

# “CONSIDERACIONES DE PARAXIALIDAD EN MODOS GAUSSIANOS DE ORDEN SUPERIOR”

*Carlos del Río, Ramón Gonzalo y Mario Sorolla  
E.T.S.I.I. y Telecomunicación. Universidad Pública de Navarra  
Campus Arrosadía s/n. E-31006 Pamplona, España  
Tel.: 948 169326 Fax.: 948 169169 e.m.: carlos@upna.es*

## ABSTRACT

Usually, the gaussian beam modes are assumed to be solutions of the wave equation in the free space. Nevertheless, these modes are obtained supposing some paraxial restrictions. Therefore, we will have to check if our working conditions are obeying or not these paraxial restrictions to consider these beam modes as really solutions in free space.

In other hand, applications of processing materials, surface coating, etc can use these beam modes to simplify considerably the transmission line between the generator and the final cavity.

In this paper, an original study of paraxial considerations for the higher order gaussian modes is presented.

## 1.- INTRODUCCIÓN

Hasta hoy en día, prácticamente todas las aplicaciones que utilizaban estructuras gaussianas para transportar la potencia entre dos puntos distantes a través de una guía cuasi-óptica, elegían el modo gaussiano fundamental.

Sin embargo, en determinadas aplicaciones (procesado de materiales, sinterización de cerámicas, etc), puede resultar mucho más conveniente utilizar modos de orden superior como estructura base para el transporte de la potencia, debido a que su generación es básicamente mucho más sencilla y eficiente, teniendo prácticamente las mismas posibilidades de guiado que el modo gaussiano fundamental [1].

En la mayoría de los casos, se consideran los modos gaussianos definidos en la referencia [2] como soluciones propias del espacio libre, olvidando en muchas ocasiones las condiciones de paraxialidad que se impusieron para poder solucionar la ecuación de onda, y obtener una expresión analítica cerrada para estas soluciones.

Básicamente, las restricciones que se imponen, desprecian la propagación perpendicular al eje frente a la propagación en la dirección del eje. Las estructuras gaussianas tienen un comportamiento asintótico al propagarse,

$$\text{para } z \gg z_0 = \frac{k\varpi_0^2}{2} \quad \varpi(z) = \varpi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{k\varpi_0^2}\right)^2} \approx \frac{2z}{k\varpi_0} \quad (1)$$

siendo,  $k$  el módulo del número vector de onda y  $\varpi_0$  el valor del radio mínimo del haz gaussiano.

Parece lógico pensar que un criterio de paraxialidad vendrá dado por el producto  $k\varpi_0$ , ya que será el factor que fijará la expansión de la estructura gaussiana. Así, para un valor de frecuencia fijo, los valores de  $\varpi_0$  menores tendrán una difracción mayor, estas serán las estructuras menos paraxiales, y las estructuras que más fácilmente podrían no ser soluciones completas del espacio libre.

El único problema que tiene el trabajar con un modo gaussiano de orden superior, es que la difracción es tanto mayor cuanto más grande sea el orden del modo en cuestión. Al aumentar la difracción, deberemos plantearnos si estas estructuras gaussianas siguen siendo soluciones válidas en el espacio libre.

## 2.- PARAXIALIDAD

Ante la posibilidad de utilizar los modos gaussianos de orden superior como base para transportar potencia entre dos puntos distantes, nos vemos obligados a plantearnos si estas estructuras son soluciones del espacio libre, y cuales son los límites de aplicación. Hasta hoy en día, los modos de orden superior se utilizaban únicamente como instrumento para justificar las pérdidas por difracción o las posibles deformaciones del modo fundamental.

La condición de paraxialidad se traduce en despreciar ciertos términos de orden superior, por lo que el límite de paraxialidad no está claramente definido, ya que deberemos evaluar cuando la aportación de estos términos despreciados es imprescindible para definir los modos gaussianos.

Empezaremos estudiando el caso del modo gaussiano fundamental, intentando buscar un criterio objetivo para establecer el límite de paraxialidad.

## 2.1.- MODO FUNDAMENTAL

Un método para establecer un criterio de paraxialidad puede ser el diagrama de radiación en campo lejano, ya que si la estructura es paraxial, tendrá la potencia concentrada en la zona más cercana a la prolongación del eje de la guía de onda desde la que radiamos.

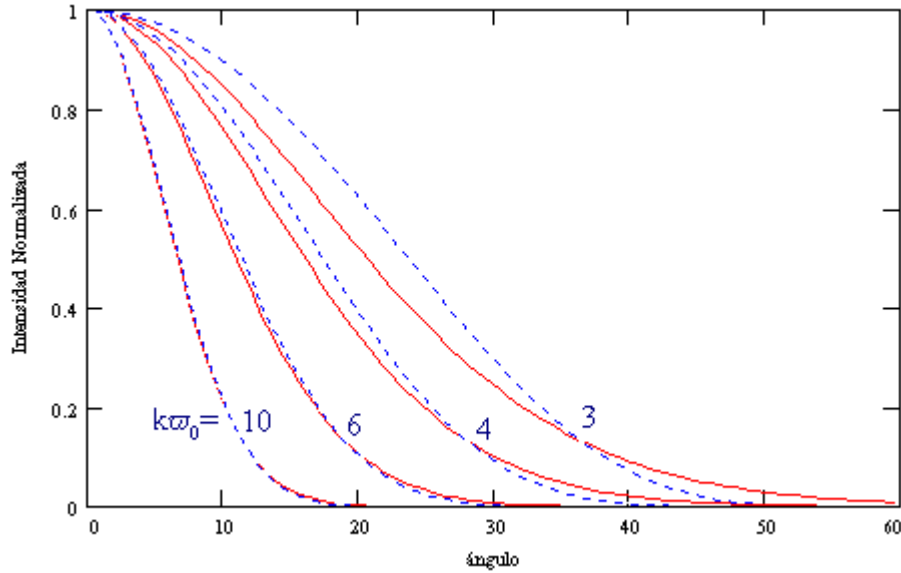
D.H.Martin, en la referencia [3], mediante un desarrollo matemático basado en expresar la radiación de una distribución de campo mediante su espectro angular, llega a una expresión exacta del campo lejano de una distribución de amplitud gaussiana y fase constante:

$$S_e(\theta) = \cos^2(\theta) \cdot e^{-2\sin^2(\theta)\left(\frac{k\varpi_0}{2}\right)^2}. \quad (2)$$

Esta expresión, al ser exacta, nos permitirá evaluar de manera bastante precisa el error que cometemos con la aproximación paraxial. En la misma referencia, se obtiene una expresión aproximada, obtenida como fruto de la suposición paraxial:

$$S_a(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \cdot e^{-2\tan^2(\theta)\left(\frac{k\varpi_0}{2}\right)^2}. \quad (3)$$

Esta misma ecuación la podemos obtener, expandiendo las expresiones de los modos gaussianos [2] sobre una esfera de radio suficientemente grande.



**Figura 1.** Distribución de intensidad normalizada en campo lejano, para una distribución gaussiana en el plano fuente. Cuando el parámetro,  $k\varpi_0$ , toma los valores 3, 4, 6 y 10. La línea continua corresponde a la solución exacta ( $S_e$ ), y la discontinua a la paraxial ( $S_a$ ).

En la figura 1, tenemos representado diferentes distribuciones de intensidad normalizadas del modo gaussiano fundamental para diferentes valores del producto  $k\varpi_0$ . En ella podemos observar como al aumentar el valor del producto  $k\varpi_0$  las soluciones son más parecidas. El criterio elegido por D.H.Martin es completamente subjetivo, y fija el valor  $k\varpi_0=6$  como un límite adecuado a partir del cual las soluciones exacta y aproximada se parecen lo suficiente.

En este trabajo, para tener un criterio objetivo, definimos la función de error:

$$\varepsilon = \frac{\int_0^{2\pi} |S_e(\theta) - S_a(\theta)| d\theta}{\int_0^{2\pi} |S_e(\theta)| d\theta} \quad (4)$$

que para el valor de  $k\varpi_0=6$ , la función de error tiene un valor aproximado de  $\varepsilon=3\%$ .

## 2.2.- MODOS DE ORDEN SUPERIOR

Para los modos de orden superior, el desarrollo es totalmente análogo y para establecer el límite de paraxialidad se utilizará el criterio definido en el punto anterior, el error cometido deberá ser menor del 3%.

En la referencia [2], se presentan dos familias diferentes de modos gaussianos, una representada en coordenadas rectangulares, muy apropiada para estudiar fenómenos de radiación de guías de sección rectangular, y otra representada en coordenadas cilíndricas, para la radiación de guías de sección circular.

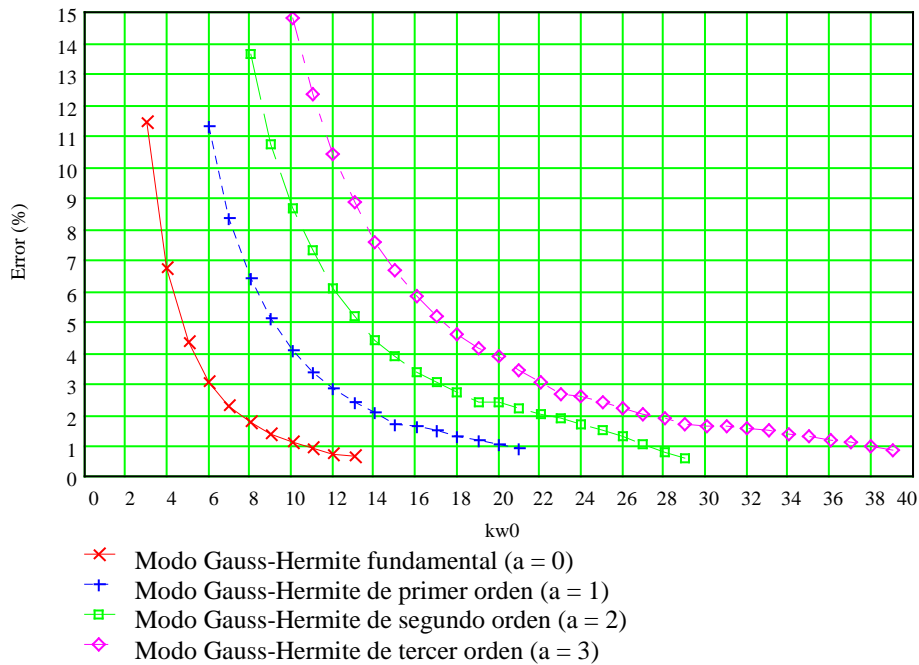
En el primer caso, los modos están basados en los polinomios de Hermite, y en el segundo caso, en los polinomios de Laguerre, de ahí que a estas dos familias se las conozca como modos de Gauss-Hermite y Gauss-Laguerre respectivamente.

Para los modos de Gauss-Hermite, las expresiones para  $S_e$  y  $S_a$  son las siguientes:

$$S_e^n(\theta) = \cos^2(\theta) \cdot e^{-2 \sin^2(\theta) \left(\frac{k\varpi_0}{2}\right)^2} \cdot \bar{H}_n\left(\sqrt{2} \sin(\theta) \left(\frac{k\varpi_0}{2}\right)\right) \quad (5)$$

$$S_a^n(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \cdot e^{-2 \tan^2(\theta) \left(\frac{k\varpi_0}{2}\right)^2} \cdot \bar{H}_n\left(\sqrt{2} \tan(\theta) \left(\frac{k\varpi_0}{2}\right)\right) \quad (6)$$

siendo  $\bar{H}_n$  los polinomios de Hermite normalizados.



**Figura 2.-** Error de la aproximación paraxial de los primeros modos de la familia de Gauss-Hermite, en función del valor del producto  $k\varpi_0$ .

Si buscamos el error que cometemos para diferentes valores del producto  $k\varpi_0$ , obtendremos la figura 2, en la que si aplicamos el mismo criterio del 3% de error para establecer el límite de paraxialidad, obtenemos una expresión general:

$$k\varpi_0 > 6(a + 1) \quad (7)$$

siendo  $a$  el subíndice mayor del modo en consideración, debido a que será el plano que tendrá mayores problemas de paraxialidad, debido a que la función generadora es de orden mayor.

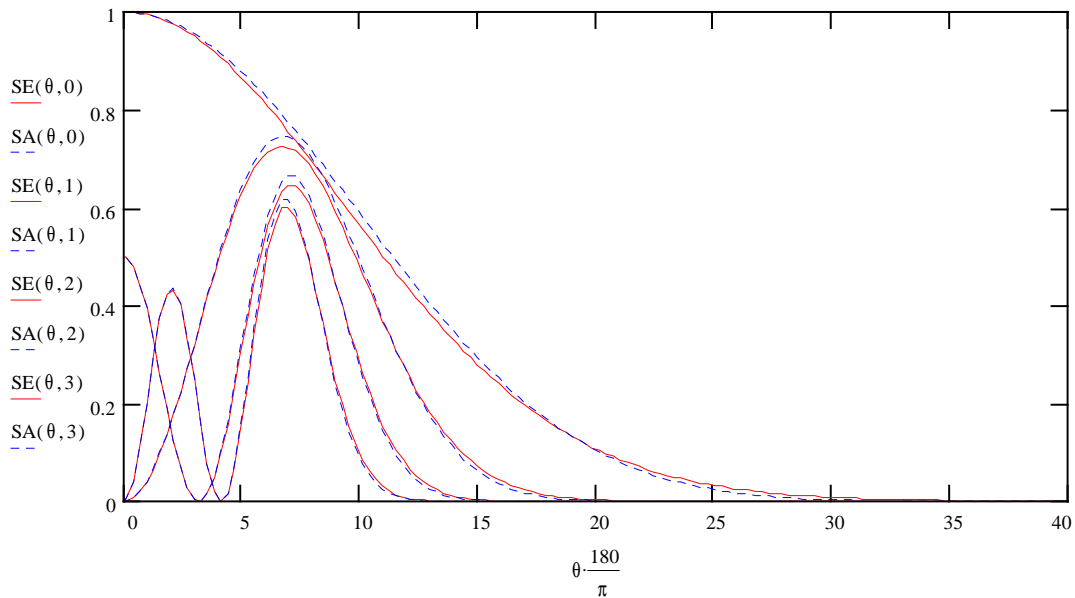
Si en lugar de trabajar con la familia de Gauss-Hermite, trabajamos con la de Gauss-Laguerre, de una manera totalmente análoga podríamos llegar a demostrar la condición de paraxialidad como:

$$k\varpi_0 > 6(b + a + 1) \quad (8)$$

siendo en este caso  $a$  y  $b$  los subíndices identificativos de los modos de la familia de Gauss-Laguerre. En este caso los dos índices, radial y azimutal, contribuyen a ampliar la distribución de campo, de una misma manera, por lo que ambos intervienen en el criterio de paraxialidad propuesto.

Por último, en la figura 3, se presentan los perfiles de los primeros modos de Gauss-Hermite, para los valores de  $k\varpi_0$  límite para cada modo. Se puede ver como el criterio elegido del 3% de error es

suficientemente bueno, ya que las formas de las soluciones aproximadas y exactas coinciden bastante en todos los casos.



**Figura 3.-** Perfil de potencia normalizada en campo lejano de los primeros modos de Gauss-Hermite. En línea continua las soluciones exactas, SE, y en discontinua las aproximaciones paraxiales, SA, para diferentes valores del producto  $k\omega_0$ , coincidiendo con los límites de paraxialidad para cada modo establecido mediante la ecuación 7.

### 3.- CONCLUSIONES

En este artículo se presenta un nuevo criterio de paraxialidad que incluye los modos de orden superior, basándose en un criterio objetivo de la estimación del error cometido mediante la aproximación paraxial.

Sería conveniente que en todos los sistemas que se pretenda trabajar con este tipo de modos como medio de transporte de la energía entre dos puntos distantes, realicen un estudio previo sobre si es o no aplicable el criterio de paraxialidad, para utilizar las expresiones de los modos gaussianos conocidos, o bien, utilizar un método más complicado en el que no se realice ningún tipo de suposición paraxial.

### 4.- REFERENCIAS

- [1] Del Río, C., Gonzalo, R., Sorolla, M., Möbius, A. y Thumm, M. "High Order Mode Beam Waveguide for Technological Medium Power Millimeter Wave Applications". 20th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves. Conference digest 1995, pp 519-520.
- [2] Wencker, G. "Rekursionsformeln und Entwicklungen der Strukturfunktionen Gaußscher Strahlen". A.E.U. Band 23, 1969, pp 521-523.
- [3] Martin, D.H. and Bowen, J.W. "Long-Wave Optics". IEEE Transactions on Microwave theory and techniques, Vol. 41, n° 10, October 1993, pp 1676-1690.