

IV Jornada de enseñanza de las matemáticas en Navarra

Goyo Lekuona Muxika
email:lekuona@gmail.com



Distintas formas de mostrar el mismo resultado

¿De cuantas maneras eres capaz de mostrar el valor 123456%?

$\sqrt{\text{D}}$ ▲
123456%
 $\frac{30864}{25}$

$\sqrt{\text{D}}$ ▲
123456%
 $1234\frac{14}{25}$

$\sqrt{\text{D}}$ ▲
123456%
1234,56

$\sqrt{\text{D}}$ ▲
123456%
 $1234^{\circ} 33' 36''$

$\sqrt{\text{D}}$ ▲
123456%
 $1,23456 \times 10^3$

$\sqrt{\text{D}}$ ▲
123456%
 $0,00123456 \times 10^6$

$\sqrt{\text{D}}$ ▲
123456%
 $1234,56 \times 10^0$

La comprobadora

Realiza el siguiente cálculo y comprueba si lo has hecho bien.

$$\log_2(8) - \frac{4}{7} + \frac{1 + \frac{5}{8}}{3 - \sqrt{4}}$$

Ahora comprobarlo es tan sencillo como escribirlo tal cual en la calculadora y darle al igual.

Pero... ¿y antes?

$$\log_2(8) - \frac{4}{7} + \frac{1 + \frac{5}{8}}{3 - \sqrt{4}} = \frac{227}{56}$$

$$\log_2(8) - \frac{4}{7} + \frac{1 + \frac{5}{8}}{3 - \sqrt{4}} = \frac{227}{56}$$

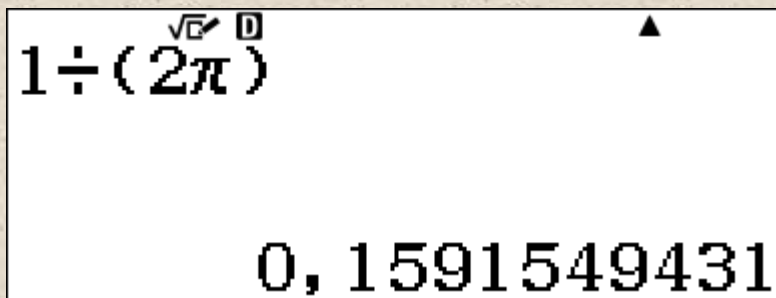
Algunos problemas que ahora tampoco lo son tanto

Cuanto es $1:2\pi$?

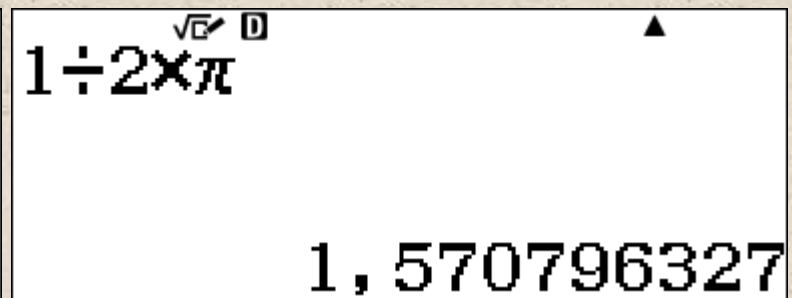
Es lo mismo que $1 : 2 * \pi$?

Como lo interpretas tú?

Que entiende la calculadora?

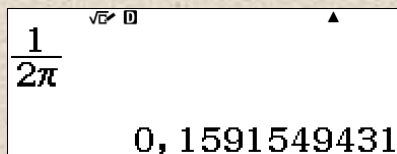


$1 \div (2\pi)$
0,1591549431

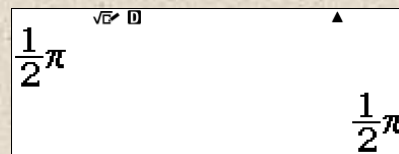


$1 \div 2 \times \pi$
1,570796327

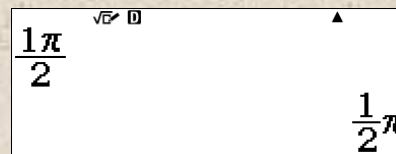
¿Y escribiéndolo como fracción, no será más fácil?



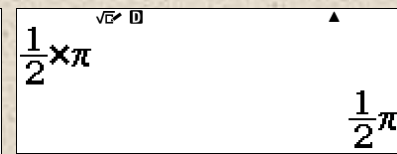
$\frac{1}{2\pi}$
0,1591549431



$\frac{1}{2}\pi$
 $\frac{1}{2}\pi$



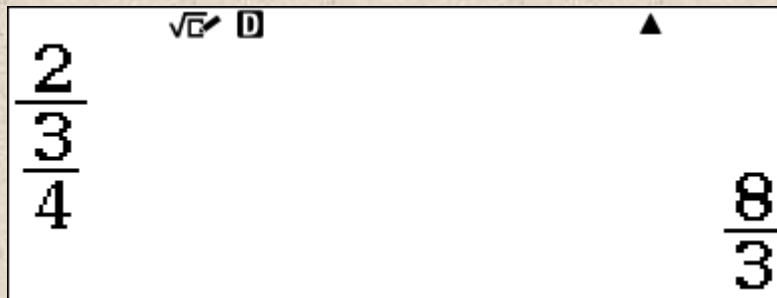
$\frac{1\pi}{2}$
 $\frac{1}{2}\pi$



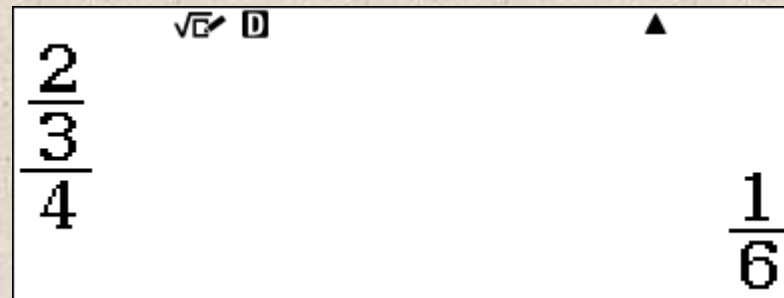
$\frac{1}{2} \times \pi$
 $\frac{1}{2}\pi$

Algunos problemas que ahora tampoco lo son tanto

Un problema con la escritura natural sería el de la fracción de fracciones incompleta.

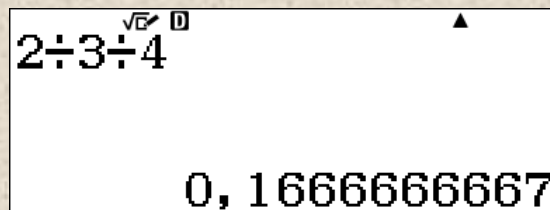


A calculator display showing the expression $\frac{2}{\frac{3}{4}}$ on the left and the result $\frac{8}{3}$ on the right. The display includes a square root icon and a zero icon at the top.

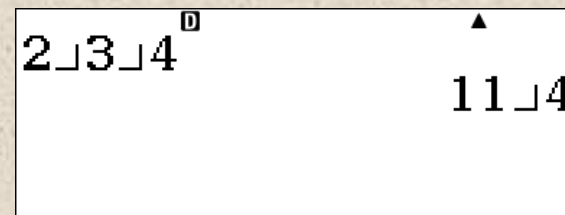


A calculator display showing the expression $\frac{2}{\frac{3}{4}}$ on the left and the result $\frac{1}{6}$ on the right. The display includes a square root icon and a zero icon at the top.

¡Pero sin la escritura natural, sería aún peor!



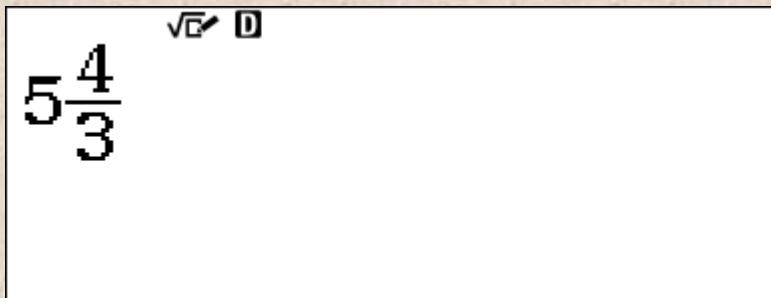
A calculator display showing the expression $2 \div 3 \div 4$ on the left and the result $0,1666666667$ on the right. The display includes a square root icon and a zero icon at the top.



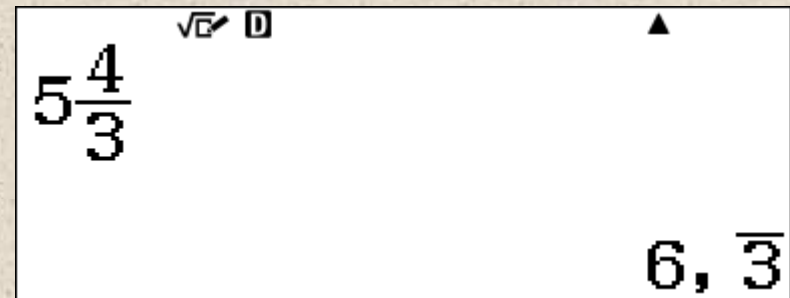
A calculator display showing the expression $2 \lrcorner 3 \lrcorner 4$ on the left and the result $11 \lrcorner 4$ on the right. The display includes a square root icon and a zero icon at the top.

Algunos problemas que ahora tampoco lo son tanto

Y ya que estamos... ¿Cuánto será en notación decimal el resultado que mostrará la calculadora?

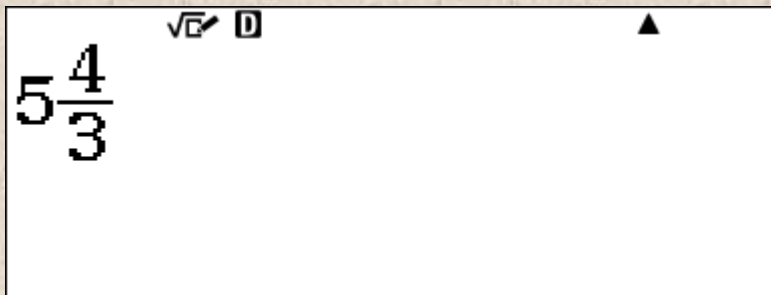


A calculator display showing the fraction $5\frac{4}{3}$. The display includes a square root symbol, a checkmark, and a zero icon in the top right corner.

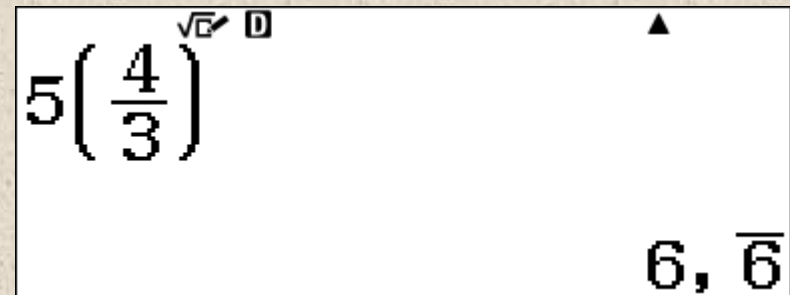


A calculator display showing the fraction $5\frac{4}{3}$ and the decimal result $6.\bar{3}$. The display includes a square root symbol, a checkmark, a zero icon, and a triangle icon in the top right corner.

Será lo mismo que en este otro caso?



A calculator display showing the fraction $5\frac{4}{3}$. The display includes a square root symbol, a checkmark, a zero icon, and a triangle icon in the top right corner.

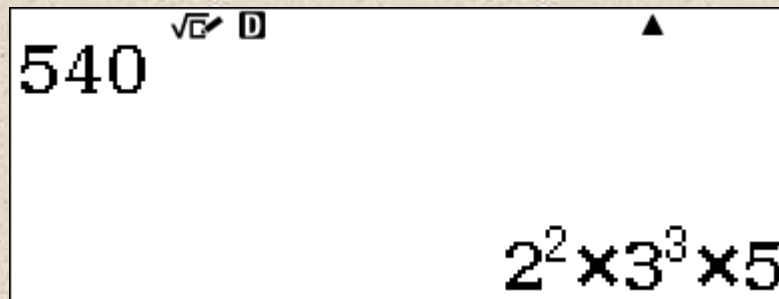


A calculator display showing the expression $5\left(\frac{4}{3}\right)$ and the decimal result $6.\bar{6}$. The display includes a square root symbol, a checkmark, a zero icon, and a triangle icon in the top right corner.

FACTORIZACIÓN EN NÚMEROS PRIMOS

Si el alumno ya ha aprendido a descomponer en factores primos, ya no tiene sentido pedirle que calcule la descomposición factorial de 540

$$540=qx$$



A calculator display showing the number 540 and its prime factorization $2^2 \times 3^3 \times 5$. The display includes standard calculator icons like a square root symbol, a power symbol, and a triangle.

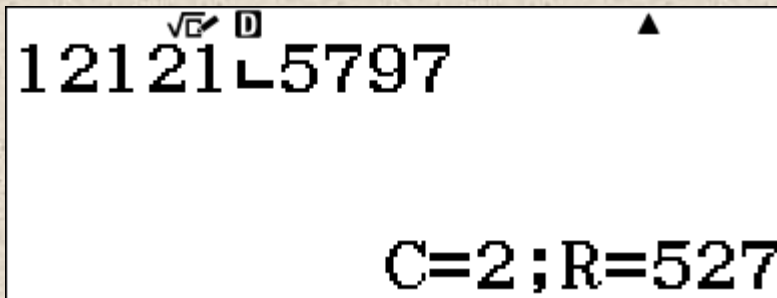
¿Y pedirle la lista de todos los divisores de 540?

¿Cuál será el número de tres cifras con mas divisores?

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE DOS NÚMEROS

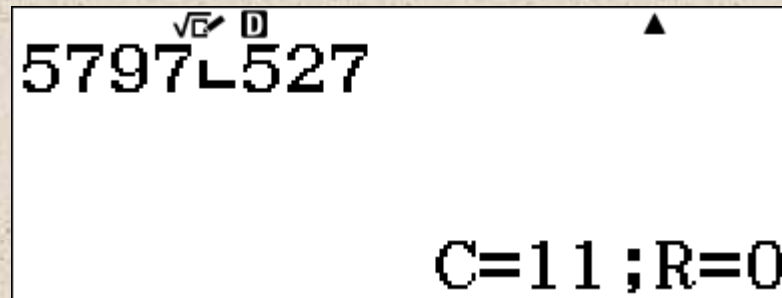
La calculadora se puede utilizar para pensar. La mejor prueba la tenemos en el “algoritmo de Aitor” para el cálculo del MCD y MCM entre 12121 y 5797

¿Por qué no se agotó el papel de la calculadora? ¿Descomposición 5797 en factores primos! de la división



12121 ÷ 5797

C=2 ; R=527



5797 ÷ 527

C=11 ; R=0

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE DOS NÚMEROS

La calculadora se puede utilizar para pensar. La mejor prueba la tenemos en el “algoritmo de Aitor” para el cálculo del MCD y MCM entre 12121 y 5797

Mira como lo calculó Aitor, con mucha cabeza y muy poca calcula

Calculator display showing a division: $\frac{5797}{12121}$ with a result of $\frac{11}{23}$. The display includes a checkmark icon and a 'D' symbol.

Calculator display showing a division: $5797 \div 11$ with a result of 527. The display includes a checkmark icon and a 'D' symbol.

Ahora que ya lo has aprendido, te enseño un nuevo camino

QO12121q)5797=-

Calculator display showing the GCD calculation: $\text{MCD}(12121, 5797)$ with a result of 527. The display includes a checkmark icon and a 'D' symbol.

QP12121q)5797=-

Calculator display showing the LCM calculation: $\text{MCM}(12121, 5797)$ with a result of 133331. The display includes a checkmark icon and a 'D' symbol.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE DOS NÚMEROS

Tres ciclistas están dando vueltas en una pista. El primero mantiene un ritmo de paso de 55 segundos, el segundo ciclista completa cada vuelta en un minuto y 10 segundos y el tercero tarda minuto y medio por vuelta.

Si han empezado a correr hace 5 minutos, dentro de cuanto tiempo volverán a pasar juntos por la línea de meta?

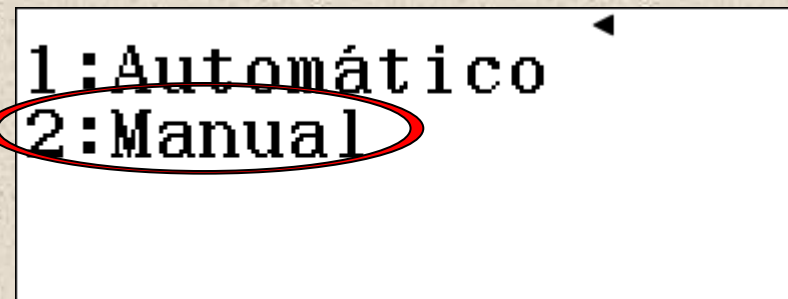
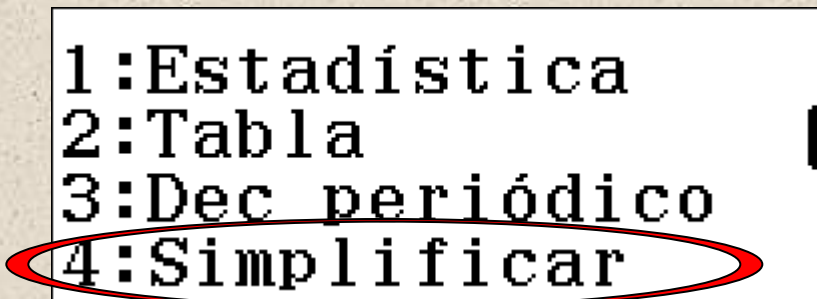
CÁLCULOS CON FRACCIONES

Ahora que hemos conocido el algoritmo de Aitor, vamos a ver nuevas funcionalidades de la calculadora Iberia.

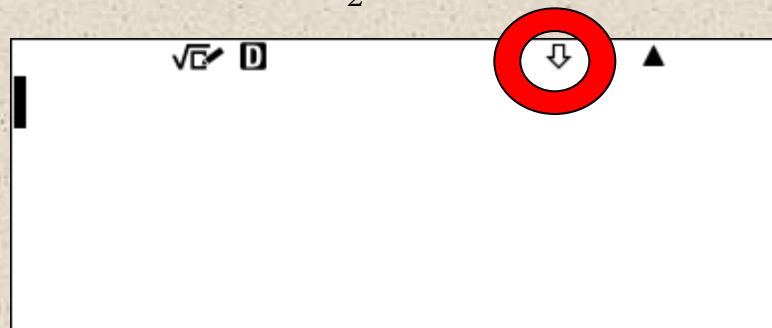
Nos sirve para repasar la simplificación de fracciones

qwR

4

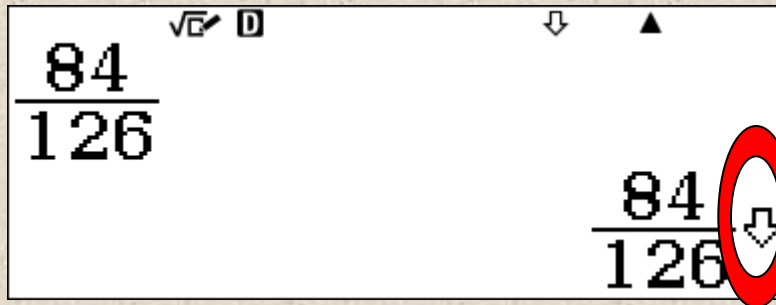


2



CÁLCULOS CON FRACCIONES

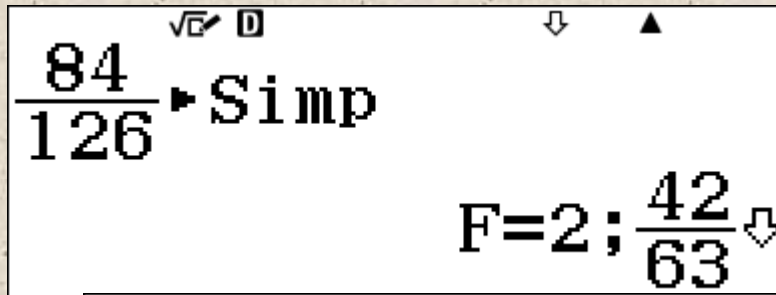
Que me cuentas de la fracción 84/126? $84 \div 126 =$



84
126

84
126

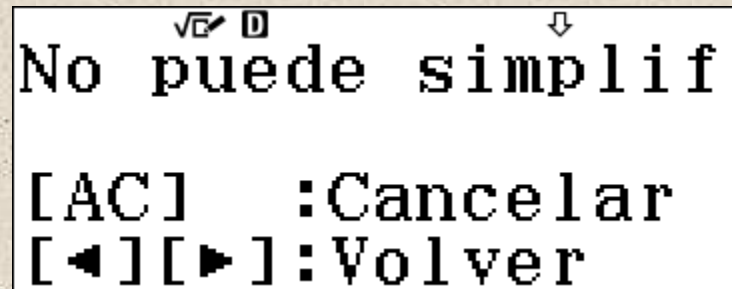
Se puede simplificar. Pero, entre cuanto?



84
126

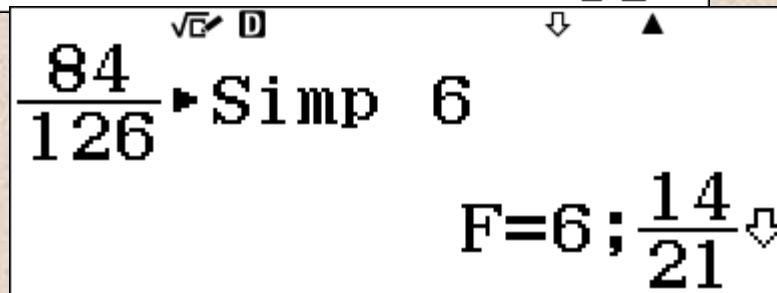
Simp

F=2; $\frac{42}{63}$



No puede simplif

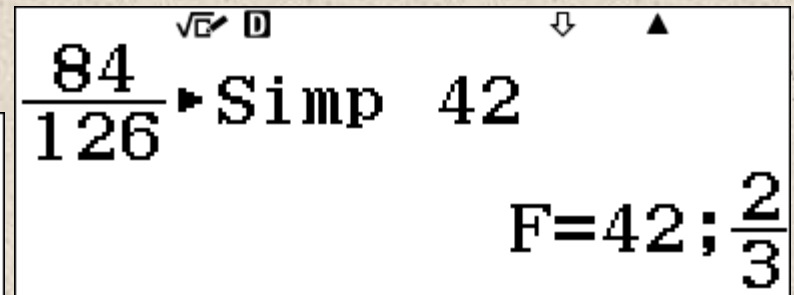
[AC] : Cancelar
[◀][▶] : Volver



84
126

Simp 6

F=6; $\frac{14}{21}$



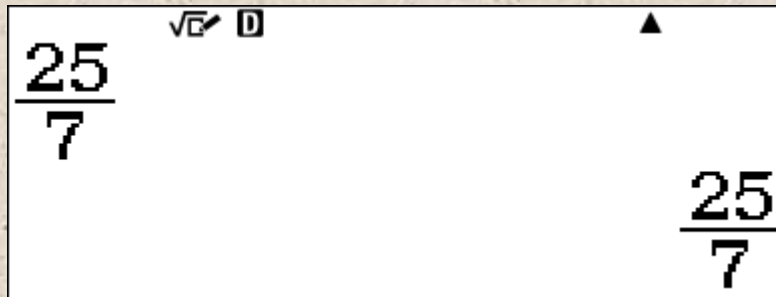
84
126

Simp 42

F=42; $\frac{2}{3}$

MÁS CÁLCULOS CON FRACCIONES

Que me cuentas de la fracción $25/7$? $25 \div 7 =$



A calculator display showing the fraction $\frac{25}{7}$ on the left and $\frac{25}{7}$ on the right. The display includes standard calculator icons at the top.

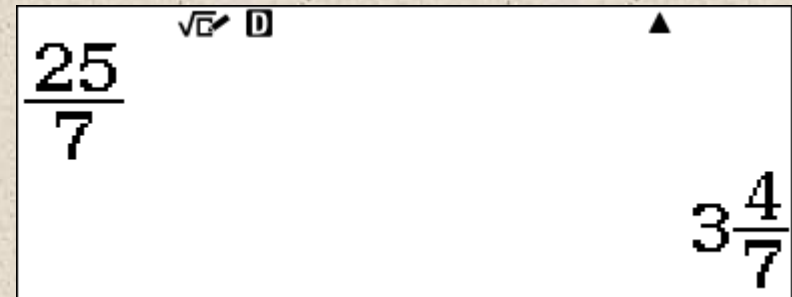
Hombre, no indica nada, pero puede dar mucho juego.

¿Como sería esa fracción escrita en modo mixto?

qn

Y eso? Sabes por que es 3 y $4/7$? Es muy sencillo. Solo tienes que realizar la división entera!

$$25 \div 7 =$$



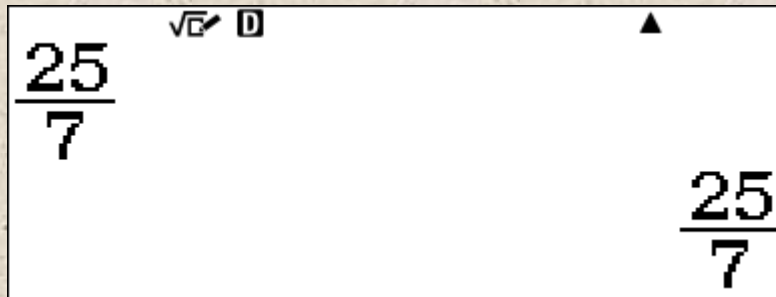
A calculator display showing the fraction $\frac{25}{7}$ on the left and the mixed number $3\frac{4}{7}$ on the right. The display includes standard calculator icons at the top.



A calculator display showing the division $25 \div 7$ on the left and the result $C=3; R=4$ on the right. The display includes standard calculator icons at the top.

MÁS CÁLCULOS CON FRACCIONES

Que me cuentas de la fracción $25/7$? $25 \div 7 =$



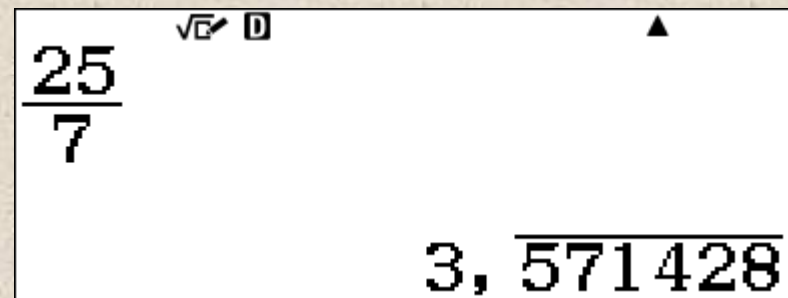
A calculator screen showing the fraction $\frac{25}{7}$ in the top-left corner. The screen also features a small icon of a calculator and a triangle in the top-right corner.

¡Que sorpresa, un número periódico puro, con su sombrero y todo! 😊
¿Que otros casos nos podemos encontrar?
¿Cuales son?

Hombre, no indica nada, pero puede dar mucho juego.

Y si seguimos dividiendo? Quiero decir si realizamos la división decimal hasta el final, que ocurrirá? Cuando pararemos?

$$25 \div 7 = n$$



A calculator screen showing the fraction $\frac{25}{7}$ in the top-left corner. Below the fraction, the decimal result $3, \overline{571428}$ is displayed. The screen also features a small icon of a calculator and a triangle in the top-right corner.

Para los asistentes al taller:

?

¿Eres capaz, usando la calcu, de crear todos los pasos de la división?

ÚLTIMOS CÁLCULOS CON FRACCIONES

También podemos utilizar la calculadora para comprobar si sabemos encontrar la fracción generatriz de los diferentes números escritos de forma decimal

$$1,25 \quad 1.25 =$$

$$1.25 \quad \frac{5}{4}$$

$$1,2\overline{6} \quad 1.2\overline{6} =$$

$$1.2\overline{6} \quad \frac{19}{15}$$

$$1,2\overline{7} \quad 1.\overline{27} =$$

$$1.\overline{27} \quad \frac{14}{11}$$

Verifiquemos

Ahora ya controlamos las diferentes formas de representar los números

De manera que ya podemos establecer relaciones entre ellos.

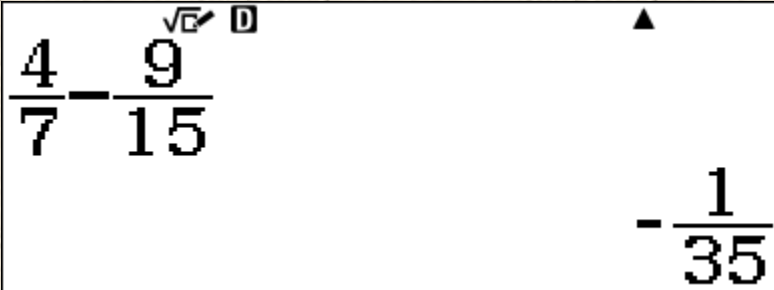
Si, si, en clase les ponemos ejercicios como ¿Qué es mayor $13/30$ o $6/15$? $5/9$ o $10/17$? $4/7$ o $9/15$?

Y si preguntásemos cosas como $2,7 < 28\%$? $41/80 = 0,51$?

¿COMO TE PUEDE AYUDAR LA CALCULADORA?

¿Qué es mayor $4/7$ o $9/15$?

$$\frac{4}{7} - \frac{9}{15} =$$



A calculator display showing the subtraction of two fractions. The top line shows $\frac{4}{7} - \frac{9}{15}$ with a small square icon above the minus sign. The bottom line shows the result $-\frac{1}{35}$.

Verifiquemos

Las nuevas calculadoras como la Classwiz nos lo ponen incluso más fácil para comprobarlo.

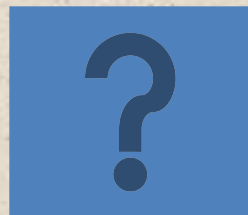
TIENE EL MENÚ w **VERIFICAR**



Con el que podemos comprobar las siguientes relaciones

1 :=	2 :≠
3 :>	4 :<
5 :≥	6 :≤

2.5Qs9\$T42.6



$$\sqrt{0} \quad 2.5\overline{9} < 2.6$$

Verifiquemos

Efectivamente la respuesta es falso, ya que ambos números son iguales

$$2.5\overline{9} = 2.6$$

Verdadero

$$2.5\overline{9} < 2.6$$

Falso

Ahora tu trabajo consistiría en enseñarles por que son el mismo número, encontrar mas ejemplos y ejercicios que les motiven y les hagan pensar. Con los números periódicos tienes un filón 😊

$$31.27\overline{65} = 31.276\overline{56}$$

$$\frac{31415}{9990} > 3.1\overline{415}$$

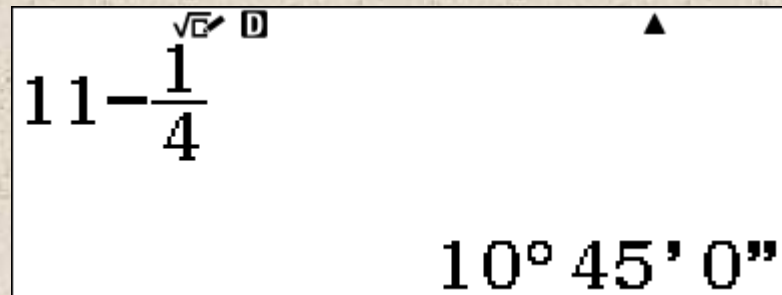
Hora de pensar

Yo a mis alumnos les he pedido que investiguen y me cuenten como funciona la tecla factorial que traen todas las calculadoras

Otra tecla que se utiliza poco y da mucho juego es la de formato sexagesimal

Como será en el formato “habitual” dos horas y cuarto? Siete horas y un quinto?

Y las once menos cuarto? $11p1a4=x$



Hora de pensar

Dos ejercicios para trabajar:

¿Cuánto tiempo son 10! Segundos?

10qu=

Vamos, trabájalo un poquito más! 😊

$$\frac{10!}{3600 \times 24 \times 7}$$

$$0^{\circ} 0' 3628800''$$
$$1008^{\circ} 0' 0''$$

$$10!$$
$$3628800$$

Dos ciclistas se encuentran en poblaciones separadas por una distancia de 112 km. Comienzan a pedalear en dirección al pueblo del otro. El primer ciclista avanza a una velocidad de 18 km/h y el segundo, más rápido, a 22 km/h

¿Al cabo de cuanto tiempo

se encontrarán?

$$\frac{112}{18+22}$$
$$2^{\circ} 48' 0''$$

MEMORIA DE RESPUESTA ANS Y PREANS

El último resultado obtenido se almacena en la memoria Ans (de respuesta). M

El penúltimo resultado obtenido se almacena en la PreAns (de respuesta previa). Q_M

La memoria Ans también la utiliza si comenzamos con una operación

Al realizar un calculo nuevo se desplazará el contenido de la memoria Ans a la memoria PreAns y guardará el nuevo resultado en la memoria Ans.

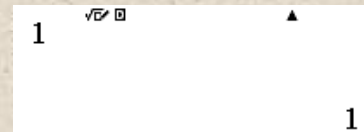
MEMORIA DE RESPUESTA ANS Y PREANS

Ejemplo de utilización. Sucesión de Fibonacci

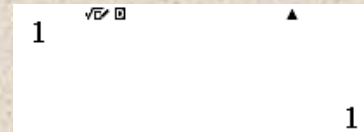
Vamos a construir la sucesión de Fibonacci con la calculadora

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

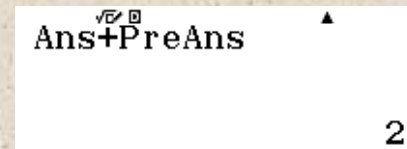
Introducimos $a_1 = 1$ 1=



Introducimos $a_2 = 1$ 1=



Y empezamos a construir la sucesión



MEMORIA DE RESPUESTA ANS Y PREANS

Ejemplo de utilización. La división

Vamos a construir la división (que comentábamos en una diapositiva anterior) utilizando la tecla ANS, las memorias y el agrupamiento de ordenes

Veremos los diferentes pasos de la división de 25 entre 7

25Ju7J_Qu`Q_Q'(QupQ_OM)O10Ju

25→C
25

7→D
7

CLD:(C-D×Ans)×10→

CLD
C=3;R=4

(C-D×Ans)×10→C
40

CLD
C=5;R=5

(C-D×Ans)×10→C
50

CLD
C=7;R=1

Fx-82SP X Iberia, pequeña pero matona

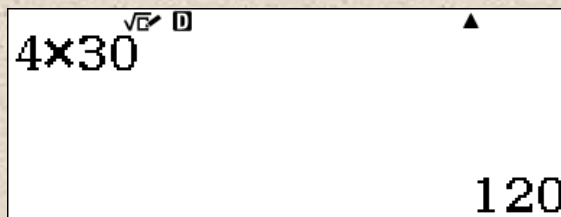
Aunque no lo trae incorporado de fábrica (como ocurre con la maravillosa 570) si aprendes a utilizarla, incluso puedes resolver sistemas lineales. Ella pone los chips y tu el cerebro 😊

En un garaje, entre coches y motos hay 30 vehículos y 108 ruedas. ¿Cuántos coches y cuantas motos hay?

Se puede resolver de muchas maneras, incluso utilizando la calculadora.

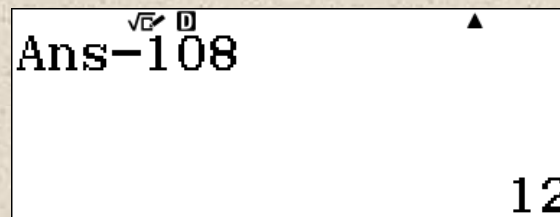
Veamos si le encuentras la “lógica” a la forma de resolverlo de este alumno.

4O30=



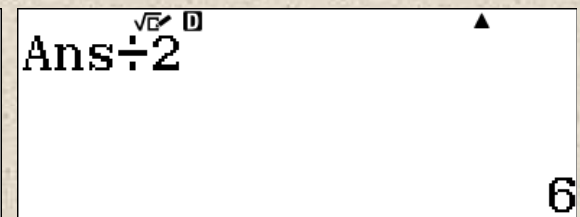
4x30
120

p108=



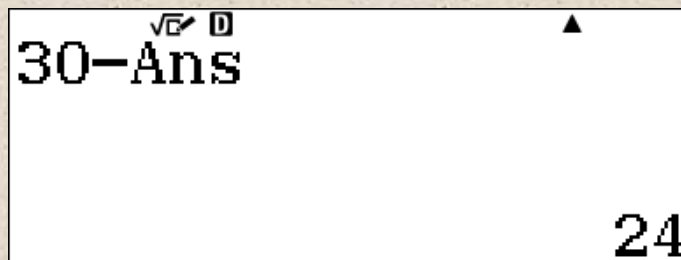
Ans-108
12

P2=



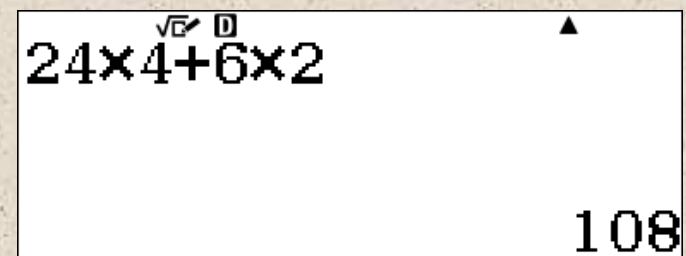
Ans÷2
6

30pM=



30-Ans
24

24O4+6O2=



24x4+6x2
108

Fx-82SP X Iberia, pequeña pero matona

En un garaje, entre coches y motos hay 30 vehículos y 108 ruedas. ¿Cuántos coches y cuantas motos hay?

Si llamamos X al número de coches, tendremos 30 – X motos, de manera que no tenemos mas que resolver la ecuación

$$4X + 2(30 - X) = 108$$

Y eso puede hacerlo nuestra amiga con la función tabla.

Primero entramos en el menu tabla w3

Y escribimos la parte izquierda de la igualdad tal cual
 $4[+2(30p[$

$$f(x) = 4x + 2(30 - x)$$

Le indicamos que el valor de la X queremos que varíe entre 1 y 30 que son las cantidades de coches a analizar

Rango tabla
Inic.:1
Final:30
Paso :1

Y ya solo nos falta encontrar el valor de X que nos interesa

x	f(x)
23	106
24	108
25	110
26	112

Fx-82SP X Iberia, pequeña pero matona

En un garaje, entre coches y motos hay 30 vehículos y 108 ruedas. ¿Cuántos coches y cuantas motos hay?

Pero puede que lo que a nosotros nos guste sea plantear sistemas, ya que tenemos dos incógnitas

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 108 \end{cases}$$

Y eso TAMBIÉN puede hacerlo nuestra amiga con la función tabla, que ahora soporta dos funciones :-O .

Claro que le tendremos que ayudar un poquito ☺ Primero debemos despejar la y en las dos ecuaciones

$$\begin{cases} y = 30 - x \\ y = \frac{108 - 4x}{2} \end{cases}$$

No ha sido difícil, ahora las escribimos una en cada función y a buscar la respuesta

$f(x) = 30 - x$	$g(x) = \frac{108 - 4x}{2}$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding: 2px;">x</th> <th style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px;">f(x)</th> <th style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px;">g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">23</td> <td style="padding: 2px;">7</td> <td style="padding: 2px;">8</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">24</td> <td style="padding: 2px;">6</td> <td style="padding: 2px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">25</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">4</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">26</td> <td style="padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">2</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	23	7	8	24	6	6	25	5	4	26	4	2
x	f(x)	g(x)															
23	7	8															
24	6	6															
25	5	4															
26	4	2															

La ecuación de segundo grado

Resuelve la ecuación $2x^2 + x - 1 = 0$ Como lo harías? Y si te dejan la calcu?

Está claro que el MENU tabla es un chollazo



$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

x	f(x)
-1	0
0	-1
1	2
2	9

-1

Vemos claramente que en $x=-1$ la ecuación tiene una solución, y la otra se encuentra entre los valores de 0 y 1

Ahora la calculadora nos deja introducir directamente valores para la x

x	f(x)
-1	0
0	-1
0,5	0
2	9

0,5

La ecuación de segundo grado

Otra forma de resolver la ecuación $2x^2 + x - 1 = 0$ mucho mas cercana a como lo hacen nuestros alumnos es utilizando la fórmula.

Esta posibilidad, teniendo las memorias, es casi inmediata. Solo necesitan guardar los coeficientes en las respectivas memorias y aprenderse la fórmula.

2 → A

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

1 → B

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

-1 → C

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

azQx+sQxdp4QzQuR2Qz=

$$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Y cambiando la suma por la resta en la ecuación, ya está la 2ª solución

\$\$\$\$\$op=

$$\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Acabemos

Así os he contado algunas de las utilidades que le hemos encontrado a esta pequeña maravilla tecnológica. Lógicamente luego depende de la utilidad o las preguntas que les hagamos a los alumnos.

Si somos de los que les preguntamos ¿cuanto es 2^{15} ? Logicamnete ahí la calculadora no les “ayuda”

Pero por el contrario si les pregunto ¿Cual es la ultima cifra de 2^{2015} ?

Hállame la solución de $2x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 28x^2 - 12x = 0$

(aquí utilizando el Teorema del resto , y la tabla de la calcu, me puedo ahorrar mucho trabajo para aplicar Ruffini)

Acabemos ≠ Ah, cavemos ≠ Acá, vemos



Para terminar os propongo un ejercicio a modo de resumen de lo aquí expuesto.

Tenéis todos calculadora. Se supone que domináis las matemáticas ...

De manera que aquí tenéis el reto:

Encuentra la ecuación de la parábola que pasa por los puntos

A(-2 ; -26)

B(3 ; -106)

y C(-1,06 ; -6,6924)

Con el único ánimo de ponerlos un poco nerviosos, os diré que mis alumnos de 4 de la E.S.O. lo resuelven en un par de minutos 😊

Eskerrik asko
Muchísimas gracias

Para comunicaros conmigo:

lekuona@gmail.com