a un cumpleaños asisten 3 niños y 4 niñas, se dice que la relación entre unos y otras es de 3 a 4. La relación anterior también se puede expresar mediante el cociente indicado $3:4$ o $\frac{3}{4}$.

La **razón** entre dos cantidades, *a* y *b*, es la relación existente entre ambas expresada en forma de cociente indicado.

Se escribe $a:b$ o bien $\frac{a}{b}$ y se lee «*a* por cada *b*» o bien «*a* es a *b*».

EJEMPLO

Para conseguir 6 kg de pintura de color rosa, se han empleado 1,5 kg de pintura roja y 4,5 kg de pintura blanca.

a) **¿Cuál es la razón que expresa la relación entre la cantidad de pintura roja empleada y la de pintura rosa obtenida?**

$\frac{1{,}5}{6}$ Se han empleado 1,5 kg de pintura roja por cada 6 kg de pintura rosa.

b) **¿Cuál es la razón que expresa la relación entre la cantidad de pintura roja y la de pintura blanca mezcladas?**

$\frac{1{,}5}{4{,}5}$ Se han empleado 1,5 kg de pintura roja por cada 4,5 kg de blanca.

En un partido de baloncesto, Matías ha encestado 5 canastas de 8 intentos, mientras que Olga ha conseguido 9 aciertos de 15. ¿Cuál de los dos ha sido más eficaz?

Aunque Olga ha logrado más canastas que Matías, también ha realizado más lanzamientos.

Para comparar la eficacia de ambos, expresamos con una razón la relación entre canastas y lanzamientos:

- Matías: $\frac{5}{8} = 0{,}625$
- Olga: $\frac{9}{15} = 0{,}6$

Matías ha encestado 0,625 lanzamientos por cada intento, y Olga, 0,6. Luego, Matías ha sido más eficaz.

1.2. Expresión decimal de una razón

Cuando la relación entre dos cantidades, *a* y *b*, se expresa en forma decimal, se está indicando cuántas veces contiene la cantidad *a* a la cantidad *b*.

La expresión decimal de una razón es el **tanto por uno** y expresa las veces que se repite una cantidad con respecto a la unidad.

EJEMPLO

Un ciclista recorre 50 km en 2 h.

a) **¿Cuál es la relación entre el espacio recorrido y el tiempo empleado?**

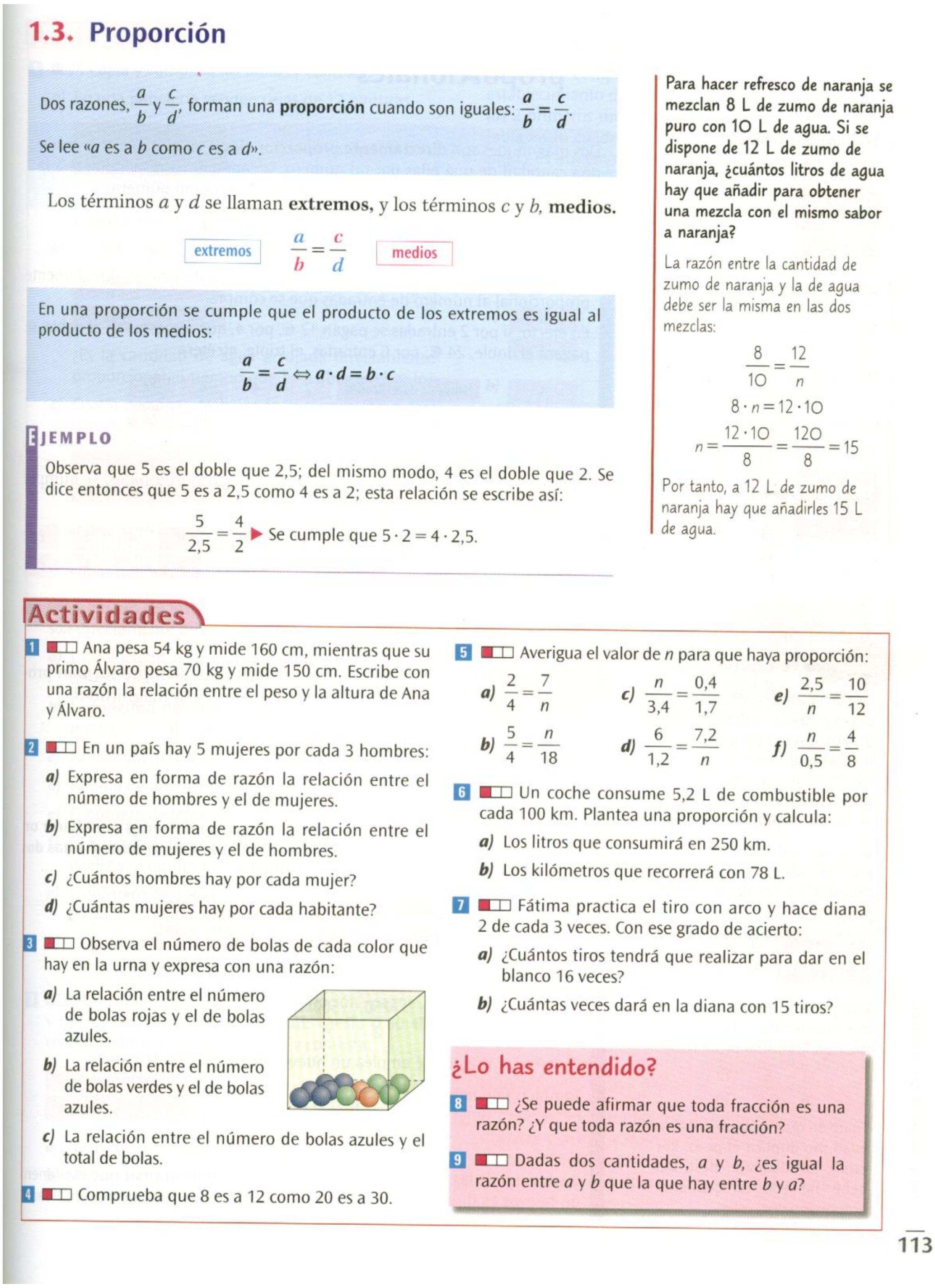
$\frac{50}{2} = \frac{25}{1}$ ► Recorre 25 km en 1 h y se expresa como 25 km/h.

b) **¿Cuál es la relación entre el tiempo y el espacio recorrido?**

$\frac{2}{50} = \frac{0{,}04}{1}$ ► Emplea 0,04 h en 1 km y se expresa como 0,04 h/km.

112 Unidad 6. Proporcionalidad directa

Imagen 2.- Definición de razón en el libro de texto



1.3. Proporción

Dos razones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, forman una **proporción** cuando son iguales: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Se lee «*a* es a *b* como *c* es a *d*».

Los términos *a* y *d* se llaman **extremos**, y los términos *c* y *b*, **medios**.

extremos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ medios

En una proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

EJEMPLO

Observa que 5 es el doble que 2,5; del mismo modo, 4 es el doble que 2. Se dice entonces que 5 es a 2,5 como 4 es a 2; esta relación se escribe así:

$\frac{5}{2{,}5} = \frac{4}{2}$ ▶ Se cumple que $5 \cdot 2 = 4 \cdot 2{,}5$.

Para hacer refresco de naranja se mezclan 8 L de zumo de naranja puro con 10 L de agua. Si se dispone de 12 L de zumo de naranja, ¿cuántos litros de agua hay que añadir para obtener una mezcla con el mismo sabor a naranja?

La razón entre la cantidad de zumo de naranja y la de agua debe ser la misma en las dos mezclas:

$$\frac{8}{10} = \frac{12}{n}$$

$$8 \cdot n = 12 \cdot 10$$

$$n = \frac{12 \cdot 10}{8} = \frac{120}{8} = 15$$

Por tanto, a 12 L de zumo de naranja hay que añadirles 15 L de agua.

Actividades

1 Ana pesa 54 kg y mide 160 cm, mientras que su primo Álvaro pesa 70 kg y mide 150 cm. Escribe con una razón la relación entre el peso y la altura de Ana y Álvaro.

2 En un país hay 5 mujeres por cada 3 hombres:

a) Expresa en forma de razón la relación entre el número de hombres y el de mujeres.

b) Expresa en forma de razón la relación entre el número de mujeres y el de hombres.

c) ¿Cuántos hombres hay por cada mujer?

d) ¿Cuántas mujeres hay por cada habitante?

3 Observa el número de bolas de cada color que hay en la urna y expresa con una razón:

a) La relación entre el número de bolas rojas y el de bolas azules.

b) La relación entre el número de bolas verdes y el de bolas azules.

c) La relación entre el número de bolas azules y el total de bolas.

4 Comprueba que 8 es a 12 como 20 es a 30.

5 Averigua el valor de *n* para que haya proporción:

a) $\frac{2}{4} = \frac{7}{n}$ ***c)*** $\frac{n}{3{,}4} = \frac{0{,}4}{1{,}7}$ ***e)*** $\frac{2{,}5}{n} = \frac{10}{12}$

b) $\frac{5}{4} = \frac{n}{18}$ ***d)*** $\frac{6}{1{,}2} = \frac{7{,}2}{n}$ ***f)*** $\frac{n}{0{,}5} = \frac{4}{8}$

6 Un coche consume 5,2 L de combustible por cada 100 km. Plantea una proporción y calcula:

a) Los litros que consumirá en 250 km.

b) Los kilómetros que recorrerá con 78 L.

7 Fátima practica el tiro con arco y hace diana 2 de cada 3 veces. Con ese grado de acierto:

a) ¿Cuántos tiros tendrá que realizar para dar en el blanco 16 veces?

b) ¿Cuántas veces dará en la diana con 15 tiros?

¿Lo has entendido?

8 ¿Se puede afirmar que toda fracción es una razón? ¿Y que toda razón es una fracción?

9 Dadas dos cantidades, *a* y *b*, ¿es igual la razón entre *a* y *b* que la que hay entre *b* y *a*?

113

Imagen 3.- Definición de proporción en el libro de texto

En el libro de texto de la editorial, se introduce la noción de razón para a continuación introducir la noción de proporción. También se indica cómo se "lee" una razón y una proporción y se indican cuáles son los nombres de los términos que conforman una proporción. A continuación, se indican varios ejemplos y se plantean actividades de aplicación.

Magnitudes y proporcionalidad

- E.S.P.A

Recuerda:

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** cuando:

- Al aumentar una la otra aumenta de igual manera.
- Al disminuir una la otra disminuye de la misma manera.

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando:

- Al aumentar una disminuye la otra.
- Al disminuir una la otra aumenta.

2.- Señala si son directas o inversas las magnitudes que tienes a continuación:

- ☐ La cantidad de pienso que gasta un granjero a la semana, y el número de vacas que posee.
- ☐ El caudal que arroja un manantial y el tiempo que tarda en llenar un cántaro de 20 litros.
- ☐ El tiempo que tenemos colocado un cántaro en la fuente y la cantidad de agua que recogemos.
- ☐ El peso de un libro, elegido al azar en una biblioteca y el número de páginas que contiene.
- ☐ El volumen de una caja y el número de cajas iguales que se pueden almacenar en una nave.
- ☐ El peso de una mercancía y el coste del transporte.
- ☐ La velocidad de una moto y el tiempo que tarda en recorrer una distancia determinada.
- ☐ El precio de venta de un piso y los metros cuadrados que mide.

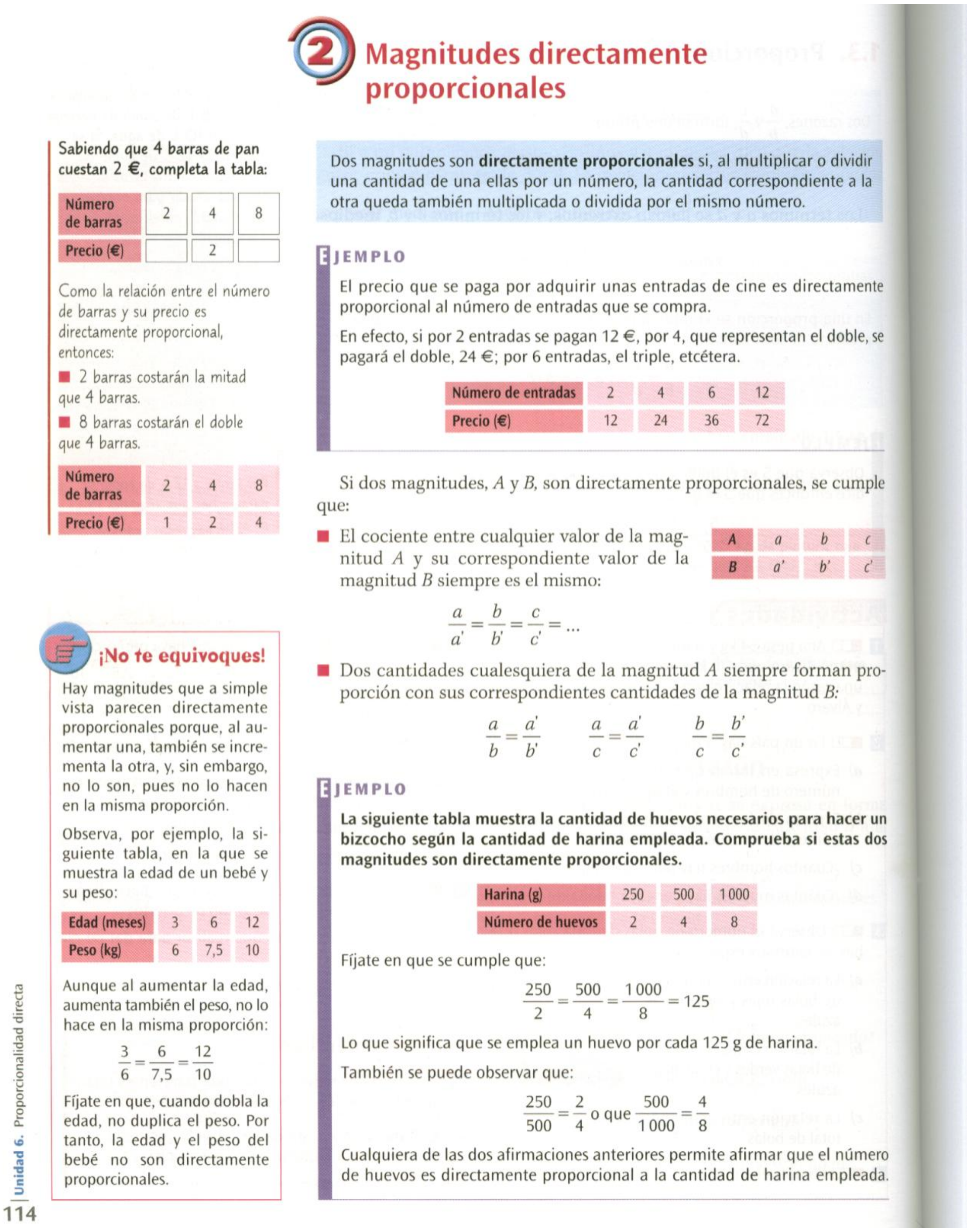
Imagen 4.- Magnitudes y proporcionalidad en el libro del instituto

En esta sección es donde se contextualiza la noción de proporcionalidad con situaciones de la vida cotidiana, ya que se asocia proporcionalidad con magnitudes y se explica que existen dos tipos (directa e inversa) entre magnitudes que sean proporcionales. También se propone al alumno que para ayudarle a decidir si dos magnitudes son directamente proporcionales compruebe que si aumenta una magnitud, debe aumentar la otra. En ese caso las magnitudes son directamente proporcionales. Si ocurre lo contrario, es decir, que al aumentar una magnitud disminuye la otra entonces son inversamente proporcionales.

Para afianzar la noción de proporcionalidad, se presentan diversas situaciones en la cuestión 2 de la imagen 4 y se solicita que se indique que tipo de relación de proporcionalidad existe entre las magnitudes indicadas. Durante las clases, se resolvieron las dos primeras situaciones de forma mayéutica con los estudiantes y las siguientes se realizaban de forma grupal solicitando la solución a los estudiantes.

En esta sección es donde realmente se dedica mucho esfuerzo y tiempo porque es cuándo los estudiantes empiezan a entender el concepto de proporcionalidad. Es importante señalar que en el momento de definición de dos magnitudes proporcionales se indica que tienen que aumentar o disminuir **de la misma manera**. Esta característica no se enfatiza más porque se pudo comprobar que si se hacía, llevaba lugar a más confusión.

- E.S.O.



2 Magnitudes directamente proporcionales

Sabiendo que 4 barras de pan cuestan 2 €, completa la tabla:

Número de barras	2	4	8
Precio (€)		2	

Como la relación entre el número de barras y su precio es directamente proporcional, entonces:

- 2 barras costarán la mitad que 4 barras.
- 8 barras costarán el doble que 4 barras.

Número de barras	2	4	8
Precio (€)	1	2	4

¡No te equivoques!

Hay magnitudes que a simple vista parecen directamente proporcionales porque, al aumentar una, también se incrementa la otra, y, sin embargo, no lo son, pues no lo hacen en la misma proporción.

Observa, por ejemplo, la siguiente tabla, en la que se muestra la edad de un bebé y su peso:

Edad (meses)	3	6	12
Peso (kg)	6	7,5	10

Aunque al aumentar la edad, aumenta también el peso, no lo hace en la misma proporción:

$$\frac{3}{6} \neq \frac{6}{7{,}5} \neq \frac{12}{10}$$

Fíjate en que, cuando dobla la edad, no duplica el peso. Por tanto, la edad y el peso del bebé no son directamente proporcionales.

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si, al multiplicar o dividir una cantidad de una ellas por un número, la cantidad correspondiente a la otra queda también multiplicada o dividida por el mismo número.

EJEMPLO

El precio que se paga por adquirir unas entradas de cine es directamente proporcional al número de entradas que se compra.

En efecto, si por 2 entradas se pagan 12 €, por 4, que representan el doble, se pagará el doble, 24 €; por 6 entradas, el triple, etcétera.

Número de entradas	2	4	6	12
Precio (€)	12	24	36	72

Si dos magnitudes, A y B, son directamente proporcionales, se cumple que:

- El cociente entre cualquier valor de la magnitud A y su correspondiente valor de la magnitud B siempre es el mismo:

A	a	b	c
B	a'	b'	c'

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots$$

- Dos cantidades cualesquiera de la magnitud A siempre forman proporción con sus correspondientes cantidades de la magnitud B:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

EJEMPLO

La siguiente tabla muestra la cantidad de huevos necesarios para hacer un bizcocho según la cantidad de harina empleada. Comprueba si estas dos magnitudes son directamente proporcionales.

Harina (g)	250	500	1 000
Número de huevos	2	4	8

Fíjate en que se cumple que:

$$\frac{250}{2} = \frac{500}{4} = \frac{1\,000}{8} = 125$$

Lo que significa que se emplea un huevo por cada 125 g de harina.

También se puede observar que:

$$\frac{250}{500} = \frac{2}{4} \text{ o que } \frac{500}{1\,000} = \frac{4}{8}$$

Cualquiera de las dos afirmaciones anteriores permite afirmar que el número de huevos es directamente proporcional a la cantidad de harina empleada.

Unidad 6. Proporcionalidad directa

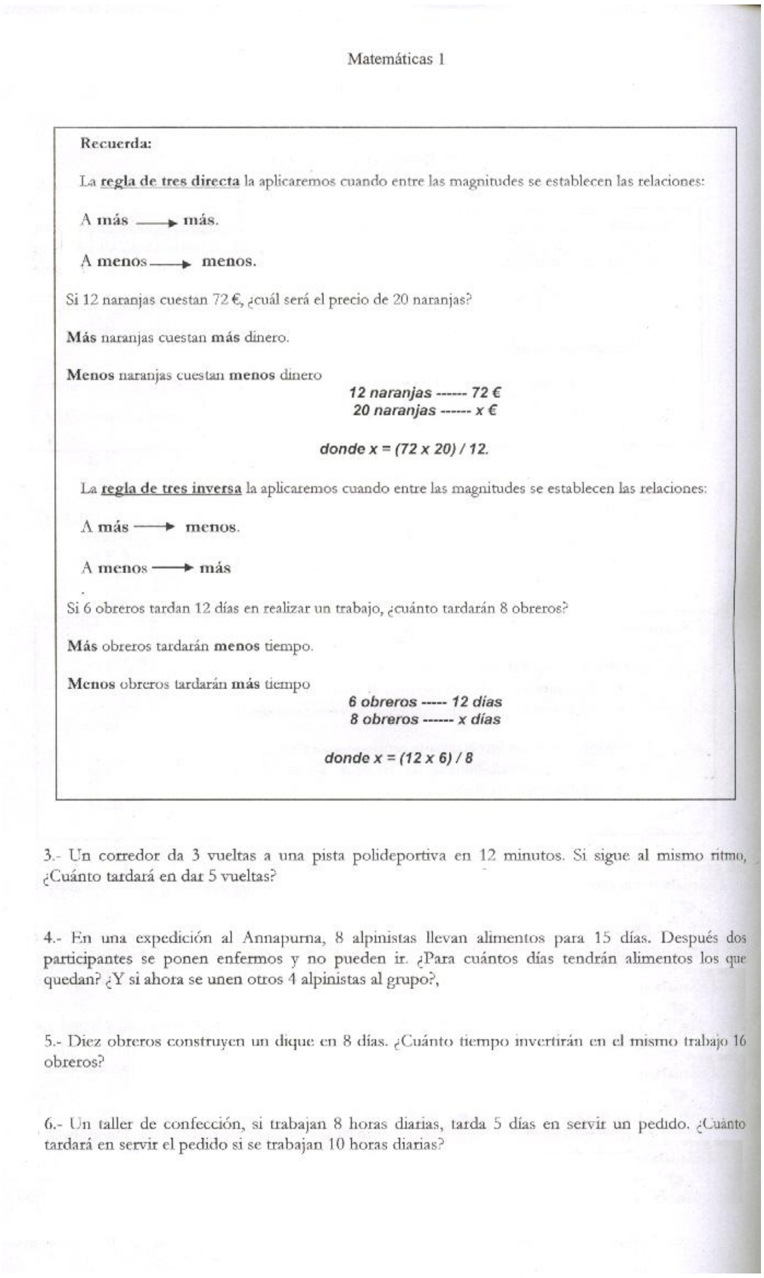
114

Imagen 5.- Magnitudes y proporcionalidad en el libro de texto

En el libro de la editorial, también se contextualiza la noción de proporcionalidad con situaciones de la vida cotidiana presentando magnitudes directamente proporcionales. Además de indicar algunas propiedades de la proporcionalidad se introduce indirectamente el uso de tablas como método de representación de valores entre dos magnitudes. Se muestran varios ejemplos y se proponen varios ejercicios y problemas que pueden consultarse en el Anexo B.

Ejercicios y problemas de proporcionalidad

- E.S.P.A



Matemáticas 1

Recuerda:

La **regla de tres directa** la aplicaremos cuando entre las magnitudes se establecen las relaciones:

A **más** ⟶ **más**.

A **menos** ⟶ **menos**.

Si 12 naranjas cuestan 72 €, ¿cuál será el precio de 20 naranjas?

Más naranjas cuestan **más** dinero.

Menos naranjas cuestan **menos** dinero

12 naranjas ------ 72 €
20 naranjas ------ x €

donde x = (72 x 20) / 12.

La **regla de tres inversa** la aplicaremos cuando entre las magnitudes se establecen las relaciones:

A **más** ⟶ **menos**.

A **menos** ⟶ **más**

Si 6 obreros tardan 12 días en realizar un trabajo, ¿cuánto tardarán 8 obreros?

Más obreros tardarán **menos** tiempo.

Menos obreros tardarán **más** tiempo

6 obreros ----- 12 días
8 obreros ------ x días

donde x = (12 x 6) / 8

3.- Un corredor da 3 vueltas a una pista polideportiva en 12 minutos. Si sigue al mismo ritmo, ¿Cuánto tardará en dar 5 vueltas?

4.- En una expedición al Annapurna, 8 alpinistas llevan alimentos para 15 días. Después dos participantes se ponen enfermos y no pueden ir. ¿Para cuántos días tendrán alimentos los que quedan? ¿Y si ahora se unen otros 4 alpinistas al grupo?,

5.- Diez obreros construyen un dique en 8 días. ¿Cuánto tiempo invertirán en el mismo trabajo 16 obreros?

6.- Un taller de confección, si trabajan 8 horas diarias, tarda 5 días en servir un pedido. ¿Cuánto tardará en servir el pedido si se trabajan 10 horas diarias?

Imagen 6.- Técnicas de resolución, ejercicios y problemas en el libro del instituto

En esta sección se introduce la regla de tres como técnica de resolución de problemas que involucran magnitudes directa e inversamente proporcionales. Se asocia directamente la noción de proporcionalidad directa entre dos magnitudes que cumplan las expresiones “A más → más” y “A menos → menos” y la noción de proporcionalidad inversa entre dos magnitudes que cumplan las expresiones “A más → menos” y “A menos → más”. Como vimos en las clases del Máster de Profesorado, estas expresiones son útiles en el corto plazo pero en el medio y largo plazo se pueden convertir en un obstáculo. En el desarrollo de las clases se indica a los estudiantes cómo plantear la regla de tres a partir de los datos.

Como consecuencia de todos los condicionantes de la educación secundaria para personas adultas (organización curricular, contexto social estudiantes, conocimientos previos, disponibilidad de tiempo, etc.) se les explica un método sistemático para la resolución de problemas que impliquen el cálculo de datos entre dos magnitudes que sean proporcionales. El método es el siguiente:

1. Plantear la regla de tres.

2. Valorar si la relación entre las magnitudes es directa o inversa.

3. Si la relación es:

    a. Directa, plantear la igualdad de razones con la misma disposición que está planteada la regla de tres

    b. Inversa, plantear la igualdad de razones, pero invirtiendo los términos del lado de la "x".

4. Resolver la igualdad de razones, mediante el procedimiento explicado anteriormente.

Tras plantear el método general de resolución de problemas de proporcionalidad, se plantean varios ejercicios y problemas de aplicación. En la imagen sólo se muestran algunos ejercicios de los presentados a los estudiantes. Las páginas integras del libro de texto de referencia pueden consultarse en el Anexo A de este mismo documento.

A modo de ejemplo se presenta un ejemplo de aplicación del método. Para ello se resuelve la cuestión 1 del cuestionario realizado a los estudiantes y que más adelante se muestra. La cuestión es: "*Pedro tardó 3 horas en ir desde su casa a la casa de sus padres a una velocidad de 60km. Si quiere volver a su casa en 2 horas, ¿a qué velocidad deberá ir?*"

1. Plantear la regla de tres.

3 horas ----- *60 km*

2 horas ----- *x*

2. Valorar si la relación entre las magnitudes es directa o inversa.

Si quiero volver en menos tiempo, tendré que ir a más velocidad → Inversa.

3. Plantear la igualdad de razones invirtiendo los términos del lado de la "x"

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{60}$$

4. Resolver la igualdad de razones

$$x = \frac{3 * 60}{2} = \frac{180}{2} = 90\ km$$

- E.S.O.

3 Problemas de proporcionalidad directa

En muchas ocasiones nos encontramos ante problemas de proporcionalidad directa. En ellos se conoce el valor de una de las magnitudes y el correspondiente valor de la otra, y hay que hallar el que corresponde a otro valor de la primera.

Una vez comprobado que se trata realmente de magnitudes directamente proporcionales, este tipo de problemas se puede resolver de dos formas:

- Por **reducción a la unidad.**
- Planteando una proporción o **regla de tres.**

3.1. Reducción a la unidad

Consiste en determinar el valor que le corresponde a una sola unidad de una de las dos magnitudes. Conociéndolo, se puede averiguar el que le corresponde a cualquier otro.

EJEMPLO

Si ayer pagué 60 céntimos por 5 chicles, ¿cuánto me hubieran costado 8 chicles?

En este problema se distinguen dos magnitudes directamente proporcionales: el número de chicles y su precio.

1. Se calcula el precio de 1 chicle:

$$60 : 5 = 12 \text{ cent}$$

2. Se calcula el precio de 8 chicles:

$$8 \cdot 12 = 96 \text{ cent}$$

Por tanto, 8 chicles cuestan 96 céntimos de euro.

3.2. Regla de tres

Consiste en plantear una proporción entre la razón de dos cantidades de una de las magnitudes y la de las dos cantidades correspondientes de la otra magnitud.

¡No te equivoques!

En el enunciado de un problema de proporcionalidad directa, los datos correspondientes a una misma magnitud pueden estar expresados en cualquier unidad de medida; sin embargo, a la hora de resolverlo, todos tienen que estar en la misma unidad.

EJEMPLO

El problema anterior se resuelve con una regla de tres de la siguiente manera:

Número de chicles	Precio (cent)
5	60
8	n

$$\frac{5}{8} = \frac{60}{n} \Rightarrow n = \frac{8 \cdot 60}{5} = 96 \text{ cent}$$

Por tanto, 8 chicles cuestan 96 céntimos de euro.

Unidad 6. Proporcionalidad directa

116

Imagen 7.- Técnicas de resolución, ejercicios y problemas en el libro de texto

En estas páginas del libro de texto de la editorial se presentan las técnicas de la regla de tres y de reducción a la unidad como únicas alternativas a la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En ningún caso se mencionan las características y ventajas de cada técnica. De hecho con los ejemplos planteados no se muestra la potencia de la técnica de la reducción a la unidad cuándo es necesario calcular varios valores para una proporción dada. Tras describir las técnicas se presentan varios ejercicios y problemas de aplicación directa de estas técnicas que pueden consultarse en el Anexo B.

Porcentajes. Ejercicios y problemas de aumentos y disminuciones porcentuales

- E.S.P.A

Matemáticas 1

20.- Una máquina que fabrica tornillos produce un 2 % de piezas defectuosas. Si hoy se han apartado 41 tornillos defectuosos ¿Cuántas piezas ha fabricado la máquina?

21.- Diego tenía que resolver 20 problemas de matemáticas.

a) Si resolvió bien el 30 % de los problemas ¿Cuántos hizo correctamente?

b) ¿Cuántos tendría que haber resuelto correctamente para que el porcentaje de problemas bien hechos hubiera sido del 85 %?

22.- En una tienda de ropa pusieron todos los artículos a 18 €, Calcula el porcentaje de rebaja para un pantalón que antes costaba 48 €, una blusa que costaba 36 € y un bañador cuyo precio era de 20 €

23.- Si en cierta tienda tenían rebajas del 20 % y me rebajaron un abrigo 90 € ¿Qué precio tenía el abrigo? ¿Cuánto me cobraron?

24.- Un hotel dispone de 400 camas de las que 280 están ocupadas ¿Cuál es el porcentaje de ocupación del hotel?

25.- Los 12 chicos de una clase representan el 40 % del total. ¿Entre alumnos y alumnas, cuántos son en la clase?

26.- En las rebajas he pagado por un jersey que costaba 60 € la cantidad de 48 € ¿Qué % de descuento me han hecho?

27.- Los habitantes de cierta ciudad se distribuyen según esta tabla

Europeos	880.000
Africanos	60.000
Americanos	50.000
Asiáticos	10.000

¿Qué porcentaje supone cada grupo respecto del total?

28.- A Mario le van a subir este año su pensión de jubilación 18 € al mes. Calcula el % de subida que le van a aplicar sabiendo que su pensión actual es de 500 €

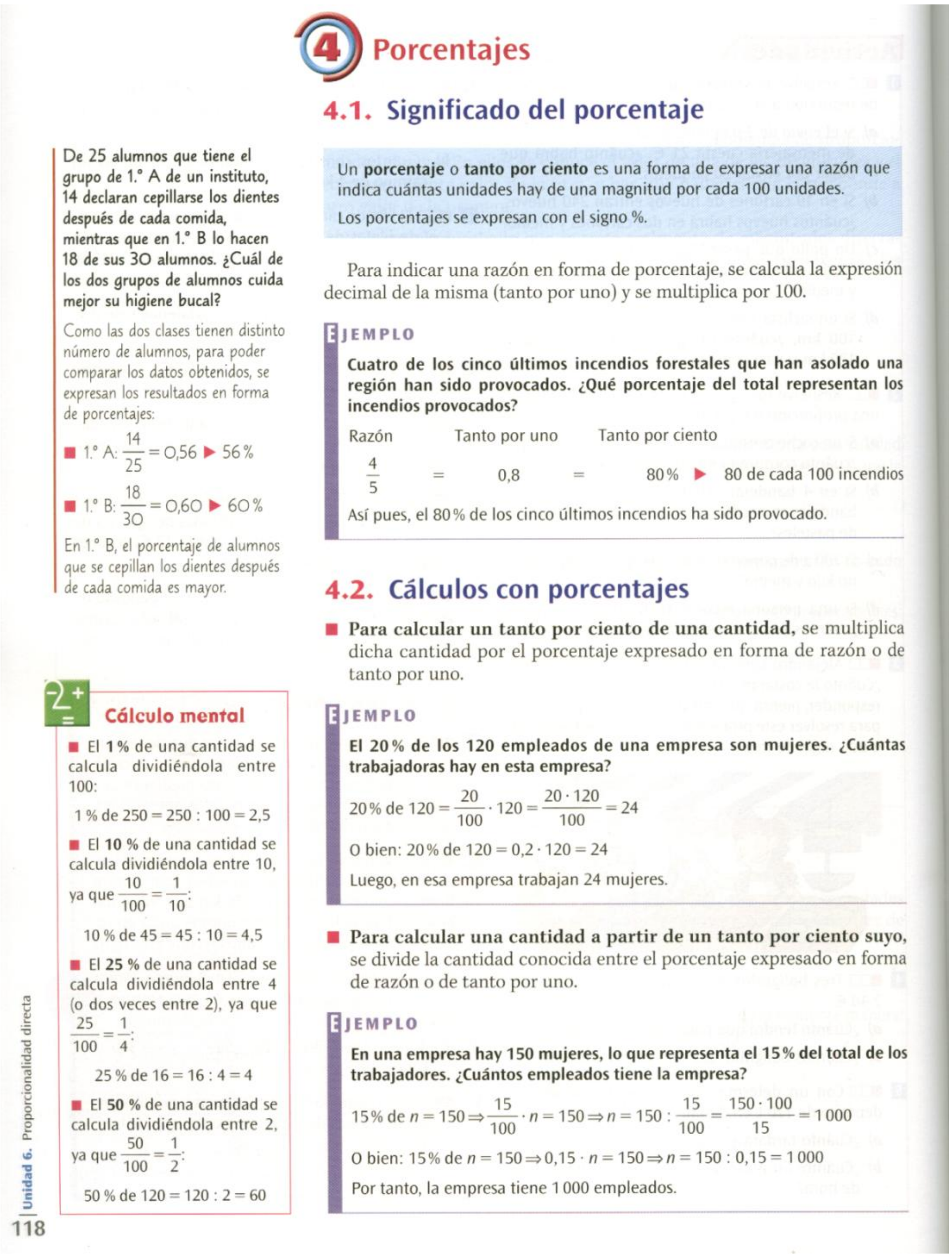
29.- Un vendedor de libros gana el 8 % del importe de las ventas que realiza. ¿A cuánto asciende la venta realizada si gana 240 €?

29

Imagen 8.- Ejercicios y problemas de porcentajes en el libro del instituto

A través de múltiples ejercicios con porcentajes y aumentos y disminuciones porcentuales, además de mostrar el significado y utilidad de los porcentajes, se introduce implícitamente la noción de proporcionalidad directa, permitiendo afianzar los conocimientos, desde un enfoque constructivista. Los ejercicios y problemas que se les plantean son similares a los que el estudiante puede encontrar en su día a día y se les recomienda que utilicen el método general de resolución visto anteriormente.

- E.S.O.



4 Porcentajes

4.1. Significado del porcentaje

De 25 alumnos que tiene el grupo de 1.º A de un instituto, 14 declaran cepillarse los dientes después de cada comida, mientras que en 1.º B lo hacen 18 de sus 30 alumnos. ¿Cuál de los dos grupos de alumnos cuida mejor su higiene bucal?

Como las dos clases tienen distinto número de alumnos, para poder comparar los datos obtenidos, se expresan los resultados en forma de porcentajes:

- 1.º A: $\frac{14}{25} = 0{,}56$ ▶ 56 %
- 1.º B: $\frac{18}{30} = 0{,}60$ ▶ 60 %

En 1.º B, el porcentaje de alumnos que se cepillan los dientes después de cada comida es mayor.

Un **porcentaje** o **tanto por ciento** es una forma de expresar una razón que indica cuántas unidades hay de una magnitud por cada 100 unidades.

Los porcentajes se expresan con el signo %.

Para indicar una razón en forma de porcentaje, se calcula la expresión decimal de la misma (tanto por uno) y se multiplica por 100.

EJEMPLO

Cuatro de los cinco últimos incendios forestales que han asolado una región han sido provocados. ¿Qué porcentaje del total representan los incendios provocados?

Razón		Tanto por uno		Tanto por ciento	
$\frac{4}{5}$	=	0,8	=	80 %	▶ 80 de cada 100 incendios

Así pues, el 80 % de los cinco últimos incendios ha sido provocado.

4.2. Cálculos con porcentajes

- **Para calcular un tanto por ciento de una cantidad,** se multiplica dicha cantidad por el porcentaje expresado en forma de razón o de tanto por uno.

EJEMPLO

El 20 % de los 120 empleados de una empresa son mujeres. ¿Cuántas trabajadoras hay en esta empresa?

20% de $120 = \frac{20}{100} \cdot 120 = \frac{20 \cdot 120}{100} = 24$

O bien: 20% de $120 = 0{,}2 \cdot 120 = 24$

Luego, en esa empresa trabajan 24 mujeres.

- **Para calcular una cantidad a partir de un tanto por ciento suyo,** se divide la cantidad conocida entre el porcentaje expresado en forma de razón o de tanto por uno.

EJEMPLO

En una empresa hay 150 mujeres, lo que representa el 15 % del total de los trabajadores. ¿Cuántos empleados tiene la empresa?

15% de $n = 150 \Rightarrow \frac{15}{100} \cdot n = 150 \Rightarrow n = 150 : \frac{15}{100} = \frac{150 \cdot 100}{15} = 1\,000$

O bien: 15% de $n = 150 \Rightarrow 0{,}15 \cdot n = 150 \Rightarrow n = 150 : 0{,}15 = 1\,000$

Por tanto, la empresa tiene 1 000 empleados.

Cálculo mental

- El **1 %** de una cantidad se calcula dividiéndola entre 100:

  1 % de 250 = 250 : 100 = 2,5
- El **10 %** de una cantidad se calcula dividiéndola entre 10, ya que $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$:

  10 % de 45 = 45 : 10 = 4,5
- El **25 %** de una cantidad se calcula dividiéndola entre 4 (o dos veces entre 2), ya que $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$:

  25 % de 16 = 16 : 4 = 4
- El **50 %** de una cantidad se calcula dividiéndola entre 2, ya que $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$:

  50 % de 120 = 120 : 2 = 60

Unidad 6. Proporcionalidad directa

118

Imagen 9.- Ejercicios y problemas de porcentajes en el libro de texto

En el libro de texto de la editorial se comienza explicando en qué consiste un porcentaje para a continuación mostrar como calcularlos. También se exponen varios ejemplos. Curiosamente, para mostrar la utilidad de los porcentajes como medida de comparación se realiza con el primer ejemplo superior de la izquierda y no de forma explícita como característica de los porcentajes, en la parte del significado. El ejemplo del instituto también puede generar una noción incorrecta, ya que los estudiantes pueden asociar que el porcentaje será mayor teniendo en cuenta sólo los estudiantes que se cepillan sin tener en cuenta el total de estudiantes por grupo.

El ejemplo sería más útil con datos que generasen un conflicto conceptual porque permitiría una mejor compresión de los porcentajes y su significado. Por ejemplo si se presenta el grupo A con 16 estudiantes, aunque el número de estudiantes que se cepillan los dientes es menor que en el grupo B, 18, se observaría que la proporción es mayor en el grupo A que en el B (16/25 = 0,64 → 64 % frente al 60% del grupo B).

Ejercicios y problemas de repartos

- E.S.P.A

34.-Cuatro amigos: Rafa, Rosario, Luis y Mariví aportan respectivamente 10, 8, 7 y 5 € para comprar un décimo de lotería que vale 30 €. Afortunadamente el décimo resulta premiado con 600.000 € ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

35.- Tres carpinteros se encargan de hacer las puertas blindadas para un edificio en construcción. El primero hace 10 puertas, el segundo 9 y el tercero 6. Por todo el trabajo han cobrado 200.000 € ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno? ¿Cuánto vale cada puerta?

36.- En una urbanización el precio de los pisos es proporcional a la superficie que tienen. Si un piso de 85 m2 cuesta 180.200 €. Calcula el precio de los pisos que tienen las siguientes medidas: 100 m2, 96 m2 y 67 m2.

37.- Un padre reparte cada semana 132€ entre sus tres hijos de 12, 15 y 17 años de edad, proporcionalmente a sus edades ¿Cuánto corresponde a cada uno?

38.- Tres obreros han recibido por un trabajo 2.016 € ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si todos cobran el mismo salario y el primero ha trabajado 5 días, el segundo 9 días y el tercero 13 días?

Imagen 10.- Ejercicios y problemas de repartos

La técnica de reducción a la unidad se presenta desde un enfoque constructivista. Para ello, se realiza el ejercicio 34 de la imagen 10 planteando múltiples reglas de tres según el método general visto anteriormente. A continuación se plantea la cuestión de que si en vez de ser cuatro amigos hubieran sido por ejemplo 27, entonces el coste de resolver el problema sería mucho mayor con el método general.

Es entonces cuando se les plantea la técnica de reducción a la unidad, indicándoles que si calculamos qué cantidad de premio corresponde por un euro de boleto, simplemente tenemos que multiplicar dicha cantidad por los euros que haya puesto cada amigo para obtener la cantidad del premio que le corresponde a cada amigo. Se les indica usar la regla de tres para calcular la cantidad por euro y luego realizar las multiplicaciones necesarias para obtener el resto de los valores.

A modo de ejemplo, se presenta la resolución de la cuestión 2 del cuestionario que se les planteó a los estudiantes y que más adelante se muestra íntegro. La cuestión es: "*Un albañil, un fontanero y un electricista cobran 420€ por una reforma. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si todos cobran el mismo salario y el albañil trabajó 3 horas, el fontanero 5 horas y el electricista 7 horas? ¿Cuántos euros cobran por hora?.*"

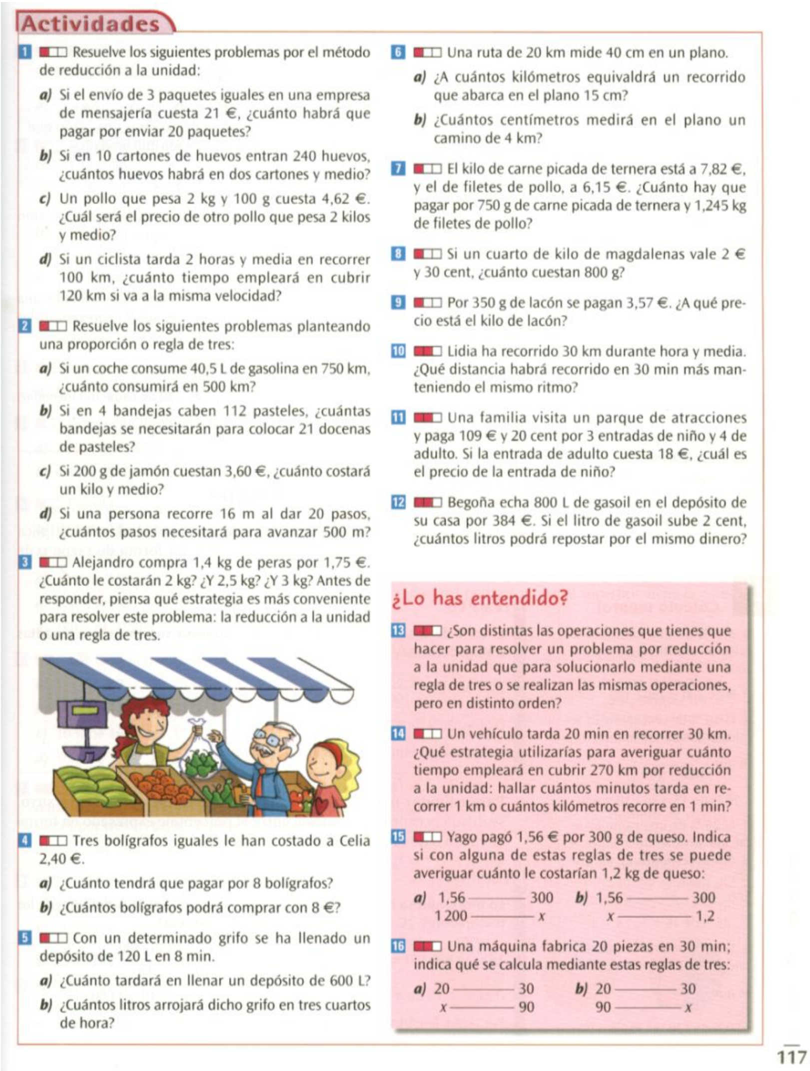
Total horas trabajadas = 3 + 5 + 7 = 15 horas

15 horas ----- 420€
1 hora ----- x

$$\frac{15}{1} = \frac{420}{x} \rightarrow x = \frac{420 * 1}{15} = \frac{420}{15} = 28\ €/hora$$

*Albañil → 3 horas → 3 * 28 = 84€*
*Fontanero → 5 horas → 5 * 28 = 140€*
*Electricista → 7 horas → 7 * 28 = 196€*

- E.S.O.



Actividades

1 Resuelve los siguientes problemas por el método de reducción a la unidad:

a) Si el envío de 3 paquetes iguales en una empresa de mensajería cuesta 21 €, ¿cuánto habrá que pagar por enviar 20 paquetes?

b) Si en 10 cartones de huevos entran 240 huevos, ¿cuántos huevos habrá en dos cartones y medio?

c) Un pollo que pesa 2 kg y 100 g cuesta 4,62 €. ¿Cuál será el precio de otro pollo que pesa 2 kilos y medio?

d) Si un ciclista tarda 2 horas y media en recorrer 100 km, ¿cuánto tiempo empleará en cubrir 120 km si va a la misma velocidad?

2 Resuelve los siguientes problemas planteando una proporción o regla de tres:

a) Si un coche consume 40,5 L de gasolina en 750 km, ¿cuánto consumirá en 500 km?

b) Si en 4 bandejas caben 112 pasteles, ¿cuántas bandejas se necesitarán para colocar 21 docenas de pasteles?

c) Si 200 g de jamón cuestan 3,60 €, ¿cuánto costará un kilo y medio?

d) Si una persona recorre 16 m al dar 20 pasos, ¿cuántos pasos necesitará para avanzar 500 m?

3 Alejandro compra 1,4 kg de peras por 1,75 €. ¿Cuánto le costarán 2 kg? ¿Y 2,5 kg? ¿Y 3 kg? Antes de responder, piensa qué estrategia es más conveniente para resolver este problema: la reducción a la unidad o una regla de tres.

4 Tres bolígrafos iguales le han costado a Celia 2,40 €.

a) ¿Cuánto tendrá que pagar por 8 bolígrafos?

b) ¿Cuántos bolígrafos podrá comprar con 8 €?

5 Con un determinado grifo se ha llenado un depósito de 120 L en 8 min.

a) ¿Cuánto tardará en llenar un depósito de 600 L?

b) ¿Cuántos litros arrojará dicho grifo en tres cuartos de hora?

6 Una ruta de 20 km mide 40 cm en un plano.

a) ¿A cuántos kilómetros equivaldrá un recorrido que abarca en el plano 15 cm?

b) ¿Cuántos centímetros medirá en el plano un camino de 4 km?

7 El kilo de carne picada de ternera está a 7,82 €, y el de filetes de pollo, a 6,15 €. ¿Cuánto hay que pagar por 750 g de carne picada de ternera y 1,245 kg de filetes de pollo?

8 Si un cuarto de kilo de magdalenas vale 2 € y 30 cent, ¿cuánto cuestan 800 g?

9 Por 350 g de lacón se pagan 3,57 €. ¿A qué precio está el kilo de lacón?

10 Lidia ha recorrido 30 km durante hora y media. ¿Qué distancia habrá recorrido en 30 min más manteniendo el mismo ritmo?

11 Una familia visita un parque de atracciones y paga 109 € y 20 cent por 3 entradas de niño y 4 de adulto. Si la entrada de adulto cuesta 18 €, ¿cuál es el precio de la entrada de niño?

12 Begoña echa 800 L de gasoil en el depósito de su casa por 384 €. Si el litro de gasoil sube 2 cent, ¿cuántos litros podrá repostar por el mismo dinero?

¿Lo has entendido?

13 ¿Son distintas las operaciones que tienes que hacer para resolver un problema por reducción a la unidad que para solucionarlo mediante una regla de tres o se realizan las mismas operaciones, pero en distinto orden?

14 Un vehículo tarda 20 min en recorrer 30 km. ¿Qué estrategia utilizarías para averiguar cuánto tiempo empleará en cubrir 270 km por reducción a la unidad: hallar cuántos minutos tarda en recorrer 1 km o cuántos kilómetros recorre en 1 min?

15 Yago pagó 1,56 € por 300 g de queso. Indica si con alguna de estas reglas de tres se puede averiguar cuánto le costarían 1,2 kg de queso:

a) 1,56 ——— 300
1 200 ——— *x*

b) 1,56 ——— 300
x ——— 1,2

16 Una máquina fabrica 20 piezas en 30 min; indica qué se calcula mediante estas reglas de tres:

a) 20 ——— 30
x ——— 90

b) 20 ——— 30
90 ——— *x*

117

Imagen 11.- Ejercicios y problemas de proporcionalidad directa y repartos

En el libro de texto cuando se describen las técnicas de la regla de tres y de la reducción a la unidad no se indica explícitamente cuándo es más apropiado usar una técnica u otra. La única vez que se plantea esto es en la actividad 3 de la imagen 11.

Aplicación de la proporcionalidad: Cálculo de intereses. Definición y ejercicios

- E.S.P.A

Matemáticas 1

Recuerda:

Se llama **interés** al beneficio que produce el dinero prestado. Ese beneficio es directamente proporcional a la cantidad prestada y al tiempo que dura el préstamo.

Concepto	Nombre	Símbolo
Cantidad prestada	Capital	C
Tiempo del préstamo	Tiempo	t
Un beneficio por 100 € en un año	Rédito	r
Beneficio del préstamo	Interés	I

$$I = \frac{cxrxt}{100}$$

Si el **tiempo** viene expresado en **meses**:

$$I = \frac{cxrxt}{1200}$$

Si el **tiempo** viene expresado en **días**:

$$I = \frac{cxrxt}{36000}$$

39.- Halla el interés producido durante cinco años, por un capital de 30.000 € al 6%.

40.- Calcula en qué se convierte, en seis meses, un capital de 10.000 €, al 3.5%.

41.- ¿Qué renta obtiene un inversionista que coloca un capital de 18.500 €, al 6,25%, durante 30 días?

Imagen 12.- Cálculo de intereses. Ejercicios y problemas

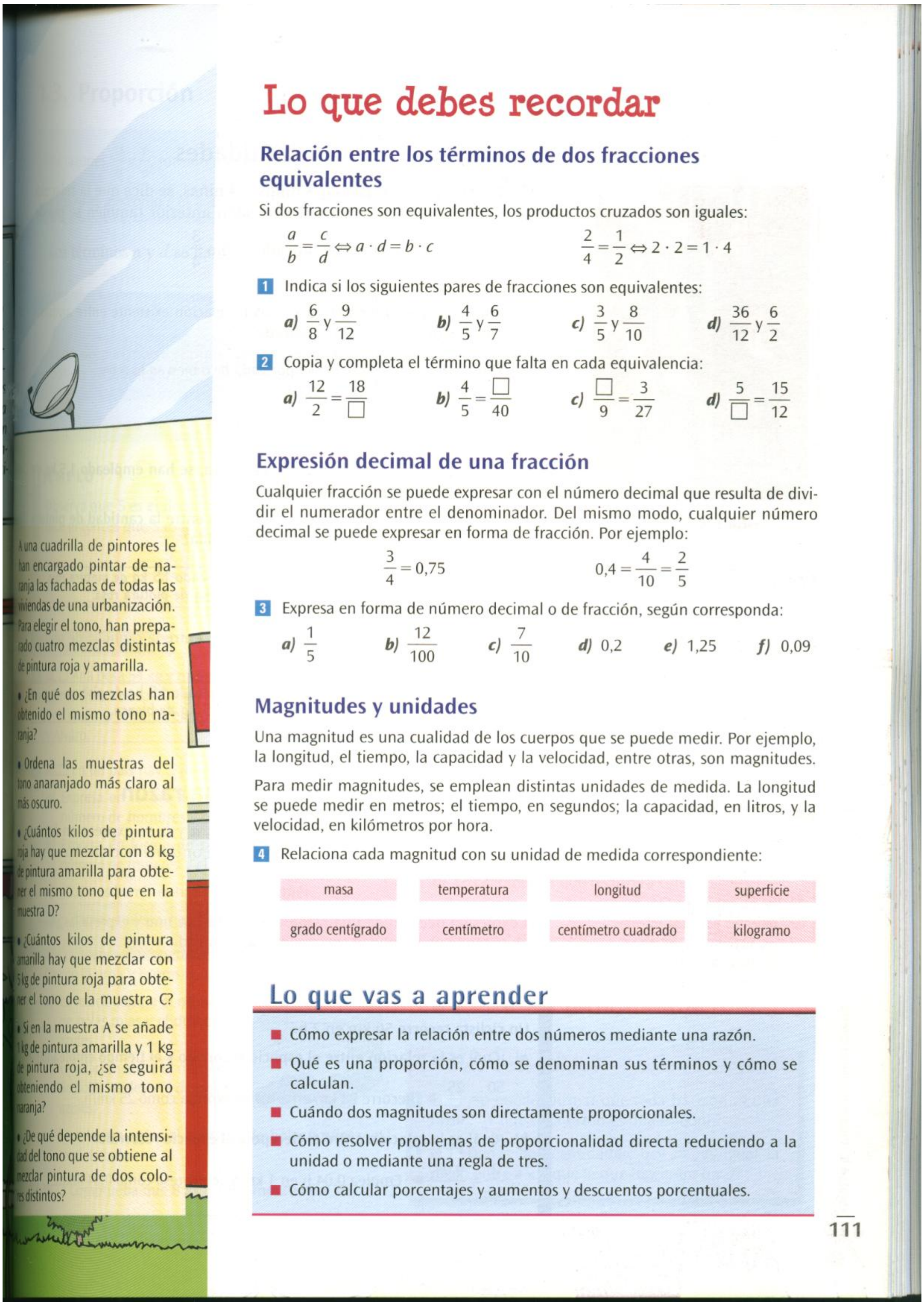
Con esta sección se pretende darle al estudiante unos conocimientos básicos para poder calcular los intereses, dado un capital, el rédito y el tiempo del préstamo. Esta es una aplicación de la proporcionalidad orientada especialmente a personas adultas, ya que se estima de gran utilidad para este público objetivo.

- E.S.O.

No se presenta el cálculo de intereses en el libro de secundaria de la editorial.

5.3. Otros aspectos relevantes

En el libro de secundaria de la editorial me ha parecido interesante que al comienzo del tema de proporcionalidad directa se incluya una sección de repaso, indicando aquellos conocimientos previos relevantes para el tema.



A una cuadrilla de pintores le han encargado pintar de naranja las fachadas de todas las viviendas de una urbanización. Para elegir el tono, han preparado cuatro mezclas distintas de pintura roja y amarilla.

- ¿En qué dos mezclas han obtenido el mismo tono naranja?
- Ordena las muestras del tono anaranjado más claro al más oscuro.
- ¿Cuántos kilos de pintura roja hay que mezclar con 8 kg de pintura amarilla para obtener el mismo tono que en la muestra D?
- ¿Cuántos kilos de pintura amarilla hay que mezclar con 5 kg de pintura roja para obtener el tono de la muestra C?
- Si en la muestra A se añade 1 kg de pintura amarilla y 1 kg de pintura roja, ¿se seguirá obteniendo el mismo tono naranja?
- ¿De qué depende la intensidad del tono que se obtiene al mezclar pintura de dos colores distintos?

Lo que debes recordar

Relación entre los términos de dos fracciones equivalentes

Si dos fracciones son equivalentes, los productos cruzados son iguales:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \qquad \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$$

1 Indica si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

a) $\frac{6}{8}$ y $\frac{9}{12}$ *b)* $\frac{4}{5}$ y $\frac{6}{7}$ *c)* $\frac{3}{5}$ y $\frac{8}{10}$ *d)* $\frac{36}{12}$ y $\frac{6}{2}$

2 Copia y completa el término que falta en cada equivalencia:

a) $\frac{12}{2}=\frac{18}{\square}$ *b)* $\frac{4}{5}=\frac{\square}{40}$ *c)* $\frac{\square}{9}=\frac{3}{27}$ *d)* $\frac{5}{\square}=\frac{15}{12}$

Expresión decimal de una fracción

Cualquier fracción se puede expresar con el número decimal que resulta de dividir el numerador entre el denominador. Del mismo modo, cualquier número decimal se puede expresar en forma de fracción. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4}=0{,}75 \qquad 0{,}4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

3 Expresa en forma de número decimal o de fracción, según corresponda:

a) $\frac{1}{5}$ *b)* $\frac{12}{100}$ *c)* $\frac{7}{10}$ *d)* 0,2 *e)* 1,25 *f)* 0,09

Magnitudes y unidades

Una magnitud es una cualidad de los cuerpos que se puede medir. Por ejemplo, la longitud, el tiempo, la capacidad y la velocidad, entre otras, son magnitudes.

Para medir magnitudes, se emplean distintas unidades de medida. La longitud se puede medir en metros; el tiempo, en segundos; la capacidad, en litros, y la velocidad, en kilómetros por hora.

4 Relaciona cada magnitud con su unidad de medida correspondiente:

masa	temperatura	longitud	superficie
grado centígrado	centímetro	centímetro cuadrado	kilogramo

Lo que vas a aprender

- Cómo expresar la relación entre dos números mediante una razón.
- Qué es una proporción, cómo se denominan sus términos y cómo se calculan.
- Cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales.
- Cómo resolver problemas de proporcionalidad directa reduciendo a la unidad o mediante una regla de tres.
- Cómo calcular porcentajes y aumentos y descuentos porcentuales.

111

Imagen 13.- Sección "Lo que debes recordar" del libro de texto

6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este apartado se analizan las dificultades y errores previsibles en la educación para personas adultas.

6.1. Dificultades

- Falta de conocimientos previos. Al provenir muchos estudiantes de distintos sistemas educativos, ser de muy diversas edades, no tienen conocimientos de fracciones.
- No comprenden lo que es una razón. Lo ven muy abstracto.
- Dificultad para saber si la relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa o inversa.
- Incluso con el típico “a más → más” no ven clara la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Mejor si se ponen números concretos. Por ejemplo, a 20 → 10, entonces a 40 → 20, entonces directa.
- Estudiantes muy acostumbrados a seguir un procedimiento. Generalmente les cuesta analizar y utilizar la técnica más adecuada.
- Estudiantes de otros sistemas educativos conocen otros procedimientos de resolución → son reticentes a utilizar el procedimiento explicado.
- Como todos los ejercicios que se les plantean son en formato de situación contextualizada, les es muy difícil resolver ejercicios descontextualizados como dar los datos en tablas de valores.
- Los alumnos si ven un problema resuelto lo entienden, pero cuando se enfrentan al mismo problema ellos mismos no saben cómo plantearlo y resolverlo.
- Si se plantean problemas para los que la resolución no sigue los pasos típicos, generalmente los alumnos no saben resolver el problema o lo resuelven mal. Ejemplo, problema de repartos sobre población de 1000000 habitantes.
- Dificultades en la realización de cálculo mental. Estudiantes acostumbrados a utilizar la calculadora.

6.2. Errores y su posible origen

- Cuando un estudiante no entiende el problema, intenta resolverlo replicando las operaciones que habitualmente se suelen hacer. **Origen** → contrato didáctico.

- No se analiza el resultado del problema para ver si es coherente. Por ejemplo, en un problema de porcentajes, dado un descuento en la compra de un móvil se les pide calcular el valor del móvil. Algunos estudiantes obtuvieron un valor de 4000€ y no les extrañó. **Origen** → falta de capacidad de revisión.

- Confusión con coma decimal. Algunos alumnos utilizan la coma, "**,**" como separación de miles y no de la parte decimal, utilizando el punto, "**.**" como separación decimal. Esto es porque provienen de diferentes etapas y países y por tanto de diferentes sistemas educativos.

- Los estudiantes intentan ir demasiado deprisa, se saltan pasos, lo que implica al final en una resolución errónea del ejercicio o problema.

7. El proceso de estudio

A lo largo de este capítulo se describen las siete sesiones en las cuáles se realiza la docencia del tema de proporcionalidad. El desarrollo de las clases se enmarca de forma ordinaria en la planificación temporal de la asignatura.

7.1. Distribución del tiempo de clase

La duración de cada clase en el centro es de 55 minutos y a continuación se detalla el desarrollo de las clases.

Sesión 1

Tabla 25.- Sesión 1 correspondiente a la docencia realizada en el instituto

Tipo	Tiempo (minutos)	Responsable	Tipo de docencia
Introducción del tema	10	Profesor	Dialógica
Teoría – Razón	10	Profesor	Magistral
Ejercicios - Razón	10	Compartida	Mayéutica
Teoría – Magnitudes y proporción	15	Profesor	Magistral
Cuestiones – Magnitudes y proporción	10	Compartida	Mayéutica

Sesión 2

Tabla 26.- Sesión 2 correspondiente a la docencia realizada en el instituto

Tipo	Tiempo (minutos)	Responsable	Tipo de docencia
Repaso	10	Compartida	Mayéutica
Cuestiones – Magnitudes y proporción	10	Compartida	Dialógica
Teoría – Regla de tres	20	Profesor	Magistral
Ejercicios – Regla de tres	15	Compartida	Mayéutica

Sesión 3

Tabla 27.- Sesión 3 correspondiente a la docencia realizada en el instituto

Tipo	Tiempo (minutos)	Responsable	Tipo de docencia
Repaso	10	Profesor	Magistral
Ejercicios / problemas ejemplo	15	Compartida	Mayéutica
Resolución ejercicios / problemas por estudiantes de forma individual	20	Estudiantes	Dialógica
Ejercicios - Porcentajes	10	Compartida	Mayéutica

Sesión 4

Tabla 28.- Sesión 4 correspondiente a la docencia realizada en el instituto

Tipo	Tiempo (minutos)	Responsable	Tipo de docencia
Resolución dudas	10	Profesor	Dialógica
Resolución ejercicios por estudiantes en pizarra	10	Estudiantes	Constructivista
Teoría y ejercicios – Repartos (Reducción a la unidad)	20	Profesor	Magistral
Resolución ejercicios / problemas por estudiantes de forma individual	15	Estudiantes	Dialógica

Sesión 5

Tabla 29.- Sesión 5 correspondiente a la docencia realizada en el instituto

Tipo	Tiempo (minutos)	Responsable	Tipo de docencia
Resolución dudas	10	Profesor	Dialógica
Resolución ejercicios por estudiantes en pizarra	15	Estudiantes	Constructivista
Resolución ejercicios / problemas por estudiantes de forma individual	30	Estudiantes	Dialógica

Sesión 6

Tabla 30.- Sesión 6 correspondiente a la docencia realizada en el instituto

Tipo	Tiempo (minutos)	Responsable	Tipo de docencia
Resolución dudas	20	Profesor	Dialógica
Teoría – Cálculo intereses	20	Profesor	Magistral
Ejercicios – Cálculo intereses	15	Compartida	Dialógica

Sesión 7

Tabla 31.- Sesión 7 correspondiente a la docencia realizada en el instituto

Tipo	Tiempo (minutos)	Responsable	Tipo de docencia
Resolución dudas	20	Compartida	Mayéutica
Resolución ejercicios	35	Compartida	Dialógica

7.2. Actividades adicionales planificadas

Como actividad adicional se prepara una cuestión que engloba un conjunto de situaciones de la vida cotidiana, referentes a magnitudes y relaciones entre ellas, para afianzar la noción de proporcionalidad. Las situaciones pueden consultarse en el **Anexo C** de este mismo documento.

7.3. La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista

A continuación se presenta la estimación de la actividad autónoma que se prevé que realizará el estudiante para reforzar y afianzar los conceptos vistos en el tema. Para una mejor contextualización se indica la actividad autónoma estimada a realizar por el estudiante tras cada sesión de docencia.

Tabla 32.- Actividad autónoma de los alumnos prevista

Sesión	Tipo	Tiempo estimado (minutos)	Relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje
1	No se prevé la realización de ningún tipo de actividad	-	-
2	Realización de ejercicios y problemas	30	Aplicación
3	Repaso	15	Refuerzo
3	Realización de ejercicios y problemas	60	Aplicación
4	No se prevé la realización de ningún tipo de actividad	-	-
5	Realización de ejercicios y problemas	60	Aplicación
6	Realización de ejercicios y problemas	30	Aplicación
7	Repaso	30	Refuerzo
7	Realización de ejercicios y problemas	60	Refuerzo

Nota: Es importante resaltar que por la particularidad de la enseñanza a personas adultas y sus necesidades y limitaciones de disponibilidad de tiempo fuera del horario de clase, se intentaba en la medida de lo posible, que los estudiantes tuvieran que dedicar el mínimo tiempo posible en casa.

8. Experimentación

En este capítulo se va describir el proceso seguido y los resultados obtenidos de la evaluación realizada a los estudiantes de 1º de E.S.P.A. tras impartir las clases correspondientes al estudio de la proporcionalidad del Practicum II realizado en el instituto Félix Urabayen.

El objetivo de esta experimentación es comprobar, en la medida de lo posible, si es eficaz el proceso de enseñanza realizado, a pesar de las múltiples dificultades como por ejemplo, el contexto social y educativo en el que se encuentran los estudiantes, la organización curricular para personas adultas, la limitación temporal, los recursos materiales disponibles, etc.

Este capítulo se desglosa en diferentes apartados. En el primer apartado “Método” se indica la metodología seguida en el proceso de la experimentación. En el apartado “Muestra y diseño de la experimentación” se indica el perfil de los estudiantes y el contexto en el que se encuentran. En “Cuestionario” se expone la prueba de evaluación planteada a los estudiantes.

En el apartado “Cuestiones y comportamientos esperados” se analiza el cuestionario planteado y las acciones, dificultades y errores de los estudiantes que los docentes prevemos que ocurrirán. Por último, en las secciones “Resultados” y “Discusión de los resultados” se muestran los datos obtenidos de la experimentación, así como un análisis de los mismos.

8.1. Método

La evolución de una teoría en didáctica de las matemáticas puede determinarse por el contraste entre un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. La teoría busca validar las hipótesis que formula (*a priori*). Los hechos observados permiten (*a posteriori*) validar o refutar, total o parcialmente, las hipótesis enunciadas.

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) permite abordar el contraste experimental necesario, que permita determinar condiciones de *reproducibilidad* de situaciones didácticas. Aquí, las *variables didácticas* actúan de “contraste o reactivo” que permiten de manera controlada provocar en los sujetos modificaciones en sus estrategias de acción para adaptarlas al medio.

El estudio de la adecuación de las variables didácticas para determinar cambios en las estrategias de acción representa un instrumento de validación interna de las conclusiones que puedan extraerse de una observación concreta. En estas condiciones, se puede definir una situación *reproducible*; es decir, en condiciones similares, con un control del medio, la construcción del conocimiento pretendido será la misma.

La cuestión de la reproducibilidad de las situaciones incide sobre la fiabilidad de las observaciones y, sobre todo, sobre su validez. La fiabilidad presupone una estabilidad en el funcionamiento del sistema didáctico; el contraste repetido entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* permite hacer evolucionar las condiciones del medio (incluidas las intervenciones del profesor) que garanticen la construcción del saber pretendido, de tal manera que la situación devenga reproducible. Es entonces cuando su *validez* puede ser aceptada, puesto que la situación es exitosa y aplicable de manera estable.

En este trabajo, la parte I “La proporcionalidad en el currículo vigente y en los libros de texto” constituye el estudio previo de la dimensión de enseñanza, desde una perspectiva eminentemente institucional; a saber:

1. El contenido matemático en el currículo vigente, incluidas las orientaciones y criterios de evaluación.

2. El desarrollo de estas directrices oficiales en los libros de texto escolares.

Este estudio precede al análisis *a priori* realizado en los capítulos 5, 6 y 7, donde se abordan las dimensiones:

- *Epistemológica*: las matemáticas presentes en la unidad didáctica objeto de estudio.

- *Cognitiva*: dificultades y errores de los estudiantes en el aprendizaje de la unidad didáctica.

- *De enseñanza*: descripción del proceso de estudio implementado.

En el capítulo 8, este análisis *a priori* es contrastado con los resultados de la experimentación, permitiendo una valoración de los mismos basada en las “expectativas previas” (*discusión de los resultados*), que supone la fase última del método de la ingeniería didáctica.

8.2. Muestra y diseño de la experimentación

El objetivo de este apartado es describir el contexto en el que se ha realizado la experimentación.

La muestra son los 21 estudiantes de las clases presenciales de matemáticas que se imparten por las tardes en 1º de Educación Secundaria para Personas Adultas en el instituto Félix Urabayen. El grupo es mayoritariamente masculino (70% de chicos frente a un 30% de chicas) y muy heterogéneo porque los estudiantes son de muy diversa edad, desde los 16 hasta los 45 años, de múltiples nacionalidades y con diferentes niveles de conocimientos previos, ya que su procedencia es muy variada: desde otros centros, desde otros sistemas educativos, es decir, no han cursado primaria en el estado español, y otras situaciones.

Las características comunes del grupo son que la mayoría son inmigrantes (80% inmigrantes frente a 20% españoles) de clase media-baja y que el 60% son jóvenes de entre 16 y 25 años.

El cuestionario se realizó en el desarrollo ordinario de las clases y de acuerdo a los criterios definidos en el centro y supervisado por el tutor del centro en cuanto a contenido, nivel de dificultad y extensión.

8.3. El cuestionario y los criterios de evaluación

8.3.1. El cuestionario

El cuestionario que se plantea a los estudiantes es el que se muestra a continuación:

1.- Pedro tardó 3 horas en ir desde su casa a la casa de sus padres a una velocidad de 60km. Si quiere volver a su casa en 2 horas, ¿a qué velocidad deberá ir?

2.- Un albañil, un fontanero y un electricista cobran 420€ por una reforma. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si todos cobran el mismo salario y el albañil trabajó 3 horas, el fontanero 5 horas y el electricista 7 horas? ¿Cuántos euros cobran por hora?

3.- María lleva a revelar las fotos de la última excursión a una máquina de revelado digital, donde le cobran 20 céntimos de euro por cada foto.

a) Si un día lleva 12 fotos y otro 231, ¿cuánto le cobrarán cada día?

b) Si la factura ha sido de 6,20 euros, ¿cuántas fotos llevaba en la cámara?

4.- ¿Qué intereses obtendríamos si un capital de 5000€ lo dejamos 4 años al 3,5% anual?

5.- He pagado por un Iphone 352€. Si me han hecho un descuento de un 12%. ¿Cuál era su precio inicial?

6.- Jennifer ha llamado a su amigo Suliman. Si el establecimiento de llamada es de 15 céntimos y tras hablar 15 minutos le han cobrado 90 céntimos en total. Si hubieran hablado durante 20 minutos. ¿Cuánto le habría costado la llamada?

8.3.2. Los criterios de evaluación del cuestionario

Los criterios de evaluación se definen por cuestión y se indican en la tabla 33.

Tabla 33.- Los criterios de evaluación del cuestionario

Cuestión	Criterios de evaluación (10 puntos máximo por cuestión)
1.- Pedro tardó 3 horas en ir desde su casa a la casa de sus padres a una velocidad de 60km. Si quiere volver a su casa en 2 horas, ¿a qué velocidad deberá ir?	3 puntos si se plantea bien la cuestión 2 puntos si escribe bien la proporción 2 puntos si se despeja bien la "x" 3 puntos si el resultado es correcto
2.- Un albañil, un fontanero y un electricista cobran 420€ por una reforma. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si todos cobran el mismo salario y el albañil trabajó 3 horas, el fontanero 5 horas y el electricista 7 horas? ¿Cuántos euros cobran por hora?	4 puntos si se plantea bien la cuestión 3 puntos si es correcto el precio por hora 1 punto por cada sueldo correcto de trabajador
3.- María lleva a revelar las fotos de la última excursión a una máquina de revelado digital, donde le cobran 20 céntimos de euro por cada foto. a) Si un día lleva 12 fotos y otro 231, ¿cuánto le cobrarán cada día? b) Si la factura ha sido de 6,20 euros, ¿cuántas fotos llevaba en la cámara?	2,5 puntos si es correcto el importe de 12 fotos 2,5 puntos si es correcto el importe de 231 fotos 5 puntos si se resuelve correctamente el apartado b)
4.- ¿Qué intereses obtendríamos si un capital de 5000€ lo dejamos 4 años al 3,5% anual?	5 puntos si se plantea bien la fórmula 5 puntos si el resultado es correcto
5.- He pagado por un Iphone 352€. Si me han hecho un descuento de un 12%. ¿Cuál era su precio inicial?	3 puntos si se plantea bien la cuestión 2 puntos si escribe bien la proporción 2 puntos si se despeja bien la "x" 3 puntos si el resultado es correcto
6.- Jennifer ha llamado a su amigo Suliman. Si el establecimiento de llamada es de 15 céntimos y tras hablar 15 minutos le han cobrado 90 céntimos en total. Si hubieran hablado durante 20 minutos. ¿Cuánto le habría costado la llamada?	5 puntos si se plantea bien la cuestión y se escribe la proporción (independiente de si se tiene en cuenta el establecimiento de llamada) 3 puntos si se tiene en cuenta el establecimiento de llamada 2 puntos si el resultado es correcto

Nota: Indicar que a efectos de la calificación por estudiante no se tuvo en cuenta la cuestión 6, salvo para sumar, es decir, la nota por estudiante es la puntuación obtenida de las cuestiones 1 a 5 y se le añade la puntuación obtenida en la cuestión 6. Esto es debido a que esta cuestión no es adecuada con la noción de proporcionalidad por lo que rompe el contrato didáctico y la dificultad que ello conlleva y se puso como objeto de análisis.

8.4. Cuestiones y comportamientos esperados

En este capítulo se analiza el cuestionario planteado y las acciones, dificultades y errores de los estudiantes, que el docente cree que pueden tener lugar durante la realización del cuestionario y que han sido comentadas en capítulos anteriores de esta memoria correspondiente al trabajo fin de máster.

Todas las cuestiones planteadas se realizan como problemas contextualizados ya que así es como se ha trabajado durante el desarrollo de las clases.

La primera cuestión que se les plantea a los estudiantes es un típico problema de proporcionalidad inversa. El objetivo es discernir si el estudiante es capaz de identificar cuáles son las magnitudes, qué tipo de relación existe entre las mismas (directa o inversa) y a partir de los datos del problema y utilizando el procedimiento explicado en clase, resolver el problema planteado. Se espera que se plantee la regla de tres, se detecte que la relación de proporcionalidad es inversa y en consecuencia se plantee la igualdad de razones, se proceda a despejar la incógnita, “x”, y se obtenga el valor solicitado. La única dificultad que se espera es en el paso del planteamiento de la regla de tres a la igualdad de razones, dónde se espera que los estudiantes puedan cometer el error de no invertir la razón que contiene el termino de la “x”.

En la segunda cuestión se plantea lo que se suele llamar un problema de repartos asociados a proporcionalidad directa. El objetivo es que el estudiante tras analizar el problema identifique que la relación entre las magnitudes es directa y que además tiene que calcular diferentes valores de una misma proporción. Se espera que se utilice la técnica de reducción a la unidad, calculando el sueldo por hora trabajada (como pista además se solicita este valor aunque como segunda pregunta) y luego se multiplique este valor por las horas respectivas de cada trabajador. La primera dificultad que se espera que tengan es la de relacionar el importe total cobrado con el total de horas trabajadas y la segunda dificultad es la utilización de la técnica de reducción a la unidad por parte de los estudiantes en lugar de realizar múltiples reglas de tres y luego además calcular el sueldo por hora.

La tercera cuestión es similar a la anterior con la diferencia de que en este caso, se da como dato el precio de una foto y se pide calcular tanto el importe de la impresión dado el número de fotos, como el número de fotos impresas a partir de un importe dado. La principal dificultad que se cree que tendrán los estudiantes estriba en que en un mismo problema se les plantean diferentes cuestiones y por otro lado además de forma intencionada se solicita calcular el importe para 231 fotos para ver la reacción de los estudiantes ante un valor inusual y analizar en la medida de lo posible el efecto de lo que se denomina “variable didáctica”. Como “error” se espera que los estudiantes no se den cuenta de que se les está dando el precio de una foto y planteen diferentes reglas de tres, aunque resolver las preguntas de la cuestión 3, basta con realizar operaciones elementales de multiplicación y división. Se espera que ocurra esto, porque en clase no se ha hecho ningún problema en el que directamente se proporciona como dato de problema el valor de una magnitud relativo a la unidad de la otra magnitud, es decir, en los problemas realizados en las clases referentes a repartos, siempre han tenido que calcular en primer lugar el valor de una magnitud asociado a la unidad de la otra.

La cuarta cuestión es un ejercicio de aplicación de las fórmulas explicadas en clase para el cálculo del interés dado el capital, el rédito y el tiempo en años, meses o días. La única dificultad del problema es que los estudiantes se acuerden de las fórmulas e identifiquen cuál es la que tienen que usar. El único error esperado por tanto es que no elijan la fórmula adecuada.

La quinta cuestión es un ejercicio típico de cálculo con porcentajes. Como todas las cuestiones anteriores es un problema contextualizado similar a los realizados durante las clases. Se espera que los estudiantes resuelvan el problema mediante el uso del método general explicado, es decir, planteando una regla de tres y obteniendo el valor solicitado. La dificultad del problema radica en identificar si el valor absoluto que se proporciona como dato (352) a qué porcentaje del total está asociado y de esa forma obtener el valor solicitado. Por tanto el error que se espera que se produzca sea el de asociar inadecuadamente los valores absolutos con los porcentajes y por tanto que el estudiante asocie 352 con el 12% o 352 con el 100%.

La sexta y última cuestión no es un problema de proporcionalidad directa ya que las magnitudes implicadas no varían de la misma manera. Si nos fijamos desde el enfoque de la Analítica, la relación entre las magnitudes presentes se puede representar mediante una función afín (**f(x)= mx+b**, dado que **b** es diferente de cero) y no mediante una función lineal (**f(x)=mx**) ya que para calcular el importe de cualquier llamada además de multiplicar los minutos por el precio por minuto, hay que añadir el establecimiento de llamada, **b**. Este problema se antoja de considerable dificultad para el estudiante ya que no se ha realizado ninguno similar en clase. Se espera que los estudiantes resuelvan el problema sin tener en cuenta el establecimiento de llamada.

8.5. Resultados

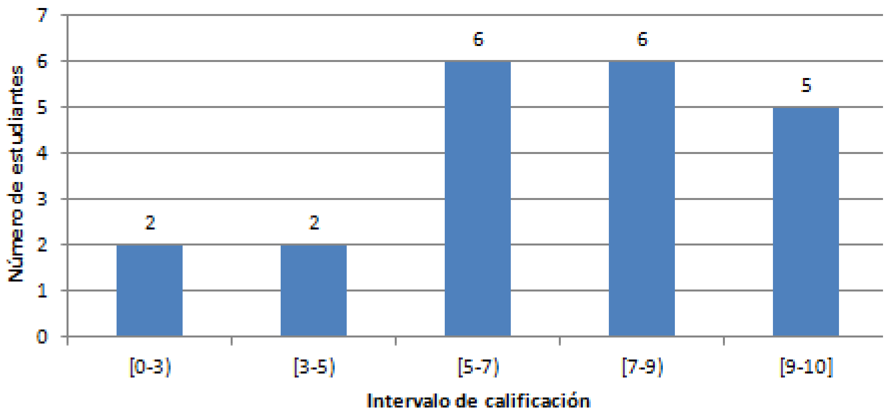
En este apartado se van a presentar los resultados obtenidos sin entrar en el análisis global de los mismos, dejando esta cuestión para el siguiente apartado, "Discusión de los resultados". En primer lugar se presenta un análisis basado en los resultados teniendo en cuenta sólo las calificaciones obtenidas y a continuación se presentan los resultados obtenidos de realizar un análisis detallado basado en un proceso metodológico validado por la ingeniería didáctica.

Resultados desde el punto de vista de las calificaciones

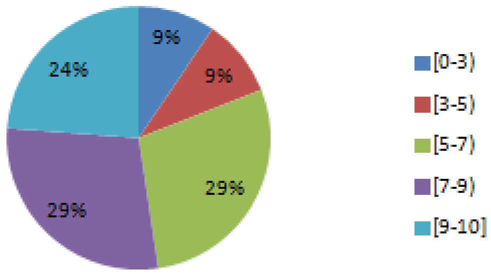
Las calificaciones obtenidas por los estudiantes como consecuencia de la realización del cuestionario se muestran en la tabla 34:

Tabla 34.- Calificaciones del cuestionario

Calificaciones cuestionario	[0-3)	[3-5)	[5-7)	[7-9)	[9-10]
Número de estudiantes agrupados por calificación	2	2	6	6	5
Porcentaje de estudiantes agrupados por calificación (%)	9,52	9,52	28,57	28,57	23,81



Gráfica 1.- Número de estudiantes por intervalo de calificación



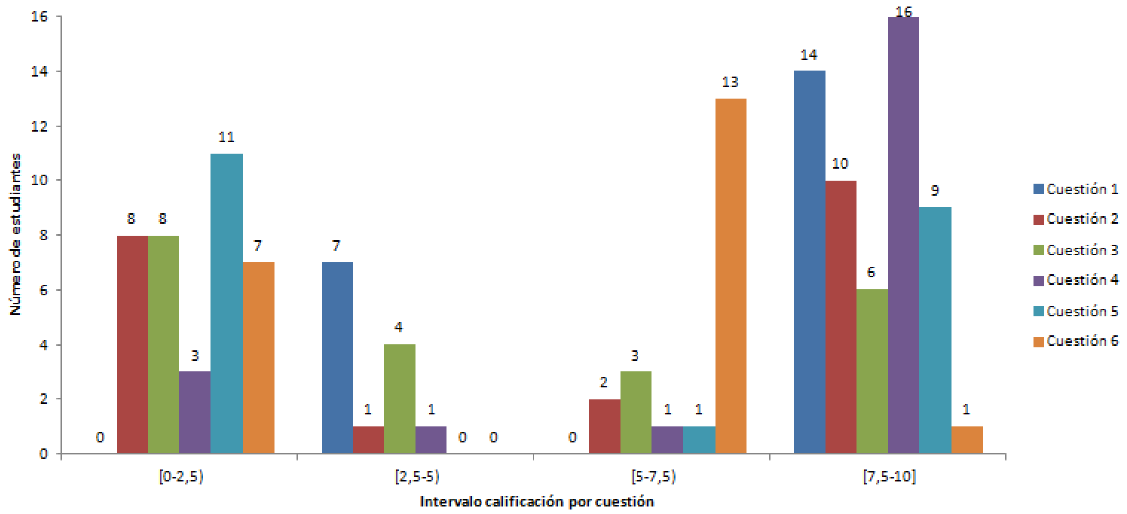
Gráfica 2.- Porcentaje de estudiantes por intervalo de calificación

Como se puede observar en las gráfica 1y 2, la mayoría de los estudiantes aprueban, 17 de un total de 21, es decir, un 80,95 %. De hecho la mitad de los estudiantes además de aprobar, sacan buena nota (7 o más).

Los resultados por cuestión se muestran en la tabla 35.

Tabla 35.- Número de estudiantes por intervalo de calificación y cuestión

	Puntuación parcial por problema (10 puntuación máxima)			
Cuestiones	**[0-2,5)**	**[2,5-5)**	**[5-7,5)**	**[7,5-10]**
1.- Pedro tardó 3 horas en ir desde su casa a la casa de sus padres a una velocidad de 60km. Si quiere volver a su casa en 2 horas, ¿a qué velocidad deberá ir?	0	7	0	14
2.- Un albañil, un fontanero y un electricista cobran 420€ por una reforma. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si todos cobran el mismo salario y el albañil trabajó 3 horas, el fontanero 5 horas y el electricista 7 horas? ¿Cuántos euros cobran por hora?.	8	1	2	10
3.- María lleva a revelar las fotos de la última excursión a una máquina de revelado digital, donde le cobran 20 céntimos de euro por cada foto. a) Si un día lleva 12 fotos y otro 231, ¿cuánto le cobrarán cada día? b) Si la factura ha sido de 6,20 euros, ¿cuántas fotos llevaba en la cámara?	8	4	3	6
4.- ¿Qué intereses obtendríamos si un capital de 5000€ lo dejamos 4 años al 3,5% anual?	3	1	1	16
5.- He pagado por un Iphone 352€. Si me han hecho un descuento de un 12%. ¿Cuál era su precio inicial?	11	0	1	9
6.- Jennifer ha llamado a su amigo Suliman. Si el establecimiento de llamada es de 15 céntimos y tras hablar 15 minutos le han cobrado 90 céntimos en total. Si hubieran hablado durante 20 minutos. ¿Cuánto le habría costado la llamada?	7	0	13	1



Gráfica 3.- Número de estudiantes por intervalo de calificación y cuestión

Se observa en la gráfica 3 que las cuestiones que mejor han resuelto los estudiantes han sido la 4 y la 1, mientras que las cuestiones que más les han costado son la 5 y la 3.

Resultados desde el enfoque de la ingeniería didáctica

Para realizar un análisis detallado de los comportamientos, dificultades y errores de los estudiantes en relación al cuestionario planteado se plantean las siguientes variables, que se representan mediante "V" + "número de variable":

- V1: Estudiante que identifica correctamente las magnitudes y su tipo de relación en 4 o más cuestiones.
- V2: Estudiante que realiza el ejercicio con el método enseñado en clase en cuestión 1.
- V3: Estudiante que NO invierte al pasar de la regla de tres a la igualdad de razones en cuestión 1 (error en el paso variable del método según el tipo de proporcionalidad).
- V4: Realiza la cuestión sin usar la técnica de reducción a la unidad en cuestión 2. Es decir, plantea múltiples reglas de tres o proporciones en función de las horas de cada trabajador con el total de horas.
- V5: Estudiante que aplica reducción a la unidad en cuestión 2. Suma horas, calcula precio por hora y luego realiza los repartos.
- V6: Estudiante que utiliza la regla de tres para resolver la cuestión 3.
- V7: Estudiante que multiplica directamente fotos por 0,2 para hallar el importe o dividir importe entre 0,2 para hallar el número de fotos en cuestión 3.
- V8: Estudiante hace bien para 12 fotos en cuestión 3a.
- V9: Estudiante que ha resuelto bien para 231 fotos en la cuestión 3a.

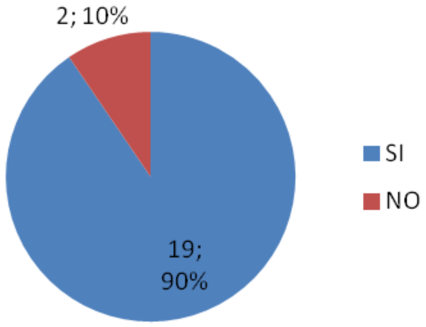
- V10: Estudiante hace bien la cuestión 3b.
- V11: Estudiante que realiza según el método enseñado en clase la cuestión 5.
- V12: Estudiantes que no han hecho una asociación correcta del valor (320€) con el porcentaje asociado (88%).
- V13: Estudiante que plantea cuestión 6 CON regla 3 para 20min.
- V14: Estudiante que plantea SIN regla 3 cuestión 6 calculando para 1min y luego para 20.
- V15: Estudiante que tiene en cuenta establecimiento llamada como un término fijo.
- V16: Estudiante que ha escrito bien la fórmula de la cuestión 4.
- V17: Estudiante que resuelve bien la cuestión 4.

En la tabla 36 se muestran los datos del estudio, correspondiendo un "1" si la respuesta a la variable es afirmativa y con un "0" si la respuesta a la variable para cada estudiante es negativa.

Tabla 36.- Datos de variables de estudio

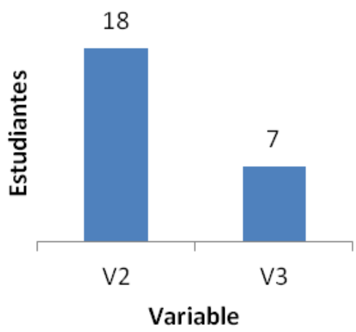
	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17
Estudiante1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
Estudiante2	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
Estudiante3	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
Estudiante4	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1
Estudiante5	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
Estudiante6	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
Estudiante7	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
Estudiante8	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
Estudiante9	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Estudiante10	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
Estudiante11	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
Estudiante12	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
Estudiante13	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
Estudiante14	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
Estudiante15	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
Estudiante16	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
Estudiante17	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
Estudiante18	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
Estudiante19	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
Estudiante20	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
Estudiante21	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1

Si observamos la gráfica 4 referente a la primera variable, V1, se comprueba que la mayoría de los estudiantes (90%) han entendido el concepto de que dos magnitudes pueden estar relacionadas de forma proporcional y que además esta relación de proporcionalidad puede ser directa o inversa.



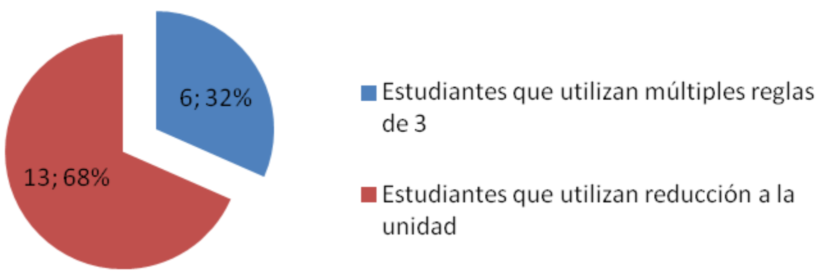
Gráfica 4.- Estudiantes que identifican bien las magnitudes y su tipo de relación en 4 o más cuestiones

Si observamos las variables 2 y 3, se comprueba que la mayoría ha planteado y realizado el ejercicio según el método enseñado en clase (18 estudiantes), pero que existe un porcentaje significativo que en el paso de la regla de tres a la igualdad de razones no realiza la inversión de los términos (7 estudiantes), resolviendo incorrectamente por tanto el problema.



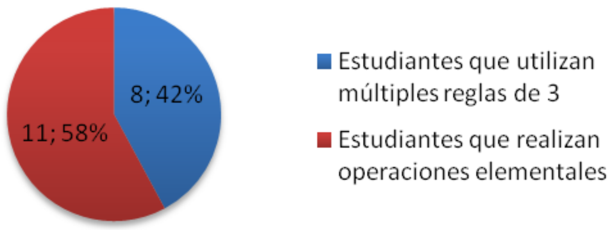
Gráfica 5.- Comparativa estudiantes que plantean bien cuestión 1 y los que se equivocan en el paso de inversión de términos

Si analizamos las variables 4 y 5, vemos que aunque muchos estudiantes aplican la técnica de reducción a la unidad, también hay varios estudiantes que plantean múltiples reglas de tres para resolver el problema, tal y como se puede ver en la gráfica 6.



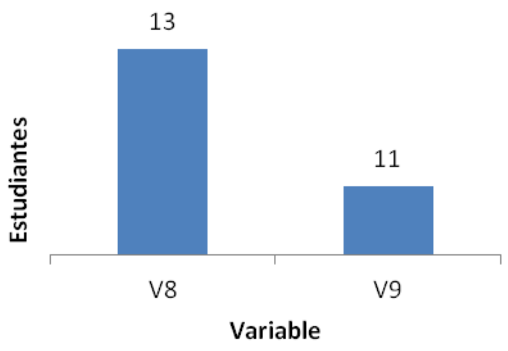
Gráfica 6.- Comparativa de estudiantes que utilizan regla de tres o reducción a la unidad para la resolución de la cuestión 2

Observando las variables 6 y 7, se comprueba que de los estudiantes que realizan la cuestión 3, la mayoría plantean múltiples reglas de tres en lugar de realizar operaciones elementales de multiplicación y división para resolver el problema, tal y como se puede comprobar en la gráfica 7.



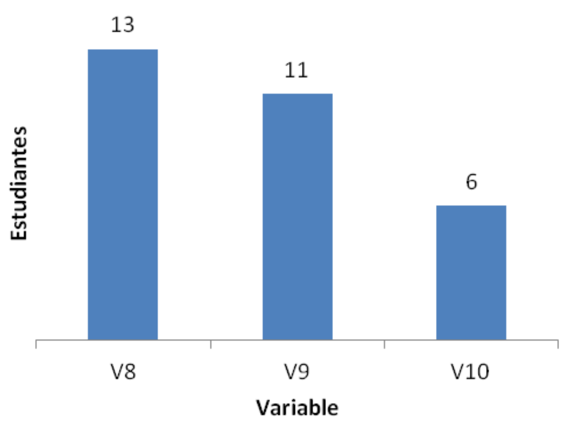
Gráfica 7.- Comparativa de estudiantes que utilizan múltiples reglas de tres u operaciones elementales para la resolución de la cuestión 3

Analizando las variables 8 y 9, vemos que prácticamente todos los estudiantes que obtienen correctamente el importe de 12 fotos (13 estudiantes) también lo realizan bien para 231 fotos (11 estudiantes).



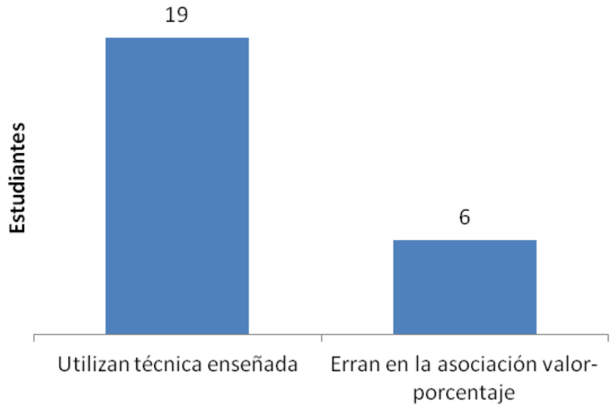
Gráfica 8.- Análisis del efecto de "variable didáctica"

Si analizamos las variables 8, 9 y 10, vemos que aunque 11 estudiantes resuelven correctamente el apartado **a** de la cuestión 3, sólo 6 solucionan bien el apartado **b**.



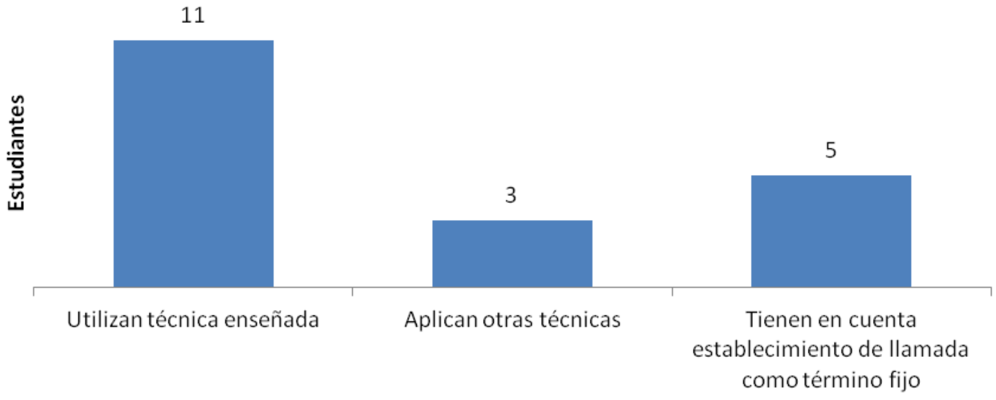
Gráfica 9.- Análisis resultados cuestión 3

Si analizamos las variables 11 y 12, se comprueba que prácticamente todos los estudiantes (19 de 21) aplican la técnica mostrada en clase, pero también hay que tener en cuenta que 6 estudiantes no asocian adecuadamente el valor absoluto de una magnitud y su porcentaje relativo en un total dado.



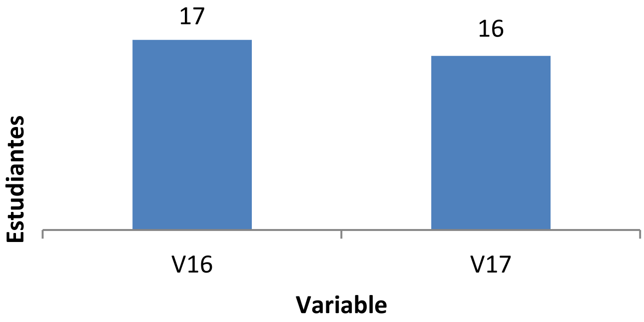
Gráfica 10.- Análisis técnica utilizada para la resolución cuestión 5

Si observamos las variables 13, 14 y 15 representadas en la gráfica 11, que están asociadas al análisis de la cuestión 6, se comprueba que un tercio de los estudiantes (7 = 21 – (11+3)) ni la intentan resolver, sólo la mitad de los estudiantes aplican el método general enseñado y tan sólo 5 estudiantes tienen en cuenta el establecimiento de llamada como un término fijo para el cálculo del importe de la llamada.



Gráfica 11.- Análisis de la resolución de la cuestión 6

Por último si observamos las variables 16 y 17, vemos que el 80,95% de los estudiantes, 17 de 21, plantean bien la fórmula para el cálculo del interés solicitado en la cuestión 4 y el 94,12% de éstos resuelven bien la cuestión 4.



Gráfica 12.- Análisis de la resolución de la cuestión

8.6. Discusión de los resultados

Resultados desde el punto de vista de las calificaciones

Si se analizan los resultados teniendo en cuenta sólo las calificaciones obtenidas, el resultado es satisfactorio y se podría concluir que el método explicado para la resolución de problemas de proporcionalidad ha resultado eficaz, ya que 17 de 21 estudiantes han aprobado, lo que representa el 80,95%.

Si se consideran los resultados de las cuestiones individualmente, se observa que las cuestiones que mejor han resuelto los estudiantes han sido la 4 y la 1, mientras que la cuestión que más les ha costado son la 5 y la 3. Esta conclusión cambia si tenemos en cuenta la particularidad de la cuestión 6, ya que ésta no fue realmente bien resuelta por ningún estudiante. Sin embargo debido a la dificultad de la misma a todos los estudiantes que resolvieron la cuestión 6 sin tener en cuenta el establecimiento de llamada se les puntuó con la mitad de la nota de la cuestión, como compensación.

Resultados desde el enfoque de la ingeniería didáctica

Si se analizan los resultados obtenidos mediante el enfoque de la ingeniería didáctica la conclusión general es satisfactoria, porque el 90% de los estudiantes identifican correctamente las magnitudes y el tipo de relación de proporcionalidad existente entre ellas (variable 1), y en todas las cuestiones la mayoría de los estudiantes han aplicado la técnica más adecuada de los expuestas en clase (variables 2, 5, 7 y 11), ratificando por tanto, los métodos de enseñanza utilizados.

Que los estudiantes han asimilado el uso de la regla de tres como técnica para la resolución de problemas de proporcionalidad, y que en caso de duda de cómo resolver un problema recurren a ella, se puede comprobar observando las variables 6 y 13. Si se analizan los datos de la variable 6, referente a la cuestión 3, se comprueba que casi la mitad de los estudiantes utilizan la regla de tres a pesar de que es mejor resolver mediante operaciones elementales de multiplicación y división. Esto es porque este tipo de cuestión, en la que como dato del problema se proporciona directamente el valor de una magnitud para la unidad de la otra, nunca se ha planteado en las clases. Aun así es un buen dato que más estudiantes hayan elegido la técnica de resolución más eficiente, a pesar de no haber hecho problemas similares en clase.

Por otro lado, si miramos los datos de la variable 13 y asumiendo desde el principio que es muy probable que este ejercicio no lo intentaran resolver muchos estudiantes y que ninguno lo hiciera bien, ha sido satisfactorio comprobar que más de la mitad de los estudiantes lo han intentado y que han utilizado las técnicas que tenían a su alcance para tratar de resolverlo, lo cual refuta el que los estudiantes han aprendido a utilizar las técnicas enseñadas. También es de destacar que, a pesar de la dificultad de la cuestión 6, ya que es un problema que se escapa de la noción de proporcionalidad como aplicación lineal y el no haber realizado ningún problema similar en clase, aproximadamente el 25% de los estudiantes tratan el establecimiento de llamada como un término fijo y diferente del precio por minuto, aunque no terminan de resolver correctamente el problema.

En este cuestionario también se quiso evaluar lo que en didáctica de las matemáticas se denomina como “variable didáctica”. Para ello se propuso a los estudiantes en la cuestión 3 utilizar un valor no habitual (231) y de un orden de magnitud mayor que los otros datos de la cuestión y se han planteado las variables 8 y 9. En este caso no se aprecia de forma significativa el efecto de “variable didáctica” porque de los 13 estudiantes que realizaron bien el cálculo para 12 fotos (cuestión 3a y medida con la variable 8), 11 estudiantes hicieron bien el cálculo para 231 fotos (cuestión 3b y medida con la variable 9). La causa más probable de que no haya aparecido el efecto buscado es porque no se haya planteado bien, ya que es muy fácil calcular una multiplicación por 12 o por 231 teniendo en cuenta que los estudiantes pueden utilizar la calculadora.

En esta misma cuestión, 3, y a partir de los datos de la variable 10 se puede observar que el número de estudiantes que realizan correctamente el apartado 3b, 6, es muy pequeño comparado con los que hacen bien el apartado 3a completo, 11. La causa más probable es que en la técnica de reducción a la unidad, una vez que se tiene el valor de una magnitud para la unidad de la otra, se realizan multiplicaciones para obtener los datos solicitados y en la cuestión 3b había que dividir para hallar el resultado. Otra posible causa podría ser que los estudiantes estén acostumbrados a que en un mismo problema sólo se les pida calcular datos de una magnitud respecto de la otra, ya que en los ejercicios y problemas de clase siempre se ha hecho así, pero no datos de una respecto de la otra y viceversa.

Otro dato relevante, es el que nos proporcionan las variables 2 y 3, en la cuestión 1, referente a proporcionalidad inversa. Estas variables nos indican que a pesar de que 18 estudiantes (86%) plantean bien la cuestión, 7 estudiantes (33% del total y casi un 40% si nos fijamos en los 18 que plantean bien la cuestión) se equivocan en el paso variable (en función de si las magnitudes están directa o inversamente relacionadas) del método general de resolución de problemas. Es decir, estos 7 estudiantes tras plantear bien la regla de tres no invierten los términos del lado de la “x” al pasar a la igualdad de razones, y por tanto realizando los cálculos como si de una cuestión de proporcionalidad directa se tratase. Estos datos, refutan además uno de los errores típicos de los estudiantes, que consiste en que los estudiantes no analizan los resultados obtenidos para comprobar si son coherentes tal y como se ha comentado anteriormente.

Si se estudian las posibles relaciones entre las variables se comprueba que las variables 1, 2 y 11 están relacionadas, es decir, que aproximadamente el 90% de los estudiantes, además de identificar adecuadamente las magnitudes y el tipo de proporcionalidad entre ellas, plantean con la regla de tres los problemas de proporcionalidad inversa y de aumentos y disminuciones porcentuales.

Por último comentar que tal y como se esperaba, y a partir de los datos de las variables 16 y 17, la cuestión 4 ha sido resuelta correctamente por el mayor porcentaje de estudiantes (76,2%) y tan sólo un estudiante ha planteado bien la fórmula pero se ha equivocado con las operaciones posteriores no finalizando correctamente el problema.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

A lo largo de este trabajo fin de máster, se ha pretendido realizar un análisis del modelo de enseñanza de la proporcionalidad en 1º de E.S.O. y en 1º de E.S.P.A., teniendo siempre muy presente el contexto en el que se ha realizado, los recursos temporales y materiales disponibles y el alcance del proyecto.

Este trabajo comienza con el análisis de los contenidos y los criterios de evaluación referentes a la noción de proporcionalidad y los objetos matemáticos asociados con ella, definidos en el currículo vigente. A continuación se hace un análisis de cómo la noción de proporcionalidad es descrita en los libros de texto y se hace una comparativa con lo estipulado por el currículo oficial, remarcando ausencias y presencias.

En la segunda parte de este trabajo, se focaliza en los modelos de enseñanza de la noción de proporcionalidad en 1º de E.S.O. y en 1º de E.S.P.A., y sirviéndose de la experiencia proporcionada por el Practicum II se intenta validar el método de enseñanza seguido en la enseñanza de la proporcionalidad en 1º de E.S.P.A. mediante un diseño y experimentación según el enfoque de la ingeniería didáctica.

Conclusiones generales del trabajo

La primera conclusión es que existen diferencias significativas en el currículo referente a la proporcionalidad en 1º de E.S.O. y E.S.P.A. Una buena muestra de ello es que en 1º de E.S.O. sólo está definida la enseñanza de la proporcionalidad directa, aunque ésta se realiza desde múltiples áreas de las Matemáticas, Aritmética, Analítica, Geométrica y Estadística, mientras que en 1º de E.S.P.A. se enseña proporcionalidad directa e inversa pero basada desde el enfoque aritmético, aunque se dan ciertas pinceladas desde la Geometría mediante simetrías de figuras planas.

La enseñanza en 1º de E.S.P.A. es compleja por el contexto propio de las personas adultas y la heterogeneidad de los estudiantes que al proceder de diferentes sistemas educativos y ser de edades muy diversas, presentan conocimientos previos muy diferentes. Por estas razones la enseñanza para personas adultas es diferente a la que se realiza en la educación secundaria obligatoria, siendo una enseñanza más centrada en la práctica y contextualizada con situaciones de la vida cotidiana.

También se ha podido comprobar la utilidad de la regla de tres y su uso extendido a pesar de que en el currículo no se menciona. En el caso que nos ocupa, el método general propuesto para la resolución de problemas de proporcionalidad se basa en el uso de esta técnica y los resultados han sido más que satisfactorios.

Otra conclusión que se extrae es que el currículo podría estructurarse mejor, especialmente en el caso de la educación para las personas adultas. En este último caso, se estiman necesarios más conocimientos previos en 1º de E.S.P.A., por ejemplo de fracciones, y una mayor interrelación entre las diferentes áreas desde las que se puede enseñar la noción de proporcionalidad. Por ejemplo en 1º de E.S.P.A. no se contempla la relación de proporcionalidad con las funciones lineales y la representación lineal mediante tablas y gráficos, omitiendo por tanto el enfoque desde el área de la Analítica y la Estadística.

Un factor importante a tener en cuenta del currículo para personas adultas, es que éste se define a nivel de comunidades autónomas y no a nivel nacional. Ésta podría ser una de las causas de la estructuración actual, además de la problemática de que si un estudiante se traslada de una comunidad a otra que presenten currículos diferentes, esto repercutiría negativamente en el estudiante.

También se ha comprobado que en los libros de texto de educación obligatoria, existe una clara tendencia a sobreproteger a los estudiantes, guiándoles en exceso, no sirviéndose de las características de formalidad del lenguaje matemático, obviando demostraciones y propiedades de los objetos matemáticos y en general generando una atomización de los conocimientos, que redunda en un aislamiento de las nociones matemáticas en bloques independientes entre sí, rompiendo las conexiones matemáticas naturales entre las diferentes áreas de las Matemáticas. Esta "atomización" también rompe con lo dispuesto en el currículo de la educación obligatoria que plantea un aprendizaje en espiral.

Por último, se comprobado que a pesar de la organización del currículo y el contexto de los estudiantes de 1º de E.S.P.A, a través de la enseñanza de métodos sistemáticos de resolución de problemas, se consigue iniciar a los estudiantes de 1º de E.S.P.A. en la noción de proporcionalidad.

Cuestiones abiertas

La primera cuestión que se plantea es que si se repitiera la experimentación con muchos más estudiantes los resultados serían los mismos o serían diferentes. Es lógico tener esta reflexión al haber realizado la experimentación con sólo 21 estudiantes, lo cual desde el punto de vista de la estadística no es un tamaño de muestra significativo para poder extrapolar las conclusiones obtenidas a partir de los datos de esta experimentación, a la población general de estudiantes de 1º de E.S.P.A. Sería interesante repetir el mismo proceso de experimentación en diferentes ocasiones, en diferentes centros y a ser posible con un tamaño de muestra mayor para poder contrastar las conclusiones que se obtengan, en aras de obtener conclusiones que permitan mejorar la enseñanza de las matemáticas de forma general.

También sería interesante contrastar los datos de 1º de E.S.P.A. con los datos de una experimentación en 1º de E.S.O. manteniendo todas las variables constantes, salvo los estudiantes, es decir, que los mismos docentes siguieran el mismo método, con la misma duración de clases, etc. para poder realizar una comparativa de similitudes y diferencias.

Otra cuestión que sería interesante analizar es porqué en 1º de E.S.P.A se trata tanto la proporcionalidad directa como la inversa, mientras que en 1º de E.S.O. sólo se inicia en la noción la proporcionalidad directa, relegando la proporcionalidad inversa a 2º de E.S.O.

Sirviéndose de la variedad de sistemas educativos desde los que proceden los estudiantes de E.S.P.A. se podría realizar un análisis de las técnicas y métodos de enseñanza utilizados en otros sistemas educativos para evaluar cómo se pueden mejorar los que actualmente se utilizan en nuestro contexto.

Referencias

Instituto Félix Urabayen, *Matemáticas I,* Navarra: Autor.

García P., Rodríguez M., Uriondo J.L. (2002). *Matemáticas 5.* Editorial Santillana. ISBN: 84-294-7551-6.

García P., Uriondo J.L., Rodríguez M. (2002). *Matemáticas 6.* Editorial Santillana. ISBN: 84-294-7552-4.

Uriondo J.L. (2007). *Matemáticas,* 1º Secundaria. Editorial Oxford University Press. Serie Trama. ISBN: 974-84-673-2589-8.

Uriondo J.L. (2007). *Matemáticas,* 2º Secundaria. Editorial Oxford University Press. Serie Trama. ISBN: 974-84-673-0549-4.

Pérez S., Lobo B., Uriondo J.L. (2007). *Matemáticas,* 3º Secundaria. Editorial Oxford University Press. Serie Trama. ISBN: 974-84-673-2922-3.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.

MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. BOE 5, de 5 enero, 677–773.

MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre. BOE 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

CFN (2009). Decreto Foral 61/2009, de 20 de Julio. BON 109, de 4 de Septiembre, 11447-11502.

CFN (2008). Decreto Foral 49/2008, de 12 de Mayo. BON 70, de 6 de Junio, 6552- 6643.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Especial), 133–156.

Marcos C., Martínez J. *Compendio de Matemáticas*. 4º Curso. Lección 6. Ediciones S.M. 74-83

UNED (1976), *Programa de especialización de profesorado de E.G.B.*, Matemáticas II, Unidad 3, Madrid: Autor. 78-82.

Chevallard Y., Bosh M., Gascón Josep (1997). *ESTUDIAR MATEMÁTICAS: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial Horsori. 277-290.

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 282–307.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro propio del instituto
B. Unidad didáctica del libro de texto
C. Actividad adicional planificada

A. Unidad didáctica del libro propio del instituto

Matemáticas 1

PROPORCIONALIDAD

Recuerda:

Una proporción es la igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$$

Ejercicio de ejemplo:

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{x} \Rightarrow 4.x = 10.6 \Rightarrow x = \frac{60}{4} = 15$$

1.- Calcula el valor desconocido en cada caso.

$$\frac{4}{10} = \frac{6}{x} \qquad \frac{9}{15} = \frac{x}{35} \qquad \frac{30}{45} = \frac{x}{39}$$

Recuerda:

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** cuando:

- Al aumentar una la otra aumenta de igual manera.
- Al disminuir una la otra disminuye de la misma manera.

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando:

- Al aumentar una disminuye la otra.
- Al disminuir una la otra aumenta.

2.- Señala si son directas o inversas las magnitudes que tienes a continuación:

- ☐ La cantidad de pienso que gasta un granjero a la semana, y el número de vacas que posee.
- ☐ El caudal que arroja un manantial y el tiempo que tarda en llenar un cántaro de 20 litros.
- ☐ El tiempo que tenemos colocado un cántaro en la fuente y la cantidad de agua que recogemos.
- ☐ El peso de un libro, elegido al azar en una biblioteca y el número de páginas que contiene.
- ☐ El volumen de una caja y el número de cajas iguales que se pueden almacenar en una nave.
- ☐ El peso de una mercancía y el coste del transporte.
- ☐ La velocidad de una moto y el tiempo que tarda en recorrer una distancia determinada.
- ☐ El precio de venta de un piso y los metros cuadrados que mide.

Matemáticas 1

Recuerda:

La **regla de tres directa** la aplicaremos cuando entre las magnitudes se establecen las relaciones:

A **más** $\longrightarrow$ **más.**

A **menos** $\longrightarrow$ **menos.**

Si 12 naranjas cuestan 72 €, ¿cuál será el precio de 20 naranjas?

Más naranjas cuestan **más** dinero.

Menos naranjas cuestan **menos** dinero

12 naranjas ------ 72 €
20 naranjas ------ x €

donde x = (72 x 20) / 12.

La **regla de tres inversa** la aplicaremos cuando entre las magnitudes se establecen las relaciones:

A **más** $\longrightarrow$ **menos.**

A **menos** $\longrightarrow$ **más**

Si 6 obreros tardan 12 días en realizar un trabajo, ¿cuánto tardarán 8 obreros?

Más obreros tardarán **menos** tiempo.

Menos obreros tardarán **más** tiempo

6 obreros ----- 12 días
8 obreros ------ x días

donde x = (12 x 6) / 8

3.- Un corredor da 3 vueltas a una pista polideportiva en 12 minutos. Si sigue al mismo ritmo, ¿Cuánto tardará en dar 5 vueltas?

4.- En una expedición al Annapurna, 8 alpinistas llevan alimentos para 15 días. Después dos participantes se ponen enfermos y no pueden ir. ¿Para cuántos días tendrán alimentos los que quedan? ¿Y si ahora se unen otros 4 alpinistas al grupo?,

5.- Diez obreros construyen un dique en 8 días. ¿Cuánto tiempo invertirán en el mismo trabajo 16 obreros?

6.- Un taller de confección, si trabajan 8 horas diarias, tarda 5 días en servir un pedido. ¿Cuánto tardará en servir el pedido si se trabajan 10 horas diarias?

7.- Las veinte vacas de una granja consumen una carga de alfalfa en 12 días. ¿Cuánto durará la carga de alfalfa si el número de vacas aumenta a 30?

8.- La calefacción de un colegio tiene un depósito de combustible que dura 24 días funcionando durante 4 horas al día. ¿Cuánto duraría el combustible si funcionase 6 horas al día?

9.- Doce operarios limpian un edificio de oficinas en 3 horas y 40 minutos. ¿Cuántos operarios serían necesarios para realizar el trabajo en dos horas?

10.- Un grifo que arroja un caudal de 8 litros por minuto, tarda 35 minutos en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría en llenarse ese mismo depósito si se abriera un segundo grifo que aporta un caudal de 6 litros por minuto?

11.- De una fábrica salen dos camiones, uno con 250 televisores. y el otro con 375 televisores iguales a los anteriores. Si la carga del primer camión es de 3125 Kg ¿Cuál es la carga del segundo camión?

12.- Con el aceite que contiene un depósito se llenan mil botellas de dos litros. ¿Cuántas garrafas de 5 l. podrían llenarse con ese mismo depósito?

13.- Hemos tardado 6 minutos en llenar un cántaro de 30 l. ¿Cuánto tardaremos en llenar otro cántaro de 16 litros?

14.- Para construir una pared en 10 días, se necesitan 18 trabajadores. ¿Cuántos trabajadores son necesarios para hacer ese mismo trabajo en 4 días?

15.- Un taller de ebanistería, si trabaja 8 horas diarias, puede servir un pedido en 6 días. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar para servir el pedido en 3 días?

16.- Un bólido, en una carrera, ha dado 5 vueltas al circuito en 8 minutos y 30 segundos. Si mantiene la misma velocidad ¿Cuánto tardará en dar las tres próximas vueltas?

17.- En las rebajas, Pilar y Carlos compran un sofá por 1.200 € una mesa por 750 € y una lámpara de pie por 125 € ¿Cuánto van a pagar si les hacen un 20 % de descuento?

18.- De los 250 alumnos y alumnas que tiene un colegio hoy ha salido de excursión el 30 % ¿Cuantos han ido de excursión?

19.- El 20 % de una cantidad es 40 ¿Cuál es la cantidad?

20.- Una máquina que fabrica tornillos produce un 2 % de piezas defectuosas. Si hoy se han apartado 41 tornillos defectuosos ¿Cuántas piezas ha fabricado la máquina?

21.- Diego tenía que resolver 20 problemas de matemáticas.

a) Si resolvió bien el 30 % de los problemas ¿Cuántos hizo correctamente?

b) ¿Cuántos tendría que haber resuelto correctamente para que el porcentaje de problemas bien hechos hubiera sido del 85 %?

22.- En una tienda de ropa pusieron todos los artículos a 18 €, Calcula el porcentaje de rebaja para un pantalón que antes costaba 48 €, una blusa que costaba 36 € y un bañador cuyo precio era de 20 €

23.- Si en cierta tienda tenían rebajas del 20 % y me rebajaron un abrigo 90 € ¿Qué precio tenía el abrigo? ¿Cuánto me cobraron?

24.- Un hotel dispone de 400 camas de las que 280 están ocupadas ¿Cuál es el porcentaje de ocupación del hotel?

25.- Los 12 chicos de una clase representan el 40 % del total. ¿Entre alumnos y alumnas, cuántos son en la clase?

26.- En las rebajas he pagado por un jersey que costaba 60 € la cantidad de 48 € ¿Qué % de descuento me han hecho?

27.- Los habitantes de cierta ciudad se distribuyen según esta tabla

Europeos	880.000
Africanos	60.000
Americanos	50.000
Asiáticos	10.000

¿Qué porcentaje supone cada grupo respecto del total?

28.- A Mario le van a subir este año su pensión de jubilación 18 € al mes. Calcula el % de subida que le van a aplicar sabiendo que su pensión actual es de 500 €

29.- Un vendedor de libros gana el 8 % del importe de las ventas que realiza. ¿A cuánto asciende la venta realizada si gana 240 €?

30.- En un colegio el 75 % del papel que se usa es reciclado. Si un día se han usado 260 folios no reciclados. ¿Cuánto papel se ha gastado?

31.- El salario medio mensual es de 1.450 €. ¿Qué % habrá ahorrado un ciudadano si tiene 150 € a fin de mes?

32.- Se amplia un original al 132 %. ¿Cuánto medirá el ancho del original si en la fotocopia mide 20 cm.?

33.- En una tienda de ropa tienen rebajados sus artículos un 15 %. Averigua

a) Cuánto costarían antes de las rebajas un pantalón y una camiseta cuyos precios son de 23, 79 y 15,98 € respectivamente?

b) ¿Qué precio tendrá ahora una chaqueta si antes de las rebajas costaba 59,07 €?

34.-Cuatro amigos: Rafa, Rosario, Luis y Mariví aportan respectivamente 10, 8, 7 y 5 € para comprar un décimo de lotería que vale 30 €. Afortunadamente el décimo resulta premiado con 600.000 € ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

35.- Tres carpinteros se encargan de hacer las puertas blindadas para un edificio en construcción. El primero hace 10 puertas, el segundo 9 y el tercero 6. Por todo el trabajo han cobrado 200.000 € ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno? ¿Cuánto vale cada puerta?

36.- En una urbanización el precio de los pisos es proporcional a la superficie que tienen. Si un piso de 85 m2 cuesta 180.200 €. Calcula el precio de los pisos que tienen las siguientes medidas: 100 m2, 96 m2 y 67 m2.

37.- Un padre reparte cada semana 132€ entre sus tres hijos de 12, 15 y 17 años de edad, proporcionalmente a sus edades ¿Cuánto corresponde a cada uno?

38.- Tres obreros han recibido por un trabajo 2.016 € ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si todos cobran el mismo salario y el primero ha trabajado 5 días, el segundo 9 días y el tercero 13 días?

Recuerda:

Se llama **interés** al beneficio que produce el dinero prestado. Ese beneficio es directamente proporcional a la cantidad prestada y al tiempo que dura el préstamo.

Concepto	Nombre	Símbolo
Cantidad prestada	Capital	**C**
Tiempo del préstamo	Tiempo	**t**
Un beneficio por 100 € en un año	Rédito	**r**
Beneficio del préstamo	Interés	**I**

$$I = \frac{cxrxt}{100}$$

Si el **tiempo** viene expresado en **meses**:

$$I = \frac{cxrxt}{1200}$$

Si el **tiempo** viene expresado en **días**:

$$I = \frac{cxrxt}{36000}$$

39.- Halla el interés producido durante cinco años, por un capital de 30.000 € al 6%.

40.- Calcula en qué se convierte, en seis meses, un capital de 10.000 €, al 3.5%.

41.- ¿Qué renta obtiene un inversionista que coloca un capital de 18.500 €, al 6,25%, durante 30 días?

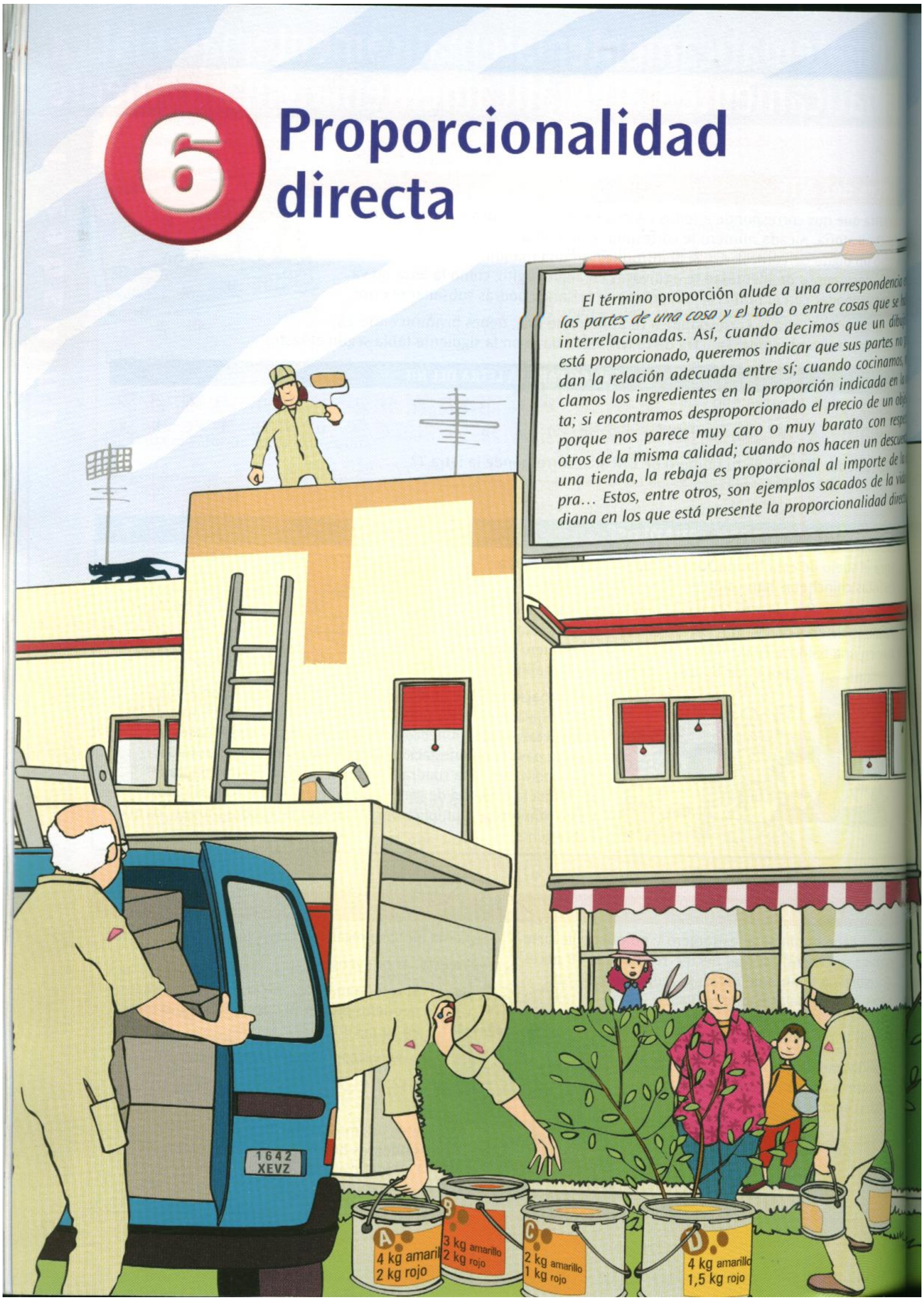
42.- Calcula el beneficio obtenido de un capital de 5.000 € colocado al 2,5% anual durante 7 meses.

43.- Un agricultor compra una finca de 24 ha. a 1,2 € el metro cuadrado, acordando saldar su deuda tres años más tarde con un interés del 3% anual. ¿Qué cantidad deberá abonar al cabo de tres años?

44.- ¿Qué beneficio obtiene un prestamista que cede un capital de 2.500 €, al 12% anual, durante 45 días?

45.- Un banco cobra un interés anual del 19% por los descubiertos de las cuentas. ¿Qué coste tiene para un cliente haber dejado su cuenta con un déficit de 75 € durante 15 días?

B. Unidad didáctica del libro de texto



A una cuadrilla de pintores le han encargado pintar de naranja las fachadas de todas las viviendas de una urbanización. Para elegir el tono, han preparado cuatro mezclas distintas de pintura roja y amarilla.

- ¿En qué dos mezclas han obtenido el mismo tono naranja?
- Ordena las muestras del tono anaranjado más claro al más oscuro.
- ¿Cuántos kilos de pintura roja hay que mezclar con 8 kg de pintura amarilla para obtener el mismo tono que en la muestra D?
- ¿Cuántos kilos de pintura amarilla hay que mezclar con 5 kg de pintura roja para obtener el tono de la muestra C?
- Si en la muestra A se añade 1 kg de pintura amarilla y 1 kg de pintura roja, ¿se seguirá obteniendo el mismo tono naranja?
- ¿De qué depende la intensidad del tono que se obtiene al mezclar pintura de dos colores distintos?

Lo que debes recordar

Relación entre los términos de dos fracciones equivalentes

Si dos fracciones son equivalentes, los productos cruzados son iguales:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \qquad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$$

1 Indica si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

a) $\frac{6}{8}$ y $\frac{9}{12}$ ***b)*** $\frac{4}{5}$ y $\frac{6}{7}$ ***c)*** $\frac{3}{5}$ y $\frac{8}{10}$ ***d)*** $\frac{36}{12}$ y $\frac{6}{2}$

2 Copia y completa el término que falta en cada equivalencia:

a) $\frac{12}{2} = \frac{18}{\square}$ ***b)*** $\frac{4}{5} = \frac{\square}{40}$ ***c)*** $\frac{\square}{9} = \frac{3}{27}$ ***d)*** $\frac{5}{\square} = \frac{15}{12}$

Expresión decimal de una fracción

Cualquier fracción se puede expresar con el número decimal que resulta de dividir el numerador entre el denominador. Del mismo modo, cualquier número decimal se puede expresar en forma de fracción. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad 0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

3 Expresa en forma de número decimal o de fracción, según corresponda:

a) $\frac{1}{5}$ ***b)*** $\frac{12}{100}$ ***c)*** $\frac{7}{10}$ ***d)*** 0,2 ***e)*** 1,25 ***f)*** 0,09

Magnitudes y unidades

Una magnitud es una cualidad de los cuerpos que se puede medir. Por ejemplo, la longitud, el tiempo, la capacidad y la velocidad, entre otras, son magnitudes.

Para medir magnitudes, se emplean distintas unidades de medida. La longitud se puede medir en metros; el tiempo, en segundos; la capacidad, en litros, y la velocidad, en kilómetros por hora.

4 Relaciona cada magnitud con su unidad de medida correspondiente:

masa	temperatura	longitud	superficie
grado centígrado	centímetro	centímetro cuadrado	kilogramo

Lo que vas a aprender

- Cómo expresar la relación entre dos números mediante una razón.
- Qué es una proporción, cómo se denominan sus términos y cómo se calculan.
- Cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales.
- Cómo resolver problemas de proporcionalidad directa reduciendo a la unidad o mediante una regla de tres.
- Cómo calcular porcentajes y aumentos y descuentos porcentuales.

111

1 Razón y proporción

1.1. Razón entre dos cantidades

Si a un cumpleaños asisten 3 niños y 4 niñas, se dice que la relación entre unos y otras es de 3 a 4. La relación anterior también se puede expresar mediante el cociente indicado $3:4$ o $\frac{3}{4}$.

La **razón** entre dos cantidades, *a* y *b*, es la relación existente entre ambas expresada en forma de cociente indicado.

Se escribe $a:b$ o bien $\frac{a}{b}$ y se lee «*a* por cada *b*» o bien «*a* es a *b*».

EJEMPLO

Para conseguir 6 kg de pintura de color rosa, se han empleado 1,5 kg de pintura roja y 4,5 kg de pintura blanca.

a) **¿Cuál es la razón que expresa la relación entre la cantidad de pintura roja empleada y la de pintura rosa obtenida?**

$\frac{1,5}{6}$ Se han empleado 1,5 kg de pintura roja por cada 6 kg de pintura rosa.

b) **¿Cuál es la razón que expresa la relación entre la cantidad de pintura roja y la de pintura blanca mezcladas?**

$\frac{1,5}{4,5}$ Se han empleado 1,5 kg de pintura roja por cada 4,5 kg de blanca.

En un partido de baloncesto, Matías ha encestado 5 canastas de 8 intentos, mientras que Olga ha conseguido 9 aciertos de 15. ¿Cuál de los dos ha sido más eficaz?

Aunque Olga ha logrado más canastas que Matías, también ha realizado más lanzamientos.

Para comparar la eficacia de ambos, expresamos con una razón la relación entre canastas y lanzamientos:

- Matías: $\frac{5}{8} = 0,625$
- Olga: $\frac{9}{15} = 0,6$

Matías ha encestado 0,625 lanzamientos por cada intento, y Olga, 0,6. Luego, Matías ha sido más eficaz.

1.2. Expresión decimal de una razón

Cuando la relación entre dos cantidades, *a* y *b*, se expresa en forma decimal, se está indicando cuántas veces contiene la cantidad *a* a la cantidad *b*.

La expresión decimal de una razón es el **tanto por uno** y expresa las veces que se repite una cantidad con respecto a la unidad.

EJEMPLO

Un ciclista recorre 50 km en 2 h.

a) **¿Cuál es la relación entre el espacio recorrido y el tiempo empleado?**

$\frac{50}{2} = \frac{25}{1}$ ▶ Recorre 25 km en 1 h y se expresa como 25 km/h.

b) **¿Cuál es la relación entre el tiempo y el espacio recorrido?**

$\frac{2}{50} = \frac{0,04}{1}$ ▶ Emplea 0,04 h en 1 km y se expresa como 0,04 h/km.

1.3. Proporción

Dos razones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, forman una **proporción** cuando son iguales: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Se lee «*a* es a *b* como *c* es a *d*».

Los términos *a* y *d* se llaman **extremos,** y los términos *c* y *b*, **medios.**

extremos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ medios

En una proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

EJEMPLO

Observa que 5 es el doble que 2,5; del mismo modo, 4 es el doble que 2. Se dice entonces que 5 es a 2,5 como 4 es a 2; esta relación se escribe así:

$\frac{5}{2{,}5} = \frac{4}{2}$ ► Se cumple que $5 \cdot 2 = 4 \cdot 2{,}5$.

Para hacer refresco de naranja se mezclan 8 L de zumo de naranja puro con 10 L de agua. Si se dispone de 12 L de zumo de naranja, ¿cuántos litros de agua hay que añadir para obtener una mezcla con el mismo sabor a naranja?

La razón entre la cantidad de zumo de naranja y la de agua debe ser la misma en las dos mezclas:

$$\frac{8}{10} = \frac{12}{n}$$

$$8 \cdot n = 12 \cdot 10$$

$$n = \frac{12 \cdot 10}{8} = \frac{120}{8} = 15$$

Por tanto, a 12 L de zumo de naranja hay que añadirles 15 L de agua.

Actividades

1 Ana pesa 54 kg y mide 160 cm, mientras que su primo Álvaro pesa 70 kg y mide 150 cm. Escribe con una razón la relación entre el peso y la altura de Ana y Álvaro.

2 En un país hay 5 mujeres por cada 3 hombres:

a) Expresa en forma de razón la relación entre el número de hombres y el de mujeres.

b) Expresa en forma de razón la relación entre el número de mujeres y el de hombres.

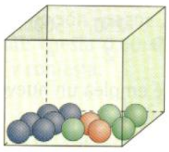
c) ¿Cuántos hombres hay por cada mujer?

d) ¿Cuántas mujeres hay por cada habitante?

3 Observa el número de bolas de cada color que hay en la urna y expresa con una razón:

a) La relación entre el número de bolas rojas y el de bolas azules.

b) La relación entre el número de bolas verdes y el de bolas azules.



c) La relación entre el número de bolas azules y el total de bolas.

4 Comprueba que 8 es a 12 como 20 es a 30.

5 Averigua el valor de *n* para que haya proporción:

a) $\frac{2}{4} = \frac{7}{n}$ ***c)*** $\frac{n}{3{,}4} = \frac{0{,}4}{1{,}7}$ ***e)*** $\frac{2{,}5}{n} = \frac{10}{12}$

b) $\frac{5}{4} = \frac{n}{18}$ ***d)*** $\frac{6}{1{,}2} = \frac{7{,}2}{n}$ ***f)*** $\frac{n}{0{,}5} = \frac{4}{8}$

6 Un coche consume 5,2 L de combustible por cada 100 km. Plantea una proporción y calcula:

a) Los litros que consumirá en 250 km.

b) Los kilómetros que recorrerá con 78 L.

7 Fátima practica el tiro con arco y hace diana 2 de cada 3 veces. Con ese grado de acierto:

a) ¿Cuántos tiros tendrá que realizar para dar en el blanco 16 veces?

b) ¿Cuántas veces dará en la diana con 15 tiros?

¿Lo has entendido?

8 ¿Se puede afirmar que toda fracción es una razón? ¿Y que toda razón es una fracción?

9 Dadas dos cantidades, *a* y *b*, ¿es igual la razón entre *a* y *b* que la que hay entre *b* y *a*?

113

2 Magnitudes directamente proporcionales

Sabiendo que 4 barras de pan cuestan 2 €, completa la tabla:

Número de barras	2	4	8
Precio (€)		2	

Como la relación entre el número de barras y su precio es directamente proporcional, entonces:

- 2 barras costarán la mitad que 4 barras.
- 8 barras costarán el doble que 4 barras.

Número de barras	2	4	8
Precio (€)	1	2	4

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si, al multiplicar o dividir una cantidad de una ellas por un número, la cantidad correspondiente a la otra queda también multiplicada o dividida por el mismo número.

EJEMPLO

El precio que se paga por adquirir unas entradas de cine es directamente proporcional al número de entradas que se compra.

En efecto, si por 2 entradas se pagan 12 €, por 4, que representan el doble, se pagará el doble, 24 €; por 6 entradas, el triple, etcétera.

Número de entradas	2	4	6	12
Precio (€)	12	24	36	72

Si dos magnitudes, A y B, son directamente proporcionales, se cumple que:

- El cociente entre cualquier valor de la magnitud A y su correspondiente valor de la magnitud B siempre es el mismo:

A	a	b	c
B	a'	b'	c'

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots$$

- Dos cantidades cualesquiera de la magnitud A siempre forman proporción con sus correspondientes cantidades de la magnitud B:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

EJEMPLO

La siguiente tabla muestra la cantidad de huevos necesarios para hacer un bizcocho según la cantidad de harina empleada. Comprueba si estas dos magnitudes son directamente proporcionales.

Harina (g)	250	500	1 000
Número de huevos	2	4	8

Fíjate en que se cumple que:

$$\frac{250}{2} = \frac{500}{4} = \frac{1\,000}{8} = 125$$

Lo que significa que se emplea un huevo por cada 125 g de harina.

También se puede observar que:

$$\frac{250}{500} = \frac{2}{4} \text{ o que } \frac{500}{1\,000} = \frac{4}{8}$$

Cualquiera de las dos afirmaciones anteriores permite afirmar que el número de huevos es directamente proporcional a la cantidad de harina empleada.

¡No te equivoques!

Hay magnitudes que a simple vista parecen directamente proporcionales porque, al aumentar una, también se incrementa la otra, y, sin embargo, no lo son, pues no lo hacen en la misma proporción.

Observa, por ejemplo, la siguiente tabla, en la que se muestra la edad de un bebé y su peso:

Edad (meses)	3	6	12
Peso (kg)	6	7,5	10

Aunque al aumentar la edad, aumenta también el peso, no lo hace en la misma proporción:

$$\frac{3}{6} \neq \frac{6}{7,5} \neq \frac{12}{10}$$

Fíjate en que, cuando dobla la edad, no duplica el peso. Por tanto, la edad y el peso del bebé no son directamente proporcionales.

Actividades

1 Copia y completa las tablas y contesta:

a) En una papelería venden cajas de 12 pinturas.

Número de cajas	1	2	3	9
Número de pinturas	12			

¿Es el número de pinturas directamente proporcional al número de cajas?

b) Un grifo abierto arroja 6 L de agua en 4 min.

Tiempo (min)	2	4	8	12
Agua (L)		6		

¿Es la cantidad de agua arrojada directamente proporcional al tiempo que está abierto el grifo?

c) Cuatro personas, trabajando al mismo ritmo, tardan 12 h en levantar una valla.

Número de personas	1	2	4	8
Tiempo (h)			12	

Indica si el tiempo empleado en instalar la valla es directamente proporcional al número de personas que trabajan en ella.

2 ¿Cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales?

a) La velocidad a la que circula un vehículo y el tiempo que tarda este en hacer un recorrido.

b) La longitud del lado de un cuadrado y su perímetro.

c) La medida del lado de un cuadrado y su área.

d) La talla de una camisa y su precio.

e) El número de folios de un documento y su grosor.

f) La cantidad de arroz necesaria para hacer una paella y el número de raciones obtenidas.

g) El número de socios de un club y el dinero que recauda este por las cuotas anuales.

h) La velocidad a la que circula un vehículo y el espacio recorrido en un tiempo determinado.

3 Un supermercado tiene la promoción «pague 2 y llévese 3». Si un bote de tomate cuesta 0,60 €, completa en tu cuaderno la tabla y contesta:

Número de botes	1	2	3	4	5	6
Precio (€)	0,60					

a) ¿Cuánto costarán 12 botes?

b) Señala si el precio es directamente proporcional al número de botes comprados con esta oferta.

4 Cierta compañía de telefonía cobra 0,06 € por establecimiento de llamada y 0,03 €/min a partir de los 2 primeros minutos, que son gratis. Completa la tabla en tu cuaderno e indica si el coste de una llamada es directamente proporcional a su duración:

Tiempo (min)	1	2	3	4
Precio (€)				

5 Copia y completa estas tablas para que las magnitudes *A* y *B* sean directamente proporcionales:

a)

A	3	4	7	
B		10		27,5

b)

A	1	2,5	3	
B		8		4

c)

A	0,1	0,2	0,3	
B			0,15	2

6 Si en una receta de menestra para 6 personas se necesitan 300 g de verduras, averigua las cantidades correspondientes para 2, 4, 10 y 12 comensales.

7 Si en una calle se han plantado 4 árboles en 15 m, calcula cuántos se deben plantar en 45 m de calle de modo que el número de árboles y la longitud de la calle sean directamente proporcionales.

¿Lo has entendido?

8 Copia y completa la tabla sabiendo que son magnitudes directamente proporcionales.

A	2	6		
B		9	18	27

9 ¿Se puede asegurar que dos magnitudes son directamente proporcionales si, al aumentar una, se incrementa también la otra?

10 Si dos magnitudes son directamente proporcionales y a una cantidad de una de ellas se le suman 10 unidades, ¿aumentará también en 10 unidades la cantidad correspondiente a la otra?

115

3 Problemas de proporcionalidad directa

En muchas ocasiones nos encontramos ante problemas de proporcionalidad directa. En ellos se conoce el valor de una de las magnitudes y el correspondiente valor de la otra, y hay que hallar el que corresponde a otro valor de la primera.

Una vez comprobado que se trata realmente de magnitudes directamente proporcionales, este tipo de problemas se puede resolver de dos formas:

- Por **reducción a la unidad.**
- Planteando una proporción o **regla de tres.**

3.1. Reducción a la unidad

Consiste en determinar el valor que le corresponde a una sola unidad de una de las dos magnitudes. Conociéndolo, se puede averiguar el que le corresponde a cualquier otro.

EJEMPLO

Si ayer pagué 60 céntimos por 5 chicles, ¿cuánto me hubieran costado 8 chicles?

En este problema se distinguen dos magnitudes directamente proporcionales: el número de chicles y su precio.

1. Se calcula el precio de 1 chicle:

$$60 : 5 = 12 \text{ cent}$$

2. Se calcula el precio de 8 chicles:

$$8 \cdot 12 = 96 \text{ cent}$$

Por tanto, 8 chicles cuestan 96 céntimos de euro.

3.2. Regla de tres

Consiste en plantear una proporción entre la razón de dos cantidades de una de las magnitudes y la de las dos cantidades correspondientes de la otra magnitud.

EJEMPLO

El problema anterior se resuelve con una regla de tres de la siguiente manera:

Número de chicles	Precio (cent)
5	60
8	n

$$\frac{5}{8} = \frac{60}{n} \Rightarrow n = \frac{8 \cdot 60}{5} = 96 \text{ cent}$$

Por tanto, 8 chicles cuestan 96 céntimos de euro.

¡No te equivoques!

En el enunciado de un problema de proporcionalidad directa, los datos correspondientes a una misma magnitud pueden estar expresados en cualquier unidad de medida; sin embargo, a la hora de resolverlo, todos tienen que estar en la misma unidad.

Actividades

1 Resuelve los siguientes problemas por el método de reducción a la unidad:

a) Si el envío de 3 paquetes iguales en una empresa de mensajería cuesta 21 €, ¿cuánto habrá que pagar por enviar 20 paquetes?

b) Si en 10 cartones de huevos entran 240 huevos, ¿cuántos huevos habrá en dos cartones y medio?

c) Un pollo que pesa 2 kg y 100 g cuesta 4,62 €. ¿Cuál será el precio de otro pollo que pesa 2 kilos y medio?

d) Si un ciclista tarda 2 horas y media en recorrer 100 km, ¿cuánto tiempo empleará en cubrir 120 km si va a la misma velocidad?

2 Resuelve los siguientes problemas planteando una proporción o regla de tres:

a) Si un coche consume 40,5 L de gasolina en 750 km, ¿cuánto consumirá en 500 km?

b) Si en 4 bandejas caben 112 pasteles, ¿cuántas bandejas se necesitarán para colocar 21 docenas de pasteles?

c) Si 200 g de jamón cuestan 3,60 €, ¿cuánto costará un kilo y medio?

d) Si una persona recorre 16 m al dar 20 pasos, ¿cuántos pasos necesitará para avanzar 500 m?

3 Alejandro compra 1,4 kg de peras por 1,75 €. ¿Cuánto le costarán 2 kg? ¿Y 2,5 kg? ¿Y 3 kg? Antes de responder, piensa qué estrategia es más conveniente para resolver este problema: la reducción a la unidad o una regla de tres.

4 Tres bolígrafos iguales le han costado a Celia 2,40 €.

a) ¿Cuánto tendrá que pagar por 8 bolígrafos?

b) ¿Cuántos bolígrafos podrá comprar con 8 €?

5 Con un determinado grifo se ha llenado un depósito de 120 L en 8 min.

a) ¿Cuánto tardará en llenar un depósito de 600 L?

b) ¿Cuántos litros arrojará dicho grifo en tres cuartos de hora?

6 Una ruta de 20 km mide 40 cm en un plano.

a) ¿A cuántos kilómetros equivaldrá un recorrido que abarca en el plano 15 cm?

b) ¿Cuántos centímetros medirá en el plano un camino de 4 km?

7 El kilo de carne picada de ternera está a 7,82 €, y el de filetes de pollo, a 6,15 €. ¿Cuánto hay que pagar por 750 g de carne picada de ternera y 1,245 kg de filetes de pollo?

8 Si un cuarto de kilo de magdalenas vale 2 € y 30 cent, ¿cuánto cuestan 800 g?

9 Por 350 g de lacón se pagan 3,57 €. ¿A qué precio está el kilo de lacón?

10 Lidia ha recorrido 30 km durante hora y media. ¿Qué distancia habrá recorrido en 30 min más manteniendo el mismo ritmo?

11 Una familia visita un parque de atracciones y paga 109 € y 20 cent por 3 entradas de niño y 4 de adulto. Si la entrada de adulto cuesta 18 €, ¿cuál es el precio de la entrada de niño?

12 Begoña echa 800 L de gasoil en el depósito de su casa por 384 €. Si el litro de gasoil sube 2 cent, ¿cuántos litros podrá repostar por el mismo dinero?

¿Lo has entendido?

13 ¿Son distintas las operaciones que tienes que hacer para resolver un problema por reducción a la unidad que para solucionarlo mediante una regla de tres o se realizan las mismas operaciones, pero en distinto orden?

14 Un vehículo tarda 20 min en recorrer 30 km. ¿Qué estrategia utilizarías para averiguar cuánto tiempo empleará en cubrir 270 km por reducción a la unidad: hallar cuántos minutos tarda en recorrer 1 km o cuántos kilómetros recorre en 1 min?

15 Yago pagó 1,56 € por 300 g de queso. Indica si con alguna de estas reglas de tres se puede averiguar cuánto le costarían 1,2 kg de queso:

a) 1,56 —— 300
1 200 —— x

b) 1,56 —— 300
x —— 1,2

16 Una máquina fabrica 20 piezas en 30 min; indica qué se calcula mediante estas reglas de tres:

a) 20 —— 30
x —— 90

b) 20 —— 30
90 —— x

117

4 Porcentajes

4.1. Significado del porcentaje

De 25 alumnos que tiene el grupo de 1.º A de un instituto, 14 declaran cepillarse los dientes después de cada comida, mientras que en 1.º B lo hacen 18 de sus 30 alumnos. ¿Cuál de los dos grupos de alumnos cuida mejor su higiene bucal?

Como las dos clases tienen distinto número de alumnos, para poder comparar los datos obtenidos, se expresan los resultados en forma de porcentajes:

- 1.º A: $\frac{14}{25} = 0{,}56$ ▶ 56 %
- 1.º B: $\frac{18}{30} = 0{,}60$ ▶ 60 %

En 1.º B, el porcentaje de alumnos que se cepillan los dientes después de cada comida es mayor.

Un **porcentaje** o **tanto por ciento** es una forma de expresar una razón que indica cuántas unidades hay de una magnitud por cada 100 unidades.

Los porcentajes se expresan con el signo %.

Para indicar una razón en forma de porcentaje, se calcula la expresión decimal de la misma (tanto por uno) y se multiplica por 100.

EJEMPLO

Cuatro de los cinco últimos incendios forestales que han asolado una región han sido provocados. ¿Qué porcentaje del total representan los incendios provocados?

Razón		Tanto por uno		Tanto por ciento		
$\frac{4}{5}$	=	0,8	=	80 %	▶	80 de cada 100 incendios

Así pues, el 80 % de los cinco últimos incendios ha sido provocado.

4.2. Cálculos con porcentajes

- **Para calcular un tanto por ciento de una cantidad,** se multiplica dicha cantidad por el porcentaje expresado en forma de razón o de tanto por uno.

EJEMPLO

El 20 % de los 120 empleados de una empresa son mujeres. ¿Cuántas trabajadoras hay en esta empresa?

$20\% \text{ de } 120 = \frac{20}{100} \cdot 120 = \frac{20 \cdot 120}{100} = 24$

O bien: $20\% \text{ de } 120 = 0{,}2 \cdot 120 = 24$

Luego, en esa empresa trabajan 24 mujeres.

- **Para calcular una cantidad a partir de un tanto por ciento suyo,** se divide la cantidad conocida entre el porcentaje expresado en forma de razón o de tanto por uno.

EJEMPLO

En una empresa hay 150 mujeres, lo que representa el 15 % del total de los trabajadores. ¿Cuántos empleados tiene la empresa?

$15\% \text{ de } n = 150 \Rightarrow \frac{15}{100} \cdot n = 150 \Rightarrow n = 150 : \frac{15}{100} = \frac{150 \cdot 100}{15} = 1\,000$

O bien: $15\% \text{ de } n = 150 \Rightarrow 0{,}15 \cdot n = 150 \Rightarrow n = 150 : 0{,}15 = 1\,000$

Por tanto, la empresa tiene 1 000 empleados.

Cálculo mental

- El **1 %** de una cantidad se calcula dividiéndola entre 100:

  1 % de 250 = 250 : 100 = 2,5

- El **10 %** de una cantidad se calcula dividiéndola entre 10, ya que $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$:

  10 % de 45 = 45 : 10 = 4,5

- El **25 %** de una cantidad se calcula dividiéndola entre 4 (o dos veces entre 2), ya que $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$:

  25 % de 16 = 16 : 4 = 4

- El **50 %** de una cantidad se calcula dividiéndola entre 2, ya que $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$:

  50 % de 120 = 120 : 2 = 60

Actividades

1 Expresa en tanto por uno y en tanto por ciento estas razones:

a) $\frac{3}{4}$ ***b)*** $\frac{2}{5}$ ***c)*** $\frac{1}{2}$ ***d)*** $\frac{5}{5}$ ***e)*** $\frac{3}{2}$ ***f)*** $\frac{1}{20}$ ***g)*** $\frac{2,5}{10}$

2 Escribe en forma de porcentaje los datos de estos enunciados:

a) Tres de cada cuatro accidentes de tráfico podrían haberse evitado reduciendo la velocidad.

b) Ocho de cada diez jóvenes manifiestan estar informados de los efectos nocivos del tabaco.

c) Tres de cada cinco ofertas de trabajo publicadas en un diario requieren conocimientos de inglés.

d) Un tercio de las mujeres encuestadas opina que su pareja colabora poco en las tareas domésticas.

3 Dibuja un cuadrado y sombrea el porcentaje:

a) 20 % ***b)*** 25 % ***c)*** 50 % ***d)*** 100 % ***e)*** 80 %

4 Expresa en forma de tanto por uno:

a) 20 % ***c)*** 12,5 % ***e)*** 3 % ***g)*** 125 % ***i)*** 0,8 %

b) 4,5 % ***d)*** 200 % ***f)*** 1 % ***h)*** 25,4 % ***j)*** 0,3 %

5 Calcula:

a) 32 % de 250 ***f)*** 2,5 % de 600

b) 42 % de 40 ***g)*** 12,4 % de 50

c) 12 % de 1 500 ***h)*** 3 % de 40

d) 120 % de 90 ***i)*** 0,7 % de 250

e) 150 % de 3 750 ***j)*** 1,5 % de 23 000

6 Calcula mentalmente:

a) 1 % de 450 ***e)*** 25 % de 40 ***i)*** 1 % de 5

b) 10 % de 27 ***f)*** 50 % de 2,2 ***j)*** 10 % 820

c) 10 % de 165 ***g)*** 25 % de 10 ***k)*** 1 % de 21,5

d) 50 % de 30 ***h)*** 50 % de 250 ***l)*** 100 % de 14

7 Calcula mentalmente el 10 % de 80 y, a partir del resultado obtenido, calcula los siguientes tantos por cientos de 80. Explica cómo lo haces.

a) 5 % ***b)*** 20 % ***c)*** 15 % ***d)*** 30 % ***e)*** 60 %

8 Halla el valor de *n*:

a) El 50 % de *n* es 8. ***d)*** El 120 % de *n* es 96.

b) El 15 % de *n* es 7,5. ***e)*** El 4,5 % de *n* es 112,5.

c) El 7 % de *n* es 8,75. ***f)*** El 35,8 % de *n* es 71,6.

9 De los 150 documentales emitidos en una cadena de televisión en un año, 120 son de naturaleza. ¿Qué tanto por ciento suponen?

10 De los aproximadamente 21 700 000 habitantes de Perú, 10 199 000 son indígenas. ¿Qué tanto por ciento representa la población indígena de este país?

11 Los siguientes datos se refieren a un estudio realizado para lanzar al mercado un nuevo refresco. Expresa los resultados mediante porcentajes:

- Gusta mucho: 20
- No gusta: 15
- Gusta: 40
- Resulta desagradable: 5

12 El 80 % de los 15 000 estudiantes que se presentaron a la prueba de acceso a la universidad ha aprobado. ¿Cuántos alumnos han superado la prueba?

13 El 5 % de las 120 plazas de una oposición se reservan para discapacitados. ¿Cuántas plazas hay reservadas por este concepto?

14 En un jardín se han plantado 125 arbustos, de los cuales el 20 % son durillos, y el resto, aligustres. ¿Cuántos aligustres se han plantado?

15 En un parlamento han votado una propuesta 240 diputados. Si el 70 % ha votado a favor, y el 25 %, en contra, ¿cuántos diputados se han abstenido?

16 En una clase han aprobado un control de Lengua 18 alumnos, lo que representa el 60 %. ¿Cuántos alumnos tiene la clase?

17 Se ha pintado el 88 % de una pared. Si aún quedan por pintar 3 m^2, ¿qué superficie tiene la pared?

¿Lo has entendido?

18 El 20 % de los alumnos de una clase practican habitualmente fútbol; el 15 %, baloncesto; el 18 %, gimnasia rítmica, y el 40 %, otros deportes. ¿Hay estudiantes en esa clase que no practican ningún deporte?

19 ¿Cuál es el 100 % de un número, *a*?

20 Si el *x* por ciento de un número es mayor que dicho número, ¿cómo tiene que ser *x*?

21 Un equipo de balonmano ha perdido el 20 % de los partidos que ha disputado, ha ganado el 50 % y ha empatado el resto. ¿Cuál de estos gráficos representa los resultados?

a) ***b)*** ***c)***

119

5 Problemas de disminuciones y aumentos porcentuales

¿Cuál es el precio final de un pantalón cuya etiqueta marca 55 €?

Si la tienda hace un 30 % de descuento, el cliente solo paga el 70 %. Por tanto, el precio final será:

70 % de 55 = 0,70 · 55 =
= 38,50 €

En los problemas en los que se aplica un porcentaje de descuento o de aumento sobre una cantidad intervienen las siguientes cantidades:

- La cantidad inicial sobre la que se aplica el descuento o el aumento.
- El porcentaje de descuento o aumento que se aplica.
- La cantidad que se va a descontar a la inicial o en la que se va a aumentar esta.
- La cantidad resultante.

5.1. Disminución porcentual

Existen dos métodos distintos para calcular la cantidad final que resulta al **disminuir** una cantidad inicial en un porcentaje determinado:

- Se calcula primero la disminución y se resta a la cantidad inicial.
- Se aplica a la cantidad inicial el 100 % menos el porcentaje dado.

EJEMPLO

¿Qué cantidad resulta al disminuir en un 20 % el número 30?

Observa las dos maneras de resolverlo:

Primer método	Segundo método
■ Se calcula el 20 % de la cantidad inicial: 20 % de 30 = 0,2 · 30 = 6 ■ Se resta la disminución a la cantidad inicial: 30 − 6 = 24	■ Si la cantidad inicial disminuye un 20 %, la final es el 80 % de la inicial: 100 % − 20 % = 80 % ■ Se calcula el 80 % de la cantidad inicial: 80 % de 30 = 0,8 · 30 = 24

5.2. Aumento porcentual

Si al precio del ordenador hay que añadirle el 16 % de IVA, ¿cuál es su precio final?

El precio final es el 116 % del inicial. Por tanto:

116 % de 800 =
= 1,16 · 800 = 928 €

Como en el caso anterior, para calcular la cantidad final resultante al aplicar un tanto por ciento de **aumento** a una cantidad inicial, se puede proceder de dos maneras distintas:

- Se calcula primero el aumento y se suma a la cantidad inicial.
- Se aplica a la cantidad inicial el 100 % más el porcentaje dado.

EJEMPLO

¿Qué cantidad resulta al aumentar en un 20 % el número 30?

Observa las dos maneras de resolverlo:

Primer método	Segundo método
■ Se calcula el 20 % de la cantidad inicial: 20 % de 30 = 0,2 · 30 = 6 ■ Se suma el aumento a la cantidad inicial: 30 + 6 = 36	■ Si la cantidad inicial aumenta un 20 %, la final es el 120 % de la inicial: 100 % + 20 % = 120 % ■ Se calcula el 120 % de la cantidad inicial: 120 % de 30 = 1,2 · 30 = 36

Actividades

1 El número de nacimientos de una ciudad ha descendido en un 15 % con respecto a los 1 500 nacimientos que hubo el año anterior.

a) ¿Cuántos nacimientos menos ha habido este año?

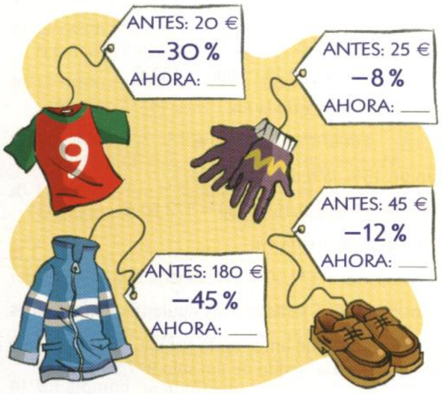
b) ¿Cuál ha sido el número de recién nacidos durante este año?

2 A Lucas y a Sofía les han dado un presupuesto por amueblar la cocina que asciende a 5 480 €. Por pagar al contado, les hacen un descuento del 3 %.

a) ¿Cuánto dinero se ahorran?

b) ¿Cuánto dinero tienen que desembolsar?

3 Completa en tu cuaderno las etiquetas de las siguientes prendas de vestir:



4 El precio del kilo de patatas ha bajado un 10 % con respecto a su precio de hace 6 meses, que era de 1,10 €. ¿Cuál es el precio actual del kilo de patatas?

5 Un ordenador cuyo precio es de 960 € está en oferta, y si se compra antes de final de mes, cuesta un 20 % menos. ¿Cuánto dinero se ahorra con esta promoción?

6 Se extrae el 40,5 % del contenido de un depósito que tiene 20 000 L de agua. ¿Cuántos litros quedan?

7 Un dependiente de una tienda de electrodomésticos asegura a Héctor haberle hecho un 15 % de descuento en la compra de un televisor que costaba 1 254 € y por el que ha pagado 1 070 €. ¿Es cierto lo que afirma el dependiente?

8 El número de ventas de un CD de música ha descendido un 12 % en un mes. ¿Cuántas copias se han vendido este mes si el pasado se vendieron 124 000 ejemplares?

9 Se ha decidido ampliar en un 12 % la superficie de un parque natural que actualmente tiene 800 ha.

a) ¿Cuántas hectáreas más tendrá el parque?

b) ¿Cuántas hectáreas tendrá en total después del aumento de superficie?

10 Un litro de aceite de oliva costaba hace un año 2,20 € y ahora es un 15 % más caro.

a) ¿Cuántos céntimos ha subido el precio del litro de aceite?

b) ¿Cuánto cuesta actualmente un litro de aceite?

11 El dueño de un establecimiento comercial quiere tener un 40 % de beneficio sobre el precio al que él compra la mercancía. Indica a cuánto debe vender un artículo que adquirió por 24 €.

12 En la carta de un restaurante figuran los precios sin el 7 % de IVA. Si una ensalada cuesta 8 € en la carta, ¿cuánto más habrá que pagar por ella?

13 ¿Cuánto habrá que pagar por la impresora del anuncio si el IVA que se le aplica es del 16 %?

IMPRESORA
120 €
(PRECIO SIN IVA)

14 El precio por persona de una semana de estancia en un balneario es de 580 € sin IVA. Una oferta para parejas vigente durante el mes de junio supone un descuento de un 30 % para el acompañante y del 40 % para niños menores. Si el IVA que hay que aplicar es del 7 %, ¿cuánto tendrá que pagar una pareja con un niño por una estancia de una semana durante el mes de junio?

¿Lo has entendido?

15 Una lavadora que cuesta 450 € tiene un 15% de descuento. Indica qué se está calculando en cada apartado:

a) $0{,}15 \cdot 450$ ***b)*** $0{,}85 \cdot 450$

16 Por pagar fuera de plazo un impuesto se cobra un 20 % de recargo. Indica con cuál de los siguientes cálculos se obtiene el importe con recargo de un recibo de 100 €:

a) $1{,}20 \cdot 100$ ***b)*** $0{,}80 \cdot 100$ ***c)*** $0{,}20 \cdot 100$

17 Una botella que contiene 120 mL de agua se rellena hasta los 240 mL. Indica en cuál de los siguientes porcentajes se ha incrementado su contenido:

a) En un 100 % ***b)*** En un 50 % ***c)*** En un 200 %

121

ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Para resolver algunos problemas, hay que probar con casos particulares y después generalizar.

Problema

El dueño de la empresa en la que trabaja Aurora le comunica que, como el negocio va muy bien, le va a subir el sueldo un 15%. Unos meses después le dice que, debido a la disminución de las ventas, se ve obligado a rebajarle el sueldo en un 15%. Aurora piensa que, a fin de cuentas, va a seguir ganando lo mismo que ganaba antes de la subida. ¿Está Aurora en lo cierto?

Resolución

- Supongamos que Aurora tiene inicialmente un sueldo de, por ejemplo, 1 000 € mensuales. Observa los siguientes cálculos:
  - Si le aumentan un 15%, la subida asciende a:

    $$15\% \text{ de } 1\,000 = 0{,}15 \cdot 1\,000 = 150 \text{ €}$$

    Después de la subida el sueldo se queda en:

    $$1\,000 + 150 = 1\,150 \text{ €}$$

  - Si después le rebajan un 15%, la reducción es de:

    $$15\% \text{ de } 1\,150 = 0{,}15 \cdot 1\,150 = 172{,}50 \text{ €}$$

    Así, tras la bajada, el sueldo se queda en:

    $$1\,150 - 172{,}50 = 977{,}50 \text{ €}$$

- Analizando los resultados obtenidos, se llega a las siguientes conclusiones:
  - Al final, Aurora ganaría menos que antes de la subida. Su sueldo, que inicialmente eran 1 000 €, acabaría siendo de tan solo 977,50 €.
  - La cantidad de la subida salarial y la del recorte no es la misma, a pesar de que sí lo es el porcentaje de subida y reducción. Esto es debido a que la cantidad a la que se le aplica el 15% es distinta: 1 000 en el caso del aumento y 1 150 en el del descuento.
- Lo mismo le hubiera sucedido a Aurora si se hubiese partido de otro sueldo inicial: su salario siempre se vería modificado a la baja.

Otros problemas

1. Tania compra un ordenador en la tienda de un amigo. Le hacen un 30% de descuento, pero tiene que pagar el 16% de IVA. ¿Qué preferirá Tania: que le calculen primero el descuento y le apliquen después el IVA, o al revés?
2. Si el presupuesto en actividades culturales de un ayuntamiento ha aumentado un año en un 10% y ha disminuido al año siguiente en un 15%, ¿se puede considerar que en estos dos años ha habido una reducción presupuestaria total del 5%?
3. Calcula el porcentaje de disminución del ejercicio anterior del ayuntamiento del problema 2.
4. A Íñigo le suben el sueldo un 5% al finalizar el primer año de contrato, y un 4%, al concluir el segundo año. ¿Se puede considerar que al término del segundo año ganará un 9 % más que cuando empezó a trabajar?
5. Calcula qué tanto por ciento de aumento sobre el sueldo inicial tendrá Íñigo al finalizar el segundo año.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

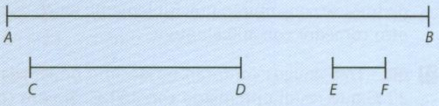
Razón y proporción

1 Un terreno rectangular mide 12 m de ancho por 30 m de largo.

a) Expresa la razón entre el largo y el ancho del terreno. ¿Cuántos metros de largo mide por cada metro de ancho?

b) Expresa la razón entre el ancho y el largo del terreno. ¿Cuántos metros de ancho mide por cada metro de largo?

2 Mide los segmentos y completa en tu cuaderno:



a) La razón entre el segmento *AB* y el *CD* es ______. El segmento *AB* es ______ veces el segmento *CD*.

b) La razón entre el segmento *CD* y el *AB* es ______. El segmento *CD* es ______ veces el segmento *AB*.

c) La razón entre el segmento *CD* y el *EF* es ______. El segmento *CD* es ______ veces el segmento *EF*.

d) La razón entre el segmento *EF* y el *CD* es ______. El segmento *EF* es ______ veces el segmento *CD*.

3 Expresa en forma de razón y de tanto por uno la relación de cada apartado:

a) Si por cada 8 personas se emplean 2 kg de macarrones, ¿qué relación hay entre la cantidad de macarrones y el número de personas?

b) Un alumno ha aprobado 9 asignaturas de las 12 que cursa. ¿Qué relación hay entre el número de asignaturas aprobadas y cursadas?

c) A unas oposiciones se presentan 1 500 personas para cubrir 50 plazas. ¿Qué relación hay entre el número de opositores y el de plazas?

d) En el mes de abril ha llovido durante 12 días y ha hecho sol 18 días. ¿Qué relación ha habido entre los días soleados y los lluviosos?

4 En una empresa hay 8 mujeres trabajando por cada 2 hombres.

a) ¿Cuántos hombres hay por cada mujer?

b) ¿Cuántas mujeres hay por cada hombre?

c) ¿Cuál es la razón que expresa el número de mujeres trabajando en esa empresa con respecto al total de empleados?

5 En una urna hay 4 bolas rojas, 2 bolas verdes y 6 bolas negras. Diseña otra urna con 18 bolas en la que la razón entre las bolas de cada color y el total de bolas sea la misma.

6 Escribe dos números cuya razón sea:

a) 3 *b)* 0,75 *c)* 1,8 *d)* 10

7 Un bote de 3,5 kg de pintura cuesta 14 €, mientras que el de 5 kg cuesta 20 €. ¿Cuál de los dos es más rentable?

8 Un terreno rectangular mide 20 m de ancho por 50 m de largo. Si otro terreno tiene 18 m de ancho, ¿cuánto debe medir de largo para que los dos terrenos tengan la misma forma?

9 Indica cuáles de las siguientes parejas de razones forman proporción:

a) $\frac{2,5}{8}$ y $\frac{10}{32}$ *b)* $\frac{5}{4}$ y $\frac{10}{9}$ *c)* $\frac{0,2}{0,5}$ y $\frac{0,8}{2}$

10 Completa en tu cuaderno:

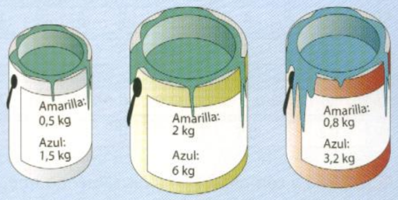
a) 3 es a 4 como 7,5 es a ______.

b) 5 es a ______ como 10 es a 5.

c) ______ es a 1,8 como 5 es a 9.

d) 0,4 es a 0,6 como ______ es a 2,4.

11 Para obtener pintura verde, se han hecho estas tres mezclas:



bote 1 bote 2 bote 3

a) ¿Se obtiene el mismo tono verde en los tres botes?

b) ¿Cuál tiene un tono verde más oscuro?

c) ¿Cuántos kilos de pintura azul es preciso mezclar con 2,5 kg de pintura amarilla para obtener el mismo tono que en el bote 1?

d) Con 4 kg de pintura amarilla, ¿cuántos kilos del mismo tono que el del bote 3 se pueden obtener?

12 Para hacer la masa de un bizcocho de 2 kg se han empleado 1,5 kg de harina y el resto de azúcar.

a) ¿Cuántos kilos de harina por cada kilo de azúcar se emplean en la preparación de la masa?

b) ¿Qué cantidad de azúcar se necesita por cada kilo de harina?

c) ¿Cuánta harina es necesaria por kilo de masa? ¿Y de azúcar?

d) Si se quiere preparar 5 kg de masa, ¿qué cantidad de harina y de azúcar se precisa?

123

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

13 Escribe dos números que formen proporción con 6 y 15.

14 Dada la razón entre dos números, *a* y *b*, averigua si guarda proporción con la razón de los siguientes números:

a) Se multiplican *a* y *b* por la misma cantidad.

b) Se dividen *a* y *b* por la misma cantidad.

c) Se suma la misma cantidad a ambos.

d) Se resta la misma cantidad a ambos.

Magnitudes directamente proporcionales

15 Deduce la relación que hay entre los valores de cada tabla. Averigua el valor que falta e indica en qué casos hay relación de proporcionalidad directa:

a)

1	2	3	4	5
1	4	9	16	

b)

1	2	3	4	5
5	10	15	20	

c)

2	4	6	8	10
5	7	9	11	

d)

2	5	10	15	20
0,2	0,5	1	1,5	

16 Copia y completa las tablas sabiendo que *A* y *B* son magnitudes directamente proporcionales:

a)

A	*B*
1	
3	1,2
5	
	9,6
	18

b)

A	*B*
12	2
18	
	4
	7
60	

c)

A	*B*
3	3,6
4	
	6,6
10	
	24

17 Resuelve mentalmente:

a) Por 2 entradas para un concierto, Begoña ha pagado 42 €. ¿Cuánto tendría que haber pagado por 3 entradas?

b) Luis ha recorrido 240 km en 3 h. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 5 h yendo a la misma velocidad?

c) Con 4 jarras se han llenado 16 vasos. ¿Cuántos vasos se llenarán con 2 jarras?

d) En 5 paquetes han entrado 30 cromos. ¿Cuántos cromos entrarán en 3 paquetes?

18 En dar de comer al ganado, un granjero consume 20 kg de pienso en 5 días.

a) ¿Cuántos kilos de pienso gastará en 8 días?

b) ¿Para cuántos días tendrá con 6 paquetes de 40 kg de pienso?

19 Una pescadilla que pesa 1,240 kg cuesta 8,06 €.

a) ¿Cuánto costará otra que pesa 40 g menos?

b) ¿Cuánto pesa una que cuesta 1,69 € más?

20 En un comedor escolar con 200 alumnos se han consumido 400 kg de fruta en 10 días. ¿Cuántos kilos de fruta se consumirán previsiblemente en 20 días en otro comedor con 300 alumnos?

21 Tres amigos compran un décimo de lotería de 20 € que resulta premiado con 100 €. Si para comprar el décimo uno de ellos puso 10 €; otro, 8 €, y otro, 2 €, ¿cómo deben repartirse el premio?

Porcentajes

22 Calcula mentalmente:

a) 50 % de 500 ***d)*** 4 % de 200 ***g)*** 8 % de 1 000

b) 20 % de 40 ***e)*** 40 % de 800 ***h)*** 1 % de 450

c) 10 % de 150 ***f)*** 2 % de 3 000 ***i)*** 15 % de 600

23 Calcula el valor de *n* en cada caso:

a) El 40 % de 120 es *n*. ***e)*** El 40 % de *n* es 120.

b) El 5 % de 340 es *n*. ***f)*** El 5 % de *n* es 340.

c) El 0,7 % de 70 es *n*. ***g)*** El 0,7 % de *n* es 70.

d) El 12,5 % de 80 es *n*. ***h)*** El 12,5 % de *n* es 80.

24 Un hotel tiene 60 habitaciones dobles y 15 individuales. Indica en forma de porcentaje la distribución de las habitaciones.

25 De los 150 alumnos de 1.º de ESO de un instituto, 45 han aprobado todas las materias, 60 han suspendido una, 30 han suspendido dos, y el resto, más de dos. Expresa en forma de porcentaje estos resultados.

26 Los ingresos mensuales de una familia ascienden a 2 800 €. El 30 % se destina a vivienda, el 20 % a gastos de alimentación y el 10 % a la compra de ropa.

a) ¿Qué porcentaje supone el resto de los gastos?

b) ¿Cuánto dinero destinan a cada concepto?

27 El 60 % de los 1 500 visitantes de una exposición ha pagado entrada, y el resto han sido invitados. ¿Cuántos visitantes han acudido con invitación?

28 Roberto ha encestado 9 canastas, lo que supone un acierto del 45 %. ¿Cuántos tiros ha lanzado?

29 A Marisa le han subido el sueldo 45 €, lo que ha supuesto un aumento del 3 %. ¿Cuánto ganaba antes del aumento?

30 Se ha llenado el 60 % del aforo de un teatro y han quedado 46 localidades sin vender. ¿Cuántas localidades tiene el teatro?

31 Una organización humanitaria ha visto incrementado su número de socios en un 12,5 % durante el último año. Si el año pasado tenía 3 552 afiliados, ¿cuántos tiene en la actualidad?

32 Al lavarlo por primera vez, un pantalón encoge un 10 % de su medida. Si antes de lavarlo tenía 85 cm de largo, ¿cuánto medirá después?

33 Si una camiseta pasa en las rebajas de 12 € a 10,20 €, ¿qué tanto por ciento de descuento tiene?

34 Del mes anterior a este, una docena de huevos ha pasado de 1,25 € a 1,29 €, mientras que un litro de leche ha pasado de 52 cent a 54 cent. ¿Cuál de los dos alimentos ha subido más porcentualmente?

35 El 40 % de los caramelos de una bolsa son de menta; el 25 %, de limón, y el resto, de naranja. Si la bolsa contiene 28 caramelos de naranja, ¿cuántos caramelos hay en total? ¿Cuántos hay de cada sabor?

36 Por un televisor que cuesta 2 350 € se paga una entrada de 550 €, y el resto se paga en 10 plazos con un 6 % de recargo. ¿A cuánto asciende cada plazo?

37 Un pantalón cuesta 38,25 € después de aplicarle un descuento del 15 %. ¿Cuál era su precio inicial?

38 El precio de un ordenador con el 16 % de IVA incluido es de 928 €. ¿Cuánto vale sin IVA?

Lo que has aprendido

Expresar la relación existente entre dos cantidades mediante una razón

1. En una fábrica de automóviles, por cada 200 piezas fabricadas salen 5 defectuosas.

a) Expresa en forma de razón la relación entre el número de piezas defectuosas y el de piezas fabricadas.

b) ¿Cuántas piezas salen defectuosas por cada pieza fabricada?

c) ¿Cuántas piezas no defectuosas se producen por cada pieza defectuosa?

2. Un municipio con una extensión de 30 km^2 tiene 24 000 habitantes, mientras que otro de 24 km^2 cuenta con 18 000 habitantes. ¿Cuál de los dos municipios tiene mayor densidad de población?

Identificar una proporción y averiguar el término que falta

3. Averigua si 3 es a 7,5 como 8 es a 20.

4. Calcula el término que falta en cada proporción:

a) $\frac{3,5}{4} = \frac{8,4}{n}$ *b)* $\frac{n}{14} = \frac{1,2}{5,6}$

5. Se ha comprobado que 3 de cada 5 alumnos acuden al colegio sin desayunar adecuadamente.

a) Si un centro tiene 800 alumnos, ¿cuántos acudirán bien desayunados?

b) Si 150 alumnos acuden sin desayunar como es debido, ¿cuántos alumnos tendrá el centro?

c) Si 45 alumnos no han desayunado convenientemente, ¿cuántos sí lo han hecho?

Reconocer y resolver problemas de proporcionalidad directa

6. Indica si entre las magnitudes indicadas hay relación de proporcionalidad directa:

a) El número de vueltas que da la rueda de una bicicleta y la distancia que recorre.

b) El número de amigos que participan en la compra de un regalo y la cantidad de dinero que debe aportar cada uno.

7. Un automóvil recorre 30 km en 40 min.

a) ¿Cuántos kilómetros recorrerá en una hora y media manteniendo la misma velocidad?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 225 km si mantiene siempre la misma velocidad?

Interpretar y calcular porcentajes

8. Copia en tu cuaderno y completa:

a) El 12 % de 20 es ___.

b) El 2 % de ___ es 26.

c) El ___ % de 10 es 4.

9. La etiqueta de un yogur indica que contiene un 10,8 % de azúcar. Si ese yogur pesa 125 g, ¿cuántos gramos de azúcar contiene?

10. Calcula cuánto dinero te ahorras y cuánto tienes que pagar si te rebajan en un 15 % el precio de un pantalón que cuesta 50 €.

11. A Félix le suben un 20 % su paga semanal. Si hasta ahora cobraba 8 € de paga, ¿cuál será su paga después de la subida?

125

C. Actividad adicional planificada

A modo de refuerzo se prepara una cuestión que engloba diferentes situaciones para afianzar la noción de proporcionalidad. El objetivo es que los estudiantes se inicien en la asimilación de la existencia de relaciones entre magnitudes de la vida cotidiana y que identifiquen además si la relación existente entre las magnitudes es de proporcionalidad directa o inversa.

De las siguientes situaciones identifica las magnitudes involucradas, si las magnitudes están relacionadas y de ser así, el tipo de relación (directa o inversa).

- ✓ *Longitud de una cola en el cine y el número de personas que hay en la cola*
- ✓ *Las horas de trabajo y el sueldo percibido*
- ✓ *El número de gallinas y los días que pueden alimentarse dada una cantidad de grano*
- ✓ *El tiempo que está lloviendo y la cantidad de agua recogida en un cubo*
- ✓ *El número de ruedas de un camión y la velocidad máxima a la que puede ir*
- ✓ *Distancia a un objeto y el tamaño que vemos que tiene*
- ✓ *El número de carpinteros y el número de sillas que fabrican*
- ✓ *La velocidad de un tren y el tiempo que tarde en ir entre dos ciudades*
- ✓ *El tamaño del agujero de un barril y el caudal que sale del mismo*
- ✓ *El descuento que nos hacen en un producto y el importe que se paga*
- ✓ *El tiempo para construir una carretera y el número de obreros*