Universidad Pública de Navarra
Departamento de Matemática e Informática

Representaciones numéricas de Semigrupos totalmente ordenados

Memoria presentada por
JUAN RAMON DE MIGUEL VELASCO
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas

A *Berta, Irene y Laura*

(En orden lexicográfico)

Tengo la satisfacción de haber contado, durante la elaboración de esta memoria, con el apoyo de muchas personas que me han ofrecido su ayuda, tanto moral como material.

Quiero agradecer a los directores del trabajo, Juan Carlos Candeal y Esteban Induráin, no sólo el entusiasmo puesto durante la labor de dirección, sino también su disposición a disfrutar conmigo los momentos de ánimo y su habilidad para alentarme en los de desánimo. Me honro de poder contarles entre mis amigos.

También deseo expresar mi reconocimiento a los compañeros del Departamento de Matemática e Informática que me han mostrado, de manera continuada, su interés por el desarrollo del trabajo.

Para concluir, pero no por ello en último lugar, agradezco a mi familia su actitud permanente de colaboración y, a veces, paciencia.

Pamplona. Marzo de mil novecientos noventa y cinco.

INDICE

Tabla de notaciones

$A, B, G, S, X, \ldots$	Conjuntos (estructuras) y sus subconjuntos.
$a, b, c, x, y, z, \ldots$	Elementos de los conjuntos.
i, j, k, m, n	Habitualmente números enteros.
$x \in A$	x pertenece al conjunto A.
$A \subseteq B$ $(A \subset B)$	A es subconjunto (estricto) de B.
$A \cup B$, $A \cap B$	A unión B, A intersección B.
$\emptyset$	Conjunto vacío.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales, excluído el "0": $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	Conjunto de los números enteros, números racionales, números reales.
$\precsim$ $(\prec)$	Relación de orden total (estricta). A veces, preorden total.
$\sim$	Relación de indiferencia asociada a un preorden total.
$\precsim_L, \prec_L$	Orden lexicográfico.
$\precsim^{op}$	Orden opuesto al orden total $\precsim$.
G^+, G^-	Cono (estrictamente) positivo, negativo de G.
$\lvert x \rvert$	Valor absoluto del elemento x.
$\langle S \rangle$	Subgrupo generado por S.
$\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$	Grupo abeliano generado por los elementos a y b $(a + b = b + a)$.
$S(a, b)$	Semigrupo abeliano generado por los elementos a y b $(a + b = b + a)$.
$[a, b]$, (a, b)	Intervalo cerrado, intervalo abierto.

En el enunciado de Teoremas se reservará la numeración romana (i, ii, iii, iv, ...) para resultados de equivalencia entre las proposiciones que se numeran. En otros enunciados donde no se establezca tal equivalencia sino una lista de consecuencias, la numeración será arábiga (1,2,3, ...).

El símbolo "$\blacksquare$" se utilizará para señalar el final de una demostración.

Capítulo 0
Introducción

Parafraseando a Birkhoff en el prefacio de su obra "*Lattice Theory*" (Birkhoff [1940–1967]), podríamos afirmar que la belleza de la Teoría de Órdenes deriva en parte de la sencillez de sus supuestos iniciales. Esta sencillez no impide una gran riqueza en los contenidos que desarrolla, pudiendo considerarse como una disciplina más, con entidad propia dentro de la Ciencia Matemática.

Al mismo tiempo, y en el terreno de las aplicaciones, es indudable que una proporción importante de nuestra actividad se destina, precisamente, a la elaboración y análisis de ordenaciones de todo tipo, en los más diversos contextos. Existe algo en la naturaleza humana que nos empuja a clasificar de manera organizada y disponer en jerarquías todo lo que constituye nuestro conocimiento.*

La representación numérica de estructuras ordenadas, también denominada "isomorfismo de órdenes" o "isotonía" se ocupa de la existencia de funciones reales definidas en un conjunto ordenado arbitrario, que preservan el orden. Naturalmente, en el rango de la función, es decir en el conjunto de los números reales, se considera la ordenación usual. Este tipo de representaciones numéricas reciben también el nombre de *funciones de utilidad.*

Estudiaremos en esta memoria la posibilidad de obtener representaciones numéricas de *semigrupos totalmente ordenados.* En este caso, el objetivo es respetar tanto la estructura de orden, como la algebraica adicional. Denominaremos a estas representaciones *funciones de utilidad aditivas.*

La razón que motivó esta investigación fue la de unificar y generalizar ciertos resultados de representación que aparecen en distintas disciplinas, en especial Ciencias

* Cabe añadir que este afán de ordenación puede superar incluso lo razonable, como puso de manifiesto la demostración del Teorema de Imposibilidad de Arrow (véase, por ejemplo Kelly [1988]). Este resultado refuerza la necesidad e interés de un estudio formalizado de la teoría de órdenes.

Sociales (Economía, Sociología) y Estadística, y que parten de la ya clásica "Teoría de la Utilidad", cuyo objetivo puede resumirse en trasladar a escalas numéricas (que podríamos denominar cuantitativas) información proveniente de escalas cualitativas (basadas en "comparaciones", "preferencias" o "mediciones" plasmadas en algún tipo de ordenación).

Aunque existe una abundante literatura sobre representación numérica de estructuras ordenadas, no es frecuente contemplar resultados que combinen los aspectos algebraicos y de orden. El objetivo natural que entonces nos planteamos, punto de arranque de la memoria, fue el de tratar de completar esta parte de la Teoría de la Utilidad estudiando resultados de representación en ambas direcciones.

Las razones para esta "algebrización" quedaban justificadas, como ya hemos apuntado, por las posibles aplicaciones de este enfoque a distintas especialidades, donde es frecuente encontrar conjuntos ordenados en los que subyace alguna operación adicional.

Citaremos como ejemplos modelos para "preferencias", definiciones abstractas de "índices de precios", "niveles de utilidad", etc. (véase Eichhorn [1978], Castillo y Ruiz [1993]); teorías del "comportamiento del consumidor", con empleo de medidas de probabilidad que llevan asociadas funciones de utilidad lineales (ver Luce y Raiffa [1957]); teorías de la demanda (Katzner [1970]), etc. Algunos otros aspectos pueden consultarse en Chipman [1960], o Fishburn [1989].

También esta teoría de la utilidad algebraica presenta aplicaciones en otros campos, como la "Lógica Teórica" (ver Skala [1975]); "Psicometría" (medición de la adquisición de conocimiento) y "Psicología Teórica", hoy día con una fuerte base matemática (ver Nowakowska [1983]). En estas disciplinas es frecuente la búsqueda de un marco general, denominado "Teoría de la Medición", en la que conceptos como "concatenación", "medición extensiva conjunta", "medición aditiva conjunta", se corresponden con la búsqueda de homomorfismos isótonos de un semigrupo en el grupo aditivo de los reales (véase a este respecto Roberts [1979] o Narens [1985]).

Obsérvese que nuestra línea de pensamiento supone la incorporación de contenido algebraico a la teoría clásica de la utilidad. Resulta difícil situar los orígenes de esta teoría, ya que si bien la idea subyacente parece ser apuntada por Adam Smith (1723-1790), los primeros resultados rigurosos se deben a Cantor (1895). El desarrollo posterior de la Teoría de la Utilidad a través de dos líneas separadas, una puramente matemática y otra aplicada, encuentra su nexo de unión a mediados de los años cincuenta con los resultados debidos a Debreu (con precedentes en Milgram [1939] y Eilenberg [1941]). Debreu redescubrió resultados originales de Eilenberg y los aplicó de forma decisiva a la Teoría de Equilibrio General. Un libro de capital importancia en este periodo fue "Teoría del Valor" de Debreu [1959] . Algunas de las contribuciones posteriores que podemos resaltar se deben a Fleischer [1961], Fishburn [1970], Peleg [1970], Jaffray [1975], Mehta [1986 (1), 1986 (2), 1988], Herden [1989, 1991] o Beardon [1992].

Por otra parte es obligado señalar que el desarrollo conjunto de los aspectos algebraico y ordenado tiene antecedentes en la literatura. Una referencia clave en este contexto es Hölder [1901], que caracteriza la existencia de homomorfismos isótonos en grupos totalmente ordenados. Otras referencias fundamentales son Hahn [1907], Kantorovich [1937], Cartan [1939], Everett y Ulam [1945], Birkhoff [1940], Clifford [1940], Alimov [1950], Fuchs [1963], etc.

Nuestra fuente básica para esta segunda vía fue el clásico libro de G. Birkhoff "*Lattice theory*" [1967, tercera edición] que, en particular, revelaba interesantes cuestiones abiertas al considerar la estructura de semigrupo ordenado. Además, en artículos y libros relativamente recientes (Luce y Narens [1987] —otra referencia clave para nosotros—; Roberts [1979], Luce, Krantz, Suppes y Tversky [1990]) se plantean como cuestiones abiertas problemas que se traducen en el estudio de existencia de utilidad aditiva para semigrupos ordenados.

Un texto adicional, fundamental tras nuestra opción definitiva por el estudio de utilidad en semigrupos, ha sido la obra de L. Fuchs "*Partially ordered algebraical systems*" [1963]. Su lectura nos mostró algunos aspectos de la teoría que no habían sido trabajados con la profundidad suficiente: utilidad sobre grupos y semigrupos topológicos, continuidad de las funciones de utilidad, comparación entre las distintas topologías que hacen continua una función de utilidad aditiva, etc. Para estas cuestiones topológicas han sido referencias importantes Eilenberg [1941], Nachbin [1965] y Mehta [1986 (1), 1986 (2)].

Este enfoque, dentro de la Teoría de la Utilidad, en el que se estudia la existencia de funciones reales que preserven los tres tipos de estructura, a saber, orden, topología y álgebra, parece ser nuevo en la literatura. Así pues, nuestra propuesta es realizar un estudio que contemple al menos cuatro disciplinas matemáticas interrelacionadas entre sí:

1) Orden: fundamento de nuestro estudio.

2) Análisis: por cuanto manejamos funciones que llegan a los números reales.

3) Topología: porque abordaremos cuestiones de continuidad de las representaciones numéricas que aparezcan.

4) Algebra: por razón de la operación interna adicional que se considera.

En cuanto a los contenidos de la propia memoria, explicamos a continuación su desarrollo, indicando los resultados originales que a nuestro juicio aporta.

• El Capítulo 1, introduce diversos conceptos sobre estructuras ordenadas y presenta algunos resultados, ya conocidos, sobre existencia de representación numérica.

• Como paso previo a los resultados específicos sobre semigrupos totalmente ordenados, dedicamos el Capítulo 2 al caso particular de *grupos*.

Analizamos el resultado clave de Hölder [1901], que caracteriza a partir de la *propiedad arquimediana* la existencia de representación numérica mediante un homomorfismo de grupos (en nuestra denominación, existencia de "utilidad aditiva").

Aportamos una prueba alternativa de su resultado, diferente a la que habitualmente aparece en la literatura.

Presentamos dos propiedades, que denominamos *propiedad* $\{n+1,n\}$ y *propiedad* $\{p>q\}$, equivalentes a la propiedad arquimediana en el contexto de grupos totalmente ordenados, pero no en semigrupos, y que proporcionan la clave para la representabilidad aditiva de esta última estructura.

El origen de estas propiedades puede rastrearse hasta los Elementos de Euclides, en la denominada "propiedad de Eudoxo", referida a "segmentos rectilíneos ordenados", y que se reconoce como primera definición histórica rigurosa de número real. (Según parece, el propio Dedekind reconoció la significativa similitud de sus cortaduras con la definición Eudoxo-Euclídea. Véase Cuesta-Dutari [1981],pp. 15–18).

La primera de ellas (propiedad $\{n+1,n\}$) aparece esencialmente en Alimov [1950] (en el contexto de semigrupos), y aparece también citada en otros trabajos de su época (Clifford [1958], Conrad [1959]). La propiedad $\{p>q\}$ parece ser nueva.

Como resultado particular, obtenemos una prueba directa de que *todo grupo arquimediano es abeliano*, basada precisamente en la propiedad $\{p>q\}$.*

Aportamos también un estudio de la estructura de grupo totalmente ordenado y abeliano, generado por dos elementos, y dotado del "orden lexicográfico", que descubrimos como "germen" de la no representabilidad aditiva en grupos abelianos.

• El Capítulo 3 nos introduce en semigrupos totalmente ordenados.

Caracterizamos la posibilidad de representación numérica, mediante una función de utilidad que además sea homomorfismo, a partir de la propiedad $\{n+1,n\}$ o $\{p>q\}$. La falta de referencias a esta caracterización en trabajos relativamente recientes

∗ Existen varias demostraciones anteriores de esta afirmación, que debemos juzgar como poco conocidas, ante la presencia de citas en la literatura reciente que plantean la falta de pruebas simples para la propiedad. (Véase, por ejemplo Roberts [1979], pp. 164–165).

como los de Birkhoff [1940–1967], o Luce y Narens [1987], motivó nuestra búsqueda de tal Teorema de representación. Sin embargo, la obra de Fuchs [1963], nos hizo ver posteriormente que una caracterización análoga a la dada por la propiedad $\{n+1, n\}$ se debía a Alimov [1950], a partir de una expresión equivalente que denomina *ausencia de elementos anómalos.*

Nuestra demostración, aplicada primero al caso de un semigrupo cuyos elementos son todos positivos, permite con este enfoque, por una parte, una prueba que entendemos más directa y, por otra, alcanzar resultados adicionales significativos, una vez realizada la extensión del Teorema al caso de semigrupos totalmente ordenados cualesquiera, no necesariamente positivos.*

• A lo largo del Capítulo 4, analizamos la posibilidad de extraer información sobre la estructura de un grupo totalmente ordenado, realizando en el mismo determinadas particiones relacionadas con los resultados de representabilidad.

Analizamos, en particular, el caso en que un grupo totalmente ordenado es representable, pero no necesariamente mediante una función de utilidad que sea homomorfismo. Aplicando alguno de los resultados obtenidos para semigrupos, probamos que todo grupo representable permite una partición contable en semigrupos arquimedianos.

Relacionando otra de las particiones que realizamos con el concepto de *ideal* en grupos ordenados (ampliamente tratado en la literatura), mostramos también la manera de lograr una pseudo-representación aditiva (una representación que es homomorfismo, pero no necesariamente inyectivo) en cualquier grupo totalmente ordenado.

• La consideración de cuestiones de tipo topológico en semigrupos totalmente ordenados es el objetivo del Capítulo 5.

$*$ Parte de estos resultados aparecerán publicados en De Miguel, Candeal e Induráin; Semigroup Forum [1995].

Aportamos en primer lugar una caracterización de la representabilidad en semigrupos totalmente ordenados, utilizando la propiedad de *perfecta separabilidad*, lo que en particular supone ligar nuestros resultados con algunos de los existentes en el contexto de conjuntos ordenados generales.

Para semigrupos conmutativos, obtenemos (como antes en el caso de grupos) la descripción de ciertas subestructuras lexicográficas que se revelan como el germen de la ausencia de representación aditiva.

Dedicamos una sección especial a la caracterización del "continuo real positivo". En Iseki [1951], se muestra la recta real aditiva como único grupo totalmente ordenado y conexo en la topología del orden. Obtenemos una generalización importante de este resultado para el caso de monoides y semigrupos positivos. En concreto, caracterizamos $\big([\alpha,\infty),+\big)$, $\big((\alpha,\infty),+\big)$ $(\alpha \geq 0)$, como los únicos semigrupos topológicos positivos y conexos (la recta real no negativa y aditiva es así, esencialmente, el único monoide topológico positivo y conexo). Estos resultados se aprovechan para mostrar, en un apéndice, la manera de extender estructuras como las anteriores hasta generar el cuerpo conmutativo totalmente ordenado y completo de los números reales.

En otra sección de este capítulo, aportamos como resultado de interés la demostración de que toda función de utilidad aditiva definida sobre un semigrupo topológico totalmente ordenado es continua. Aplicado a grupos, este resultado permite asegurar que todo grupo totalmente ordenado y arquimediano es representable por una función de utilidad aditiva y continua, lo que constituye por sí mismo una extensión del clásico Teorema de Hölder.

Como observación final, quisiéramos destacar el esfuerzo realizado en plasmar en Ejemplos y Contraejemplos las situaciones que se desprenden de diversos enunciados presentes en la memoria. Entendemos que cabe incluir entre las aportaciones originales algunos de estos ejemplos, por su significación sobre las propiedades que pretenden ilustrar.

Capítulo 1
Conjuntos totalmente ordenados

1.1. Introducción

El problema de representar una estructura ordenada a través de una función numérica que preserve el orden se remonta a finales del siglo pasado. En concreto dicha cuestión, para el caso particular de conjuntos totalmente ordenados, fue propuesta por Cantor [1895, 1897]. Existen en la literatura diversas caracterizaciones que resuelven este problema, entre las que pueden destacarse las debidas a Milgram [1939], Birkhoff [1940–1967], Eilenberg [1941], Debreu [1954, 1964], Jaffray [1975], o Herden y Mehta [1994], entre otros.

La existencia de representación numérica simplifica el análisis de la relación de orden considerada, puesto que la comparación entre elementos se traduce en una comparación entre números reales.

En Economía Matemática, por ejemplo, y en el contexto de la Teoría de Elección Racional, cuando se pretende describir el comportamiento de un agente representativo es frecuente modelar el conjunto de las posibles alternativas mediante cierta estructura ordenada, cuyo orden viene inducido por las preferencias que dicho agente tiene sobre las distintas alternativas. Habitualmente se supone que el individuo sigue un principio maximizador en la toma de decisiones. Así pues, si es posible la obtención de una representación numérica para la relación de preferencias, la toma de decisiones del agente, con el objetivo de realizar una elección óptima, se transforma en la búsqueda de máximos para una función con valores reales (véase Walker [1977], Subiza [1992] o Peris y Subiza [1994]).

En este capítulo, tras la definición y discusión de los conceptos básicos referentes a estructuras ordenadas que serán utilizados a lo largo de la memoria, presentaremos en forma resumida algunos de los resultados clave sobre representabilidad.

Dado el carácter introductorio con que planteamos la redacción del capítulo, omitiremos las demostraciones. Pueden encontrarse en las obras cuya referencia incluimos junto a cada resultado.

1.2. Definiciones y resultados previos

Definición 1.2.1: Orden total

Una relación binaria $\precsim$ definida en un conjunto X no vacío se llama *orden total* si verifica las propiedades:

R. (*Reflexiva*) Para todo $a \in X$: $a \precsim a$

A. (*Antisimétrica*) Para todo $a, b \in X$: si $a \precsim b$ y $b \precsim a$ entonces $a = b$

T. (*Transitiva*) Para todo $a, b, c \in X$: si $a \precsim b$ y $b \precsim c$ entonces $a \precsim c$

C. (*Completa*) Para todo $a, b \in X$: $a \precsim b$ o $b \precsim a$

Puesto que toda relación binaria completa es necesariamente reflexiva, puede suprimirse la condición (R) de la definición. Otra alternativa es sustituir (C) por la propiedad:

C'. (*Conexa*) Para todo $a, b \in X$, con $a \neq b$: $a \precsim b$ o $b \precsim a$

Asociada a la relación $\precsim$ se define otra, $\prec$, que denominaremos *orden total estricto* con el significado:

$$\text{Para todo } a, b \in X : a \prec b \quad \text{si y sólo si} \quad a \precsim b \text{ y } a \neq b$$

Esta nueva relación verifica las propiedades:

I. (*Irreflexiva*) $\forall a \in X : no(a \prec a)$

A. (*Asimétrica*) $\forall a, b \in X : a \prec b \Longrightarrow no(b \prec a)$

T. (*Transitiva*) $\forall a, b, c \in X : a \prec b, b \prec c \Longrightarrow a \prec c$

C'.(*Conexa*) $\forall a, b \in X, a \neq b : a \prec b \text{ o } b \prec a$

Además se verifica:

$$a \prec b \quad \text{si y sólo si} \quad no(b \precsim a)$$
$$a \precsim b \quad \text{si y sólo si} \quad no(b \prec a)$$

Nótese que se logra una formulación equivalente a la expuesta hasta ahora si se parte de la relación de orden estricta, $\prec$, y se construye a partir de ella la relación $\precsim$. Es decir, dada una relación $\prec$, definida en un conjunto X y cumpliendo las propiedades *asimétrica* (lo que implica *irreflexiva*), *transitiva* y *conexa*; la relación $\precsim$, definida a partir de $\prec$ mediante:

$$a \precsim b \quad \Longleftrightarrow \quad a \prec b \;\text{ o }\; a = b$$

resulta ser un orden total. Además, el orden estricto asociado al orden total resultante, coincide con el original, $\prec$.*

El par $(X, \precsim)$ se llama *conjunto totalmente ordenado*, y la estructura equivalente $(X, \prec)$ recibe el nombre de *cadena*.

Definición 1.2.2: Representabilidad del orden. Función de utilidad

Se dice que un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$ es *representable* si existe una aplicación $u : (X, \precsim) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$, del conjunto X, en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con su orden habitual $\leq$, verificando

$$[\text{u1}] \qquad \forall a, b \in X : a \precsim b \Longleftrightarrow u(a) \leq u(b)$$

* Observaremos luego que, en el caso de preórdenes, esta equivalencia entre las estructuras que se obtienen partiendo de la relación estricta o no estricta deja de ser cierta.

La aplicación u se llama *representación numérica* o *utilidad.* Su existencia establece por tanto un *isomorfismo de órdenes* (*isotonía*) entre el conjunto ordenado y un subconjunto de los números reales, con su orden habitual.

Nótese que la definición es equivalente a que se verifique:

$$[\text{u2}] \qquad \forall a, b \in X : a \prec b \Longleftrightarrow u(a) < u(b)$$

En efecto, supuesto [u1]:

$$a \prec b \Longleftrightarrow no(b \precsim a) \Longleftrightarrow no(u(b) \leq u(a)) \Longleftrightarrow u(a) < u(b)$$

y, análogamente, supuesto [u2]:

$$a \precsim b \Longleftrightarrow no(b \prec a) \Longleftrightarrow no(u(b) < u(a)) \Longleftrightarrow u(a) \leq u(b) \quad \blacksquare$$

Incluso puede enunciarse lo mismo afirmando simplemente

$$[u3] \qquad \forall a, b \in X : a \prec b \Longrightarrow u(a) < u(b)$$

ya que, supuesto [u3]

$$u(a) < u(b) \Longrightarrow no(b \prec a) \Longrightarrow a \precsim b$$

y por tanto, $a \prec b$; pues de lo contrario, al ser $\precsim$ antisimétrica, se tiene $a = b$, de donde $u(a) = u(b)$, contra $u(a) < u(b)$ $\blacksquare$

Si solamente puede asegurarse que

$$\forall a, b \in X : a \precsim b \Longrightarrow u(a) \leq u(b)$$

se dice que $(X, \precsim)$ es *pseudo-representable*, y la aplicación u recibe el nombre de *pseudo-utilidad.* Obviamente, en este caso no pueden sustituirse las desigualdades por desigualdades estrictas, pues la condición

$$a \prec b \Longrightarrow u(a) < u(b)$$

como ya se ha observado, equivale a la representabilidad. Así, para elementos de X verificando $a \prec b$, la pseudo-representabilidad sólo garantiza que $u(a) \leq u(b)$. En otros términos, *utilidad* es lo mismo que *pseudo-utilidad inyectiva.*

Observación

Como se mencionaba en la introducción, en el estudio de la Teoría de Elección Racional, se toma como punto de partida el supuesto de que un consumidor "ordena" las diversas opciones que se le presentan, de acuerdo con sus preferencias sobre los elementos de un conjunto de alternativas X.

Es frecuente adoptar que esta ordenación viene inducida por una relación binaria, $\precsim$ (denominada *preferencia débil*) que verifica las propiedades *reflexiva*, *transitiva* y *completa* o *conexa*; pero no necesariamente *antisimétrica* (véase, por ejemplo, Debreu [1959]). En este contexto, cuando para dos alternativas $a, b \in X$ ocurre $a \precsim b$ y también $b \precsim a$, se interpreta que ambas son *indiferentes*, pero no necesariamente iguales.

Las ideas anteriores se formalizan en la siguiente definición.

Definición 1.2.3: Preorden completo

Una relación binaria $\precsim$ definida en un conjunto X se llama *preorden completo* o *preorden total* si verifica las propiedades:

R. (*Reflexiva*) Para todo $a \in X$: $a \precsim a$

T. (*Transitiva*) Para todo $a, b, c \in X$: si $a \precsim b$ y $b \precsim c$ entonces $a \precsim c$

C. (*Completa*) Para todo $a, b \in X$: $a \precsim b$ o $b \precsim a$

Asociadas a un preorden completo $\precsim$ se definen otras dos relaciones binarias, que representaremos $\sim$ y $\prec$, con el siguiente significado:

$$a \sim b \quad \text{si y sólo si} \quad a \precsim b \text{ y también } b \precsim a$$
$$a \prec b \quad \text{si y sólo si} \quad a \precsim b \text{ y } no(a \sim b)$$

La primera de ellas, $\sim$, refleja la parte simétrica del preorden original. Se denomina *relación de indiferencia* y resulta ser de *equivalencia*, esto es, verifica las propiedades reflexiva, simétrica (i.e. para todo $a, b \in X$: $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$) y transitiva.

La relación $\prec$ refleja la parte asimétrica del preorden original. Verifica:

I. (*Irreflexiva*) $\forall a \in X : no(a \prec a)$

A. (*Asimétrica*) $\forall a, b \in X : a \prec b \Longrightarrow no(b \prec a)$

T. (*Transitiva*) $\forall a, b, c \in X : a \prec b, b \prec c \Longrightarrow a \prec c$

N. (*Negativamente transitiva*) $\forall a, b, c \in X$:

$$no(a \prec b), no(b \prec c) \Longrightarrow no(a \prec c)$$

La última propiedad, de enunciado puramente técnico, tiene sin embargo gran importancia, en el sentido que se explica a continuación.

Como en el caso de órdenes totales, podemos intentar reconstruir los resultados referidos a preórdenes completos, partiendo de una relación estricta, $\prec$, y definiendo:

$$\begin{aligned} a \sim b &\quad \text{si y sólo si} \quad no(a \prec b) \text{ y } no(b \prec a) \\ a \precsim b &\quad \text{si y sólo si} \quad a \prec b \text{ o } a \sim b \end{aligned}$$

Sin embargo, si solamente se garantiza que la relación $\prec$ de partida es asimétrica (lo que implica irreflexiva) y transitiva, resulta ahora que ni la indiferencia resultante coincide necesariamente con la anterior, ni la relación $\precsim$ inducida es un preorden completo. El problema radica en que la indiferencia asociada a un preorden completo es siempre transitiva (se trata de una relación de equivalencia), mientras que la que acabamos de definir, asociada a la relación $\prec$, no tiene por qué serlo. Imponiendo que la relación estricta $\prec$ sea negativamente transitiva, queda garantizada la transitividad de su indiferencia asociada y, como consecuencia, puede comprobarse que ambas construcciones son equivalentes. Para más detalles puede consultarse Peleg [1970] o Induráin [1989].

Una relación $\prec$ asimétrica y negativamente transitiva recibe el nombre de *orden débil*. Puede comprobarse que todo orden débil es también transitivo, por lo que, en conclusión, es suficiente suponer que la relación $\prec$ es un orden débil, para que las estructuras $(X, \prec)$ y $(X, \precsim)$, con $\precsim$ preorden completo, sean equivalentes.

El siguiente cuadro presenta de forma esquemática los resultados anteriores:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} (X,\precsim) \text{ orden total} & \Longleftrightarrow & (X,\prec) \text{ cadena} & \big(\sim \text{ es la igualdad}\big) \\ \Downarrow & & \Downarrow & \\ (X,\precsim) \text{ preorden completo} & \Longleftrightarrow & (X,\prec) \text{ orden débil} & \big(\sim \text{ es de equivalencia}\big) \end{array}}$$

Definición 1.2.4: Representabilidad de preórdenes completos

Se dice que un conjunto totalmente preordenado $(X, \precsim)$ es *representable* si existe una aplicación $u : (X, \precsim) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$, verificando, $\forall a, b \in X$:

$$a \precsim b \Longleftrightarrow u(a) \leq u(b)$$

La definición es por tanto igual que la correspondiente a órdenes totales, y la aplicación u recibe, como entonces, el nombre de *utilidad*. Ahora no se trata de una aplicación inyectiva, sino que de la propia definición se deduce:

$$a \sim b \Longleftrightarrow u(a) = u(b)$$

y también:

$$a \prec b \Longleftrightarrow u(a) < u(b)$$

La siguiente proposición, fácil de probar, pone de manifiesto la importancia de los preórdenes totales, desde el punto de vista de la existencia de función de utilidad.

Proposición 1.2.1 (Debreu 1954)

Sea $\precsim$ una relación binaria definida en un conjunto X, para la que existe una función

$$u : (X, \precsim) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$$

verificando, para todo $a, b \in X$:

$$a \precsim b \Longleftrightarrow u(a) \leq u(b)$$

Entonces, $\precsim$ es un preorden completo.

Pero, además, la representabilidad de preórdenes completos queda resuelta por la existencia de utilidad para órdenes totales. La siguiente proposición, también sencilla, justifica este hecho (véase, por ejemplo, Tanguiane [1988], Induráin [1989] o Candeal e Induráin [1990 (1)])

Proposición 1.2.2

Sea $\precsim$ un preorden completo definido sobre un conjunto X. Sea

$$X/\!\sim\, = \{[x]; x \in X\}$$

el conjunto de clases de equivalencia (conjunto cociente) relativo a la relación de indiferencia $\sim$. Definamos sobre este conjunto la relación $\precsim$ mediante

$$[x] \precsim [y] \Longleftrightarrow x \precsim y$$

Entonces, $(X/\!\sim, \precsim)$ es un conjunto totalmente ordenado, y el preorden completo $(X, \precsim)$ es representable si y sólo si lo es el orden total $(X/\!\sim, \precsim)$.

1.3. Función de utilidad

El problema de la existencia de representabilidad numérica para un conjunto totalmente ordenado fue planteado ya por Cantor [1895, 1897]. Una primera aproximación a la solución puede enunciarse en los siguientes términos:

Proposición 1.3.1 (Cantor, 1895)

Sea $(X, \precsim)$ un conjunto totalmente ordenado, verificando:

$$\forall x, y \in X \;\; \textit{con } x \prec y, \;\; \textit{existe } z \in X \;\; \textit{tal que } x \prec z \prec y$$

(por cumplir lo anterior, se dice que X "carece de huecos"). Entonces, $(X, \precsim)$ es numéricamente representable si y sólo si existe un subconjunto D de X, D contable (i.e. finito o infinito numerable), tal que

$$\forall x, y \in X \;\; \textit{con } x \prec y, \;\; \textit{existe } d \in D \;\; \textit{tal que } x \prec d \prec y$$

Dado que en lo sucesivo estaremos interesados en el análisis de propiedades de continuidad de las funciones de utilidad, parece adecuado introducir en este punto estos conceptos básicos. Dado un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$, definimos la *topología del orden* como aquélla que tiene como subbase de abiertos la siguiente familia de conjuntos:

$$\Sigma = \{(\leftarrow, a), (b, \rightarrow); a, b \in X\}$$

donde

$$(\leftarrow, a) = \{x \in X; x \prec a\}$$
$$(b, \rightarrow) = \{x \in X; b \prec x\}$$

Como es habitual, sobre la recta real consideraremos la topología euclídea.*

* La topología euclídea de los números reales es, precisamente, su topología del orden como conjunto totalmente ordenado.

Notación

Dado un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$, utilizaremos la notación habitual para intervalos de números reales cuando se quieran representar los correspondientes subconjuntos análogos de X. Por ejemplo:

$$(a, b) = \{x \in X\,; a \prec x \prec b\}$$

$$[a, b] = \{x \in X\,; a \precsim x \precsim b\}$$

Observación

La definición de *separabilidad* para un espacio topológico X (existencia de un subconjunto D contable cuya adherencia es X), equivale, al considerar la topología del orden en un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$, a la propiedad:

Existe un subconjunto contable $D \subseteq X$ que corta a todo intervalo abierto (a, b), no vacío, de X.

Por otra parte, dado un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$, la propiedad "sin huecos", definida en la Proposición 1.3.1 significa que todo intervalo abierto (a, b) es no vacío. Esto permite reenunciar el resultado de Cantor en la forma:

Proposción 1.3.1'

Un conjunto totalmente ordenado y sin huecos $(X, \precsim)$ es representable si y sólo si es separable

Puede ocurrir que un espacio topológico (X, τ) esté dotado de una relación de orden total $\precsim$. Para estudiar, al mismo tiempo, propiedades de preservación del orden y continuidad, debemos necesariamente imponer alguna relación entre la topología y el orden dados en X. La siguiente definición, utilizada ya en los trabajos de Debreu [1954, 1959], pone de manifiesto esta idea.

Definición 1.3.1: Topología natural. Orden continuo

Sea $(X, \precsim, \tau)$ un espacio topológico, totalmente ordenado. La topología τ se dice *natural* si, para todo $a, b \in X$, los conjuntos $(\leftarrow, a)$, $(b, \rightarrow)$ son τ-abiertos; es decir, todo abierto en la topología del orden es abierto en (X, τ) (la topología τ es más fina que la del orden). También se dice que $\precsim$ es un *orden continuo*.*

Observación

Cualquier subconjunto S de un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$ es también, obviamente, un conjunto totalmente ordenado, con la misma relación $\precsim$ heredada de X. Resulta así que el subconjunto S es un espacio topológico, con la topología τ_S del orden $\precsim$ inducido. Por otra parte, el propio X está dotado de la topología del orden τ_X, por lo que el subconjunto S es subespacio topológico, con la topología $\tau_X|_S$ inducida por la del espacio X. Sin embargo ocurre que, en general, estas dos topologías definidas en S no coinciden, resultando τ_S menos fina que $\tau_X|_S$.

En particular, en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, la topología del orden es la misma que la euclídea; pero la topología del orden de un subconjunto S de los números reales es, en general, menos fina que la topología euclídea usual restringida a S.

Podemos concluir que, por definición, la existencia de función de utilidad para un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$, establece siempre un homeomorfismo entre $(X, \precsim)$ y un subconjunto $(S, \leq)$ de la recta real, considerando la topología del orden de ambos espacios. Sin embargo, de acuerdo con la observación anterior, no está garantizado que la función de utilidad empleada sea continua si en la recta real se considera la topología usual.

---

* Para otros enunciados equivalentes o caracterizaciones de la continuidad de un orden puede consultarse Chateuneuf [1983], Fishburn [1983], Monteiro [1987], Herden [1991] o Yi [1993].

Observación

En el caso de preórdenes completos, podemos dotar al conjunto cociente totalmente ordenado $(X/\sim)$ de la topología del orden, y considerar en X la *topología inicial*, esto es, la menos fina que hace continua la proyección $x \mapsto [x]$. Análogamente, se llama *natural* a cualquier topología que sea más fina que la topología inicial definida a partir de la proyección de X sobre $X/\sim$.

Definición 1.3.2: Perfecta separabilidad

Un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$ se dice *perfectamente separable* si existe un subconjunto D contable tal que para cualesquiera $a, b \in X$, con $a \prec b$, existe algún $d \in D$ con $a \precsim d \precsim b$. (Si $\precsim$ es un preorden completo, se dice que $(X, \precsim)$ es perfectamente separable si el conjunto totalmente ordenado $(X/\sim)$ lo es).*

La siguiente proposición generaliza el teorema de representación de Cantor (Proposición 1.3.1').

Proposición 1.3.2 (Milgram 1939, Birkhoff 1940, Debreu 1954, Fishburn 1970, Jaffray 1975)

Sea $(X, \precsim)$ un conjunto completamente preordenado. $(X, \precsim)$ es representable por una función de utilidad continua en cualquier topología natural, si y sólo si es perfectamente separable.

---

* La perfecta separabilidad implica la separabilidad topológica. El recíproco no es cierto en general. Sin embargo, si un conjunto totalmente ordenado es separable y sin huecos, entonces es perfectamente separable. (Véase Candeal e Induráin [1990 (1)]). La separabilidad topológica, por su parte, juega un papel crucial en resultados de representabilidad (véase Arias de Reyna, Estévez y Hervés [1995]).

El resultado anterior puede obtenerse como consecuencia del siguiente, más general. Para una discusión más detallada véase Mehta [1988] o Candeal e Induráin [1990 (2)].

Proposición 1.3.3

Sea $(X, \precsim)$ un conjunto totalmente ordenado. Son equivalentes:

i) $(X, \precsim)$ es perfectamente separable.

ii) $(X, \precsim)$ es representable por una función de utilidad.

iii) $(X, \precsim)$ es representable por una función de utilidad, continua si se considera en X la topología del orden.

iv) $(X, \precsim)$ es representable por una función de utilidad, continua en cualquier topología natural en X

Observación

De acuerdo con los resultados anteriores, cualquier conjunto totalmente ordenado y contable es representable. Además puede conseguirse que la imagen quede contenida en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Este resultado, que formalizamos en la siguiente proposición, aparece por ejemplo en Birkhoff [1940–1967] y Debreu [1959].

Proposición 1.3.4

Todo orden total, definido en un conjunto contable, es representable por una función de utilidad, con imagen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, con su orden natural heredado de la recta real $\mathbb{R}$.

Capítulo 2
Grupos totalmente ordenados

2.1. *Introducción*

El teorema de Hölder (1901) establece que todo grupo totalmente ordenado y *arquimediano* es isomorfo e isótono a algún subgrupo de la recta real. En otros términos, es representable numéricamente por una *función de utilidad aditiva.*

En este capítulo proporcionamos otras condiciones necesarias y suficientes para la representabilidad aditiva de grupos totalmente ordenados. Cualquiera de ellas debe ser, de acuerdo con el teorema de Hölder, equivalente a la propiedad arquimediana.

La exigencia adicional de respetar la estructura algebraica, además de la de orden, supone inmediatamente la existencia de diferencias entre los resultados de representación de conjuntos ordenados y representación aditiva de grupos ordenados.

Por ejemplo, la numerabilidad es suficiente para la existencia de utilidad en conjuntos ordenados, pero no todo grupo numerable es arquimediano y, por tanto, representable mediante homomorfismo. Más aún: todo conjunto contable ordenado es representable en los números racionales (Proposición 1.3.4), sin embargo, no todo grupo ordenado, contable y arquimediano, puede representarse, aditivamente, en el grupo ordenado de los racionales: basta tomar un subgrupo de los números reales generado por dos elementos; uno racional q y otro irracional α. Ningún múltiplo entero de q puede coincidir con un múltiplo entero de α; mientras que todo grupo isomorfo a un subgrupo de los números racionales debe permitir tal igualdad.

Intuitivamente, el hecho de que un grupo ordenado verifique la propiedad arquimediana expresa que no contiene elementos *infinitamente grandes unos respecto a otros.* Analizamos aquí una caracterización de la representabilidad aditiva, que denominamos *propiedad* $\{n+1, n\}$ y otra, equivalente, *propiedad* $\{p > q\}$, que se interpretan, a nivel intuitivo, como la no existencia de elementos *infinitamente próximos entre sí*.

La importancia de la caracterización que estas propopiedades proporcionan radica en que dejan de ser equivalentes a la propiedad arquimediana cuando se aplican a *semigrupos totalmente ordenados* y que, como se verá en el capítulo correspondiente, juegan un papel esencial en el estudio de la representabilidad aditiva de esta última estructura.

Caracterizaremos también la representabilidad aditiva de un grupo abeliano, en términos de no contener como subgrupo a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, dotado del orden *lexicográfico*. Esta ausencia (presencia) del orden lexicográfico en las estructuras representables (no representables) es típica en teoría de la utilidad (véase, por ejemplo, Fishburn [1974], Ostaszewski [1975] o Martínez Legaz [1995]).

2.2. Definiciones

Los conceptos de esta sección tienen un carácter básico y son habituales en la literatura. El concepto de *grupo* puede verse, por ejemplo, en Hungerford [1974]. En Birkhoff [1940–1967] o Fuchs [1963], aparecen las definiciones de grupo totalmente ordenado, y de representabilidad aditiva.

Definición 2.2.1: Grupo

Se denomina *grupo* a la estructura algebraica $(G,+)$ formada por un conjunto G dotado de una operación binaria interna, $+$, de manera que se verifican las propiedades:

1) $+$ es asociativa, es decir, $\forall a,b,c\in G$:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

2) Existe un elemento $e \in G$, denominado *elemento neutro* tal que $\forall a \in G$:

$$a + e = e + a = a$$

3) Para todo elemento $a \in G$, existe otro elemento $-a \in G$, denominado *opuesto* o *simétrico* de a tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = e$$

Un grupo $(G, +)$ se dice *abeliano* o *conmutativo*, si para todo par de elementos $a, b \in G$ se verifica: $a + b = b + a$

Notación

Dado un elemento a de un grupo $(G, +)$ con neutro e, y dado $n \in \mathbb{N}$, se representará como es habitual:*

$$n.a = \overbrace{a + \cdots + a}^{\text{n veces}}$$

Para extender la notación a cualquier entero, se adopta por convenio $0.a = e$, y $(-n).a = n.(-a)$. Fácilmente se comprueba que $n.(-a) = -(n.a)$, por lo que el elemento en cuestión puede escribirse sin ambigüedad $-n.a$.

Definición 2.2.2: Grupo totalmente ordenado

Se llama *grupo totalmente ordenado* a una estructura $(G, +, \precsim)$ verificando:

1. $(G, +)$ es grupo.

---

* Nótese que la expresión del segundo miembro está bien definida, gracias a que se verifica la propiedad asociativa.

2. $(G, \precsim)$ es un conjunto totalmente ordenado.

3. El orden total $\precsim$ es *invariante por traslaciones*, es decir, $\forall a, b, c \in G$:

$$a \precsim b \Longleftrightarrow a + c \precsim b + c \Longleftrightarrow c + a \precsim c + b$$

Por tratarse de un orden total, la condición equivale a que el orden total estricto $\prec$ asociado a $\precsim$ sea, a su vez, invariante por traslaciones, esto es, $\forall a, b, c \in G$:

$$a \prec b \Longleftrightarrow a + c \prec b + c \Longleftrightarrow c + a \prec c + b$$

Observación

Birkhoff utiliza la denominación de *orden homogéneo* [1942], y también *grupo con traslaciones isótonas* [1940–1967] en vez del término *invariante por traslaciones*, también utilizado en la literatura y que nosotros empleamos.

Ejemplo 2.2.1

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, con la suma y orden habituales, constituye para nosotros el ejemplo fundamental de grupo totalmente ordenado, puesto que alrededor de su estructura plantearemos los problemas de existencia de utilidad.

Aparte del anterior, el "*plano lexicográfico*" que describimos a continuación es otro ejemplo relevante de grupo totalmente ordenado.

Sea $(\mathbb{R}^2, +, \precsim_L)$, el plano real ordinario, con la suma $+$, definida *coordenada a coordenada*:

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$$

y el *orden lexicográfico* $\precsim_L$ definido por:

$$(a, b) \prec_L (c, d) \qquad \text{si y sólo si} \qquad a < c \quad \text{o} \quad a = c,\ b < d$$

Se trata de un grupo abeliano, dotado de un orden total. Comprobemos que el orden es invariante por traslaciones. En efecto, para cualquier $(g,h) \in \mathbb{R}^2$ se cumple:

$$\begin{aligned}(a,b) \prec_L (c,d) &\iff a < c \ \text{ o } \ a = c,\ b < d \\ &\iff a+g < c+g \ \text{ o } \ a+g = c+g,\ b+h < d+h \\ &\iff (a+g, b+h) \prec_L (c+g, d+h) \\ &\iff (a,b)+(g,h) \prec_L (c,d)+(g,h)\end{aligned}$$

Observación

Cualquier subgrupo de un grupo totalmente ordenado es también, claramente, un grupo totalmente ordenado. Una vez establecido que el orden lexicográfico dota al plano de un orden total invariante por traslaciones, recurriremos con frecuencia a esta estructura para extraer de la misma nuevos ejemplos en diversas situaciones.

Este recurso al orden lexicográfico como fuente de ejemplos no es casual pues, como ya hemos comentado en la introducción del capítulo, la presencia o ausencia del mismo es determinante en resultados sobre representabilidad de estructuras ordenadas.

Definición 2.2.3: Representabilidad aditiva

Un grupo totalmente ordenado $(G,+,\precsim)$ se dice *aditivamente representable* (resp. *pseudo-representable*) si existe una función de utilidad (resp. pseudo-utilidad)

$$u : (G,+,\precsim) \longrightarrow (\mathbb{R},+,\leq)$$

que es un homomorfismo de grupos, es decir, para todo $a,b \in G$: $u(a+b) = u(a)+u(b)$. La función u se llama *utilidad aditiva* (resp. *pseudo-utilidad aditiva*).

Definición 2.2.4: Elementos positivos y negativos

Dado un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, con neutro e, un elemento $a \in G$ se dice *positivo* (resp. *negativo*) si $e \prec a$ (resp. $a \prec e$).

Se llama *cono positivo* (resp. *cono negativo*) de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ al conjunto de todos sus elementos positivos (resp. negativos), y se denotará G^+ (resp. G^-).*

Observaciones

En Birkhoff [1940–1967], se utiliza el concepto de elemento positivo y negativo en sentido "no estricto"; por lo que, en tal caso, el elemento neutro pertenece a la vez a ambos conos. Con nuestra definición, en sentido estricto, los subconjuntos G^+, G^- y $\{e\}$ constituyen una partición de G.

2.3. Consecuencias de las definiciones

La definición de grupo totalmente ordenado supone, además de la presencia de las estructuras de grupo y de orden en el conjunto considerado, una conexión entre ambas, que se manifiesta en la propiedad que hemos denominado *invariancia por traslaciones.* Los resultados siguientes ponen de manifiesto la potencia que conlleva esta conexión, puesto que son, básicamente, consecuencia del carácter invariante por traslaciones del orden total definido en el grupo.

Presentamos la mayor parte de estas propiedades en forma de Lemas porque serán utilizadas posteriormente con frecuencia. Algunas de ellas aparecen también en Birkhoff [1967], p. 287 y ss.

---

* En otros contextos, se utiliza el término "cono" para referirse a un subconjunto H de un espacio vectorial real V estable para el producto por escalares positivos. El cono se llama "convexo", cuando la suma del espacio vectorial es también estable en H. En cualquier caso, como veremos en la próxima sección (Lema 2.3.5), cada cono de un grupo totalmente ordenado resulta estable para la operación del grupo.

Lema 2.3.1

1) Si a, b, c, d son elementos de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, satisfaciendo $a \precsim b$ y $c \precsim d$, entonces se verifica $a + c \precsim b + d$. Si además, alguna de las desigualdades es estricta ($a \prec b$ o $c \prec d$), se verifica $a + c \prec b + d$.

2) En particular, para todo $a, b \in G$, y para todo número natural n:

$$a \precsim b \Longleftrightarrow n.a \precsim n.b$$

$$a \prec b \Longleftrightarrow n.a \prec n.b$$

<u>*Demostración*</u>

1) Siendo $a \precsim b$, por la invariancia por traslaciones, resulta

$$a + c \precsim b + c$$

Por la misma razón, siendo $c \precsim d$

$$b + c \precsim b + d$$

De ambas, teniendo en cuanta la transitividad de la relación $\precsim$, se obtiene el resultado

$$a + c \precsim b + d$$

El razonamiento con desigualdad estricta es análogo.

2) Se obtiene por inducción, aplicando reiteradamente el resultado anterior en $a \precsim b$. En efecto, tomando $c = a$ y $d = b$, se deduce $2a \precsim 2b$. Si se supone $k.a \precsim k.b$, para cierto $k \in \mathbb{N}$, utilizando nuevamente $a \precsim b$, resulta

$$(k + 1).a \precsim (k + 1).b$$

Con desigualdad estricta es análogo.

Reciprocamente, supuesto $n.a \precsim n.b$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces es $a \precsim b$, pues de lo contrario, por tratarse de un orden total, debe ser $b \prec a$ y resultaría $n.b \prec n.a$, que supone una contradicción. ■

Lema 2.3.2

Sea $(G, +, \precsim)$ *un grupo totalmente ordenado. Para todo* $a \in G^+$, $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$p < q \Longleftrightarrow p.a \prec q.a$$

$$p \leq q \Longleftrightarrow p.a \precsim q.a$$

En otros términos, siendo e *el elemento neutro de* G*, el subgrupo* $\mathbb{Z}a$ *generado por un elemento positivo* a*, es una* cadena *ordenada en la forma:*

$$\cdots - n.a \prec -(n-1)a \prec \ldots \prec -a \prec e \prec a \prec 2a \prec \ldots \prec n.a \prec \ldots$$

Demostración

Basta sumar reiteradamente a y $-a$, aplicando invariancia por traslaciones, en ambos miembros de $e \prec a$, para obtener:

$$e \prec a \Longleftrightarrow a \prec 2a \Longleftrightarrow 2a \prec 3a \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow n.a \prec (n+1).a \Longleftrightarrow \ldots$$
$$\Longleftrightarrow -a \prec e \Longleftrightarrow -2a \prec -a \Longleftrightarrow \ldots$$

De donde se obtiene el resultado. ■

Observación

Como consecuencia del Lema anterior

1) Ningún elemento de un grupo totalmente ordenado puede ser *nilpotente*, salvo el neutro. En particular, no existen grupos finitos totalmente ordenados, aparte del grupo trivial $\{e\}$

2) Un grupo totalmente ordenado, que no sea trivial, no admite *cotas universales* (i.e., no admite supremo ni ínfimo).

Lema 2.3.3

Dado un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, las siguientes afirmaciones sobre un elemento a de G son equivalentes:

i) a es positivo.

ii) Su elemento opuesto, $-a$, es negativo.

iii) $a \prec 2a$

iv) Para todo $b \in G$: $b \prec a + b$ (y también $b \prec b + a$)

<u>*Demostración*</u>

Sea e el elemento neutro de G, y supongamos que el elemento a de G es positivo. Todas las equivalencias del enunciado pueden obtenerse aplicando invariancia por traslaciones a la desigualdad $e \prec a$. En efecto:

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Sumando $-a$:

$$e \prec a \Longleftrightarrow e + (-a) \prec a + (-a) \Longleftrightarrow -a \prec e$$

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii). Sumando a:

$$e \prec a \Longleftrightarrow e + a \prec a + a \Longleftrightarrow a \prec 2a$$

(i) $\Longleftrightarrow$ (iv). Sumando b, con cualquier $b \in G$:

$$e \prec a \Longleftrightarrow b \prec a + b \Longleftrightarrow b \prec b + a$$

Lo que completa la demostración. ■

Lema 2.3.4

Para todo a,b de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, son equivalentes:

i) $a \prec b$

ii) $-b \prec -a$

iii) $b - a \in G^+$

iv) $-a + b \in G^+$

<u>*Demostración*</u>

Como en los Lemas anteriores, se obtiene aplicando invariancia por traslaciones. ∎

Lema 2.3.5

Los conos de un grupo totalmente ordenado, no trivial, $(G, +, \precsim)$ son estables*, en el siguiente sentido:*

$$a, b \in G^+ \Longrightarrow a + b \in G^+$$

$$a, b \in G^- \Longrightarrow a + b \in G^-$$

<u>*Demostración*</u>

Siendo e el elemento neutro de G, y a, b elementos positivos, de acuerdo con el Lema 2.3.1, podemos sumar "miembro a miembro" las desigualdades $e \prec a$, $e \prec b$, de donde:

$$e \prec a + b$$

Esto es, $a + b$ es también positivo. El resultado para el caso negativo se obtiene de la misma manera. ∎

Lema 2.3.6

Sea $(G, +, \precsim)$ *un grupo totalmente ordenado. Entonces, para todo* $a, b, c \in G$*, con* $a \precsim b$ *se verifica:*

$$a + c \precsim c + b \qquad o \qquad c + a \precsim b + c$$

<u>*Demostración*</u>

De $a \precsim b$ se sigue, por la invariancia por traslaciones, $a + c \precsim b + c$ y también $c + a \precsim c + b$. Si se supone que no se verifica, por ejemplo, la primera de las desigualdades del enunciado, será (por tratarse de un orden total) $c+b \prec a+c$. Pero entonces:

$$c + a \precsim c + b \prec a + c \precsim b + c$$

y por tanto, $c + a \prec b + c$. ■

Observación

En algunos resultados que presentaremos posteriormente podrían ofrecerse demostraciones más sencillas si se supone un grupo totalmente ordenado en el que se verifican <u>las dos</u> desigualdades anteriores; es decir, $a + c \precsim c + b$ y también $c + a \precsim b + c$, cuando $a \precsim b$. Sin embargo, imponer este comportamiento es más exigente que la propia invariancia por traslaciones, e implicaría además que el grupo sea abeliano, como se establece en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1

Sea $(G, +)$ *un grupo en el que hay definido un orden total* $\precsim$ *verificando, para todo* $a, b, c \in G$*, con* $a \precsim b$*:*

$$a + c \precsim c + b \qquad y \qquad c + a \precsim b + c$$

Entonces, $(G, +)$ *es abeliano, y el orden* $\precsim$ *es invariante por traslaciones.*

<u>*Demostración*</u>

Dados $a, b \in G$, puesto que $a \precsim a$, se obtiene sumando el elemento b en las condiciones del enunciado:

$$a + b \precsim b + a \qquad \text{y} \qquad b + a \precsim a + b$$

de donde $a + b = b + a$, y el grupo resulta abeliano.

Si se consideran ahora $a, b, c \in G$ con $a \precsim b$, y por ello

$$a + c \precsim c + b \qquad \text{y} \qquad c + a \precsim b + c$$

estas desigualdades (al haber establecido ya que el grupo es necesariamente abeliano), equivalen a

$$a + c \precsim b + c \qquad \text{y} \qquad c + a \precsim c + b$$

esto es, $\precsim$ es invariante por traslaciones. ■

Observación

En diversas situaciones precisaremos una "comparación" entre los elementos $n(a+b)$ y $na+nb$ de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$; siendo a, b elementos de G, y n un número natural. En Luce y Narens [1987], al estudiar estructuras algebraicas ordenadas más generales, se destaca la importancia de poder establecer, incluso, la igualdad de ambos elementos, para evitar dificultades de interpretación y manejo de la *propiedad arquimediana* (concepto clave en la representabilidad aditiva, y que se analizará en la próxima sección).

Sin embargo, asumir la igualdad $n(a + b) = na + nb$ equivale en nuestro contexto de grupos al carácter abeliano, como comprobaremos en la siguiente proposición.

Por el interés de mantener nuestro estudio en condiciones más generales, terminaremos la sección con un Lema (establecido también en Fuchs [1963]) que permite la comparación pretendida, y al que se recurrirá frecuentemente con posterioridad.

Proposición 2.3.2

En todo grupo $(G,+)$ son equivalentes:

i) $(G,+)$ *es abeliano.*

ii) Para todo $a,b\in G$*:*

$$2a+2b=2(a+b)$$

iii) Para todo $a,b\in G$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$*:*

$$na+nb=n(a+b)$$

<u>*Demostración*</u>

Se verá primero que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). En efecto:

Si el grupo es abeliano, sumando en ambos miembros de $a+b=b+a$ "a" por la izquierda, y "b" por la derecha, se obtiene

$$a+a+b+b=a+b+a+b$$

es decir, $2a+2b=2(a+b)$.

Recíprocamente, si para todo $a,b\in G$: $2a+2b=2(a+b)$, es decir:

$$a+a+b+b=a+b+a+b$$

simplificando "a" por la izquierda y "b" por la derecha, se sigue

$$a+b=b+a$$

Para (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) nótese que es obvio, tomando $n=2$, que (iii) $\Longrightarrow$ (ii).

Procederemos finalmente por inducción para comprobar que (ii) $\Longrightarrow$ (iii), teniendo en cuenta que, si se cumple (ii), ya se ha establecido que el grupo es abeliano.

Supongamos que para todo $a, b \in G$: $2a + 2b = 2(a + b)$. Está claro que para $n = 1$ (y $n = 2$): $na + nb = n(a + b)$. Si se admite que la igualdad es cierta para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(k+1)a + (k+1)b &= a + ka + kb + b \\ &= a + k(a+b) + b \\ &= a + k(b+a) + b = (k+1)(a+b)\end{aligned}$$

esto es, la igualdad se cumple para $k + 1$, lo que completa la demostración. ■

Lema 2.3.7

Sean a, b dos elementos de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ tales que $a+b \precsim b + a$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$n.a + n.b \precsim n.(a+b) \precsim n.(b+a) \precsim n.b + n.a$$

(Nótese que, por tratarse de un orden total, siempre será cierta alguna de las desigualdades $a + b \precsim b + a$ o $b + a \precsim a + b$, por lo que el resultado será siempre aplicable).

<u>*Demostración*</u>

Siendo $a+b \precsim b+a$, la segunda desigualdad debe verificarse, por el Lema 2.3.1.

Las otras, evidentemente ciertas para $n = 1$, se demostrarán por inducción. En efecto, si se supone cierto para $k \in \mathbb{N}$:

$$k.a + k.b \precsim k.(a+b)$$

Entonces, por haber establecido ya que $k.(a+b) \precsim k.(b+a)$, se tiene:

$$k.a + k.b \precsim k.(b+a)$$

Utilizando la invariancia por traslaciones; sumando "a" por la derecha y "b" por la izquierda, resulta

$$(k+1).a + (k+1).b \precsim a + k.(b+a) + b = (k+1).(a+b)$$

Lo que demuestra que la primera desigualdad es cierta. Análogamente, para la tercera, tenemos:

$$\begin{aligned} & k.(b+a) \precsim k.b + k.a \\ \Longrightarrow & k.(a+b) \precsim k.b + k.a \\ \Longrightarrow & b + k.(a+b) + a \precsim (k+1).b + (k+1).a \\ \Longrightarrow & (k+1).(b+a) \precsim (k+1).b + (k+1).a \end{aligned}$$

Lo que completa la demostración. ■

2.4. *Grupos arquimedianos. Teorema de Hölder*

El resultado clásico de Hölder establece que:

> "*Un grupo totalmente ordenado es isomorfo e isótono a un subgrupo de la recta real si y sólo si es arquimediano*"

Puede verse la demostración de este resultado en el artículo original de Hölder [1901] y también en Cartan [1939], Birkhoff [1940–1967], Loonstra [1946] o Fuchs [1963]. Las pruebas clásicas comienzan fijando un elemento positivo en el grupo, mediante el cual es posible asociar a cualquier otro elemento un par de subconjuntos de los números racionales que constituyen una *cortadura de Dedekind*. De esta manera a cada elemento del grupo se le asocia un número real, definido por la cortadura correspondiente. Por último se comprueba que la aplicación resultante es un homorfismo inyectivo, con lo que se tiene el resultado.

La demostración alternativa que presentaremos en esta sección construye, en lugar de cortaduras, una sucesión de Cauchy de números racionales asociada a cada elemento, cuyo límite define el número real buscado. Antes de establecer dicho resultado introducimos el concepto de grupo arquimediano.

Definición 2.4.1: Grupo arquimediano

Un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ se dice *arquimediano* si para todo $a, b \in G^+$, $a \prec b$, existe un número natural n tal que $b \prec n.a$

Observación

Birkhoff [1967], p.290, en un contexto más general, define el concepto de grupo arquimediano por la condición:

$$\text{dados } a, b \in G, \text{ si } na \precsim b \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a = e$$

Posteriormente (p.300) demuestra que, para grupos totalmente ordenados, ambas condiciones son equivalentes.

Nosotros preferimos utilizar aquí como definición el primero de los enunciados porque puede también aplicarse, sin modificaciones, al caso de *semigrupos positivos*, que serán tratados en un capítulo posterior.

El Lema que introducimos a continuación se aplicará después en nuestra demostración del Teorema de Hölder. Justifica que es suficiente probar la representabilidad aditiva en el cono positivo de un grupo totalmente ordenado, puesto que siempre es posible extender tal representación a la totalidad del grupo.

Lema 2.4.1

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado, no trivial, con neutro e, y sea $u : G^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación verificando:

1) $u(b+c) = u(b) + u(c)$, para todo $b, c \in G^+$

2) $u(b) > 0$, para todo $b \in G^+$

Entonces, $(G, +, \precsim)$ es aditivamente representable mediante:

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in G^+ \\ 0 & \text{si } x = e \\ -u(-x) & \text{si } x \in G^- \end{cases}$$

Como consecuencia, un grupo totalmente ordenado es aditivamente representable si (y sólo si) lo es su cono positivo.

Demostración

1) Comenzamos probando que la aplicación u^* es aditiva. En efecto, dados $b, c \in G$ y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $b \precsim c$ pueden distinguirse los siguientes casos:

1.1) $b = e$ o $c = e$. Entonces, trivialmente,

$$u^*(b+c) = u^*(b) + u^*(c)$$

1.2) $e \prec b, c$. Entonces, $e \prec b + c$ Así:

$$u^*(b+c) = u(b+c) = u(b) + u(c) = u^*(b) + u^*(c)$$

1.3) $b, c \prec e$. Entonces, $b + c \prec e$ Así:

$$u^*(b+c) = -u(-c-b) = -u(-c) - u(-b) = u^*(b) + u^*(c)$$

1.4) $b \prec e \prec c$, y $e \prec b + c$. Entonces, $e \prec -b$ y $e \prec -b + c$. Así:

$$u^*(c) = u(c) = u(-b + (b + c)) = u(-b) + u(b + c) \Longrightarrow$$
$$u^*(b + c) = u(b + c) = -u(-b) + u^*(c) = u^*(b) + u^*(c)$$

1.5) $b \prec e \prec c$, $b + c \prec e$. Entonces, de manera análoga al caso anterior:

$$u^*(b) = -u(-b) = -u(c - (b + c))$$
$$= -u(c) - u(-(b + c)) = -u(c) + u^*(b + c) \Longrightarrow$$
$$u^*(b + c) = u^*(b) + u(c) = u^*(b) + u^*(c)$$

1.6) $b \prec e \prec c$, $b + c = e$. Entonces, $-b = c$. Así:

$$u^*(b + c) = 0 = -u(-b) + u(-b) = u^*(b) + u^*(c)$$

2) Para ver, por último, que u^* es utilidad; supongamos dados $b, c \in G$, con $b \prec c$. Puede expresarse el elemento c en la forma: $c = b + (-b + c)$, donde, por el Lema 2.3.4, $-b + c$ es positivo. Por tanto:

$$u^*(b) < u^*(b) + u(-b + c) = u^*(b) + u^*(-b + c) = u^*(b - b + c) = u^*(c)$$

Lo que completa la demostración. ■

Teorema 2.4.1 (Hölder 1901)

Un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ es aditivamente representable si y solamente si es arquimediano.

<u>*Demostración*</u>

Es obvio, por ser el grupo aditivo de los números reales arquimediano, que si $(G, +, \precsim)$ es aditivamente representable, entonces debe ser arquimediano.

Para el recíproco, consideramos un elemento positivo $a \in G^+$ fijo. Por el Lema anterior, basta demostrar la existencia de representación en el cono positivo de G. Desarrollamos la prueba en varios pasos.

1) Para cada elemento positivo $b \in G$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$, único, tal que:

$$(m - 1).a \prec n.b \precsim m.a$$

En efecto, fijados b y n cualesquiera, si ocurre que $n.b \precsim a$, entonces es $m = 1$. En otro caso, aunque sea $a \prec n.b$, la propiedad arquimediana garantiza que la sucesión $(k.a)_{k=1}^{\infty}$ no puede estar acotada por el elemento $n.b$, por lo que para algún número natural m debe cumplirse $(m - 1).a \prec n.b \precsim m.a$, y se tiene el resultado.

De esta forma, para cualquier $b \in G^+$, queda definida una aplicación

$$N_b : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

que a cada número natural n le hace corresponder el número natural único recién establecido, $m = N_b(n)$, tal que:

$$[N_b(n) - 1]\,.a \prec n.b \precsim N_b(n).a$$

2) La sucesión $\left(\dfrac{N_b(n)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y por tanto convergente.

En efecto; fijado cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, consideremos $p, q \in \mathbb{N}$ con $1/p, 1/q < \varepsilon$. Por definición de la aplicación N_b se tiene:

$$[N_b(p) - 1].a \prec p.b \precsim N_b(p).a$$

$$[N_b(q) - 1].a \prec q.b \precsim N_b(q).a$$

Por el Lema 2.3.1; las desigualdades se mantienen multiplicando por números naturales. Multiplicando la primera por q, la segunda por p:

$$[q.N_b(p) - q].a \prec \ p.q.b \ \precsim q.N_b(p).a$$
$$[p.N_b(q) - p].a \prec \ p.q.b \ \precsim p.N_b(q).a$$

En cambio por el Lema 2.3.4, al tomar opuestos se invierten las desigualdes. Considerando los elementos opuestos en la segunda desigualdad:

$$[q.N_b(p) - q].a \prec \ p.q.b \ \precsim q.N_b(p).a$$
$$- p.N_b(q).a \precsim \ -p.q.b \ \prec [-p.N_b(q) + p].a$$

Nuevamente por el Lema 2.3.1, estas desigualdades pueden sumarse miembro a miembro, con lo que se obtiene:

$$[q.N_b(p) - p.N_b(q) - q].a \prec e \prec [q.N_b(p) - p.N_b(q) + p].a$$

donde e es el elemento neutro de G.

Por ser el elemento a positivo, y según el Lema 2.3.2, estas desigualdades sólo pueden obtenerse siendo el número entero $q.N_b(p)-p.N_b(q)-q$ negativo y $q.N_b(p) - p.N_b(q) + p$, por el contrario, positivo. Es decir:

$$q.N_b(p) - p.N_b(q) - q < 0 < q.N_b(p) - p.N_b(q) + p$$

Dividiendo por $p.q$ resulta

$$\frac{N_b(p)}{p} - \frac{N_b(q)}{q} - \frac{1}{p} < 0 < \frac{N_b(p)}{p} - \frac{N_b(q)}{q} + \frac{1}{q}$$

De donde se obtiene la acotación:

$$-\frac{1}{q} < \frac{N_b(p)}{p} - \frac{N_b(q)}{q} < \frac{1}{p}$$

y por ello, finalmente:

$$\left| \frac{N_b(p)}{p} - \frac{N_b(q)}{q} \right| < \varepsilon$$

Es decir, se trata en efecto de una sucesión de Cauchy.

3) Defínase ahora $u : G^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$u(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_b(n)}{n}$$

En particular, $u(a) = 1$. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene trivialmente que $(n-1).a \prec n.a \precsim n.a$, de donde por definición, para todo número natural n es $N_a(n) = n$. Resulta así que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_a(n)}{n} = 1$

Nótese también que $u(b) \geq 0$ para todo $b \in G^+$, por ser el límite de números racionales positivos.

4) La aplicación u es aditiva. Para comprobarlo, sean $b, c \in G^+$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, $b + c \precsim c + b$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica, por definición:

$$[N_b(n) - 1].a \prec n.b \precsim N_b(n).a$$

$$[N_c(n) - 1].a \prec n.c \precsim N_c(n).a$$

Sumando la primera más la segunda miembro a miembro:

$$[N_b(n) + N_c(n) - 2].a \prec n.b + n.c \precsim [N_b(n) + N_c(n)].a$$

y sumando la segunda más la primera:

$$[N_b(n) + N_c(n) - 2].a \prec n.c + n.b \precsim [N_b(n) + N_c(n)].a$$

Estas dos desigualdades pueden encadenarse recurriendo al Lema 2.3.7, de acuerdo con el cual debe cumplirse:

$$n.b + n.c \precsim n.(b + c) \precsim n.(c + b) \precsim n.c + n.b$$

lo que permite asegurar que:

$$[N_b(n) + N_c(n) - 2].a \prec n.(b + c) \precsim n(c + b) \precsim [N_b(n) + N_c(n)].a$$

Si se comparan estas últimas desigualdes con las siguientes, que corresponden a la definición de $N_{b+c}(n)$ y $N_{c+b}(n)$:

$$[N_{b+c}(n) - 1].a \prec n.(b + c) \precsim [N_{b+c}(n)].a$$
$$[N_{c+b}(n) - 1].a \prec n.(c + b) \precsim [N_{c+b}(n)].a$$

se aprecia que ambos números naturales, $N_{b+c}(n)$ y $N_{c+b}(n)$, no pueden diferir de $N_b(n) + N_c(n)$ en más de una unidad. Concretamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, debe ser:

$$N_b(n) + N_c(n) - 1 \leq \left\{ \begin{matrix} N_{b+c}(n) \\ \\ N_{c+b}(n) \end{matrix} \right\} \leq N_b(n) + N_c(n)$$

Por lo que, dividiendo por n y pasando al límite:

$$u(b + c) = u(c + b) = u(b) + u(c)$$

Esto es, u es aditiva.

5) Para todo $b \in G^+$ es $u(b) > 0$. En efecto; consideremos todos los casos que pueden presentarse, al comparar b con a:

Si $b = a$, es $u(b) = u(a) = 1$

Si $a \prec b$, $b = a + (-a + b)$, con $-a + b$ positivo. Así

$$u(b) = u(a) + u(-a + b) \geq u(a) = 1$$

Si $b \prec a$, puesto que G es arquimediano, existe $m \in \mathbb{N}$ con $a \prec m.b$. Entonces:

$$a \prec mb \Longrightarrow u(mb) \geq 1 \Longrightarrow m.u(b) \geq 1 \Longrightarrow u(b) \geq 1/m > 0$$

6) La aplicación u cumple así las condiciones del Lema 2.4.1, por lo que se tiene el resultado. ■

Corolario 2.4.1

Todo grupo totalmente ordenado y arquimediano es abeliano.

Demostración

Es consecuencia inmediata de la representabilidad aditiva, asegurada por el Teorema de Hölder. ■

Observación

Puesto que la propia representabilidad aditiva exige que la estructura sea conmutativa, podría suponerse, debilitando la generalidad del enunciado del Teorema de Hölder, que el grupo a representar es, de partida, abeliano. En tal caso, para todo par de elementos b, c, del grupo se verifica la igualdad:

$$n.(b+c) = n.b + n.c$$

lo que permite simplificar el paso 4 de la demostración anterior (comprobación de que la función u es aditiva). Hicimos notar ya en la sección anterior que en Luce y Narens [1987] se destaca la importancia, en relación a la propiedad arquimediana, de poder identificar o no en determinadas estructuras "*n copias de $b+c$*" con "*n copias de b más n copias de c*".

Sin embargo, al admitir la generalidad del enunciado, no puede garantizarse la igualdad anterior. En la demostración del Teorema de Hölder hemos salvado esta dificultad recurriendo al Lema 2.3.7.

Ejemplo 2.4.1

Los elementos positivos $(0,1)$, $(1,0)$ del *plano lexicográfico* $(\mathbb{R}^2, +, \precsim_L)$ (véase Ejemplo 2.2.1) violan la propiedad arquimediana, puesto que para todo número natural n:

$$n(0,1) = (0,n) \prec (1,0)$$

Por tanto, este grupo no es aditivamente representable.

Es un resultado conocido que ni siquiera es representable; es decir, no existe función de utilidad para $(\mathbb{R}^2, \precsim_L)$ considerado como conjunto totalmente ordenado (véase, por ejemplo, Debreu [1959], Fishburn [1974], Wakker [1988] o Candeal e Induráin [1993]).

Cabe añadir que si consideramos el subgrupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *lexicográfico*, esto es, los puntos del plano lexicográfico con coordenadas en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, el mismo par de elementos anterior confirma que todavía se trata de un grupo no arquimediano, y por tanto no representable aditivamente. Sin embargo ahora, el conjunto totalmente ordenado $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \precsim_L)$ admite función de utilidad, por tratarse de un conjunto contable (ver Proposición 1.3.4).

2.5. *Propiedad* $\{n+1, n\}$ *y propiedad* $\{p > q\}$

Dedicamos este apartado a estudiar dos propiedades que, en el contexto de la teoría de grupos totalmente ordenados, son equivalentes a la propiedad arquimediana y por tanto, de acuerdo con el Teorema de Hölder, a la existencia de función de utilidad aditiva.

Como se verá en el Capítulo 3, para el caso de *semigrupos totalmente ordenados*, estas propiedades son la clave de la representabilidad aditiva, puesto que en esta última estructura:

1) La equivalencia entre las nuevas propiedades y la arquimediana, deja de ser cierta.

2) La propiedad arquimediana no es suficiente para garantizar la existencia de utilidad aditiva.

y 3) La representabilidad aditiva queda caracterizada a partir de estas nuevas propiedades.

La primera de ellas, que aquí denominamos *propiedad* $\{n+1, n\}$, fue introducida por Alimov [1950] (véase también Hion [1957] y Fuchs [1963]). Más recientemente se han dado condiciones análogas en Holman [1971] y Skala [1975]. La segunda propiedad, que denominamos $\{p > q\}$, parece ser nueva en la literatura.

Como ya comentabamos en la introducción del capítulo, exigir que un grupo totalmente ordenado sea arquimediano expresa, intuitivamente, que no coexisten en tal grupo elementos *infinitamente grandes unos respecto a otros*; mientras que ambas propiedades $\{n+1, n\}$ y $\{p > q\}$ evitarán la existencia de elementos *infinitamente próximos entre sí*.

Además de mostrar la equivalencia de todas estas propiedades (Teorema 2.5.1), en la Proposición 2.5.2 comprobaremos que, en cualquier grupo no arquimediano, operando con elementos que no verifiquen las propiedades $\{n+1, n\}$ o $\{p > q\}$, pueden obtenerse con facilidad elementos concretos que violan la propiedad arquimediana, y recíprocamente.

Para realizar la primera de las construcciones mencionadas es suficiente utilizar la suma (la operación interna) del grupo; sin embargo la segunda requiere realizar una *diferencia* entre elementos, es decir, debe recurrirse a la existencia de elemento opuesto. La existencia de tal elemento opuesto está garantizada, por definición, en cualquier grupo, por lo que es natural conjeturar la equivalencia entre todas las propiedades mencionadas.

Por el contrario, cuando se considera el caso de semigrupos, y por tanto no se garantiza la existencia de elementos opuestos, son admisibles *a priori* elementos con mal comportamiento para las propiedades $\{n+1, n\}$ y $\{p > q\}$, aunque el semigrupo sea arquimediano.

Por otra parte, el estudio de estas propiedades para grupos totalmente ordenados, nos va a permitir proporcionar una prueba de la conmutatividad de la estructura. Como hemos destacado en el Corolario 2.4.1, es consecuencia del Teorema de Hölder que, en grupos totalmente ordenados, se verifica:

$$\textit{Arquimediano} \Longrightarrow \textit{Abeliano}$$

Sin embargo, en Roberts [1979], p. 124, se pone de manifiesto que en la literatura faltan demostraciones simples de este hecho (sin hacer uso de la representabilidad aditiva). Presentamos aquí (Teorema 2.5.2) una demostración directa, basada precisamente en las propiedades $\{n+1, n\}$ y $\{p > q\}$. (Notemos, sin embargo, que otra demostración directa aparece en Fuchs [1963], pp.164–165).*

Definición 2.5.1

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado, con elemento neutro e.

1) Se dice que $(G, +, \precsim)$ *verifica la propiedad* $\{n + 1, n\}$ si $\forall a, b \in G^+$, con $a \prec b$, existe $n \in \mathbb{N}$ (dependiente de a y b) tal que $(n + 1).a \prec n.b$

2). Se dice que $(G, +, \precsim)$ *verifica la propiedad* $\{p > q\}$ si $\forall a, b \in G^+$, con $a \prec b$, existen $p, q \in \mathbb{N}, p > q$ (dependientes de a y b), tales que $p.a \prec q.b$.

Lema 2.5.1

Un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ es abeliano si y sólo si su cono positivo es abeliano.

Demostración

Una demostración aparece en Birkhoff [1967], p. 316. Se presenta aquí una prueba alternativa.

$*$ De hecho, hay también pruebas directas en Cartan [1939], Everett y Ulam [1945] y Chehata [1958].

Si el grupo es abeliano, está claro que lo será también su cono positivo.

Para el recíproco, consideramos un par de elementos $a, b \in G$. Las situaciones posibles quedan reducidas a los siguientes casos:

1) Alguno de ellos es el elemento neutro de G. Es obvio que $a + b = b + a$

2) $a, b \in G^+$. Por hipótesis, $a + b = b + a$.

3) $-a, -b \in G^+$. Entonces:

$$a + b = -((-b) + (-a)) = -((-a) + (-b)) = b + a$$

4) Un elemento y el opuesto del otro son positivos. Por ejemplo, $a, -b \in G^+$. Entonces:

$$a + (-b) = (-b) + a \Longrightarrow b + a + (-b) = b + (-b) + a = a$$

$$\Longrightarrow b + a + (-b) + b = a + b \Longrightarrow b + a = a + b$$

Luego, en cualquiera de las situaciones posibles, resulta $a + b = b + a$, y el grupo es abeliano. ■

Lema 2.5.2

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado que verifica la propiedad $\{p > q\}$. Entonces, G es abeliano. Como consecuencia, todo grupo totalmente ordenado que verifica la propiedad $\{n + 1, n\}$ es abeliano.

Demostración

Admitamos, por reducción al absurdo, que $a + b \prec b + a$ para algún par de elementos $a, b \in G^+$. Sabemos, por el Lema 2.3.5, que estos elementos $a + b$ y $b + a$ pertenecen también al cono postivo de G.

Para cualquier $q \in \mathbb{N}$, puesto que los elementos a y b son positivos, debe cumplirse por el Lema 2.3.3:

$$q.(b+a) \prec a + q.(b+a) + b$$

El elemento del segundo miembro es $(q+1).(a+b)$, por tanto:

$$q.(b+a) \prec (q+1).(a+b)$$

Dado ahora cualquier $p \in \mathbb{N}$, con $p > q$, también es $q+1 \leq p$, y por el Lema 2.3.1, $(q+1).(a+b) \precsim p.(a+b)$. Como consecuencia, se concluye:

$$q.(b+a) \prec p.(a+b)$$

Esto significa que el grupo no puede verificar la propiedad $\{p > q\}$, lo que supone una contradicción. Por tanto, el cono positivo de G es conmutativo y, de acuerdo con el anterior Lema 2.5.1, el propio G es abeliano.

Para la consecuencia, basta observar que –obviamente– la propiedad $\{n{+}1, n\}$ implica la $\{p > q\}$. ■

Estamos ya en condiciones de demostrar que, en cualquier grupo totalmente ordenado, las propiedades *arquimediana*, $\{n+1, n\}$ y $\{p > q\}$ son todas equivalentes y que, por tanto, cualquiera de ellas caracteriza la representabilidad aditiva:

propiedad arquimediana	$\Longleftrightarrow$	*existe utilidad aditiva*	$\Longleftrightarrow$	*propiedad* $\{n+1, n\}$	$\Longleftrightarrow$	*propiedad* $\{p > q\}$

Teorema 2.5.1

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $(G, +, \precsim)$ *es arquimediano*

ii) $(G, +, \precsim)$ *es aditivamente representable*

iii) $(G, +, \precsim)$ *verifica la propiedad* $\{n + 1, n\}$

iv) $(G, +, \precsim)$ *verifica la propiedad* $\{p > q\}$

Demostración

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Es parte del Teorema de Hölder.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Excluyendo el caso trivial $G = \{e\}$, sea G^+ el cono positivo de G, y sean $a, b \in G^+$, tales que $a \prec b$. Por hipótesis, existe alguna función de utilidad aditiva u para $(G, +, \precsim)$. Entonces, $0 < u(a) < u(b)$, y debe ser $0 < [u(a)/u(b)] < 1$.

Por tanto, existe algún número natural n tal que $[u(a)/u(b)] < [n/(n + 1)]$, lo que equivale a: $(n + 1).u(a) < n.u(b)$.

Siendo u aditiva, se tiene: $u[(n+1).a] < u(n.b)$, y finalmente $(n+1).a \prec n.b$, puesto que u es función de utilidad.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

Es evidente

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

Supongamos que G verifica la propiedad $\{p > q\}$. Sean $a, b \in G^+$, tales que $a \prec b$. Por ser a positivo, se sigue del Lema 2.3.3 que $b \prec b + a$, por lo que deben existir $p, q \in \mathbb{N}$, con $p > q$, y tales que $p.b \prec q.(b + a)$.

Por el Lema 2.5.2, G es abeliano, y entonces es $q.(b + a) = q.b + q.a$. Escribiendo $p = q + (p - q)$, se tiene:

$$q.b + (p - q).b \prec q.b + q.a$$

y por la invariancia por traslaciones:

$$(p - q).b \prec q.a$$

Así : $b \precsim (p - q).b \prec q.a$, por lo que G es arquimediano. ■

Veamos ahora una prueba directa de que la propiedad arquimediana en un grupo totalmente ordenado implica la propiedad conmutativa.

Teorema 2.5.2

Todo grupo totalmente ordenado y arquimediano es conmutativo.

Demostración

El resultado se sigue del Lema 2.5.2 y la equivalencia entra las propiedades arquimediana y $\{n + 1, n\}$, que hemos establecido en el Teorema 2.5.1. Sin embargo, la demostración de este Teorema ha hecho uso del teorema de Hölder.

Para disponer de una prueba directa, basada en el Lema 2.5.2, es suficiente probar, sin usar la representabilidad aditiva del grupo, que: “*todo grupo totalmente ordenado y arquimediano verifica la propiedad* $\{n + 1, n\}$”.

En efecto, supongamos que G^+ es el cono positivo de un grupo totalmente ordenado $(G,+,\precsim)$. Si se supone que G no verifica la propiedad $\{n+1,n\}$, entonces existen $a,b \in G^+$ tales que $a \prec b$ pero $n.b \prec (n+1).a$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por la invariancia por traslaciones, se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$[1] \qquad \begin{cases} n.b - n.a \prec a \\ -n.a + n.b \prec a \end{cases}$$

Puesto que el grupo es arquimediano y, por el Lema 2.3.4, los elementos $b-a$ y $-a+b$ son positivos; deben existir números naturales n_0, n_1 tales que

$$[2] \qquad \begin{cases} a \prec n_0(b-a) \\ a \prec n_1(-a+b) \end{cases}$$

Nótese también que $n_0, n_1 > 1$. Enlazando [1] y [2] se tiene que:

$$[3] \qquad \begin{cases} n_0 b - n_0 a \prec n_0(b-a) \\ -n_1 a + n_1 b \prec n_1(-a+b) \end{cases}$$

Supongamos el caso en que $b+a \precsim a+b$. Sumando $-a$ por la izquierda y por la derecha, se sigue que también:

$$-a+b \precsim b-a$$

Entonces, de acuerdo con las desigualdades establecidas en el Lema 2.3.7, debe ser para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n.(b-a) \precsim n.b - n.a$$

contra la primera desigualdad de [3].

Análogamente, si es $a+b \precsim b+a$, y por tanto también

$$b-a \precsim -a+b$$

se sigue del mismo Lema 2.3.7 que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n.(-a+b) \precsim -n.a + n.b$$

lo que contradice a la segunda de las desigualdades en [3].

Se concluye que G debe verificar la propiedad $\{n+1,n\}$, lo que completa la demostración. ■

Para finalizar esta sección presentamos dos propiedades que muestran situaciones o construcciones concretas de pares de elementos que no verifican la propiedad arquimediana o la $\{n+1, n\}$.

La primera de ellas justifica que en un grupo no abeliano (y por tanto, no arquimediano), las sumas $a+b$ y $b+a$ de cualquier par de elementos positivos a y b que no conmuten, constituyen en particular elementos que no cumplen la propiedad $\{n+1, n\}$.

La segunda explica cómo construir elementos que violen la propiedad arquimediana, a partir de elementos que no verifiquen la $\{n+1, n\}$ y, reciprocamente, que no cumplen la propiedad $\{n+1, n\}$, a partir de elementos que no cumplan la arquimediana.

Proposición 2.5.1

Sean a y b dos elementos positivos de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ tales que $a+b \neq b+a$. Entonces, los elementos $a+b$ y $b+a$ no cumplen la propiedad $\{n+1, n\}$.

Demostración

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que para los elementos considerados se cumple:

$$a + b \prec b + a$$

y por tanto, para todo número natural n:

$$n(a+b) \prec n(b+a)$$

De acuerdo con el Lema 2.3.3, y puesto que los elementos a y b son positivos, se cumple:

$$n(b+a) \prec a + n(b+a) + b$$

El segundo miembro de la última expresión es $(n+1)(a+b)$, por lo que resulta en definitiva, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n(b+a) \prec (n+1)(a+b)$$

es decir, entre los elementos $a+b$ y $b+a$ no puede establecerse la propiedad $\{n+1, n\}$. ■

Proposición 2.5.2

Sean a y b, con $a \prec b$, dos elementos positivos de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$. Entonces son equivalentes:

i) Para todo $n \in \mathbb{N}$: $n.b \prec (n+1).a$

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$: $n.(b-a) \prec a$

iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$: $n(-a+b) \prec a$

De otra manera, los elementos a, b, con $a \prec b$, no verifican la propiedad $\{n+1, n\}$ si y sólo si su diferencia $b-a$ no verifica la propiedad arquimediana con respecto al elemento a. Lo mismo para su diferencia $-a+b$.

(Nótese que, de la misma manera, dados dos elementos postivos $c, d \in G$, será $n.c \prec d$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si los elementos d y $c+d$ violan la propiedad $\{n+1, n\}$. Lo mismo para los elementos d y $d+c$)

<u>Demostración</u>

Supondremos el caso en que $b-a \precsim -a+b$, siendo la prueba análoga cuando $-a+b \precsim b-a$. Utilizando el Lema 2.3.7 en la situación propuesta, se cumple para todo número natural n:

$$[*] \qquad n.b - na \precsim n(b-a) \precsim n(-a+b) \precsim -na+nb$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) y (iii)

Por la invariancia por traslaciones, supuesto $nb \prec (n+1)a$, y sumando $-n.a$ por la izquierda, resulta, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$-na + nb \prec a$$

Expresión que ligada a la anterior [$*$] permite concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n(b-a) \prec a \qquad \text{y también} \qquad n(-a+b) \prec a$$

(ii) o (iii) $\Longrightarrow$ (i)

Tanto si se supone ahora $n(b-a) \prec a$ o bien $n(-a+b) \prec a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de la expresión [$*$] se deduce

$$n.b - n.a \prec a$$

Aplicando invariancia por traslaciones, sumando $n.a$ por la derecha, resulta para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n.b \prec (n+1).a$$

Esto completa la demostración. ■

2.6. *Otras caracterizaciones de la representabilidad aditiva*

Recordemos algunos de los conceptos y resultados que se han recogido en el Capítulo 1, sobre la existencia de utilidad en conjuntos totalmente ordenados. (Para más detalles puede consultarse Candeal e Induráin [1990 (2)]).

En la Proposición 1.3.2 vimos que la representabilidad de un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$ viene dada por la condición de *perfecta separabilidad*; esto es, por la existencia de un subconjunto contable $D \subseteq X$ tal que para todo $a, b \in X$ con $a \prec b$, existe $d \in D$ tal que $d \in [a, b] = \{x \in X\,; a \precsim x \precsim b\}$ (ver Definición 1.3.2). El subconjunto D se dice *orden denso* en X.

La *separabilidad* de un espacio topológico X (existencia de un subconjunto contable $D' \subseteq X$ que corta a todo abierto no vacío de la topología) equivale, cuando se considera la *topología del orden* en un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$, a la existencia de un subconjunto contable $D' \subseteq X$ tal que para todo $a, b \in X$ con $a \prec b$ y $(a, b) = \{x \in X\,; a \prec x \prec b\} \neq \emptyset$, existe $d \in D'$ tal que $d \in (a, b)$. La separabilidad, sin embargo, no caracteriza en general la existencia de función de utilidad. Cuando $(X, \precsim)$ *carece de huecos*; esto es, para todo $x, y \in X$, existe $z \in X$ con $x \prec z \prec y$, *separabilidad* implica *perfecta separabilidad* y la existencia de utilidad sí queda garantizada por el carácter separable (ver Proposiciones 1.3.1 y 1.3.1').

Comenzamos esta sección estudiando la forma de extender resultados como los anteriores al caso de grupos totalmente ordenados. Concretamente, buscamos condiciones que, añadidas a la separabilidad (o perfecta separabilidad), impliquen la representabilidad aditiva. Para este fin, resultará útil contar con la siguiente definición:

Definición 2.6.1: Par arquimediano

Diremos que dos elementos positivos x, y de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ constituyen un *par arquimediano* si existen números naturales n_0, n_1 tales que

$$x \prec n_0 y \qquad y \prec n_1 x$$

En caso contrario, diremos que constituyen un *par no arquimediano*

Por extensión del mismo concepto: un subconjunto S del cono positivo de un grupo totalmente ordenado se dirá *arquimediano*, si cada dos elementos de S constituyen un par arquimediano; y se dirá *no arquimediano* si contiene un par no arquimediano.

Teorema 2.6.1

Si un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, no trivial, contiene un subconjunto orden denso D tal que $G^+ \cap D$ es un conjunto arquimediano, entonces el propio grupo G es arquimediano.

<u>*Demostración*</u>

Sean $a, b \in G$; con $e \prec a \prec b$, siendo e el elemento neutro de G. Comprobemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ con $b \prec n_1 a$.

Si es $b \precsim 2.a$ (y entonces $b \prec 3.a$) se tiene el resultado. En otro caso, se verifica:

$$e \prec a \prec 2a \prec b \prec 2b$$

Por tanto, existen $d_1, d_2 \in D \cap G^+$ tales que:

$$a \precsim d_1 \precsim 2a \prec b \precsim d_2 \prec 2b$$

Puesto que $D \cap G^+$ es un subconjunto arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $d_2 \prec n_0 d_1$. Así:

$$b \precsim d_2 \prec n_0 d_1 \precsim 2n_0 a$$

Con lo que se tiene el resultado, para $n_1 = 2n_0$. ■

Teorema 2.6.2

Dado un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, no trivial, son equivalentes:

i) $(G, +, \precsim)$ es aditivamente representable.

ii) G contiene un subgrupo contable, orden denso y arquimediano.

iii) G contiene un subconjunto contable y orden denso D tal que $G^+ \cap D$ es un conjunto arquimediano.

<u>*Demostración*</u>

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Si el grupo es aditivamente representable entonces, en particular, es representable. Puede asegurarse entonces que G es perfectamente separable.

Sea $D \subseteq G$ subconjunto contable, orden denso. El subgrupo $< D >$ generado por D:

$$< D >= \{\pm d_1 \pm d_2 \pm \cdots \pm d_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

es claramente contable, y también orden denso por contener a D. Además es aditivamente representable, por serlo G.

Por tanto, $< D >$ es un subgrupo contable, orden denso y arquimediano.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Es evidente.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

Si se supone que G admite un subconjunto contable, orden denso y arquimediano entonces, por el Teorema anterior, el propio G es arquimediano y, por tanto, aditivamente representable. ■

Observación

En el Ejemplo 2.4.1 hemos estudiado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *lexicográfico*:

$$\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \precsim_L\}$$

como ejemplo notable de grupo totalmente ordenado que no admite utilidad aditiva, por no ser arquimediano.

El siguiente Teorema muestra que la representabilidad aditiva de cualquier grupo abeliano totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ se caracteriza, precisamente, por no contener como subgrupo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico.

Teorema 2.6.3

Si un grupo abeliano totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ no es aditivamente representable entonces contiene un subgrupo isomorfo e isótono a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico.

(El recíproco es obvio, puesto que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico no es aditivamente representable).

Demostración

Si G no es aditivamente representable, tampoco es arquimediano. Por tanto, contiene un par no arquimediano; es decir, existen $x, y \in G^+$ tales que para todo $k \in \mathbb{Z}$: $k.y \prec x$.

Al ser G abeliano, el subgrupo generado por x e y es de la forma:

$$\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y = \{m.x + n.y; m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Consideremos dos elementos de este subgrupo, $m.x + n.y$, $m'.x + n'.y$, y analicemos las situaciones que pueden presentarse según sean los enteros m, n, m', n':

1) Supongamos $m < m'$. Entonces

$$e \prec x \precsim (m' - m).x$$

Como $k.y \prec x$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, para cualquier n, n' se cumple $(n - n').y \prec (m' - m).x$, y así:

$$m.x + n.y \prec m'.x + n'y$$

2) De la misma forma, suponiendo $m' < m$, se obtiene como conclusión:

$$m'.x + n'.y \prec m.x + ny$$

3) Por último, si es $m = m'$, entonces también $m.x = m'.x$. Además $n.y \precsim n'.y \Longleftrightarrow n \leq n'$; de donde por la invariancia por traslaciones:

$$m.x + n.y \precsim m'.x + n'.y \Longleftrightarrow n \leq n'$$

Obtenemos como conclusión que el orden $\precsim$ del grupo, restringido al subgrupo $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ viene dado por el orden lexicográfico entre los pares (m, n), (m', n'):

$$m.x + n.y \precsim m'.x + n'.y \quad \Longleftrightarrow \quad m < m' \;\text{ o }\; m = m',\; n \leq n'$$

Así, la aplicación $f : (\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y, +, \precsim) \longrightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \precsim_L)$ dada por:

$$f(m.x + n.y) = (m, n)$$

que es, claramente, un isomorfismo de grupos, verifica además:

$$m.x + n.y \precsim m'.x + n'.y \quad \Longleftrightarrow \quad f(m.x + n.y) \precsim_L f(m'.x + n'.y)$$

Lo que completa la demostración. ■

Observación

La caracterización dada en el Teorema anterior precisa que el grupo $(G, +, \precsim)$ sea *abeliano*.

A continuación presentamos un ejemplo de grupo totalmente ordenado, no abeliano, que aparece también esencialmente en Birkhoff [1967], p.302. (Birkhoff se refiere al grupo de todas las transformaciones afines $f : x \mapsto ax + b \quad (a > 0, a, b \in \mathbb{R})$; que nosotros formulamos de manera diferente, con notación matricial). Obviamente, al no ser abeliano, no puede ser tampoco aditivamente representable; pero además comprobaremos que no contiene ninguna copia de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico.

Ejemplo 2.6.1

Sea M el siguiente conjunto de matrices 2×2:

$$M = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0\}$$

La operación *producto de matrices* es estable en M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b + ab' & aa' \end{pmatrix} \in M$$

Además, dada $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in M$, existe inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b/a & 1/a \end{pmatrix}$$

que también pertenece a M. Por tanto, $(M, \times)$ tiene estructura de grupo, que no es abeliano. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideramos en M el orden total $\precsim$ dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b' & a' \end{pmatrix} \iff a < a' \text{ ó } a = a',\ b \leq b'$$

Este orden es invariante por traslaciones. En efecto, para cualquier $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b' & a' \end{pmatrix} &\iff a < a' \text{ ó } a = a',\ b \leq b' \\
&\iff ac < a'c \text{ ó } ac = a'c,\ b + ad \leq b' + a'd \quad (\text{por ser } ad = a'd, c > 0) \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b + ad & ac \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b' + a'd & a'c \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & c \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b' & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La comprobación multiplicando por la izquierda es análoga.

Así, $(M, \times, \precsim)$ es un grupo totalmente ordenado, no abeliano; que además no contiene ningún subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico. En efecto: El cono positivo de M es el conjunto:

$$M^{+} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix};\ a > 1 \text{ ó } a = 1,\ b > 0\}$$

Supongamos que dos matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$ del cono positivo de M fueran tales que $A^n \precsim B$ para todo $n \in \mathbb{N}$; esto es:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) & a^n \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = B \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se seguiría que $a^n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, necesariamente, $a = 1$, y por tanto $b > 0$, puesto que A pertenece al cono positivo. La situación que se alcanza es por tanto:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n.b & 1 \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = B \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

El caso $c = 1$ puede ser descartado, pues de lo contrario debe ser $n.b \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que es imposible al ser $b > 0$. Por tanto $c > 1$.

Finalmente observemos que:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b + d & c \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ bc + d & c \end{pmatrix} = B.A$$

puesto que $b \neq bc$, al ser $c \neq 1$.

Concluímos que cualquier par no arquimediano de elementos en M^+ genera un subgrupo no abeliano. En estas condiciones, $(M, \times, \precsim)$ no puede contener a $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \precsim_L)$ como subgrupo, puesto que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ es abeliano. ■

Observación

El Teorema anterior permite reconocer a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico (un grupo generado por dos elementos) como "germen" de la no representabilidad aditiva en grupos abelianos.

Clasificaremos a continuación las posibles estructuras de grupo abeliano totalmente ordenado generado por dos elementos, lo que permitirá obtener posteriormente algunas propiedades adicionales de los grupos arquimedianos, relacionadas con los resultados de densidad con los que daba comienzo la sección.

Teorema 2.6.4

Sea $(\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y, +, \precsim)$ un grupo abeliano totalmente ordenado, generado por los elementos (distintos) x, y. Entonces, dicho grupo es isomorfo e isótono a una de las tres siguientes estructuras:

1) El grupo aditivo totalmente ordenado $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ de los números enteros, con la suma y orden habituales.

2) El grupo totalmente ordenado de números reales $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha, +, \leq)$, con la suma y orden habituales, siendo α un número irracional.

3) El grupo totalmente ordenado $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \precsim_L)$, con la suma habitual coordenada a coordenada, y el orden lexicográfico. (Es decir, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ lexicográfico).

Demostración

Si alguno de los elementos x o y considerados es el neutro e, entonces el grupo es claramente isomorfo e isótono al de los números enteros. Consideraremos, sin pérdida de generalidad, que los generadores x, y son positivos. Resulta así: $e \prec x \prec y$.

Primera posibilidad: $\mathbb{Z}x \cap \mathbb{Z}y \neq \{e\}$

Sean $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$, no nulos, tales que $m_0 x = n_0 y$. Podemos suponer que el máximo común divisor de m_0 y n_0 es: $m.c.d.(m_0, n_0) = 1$. Entonces, por la *identidad de Bézout*, existen números enteros m_1, n_1 tales que*

$$m_0 m_1 + n_0 n_1 = 1$$

Esto permite expresar:

$$\begin{aligned} x &= (m_0 m_1 + n_0 n_1)x = m_0 m_1 x + n_0 n_1 x = n_0 m_1 y + n_0 n_1 x \\ &= n_0(m_1 y + n_1 x) \end{aligned}$$

* Sobre la identidad de Bézout, puede consultarse, por ejemplo, Samuel [1971], p. 14.

Y, análogamente:

$$\begin{aligned} y &= (m_0 m_1 + n_0 n_1)y = m_0 m_1 y + n_0 n_1 y = m_0 m_1 y + m_0 n_1 x \\ &= m_0(m_1 y + n_1 x) \end{aligned}$$

Así, los generadores x e y quedan expresados como:

$$x = n_0 a \qquad y = m_0 a$$

con $a = m_1 y + n_1 x \in \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$. Por tanto $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y = \mathbb{Z}a$, y el grupo es isomorfo e isótono a $\mathbb{Z}$

<u>Segunda posibilidad</u>: $\mathbb{Z}x \cap \mathbb{Z}y = \{e\}$; además $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ es arquimediano.

Por el Teorema de Hölder, el grupo es aditivamente representable. Existe una función de utilidad aditiva

$$u : \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y \longrightarrow \mathbb{R}$$

que puede escogerse verificando $u(x) = 1$.

Como consecuencia $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ es isomorfo e isótono a $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$, con $\alpha = u(y) > 0$, y sólo falta probar que α es irracional. En efecto, si se supone por reducción al absurdo

$$u(y) = \alpha = \frac{m}{n} \qquad m, n \in \mathbb{Z},\ m, n \neq 0$$

resultaría:

$$n.u(y) = m.u(x)$$

y, puesto que u es aditiva:

$$u(n.y) = u(m.x)$$

de donde $n.y = m.x$, contra $\mathbb{Z}x \cap \mathbb{Z}y = \{e\}$.

<u>Tercera posibilidad</u>: $\mathbb{Z}x \cap \mathbb{Z}y = \{e\}$; además $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ no es arquimediano.

Comprobaremos que es posible encontrar un par no arquimediano, generador de $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$.

Comenzamos fijando dos elementos postivos a y h, con $a \prec h$, que constituyan un par no arquimediano. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n.a \prec h$$

Sea a de la forma: $a = m_1 x + n_1 y$; $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$. Nótese que podemos admitir sin pérdida de generalidad que

$$m.c.d(m_1, n_1) = 1$$

Como consecuencia, por la identidad de Bézout, existen números enteros m_2, n_2 tales que

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 1$$

Esto permite fijar otro elemento

$$b = n_2 x - m_2 y \in \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$$

que supondremos positivo. (En caso contrario, y dado que $n_2 x - m_2 y \neq e$, se procedería de la misma forma con el elemento $b = -n_2 x + m_2 y$).

Comprobemos que los elementos x e y pueden expresarse como combinación entera de $a = m_1 x + n_1 y$ y $b = n_2 x - m_2 y$. En efecto:

$$\begin{aligned} m_2 a + n_1 b &= m_2(m_1 x + n_1 y) + n_1(n_2 x - m_2 y) \\ &= m_1 m_2 x + m_2 n_1 y + n_1 n_2 x - m_2 n_1 y \\ &= (m_1 m_2 + n_1 n_2) x = x \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} n_2 a - m_1 b &= n_2(m_1 x + n_1 y) - m_1(n_2 x - m_2 y) \\ &= m_1 n_2 x + n_1 n_2 y - m_1 n_2 x + m_1 m_2 y \\ &= (m_1 m_2 + n_1 n_2) y = y \end{aligned}$$

Como consecuencia, es $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$.

Además se verifica: $n.a \prec b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b \precsim n_0 a$.

Consideremos el elemento $h \in \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ fijado anteriormente. Puesto que los elementos a y b engendran al grupo, existen enteros p, q tales que $h = p.a + q.b$. Entonces:

$$h = p.a + q.b \precsim |p|.a + |q|.b \precsim |p|.a + |q|.n_0.a = (|p| + |q|.n_0).a$$

Esto es absurdo, pues se han escogido a y h verificando $n.a \prec h$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, los elementos a y b constituyen el par no arquimediano y generador buscado.

Ahora, un argumento análogo al utilizado en el Teorema 2.6.3 muestra que $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ es isomorfo e isótono a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico. Puesto que $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ coincide con la totalidad del grupo $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$, se tiene el resultado. ■

Observación

Puede parecer, a primera vista, que un par de elementos arquimedianos generan siempre un grupo arquimediano, pero esto no es cierto. Nótese que el par de elementos arquimedianos $(1, 0)$, $(1, 1)$ generan la totalidad de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ lexicográfico, puesto que el elemento $(0, 1)$ se obtiene, trivialmente, mediante la diferencia $(1, 1) - (1, 0)$.

Esta circunstancia ha obligado, en la demostración del caso 3 del anterior Teorema, a localizar un par no arquimediano generador de $\mathbb{Z}x+\mathbb{Z}y$; ya que no está garantizado que los propios elementos x e y violen la propiedad.

Por otra parte, nótese que en el caso 2, $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ carece de huecos. Más aún, su imagen $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ es densa en $\mathbb{R}$; por lo que si un grupo totalmente ordenado y aditivamente representable $(G, +, \precsim)$ contiene un par de elementos x e y, tales que $\mathbb{Z}x \cap \mathbb{Z}y = \{e\}$ (como en el caso 2 del Teorema), entonces $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ es a la fuerza denso en G. Vemos así que son suficientes dos elementos para generar un subgrupo orden denso y arquimediano, cuya existencia caracteriza la representabilidad aditiva de la totalidad del grupo, según hemos visto en el Teorema 2.6.2.

Puede obtenerse una demostración directa de estos hechos, como desarrollaremos a continuación. En particular, se obtendrá una prueba de que cualquier subgrupo de los números reales de la forma $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$, con α irracional, es denso en $\mathbb{R}$; en lugar de suponer este resultado conocido, como en las afirmaciones del párrafo anterior.

Lema 2.6.1

Si un grupo totalmente ordenado y arquimediano $(G, +, \precsim)$ tiene mínimo elemento positivo, entonces es isomorfo e isótono al grupo $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

<u>*Demostración*</u>

Sea $g \in G$ el mínimo elemento positivo, y sea otro elemento $x \in G$ positivo cualquiera.

Por ser G arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n_0 - 1)g \prec x \precsim n_0 g$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que la segunda desigualdad es estricta, es decir:

$$(n_0 - 1)g \prec x \prec n_0 g$$

Entonces, por la invariancia por traslaciones, el elemento $n_0 g - x$ es positivo. Por tanto, al ser g el mínimo elemento positivo:

$$g \precsim n_0 g - x$$

De donde, nuevamente por la invariancia por traslaciones, resulta:

$$x \precsim (n_0 - 1)g$$

Esto es absurdo, porque se había escogido $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando $(n_0 - 1)g \prec x$ ■

Lema 2.6.2

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo que carece de mínimo elemento positivo. Entonces para todo elemento positivo $x \in G$ y para todo número natural n, existe un elemento positivo $y \in G$ tal que $n.y \prec x$.

Demostración

Dado $x \in G$ positivo, demostraremos que existe $y \in G$ positivo tal que $2y \precsim x$. (Basta entonces reiterar para tener el resultado con cualquier $n \in \mathbb{N}$).

Puesto que G carece de mínimo elemento positivo, tomemos $z \in G$ positivo tal que $z \prec x$. Por la invariancia por traslaciones, los elementos $x - z$ y $-z + x$ son también ambos positivos. Además, por el Lema 2.3.7, sabemos que o bien $2(x - z) \precsim 2x - 2z$, o bien $2(-z + x) \precsim -2z + 2x$. Supondremos la primera situación, siendo el otro caso análogo.

Si se cumple $2z \precsim x$, entonces $y = z$ es el elemento buscado. Si por el contrario es $x \prec 2z$, por la invariancia por traslaciones es $2x \prec x + 2z$, y por tanto $2x - 2z \prec x$. Concluímos que $2(x - z) \prec x$, esto es, $y = x - z$ es el elemento buscado. ■

Lema 2.6.3

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo arquimediano. Sea S un subgrupo de G tal que S carece de mínimo elemento positivo. Entonces, para todo elemento positivo $g \in G$, existe un elemento positivo $s \in S$ tal que $s \prec g$.

Como consecuencia, el subgrupo S es denso en G. Más aún, para todo $x, y \in G$ con $x \prec y$, existe $s \in S$ tal que $x \prec s \prec y$; por lo que en particular G carece de huecos.

Demostración

Sea $g \in G^+$. Tomemos $s' \in S^+$ cualquiera. Por ser G arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s' \prec n_0 g$.

Por el Lema anterior, existe otro elemento positivo $s \in S$ tal que $n_0 s \prec s'$. De ambas desigualdades, se obtiene $n_0 s \prec n_0 g$, y por tanto $s \prec g$.

Para demostrar la segunda parte es suficiente probar que dados dos elementos $x, y \in G^+$ con $x \prec y$; existe $d \in S$ con $d \in (x, y)$. (Al ser S subgrupo, la propiedad se aplica también al cono negativo, vía elementos opuestos).

Sean entonces $x, y \in G^+$, con $x \prec y$. Por la invariancia por traslaciones, $y - x$ es también positivo.

Por el resultado anterior, existen s_1, s_2 positivos en S tal que $s_1 \prec x$, $s_2 \prec y - x$. Tomando $s = \min\{s_1, s_2\}$, verificará ambas cosas. Así:

$$s \prec x \qquad s \prec y - x$$

Siendo G arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 s \precsim x \prec (n_0 + 1).s$$

De donde:

$$x \prec (n_0 + 1)s = s + n_0 s \precsim s + x \prec y - x + x = y$$

Luego $(n_0 + 1)s \in (x, y)$, con $(n_0 + 1)s \in S$. ∎

Teorema 2.6.5

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado y arquimediano (y por tanto, abeliano). Sean $x, y \in G$, distintos del elemento neutro e, tales que $\mathbb{Z}x \cap \mathbb{Z}y = \{e\}$. Entonces el subgrupo generado por x e y es denso en G

Demostración

Un subgrupo como el del enunciado es necesariamente del segundo tipo de los analizados en el Teorema 2.6.4 (isomorfo a $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha$, con α irracional). En particular, es arquimediano y no isomorfo al grupo $\mathbb{Z}$ de los números enteros, luego de acuerdo con el Lema 2.6.1, no puede tener mínimo elemento positivo.

El resultado es ahora consecuencia del Lema anterior.

Observación

El Teorema anterior permite obtener fácilmente como consecuencia el siguiente resultado, bien conocido, pero para cuya demostración se utilizan habitualmente técnicas avanzadas de Análisis Matemático (véase, por ejemplo, Polyá y Szegö [1954] o Katznelson [1976]).

Corolario 2.6.1

Para todo número irracional α el conjunto:

$$S = \{n\alpha - E(n\alpha); n \in \mathbb{Z}\}$$

(con $E(x) =$ "parte entera de x") es denso en el intervalo $[0,1]$

Demostración

Por el Teorema anterior, aplicado al grupo aditivo $\mathbb{R}$ de los números reales, dado α irracional, el subgrupo $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha$ es denso en $\mathbb{R}$. En particular,

$$(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha) \cap [0,1)$$

también es denso en el intervalo $[0,1]$.

Supongamos enteros m, n tales que $m + n\alpha \in [0, 1)$. Esto ocurre si y sólo si $n\alpha \in [-m, -m+1)$, y por tanto:

$$E(n\alpha) = -m$$

Como consecuencia:

$$S = \{n\alpha - E(n\alpha); n \in \mathbb{Z}\} = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha) \cap [0, 1)$$

lo que completa la demostración. ■

Observación

Consideremos nuevamente la clasificación de los grupos abelianos totalmente ordenados generados por dos elementos x e y, presentada en el Teorema 2.6.4.

En la situación del primer caso, resultaba que $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ es isomorfo e isótono al grupo aditivo de los números enteros. En tal supuesto, todavía puede ocurrir que $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ sea un subgrupo *orden denso* en un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$. Evidentemente, esto ocurre cuando $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ es la totalidad del grupo G, pero no es el único caso: consideremos, por ejemplo, el grupo aditivo de los enteros, con el orden natural $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ y tomemos $x = 2$, $y = 4$. Claramente, el subgrupo generado por x e y es $2\mathbb{Z}$, orden denso en $\mathbb{Z}$, aunque no coincide con la totalidad de $\mathbb{Z}$.

La siguiente proposición justifica que la situación del ejemplo propuesto es general:

Proposición 2.6.1

Si dos elementos x e y de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, con $\mathbb{Z}x \cap \mathbb{Z}y \neq \{e\}$, generan un subgrupo propio S orden denso en G, entonces el propio G es isomorfo e isótono al grupo aditivo de los números enteros $(\mathbb{Z}, +, \leq)$. Además, para cualquier isomorfismo de G en $\mathbb{Z}$, la imagen de S es $2\mathbb{Z}$.

<u>*Demostración*</u>

Por el Teorema 2.6.4 sabemos que, en las condiciones del enunciado, el subgrupo S es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Existe por tanto elemento mínimo positivo $a \in S$ tal que $S = \mathbb{Z}a$.

Consideremos un elemento cualquiera $z \in G$, que no pertenezca a S. Para probar la Proposición es suficiente demostrar que $2z$ pertenece necesariamente al subgrupo S.

De acuerdo con el Teorema 2.6.2, sabemos que G es arquimediano, por ser S subgrupo arquimediano, orden denso en G. Por tanto, debe existir $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$n_0 a \prec z \prec (n_0 + 1)a$$

Aplicando invariancia por traslaciones, obtenemos que:

$$e \prec z - n_0 a \prec a$$
$$e \prec (n_0 + 1)a - z \prec a$$

siendo e el elemento neutro de G.

Si los elementos $z - n_0 a$ y $(n_0+1)a - z$ anteriores fueran distintos, por ejemplo

$$e \prec z - n_0 a \prec (n_0 + 1)a - z \prec a$$

por ser S orden denso en G existiría algún elemento $s \in S$ tal que

$$e \prec z - n_0 a \precsim s \precsim (n_0 + 1)a - z \prec a$$

lo cual es imposible, puesto que entre e y a no puede haber ningún elemento de $S = \mathbb{Z}a$. Por tanto, necesariamente:

$$z - n_0 a = (n_0 + 1)a - z$$

de donde se deduce que

$$2z = (2n_0 + 1)a \in S$$

lo que completa la demostración. ■

Observación

A pesar de las situaciones comentadas hasta ahora, en las que son suficientes dos elementos para generar un subgrupo orden denso, puede ocurrir que en un grupo totalmente ordenado y arquimediano $(G, +, \precsim)$, el subgrupo generado por x e y no sea orden denso en G, para todo $x, y \in G^+$. Un ejemplo trivial lo proporciona el grupo aditivo $(\mathbb{Q}, +, \leq)$ de los números racionales, con el orden natural. Observemos en particular que el menor subgrupo orden denso contenido en un grupo puede ser muy grande: por ejemplo, en $(\mathbb{Q}, +, \leq)$, cualquier subgrupo orden denso precisa una cantidad infinita de generadores.

2.7. Grupos totalmente preordenados

Veremos en esta sección que los resultados fundamentales presentados a lo largo del capítulo siguen siendo válidos cuando, en un grupo, hay definido un *preorden completo* (ver Definición 1.2.3) invariante por traslaciones, en lugar de la relación de orden total considerada hasta ahora.

En la Proposición 1.2.2 se justificaba que la representabilidad de preórdenes completos queda resuelta por la de órdenes totales, sin más que considerar el conjunto cociente relativo a las clases de indiferencia (ver también en la Definición 1.2.4 la definición de *utilidad* en conjuntos totalmente preordenados). Comprobaremos que este cociente es estable para la operación interna del grupo, lo que permite dar condiciones de existencia de utilidad aditiva; puesto que este cociente es también un grupo totalmente ordenado.

Definición 2.7.1: Grupo totalmente preordenado.

Se llama *grupo totalmente preordenado* a una estructura $(G, +, \precsim)$ verificando:

1) $(G, +)$ es grupo.

2) $(G, \precsim)$ es un conjunto totalmente preordenado.

3) El preorden completo $\precsim$ es *invariante por traslaciones*, es decir, $\forall a, b, c \in G$:

$$a \precsim b \Longleftrightarrow a + c \precsim b + c \Longleftrightarrow c + a \precsim c + b$$

Definición 2.7.2: Elementos positivos y negativos

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente preordenado, con elemento neutro e. Un elemento $a \in G$ se dirá *positivo* (resp. *negativo*) si $e \prec a$ (resp. $a \prec e$).

Llamaremos *cono positivo* (resp. *negativo*) de un grupo totalmente preordenado al conjunto de todos sus elementos positivos (resp. negativos). Se representará G^+ (resp. G^-)

Nótese que con esta definición los elementos indiferentes con el neutro no son ni positivos ni negativos.

Proposición 2.7.1

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente preordenado. Las relaciones de *indiferencia* "$\sim$" y *estricta* "$\prec$", asociadas a $\precsim$ son también invariantes por traslaciones.

Demostración

(Para $\sim$) Por definición, dados $a, b \in G$:

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad a \precsim b \;\text{ y }\; b \precsim a$$

Por la invariancia por traslaciones de $\precsim$ se obtiene inmediatamente, para todo $c \in G$:

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow a + c \precsim b + c \;\text{ y }\; b + c \precsim a + c \quad \Longleftrightarrow \quad a + c \sim b + c$$

La demostración por la izquierda es análoga.

(Para $\prec$) Por definición, dados $a, b \in G$:

$$a \prec b \iff a \precsim b \text{ y } no(a \sim b)$$

Una vez visto que $\sim$ es invariante por traslaciones, se tiene para todo $c \in G$:

$$a \prec b \iff a + c \precsim b + c \text{ y } no(a + c \sim b + c) \iff a + c \prec b + c$$

La demostración por la izquierda es análoga. ■

Proposición 2.7.2

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente preordenado, con neutro e. Representemos con $I(x)$ la clase de elementos indiferentes correspondiente a cada elemento $x \in G$:

$$I(x) = \{y \in G; y \sim x\}$$

Se verifica:

1) Para todo $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$: $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2 \Longrightarrow x_1 + x_2 \sim y_1 + y_2$.

2) $I(e)$ es un subgrupo normal de G.

3) Para todo $x \in G$: $I(x) = x + I(e)$

Como consecuencia, el conjunto cociente de las clases de indiferencia, es el grupo cociente $G/I(e)$. Además, se trata de un grupo totalmente ordenado, con la operación + definida mediante:

$$I(x) + I(y) = I(x + y)$$

y el orden total $\precsim$ definido mediante:

$$I(x) \prec I(y) \iff x \prec y$$

<u>*Demostración*</u>

Se deduce inmediatamente de la invariancia por traslaciones de la relación de indiferencia $\sim$ ■

Definimos ahora las propiedades *arquimediana*, $\{n+1, n\}$ y $\{p > q\}$ con un enunciado igual al utilizado en el caso de grupos totalmente ordenados, lo que nos permitirá obtener la caracterización de la representabilidad aditiva.

Definición 2.7.3

Un grupo totalmente preordenado $(G, +, \precsim)$ se dirá:

1) *Arquimediano* si para todo $a, b \in G^+$, con $a \prec b$, existe un número natural n tal que $b \prec n.a$

2) Que verifica la propiedad $\{n+1, n\}$ si para todo $a, b \in G^+$, con $a \prec b$, existe un número natural n tal que $(n+1).a \prec n.b$.

3) Que verifica la propiedad $\{p > q\}$ si para todo $a, b \in G^+$, con $a \prec b$, existen $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$ tales que $p.a \prec q.b$

Teorema 2.7.3

Un grupo totalmente preordenado $(G, +, \precsim)$ admite función de utilidad aditiva si y sólo si es arquimediano.

<u>*Demostración*</u>

Si el grupo es aditivamente representable, entonces es claramente arquimediano, por serlo el grupo aditivo $\mathbb{R}$ de los números reales.

Para el recíproco, comprobaremos que si $(G, +, \precsim)$ es arquimediano, también lo es el grupo cociente $(G/I(e), +, \precsim)$. Notemos primero que, al ser para todo $x, y \in G$ es $I(x) + I(y) = I(x + y)$, en particular para todo $n \in \mathbb{N}$ resulta: $n.I(x) = I(n.x)$.

Sean entonces $I(a), I(b)$ dos elementos positivos del grupo cociente, con $I(a) \prec I(b)$. Para ello, es necesario que se cumpla $e \prec a \prec b$. Puesto que G es arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$b \prec n_0 a$$

y por tanto:

$$I(b) \prec I(n_0 a) = n_0 I(a)$$

Luego $G/I(e)$ es arquimediano y, de acuerdo con el Teorema de Hölder, aditivamente representable.

Sea $u : G/I(e) \longrightarrow \mathbb{R}$ función de utilidad aditiva. Definimos a partir de ella

$$u' : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

mediante:

$$u'(x) = u(I(x))$$

Resulta entonces que u' es utilidad aditiva para G. En efecto:

$$x \prec y \Longleftrightarrow I(x) \prec I(y) \Longleftrightarrow u(I(x)) < u(I(y)) \Longleftrightarrow u'(x) < u'(y)$$

Por tanto, u' es utilidad. Además:

$$\begin{aligned} u'(x) + u'(y) &= u(I(x)) + u(I(y)) \\ &= u(I(x) + I(y)) \\ &= u(I(x + y)) \\ &= u'(x + y) \end{aligned}$$

Es decir, u' también es aditiva, lo que completa la demostración. ■

Observación

Razonamientos del mismo tipo justifican que las propiedades $\{n+1, n\}$ o $\{p > q\}$ también caracterizan la representabilidad aditiva, puesto que en esencia el argumento que se utiliza es la existencia de utilidad aditiva en el grupo cociente, para el que se ha establecido

$$I(x) \prec I(y) \Longleftrightarrow x \prec y$$

Capítulo 3
Semigrupos totalmente ordenados

3.1. Introducción

En este capítulo analizaremos las condiciones que conducen a la representabilidad de *semigrupos totalmente ordenados*, esto es, semigrupos en los que hay definido un orden total invariante por traslaciones. Una primera caracterización completa para la existencia de función de utilidad aditiva para esta estructura fue dada por Alimov [1950], y aparece también en Fuchs [1963]. En Birkhoff [1940–1967] se dan condiciones suficientes para el caso de *monoides totalmente ordenados*, si bien no se caracteriza su representabilidad aditiva.

La cuestión inicial que planteamos es si, igual que en el caso de grupos totalmente ordenados, el carácter arquimediano es suficiente para garantizar la representabilidad aditiva de semigrupos. La respuesta a esta pregunta es negativa. Comprobaremos sin embargo que las propiedades $\{n+1, n\}$ y $\{p > q\}$ proporcionan la caracterización buscada. Esto es posible porque, en semigrupos, estas propiedades resultan ser más exigentes que la arquimediana.

En grupos, donde la equivalencia de las propiedades arquimediana y $\{n+1, n\}$ ha sido establecida; o bien es posible encontrar elementos que violen la propiedad arquimediana, y también elementos que violen la propiedad $\{n+1, n\}$; o bien, por el contrario, no hay elementos que incumplan ninguna de ellas.

La Proposición 2.5.2 del capítulo anterior abundaba en esta idea. En efecto, nos permite afirmar que si un par de elementos a, b del cono positivo de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, con $a \prec b$, no verifican la propiedad $\{n+1, n\}$; entonces en particular los elementos "$b - a$" y "a" no verifican la propiedad arquimediana. Análogamente, si c y d son elementos positivos, con $c \prec d$, y no cumplen la propiedad arquimediana, entonces los elementos "d" y "$c + d$" no verifican la propiedad $\{n+1, n\}$.

Notemos que la segunda de estas construcciones puede realizarse también en un semigrupo cualquiera, pero la primera, que utiliza la existencia de elemento opuesto, no siempre es posible en esta última estructura.

Podemos conjeturar que si se garantiza que existe la *diferencia* de dos elementos cualesquiera del semigrupo (en un sentido técnico, cuyo significado se precisará más tarde) recuperamos la posibilidad de representabilidad aditiva, a partir de la propiedad arquimediana. Birkhoff [1940–1967] (que utiliza notación multiplicativa para la operación interna), denomina *divisibles* a estos semigrupos en los que el cálculo de la diferencia entre elementos es posible; en Fuchs [1963] se denominan *naturalmente ordenados* y en Luce y Narens [1987] *resolubles*.

En Birkhoff [1940–1967] se muestra que, efectivamente, un semigrupo divisible y arquimediano es aditivamente representable. Sin embargo, veremos que el carácter resoluble es más exigente que la propiedad $\{n+1, n\}$, y equivale en esencia a trabajar en un grupo totalmente ordenado.

Luce y Narens [1987] profundizan más la cuestión. Distinguen los conceptos de *estructura arquimediana* y *estructura arquimediana en diferencias*, buscando que la segunda permita una distinción entre elementos (para evitar elementos "*infinitamente próximos entre sí*") pero sin exigir tanto como que el propio cálculo de la diferencia entre elementos sea realizable.*

En los dos trabajos anteriores, relativamente recientes (posteriores a Alimov [1950]), no se menciona la posibilidad de caracterizar la representabilidad aditiva en semigrupos con propiedades como la $\{n+1, n\}$ o la $\{p > q\}$. Esta aparente laguna motivó nuestra búsqueda de tal caracterización, lo que nos condujo hasta las mencionadas propiedades. Sin embargo, el trabajo de Fuchs [1963], nos hizo ver posteriormente que una caracterización idéntica a la propiedad $\{n + 1, n\}$ había sido introducida por Alimov [1950]; resultando que nuestra propiedad $\{n + 1, n\}$ es una expresión equivalente a la condición que Alimov denomina "*ausencia de elementos anómalos*".

∗ En Jaffard [1952] y Krull [1960] aparecen también comparaciones entre conceptos de arquimedianidad alternativos.

3.2. Definiciones

Defnción 3.2.1: Semigrupo

Un semigrupo $(S, +)$ es una estructura algebraica formada por un conjunto S no vacío, dotado de una operación binaria interna, $+$, asociativa, es decir:

$$\forall a, b, c \in S : (a + b) + c = a + (b + c)$$

Si un semigrupo $(S, +)$ contiene elemento neutro $e \in S$ tal que $\forall a \in S : a + e = e + a = a$, se dice que $(S, +)$ es un *monoide*. Si para cada elemento a de un monoide S existe un *opuesto* o *simétrico* $-a$ en S tal que $a + (-a) = (-a) + a = e$, entonces $(S, +)$ es un grupo. Un semigrupo $(S, +)$ se dice *abeliano* o *conmutativo* si para todo par de elementos $a, b \in S$ se verifica: $a + b = b + a$.

Un semigrupo $(S, +)$ se dice *cancelativo* si $\forall a, b, c \in S : a + c = b + c \Longrightarrow a = b$, y también $c + a = c + b \Longrightarrow a = b$. Obviamente todo grupo es cancelativo.

Notación

De igual manera que se establecía para grupos, dado un elemento a de un semigrupo $(S, +)$ y $n \in \mathbb{N}$, representaremos:*

$$n.a = \overbrace{a + \cdots + a}^{\text{n veces}}$$

Si $(S, +)$ posee neutro, e, se entiende $0.a = e$. Si, además, un elemento $a \in S$ posee simétrico, $-a \in S$, la expresión $(-n).a$ tiene el significado $n.(-a)$. Fácilmente se comprueba que $n.(-a) = -(n.a)$, por lo que el elemento en cuestión puede escribirse sin ambigüedad como $-n.a$.

* Nótese que la expresión del segundo miembro tiene sentido porque se verifica la propiedad asociativa. Para otras estructuras, en las que no se garantizara la propiedad, podría fijarse el significado adoptando alguna regla recurrente particular: sumar siempre a derecha (por ejemplo) cada valor extra de a: $1.a = a$; $(n+1).a = na + a$. (Véase Luce y Narens [1987], que también llaman la atención sobre este detalle particular).

Definición 3.2.2: Semigrupo totalmente ordenado

Se llama *semigrupo totalmente ordenado* a una estructura $(S,+,\precsim)$ verificando:

1. $(S,+)$ es semigrupo
2. $(S,\precsim)$ es un conjunto totalmente ordenado
3. El orden total $\precsim$ es *invariante por traslaciones*, es decir, $\forall a,b,c\in S$:

$$a\precsim b \Longleftrightarrow a+c\precsim b+c \Longleftrightarrow c+a\precsim c+b$$

Por tratarse de un orden total, esta condición equivale a que el orden total estricto $\prec$ asociado a $\precsim$ sea también invariante por traslaciones; es decir:

$$a\prec b \Longleftrightarrow a+c\prec b+c \Longleftrightarrow c+a\prec c+b$$

Observación

Hemos adoptado la definición de invariancia por traslaciones *estricta* o *fuerte* que se utiliza, por ejemplo, en Luce y Narens [1987].

En Birkhoff [1940–1967], o en Fuchs [1963], se parte de la definición *débil* siguiente:

$$a\precsim b \Longrightarrow a+c\precsim b+c \ \text{ y } \ c+a\precsim c+b$$

En el contexto de grupos totalmente ordenados ambas definiciones son equivalentes; pero esto no es cierto en semigrupos. Por ejemplo, el semigrupo $S=\{a,b,c\}$, con $+$ definida en la forma $x+z=z$ para todo $x,z\in S$, y el orden total dado por $a\precsim b\precsim c$ cumple la invariancia por traslaciones débil, pero no la fuerte.

Comprobemos que se tiene el siguiente resultado:

Sea $(S,+)$ *un semigrupo en el que hay definido un orden total* $\precsim$*, débilmente invariante por traslaciones. Entonces,* $\precsim$ *es fuertemente invariante por traslaciones si y sólo si* $(S,+)$ *es cancelativo.*

En efecto; si se supone invariancia por traslaciones fuerte:

$$a+c=b+c \Longrightarrow \begin{Bmatrix} a+c \precsim b+c \\ b+c \precsim a+c \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} a \precsim b \\ b \precsim a \end{Bmatrix} \Longrightarrow a=b$$

y el semigrupo resulta cancelativo.

Sean, para el recíproco, elementos a, b, c de un semigrupo cancelativo verificando $a+c \precsim b+c$.

Si suponemos, por reducción al absurdo, que no se verifica $a \precsim b$; entonces es $b \prec a$. Por la invariancia (débil), resulta $b+c \precsim a+c$.

Siendo $a+c \precsim b+c$ y también $b+c \precsim a+c$, obtenemos $a+c=b+c$; de donde, al ser el semigrupo cancelativo, obtenemos $a=b$. Esto es absurdo, puesto que se suponía $b \prec a$. Así, el orden del semigrupo debe cumplir la invariancia por traslaciones fuerte. ■

Debe recordarse por tanto que, con la definición que hemos adoptado, *todo semigrupo totalmente ordenado es cancelativo.*

Definición 3.2.3: Representabilidad aditiva

Un semigrupo totalmente ordenado $(S,+,\precsim)$ se dice *aditivamente representable* (resp. *pseudo-representable*) si existe una función de utilidad (resp. pseudo-utilidad)

$$u : (X,\precsim) \longrightarrow (\mathbb{R},\leq)$$

que es un homomorfismo, es decir, $\forall a,b \in S : u(a+b) = u(a)+u(b)$. La función u se llama *utilidad aditiva* (resp. *pseudo-utilidad aditiva*).

Definición 3.2.4: Elementos positivos y negativos

Dado un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$, un elemento $a \in S$ se dirá *positivo* (resp. *negativo*) si $a \prec 2a$ (resp. $2a \prec a$).

Se llama *cono positivo* (resp. *cono negativo*) de un semigrupo totalmente ordenado al conjunto de sus elementos positivos (resp. negativos), y se denotará S^+ (resp. S^-).

Observación

Nótese que, al no estar garantizada la existencia de elemento neutro, la definición de elemento positivo y negativo dada en grupos totalmente ordenados (elemento, respectivamente, mayor o menor que el neutro) ahora no es aplicable.

Adoptamos aquí esta definición porque, de acuerdo con el Lema 2.3.3, caracteriza (en grupos) el carácter positivo o negativo de un elemento y, como se verá más tarde (Lema 3.3.3), la equivalencia entre ambos enunciados es también cierta en cualquier monoide totalmente ordenado.

3.3. Consecuencias de las definiciones

Establecemos en esta sección diversas propiedades que utilizaremos con frecuencia. Puede observarse que algunas de ellas, a pesar de su analogía con las presentadas para el caso de grupos totalmente ordenados, requieren un enunciado o una demostración peculiar cuando se refieren a semigrupos totalmente ordenados.

Lema 3.3.1

1) Dados a, b, c, d pertenecientes a un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$, con $a \precsim b$ y $c \precsim d$, se verifica $a + c \precsim b + d$. Si, además, alguna de las desigualdades es estricta ($a \prec b$ o $c \prec d$), se verifica $a + c \prec b + d$.

2) En particular, para todo $a, b \in S$, y para todo número natural n:

$$a \precsim b \Longleftrightarrow n.a \precsim n.b$$

$$a \prec b \Longleftrightarrow n.a \prec n.b$$

<u>*Demostración*</u>

Es idéntica a la realizada en grupos (Lema 2.3.1) ■

Lema 3.3.2

Sea a un elemento positivo (resp. negativo) de un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$, y sean p, q números naturales. Se verifica:

$$p < q \Longleftrightarrow p.a \prec q.a$$

$$\textit{(resp. } p < q \Longleftrightarrow q.a \prec p.a \textit{)}$$

<u>*Demostración*</u>

Sea $a \in S^+$. Aplicando reiteradamente la propiedad de invariancia por traslaciones, se tiene:

$$a \in S^+ \Longleftrightarrow a \prec 2a \Longleftrightarrow 2a \prec 3a \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow na \prec (n+1)a \Longleftrightarrow \ldots$$

Por tanto: $a \prec 2a \prec 3a \prec \ldots \prec na \prec (n+1)a \prec \ldots$; de donde se desprende el enunciado.

El caso en que se supone el elemento a negativo, es análogo. ■

Los dos siguientes Lemas muestran algunas propiedades que caracterizan a un elemento de un semigrupo totalmente ordenado como positivo o negativo.

El primero confirma que, para el caso de monoides, resultan propiedades análogas a las partes (i), (ii) y (iii) del Lema 2.3.3 en grupos totalmente ordenados. Esto garantiza, en particular, que las definiciones en ambas estructuras son consistentes.

El segundo, con enunciado parecido a la equivalencia (iv) del mismo Lema 2.3.3, analiza más a fondo el significado del carácter positivo o negativo de un elemento en un semigrupo totalmente ordenado.

Lema 3.3.3

Sea $(S, +, \precsim)$ un monoide totalmente ordenado, con elemento neutro e.

1) Un elemento $a \in S$ es positivo (resp. negativo) si y sólo si $e \prec a$ (resp. $a \prec e$).

2) Un elemento $a \in S$, para el que existe opuesto $-a \in S$, es positivo si y sólo si su opuesto $-a$ es negativo.

<u>*Demostración*</u>

Ambas se obtienen de la invariancia por traslaciones. Para la primera parte:

$$a \in S^+ \iff a \prec a + a \iff e + a \prec a + a \iff e \prec a$$

El caso negativo es análogo.

Y de acuerdo con lo anterior:

$$a \in S^+ \iff e \prec a \iff e + (-a) \prec a + (-a) \iff -a \prec e \iff -a \in S^-$$

Lo que completa la demostración. ■

Lema 3.3.4

Dado un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$, las siguientes afirmaciones sobre un elemento a de S son equivalentes:

i) a es positivo (resp. negativo).

ii) Para todo $b \in S$: $b \prec a + b$, y también $b \prec b + a$ (resp. $a + b \prec b$ y también $b + a \prec b$

iii) Existe $b \in S$ tal que $b \prec a + b$ (resp. $a + b \prec b$)

iv) Existe $b \in S$ tal que $b \prec b + a$ (resp. $b + a \prec b$)

Demostración

Todas las equivalencias pueden obtenerse por la invariancia por traslaciones y la asociatividad de la operación $+$. En efecto:

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Supuesto $a \in S^+$; esto es, $a \prec a + a$, para todo $b \in S$:

$$a \prec a + a \Longrightarrow a + b \prec (a + a) + b \Longrightarrow a + b \prec a + (a + b) \Longrightarrow b \prec a + b$$

Sumando b por la izquierda, se obtiene igualmente $b \prec b + a$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Es evidente.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

Dado $b \in S$ tal que $b \prec a + b$:

$$b \prec a + b \Longrightarrow 2b \prec b + a + b \Longrightarrow b \prec b + a$$

Luego el mismo elemento b cumple la condición.

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

Sea b tal que $b \prec b + a$. Entonces:

$$b \prec b + a \Longrightarrow b + a \prec b + a + a \Longrightarrow a \prec a + a \Longrightarrow a \in S^+$$

Las demostraciones para el caso negativo son análogas. ■

Observación

Esencialmente, en Luce y Narens [1987] se utiliza la condición (ii) del Lema anterior como definición de elemento positivo. Nótese que, de acuerdo con las equivalencias establecidas, dado un elemento a de un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$, en cuanto se justifica que tiene la propiedad de "*incrementar*" mediante su suma (trasladar a derecha) a <u>un</u> elemento $b \in S$ cualquiera (condiciones (iii) o (iv) del Lema), queda ya caracterizado como elemento positivo (condición (i)). Además está garantizado que su suma ejerce el mismo efecto sobre <u>todos</u> los elementos del semigrupo (condición (ii)).

Lema 3.3.5

Sea a un elemento positivo de un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$; entonces, para todo $x \in S$ con $a \precsim x$ se verifica $x \in S^+$. Análogamente, dado $b \in S^-$, para todo $y \in S$ con $y \prec b$ se verifica $y \in S^-$.

Además, dados $a \in S^+, b \in S^-$ cualesquiera, siempre se verifica: $b \prec a$.

<u>*Demostración*</u>

Dado $a \in S^+$ y $x \in S$ con $a \precsim x$, por invariancia por traslaciones es $a+x \precsim 2x$. Además, por el Lema anterior, siendo a positivo también se cumple $x \prec a+x$. De ambas, por la transitividad de la relación $\prec$, se deduce $x \prec 2x$; es decir, el elemento x es positivo.

La demostración para el caso negativo es análoga.

Para la segunda parte, nuevamente por el Lema anterior y por ser a positivo, se cumple $b \prec a + b$. También, por ser b negativo, es $a + b \prec a$. Nuevamente por la transitividad de la relación $\prec$, se obtiene $b \prec a$. ■

Lema 3.3.6

El cono positivo, supuesto no vacío, de un semigrupo totalmente ordenado S, es estable para la operación $+$; es decir, es también un semigrupo totalmente ordenado. Lo mismo es cierto para el cono negativo.

Demostración

Dados $a, b \in S^+$, por el Lema 3.3.4, y ser a positivo:

$$a + b \prec (a + b) + a$$

A la vez, por ser b positivo:

$$a + b + a \prec (a + b + a) + b$$

Así:

$$a + b \prec a + b + a \prec a + b + a + b = 2(a + b)$$

De donde, por definición de elemento positivo: $a + b \in S^+$.

La demostración para el cono negativo es análoga. ■

Lema 3.3.7

Sean a, b dos elementos de un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$ tales que $a + b \precsim b + a$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$n.a + n.b \precsim n.(a + b) \precsim n.(b + a) \precsim n.b + n.a$$

Demostración

Es idéntica a la realizada en grupos (Lema 2.3.7) ■

3.4. Propiedades fundamentales

Los enunciados de las propiedades *arquimediana*, $\{n+1, n\}$ y $\{p > q\}$, pueden aplicarse sin modificación al cono positivo de un semigrupo totalmente ordenado. Sin embargo, como discutiremos enseguida, el comportamiento del cono negativo frente a estas propiedades no está determinado, en general, por el de los elementos positivos.

Por esta razón, concretamente, serán necesarias condiciones adicionales si queremos establecer para semigrupos un resultado análogo al Lema 2.4.1, en el que se justificaba que una función de utilidad aditiva, definida en el cono positivo de un grupo totalmente ordenado, puede extenderse a la totalidad del grupo.

Para poder referirnos al comportamiento del cono negativo frente a todas estas propiedades, sin modificar sus enunciados, recurrimos al concepto de *orden opuesto* ("*converse order*"; ver Birkhoff [1940–1967]), cuya definción aparece a continuación. En Fuchs [1963], este mismo concepto se denomina *orden dual.*

Definición 3.4.1: Orden opuesto

Dado un conjunto totalmente preordenado, $(X, \precsim)$, llamaremos *orden opuesto* de $\precsim$ sobre X a la relación binaria $\precsim^{op}$ definida por:

$$\text{para todo } a, b \in X: \quad a \precsim^{op} b \Longleftrightarrow b \precsim a$$

Es inmediato que si $(X, \precsim)$ es un conjunto totalmente preordenado, lo mismo es cierto para $(X, \precsim^{op})$. En particular, si $(S, +, \precsim)$ es un semigrupo totalmente ordenado, lo mismo ocurre con la estructura $(S, +, \precsim^{op})$.

Nótese que el cono positivo (resp. negativo) de un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$ es el cono negativo (resp. positivo) de su estructura opuesta. Además, si $(S, +, \precsim)$ es aditivamente representable mediante una función de utilidad aditiva u, también $(S, +, \precsim^{op})$ es aditivamente representable, mediante la función de utilidad aditiva $-u$.

Definición 3.4.2

El cono positivo S^+, supuesto no vacío, de un semigrupo $(S, +, \precsim)$ se dirá:

1) *Arquimediano* si para todo $a, b \in S^+$, con $a \prec b$, existe un número natural n tal que $b \prec na$

2) Que *verifica la propiedad* $\{n+1, n\}$ si para todo $a, b \in S^+$, con $a \prec b$, existe un número natural n tal que $(n+1).a \prec n.b$

3) Que *verifica la propiedad* $\{p > q\}$ si para todo $a, b \in S^+$, con $a \prec b$, existen números naturales p, q con $p > q$, tales que $p.a \prec q.b$.

4) *Resoluble* (ver Luce y Narens [1987]) si para todo $a, b \in S^+$, con $a \prec b$, existen $z, t \in S^+$ tales que $a + z = b$ y $t + a = b$.

El cono negativo de S, supuesto no vacío, se dirá arquimediano, si el cono positivo de $(S, +, \precsim^{op})$ es arquimediano. El mismo criterio sirve para definir en S^- los restantes conceptos.

Un semigrupo se dice *arquimediano* si, cada uno de sus conos, o bien es vacío, o bien es arquimediano. El mismo criterio se aplica a los restantes conceptos.

Definición 3.4.3: Semigrupo positivo

Un semigrupo se dirá *positivo* (resp. *negativo*) si es un semigrupo totalmente ordenado y <u>todos</u> sus elementos son positivos (resp. negativos). Un monoide se dirá positivo (resp. negativo) si es un monoide totalmente ordenado y todos sus elementos, salvo el neutro, son positivos (resp. negativos).

Observación

En el contexto de grupos totalmente ordenados, las definiciones presentadas para la totalidad de la estructura de "propiedad arquimediana", "propiedad $\{n+1, n\}$" y "propiedad $\{p > q\}$", se enunciaron haciendo referencia solamente al cono positivo (ver Definiciones 2.4.1 y 2.5.1).

A pesar de esta aparente restricción, en el Lema 2.4.1 vimos que una función real aditiva y positiva, definida en el cono positivo de un grupo totalmente ordenado, puede extenderse como función de utilidad a la totalidad del grupo.

La razón para que fuera entonces suficiente atender a los elementos positivos es que, aplicando la invariancia por traslaciones, y a través de elementos opuestos, el comportamiento del cono negativo frente a las propiedades anteriores está determinado por el del cono positivo. En otros términos:

Dado un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, ambos conos verifican la propiedad arquimediana si y sólo si la verifica su cono positivo.

En efecto, supóngase que G^+ verifica la propiedad arquimediana. Entonces:

> Dados $a, b \in G^-$, con $a \prec^{op} b$, se verifica, por definición, $b \prec a$, y por tanto $-a \prec -b$ con $-a, -b \in G^+$
>
> Puesto que G^+ es arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ con $-b \prec n.(-a)$, esto es, $-b \prec -(n.a)$, lo que equivale a $n.a \prec b$ y, en definitiva, $b \prec^{op} n.a$, por lo que el cono negativo de G es también arquimediano.
>
> La otra implicación es obvia. ■

Una demostración parecida justificaría que lo mismo ocurre con las propiedades $\{n+1, n\}$ y $\{p > q\}$. Podemos concluir que las definiciones dadas son consistentes con las presentadas en su momento para grupos totalmente ordenados, considerados ahora como caso particular de semigrupos.

Por otra parte, en el contexto de semigrupos o monoides generales, ya no es cierto que el comportamiento de uno de los conos frente a estas propiedades determine el del otro.

El siguiente ejemplo muestra un monoide totalmente ordenado, cuyo cono positivo es arquimediano, sin que lo sea su cono negativo.

Ejemplo 3.4.1

Consideremos el subconjunto $(S, +, \precsim_L)$ del *plano lexicográfico* (ver Ejemplo 2.2.1), dado por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0\}$$

La operación $+$ es claramente estable en S, por lo que $(S, +, \precsim_L)$ resulta ser un semigrupo totalmente ordenado. Para reconocer cada cono del semigrupo, nótese que

$$(0,0) \prec_L (x,y) \Longrightarrow x = 0, y > 0$$

$$(x,y) \prec_L (0,0) \Longrightarrow x < 0 \quad \text{o} \quad x = 0, y < 0$$

de donde:

$$S^+ = \{(0,y); y > 0\} \qquad S^- = \{(x,y); x < 0\} \cup \{(0,y); y < 0\}$$

Por último, observemos que el cono positivo S^+ (por ser obviamente isomorfo a $(\mathbb{R}^+, +, \leq)$) es arquimediano; mientras que, por ejemplo, los elementos $(-1, 0)$, $(0, -1)$ del cono negativo S^- violan la propiedad arquimediana, puesto que se tiene $(-1, 0) \prec_L (0, -1)$, es decir

$$(0, -1) \prec_L^{op} (-1, 0)$$

pero, para cualquier $n \in \mathbb{N}$; $(-1,0) \prec_L (0,-n)$, esto es:

$$n.(0,-1) \prec_L^{op} (-1,0)$$

contra lo que exige la propiedad arquimediana. ■

Terminamos la sección presentando algunas proposiciones que ponen de manifiesto otros aspectos de la estructura de semigrupo totalmente ordenado.

Proposición 3.4.1

Un semigrupo totalmente ordenado $(S,+,\precsim)$, representable aditivamente por una función de utilidad u, es conmutativo.

Demostración

Inmediata. ■

Proposición 3.4.2

Todo semigrupo totalmente ordenado sin elemento neutro $(S,+,\precsim)$ se convierte en monoide añadiendo un elemento extra e y declarando, como extensión de la operación interna:

$$e+e=e \qquad a+e=e+a=a \quad \forall a \in S$$

y como extensión del orden:

$$b \prec e \prec c \quad \forall b \in S^-, c \in S^+$$

<u>*Demostración*</u>

Vamos a comprobar que la extensión realizada es consistente con la estructura original. Para ello, consideramos todas las situaciones adicionales que aparecen, tanto para la operación interna $+$, como para la relación de orden total $\precsim$.

La "nueva" operación $+$ sigue siendo asociativa, puesto que habiendo sido definido e como elemento neutro, para todo $a, b \in S \cup \{e\}$:

$$(e + a) + b = a + b = e + (a + b)$$

$$(a + e) + b = a + b = a + (e + b)$$

$$(a + b) + e = a + b = a + (b + e)$$

Y el "nuevo" orden $\precsim$ sigue siendo invariante por traslaciones. En efecto, por definición de elemento neutro, y aplicando la caracterización de elemento positivo dada en el Lema 3.3.4, resulta:

$$a \prec b \iff a + e \prec b + e \iff e + a \prec e + b$$

$$a \prec e \iff a + b \prec b = e + b \iff b + a \prec b = b + e$$

$$e \prec a \iff e + b = b \prec a + b \iff b + e = b \prec b + a$$

Esto completa la demostración. ■

Observación

Si un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$ es aditivamente representable, entonces (Proposición 3.4.1) es conmutativo. Además (Proposición 3.4.2), es un monoide o puede convertirse en monoide, añadiendo un elemento extra. Por tanto:

El estudio de la representabilidad aditiva de un semigrupo totalmente ordenado no pierde generalidad si se restringe al caso de monoides totalmente ordenados conmutativos.

Sin embargo, con intención de obtener condiciones más generales que en el caso de un semigrupo impliquen su representabilidad aditiva (y por tanto, su conmutatividad), continuaremos estudiando el caso de semigrupos y no el de monoides conmutativos.

Proposición 3.4.3

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo positivo que verifica la propiedad $\{p > q\}$. Entonces, S es conmutativo. Como consecuencia, todo semigrupo positivo que verifica la propiedad $\{n + 1, n\}$ es conmutativo.

Demostración

Sean $p, q \in \mathbb{N}$ cualquiera, con $p > q$. Supóngase que $a + b \prec b + a$ para algún par de elementos $a, b \in S$. Por ser el semigrupo positivo, se tiene que:

$$q.(b + a) \prec a + q.(b + a) + b = (q + 1)(a + b) \precsim p.(a + b)$$

y en definitiva:

$$q.(b + a) \prec p.(a + b)$$

Esto es, los elementos $a + b$ y $b + a$ no verifican la propiedad $\{p > q\}$, lo que supone una contradicción. Por tanto, el semigrupo es conmutativo.

Para la consecuencia, basta observar que –obviamente– la propiedad $\{n+1, n\}$ implica la $\{p > q\}$. ■

3.5. Semigrupos positivos

Hemos definido en la sección anterior (Definición 3.4.3) *semigrupo positivo*, como un semigrupo totalmente ordenado cuyos elementos son todos positivos. Analizaremos ahora las condiciones para la existencia de representabilidad en esta estructura particular, si bien cabe recalcar que las conclusiones que se obtengan son aplicables también, a partir del concepto de *orden opuesto* (Definición 3.4.1), a semigrupos negativos. En la próxima Sección 3.7 veremos cómo extender estos resultados al caso de semigrupos totalmente ordenados generales.

Probaremos que un semigrupo positivo y arquimediano admite siempre pseudo-utilidad aditiva, pero que no necesariamente es representable por una función de utilidad aditiva. En particular, esta circunstancia demuestra que el resultado clave establecido en el Teorema de Hölder (Teorema 2.4.1) es válido para grupos totalmente ordenados, pero no para semigrupos.

La existencia de función de utilidad en semigrupos positivos queda caracterizada, como veremos, por la propiedad $\{n+1, n\}$, o su equivalente $\{p > q\}$. Aunque estas propiedades implican la arquimediana, el recíproco ya no es cierto, frente a lo demostrado para el caso de grupos en el Teorema 2.5.1.

Comenzamos presentando un ejemplo de monoide positivo y arquimediano, que sin embargo no verifica la propiedad $\{n+1, n\}$.

Ejemplo 3.5.1

Considérese el subconjunto $(S, +, \precsim_L)$ del *plano lexicográfico* (ver Ejemplo 2.2.1) dado por:

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

Se trata claramente de un monoide conmutativo totalmente ordenado, puesto que la suma es estable en S. Nótese además que todo elemento, salvo el neutro $(0, 0)$, es positivo, es decir, se trata de un monoide positivo.

Además, S es arquimediano. En efecto, sean $(p, q), (r, s) \in S$ tales que:

$$(0, 0) \prec_L (p, q) \prec_L (r, s)$$

Para ello, necesariamente, es $0 < p \leq r$. Puesto que $(\mathbb{R}^+, +)$ es un semigrupo arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r < n_0.p$ y así:

$$(r, s) \prec_L (n_0p, n_0q) = n_0(p, q)$$

Luego se concluye que $(S, +, \precsim_L)$ es arquimediano.

Sin embargo, esta estructura no verifica la propiedad $\{n + 1, n\}$. Para verlo pueden tomarse, por ejemplo, $(1, 1), (1, 2) \in S$. Cumplen claramente que $(1, 1) \prec_L (1, 2)$ pero para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$n(1, 2) = (n, 2n) \prec_L (n + 1, n + 1) = (n + 1)(1, 1)$$

Por lo que, efectivamente, violan la propiedad. ■

Analizando la demostración del Teorema 2.5.1, donde probábamos que la existencia de utilidad aditiva, en grupos totalmente ordenados, es equivalente a las propiedades arquimediana, $\{n + 1, n\}$ y $\{p > q\}$, se aprecia que las implicaciones (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i), no hacen uso del hecho de que la estructura sea un grupo. Por tanto, es precisamente la implicación (i) $\Longrightarrow$ (ii) la que soporta la diferencia entre las estructuras de grupo y semigrupo positivo.

Recordemos también (Proposición 3.4.3) que todo semigrupo positivo que verifique la propiedad $\{n+1, n\}$ o la $\{p > q\}$ es conmutativo. En el caso de grupos totalmente ordenados, el carácter abeliano quedaba garantizado por la propiedad arquimediana; pero la prueba directa de este hecho (ver Teorema 2.5.2) se basa, precisamente, en la equivalencia entre la propiedad arquimediana y la $\{n + 1, n\}$. Puesto que en semigrupos positivos esta equivalencia no es cierta, debemos preguntarnos si la propiedad arquimediana, por sí sola, basta para garantizar que un semigrupo positivo es conmutativo. La respuesta es negativa. El siguiente ejemplo muestra este hecho, presentando un monoide arquimediano, positivo y no conmutativo.*

∗ Otro ejemplo de las mismas características aparece en Alimov [1950].

Ejemplo 3.5.2

Sea M el conjunto de las *palabras* formadas a partir de dos *caracteres* a y b. Cualquiera de tales palabras tiene la forma

$$l_1 l_2 \dots l_n \quad n \in \mathbb{N}$$

donde $l_i = a$ o $l_i = b$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Supondremos también que hay en M un elemento extra, la palabra nula o vacía: e, que convendremos no es un carácter.

Se define la operación $+$ en M mediante *yuxtaposición*, es decir, dadas $L = l_1 l_2 \dots l_n$, $L' = l'_1 l'_2 \dots l'_m \in M$:

$$L + L' = l_1 l_2 \dots l_n + l'_1 l'_2 \dots l'_m = l_1 l_2 \dots l_n l'_1 l'_2 \dots l'_m = LL'$$

En cuanto a la palabra nula, se establece que, $\forall L \in M$:

$$e + L = L + e = L$$

Con esta operación, claramente asociativa, M es un monoide cuyo elemento neutro es la palabra nula e.

Para definir un orden total $\precsim$ en M consideraremos la *longitud* de cada palabra $L = l_1 l_2 \dots l_n \in M$, que se denotará $\|L\|$ y es, por definición , el número de sus caracteres, n. Por convenio, $\|e\| = 0$. Además, dadas dos palabras de la misma longitud, se comparan mediante el orden lexicográfico natural $\precsim_L$, entendiendo que el carácter a precede lexicográficamente al carácter b. Por ejemplo, $aba \prec_L abb \prec_L baa$, etc. El orden total $\precsim$ se define ahora en M como sigue: dadas dos palabras $L, L' \in M$

$$L \prec L' \qquad \text{si y sólo si} \qquad \|L\| < \|L'\| \;\text{ o }\; \|L\| = \|L'\|,\ L \prec_L L'$$

Se trata claramente de un orden total, y toda palabra no nula es positiva. Así $(M, +, \precsim)$ es un monoide positivo, puesto que el orden definido es invariante por traslaciones. En efecto:

Dadas $L = l_1 l_2 \dots l_n$, $L' = l'_1 l'_2 \dots l'_m$, $L'' = l''_1 l''_2 \dots l''_k \in M$:

$$\begin{aligned} L \prec L' &\iff \|L\| < \|L'\| \;\text{ o }\; \|L\| = \|L'\|,\ L \prec_L L' \\ &\iff \|LL''\| < \|L'L''\| \;\text{ o }\; \|LL''\| = \|L'L''\|,\ LL' \prec_L L'L'' \\ &\iff L + L'' \prec_L L' + L'' \end{aligned}$$

Además es arquimediano pues la yuxtaposición de una palabra (no nula) consigo misma un número suficiente de veces, da como resultado una palabra de longitud mayor que cualquier otra fija.

Sin embargo, el monoide no es conmutativo (por ejemplo, $ab = a + b \neq ba = b + a$), por lo que tampoco puede verificar la propiedad $\{n+1, n\}$.

También puede verse esto último directamente, por ejemplo, con las palabras a, b, para las que $a \prec b$, y sin embargo, para todo número natural n:

$$n.b = \overbrace{b \dots b}^{\text{n veces}} \prec \overbrace{a \dots a}^{\text{n+1 veces}} = (n+1).a$$

Por lo que la propiedad $\{n+1, n\}$ no se verifica. ■

A través de los resultados establecidos hasta aquí, queda comprobado que para semigrupos positivos:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \textit{utilidad} & & \textit{propiedad} & & \textit{propiedad} & & \textit{propiedad} \\ \textit{aditiva} & \Longrightarrow & \{n+1, n\} & \Longrightarrow & \{p > q\} & \Longrightarrow & \textit{arquimediana} \end{array}}$$

Además, sabemos que la última implicación es estricta. Surge así de manera natural la siguiente cuestión:

> *¿Es la propiedad $\{p > q\}$ una condición que caracteriza la representabilidad aditiva de semigrupos positivos?*

La respuesta a esta cuestión clave es afirmativa, como demostraremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1

Dado un semigrupo positivo $(S, +, \precsim)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $(S, +, \precsim)$ *es aditivamente representable*

ii) $(S, +, \precsim)$ *verifica la propiedad* $\{n+1, n\}$

iii) $(S, +, \precsim)$ *verifica la propiedad* $\{p > q\}$

Demostración

La equivalencia (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) se debe a Alimov [1950] (véase Fuchs [1963]). La demostración que presentamos aquí utiliza, hasta donde es válido, ideas parecidas a la prueba clásica del Teorema de Hölder en grupos totalmente ordenados (véase Birkhoff [1940–1967]), justificando concretamente que es posible asociar a cada elemento del semigrupo positivo arquimediano una cortadura de Dedekind.

Las demostraciones vistas en grupos totalmente ordenados (Teorema 2.5.1) como prueba de (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) son válidas en semigrupos positivos, por lo que es suficiente probar (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Sea $x_0 \in S$, fijo, y defínase para cada $x \in S$ los conjuntos:

$$L(x) = \{m/n; m, n \in \mathbb{N}, m.x_0 \precsim n.x\} \cup \{(-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}\}$$
$$U(x) = \{m/n; m, n \in \mathbb{N}, n.x \precsim m.x_0\}$$

1) Puesto que $\precsim$ es un orden total, para todo $x \in S$, $m, n \in \mathbb{N}$, o bien $m.x_0 \precsim n.x$, o bien $n.x \precsim m.x_0$. Por tanto, $L(x) \cup U(x) = \mathbb{Q}$.

2) Si $x = x_0$, entonces $1 \in U(x)$ y también $1 \in L(x)$.

Si $x \prec x_0$, por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \prec n_0 x$. Entonces, $1/n_0 \in L(x)$, $1 \in U(x)$

Si $x_0 \prec x$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \prec n_1 x_0$. Entonces, $n_1 \in U(x)$, $1 \in L(x)$

Por tanto, para todo $x \in S$, está garantizado que los conjuntos $L(x)$ y $U(x)$ son no vacíos. Además, en $L(x)$ hay siempre elementos racionales estrictamente positivos.

3) Dado $x \in S$, sean $m/n \in L(x)$ y $p/q \in U(x)$, con $m, n, p, q \in \mathbb{N}$.

$$m.x_0 \precsim n.x \Longrightarrow q.m.x_0 \precsim q.n.x$$

$$q.x \precsim p.x_0 \Longrightarrow n.q.x \precsim n.p.x_0$$

Así: $q.m.x_0 \precsim n.p.x_0$. Como S es un semigrupo positivo, se sigue que $q.m \leq n.p$ y por tanto $m/n \leq p/q$

Como conclusión, para todo $a \in L(x)$ y $b \in U(x)$ se verifica: $a \leq b$.

Hasta aquí, ha sido probado que para todo $x \in S$, $(L(x), U(x))$ es una cortadura de Dedekind en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Esta cortadura define un número real, único para cada x, que se denotará $u(x)$.

Analicemos ahora las propiedades de la función $u(x)$ definida de tal manera.

4) Sean $x, y \in S$ con $x \precsim y$. Entonces:

$$m/n \in L(x) \Longrightarrow m.x_0 \precsim n.x \Longrightarrow m.x_0 \precsim n.y \Longrightarrow m/n \in L(y)$$

Es decir, $L(x) \subseteq L(y)$ y por tanto $u(x) \leq u(y)$

5) Sean $x, y \in S$, $m/n \in L(x)$, $p/q \in L(y)$. Entonces:

$$m.x_0 \precsim n.x \Longrightarrow q.m.x_0 \precsim q.n.x$$

$$p.x_0 \precsim q.y \Longrightarrow n.p.x_0 \precsim n.q.y$$

Así:

$$(mq + np).x_0 \precsim n.q.(x + y) \Longrightarrow \frac{mq + np}{nq} = (m/n) + (p/q) \in L(x + y)$$

Por tanto, $u(x) + u(y) \leq u(x + y)$

6) Trabajando con U de la misma manera que con L en (5), se obtiene que $u(x + y) \leq u(x) + u(y)$

Por lo que, enlazando las conclusiones en (5) y (6):

$$u(x + y) = u(x) + u(y)$$

A partir de (4), (5) y (6), se concluye que u es *pseudo-utilidad aditiva*, es decir, u es aditiva y $x \precsim y \Longrightarrow u(x) \leq u(y)$. Recordemos además (punto 2) que para todo $x \in S$, en el conjunto $L(x)$ asociado hay racionales estrictamente positivos, por lo que necesariamente $u(x) > 0$, para todo $x \in S$.

7) Para concluir, es suficiente probar que $u(x) \leq u(y) \Longrightarrow x \precsim y$.

Supóngase, por el contrario, que existen $x, y \in S$ tales que $u(x) \leq u(y)$, pero $y \prec x$. Entonces, por (6), debe ser $u(y) \leq u(x)$, y por tanto $u(x) = u(y)$.

Puesto que S verifica la propiedad $\{p > q\}$, existen $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, tales que $p.y \prec q.x$. Debe ser $p.[u(y)] \leq q.[u(x)]$ y por ello $u(y) \leq (p/q).u(x) < u(x)$, lo que supone una contradicción, puesto que $u(x) = u(y)$.

Esto completa la demostración. ■

Observación

La propiedad $\{p > q\}$ ha sido usada exclusivamente en (7), el último paso de la demostración del anterior Teorema 3.5.1. Así, los pasos (1) a (6) demuestran que, para cualquier semigrupo positivo y arquimediano, existe pseudo-utilidad aditiva, no trivial, y estrictamente positiva.

Además, el paso (7) muestra también que si x e y son elementos de $(S, +, \precsim)$ tales que $x \prec y$ pero $u(x) = u(y)$, entonces los elementos x e y forman un par *anómalo* en el sentido de Alimov [1950] (no verifican la propiedad $\{n+1, n\}$). Así alcanzamos el siguiente resultado, debido a Hion [1957] (ver Fuchs [1963]):

Corolario 3.5.1

Para todo semigrupo positivo y arquimediano $(S, +, \precsim)$ existe función de pseudo-utilidad aditiva y positiva $u : S \longrightarrow (0, +\infty)$, verificando que dos elementos $x, y \in S$ tienen la misma imagen si y sólo si constituyen un par anómalo.

Observación

El recíproco del Corolario anterior es también cierto:

Si un semigrupo positivo $(S, +, \precsim)$ admite pseudo-utilidad aditiva y positiva

$$u : S \longrightarrow (0, +\infty)$$

entonces es arquimediano

En efecto:

Dados $a, b \in S$, con $a \prec b$; se tendrá $0 < u(a) \leq u(b)$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u(b) < n_0 u(a) = u(n_0 a)$. De donde se obtiene finalmente

$$b \prec n_0 a$$

Por lo que S es arquimediano. ■

Obviamente, cualquier pseudo-utilidad aditiva $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un semigrupo positivo $(S, +, \precsim)$, debe ser no negativa; pues si para cierto elemento $s \in S$ ocurriera:

$$u(s) < 0$$

se tendría $2u(s) = u(2s) < u(s)$, y por tanto $2s \prec s$; contra la exigencia de que todo elemento del semigrupo sea positivo.

Nótese, sin embargo, que para justificar el recíproco del Corolario anterior hemos recurrido expresamente al carácter positivo de la pseudo-representación u. Sin esta condición, esto es, si admitimos la posibilidad de que ciertos elementos del semigrupo positivo tengan pseudo-utilidad nula, el recíproco ya no será cierto:

Un semigrupo positivo pseudo-representable aditivamente, no es necesariamente arquimediano.

Ambos casos se plasman en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5.3

Parecido al anterior Ejemplo 3.5.1, considérese el subconjunto $(S, +, \precsim_L)$ del plano lexicográfico dado por:

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a > 0\}$$

Se trata de un semigrupo positivo y arquimediano. Una función de pseudo-utilidad aditiva para $(S, +, \precsim_L)$ es $u : S \longrightarrow (0, +\infty)$ definida por $u(a, b) = a$. Nótese que $(S, +, \precsim_L)$ no es aditivamente representable, por no verificar la propiedad $\{p > q\}$.

Consideremos ahora $(S', +, \precsim_L)$, dado por:

$$S' = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a \geq 0, b > 0\}$$

Nuevamente, es un semigrupo positivo, pseudo-representable aditivamente por $u' : S' \longrightarrow [0, +\infty)$ definida como $u'(a, b) = a$. Sin embargo, S' no es arquimediano, ya que, por ejemplo:

$$n(0, 1) = (0, n) \prec (1, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A la vez, la pseudo-utilidad u' no es positiva, puesto que todos los elementos de la forma $(0,b) \in S'$ (no incluidos en el anterior semigrupo S) verifican: $u'(0,b) = 0$ ■

Observación

Cabe revisar ahora las demostraciones del Teorema de Hölder para grupos totalmente ordenados, con intención de detectar los pasos concretos en los que se recurre al hecho de que la estructura es de grupo y, por tanto, no es posible extender el argumento al caso de semigrupos.

Así por ejemplo, como ya hemos comentado, la prueba del anterior Teorema 3.5.1 para semigrupos sigue en sus pasos (1) a (6) pautas similares a la demostración que aparece en Birkhoff [1967, p. 301] del propio Teorema de Hölder para grupos. Tras establecer la existencia de pseudo-utilidad aditiva $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ para un grupo totalmente ordenado y arquimediano $(G, +, \precsim)$, Birkhoff concluye su prueba mostrando que el núcleo de la la aplicación u se reduce al elemento neutro del grupo $\{e\}$, por lo que u es inyectiva.

La equivalencia

$$u \text{ inyectiva} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Ker } u = \{e\}$$

no es válida en semigrupos positivos, ni siquiera en monoides positivos, por lo que en tal estructura no podemos recurrir a la misma. Por ejemplo, para el submonoide positivo del plano lexicográfico:

$$S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2; a > 0\} \cup \{(0,0)\}$$

considerado en el Ejemplo 3.5.1, la pseudo-utilidad

$$u(a,b) \mapsto a \qquad \forall (a,b) \in S$$

es obviamente de núcleo nulo, pero no inyectiva.

También en la prueba presentada por nosotros (Teorema 2.4.1) del resultado de Hölder, se construye una aplicación $u : G^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ aditiva y estrictamente positiva en el cono positivo de un grupo $(G, +, \precsim)$, esto es, en un semigrupo positivo. En el Lema 2.4.1 se justificaba que tal aplicación puede extenderse siempre a la totalidad del grupo, resultando una función de utilidad aditiva.

Nuevamente, el argumento que en el Lema 2.4.1 justifica que la función u es utilidad, no es aplicable en semigrupos positivos, puesto que recurre a la existencia de elementos opuestos.

En el siguiente cuadro recogemos esquemáticamente los resultados obtenidos en esta sección para semigrupos positivos.

$$
\boxed{
\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c} \textit{propiedad} \\ \{n+1, n\} \end{array} & \Longleftrightarrow & \begin{array}{c} \textit{propiedad} \\ \{p > q\} \end{array} & \Longleftrightarrow & \begin{array}{c} \textit{utilidad} \\ \textit{aditiva} \end{array} \\
\Downarrow & & & & \Downarrow \\
\begin{array}{c} \textit{propiedad} \\ \textit{arquimediana} \end{array} & & \Longleftrightarrow & & \begin{array}{c} \textit{pseudo-utilidad} \\ \textit{aditiva y positiva} \end{array} \\
 & & & & \Downarrow \\
 & & & & \begin{array}{c} \textit{pseudo-utilidad} \\ \textit{aditiva} \end{array}
\end{array}
}
$$

(Las implicaciones que aparecen en un solo sentido, son estrictas)

3.6. Semigrupos positivos resolubles

Puesto que, como hemos visto, el carácter arquimediano de un semigrupo positivo no implica su representabilidad aditiva, podrían estudiarse otro tipo de condiciones, aparte de la $\{n + 1, n\}$ o su equivalente $\{p > q\}$, que junto a la propiedad arquimediana, obligaran al semigrupo a ser representable. Algunas condiones de este tipo aparecen en Hölder [1901], Birkhoff [1940–1967], Fuchs [1963] y Skala [1975].

Concretamente, puesto que todo semigrupo positivo y arquimediano admite pseudo-utilidad, basta añadir condiciones que permitan asegurar que tal pseudo-utilidad es, o puede tomarse, inyectiva. Así ocurre cuando el semigrupo es resoluble (véase Definición 3.4.2, punto 4).

Teorema 3.6.1

Todo semigrupo positivo, resoluble y arquimediano es representable por una función de utilidad aditiva.

Demostración

Dado $(S, +, \precsim)$, semigrupo positivo, resoluble y arquimediano, considérese $u : S \to \mathbb{R}$ pseudo-utilidad, tal que $u(s) > 0$ para todo $s \in S$, cuya existencia está garantizada en la demostración del Teorema 3.5.1 (Corolario 3.5.1).

Debido a que, además, el semigrupo es resoluble, la función u es necesariamente inyectiva. En efecto, sean $x, y \in S$, $x \prec y$. Por definición de semigrupo resoluble, debe existir $z \in S$ tal que $x + z = y$. Luego:

$$u(x + z) = u(y) \Longrightarrow u(x) + u(z) = u(y)$$

Así, puesto que $u(z) > 0$, debe ser $u(x) < u(y)$ ■

Corolario 3.6.1

Todo semigrupo positivo, resoluble y arquimediano es conmutativo.

Demostración

Inmediata. ■

Observación

Podríamos pensar que todo semigrupo positivo aditivamente representable es necesariamente resoluble, por el hecho de quedar encajado en el semigrupo aditivo y resoluble de los números reales positivos. La conjetura es falsa, como se comprueba en el contraejemplo que presentaremos a continuación.

Por otra parte cabe añadir que, a pesar de su aspecto elemental, la idea con la que obtenemos este ejemplo es “general”. Quiere esto decir que todo semigrupo positivo, para el que exista función de utilidad aditiva, es en esencia un subconjunto de la recta real positiva (resoluble), de la que eventualmente (como en el Ejemplo) habrán sido eliminados puntos, siempre que el subconjunto resultante conserve la estabilidad de la suma.

Ejemplo 3.6.1

Sea $S = \{n \in \mathbb{N}; n > 1\}$, con la suma y orden habituales en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Es evidente que S es un semigrupo positivo y arquimediano, representable aditivamente por la *identidad.* Sin embargo, para los elementos $2, 3 \in S$, por ejemplo, no existe $s \in S$ tal que

$$2 + s = 3$$

Por tanto, este semigrupo no es resoluble. ■

En el siguiente Teorema comprobamos que la resolubilidad de un semigrupo positivo y arquimediano permite considerarlo como el cono positivo de un grupo totalmente ordenado de números reales. Este hecho justifica, en particular, que se recuperen en semigrupos resolubles y arquimedianos las propiedades referidas a grupos totalmente ordenados que no tenían aplicación en el contexto de semigrupos.

Teorema 3.6.2

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo positivo, resoluble y arquimediano. Entonces, S es isomorfo e isótono al cono positivo G^+ de un grupo $(G, +, \precsim)$ de números reales.

Demostración

Sea u una función de utilidad aditiva para $(S,+,\precsim)$, tal que $u(s)>0$ para todo $s\in S$. Identificado S con $u(S)$, puede definirse el conjunto

$$-u(S)=\{-x;x\in u(S)\}$$

Considérese $G=u(S)\cup -u(S)\cup\{0\}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$, con la suma y orden habituales. Se tiene que $(G,+,\precsim)$, por ser S resoluble, es un grupo totalmente ordenado, cuyo cono positivo es $u(S)$. ■

Notemos sin embargo que un semigrupo positivo y resoluble no tiene por qué ser arquimediano. En efecto, el cono positivo del *plano lexicográfico* $(\mathbb{R}^2,+,\precsim_L)$ (ver Ejemplo 2.2.1) es resoluble, y sin embargo no es arquimediano. Puede verse con los elementos $(0,1)$ y $(1,1)$; entre los que se verifica, para todo número natural n:

$$n.(0,1)=(0,n)\prec_L(1,1)$$

Observación

El anterior Teorema 3.6.2 permite considerar cualquier semigrupo positivo, resoluble y arquimediano como el cono positivo de un subgrupo de los números reales. Para que un semigrupo positivo y resoluble pueda interpretarse como el cono positivo de un grupo totalmente ordenado (pero ya no el de los números reales) no es preciso suponer la propiedad arquimediana. De hecho, esta condición es por completo superflua como veremos en el próximo teorema.

Su demostración aparece propuesta como ejercicio en Birkhoff [1967, p. 322]. En Nakada [1951,1952] puede verse, con una prueba diferente, una generalización del mismo resultado al caso de semigrupos *parcialmente ordenados* (i.e. con una relación de orden no necesariamente completa). (Véase también Fuchs [1963]).

Teorema 3.6.3

Todo semigrupo positivo resoluble $(S, +, \precsim)$ es el cono positivo de un grupo totalmente ordenado. (El recíproco, obviamente, es también cierto).

Demostración

Consiste, esencialmente, en añadir a la estructura, además de elemento neutro, un elemento opuesto para cada elemento de S, y extender de manera natural la definición anterior de "suma" y "orden", de manera que resulte un grupo, con un orden invariante por traslaciones.

La prueba se reduce, una vez definida la extensión de la estructura, a una simple comprobación de que se cumple lo exigido, analizando todas las situaciones que pueden presentarse.

Debido a su extensión, se ha preferido trasladar esta demostración al final del capítulo, en forma de Apéndice. ■

3.7. Semigrupos totalmente ordenados

La existencia de función de utilidad aditiva en semigrupos positivos se fundamenta como hemos visto en la propiedad $\{n+1, n\}$, o su equivalente $\{p > q\}$. Estudiaremos ahora cómo caracterizar la representabilidad aditiva de un semigrupo totalmente ordenado general, no necesariamente positivo.

Los resultados obtenidos para semigrupos positivos son aplicables a cada cono de un semigrupo totalmente ordenado, lo que sugiere enfrentarse al problema de su representabilidad atendiendo a las dos cuestiones siguientes:

1) ¿Qué influencia tiene la representabilidad aditiva de uno de los conos sobre la del otro?

2) Para que un semigrupo sea aditivamente representable, ¿es suficiente que lo sean sus dos conos? (Obviamente, la condición es necesaria).

En el caso particular de *grupos* totalmente ordenados, la totalidad de la estructura es aditivamente representable si y sólo si su cono positivo es aditivamente representable. La posibilidad de extensión de la utilidad definida en el cono positivo a la totalidad de la estructura está garantizada por el Lema 2.4.1.

Sin embargo, este resultado no puede trasladarse inmediatamente a *semigrupos* o *monoides*. En efecto, puede ocurrir que uno de los conos del semigrupo verifique la propiedad $\{n+1, n\}$, y por tanto sea aditivamente representable, pero que no ocurra lo mismo con el otro cono. En el Ejemplo 3.4.1 considerábamos el subsemigrupo $(S, +, \precsim_L)$ del plano lexicográfico:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0\}$$

cuyo cono positivo: $S^+ = \{(0, y); y > 0\}$ resulta arquimediano, pero no lo es su cono negativo. Podemos decir más, su cono positivo es trivialmente representable, mediante $(0, y) \mapsto y$, mientras que el cono negativo no admite utilidad aditiva (por no ser arquimediano).

En el siguiente ejemplo adicional, parecido al anterior, el cono negativo es incluso arquimediano, pero la existencia de utilidad en el cono positivo sigue siendo insuficiente para proporcionar la representabilidad aditiva del negativo.

Ejemplo 3.7.1

Sea $(T, +, \precsim_L)$ el siguiente subconjunto del plano lexicográfico:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\} \cup \{(0, y); y > 0\}$$

Es fácil ver que $+$ es estable en T, por lo que se trata de un semigrupo totalmente ordenado. Sus conos vienen dados por:

$$T^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$$
$$T^+ = \{(0, y); y > 0\}$$

Así se tiene:

1) $(T^+, \precsim_L)$ admite utilidad aditiva trivial: $(0,y) \mapsto y$

2) $(T^-, +, \precsim)$ es arquimediano. En efecto, dados $(a,b),(c,d) \in T^-$, con $(c,d) \prec_L (a,b)$, necesariamente se verifica $c \leq a < 0$, por lo que (al ser el grupo de los reales arquimediano) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 a < c$, y por tanto $n_0(a,b) \prec_L (c,d)$.

3) $(T^-, +, \precsim)$ no verifica la propiedad $\{n+1, n\}$, y por tanto no es aditivamente representable. Por ejemplo, para los elementos $(-1,0),(-1,-1)$ ocurre que $(-1,-1) \prec_L (-1,0)$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1).(-1,0) = (-n-1,0) \prec_L (-n,-n) = n.(-1,-1)$$

por lo que violan la propiedad $\{n+1, n\}$. ■

Concluímos que, en semigrupos totalmente ordenados generales, son posibles comportamientos dispares en cada cono. Sin embargo, probaremos que siempre que los dos conos sean aditivamente representables, lo es también la totalidad del semigrupo. Para el caso en que sólo se suponga existencia de utilidad aditiva en uno de los conos, daremos también condiciones que, una vez impuestas a la estructura, garantizan que la utilidad supuesta puede extenderse a la totalidad del semigrupo.

Precisamos establecer previamente algunos lemas.

Lema 3.7.1

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado. Sean $x, y \in S$. Entonces:

$$x + y \in S^+ \Longleftrightarrow y + x \in S^+$$

$$x + y \in S^- \Longleftrightarrow y + x \in S^-$$

Demostración

Dados $x, y \in S$, con $x+y \in S^+$, por definición de elemento positivo se verifica $x \prec (x+y)+x$ o, lo que es lo mismo, $x \prec x+(y+x)$. Por el Lema 3.3.4, se concluye que entonces $y+x \in S^+$.

El caso negativo es análogo. ■

Lema 3.7.2

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado. Entonces, S es conmutativo si y sólo si sus conos S^+ y S^- son ambos conmutativos.

Demostración

Evidentemente, si S es conmutativo, ambos conos lo son.

Para el recíproco, tomamos $x, y \in S$. Si ambos elementos pertenecen al mismo cono, entonces obviamente conmutan. En otro caso, supongamos sin pérdida de generalidad $x \in S^+$, $y \in S^-$, y consideremos las tres situaciones significativas que pueden presentarse.

1) $x+y \in S^+$. Entonces, los elementos x y $x+y$ conmutan, y obtenemos:

$$x+(y+x) = (x+y)+x = x+(x+y) \Longrightarrow y+x = x+y$$

2) $x+y \in S^-$, y por tanto (por el Lema anterior) $y+x \in S^-$. Así, los elementos y e $y+x$ conmutan, luego:

$$y+(x+y) = (y+x)+y = y+(y+x) \Longrightarrow x+y = y+x$$

3) S es un monoide, con elemento neutro e, y $x+y = e$, entonces $y = -x$, y obviamente

$$x+y = y+x = e$$

Esto completa la demostración. ■

Corolario 3.7.1

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado, que verifica la propiedad $\{n+1, n\}$. (Esto es, la verifica cada uno de sus conos no vacíos. Ver Definción 3.4.2). Entonces, S es conmutativo.

<u>*Demostración*</u>

Por la Proposición 3.4.3, cada cono es conmutativo (o vacío), y por tanto, como consecuencia del anterior Lema 3.7.2, se tiene el resultado. ■

Lema 3.7.3

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado, cuyos conos S^- y S^+ son ambos no vacíos, y con S^+ verificando la propiedad $\{n+1, n\}$. Entonces, para todo $x \in S^+$, existe $y \in S^-$ tal que $x + y \in S^-$.

<u>*Demostración*</u>

Sean $x \in S^+$ e $y \in S^-$. Se sigue que $x + y \prec x$. Si $x + y \in S^+$, por la propiedad $\{n + 1, n\}$, existe un número natural n tal que

$$(n + 1).(x + y) \prec n.x$$

Puesto que, por la Proposición 3.4.3, S^+ es conmutativo, se verifica la igualdad $(n + 1).(x + y) = (n + 1).x + (n + 1).y$, y por tanto:

$$(n + 1).x + (n + 1).y \prec n.x$$

es decir

$$n.x + x + (n + 1).y \prec n.x$$

Lo que muestra, por el Lema 3.3.4, que el elemento $x + (n + 1).y \in S^-$. Por tanto, $(n + 1).y \in S^-$ es el elemento buscado. ■

Estamos ya en condiciones de contestar afirmativamente a la segunda de las cuestiones planteadas en la introducción de esta sección: la existencia de utilidad aditiva para un semigrupo totalmente ordenado está determinada por la representabilidad aditiva de cada uno de sus conos.

Teorema 3.7.1

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado, cuyos conos S^- y S^+ son ambos no vacíos. Entonces, son equivalentes:

i) $(S, +, \precsim)$ es aditivamente representable

ii) $(S, +, \precsim)$ verifica la propiedad $\{n + 1, n\}$

iii) $(S, +, \precsim)$ verifica la propiedad $\{p > q\}$

Demostración

Puesto que, obviamente, si un semigrupo es representable ambos conos lo son, por aplicación del Teorema 3.5.1 a cada cono, se tiene (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Basta ver que (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Si cada cono verifica la propiedad $\{p > q\}$, el mismo Teorema 3.5.1 garantiza la existencia de utilidades aditivas para cada cono. Sean estas utilidades aditivas respectivamente:

$$u^- : S^- \longrightarrow \mathbb{R} \qquad u^+ : S^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

En particular, cada cono es conmutativo (por lo que según el Lema 3.7.2, el propio S es conmutativo), y cada cono verifica la propiedad $\{n + 1, n\}$ (puesto que la propiedad $\{p > q\}$ equivale a la $\{n + 1, n\}$ en todo semigrupo positivo).

En estas condiciones, dado $x \in S$, el Lema 3.7.3 garantiza la existencia de un elemento $y \in S^-$ tal que $x + y \in S^-$. Esto permite definir la función $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$u(x) = u^-(x + y) - u^-(y)$$

siendo $y \in S^-$ tal que $x + y \in S^-$.

Comprobemos que $u(x)$ es la utilidad buscada, en tres pasos:

1) La función u está bien definida (el resultado es independiente del elemento $y \in S^-$ elegido). En efecto, si fijado $x \in S$ existen $y, y' \in S^-$ tales que $x + y \in S^-$ y también $x + y' \in S^-$, se sigue que

$$(x + y) + y' \in S^- \qquad (x + y') + y \in S^-$$

Además, puesto que $y + y' = y' + y$, debe ser

$$(x + y) + y' = x + (y + y') = x + (y' + y) = (x + y') + y$$

Así:

$$\begin{aligned}
&(x + y) + y' = (x + y') + y \Longrightarrow \\
&u^-[(x + y) + y'] = u^-[(x + y') + y] \Longrightarrow \\
&u^-(x + y) + u^-(y') = u^-(x + y') + u^-(y) \Longrightarrow \\
&u^-(x + y) - u^-(y) = u^-(x + y') - u^-(y')
\end{aligned}$$

2) La función u es aditiva. En efecto, dados $x, z \in S$, sean $y, t \in S^-$ tales que $x + y \in S^-$ y $z + t \in S^-$. También se tendrá

$$y + t \in S^- \qquad (x + y) + (z + t) \in S^-$$

y puesto que S es conmutativo

$$y + (z + t) = (z + t) + y = z + (t + y) = z + (y + t)$$

de donde

$$(x+z)+(y+t)=(x+y)+(z+t)$$

por lo que $(x+z)+(y+t)$ es también negativo. Entonces:

$$\begin{aligned}
u(x+z) &= u^-[(x+z)+(y+t)] - u^-(y+t) \\
&= u^-[(x+y)+(z+t)] - u^-(y) - u^-(t) \\
&= u^-(x+y) + u^-(z+t) - u^-(y) - u^-(t) \\
&= [u^-(x+y) - u^-(y)] + [u^-(z+t) - u^-(t)] \\
&= u(x) + u(z)
\end{aligned}$$

3) Por último, veamos que u es utilidad. En efecto, dados $x, z \in S$, con $x \precsim z$, sea $y \in S^-$ tal que $z+y \in S^-$. Por la invariancia por traslaciones, $x+y \precsim z+y$, lo que permite afirmar, por el Lema 3.3.5, que el elemento $x+y$ es también negativo.

Entonces:

$$\begin{aligned}
x \precsim z &\Longleftrightarrow x+y \precsim z+y \\
&\Longleftrightarrow u^-(x+y) \leq u^-(z+y) \\
&\Longleftrightarrow [u^-(x+y) - u^-(y)] \leq [u^-(z+y) - u^-(y)] \\
&\Longleftrightarrow u(x) \leq u(z)
\end{aligned}$$

Lo que completa la demostración. ■

Observación

Analizando la demostración del Teorema anterior vemos que la función de utilidad en la totalidad del semigrupo se contruye extendiendo la que existe en el cono negativo. La representabilidad del otro cono se utiliza en realidad para aplicar el resultado del Lema 3.7.3, que permite "trasladar" cualquier elemento del semigrupo a su cono representable.

Podemos enunciar y demostrar con esta idea algunos resultados en la línea de la primera cuestión propuesta en la introducción (de qué manera la representabilidad de un cono afecta a la del otro). Previamente introducimos una definición y algunos lemas que serán utilizados en el resto de la sección.

Definición 3.7.1

Diremos que un elemento x del cono negativo S^- de un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$ es *dominado* por el cono positivo S^+ de S, si existe algún elemento $a \in S^+$ tal que $x + a \in S^+$.

Diremos que el cono negativo de S es dominado por el cono positivo, si todo elemento de S^- es dominado por S^+.

Análogamente podemos hablar de elemento positivo, dominado por el cono negativo; o de cono positivo dominado por el cono negativo.

Ejemplo 3.7.2

Para el primer subsemigrupo del plano lexicográfico al que hemos hecho ya referencia en esta sección (Ejemplo 3.4.1):

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0\}$$
$$S^+ = \{(0, y); y > 0\}$$
$$S^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\} \cup \{(0, y); y < 0\}$$

resulta que los elementos de S^- dados por $\{(0, y); y < 0\}$ son dominados por el cono positivo; mientras que los dados por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$ no lo son.

En cuanto al segundo ejemplo analizado (Ejemplo 3.7.1):

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\} \cup \{(0, y); y > 0\}$$
$$T^+ = \{(0, y); y > 0\}$$
$$T^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$$

resulta que ningún elemento del cono negativo es dominado por el cono positivo.

Lema 3.7.4

Sea $(S,+,\precsim)$ *un semigrupo totalmente ordenado y sea* $x \in S$ *un elemento negativo dominado por el cono positivo. Se verifica:*

1) Todo elemento $y \in S^-$*, con* $x \precsim y$ *es dominado por* S^+

2) Para todo $n \in \mathbb{N}$*;* $n.x \in S^-$ *es dominado por* S^+

Demostración

Sea $a \in S^+$ tal que $x + a$ resulta positivo.

1) Dado $y \in S^-$, con $x \precsim y$, por la invariancia por traslaciones es $x+a \precsim y+a$. Como $x + a$ es positivo, por el Lema 3.3.5 también lo es el elemento $y + a$; es decir $y \in S^-$ es dominado por el cono positivo S^+.

2) Distinguiremos los casos $a + x \precsim x + a$, o bien $x + a \precsim a + x$.

Supongamos que $a + x \precsim x + a$. Las desigualdades del Lema 3.3.7 permiten afirmar que es $n.(a + x) \precsim n.x + n.a$. Puesto que $n.(a + x)$ es positivo, nuevamente por el Lema 3.3.5, también lo es el elemento $n.x + n.a$, con $n.a \in S^+$. Esto es, el elemento $n.x \in S^-$ es dominado por el cono positivo S^+.

En otro caso, si es $x + a \precsim a + x$, por el mismo Lema 3.3.7 es $n.(a + x) \precsim n.a + n.x$. La conclusión es ahora que $n.a + n.x$ es positivo, pero por el Lema 3.7.1, esto ocurre si y sólo si también $n.x + n.a$ es positivo; luego se alcanza la misma conclusión. ■

Lema 3.7.5

Sea $(S, +, \precsim)$ *un semigrupo totalmente ordenado, aditivamente representable por una función de utilidad* $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$*. Entonces, un elemento* $x \in S$ *es positivo (resp. negativo) si y sólo si* $u(x) > 0$ *(resp.* $u(x) < 0$*).*

Demostración

Por definición de elemento positivo:

$$x \in S^+ \iff x \prec 2x \iff u(x) < u(2x) \iff u(x) < 2u(x) \iff 0 < u(x)$$

El caso negativo es análogo. ∎

El siguiente teorema establece que para poder extender la función de utilidad aditiva existente en uno de los conos a la totalidad de un semigrupo, la condición clave a verificar es que el cono representable sea dominante en la estructura. Dada esta condición, nótese que entonces el resultado es análogo al presentado en el Lema 2.4.1 para grupos totalmente ordenados.

Teorema 3.7.2

Sea $(S, +, \precsim)$ *un semigrupo totalmente ordenado, cuyo conos son ambos no vacíos y el positivo es aditivamente representable. Entonces, el semigrupo es aditivamente representable si y sólo si el cono negativo de* S *es dominado por el cono positivo.*

Demostración

$\Longrightarrow$) Sea $v : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de utilidad para $(S, +, \precsim)$. Sea $x \in S^-$, y consideremos cualquier $a \in S^+$. Por el Lema 3.7.5 es

$$v(x) < 0 \qquad v(a) > 0$$

Para los elementos reales $v(x), v(a)$, existe un número natural n_0 tal que

$$0 < v(x) + n_0.v(a)$$

Luego, puesto que v es aditiva:

$$0 < v(x + n_0 a)$$

de donde, nuevamente por el Lema 3.7.5, el elemento $x + n_0.a$ es positivo. Concluímos que, para $x \in S^-$, existe $n_0.a \in S^+$ tal que $x + n_0.a \in S^+$; esto es, el cono negativo es dominado por el positivo.

$\Longleftarrow$) Sea $u : S^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función de utilidad para el cono positivo. Definimos una extensión $u^* : S \to \mathbb{R}$ para la totalidad del semigrupo mediante:

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in S^+ \\ 0 & \text{si existe neutro } e \in S \text{ y es } x = e \\ u(x+a) - u(a) & \text{si } x \in S^- \text{ y es } a \text{ tal que } x + a \in S^+ \end{cases}$$

Con argumentos análogos a los del anterior Teorema 3.7.1 se comprueba que esta extensión está bien definida, es aditiva y es utilidad. ■

Corolario 3.7.2

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado, cuyos conos S^+ y S^- son no vacíos y verifican las siguientes condiciones:

1) S^+ cumple la propiedad $\{n+1, n\}$.

2) S^- es arquimediano.

3) Existe $x \in S^-$, dominado por S^+

Entonces, $(S, +, \precsim)$ es aditivamente representable.

Demostración

Por el anterior Teorema 3.7.2, es suficiente probar que la totalidad del cono negativo es dominado por el cono positivo. Pero este hecho se deduce del anterior Lema 3.7.4.

En efecto, al ser S^- arquimediano, para todo $y \in S^-$ existe un número natural n_0 tal que $n_0 x \prec y$. La segunda parte del Lema 3.7.4 garantiza ahora que el elemento $n_0 x \in S^-$ es dominado por S^+; y la primera parte del mismo Lema que lo mismo ocurre con el elemento y por ser $n_0 x \prec y$ ■

Observación

Los dos ejemplos concretos de semigrupos no representables aditivamente (a pesar de serlo su cono positivo) considerados a lo largo de la sección ilustran bien las "patologías" que pueden presentarse frente a lo que establece el anterior corolario.

Así, el primero de ellos, $(S, +, \precsim_L)$, con:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0\}$$

corresponde a un semigrupo cuyo cono negativo no es arquimediano (se vio este hecho como Ejemplo 3.4.1), aunque contiene elementos negativos, dominados por el cono positivo (Ejemplo 3.7.2).

En cuanto a $(T, +, \precsim_L)$, con:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\} \cup \{(0, y); y > 0\}$$

a pesar de que su cono negativo es arquimediano (ver Ejemplo 3.7.1), verifica que ningún elemento del cono negativo es dominado (ver Ejemplo 3.7.2), por lo que tampoco es de aplicación el Corolario 3.7.2.

3.8. Semigrupos totalmente preordenados

En la sección 2.7 hemos comprobado que los resultados sobre representabilidad aditiva de grupos totalmente ordenados podían trasladarse al caso de preórdenes completos.

La técnica utilizada fue el paso al conjunto cociente relativo a la relación de indiferencia asociada al preorden. En la Proposición 2.7.2 justificábamos que tal cociente se realiza sobre un subgrupo normal (el de los elementos indiferentes con el neutro del grupo); lo que en definitiva conduce a la construcción de un grupo totalmente ordenado.

Comprobaremos ahora que pueden obtenerse resultados similares, cuando la estructura considerada es la de semigrupo totalmente preordenado.

Definición 3.8.1: Semigrupo totalmente preordenado.

Se llama *semigrupo totalmente preordenado* a una estructura $(S, +, \precsim)$ verificando:

1) $(S, +)$ es semigrupo.

2) $(S, \precsim)$ es un conjunto totalmente preordenado.

3) El preorden completo $\precsim$ es *invariante por traslaciones*, es decir, $\forall a, b, c \in S$:

$$a \precsim b \iff a + c \precsim b + c \iff c + a \precsim c + b$$

Definición 3.8.2: Elementos positivos y negativos.

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente preordenado. Un elemento $a \in S$ se dirá *positivo* (resp. *negativo*) si verifica $a \prec 2a$ (resp. $2a \prec a$).

Llamaremos *cono positivo* (resp. *cono negativo*) de un semigrupo totalmente preordenado al conjunto de sus elementos positivos (resp. negativos). Se representará S^+ (resp. S^-).

Representaremos S^e al conjunto de elementos que no sean ni positivos ni negativos, es decir, cualquier $b \in S$ tal que $b \sim 2b$. Nótese, en particular, que si existe elemento neutro $e \in S$, entonces $e \in S^e$.

Proposición 3.8.1

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente preordenado. Las relaciones de indiferencia "$\sim$" y estricta "$\prec$" asociadas a $\precsim$ son también invariantes por traslaciones.

<u>*Demostración*</u>

Es idéntica a la realizada para grupos totalmente preordenados. (Proposición 2.7.1). ■

Proposición 3.8.2

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente preordenado. Representemos $I(x)$ la clase de elementos indiferentes correspondiente a cada elemento $x \in S$:

$$I(x) = \{y \in S; y \sim x\}$$

Entonces, el conjunto cociente $S/\!\sim\; = \{I(x); x \in S\}$ es un semigrupo totalmente ordenado, con la operación $+$ definida:

$$I(x) + I(y) = I(x + y)$$

y el orden total $\precsim$ definido:

$$I(x) \prec I(y) \Longleftrightarrow x \prec y$$

Demostración

Es suficiente probar que la operación $+$ está bien definida, es decir, que el resultado es independiente de los representantes escogidos en cada clase de indiferencia.

Efectivamente, dados $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ tales que $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$, por la invariancia por traslaciones de la relación $\sim$ resulta:

$$x_1 + y_1 \sim x_2 + y_1$$
$$x_2 + y_1 \sim x_2 + y_2$$

De donde, por ser $\sim$ de equivalencia

$$x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$$

Por lo que se tiene el resultado. ■

Definición 3.8.3

El cono positivo S^+ de un semigrupo totalmente preordenado $(S, +, \precsim)$ se dirá:

1) *Arquimediano* si para todo $a, b \in S^+$, con $a \prec b$, existe un número natural n tal que $b \prec n.a$.

2) Que verifica la propiedad $\{n+1, n\}$ si para todo $a, b \in S^+$, con $a \prec b$, existe un número natural n tal que $(n+1).a \prec n.b$.

3) Que verifica la propiedad $\{p > q\}$ si para todo $a, b \in S^+$, con $a \prec b$, existen $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, tales que $p.a \prec q.b$.

Como en el caso de semigrupos totalmente ordenados (Definción 3.4.2), los conceptos anteriores se aplican también al cono negativo, a partir del orden opuesto $\precsim^{op}$ asociado a la relación $\precsim$.

La totalidad del semigrupo recibe estas denominaciones cuando las condiciones se cumplen en cada uno de sus conos no vacíos.

Lema 3.8.1

Un semigrupo totalmente preordenado $(S, +, \precsim)$ *verifica la propiedad arquimediana (resp.* $\{n+1, n\}$, $\{p > q\}$*) si y sólo si el semigrupo totalmente ordenado* $(S/\sim, +, \precsim)$ *de sus clases de indiferencia verifica la propiedad arquimediana (resp.* $\{n+1, n\}$, $\{p > q\}$*).*

<u>*Demostración*</u>

Al ser por definición $I(x) + I(y) = I(x+y)$, para todo $x, y \in S$; en particular se tiene:

$$a \in S^+ \iff a \prec 2a \iff I(a) \prec I(2a) \iff I(a) \prec 2I(a) \iff I(a) \in (S/\sim)^+$$

y también, para todo $x \in S$, $n \in \mathbb{N}$ resulta:

$$n.I(x) = I(n.x)$$

De este modo, afirmar que $I(a)$, $I(b)$ son elementos positivos de $S/\sim$, con $I(a) \prec I(b)$, es equivalente a que se verifique $a, b \in S^+$, con $a \prec b$; y formular, para la propiedad arquimediana:

$$\text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } I(b) \prec n_0 I(a)$$

es, a su vez, equivalente a:

$$\text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } b \prec n_0 a$$

El argumento para las otras dos propiedades es análogo. ■

Teorema 3.8.1

Dado un semigrupo totalmente preordenado $(S, +, \precsim)$ son equivalentes:

i) $(S, +, \precsim)$ es aditivamente representable (admite función de utilidad, que es un homomorfismo).

ii) $(S, +, \precsim)$ verifica la propiedad $\{n+1, n\}$.

iii) $(S, +, \precsim)$ verifica la propiedad $\{p > q\}$

Además, todo semigrupo totalmente preordenado y aditivamente representable es, en particular, arquimediano.

Demostración

Es consecuencia del Lema anterior y de los resultados obtenidos para semigrupos totalmente ordenados. ■

3.A. Apéndice

Teorema 3.6.3

Todo semigrupo positivo resoluble $(S, +, \precsim)$ es el cono positivo de un grupo totalmente ordenado.

Demostración

1) Considérese un conjunto de un elemento, $\{0\}$, y sea:

$$G = (S \times \{0\}) \cup \{(0,0)\} \cup (\{0\} \times S)$$

2) Se define en G un orden total, $\dot{\precsim}$, de la siguiente manera; dados $a, b \in S$:

$$(b,0)\dot{\precsim}(a,0) \iff a \precsim b \iff (0,a)\dot{\precsim}(0,b)$$
$$(a,0)\dot{\prec}(0,0)\dot{\prec}(0,b)$$

3) Se define en G una operación interna, $\dot{+}$, de la siguiente manera; dados $a, b \in S$:

$$\begin{aligned}
&(0,a)\dot{+}(0,0) = (0,0)\dot{+}(0,a) = (0,a)\\
&(a,0)\dot{+}(0,0) = (0,0)\dot{+}(a,0) = (a,0)\\
&(a,0)\dot{+}(b,0) = (b+a,0)\\
&(0,a)\dot{+}(0,b) = (0,a+b)\\
&(a,0)\dot{+}(0,b) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } a=b\\ (0,x) & \text{si } b=a+x\\ (y,0) & \text{si } a=b+y \end{cases}\\
&(0,a)\dot{+}(b,0) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } a=b\\ (0,z) & \text{si } a=z+b\\ (t,0) & \text{si } b=t+a \end{cases}
\end{aligned}$$

Nótese que los casos planteados recogen cualquier situación posible y que, al ser S resoluble y cancelativo, los elementos x, y, z, t de S que intervienen en la definición existen y están determinados.

4) Si se prueba ahora que $(G, \dot{+}, \dot{\precsim})$ es un grupo totalmente ordenado, es obvio que su cono positivo

$$G^+ = \{0\} \times S = \{(0,a) \in G; a \in S\} = \{A \in G, (0,0)\dot{\prec}A\}$$

es isomorfo e isótono con S, sin más que identificar cada elemento $a \in S$ con $(0,a) \in (\{0\} \times S)$.

5) $(G, \dot{+})$ es un grupo.

Por definición, $(0,0)$ es el elemento neutro de G, y para cada elemento ha sido definido un opuesto. Por tanto, es suficiente probar que $\dot{+}$ es asociativa

$$\forall A, B, C \in G : (A\dot{+}B)\dot{+}C = A\dot{+}(B\dot{+}C)$$

Pueden darse las siguientes situaciones:

Caso a: Al menos uno de los elementos A, B, C es $(0,0)$

Es trivial que $(A\dot{+}B)\dot{+}C = A\dot{+}(B\dot{+}C)$

Para los restantes casos, supónganse dados $a, b, c \in S$

Caso b: $A = (a,0)$, $B = (b,0)$, $C = (c,0)$. Entonces:

$$\begin{aligned}(A\dot{+}B)\dot{+}C &= (b+a,0)\dot{+}(c,0) = (c+(b+a),0)\\ &= ((c+b)+a,0) = (a,0)\dot{+}(c+b,0) = A\dot{+}(B\dot{+}C)\end{aligned}$$

Caso c: $A = (0,a)$, $B = (0,b)$, $C = (0,c)$. Entonces:

$$\begin{aligned}(A\dot{+}B)\dot{+}C &= (0,a+b)\dot{+}(0,c) = (0,(a+b)+c)\\ &= (0,a+(b+c)) = (0,a)\dot{+}(0,b+c) = A\dot{+}(B\dot{+}C)\end{aligned}$$

Caso d: $A = (a,0)$, $B = (0,b)$, $C = (0,c)$

Subcaso d.1: $a = b + c$

$$A\dot{+}B = (b+c,0)\dot{+}(0,b) = (c,0)$$

$$(A\dot{+}B)\dot{+}C = (c,0)\dot{+}(0,c) = (0,0)$$

$$B\dot{+}C = (0,b+c) = (0,a)$$

$$A\dot{+}(B\dot{+}C) = (a,0)\dot{+}(0,a) = (0,0)$$

$$\Longrightarrow (A\dot{+}B)\dot{+}C = A\dot{+}(B\dot{+}C)$$

Subcaso d.2: $a \prec b + c$

Debe existir $d_1 \in S$ tal que $a + d_1 = b + c$

$$A\dot{+}(B\dot{+}C) = (a,0)\dot{+}(0,b+c) = (0,d_1)$$

<u>Situación d.2.1</u>: $a + d_1 = b + c, \quad a = b$

Entonces, $d_1 = c$

$$A \dot{+} B = (a,0) \dot{+} (0,b) = (a,0) \dot{+} (0,a) = (0,0)$$

$$(A \dot{+} B) \dot{+} C = (0,0) \dot{+} (0,c) = (0,c)$$

$$A \dot{+} (B \dot{+} C) = (0,d_1) = (0,c)$$

$$\Longrightarrow (A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$$

<u>Situación d.2.2</u>: $a + d_1 = b + c$, $a \prec b$

Debe existir $d_2 \in S$ tal que $a + d_2 = b$

$$a + d_2 = b \Longrightarrow a + d_2 + c = b + c$$

$$\Longrightarrow a + d_2 + c = a + d_1 \Longrightarrow d_2 + c = d_1$$

$$A \dot{+} B = (a,0) \dot{+} (0,b) = (0,d_2)$$

$$(A \dot{+} B) \dot{+} C = (0,d_2) \dot{+} (0,c) = (0,d_2 + c) = (0,d_1)$$

$$A \dot{+} (B \dot{+} C) = (0,d_1)$$

$$\Longrightarrow (A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$$

<u>Situación d.2.3</u>: $a + d_1 = b + c, \quad b \prec a$

Debe existir $d_3 \in S$ tal que $b + d_3 = a$

$$b + d_3 = a \Longrightarrow b + d_3 + d_1 = a + d_1$$

$$\Longrightarrow b + d_3 + d_1 = b + c \Longrightarrow d_3 + d_1 = c$$

$$A \dot{+} B = (a,0) \dot{+} (0,b) = (d_3,0)$$

$$(A \dot{+} B) \dot{+} C = (d_3,0) \dot{+} (0,c) = (0,d_1)$$

$$A \dot{+} (B \dot{+} C) = (0,d_1)$$

$$\Longrightarrow (A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$$

Subcaso d.3: $b + c \prec a$. Debe existir $d_4 \in S$ tal que $b + c + d_4 = a$

$$A\dot{+}B = (a, 0)\dot{+}(0, b) = (c + d_4, 0)$$

$$(A\dot{+}B)\dot{+}C = (c + d_4, 0)\dot{+}(0, c) = (d_4, 0)$$

$$B\dot{+}C = (0, b + c)$$

$$A\dot{+}(B\dot{+}C) = (a, 0)\dot{+}(0, b + c) = (d_4, 0)$$

$$\Longrightarrow (A\dot{+}B)\dot{+}C = A\dot{+}(B\dot{+}C)$$

Caso e: $A = (0, a)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$. Es similar al anterior.

Caso f: $A = (0, a)$, $B = (0, b)$, $C = (c, 0)$. Es también similar al caso (d).

Caso g: $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, c)$. Es también similar al caso (d).

Caso h: $A = (0, a)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, c)$

Subcaso h.1: $a = b$

$$A\dot{+}B = (0, a)\dot{+}(b, 0) = (0, 0)$$

$$(A\dot{+}B)\dot{+}C = (0, 0)\dot{+}(0, c) = (0, c)$$

Situación h.1.1: $a = b = c$

$$(A\dot{+}B)\dot{+}C = (0, c) = (0, a)$$

$$B\dot{+}C = (b, 0)\dot{+}(0, c) = (0, 0)$$

$$A\dot{+}(B\dot{+}C) = (0, a)\dot{+}(0, 0) = (0, a)$$

$$\Longrightarrow (A\dot{+}B)\dot{+}C = A\dot{+}(B\dot{+}C)$$

Situación h.1.2: $a = b \prec c$

Debe existir $h_1 \in S$ tal que $b + h_1 = c$

$$(A\dot{+}B)\dot{+}C = (0, c)$$

$$B\dot{+}C = (b, 0)\dot{+}(0, c) = (0, h_1)$$

$$A\dot{+}(B\dot{+}C) = (0, b)\dot{+}(0, h_1) = (0, b + h_1) = (0, c)$$

$$\Longrightarrow (A\dot{+}B)\dot{+}C = A\dot{+}(B\dot{+}C)$$

<u>Situación h.1.3</u>: $c \prec a = b$

Debe existir $h_2 \in S$ tal que $c + h_2 = b$

$$(A\dot{+}B)\dot{+}C = (0, c)$$

$$B\dot{+}C = (b, 0)\dot{+}(0, c) = (h_2, 0)$$

$$A\dot{+}(B\dot{+}C) = (0, b)\dot{+}(h_2, 0) = (0, c)$$

$$\Longrightarrow (A\dot{+}B)\dot{+}C = A\dot{+}(B\dot{+}C)$$

<u>Subcaso h.2</u>: $a \prec b$. Debe existir $h_3 \in S$ tal que $h_3 + a = b$

$A\dot{+}B = (0, a)\dot{+}(b, 0) = (h_3, 0)$

<u>Situación h.2.1</u> $h_3 + a = b$, $c = h_3$

$$(A\dot{+}B)\dot{+}C = (h_3, 0) + (0, c) = (0, 0)$$

$$B\dot{+}C = (b, 0)\dot{+}(0, c) = (c + a, 0)\dot{+}(0, c) = (a, 0)$$

$$A\dot{+}(B\dot{+}C) = (0, a)\dot{+}(a, 0) = (0, 0)$$

$$\Longrightarrow (A\dot{+}B)\dot{+}C = A\dot{+}(B\dot{+}C)$$

<u>Situación h.2.2</u>: $h_3 + a = b$, $c \prec h_3$

Debe existir $h_4 \in S$ tal que $c + h_4 = h_3$

$$c \prec h_3 \Longrightarrow c + a \prec h_3 + a \Longrightarrow c + a \prec b$$

$$\Longrightarrow \exists h_5 \in S \text{ tal que } c + a + h_5 = b$$

$$\Longrightarrow c + a + h_5 = h_3 + a \Longrightarrow c + a + h_5 = c + h_4 + a$$

$$\Longrightarrow a + h_5 = h_4 + a$$

$$(A\dot{+}B)\dot{+}C = (h_3, 0)\dot{+}(0, c) = (h_4, 0)$$

$$B\dot{+}C = (b, 0)\dot{+}(c, 0) = (a + h_5, 0) = (h_4 + a, 0)$$

$$A\dot{+}(B\dot{+}C) = (0, a)\dot{+}(h_4 + a, 0) = (h_4, 0)$$

$$\Longrightarrow (A\dot{+}B)\dot{+}C = A\dot{+}(B\dot{+}C)$$

<u>Situación h.2.3</u>: $h_3 + a = b, \quad h_3 \prec c$

Debe existir $h_6 \in S$ tal que $h_3 + h_6 = c$

<u>Subsituación h.2.3.1</u>: $h_3 + a = b, \quad h_3 + h_6 = c, \quad b = c$

$b = c \Longrightarrow h_3 + a = h_3 + h_6 \Longrightarrow a = h_6$

$(A \dot{+} B) \dot{+} C = (h_3, 0) \dot{+} (0, c) = (0, h_6) = (0, a)$

$B \dot{+} C = (b, 0) \dot{+} (0, c) = (0, 0)$

$A \dot{+} (B \dot{+} C) = (0, a) + (0, 0) = (0, a)$

$\Longrightarrow (A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$

<u>Subsituación h.2.3.2</u>: $h_3 + a = b, \quad h_3 + h_6 = c, \quad b \prec c$

Debe existir $h_7 \in S$ tal que $c = b + h_7$

$h_3 + a = b \Longrightarrow h_3 + a + h_7 = b + h_7$

$\Longrightarrow h_3 + a + h_7 = c$

$\Longrightarrow h_3 + a + h_7 = h_3 + h_6 \Longrightarrow a + h_7 = h_6$

$(A \dot{+} B) \dot{+} C = (h_3, 0) \dot{+} (0, c) = (0, h_6)$

$B \dot{+} C = (b, 0) \dot{+} (0, c) = (0, h_7)$

$A \dot{+} (B \dot{+} C) = (0, a) \dot{+} (0, h_7) = (0, a + h_7) = (0, h_6)$

$\Longrightarrow (A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$

<u>Subsituación h.2.3.3</u>: $h_3 + a = b, \quad h_3 + h_6 = c, \quad c \prec b$

Debe existir $h_8 \in S$ tal que $b = c + h_8$

$h_3 + a = b \Longrightarrow h_3 + a = c + h_8$

$\Longrightarrow h_3 + a = h_3 + h_6 + h_8$

$\Longrightarrow a = h_6 + h_8$

$(A \dot{+} B) \dot{+} C = (h_3, 0) \dot{+} (0, c) = (0, h_6)$

$A \dot{+} (B \dot{+} C) = (0, a) \dot{+} (h_8, 0) = (0, h_6)$

$\Longrightarrow (A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$

<u>Subcaso h.3</u>: $b \prec a$

Debe existir $h_9 \in S$ tal que $a = h_9 + b$

$A \dot{+} B = (0, a) \dot{+} (b, 0) = (0, h_9)$

<u>Situación h.3.1</u> $a = h_9 + b, \quad b = c$

$(A \dot{+} B) \dot{+} C = (0, h_9) \dot{+} (0, b) = (0, h_9 + b) = (0, a)$

$B \dot{+} C = (b, 0) \dot{+} (0, c) = (0, 0)$

$A \dot{+} (B \dot{+} C) = (0, a) \dot{+} (0, 0) = (0, a)$

$\Longrightarrow (A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$

<u>Situación h.3.2</u> $a = h_9 + b, \quad b \prec c$

Existe $h_{10} \in S$ tal $c = b + h_{10}$

$a = h_9 + b \Longrightarrow a + h_{10} = h_9 + b + h_{10}$

$\Longrightarrow a + h_{10} = h_9 + c$

$(A \dot{+} B) \dot{+} C = (0, h_9) \dot{+} (0, c) = (0, h_9 + c)$

$B \dot{+} C = (b, 0) \dot{+} (0, c) = (0, h_{10})$

$A \dot{+} (B \dot{+} C) = (0, a) \dot{+} (0, h_{10}) = (0, a + h_{10}) = (0, h_9 + c)$

$\Longrightarrow (A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$

<u>Situación h.3.3</u> $a = h_9 + b, \quad c \prec b$

Debe existir $h_{11} \in S$ tal que $b = c + h_{11}$

$a = h_9 + b \Longrightarrow a = h_9 + c + h_{11}$

$(A \dot{+} B) \dot{+} C = (0, h_9) \dot{+} (0, c) = (0, h_9 + c)$

$B \dot{+} C = (b, 0) \dot{+} (0, c) = (h_{11}, 0)$

$A \dot{+} (B \dot{+} C) = (0, a) \dot{+} (h_{11}, 0) = (0, h_9 + c)$

$\Longrightarrow (A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$

Caso i: $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (c, 0)$. Es similar al anterior.

Esto concluye la demostración de la asociatividad.

6) $(G, \dot{+}, \dot{\precsim})$ es un grupo totalmente ordenado, esto es, $\dot{\precsim}$ es invariante por traslaciones

$$\forall A, B, C \in G : A \dot{\prec} B \iff A \dot{+} C \dot{\prec} B \dot{+} C \iff C \dot{+} A \dot{\prec} C \dot{+} B$$

Dado un elemento $X \in G$, se representará $\overline{X}$ su opuesto. Con esta notación, y de acuerdo con las definiciones de $\dot{+}$ y $\dot{\prec}$, dados dos elementos $X, Y \in G$, resulta $(0,0) \dot{\prec} X \dot{+} Y$ en los siguientes casos, y solamente en ellos (definidos a partir de elementos apropiados $a, b \in S$):

a) $X = (0, a)$, $Y = (0, 0)$

b) $X = (0, 0)$, $Y = (0, a)$

c) $X = (0, a)$, $Y = (0, b)$

d) $X = (a, 0)$, $Y = (0, b)$, cuando $a \prec b$

En este caso:

$$a \prec b \iff (0, a) \dot{\prec} (0, b) \iff \overline{X} \dot{\prec} Y$$
$$a \prec b \iff (b, 0) \prec (a, 0) \iff \overline{Y} \dot{\prec} X$$

e) $X = (0, a)$, $Y = (b, 0)$, cuando $b \prec a$

En este caso:

$$b \prec a \iff (0, b) \dot{\prec} (0, a) \iff \overline{Y} \dot{\prec} X$$
$$b \prec a \iff (a, 0) \prec (b, 0) \iff \overline{X} \dot{\prec} Y$$

Por tanto, se concluye que para todo $X, Y \in G$:

$$(0,0) \dot{\prec} X \dot{+} Y \iff \overline{X} \dot{\prec} Y \iff \overline{Y} \dot{\prec} X$$

Expresado de otra manera, para todo $A, B \in G$:

$$A \dot{\prec} B \iff (0,0) \dot{\prec} \overline{A} \dot{+} B \iff (0,0) \dot{\prec} B \dot{+} \overline{A}$$

Considerando ahora $A, B, C \in G$, resulta finalmente:

$$\begin{aligned}
A \dot{\prec} B &\iff (0,0) \dot{\prec} B \dot{+} \overline{A} \\
&\iff (0,0) \dot{\prec} B \dot{+} C \dot{+} \overline{C} \dot{+} \overline{A} \\
&\iff (0,0) \dot{\prec} B \dot{+} C \dot{+} \overline{(A \dot{+} C)} \\
&\iff A \dot{+} C \dot{\prec} B \dot{+} C
\end{aligned}$$

y, de manera análoga,

$$\begin{aligned}
A \dot{\prec} B &\iff (0,0) \dot{\prec} B \dot{+} \dot{\prec} \overline{A} \\
&\iff (0,0) \dot{\prec} \overline{A} \dot{+} \overline{C} \dot{+} C \dot{+} B \\
&\iff (0,0) \dot{\prec} \overline{(C \dot{+} A)} \dot{+} C \dot{+} B \\
&\iff C \dot{+} A \dot{\prec} C \dot{+} B
\end{aligned}$$

Es decir, la relación $\dot{\prec}$ resulta invariante por traslaciones, lo que completa la demostración. ■

Capítulo 4
Grupos no representables aditivamente

4.1. Introducción

En este capítulo trabajaremos nuevamente sobre grupos totalmente ordenados. En particular, vamos a considerar el caso en que la estructura admite utilidad pero no necesariamente aditiva. Como veremos, algunos de los resultados obtenidos para semigrupos en el capítulo anterior tienen aplicación aquí.

Nuestro análisis, con renuncia expresa al carácter aditivo de la representación, puede resultar singular para los planteamientos habituales del trabajo matemático, predispuesto con frecuencia, precisamente, a identificar ante todo los homomorfismos que se presenten entre las estructuras objetivo de estudio.

La razón para proponer este enfoque es considerar la "existencia de utilidad en conjuntos ordenados" como problema original (en definitiva, búsqueda de un "isomorfismo de órdenes"), e imaginar que se incorpora *a posteriori* la estructura algebraica adicional. Por ello, es de esperar que las referencias para este esquema de trabajo sean más frecuentes en el contexto de Teoría de la Utilidad. Pueden encontrarse propuestas similares en Luce y Raiffa [1957], Chipman [1960], Katzner [1970], Eichhorn [1978], Takayama [1985], Fishburn [1989], Castillo y Ruiz [1993], etc.

Puede parecer, en principio, que la mera representabilidad no está relacionada con la estructura de grupo. Recuérdese, sin embargo, que un grupo totalmente ordenado se ha definido de tal manera que la operación algebraica y el orden son compatibles, a través de la "invariancia por traslaciones". Esta conexión genera, como veremos, importantes consecuencias.

Probaremos que el cono positivo de un grupo totalmente ordenado y representable admite una partición contable en semigrupos arquimedianos (y la propiedad arquimediana está estrechamente relacionada con la representabilidad aditiva). Sin embargo, ninguno de los semigrupos en esta partición, excepto quizá uno de ellos, es aditivamente representable, a pesar de ser arquimedianos (la razón es que no verifican la propiedad $\{n+1, n\}$).

En relación a la representabilidad de conjuntos totalmente ordenados, recordemos (véase Capítulo 1) que se dispone del siguiente resultado:

> *Un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$ es representable si y sólo si es perfectamente separable; esto es, existe un subconjunto contable (i.e. finito o infinito numerable) D de X tal que, para todo $a, b \in X$, con $a \prec b$, existe algún $d \in D$ tal que $a \precsim d \precsim b$.*

En particular, todo conjunto contable es representable (y además, es representable con rango en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales). (Ver Proposición 1.3.4).

4.2. Componentes arquimedianas

En la Definición 2.6.1, se introdujo el concepto de *par arquimediano* o, con más generalidad, *conjunto arquimediano* en el cono positivo de un grupo totalmente ordenado, para poner de manifiesto el hecho de que los elementos considerados verificaban entre sí la propiedad arquimediana.

Probaremos ahora que tal concepto establece una relación de equivalencia; y a lo largo de la sección se verán algunas consecuencias que se deducen de esta posibilidad de clasificación de los elementos positivos de un grupo.

Referencias a esta relación y el cociente que define aparecen también en Loonstra [1951], Clifford [1954] e Hion [1957].

Lema 4.2.1

La relación binaria $\mathcal{R}$, definida en el cono positivo G^+ de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, mediante:

$$\text{para todo } a, b \in G^+ \quad a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{el par } \{a, b\} \text{ es arquimediano}$$

es de equivalencia.

<u>*Demostración*</u>

Es evidente que la relación $\mathcal{R}$ es reflexiva y simétrica. En cuanto a la propiedad transitiva, si $a, b, c \in G^+$ verifican $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists p_1, p_2 \in \mathbb{N} \text{ tales que } a \precsim p_1 b, b \precsim p_2 c \Longrightarrow a \precsim (p_1 p_2) c \\ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{N} \text{ tales que } b \precsim q_1 a, c \precsim q_2 b \Longrightarrow c \precsim (q_2 q_1) a \end{array}\right\} \Longrightarrow a\mathcal{R}c$$

■

Definición 4.2.1: Componente arquimediana

Se llamará *componente arquimediana* de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ a cada clase $[a] \in G^+/\mathcal{R}$ definida por la anterior relación de equivalencia $\mathcal{R}$. ($[a]$ representa la clase de equivalencia correspondiente al elemento $a \in G^+$).

Como consecuencia evidente:

Un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, no trivial, es arquimediano si y sólo si consta de una única componente arquimediana.

Lema 4.2.2

Para todo $x, y \in [a]$ se verifica: $x + y \in [a]$. Por tanto, cualquier componente arquimediana de un grupo totalmente ordenado no trivial $(G, +, \precsim)$, es un semigrupo positivo (y, por supuesto, arquimediano).

Demostración

Dados $x, y \in [a]$, supóngase, por ejemplo, $x \precsim y$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x \precsim y \Longrightarrow x + y \precsim 2y \\ y \prec x + y \end{array}\right\} \Longrightarrow (x+y)\mathcal{R}y$$

Por tanto, $x + y \in [a]$ $\blacksquare$

Lema 4.2.3

Sean $[a]$, $[b]$ elementos distintos de $G^+/\mathcal{R}$ tales que $a \prec b$. Entonces $x \prec y$, para todo $x \in [a]$, $y \in [b]$.

Como consecuencia, queda inducido en el conjunto $G^+/\mathcal{R}$ un orden total, que se denotará también $\precsim$, de la siguiente manera:

$$[a] \prec [b] \Longleftrightarrow [a] \neq [b], a \prec b$$

Demostración

Supóngase $y \precsim x$.

Por definición, dado $y \in [b]$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $b \precsim q.y$. Análogamente, dado $x \in [a]$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \precsim p.a$. Así se obtiene

$$a \prec b$$

$$b \precsim q.y \precsim q.x \precsim q.p.a$$

Entonces, $a\mathcal{R}b$, pero esto es una contradicción, puesto que $[a] \neq [b]$. $\blacksquare$

Lema 4.2.4

Sean $[a]$, $[b]$ dos elementos diferentes de $G^+/\mathcal{R}$, tales que $a \prec b$. Entonces, $x+y \in [b]$, para todo $x \in [a]$, $y \in [b]$.

<u>*Demostración*</u>

Dados $x \in [a]$, $y \in [b]$, con $[a] \prec [b]$ se verifica, según el Lema anterior, $x \prec y$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x \prec y \Longrightarrow x + y \prec 2y \\ y \prec x + y \end{array}\right\} \Longrightarrow (x+y)\mathcal{R}y$$

Por tanto, $x + y \in [b]$ ■

Observación

Nótese que el mismo argumento (sumando y por la izquierda, en vez de por la derecha) justifica que $y+x \in [b]$, es decir, para cualquier par de elementos $x, y \in G^+$, los elementos $x + y$ e $y + x$ deben pertenecer a la misma componente arquimediana.

Lema 4.2.5

La operación, + del grupo induce en $G^+/\mathcal{R}$ una estructura de semirretículo, con la operación $\vee$ definida como:

$$[a] \vee [b] = [a + b]$$

Además, el orden $\precsim^*$ que $\vee$ define en $G^+/\mathcal{R}$, dado por

$$[a] \prec^* [b] \Longleftrightarrow [a] \neq [b]; [a] \vee [b] = [b]$$

coincide con el anteriormente definido

$$[a] \prec [b] \Longleftrightarrow [a] \neq [b]; a \prec b$$

<u>*Demostración*</u>

La operación reticular $\vee$ está bien definida, porque $[a+b] = [c+d]$, para todo $c \in [a]$, $d \in [b]$; es decir, $[a] \vee [b]$ es independiente de los representantes escogidos. Claramente, la operación es asociativa y conmutativa; y es también idempotente, de acuerdo con el Lema 4.2.2.

Para comparar los órdenes $\precsim$ y $\precsim^*$ definidos en $G^+/\mathcal{R}$, supónganse dos elementos $[a], [b] \in G^+/\mathcal{R}$, con $[a] \neq [b]$. Entonces:

$$[a] \prec [b] \Longrightarrow a + b \in [b] \Longrightarrow [a+b] = [b] \Longrightarrow [a] \vee [b] = [b] \Longrightarrow [a] \prec^* [b]$$

y, reciprocamente:

$$[a] \prec^* [b] \Longrightarrow [a] \vee [b] = [b] \Longrightarrow [a+b] = [b] \Longrightarrow$$
$$a + b \prec n.b \text{ para algún } n > 1, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$$
$$\text{(por la invariancia por traslaciones) } [a] \prec [b]$$

Luego ambos órdenes coinciden, lo que concluye la demostración. ■

Observación

El conjunto de componentes arquimedianas $G^+/\mathcal{R}$ de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ puede dotarse del orden dado anteriormente y una suma definida por

$$[a] + [b] = [a + b]$$

Esta suma es asociativa, por lo que $(G^+/\mathcal{R}, +)$ es un semigrupo. Sin embargo, no es un semigrupo totalmente ordenado porque no es invariante por traslaciones, en el sentido "*fuerte*" que hemos definido este concepto, aunque sí se cumple en sentido "*débil*" (ver Definición 3.2.2 y observación siguiente).

Nótese que dadas tres clases $[a] \prec [b] \prec [c]$ se tiene $[a] + [c] = [b] + [c] = [c]$, pero $[a] \neq [b]$.

Estudiaremos ahora los grupos totalmente ordenados $(G, +, \precsim)$ que son representables por medio de una función de utilidad (no necesariamente aditiva) $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x, y \in G$:

$$x \precsim y \Longleftrightarrow u(x) \leq u(y)$$

Estos grupos se denominarán, sin más, *representables*.

En el caso arquimediano, serán aditivamente representables, de acuerdo con el Teorema de Hölder. Por el contrario, en grupos no arquimedianos ninguna de las posibles funciones de utilidad para $\precsim$ es un homorfismo de grupos de $(G,+)$ en $(\mathbb{R},+)$.

Notación

Dado un grupo totalmente ordenado y representable $(G,+,\precsim)$, y dada una función de utilidad $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ para $\precsim$, representaremos para cada $x \in G^+$ por S_x el siguiente elemento de la recta real ampliada:

$$S_x = \sup_{n\in N} u(n.x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Lema 4.2.6

Sea $(G,+,\precsim)$ un grupo totalmente ordenado, representable; sea u una función de utilidad para $\precsim$, y sea $G^+/\mathcal{R}$ el conjunto de las componentes arquimedianas de G. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

1) $u(x) < S_x$, para todo $x \in G^+$

2) $[a] = [b] \Longleftrightarrow S_a = S_b$, para todo $a, b \in G^+$

3) $[a] \prec [b] \Longleftrightarrow S_a < S_b$, para todo $a, b \in G^+$

4) $[a] \prec [b] \Longrightarrow S_a < u(b)$

Demostración

1) Es obvio, puesto que la sucesión $(u(n.x))_{n\in N}$ es estrictamente creciente.

2) $\Longrightarrow$) Supuesto $[a] = [b]$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a \precsim p.b$. Por tanto, $n.a \precsim n.p.b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $S_a \leq S_b$. De manera análoga, se obtiene $S_b \leq S_a$; y así se concluye $S_a = S_b$.

$\Longleftarrow$) Supuesto $S_a = S_b$, por 1), puede afirmarse que $u(a) < S_a = S_b$. Entonces, debe existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $u(a) < u(p.b)$, de donde $a \prec p.b$. De la misma manera, se obtiene que debe existir $q \in \mathbb{N}$ tal que $b \prec q.a$; y así se concluye $a\mathcal{R}b$, esto es, $[a] = [b]$

3) $\Longrightarrow$) Si $[a] \prec [b]$, se obtiene, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$[a] \prec [b] \Longrightarrow a \prec b \Longrightarrow n.a \prec n.b \Longrightarrow u(n.a) < u(n.b)$$

Por tanto, $S_a \leq S_b$. Como, por 2), debe ser $S_a \neq S_b$, porque $[a] \neq [b]$, se concluye $S_a < S_b$

$\Longleftarrow$) Reciprocamente, si $S_a < S_b$, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u(n.a) < u(n.b)$, para todo $n \geq n_0$, por lo que $a \prec b$. Nuevamente por 2) $[a] \neq [b]$, porque $S_a \neq S_b$. Por tanto, $[a] \prec [b]$

4) Supóngase que $u(b) \leq S_a$. Entonces:

$$[a] \prec [b] \Longrightarrow a \prec b \Longrightarrow e \prec b - a \prec b$$

donde e es el elemento neutro de $(G, +)$. Por tanto $u(b - a) < u(b) \leq S_a$, por lo que debe existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $u(b - a) < u(p.a)$. Así, $b - a \prec p.a$ y $b \prec (p + 1).a$.

Puesto que, además, $a \prec b$, se sigue que $a\mathcal{R}b$, y finalmente $[a] = [b]$. Pero esto es absurdo, porque era $[a] \prec [b]$. Como conclusión, debe ser $S_a < u(b)$.

Esto completa la demostración. ■

Teorema 4.2.1

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado representable, no trivial. Entonces, su cono positivo, G^+, admite una partición contable en subconjuntos S_n, cada uno de los cuales es un semigrupo positivo.

Demostración

Se ha visto ya que puede realizarse una partición de G^+ en sus componentes arquimedianas. Dada u, una función de utilidad para $(G, \precsim)$, y $[a] \in G^+/\mathcal{R}$, se tiene, según el Lema anterior, que $u(a) < S_a$. Por tanto

$$u(a) \in [u(a), S_a)$$

Además, por el Lema 4.2.6, si $[a] \neq [b]$ y, por ejemplo, $[a] \prec [b]$, entonces

$$u(a) < S_a < u(b) < S_b$$

y por ello, los intervalos $(u(a), S_a)$ y $(u(b), S_b)$ son disjuntos.

En las condiciones obtenidas, el número de componenentes arquimedianas debe ser contable. ■

Observación

El siguiente Teorema es un recíproco al anterior, basado en la hipótesis de que un grupo totalmente ordenado dado, admite una partición, para la que se verifica una propiedad similar a la establecida en el Lema 4.2.6 para las componentes arquimedianas.

Teorema 4.2.2

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado, cuyo cono positivo admite una partición en una familia contable $(S_n)_{n \in N}$ de semigrupos positivos representables, de manera que para todo $p, q \in \mathbb{N}$, o $x_p \prec x_q$ para todo $x_p \in S_p$ y $x_q \in S_q$, o $x_q \prec x_p$ para todo $x_p \in S_p$ y $x_q \in S_q$. Entonces, $(G, +, \precsim)$ es representable.

<u>*Demostración*</u>

1) Se probará primero que puede establecerse una aplicación v isótona del cono positivo de G en el conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, dotado del orden lexicográfico $\leq_L$.

Puede dotarse a la familia $(S_n)_{n \in N}$ de un orden total, que se representará tambien $\prec$, de la siguiente manera:

$$S_p \prec S_q \iff x_p \prec x_q, \text{ con } x_p \in S_p, x_q \in S_q$$

Esta ordenación es isótona con los racionales, por ser la familia $(S_n)_{n \in N}$ contable, esto es, existe $\widetilde{u} : (S_n)_{n \in N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ isótona.

Por su parte, cada S_n es representable. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n : S_n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de utilidad.

Considérese ahora la aplicación: $v : G^+ \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, definida de la siguiente manera: Dado $a \in G^+$ tal que $a \in S_n$:

$$v(a) = (\widetilde{u}(S_n), u_n(a))$$

Por construcción, esta aplicación v es una isotonía del cono positivo G en $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, dotado del orden lexicográfico.

2) A su vez, $(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}, \leq_L)$ es representable en $\mathbb{R}$, puesto que es perfectamente separable (el conjunto contable $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es orden denso). Sea w una función de utilidad, que puede suponerse estrictamente positiva.

3) Resulta así que $u = w \circ v$, por ser composición de isotonías, es una función de utilidad para el cono positivo de G, y además estrictamente positiva. Puede extenderse a todo el grupo definiendo $u(e) = 0$, $u(x) = -u(-x)$, para todo $x \in G^-$.

Esto completa la demostración. ■

Teorema 4.2.3

Sea $(G,+,\precsim)$ un grupo totalmente ordenado representable. Entonces, a lo sumo una de sus componentes arquimedianas es aditivamente representable. Además, si existe tal componente arquimediana $[a]$ de G, aditivamente representable, entonces es un elemento minimal en el orden $\precsim$ definido en $G^+/\mathcal{R}$ (i.e.: para toda componente $[b] \in G^+/\mathcal{R}$, se verifica $[a] \precsim [b]$).

Demostración

Dadas dos componentes cualesquiera $[b],[c] \in G^+/\mathcal{R}$, con $[b] \prec [c]$, por los Lemas 4.2.2 y 4.2.3, se sigue que $n.b \prec c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, por el Lema 4.2.4, el elemento $b+c$, con $b \prec b+c$, pertenece a la componente $[c]$.

Por otra parte, sabemos por la Proposición 2.5.2 que si se cumple $n.b \prec c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (los elementos b y c violan la propiedad arquimediana), entonces los elementos c y $b+c$ no verifican la propiedad $\{n+1,n\}$.

Deducimos así que el semigrupo $([c],+,\precsim)$ no verifica la propiedad $\{n+1,n\}$, puesto que la violan sus elementos c y $b+c$.

Como conclusión, $([c],+,\precsim)$ no es aditivamente representable, y solamente una componente minimal podría serlo.

Puede observarse también que $([c],+,\precsim)$ no es resoluble. Así; los elementos c y $b+c$ pertenecen a $[c]$, pero $b \notin [c]$ ■

Concluímos la sección con dos ejemplos de grupos abelianos, totalmente ordenados y representables, el primero de ellos con componente arquimediana minimal, mientras que el segundo carece de ella.

Ejemplo 4.2.1

Sea el subgrupo del *plano lexicográfico*:

$$(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}, +, \precsim_L)$$

Como ya se ha mencionado, este grupo es representable, porque es perfectamente separable: el conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ establece esta perfecta separabilidad.

La componente arquimediana $[(0, 1)]$ es isótona e isomorfa a la recta real positiva, por lo que es aditivamente representable. Es, claramente, la componente minimal del grupo. ■

Ejemplo 4.2.2

Sea G el conjunto de "sucesiones de números enteros, finitamente no nulas". Un elemento típico de G es

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \qquad \text{con } x_i \in \mathbb{Z}, (i = 1, \ldots, k)$$

Se dota a G de la suma, $+$, coordenada a coordenada, y el orden lexicográfico, $\precsim_L$.

Resulta, de nuevo, que G es representable, por ser contable. Pero ahora, no existe componente arquimediana minimal de G. ■

4.3. Componentes $\{n + 1, n\}$

Tras la construcción realizada con las componentes arquimedianas, es natural preguntarse por la posible clasificación de los elementos de un grupo totalmente ordenado, a partir de la propiedad $\{n + 1, n\}$.

Sin embargo, lo lógico es esperar una identificación (equivalencia) entre aquellos elementos que <u>no verifiquen</u> la propiedad $\{n + 1, n\}$, puesto que el cumplimiento de la misma se ha interpretado, precisamente, como una *distinción* entre elementos.

Definición 4.3.1: Definición de la relación

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado, no trivial, de cono positivo G^+. Se define la relación binaria $\mathcal{Q}$ en G^+, mediante:

$$\text{Dados } a, b \in G^+ \quad a\mathcal{Q}b \quad \Longleftrightarrow \quad na \prec (n+1)b \;\text{ y }\; nb \prec (n+1)a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nótese que dados $a, b \in G^+$ con, por ejemplo, $a \precsim b$, es inmediato que para todo $n \in \mathbb{N}$: $na \prec (n+1)b$, por lo que lo significativo de la relación es que se verifique: $nb \prec (n+1)a$, cuando $a \precsim b$.

Lema 4.3.1

En cualquier grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, la relación $\mathcal{Q}$ anterior, definida en G^+, es de equivalencia.

<u>*Demostración*</u>

$\mathcal{Q}$ es claramente *reflexiva*, puesto que para cualquier $a \in G^+$, y cualquier $n \in \mathbb{N}$ es $na \prec (n+1)a$.

Es también *simétrica*, por definición.

Comprobemos por último que la relación es *transitiva*. Dados $a, b, c \in G^+$, con $a\mathcal{Q}b$ y $b\mathcal{Q}c$, se cumple, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} na &\prec (n+1)b \qquad & nb &\prec (n+1)a \\ nb &\prec (n+1)c \qquad & nc &\prec (n+1)b \end{aligned}$$

Evaluadas las desigualdades segunda y tercera en "$n + 1$", y por la transitividad de $\prec$ se tiene, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$na \prec (n+2)c \qquad nc \prec (n+2)a$$

Pero debe ser también, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$na \prec (n+1)c \qquad nc \prec (n+1)a$$

en efecto, si por ejemplo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n_0+1)c \precsim n_0 a$$

se tendría también: $(2n_0+2)c \precsim 2n_0 a$, contra $na \prec (n+2)c$, considerando el caso $n = 2n_0$ ■

Definición 4.3.2: Componentes $\{n+1, n\}$

Se llamará *componente* $\{n+1, n\}$ a cada elemento $[a]$, con $a \in G^+$, del cociente $G^+/\mathcal{Q}$, para la relación $\mathcal{Q}$ anterior.

Observación

La relación $\mathcal{Q}$ coincide con la relación binaria $\mathcal{Q}'$, basada en la propiedad $\{p > q\}$, definida en G^+ de la siguiente forma:

$$\forall a, b \in G^+ \quad a\mathcal{Q}'b \quad \Longleftrightarrow \quad qa \prec pb \ \text{ y } \ qb \prec pa \quad \forall p, q \in \mathbb{N},\ p > q$$

En efecto

Dados $a, b \in G^+$, si se supone $a\mathcal{Q}'b$, tomando en particular $p = q+1$, debe cumplirse, para todo $q \in \mathbb{N}$:

$$qa \prec (q+1)b \quad \text{y} \quad qb \prec (q+1)a$$

Recíprocamente, si se supone $a\mathcal{Q}b$, y se consideran $p, q \in \mathbb{N}$ con $p > q$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} qa \prec (q+1)b \prec (q+2)b \prec \ldots \prec pb \\ qb \prec (q+1)a \prec (q+2)a \prec \ldots \prec pa \end{array}\right\} \Longrightarrow a\mathcal{Q}'b$$

Por tanto, $a\mathcal{Q}b \Longleftrightarrow a\mathcal{Q}'b$. ■

Lema 4.3.2

Dado un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, en cuyo cono positivo se ha definido la relación $\mathcal{Q}$ anterior, se cumplen las siguientes propiedades:

1) $(G, +, \precsim)$ cumple la propiedad $\{n+1, n\}$ si y sólo si $G^+/\mathcal{Q} = G^+$, es decir, toda componente $\{n+1, n\}$ es unipuntual.

2) Para todo $a, b \in G^+$: $(a+b)\,\mathcal{Q}\,(b+a)$

<u>*Demostración*</u>

1) Es evidente

2) Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.5.1, en la que precisamente se establecía que si dos elementos positivos no conmutan, entonces no verifican la propiedad $\{n+1, n\}$. ■

Lema 4.3.3

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado, y sean $a, b \in G^+$, tales que $a\mathcal{Q}b$. Entonces, para todo $c \in G^+$:

$$(a+c)\,\mathcal{Q}\,(b+c) \qquad \text{y} \qquad (c+a)\,\mathcal{Q}\,(c+b)$$

<u>*Demostración*</u>

Supongamos, sin pérdida de generalidad, $a \precsim b$; y más concretamente $a \prec b$, puesto que el caso $a = b$ es obvio.

Entonces, $a + c \prec b + c$, y es inmediato que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n(a+c) \prec (n+1)(b+c)$$

Para ver que también $n(b+c) \prec (n+1)(a+c)$, consideremos el elemento positivo $g = b - a$. Por la Proposición 2.5.2 sabemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$ng \prec a$$

Por otra parte, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n(b+c) = n(g+a+c)$$

y por el Lema 2.3.7, según sea $g+a+c \precsim a+c+g$ o bien $a+c+g \precsim g+a+c$, se verificará

$$n(b+c) = n(g+a+c) \precsim ng + n(a+c)$$

o bien

$$n(b+c) = n(g+a+c) \precsim n(a+c) + ng$$

Utilizando que, para todo $n \in \mathbb{N}$: $ng \prec a$, se tiene:

$$n(b+c) \prec a + n(a+c)$$

o bien

$$n(b+c) \prec n(a+c) + a$$

Considerando ahora que $a \prec a + c$, y sumando en ambos miembros de esta desigualdad $n(a+c)$ por la derecha se obtiene

$$a + n(a+c) \prec (n+1)(a+c)$$

y si se suma por la izquierda

$$n(a+c) + a \prec (n+1)(a+c)$$

Unido esto a lo anterior se concluye que, en cualquier caso,

$$n(b+c) \prec (n+1)(a+c)$$

y por tanto, $(a+c)\, \mathcal{Q}\, (b+c)$.

La demostración para $(c+a)\, \mathcal{Q}\, (c+b)$ es análoga. ■

Teorema 4.3.1

El conjunto de componentes $\{n+1, n\}$, $G^+/\mathcal{Q}$, es un semigrupo conmutativo con la operación $+$ definida de la siguiente manera; para todo $[a], [b] \in G^+/\mathcal{Q}$:

$$[a] + [b] = [a+b]$$

<u>*Demostración*</u>

La operación está *bien definida*, es decir, dados $x, y \in G^+$ con $x\mathcal{Q}a$ e $y\mathcal{Q}b$, se cumple $(x+y)\,\mathcal{Q}\,(a+b)$. En efecto, según el Lema anterior:

$$x\mathcal{Q}a \Longrightarrow (x+y)\,\mathcal{Q}\;(a+y)$$

y también

$$y\mathcal{Q}b \Longrightarrow (a+y)\,\mathcal{Q}\,(a+b)$$

Puesto que $\mathcal{Q}$ es de equivalencia, y por tanto transitiva, resulta

$$(x+y)\,\mathcal{Q}\,(a+b)$$

La operación es además asociativa, por tratarse de elementos de un grupo. También, por el Lema 4.3.2 (parte 2), es conmutativa, puesto que

$$[a] + [b] = [a+b] = [b+a] = [b] + [a]$$

Lo que completa la demostración. ■

Teorema 4.3.2

El orden $\precsim$ de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ induce un orden total, que se representará también $\precsim$, en el semigrupo conmutativo $G^+/\mathcal{Q}$ de sus componentes $\{n+1, n\}$ mediante:

$$\forall [a], [b] \in G^+/\mathcal{Q} \quad [a] \prec [b] \quad \Longleftrightarrow \quad a \prec b,\ [a] \neq [b]$$

<u>*Demostración*</u>

Es suficiente probar que dadas dos componentes $[a], [b] \in G^+/\mathcal{Q}$, con $a \prec b$ y $[a] \neq [b]$, se verifica para todo $x \in [a]$, $y \in [b]$: $x \prec y$.

Supuesto $[a] \neq [b]$, con $a \prec b$, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n_0 + 1)a \prec n_0 b$$

pues, en otro caso, ambos elementos pertenecerían a la misma componente.

Operando reiteradamente miembro a miembro con $a \prec b$:

$$(n + 1)a \prec nb \qquad \forall n \geq n_0$$

Dados $x, y \in G^+$, con $x\mathcal{Q}a$ e $y\mathcal{Q}b$, debe cumplirse, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$nx \prec (n + 1)a \quad \text{y} \quad nb \prec (n + 1)y$$

Ligado a lo anterior, se deduce que:

$$[*] \qquad nx \prec (n + 1)y \qquad \forall n \geq n_0$$

Si se supone ahora, por reducción al absurdo, $y \precsim x$, claramente $ny \prec (n + 1)x$. Como no puede ser que $x\mathcal{Q}y$, pues los elementos se han tomado de componentes distintas, debe existir $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n_1 + 1)y \prec n_1 x$$

y por ello

$$(n + 1)y \prec nx \qquad \forall n \geq n_1$$

contra la anterior desigualdad $[*]$. Como consecuencia es

$$x \prec y$$

lo que completa la demostración. ■

Observación

Como en el caso de la componentes arquimedianas, el anterior orden total inducido en $G^+/\mathcal{Q}$ es invariante por traslaciones en sentido "*débil*" (ver Definición 3.2.2 y observación siguiente), porque:

$$a \prec b \Longrightarrow a + c \prec b + c \Longrightarrow [a + c] \precsim [b + c]$$

En el siguiente ejemplo se comprueba que la invariancia por traslaciones, sin embargo, no necesariamente resulta "*fuerte*".

Ejemplo: 4.3.1

Consideremos el *plano lexicográfico* $(\mathbb{R}^2, +, \precsim_L)$

Se tiene $(0,2) \prec_L (0,3)$, pero no se cumple, para cualquier número natural n

$$n(0,3) \prec_L (n+1)(0,2)$$

pues por ejemplo $4.(0,2) \prec_L 3.(0,3)$. Por tanto, los elementos $(0,2)$ y $(0,3)$ no pertenecen a la misma componente $\{n+1, n\}$, y será:

$$[(0,2)] \prec [(0,3)]$$

Sumando el elemento $(1,0)$ a los anteriores, obtenemos $(1,2)$ y $(1,3)$, para los que se cumple con cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$n(1,2) = (n, 2n) \prec_L (n+1, 3n+3) = (n+1)(1,3)$$
$$n(1,3) = (n, 3n) \prec_L (n+1, 2n+2) = (n+1)(1,2)$$

Esto es, pertenecen a la misma componente $\{n+1, n\}$:

$$[(1,2)] = [(1,3)]$$

Por tanto, $[(0,2)] \prec [(0,3)]$, pero $[(0,2)] + [(1,0)] = [(0,3)] + [(1,0)]$, por lo que no se cumple la invariancia por traslaciones *fuerte*. ■

4.4. *Ideales y propiedad arquimediana*

Las componentes arquimedianas se han aplicado al estudio del cono positivo de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$. Utilizando la noción de orden opuesto, está claro que lo mismo es aplicable al cono negativo, quedando asociada a cualquier componente arquimediana $[a]$, $a \in G^+$, un conjunto equivalente $[-a] = -[a]$ en G^-.

Notemos que, en general, $[a] \cup \{e\} \cup [-a]$ no es subgrupo de G, porque sólo la componente arquimediana minimal (ver Teorema 4.2.3), caso de existir, es un semigrupo resoluble y puede considerarse por ello el cono positivo de un grupo.

El concepto de *ideal* que introducimos a continuación no padece esta anomalía, puesto que precisamente hace referencia a ciertos subgrupos normales de un grupo totalmente ordenado. Tomamos de Birkhoff [1940–1967] su definición y primeras propiedades, si bien es un concepto ampliamente estudiado por diversos autores (ver por ejemplo Kantorovich [1937], Fuchs [1950] o Burgess [1959]). Nuestro interés se centra en analizar sus conexiones con la propiedad arquimediana.

Utilizaremos la notación habitual $|x|$ para representar el "valor absoluto" de un elemento x perteneciente a un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$, con elemento neutro e; es decir:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } e \precsim x \\ -x & \text{si } x \prec e \end{cases}$$

Definición 4.4.1: Ideal. Ideal principal.

Un *ideal* de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ es un subgrupo normal de G que contiene, con cualquier a también todos los elementos x tales que $|x| \precsim |a|$.*

Se llama *ideal principal* generado por un elemento $a \in G$ al menor ideal principal que contiene al elemento a. Lo representaremos (a).

∗ Considerando la operación reticular $a \wedge b = \min\{a, b\}$, y dado un ideal I de un grupo G se verifica $x \wedge g \in I$, para todo $x \in I, g \in G$, con un comportamiento análogo al del concepto habitual de "ideal". Este hecho justificaría su denominación.

Observación

En Birkhoff [1967, p. 306] se justifica que el ideal principal (a) generado por un elemento a perteneciente a un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ es el conjunto de los $x \in G$ tales que

$$|x| \precsim \sum_{i=1}^{n} -g_i + |a| + g_i \qquad \text{para ciertos } g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$$

En el supuesto de que G sea un grupo abeliano, obtenemos trivialmente:

$$(a) = \{x \in G; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |x| \precsim n_0|a|\}$$

Esta caracterización permite establecer con facilidad una conexión entre el concepto de ideal principal (a) generado por un elemento a y la componente arquimediana $[a]$ a la que pertenece dicho elemento. La propiedad aparece también en Birkhoff [1940–1967], aunque con una formulación diferente:

Proposición 4.4.1

Sean a, b elementos pertenecientes al cono positivo de un grupo totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$. Entonces se verifica:

$$(a) \subset (b) \quad \Longrightarrow \quad [a] \prec [b]$$

Además

$$[a] \prec [b] \quad \Longrightarrow \quad (a) \subseteq (b)$$

El contenido estricto puede garantizarse en grupos abelianos; es decir, si G abeliano:

$$(a) \subset (b) \quad \Longleftrightarrow \quad [a] \prec [b]$$

Demostración

Supongamos $(a) \subset (b)$. Entonces, debe ser $na \prec b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues si, por el contrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b \precsim n_0 a$, se tendría claramente $b \in (a)$ de donde, por definición de ideal principal, $(b) \subseteq (a)$ contra lo supuesto.

Así, el par $\{a, b\}$ no es arquimediano, esto es, $[a] \neq [b]$, y por tanto $[a] \prec [b]$, por ser en particular $a \prec b$.

En cuanto al recíproco, es obvio que:

$$[a] \prec [b] \Longrightarrow a \prec b \Longrightarrow a \in (b) \Longrightarrow (a) \subseteq (b)$$

Si admitimos que G es abeliano, debe ser $(a) \neq (b)$, pues $(a) = (b)$ implica que:

$$\text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } b \precsim n_0 a$$
$$\text{existe } n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a \precsim n_1 b$$

Esto es, $[a] = [b]$, contra $[a] \prec [b]$ ■

Observación

Nótese, en particular, que para G abeliano se obtiene una manera de expresar la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ (cuyo cociente define las componentes arquimedianas) en términos de ideales principales:

$$[a] = [b] \quad \Longleftrightarrow \quad a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad a \in (b) \ \text{ y } \ b \in (a) \quad \Longleftrightarrow \quad (a) = (b)$$

En cuanto al caso no abeliano, puede ocurrir que $(a) = (b)$, siendo $[a] \prec [b]$. El siguiente ejemplo aparece en Birkhoff [1967, p. 306].

Ejemplo 4.4.1

Consideremos el grupo ordenado con generadores b y a_k $(k \in \mathbb{Z})$, con las relaciones:

$$a_i + a_j = a_j + a_i \qquad -b + a_k + b = a_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

y el orden definido por las condiciones:

$$e \prec a_k \qquad [a_{k+1}] \prec [a_k] \prec [b] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Nótese que, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, puesto que $a_k = b + a_{k+1} - b$, resulta $a_k \in (a_{k+1})$ y por ello $(a_{k+1}) = (a_k)$ (a pesar de ser $[a_{k+1}] \prec [a_k]$). ■

Definiremos a continuación, para un grupo totalmente ordenado cualquiera, un ideal concreto que guarda también una relación estrecha con la propiedad arquimediana.

Al analizar las componentes arquimedianas hemos comprobado que puede existir una subestructura aditivamente representable "próxima al elemento neutro" (la componente arquimediana minimal). Lo que pretendemos ahora es detectar una "subestructura maximal", en la que queden contenidos todos los elementos susceptibles de generar un subgrupo acotado (elementos responsables de que el grupo no sea arquimediano). Comprobaremos que este subconjunto es un ideal del grupo; en particular, un subgrupo normal, por lo que mediante un cociente podremos eliminar la anomalía y construir un grupo arquimediano.

Proposición 4.4.2

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado. Definimos:

$$\widetilde{G} = \{x \in G; \exists y \in G^+ \text{ tal que } n|x| \prec y\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Entonces, $\widetilde{G}$ es un ideal de G. Lo denominaremos ideal casi-nulo *de G.*

Demostración

1) Veamos primero que $\widetilde{G}$ es subgrupo de G. Supongamos para ello $x_1, x_2 \in \widetilde{G}$, y analicemos los casos significativos que pueden presentarse.

Si ambos elementos son positivos y, por ejemplo, es $x_1 \precsim x_2$, está claro que:

$$x_1 + x_2 \precsim 2x_2 \prec y \qquad \text{para cierto } y \in G^+$$

Por lo que $x_1 + x_2 \in \widetilde{G}$. El razonamiento para x_1, x_2 negativos es análogo.

Si suponemos $x_1 \prec e \prec x_2$, y por ejemplo $e \precsim x_1 + x_2$, entonces tenemos

$$e \precsim x_1 + x_2 \prec x_2$$

por lo que también en esta situación $x_1 + x_2 \in \widetilde{G}$

Otras situaciones que puedan darse son análogas o triviales. Además, está claro que dado $x \in \widetilde{G}$, también $-x \in \widetilde{G}$, por lo que $\widetilde{G}$ es subgrupo de G.

2) $\widetilde{G}$ es subgrupo normal. Para verlo, tomemos $a \in G$ cualquiera, y comprobemos que $a + x - a \in \widetilde{G}$, para todo $x \in \widetilde{G}$. Pueden darse varios casos:

$a + x - a = e$ ($\Longleftrightarrow x = e$). Obviamente, $a + x - a \in \widetilde{G}$

$e \prec a + x - a$. En esta situación se tiene que $a \prec a + x$, por lo que $e \prec x$. Debe existir $y \in G^+$ tal que $nx \prec y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora el elemento $n(a + x - a)$. Claramente $n(a + x - a) = a + nx - a$ y, por la invariancia por traslaciones, $a + nx - a \prec a + y - a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $a + x - a \in \widetilde{G}$.

El caso $a + x - a \prec e$ es análogo al anterior.

3) Dado un elemento $x \in \widetilde{G}$, y dado $x' \in G$ con $|x'| \precsim |x|$, se verifica para cualquier $n \in \mathbb{N}$: $n|x'| \precsim n|x|$, por lo que claramente $x' \in \widetilde{G}$.

Por tanto, $\widetilde{G}$ es efectivamente ideal de G. ■

Ya que $\widetilde{G}$ es un subgrupo normal, el cociente $G/\widetilde{G}$ tiene estructura de grupo. Veamos ahora que sobre este cociente aparece inducido un orden que hace de $G/\widetilde{G}$ un grupo totalmente ordenado y arquimediano.

Teorema 4.4.1

Sea $\widetilde{G}$ el ideal casi-nulo de un grupo totalmente ordenado $(G,+,\precsim)$. Dados $a+\widetilde{G}, b+\widetilde{G} \in G/\widetilde{G}$, definimos:

$$a+\widetilde{G} \prec b+\widetilde{G} \quad \Longleftrightarrow \quad a \prec b, \quad a+\widetilde{G} \neq b+\widetilde{G}$$

Entonces, $(G/\widetilde{G},+,\precsim)$ es un grupo totalmente ordenado y arquimediano.

Demostración

1) Debemos probar que el orden definido es consistente, es decir, dados $a, b \in G$ con $a \prec b$, y $a+\widetilde{G} \neq b+\widetilde{G}$ debe ser $a+\widetilde{g}_1 \prec b+\widetilde{g}_2$, para todo $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \in \widetilde{G}$.

Si $\widetilde{g}_1 \precsim \widetilde{g}_2$, la afirmación es obvia. Supongamos, por reducción al absurdo, que existen $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \in \widetilde{G}$ con $\widetilde{g}_2 \prec \widetilde{g}_1$ y $b+\widetilde{g}_2 \precsim a+\widetilde{g}_1$. Por la invariancia por traslaciones, se sigue (siendo e el elemento neutro de G):

$$e \prec -a+b \precsim \widetilde{g}_1 - \widetilde{g}_2$$

Puesto que $\widetilde{G}$ es un ideal, se deduce que $-a+b \in \widetilde{G}$, o, equivalentemente

$$b = a+\widetilde{g} \qquad \text{para cierto } \widetilde{g} \in \widetilde{G}$$

es decir, $a+\widetilde{G} = b+\widetilde{G}$, contra lo supuesto.

2) El orden definido en $G/\widetilde{G}$ es invarante por traslaciones, para la operación $+$ en $G/\widetilde{G}$.

Se sigue de la invariancia del orden de G. En efecto, dados $a+\widetilde{G}$, $b+\widetilde{G}$, $c+\widetilde{G}$ en $G/\widetilde{G}$:

$$\begin{aligned}
a+\widetilde{G} \prec b+\widetilde{G} \quad &\Longleftrightarrow \quad a \prec b,\ a+\widetilde{G} \neq b+\widetilde{G} \\
&\Longleftrightarrow \quad a \prec b,\ a-b \notin \widetilde{G} \\
&\Longleftrightarrow \quad a \prec b,\ (a+c)-(b+c) \notin \widetilde{G} \\
&\Longleftrightarrow \quad a+c \prec b+c,\ (a+c)+\widetilde{G} \neq (b+c)+\widetilde{G} \\
&\Longleftrightarrow \quad a+c \prec b+c,\ (a+\widetilde{G})+(c+\widetilde{G}) \neq (b+\widetilde{G})+(c+\widetilde{G}) \\
&\Longleftrightarrow \quad (a+\widetilde{G})+(c+\widetilde{G}) \prec (b+\widetilde{G})+(c+\widetilde{G})
\end{aligned}$$

3) $(G/\widetilde{G},+,\precsim)$ es arquimediano. En efecto, sean dos elementos $a+\widetilde{G}$, $b+\widetilde{G}$ en $G/\widetilde{G}$, con

$$\widetilde{G} \prec a+\widetilde{G} \prec b+\widetilde{G}$$

(y por ello $e \prec a \prec b$). Si se supone, por reducción al absurdo,

$$n.(a+\widetilde{G}) \prec (b+\widetilde{G}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

se obtiene, por ser $n.(a+\widetilde{G}) = (n.a)+\widetilde{G}$:

$$n.a \prec b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

esto es, $a \in \widetilde{G}$, puesto que $\widetilde{G}$ es un ideal. Resulta que $a+\widetilde{G} = \widetilde{G}$, contra lo supuesto. Por tanto, $G/\widetilde{G}$, resulta arquimediano. ■

Corolario 4.4.1

Cualquier grupo totalmente ordenado $(G,+,\precsim)$ es pseudo-representable mediante una función de pseudo-utilidad aditiva $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyo núcleo es el ideal casi-nulo de G.

<u>*Demostración*</u>

Puesto que $G/\widetilde{G}$ es arquimediano, existe una función de utilidad aditiva:

$$\widetilde{u} : G/\widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Basta definir ahora $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$u(g) = \widetilde{u}(g + \widetilde{G})$$

Puesto que para todo $g_1, g_2 \in G$ es

$$g_1 + \widetilde{G} + g_2 + \widetilde{G} = (g_1 + g_2) + \widetilde{G}$$

se obtiene trivialmente:

$$u(g_1 + g_2) = u(g_1) + u(g_2)$$

Es decir, u es aditiva. Además

$$g_1 \prec g_2 \Longrightarrow g_1 + \widetilde{G} \precsim g_2 + \widetilde{G}$$

de donde

$$g_1 \prec g_2 \Longrightarrow u(g_1) \precsim u(g_2)$$

Por lo que u es también pseudo-utilidad. ■

Observación

Claramente $G/\widetilde{G} = G$ si y sólo si G es arquimediano. En esta situación, el ideal casi-nulo de G se reduce al elemento neutro e de G, y la pseudo-utilidad aditiva cuya existencia se demuestra en el Corolario anterior es inyectiva (es utilidad).

En el extremo opuesto, podría ocurrir $G/\widetilde{G} = \{e\}$, esto es, $\widetilde{G} = G$, debido a que para cualquier elemento $x \in G$, existe otro $y \in G^+$ de manera que $n.|x| \prec y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto ocurre en el ejemplo que presentaremos a continuación. (La pseudo-utilidad aditiva garantizada en el Corolario anterior es ahora necesariamente la trivial: $u(G) = 0$).

Ejemplo 4.4.2

Consideramos:

$$G = C_{00}(\mathbb{Z}) = \{(z_i)_{i=-\infty}^{\infty}\,; z_i \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_i = 0 \text{ si } |i| > k\}$$

dotado de la suma habitual, coordenada a coordenada, y el orden lexicográfico.

Claramente $\widetilde{C_{00}(\mathbb{Z})} = C_{00}(\mathbb{Z})$. ■

Analizamos, para finalizar la sección, condiciones que garantizan la situación particular en que un grupo totalmente ordenado es isomorfo a algún subgrupo del plano lexicográfico. Utilizaremos el concepto de "*sumando directo*", que tomamos de Hungerford [1974].

Definición 4.4.2: Sumando directo

Un subgrupo $\widetilde{G}$ de un grupo abeliano G se dice *sumando directo* de G, si existe G^* subgrupo de G tal que G es suma directa: $G = G^* \oplus \widetilde{G}$.

Teorema 4.4.2

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo abeliano totalmente ordenado, cuyo ideal casi-nulo $\widetilde{G}$ es ideal propio de G (i.e. distinto de $\{e\}$ y de G). Si $\widetilde{G}$ es sumando directo de G y arquimediano, entonces G es isótono y algebraicamente isomorfo a un subgrupo del plano lexicográfico.

<u>*Demostración*</u>

En las condiciones del enunciado, existen funciones de utilidad aditivas:

$$\begin{cases} u_1 : G/\widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u_2 : \widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

Además, escribiendo $G = G^* \oplus \widetilde{G}$, como en la definición anterior, la aplicación $\widetilde{u} : G \longrightarrow \widetilde{G}$ que a cada $g \in G$ le hace corresponder $\widetilde{u}(g) = \widetilde{g}$ (único) tal que $g = g^* + \widetilde{g}$, con $g^* \in G^*$ es, obviamente, un homomorfismo.

Definimos, a partir de las anteriores, la función $\phi : (G, +, \precsim) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, +, \leq_L)$ dada por:

$$\phi(g) = \big(u_1(g + \widetilde{G}), u_2(\widetilde{u}(g))\big)$$

Claramente, ϕ es un homomorfismo. Para probar su isotonía sea $g \in G$ cualquiera, con $e \prec g$. Basta ver que:

$$\phi(e) = (0, 0) <_L \phi(g)$$

En efecto, distingamos los dos casos siguientes:

1) $g \in \widetilde{G}$. En estas condiciones

$$\begin{cases} u_1(g) = 0 \\ u_2(\widetilde{u}(g)) = u_2(g) > 0 = u_2(e) \end{cases}$$

Por lo que $(0, 0) <_L (0, u_2(g)) = \phi(g)$.

2) $g \notin \widetilde{G}$. Entonces, $e \prec g$ y $\widetilde{G} \neq g + \widetilde{G}$, por lo que $\widetilde{G} \prec g + \widetilde{G}$. De aquí, por ser u_1 utilidad

$$u_1(\widetilde{G}) < u_1(g + \widetilde{G})$$

Esto es, obtenemos nuevamente como conclusión $(0, 0) <_L \phi(g)$.

Esto completa la demostración. ■

Observación

La existencia de sumando directo para el ideal casi nulo $\widetilde{G}$ de un grupo abeliano totalmente ordenado $(G, +, \precsim)$ estará garantizada, por ejemplo, en las dos siguientes situaciones:

1) Cuando G sea un *grupo abeliano libre*, en cuyo caso (véase Hungerford [1974], p.71) es isomorfo a una suma directa de copias del grupo aditivo $\mathbb{Z}$ de los enteros.

2) Cuando G sea un *grupo abeliano finitamente generado*, en cuyo caso (véase Hungerford [1974], p.76) es isomorfo a una suma directa de una cantidad finita de copias del grupo aditivo $\mathbb{Z}$ de los enteros. (Los posibles sumandos directos que, en el caso de un grupo abeliano finitamente generado general, son grupos cíclicos de orden finito, están excluidos en nuestro contexto porque, siendo G un grupo totalmente ordenado, carece de elementos nilpotentes no nulos.)

Capítulo 5
Semigrupos topológicos totalmente ordenados

5.1. Introducción

Como ya comentamos, todo conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$ es un espacio topológico cuando se dota de la denominada *topología del orden*; la cual, por definición, tiene como subbase de abiertos:

$$\Sigma = \{(\leftarrow, a), (b, \rightarrow); a, b \in X\}$$

donde

$$(\leftarrow, a) = \{x \in X; x \prec a\}$$
$$(b, \rightarrow) = \{x \in X; b \prec x\}$$

En el Capítulo 1 (véanse las Proposiciones 1.3.1, 1.3.1' y 1.3.2) se vieron algunos resultados clásicos referidos a la existencia de utilidad, basados en condiciones topológicas, como la *separabilidad* o la *perfecta separabilidad*.

Hemos realizado ya, en la Sección 2.6, una primera extensión de estos resultados al contexto de grupos totalmente ordenados (Teoremas 2.6.1 y 2.6.2). También, para el caso de grupos abelianos, descubrimos en cualquier estructura no aditivamente representable la presencia de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *lexicográfico* como "germen" de su no representabilidad (Teorema 2.6.3). Resultados similares, como justificaremos en las primeras secciones de este capítulo, son también aplicables a la estructura de semigrupo totalmente ordenado.

Además, profundizaremos nuestro análisis hasta resultados de carácter topológico más generales, para los que la topología del orden jugará un papel esencial.

Dado un semigrupo positivo, representable aditivamente en la recta real, una de las cuestiones que abordaremos es la búsqueda de condiciones adicionales mínimas para que tal semigrupo sea la recta real positiva. El origen del problema de caracterización del *continuo real positivo* se remonta a Cantor [1895, 1897], pero aparece también en trabajos recientes, como los de Beardon y Mehta [1994 (2)] o Herden y Mehta [1994]. En Luce y Narens [1987] se considera además, como en nuestro estudio, la existencia de una operación interna, como parte de la estructura ordenada.

También analizaremos la cuestión de la *continuidad* de una función de utilidad aditiva. Probaremos que, para semigrupos totalmente ordenados, imponiendo la condición adicional de que la suma sea continua en la topología del orden, cualquier función de utilidad resulta siempre continua.

En el caso de grupos totalmente ordenados, la condición de que la operación interna sea continua está siempre garantizada, por lo que podremos demostrar que *cualquier grupo arquimediano resulta representable por una función de utilidad continua y aditiva.* Este resultado aporta una extensión al clásico Teorema de Hölder.

5.2. Semigrupos perfectamente separables

En la sección 2.6 hemos comprobado que la caracterización de existencia de utilidad para conjuntos totalmente ordenados dada por la *perfecta separabilidad* se extiende al contexto de grupos totalmente ordenados, sin más que imponer como condición adicional que el subconjuto (o bien, subgrupo) *orden denso* que proporciona la perfecta separabilidad sea *arquimediano* (véase Teorema 2.6.2).

La manera natural de adaptar este resultado al caso de semigrupos totalmente ordenados es la sustitución de la propiedad arquimediana por la propiedad $\{n+1, n\}$. Para ello introducimos la siguiente definición, que será útil cuando queramos hacer referencia al "buen comportamiento" de los elementos de un semigrupo frente a la mencionada propiedad.

Definición 5.2.1: Subconjunto super-arquimediano

Un subconjunto A de un semigrupo positivo $(S, +, \precsim)$ se dirá *super-arquimediano* si para todo $a, b \in A$, con $a \prec b$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n+1)a \prec nb$$

Nótese que la defineción es equivalente a la siguiente condición, basada en la propiedad $\{p > q\}$: para todo $a, b \in A$, con $a \prec b$, existen $p, q \in \mathbb{N}$, con $p > q$ tales que

$$pa \prec qb$$

En efecto:

> Es obvio que la definición implica el segundo enunciado. Para el recíproco sean $a, b \in A$, $a \prec b$; para los que existen números naturales p, q, con $p > q$ y $pa \prec qb$. Si suponemos, por reducción al absurdo, $nb \prec (n+1)a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces en particular: $qb \prec (q+1)a$. Pero entonces:
>
> $$qb \prec (q+1)a \prec (q+2)a \prec \ldots \prec pa$$
>
> contra lo supuesto. ■

La definición puede aplicarse dualmente a semigrupos negativos, a partir del concepto de *orden opuesto* (véase Definición 3.4.1). En cuanto a semigrupos generales, podemos enunciar:

Un subconjunto A de un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$ se dirá super-arquimediano, si los conjuntos $A \cap S^+$, $A \cap S^-$ son o bien vacíos, o bien super-arquimedianos.

Obsérvese también que, a partir de la definición, un semigrupo totalmente ordenado verifica las propiedades $\{n+1, n\}$ y $\{p > q\}$ si y sólo si la totalidad del semigrupo es un conjunto super-arquimediano.

Teorema 5.2.1

Si un semigrupo positivo $(S, +, \precsim)$ contiene un subconjunto orden denso $D \subseteq S$ super-arquimediano, entonces el propio semigrupo S es super-arquimediano.

<u>*Demostración*</u>

Sean $a, b \in S$, con $a \prec b$. Por la invariancia por traslaciones se obtiene, sumando primero a por la izquierda y después b por la derecha:

$$2a \prec a + b \prec 2b$$

Repitiendo la misma manipulación:

$$\begin{cases} 3a \prec 2a + b \prec a + 2b \\ 2a + b \prec a + 2b \prec 3b \end{cases}$$

de donde:

$$3a \prec 2a + b \prec a + 2b \prec 3b$$

En estas condiciones, existen elementos $d_1, d_2 \in D$ tales que:

$$3a \precsim d_1 \precsim 2a + b \prec a + 2b \precsim d_2 \precsim 3b$$

Puesto que D es super-arquimediano, existen $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$ tales que $pd_1 \prec qd_2$. Por tanto:

$$3pa \precsim pd_1 \prec qd_2 \precsim 3qb$$

En particular

$$(3p)a \prec (3q)b \quad \text{con} \quad 3p > 3q$$

por lo que S es super-arquimediano. ■

Teorema 5.2.2

Dado un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$*, son equivalentes:*

i) $(S, +, \precsim)$ *es aditivamente representable.*

ii) S *contiene un subsemigrupo contable, orden denso y super-arquimediano.*

iii) S *contiene un subconjunto contable orden denso y super-arquimediano.*

Demostración

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Si el semigrupo es aditivamente representable entonces es también, en particular, representable; por lo que S es perfectamente separable.

Sea $D \subseteq S$ subconjunto contable y orden denso. El subsemigrupo $<D>$ generado por D:

$$<D> = \{d_1 + d_2 + \cdots + d_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

es claramente contable, y también orden denso por contener a D. Además, es aditivamente representable, por serlo S.

Se concluye que $<D>$ es un subsemigrupo contable, orden denso y super-arquimediano.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Es evidente.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

Si S admite un subconjunto $D \subseteq S$ contable, orden denso y super-arquimediano, entonces claramente, $D \cap S^+$, supuesto no vacío, es un conjunto contable, orden denso en S^+, y super-arquimediano. Lo mismo se aplica al cono negativo por lo que, de acuerdo con el Teorema anterior, cada cono no vacío de S es aditivamente representable.

Sabemos por el Teorema 3.7.1 que, como consecuencia, la totalidad del semigrupo es aditivamente representable. $\blacksquare$

Observación

El resultado anterior es análogo al obtenido en el caso de grupos totalmente ordenados (Teorema 2.6.2). Cabe comentar, sin embargo, la siguiente diferencia significativa frente a lo analizado en el caso de grupos arquimedianos.

El subgrupo (abeliano) $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ generado por dos elementos positivos podía ser orden denso en el grupo y proporcionar, por tanto, el subgrupo contable arquimediano, requerido en la perfecta separabilidad. Vimos en el Teorema 2.6.5 que esto sucede cuando $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ carece de mínimo elemento positivo.

No es posible obtener un resultado así para semigrupos. Supongamos un semigrupo conmutativo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$. Un subsemigrupo generado por dos elementos positivos $x, y \in S^+$ tiene la forma:

$$S(x,y) = \{m.x + n.y \ ; \ m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m + n > 0\}$$

por lo que <u>siempre</u> tiene un primer elemento $z = \min\{x, y\}$. Por tanto, cuando un semigrupo S carezca de mínimo elemento positivo $-\big((0, +\infty), +, \leq\ \big)$ es un ejemplo trivial–, nunca podremos encontrar un subsemigrupo orden denso de la forma $S(x, y)$. De hecho, el argumento muestra que en todo semigrupo positivo y conmutativo que carezca de mínimo elemento positivo, cualquier subsemigrupo orden denso requiere una cantidad infinita de generadores.

5.3. Semigrupos conmutativos no representables aditivamente

En el Teorema 2.6.3 hemos reconocido la estructura $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \precsim_L)$ como "germen" de la no existencia de utilidad aditiva en grupos abelianos totalmente ordenados, esto es, caracterizabamos la representabilidad de un grupo abeliano totalmente ordenado por no contener como subgrupo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico.

Planteamos ahora una pregunta similar, para semigrupos conmutativos: ¿cuál es la subestructura, contenida en cualquier semigrupo conmutativo totalmente ordenado, que impide la existencia de utilidad aditiva?

Puesto que la no representabilidad aditiva en semigrupos totalmente ordenados supone la no representabilidad de alguno de sus conos, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, el caso de semigrupos positivos.

Si $(S, +, \precsim)$ es un semigrupo positivo conmutativo, representaremos como en la sección anterior por $S(x, y)$ el subsemigrupo generado por dos elementos $x, y \in S$:

$$S(x, y) = \{m.x + n.y; m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m + n > 0\}$$

Analizamos en la siguiente Proposición una propiedad básica de este conjunto:

Proposición 5.3.1

Sean x, y, con $x \prec y$, elementos de un semigrupo positivo conmutativo $(S, +, \precsim)$ que constituyen un par arquimediano. Entonces, el subsemigrupo $S(x, y)$ generado por x e y es arquimediano.

<u>*Demostración*</u>

Sean $mx + ny$, $m'x + n'y$ elementos de $S(x, y)$, con $mx + ny \prec m'x + n'y$.

Siendo el par x, y arquimediano, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \prec n_0 x$. Así:

$$\begin{aligned} m'x + n'y &\precsim m'y + n'y = (m' + n')y \prec (m' + n')n_0 x \\ &\prec (m' + n')n_0(m + n)x = (m' + n')n_0 mx + (m' + n')n_0 nx \\ &\precsim (m' + n')n_0 mx + (m' + n')n_0 ny = (m' + n')n_0(mx + ny) \end{aligned}$$

Esto es

$$m'x + n'y \prec h.(mx + ny) \qquad h \in \mathbb{N}$$

por lo que $S(x, y)$ es arquimediano. ■

Observación

Tras realizar en el Teorema 2.6.4 la clasificación de las posibles estructuras de grupo abeliano totalmente ordenado $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ generado por dos elementos x e y, se hizo notar que dichos elementos podrían constituir un par arquimediano y generar, aún así, un grupo no arquimediano.

La Proposición anterior constata que, en el caso de semigrupos positivos conmutativos, tal anomalía no puede darse. Esta mejora es debida a que en la estructura $S(x, y)$ no se consideran elementos formados a partir de coeficientes enteros negativos.

A pesar de lo anterior, como comprobamos en el siguiente ejemplo, todavía es posible generar un semigrupo que no verifique la propiedad $\{n+1, n\}$, a partir de elementos que verifiquen esta propiedad (es decir, a partir de un par super-arquimediano).

Ejemplo 5.3.1

Sea el subsemigrupo positivo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico, generado por los elementos

$$x = (1, 1) \qquad y = (3, 4)$$

El par x, y es arquimediano: $(3,4) \prec_L 4.(1,1) = (4,4)$, por lo que en particular $S(x,y)$ es arquimediano. Más aún, tomando por ejemplo $n = 2$ observamos que

$$(2+1)(1,1) = (3,3) \prec_L 2.(3,4) = (6,8)$$

Es decir, el par x, y es además super-arquimediano.

Sin embargo, $3.(1,1) = (3,3) \in S(x,y)$, $(3,3) \prec_L (3,4)$ y el par $(3,3)$, $(3,4)$ no es super-arquimediano, pues para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n(3,4) = (3n, 4n) \prec_L (3n+3, 3n+3) = (n+1)(3,3)$$

Luego el par super-arquimediano $\{(1,1),(3,4)\}$ genera un semigrupo no super-arquimediano. ■

Adelantamos ya el resultado que se formalizará en el próximo Teorema, tomando en consideración las dos situaciones significativas que pueden distinguirse cuando un semigrupo positivo y conmutativo $(S, +, \precsim)$ no es representable aditivamente:

La primera posibilidad es que $(S, +, \precsim)$ no sea arquimediano. Debemos pensar, como germen de la no representabilidad, en el semigrupo generado por un par no arquimediano de elementos, puesto que de acuerdo con la Proposición anterior, cualquier par arquimediano generaría un semigrupo arquimediano. Demostraremos que, en este caso, $(S, +, \precsim)$, contiene necesariamente un subsemigrupo isomorfo e isótono al subsemigrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lexicográfico generado por los elementos $(0,1)$ y $(1,0)$. Representaremos este semigrupo $(\mathcal{N}, +, \precsim_L)$:

$$\mathcal{N} = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; m \geq 0, n \geq 0, m+n > 0\}$$

Nótese que, en particular, el propio $\mathcal{N}$ es no arquimediano.

Pero, como sabemos, puede ocurrir también que el semigrupo $(S, +, \precsim)$ sea arquimediano y no representable aditivamente. La subestructura no super-arquimediana que se considere deberá estar generada, por tanto, a partir de elementos que cumplan la propiedad arquimediana. Demostraremos que, en este segundo caso, $(S, +, \precsim)$ contiene un subsemigrupo isomorfo e isótono al subsemigrupo de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ lexicográfico generado por los elementos $(1, 0)$, $(1, 1)$. Representaremos este semigrupo $(\mathcal{A}, +, \precsim_L)$:

$$\mathcal{A} = \{(m + n, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; m \geq 0, n \geq 0, m + n > 0\}$$

Nótese que, en particular, el propio $\mathcal{A}$ es arquimediano, pero no super-arquimediano.

Teorema 5.3.1

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo positivo y conmutativo, para el que no existe función de utilidad aditiva. Entonces:

1) Si $(S, +, \precsim)$ no es arquimediano, contiene un subsemigrupo isomorfo e isótono a $(\mathcal{N}, +, \precsim_L)$.

2) Si $(S, +, \precsim)$ es arquimediano, contiene un subsemigrupo isomorfo e isótono a $(\mathcal{A}, +, \precsim_L)$.

En cualquier caso, puesto que el segundo de estos semigrupos es subsemigrupo del primero, se concluye que cualquier semigrupo positivo y conmutativo no representable aditivamente contiene como subestructura a $(\mathcal{A}, +, \precsim_L)$.

Demostración

1) Si $(S, +, \precsim)$ no es arquimediano, existen $x, y \in S$, con $x \prec y$, que constituyen un par no arquimediano.

La aplicación $f : (S(x, y), +, \precsim) \longrightarrow (\mathcal{N}, +, \precsim_L)$ dada por

$$f(mx + ny) = (m, n)$$

es claramente un isomorfismo. Además, es isótona; siendo la demostración de este hecho análoga a la realizada con $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ lexicográfico, en grupos totalmente ordenados (Teorema 2.6.3).

2) Si $(S, +, \precsim)$ es arquimediano, pero no aditivamente representable, existen elementos $x, y \in S$, $x \prec y$, que constituyen un par no super-arquimediano (aunque se tratará, obviamente, de un par arquimediano). Por tanto, se verifica:

$$x \prec y \qquad ky \prec (k+1)x \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La aplicación $g : (S(x,y), +, \precsim) \longrightarrow (\mathcal{A}, +, \precsim_L)$ dada por

$$g(mx + ny) = (m + n, n)$$

es claramente un isomorfismo. Para la isotonía, debemos probar:

$$mx + ny \prec m'x + n'y \quad \Longrightarrow \quad m + n < m' + n' \;\text{ o }\; m + n = m' + n', n < n'$$

Analicemos los casos que pueden presentarse:

a) $m < m'$. Entonces:

$$mx + ny \prec m'x + n'y \Longrightarrow ny \prec (m' - m)x + n'y$$

Por ser $kx \prec ky \quad \forall k \in \mathbb{N}$:

$$ny \prec (m' - m)y + n'y = (m' - m + n')y$$

De donde $n < m' - m + n'$, y por tanto:

$$m + n < m' + n'$$

b) $m = m'$. Entonces, $mx = m'x$. Por tanto:

$$mx + ny \prec m'x + n'y \Longrightarrow ny \prec n'y \Longrightarrow n < n'$$

Siendo $m = m'$, $n < n'$, obtenemos también:

$$m + n < m' + n'$$

c) $m' < m$, $n < n'$. Entonces:

$$mx + ny \prec m'x + n'y \Longrightarrow (m - m')x \prec (n' - n)y$$

Por ser $ky \prec (k+1)x \quad \forall k \in \mathbb{N}$:

$$(m - m')x \prec (n' - n + 1)x$$

Y de aquí:

$$m - m' < n' - n + 1 \Longrightarrow m + n < m' + n' + 1 \Longrightarrow m + n \leq m' + n'$$

Si ocurriera $m + n = m' + n'$, puesto que $m' < m$, debería ser necesariamente $n < n'$, con lo que se tiene el resultado.

d) $m' < m$, $n' \leq n$. Esta situación no puede presentarse, pues exigiría:

$$m'x \prec mx \qquad \text{y} \qquad n'y \precsim ny$$

De donde:

$$m'x + n'y \prec mx + ny$$

Contra lo supuesto.

Los casos analizados recogen todas las posibilidades que pueden presentarse, por lo que se tiene el resultado. ■

Observación

En el resultado anterior no puede eliminarse la condición de que el semigrupo $(S, +, \precsim)$ sea conmutativo. El cono positivo del ejemplo utilizado para comprobar este hecho en el caso de grupos totalmente ordenados (Ejemplo 2.6.1) sirve para ilustrar esta afirmación, como pasamos a demostrar.

Ejemplo 5.3.2

Sea M el conjunto de matrices 2×2:

$$M = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0\}$$

que, como sabemos, tiene estructura de grupo (no abeliano) totalmente ordenado, con la operación *producto de matrices*, y el orden total $\precsim$ dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b' & a' \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad a < a' \ \text{ o } \ a = a',\ b \leq b'$$

Consideremos ahora el cono positivo M^+ de este grupo, dado por:

$$M^+ = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix};\ a > 1 \ \text{ o } \ a = 1,\ b > 0\}$$

Supongamos que dos matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$ del cono positivo de M fueran tales que $A \prec B$ y $B^n \precsim A^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; esto es:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1}) & c^n \end{pmatrix} \precsim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) & a^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{n+1} = A^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se seguiría que $1 \leq a \leq c$ y $c^n \leq a^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia, por verificar el grupo multiplicativo de los números reales positivos la propiedad $\{n + 1, n\}$, necesariamente, $a = c$ y por tanto $b < d$. El caso $a = c = 1$ puede descartarse. En efecto, si $c = 1$ llegamos a:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n.d & 1 \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1).b & 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De donde $nd < (n + 1)b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $0 < b < d$. Esto no puede ocurrir, por verificar el grupo aditivo de los reales la propiedad $\{n + 1, n\}$. Por tanto, debe ser $c > 1$.

Finalmente observemos que:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b+d & c \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ bc+d & c \end{pmatrix} = B.A$$

puesto que $b \neq bc$, al ser $c \neq 1$.

Concluímos que cualquier par no super-arquimediano de elementos en M^+ genera un subsemigrupo no conmutativo. En estas condiciones, $(M, \times, \precsim)$ no puede contener a $(\mathcal{A}, +, \precsim_L)$ como subestructura, puesto que $(\mathcal{A}, +)$ es conmutativo. ■

5.4. *Semigrupos positivos y el continuo*

Conocemos que un semigrupo positivo $(S, +, \precsim)$ y super-arquimediano, esto es, que cumpla la propiedad $\{n+1, n\}$, es representable por una función de utilidad aditiva estrictamente positiva.

$$u : (S, +, \precsim) \longrightarrow ((0, \infty), +, \leq)$$

Es natural preguntarse bajo qué condiciones mínimas adicionales queda caracterizada la estructura aditiva y ordenada $((0, \infty), +, \leq)$ de los números reales positivos, es decir: el *continuo real positivo*.

El problema de caracterización del *continuo*, definido como un conjunto totalmente ordenado, Dedekind completo y orden separable (véase, por ejemplo, Luce y Narens [1987]), fue propuesto por Cantor [1895, 1897] y nos conduce a los fundamentos del Análisis Real. Varios trabajos recientes en la literatura se refieren al concepto de continuo, en el contexto de estructuras totalmente ordenadas (véase Beardon y Mehta [1994,2] o Herden y Mehta [1994]).

En particular, Luce y Narens [1987] consideran cuestiones relacionadas con la idea de continuo dotado de una operación interna, que denominan *concatenación*, y que corresponde en esencia a la estructura algebraica de semigrupo. Las caracterizaciones que obtienen están basadas en el concepto de *resolubilidad*.

Para nuestro estudio partiremos de un semigrupo positivo $(S, +, \precsim)$, y tomaremos en consideración la *topología del orden* que, como veremos, jugará un papel esencial en los resultados.

Comenzamos con algunas Definiciones básicas y Lemas introductorios.

Definición 5.4.1: Dedekind-completitud

Un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$ se dice *Dedekind-completo* si todo subconjunto no vacío de X acotado superiormente tiene *supremo* (i.e. cota superior mínima).

Observación

Un espacio topológico (X, τ) se dice *conexo* si no puede descomponerse como unión de dos subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos.

Cuando se considera, en particular, un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$, dotado de la topología del orden, resulta que $(X, \precsim)$ es conexo si y sólo si es Dedekind-completo y sin huecos (i.e., para todo $a, b \in X$, $a \prec b$, existe $c \in X$ tal que $a \prec c \prec b$). La demostración puede verse, por ejemplo, en Birkhoff [1940–1967].

Lema 5.4.1

Sea $(X, \precsim)$ un conjunto totalmente ordenado. Sean A y B subconjuntos no vacíos de X, con $a \precsim b$ para todo $a \in A$, $b \in B$. Entonces se verifica:

1) El supremo de A $(\sup A)$, caso de existir, es cota inferior de B.

2) El ínfimo de B $(\inf B$: cota inferior máxima de $B)$, caso de existir, es cota superior de A.

3) Si existen $\sup A$ e $\inf B$, entonces se verifica $\sup A \precsim \inf B$.

Demostración

Nótese que, por definición, todo elemento de A es cota inferior de B, y todo elemento de B es cota superior de A.

1) Si existe $\sup A$, pero no es cota inferior de B, existiría algún elemento $b \in B$ tal que $b \prec \sup A$. Esto es absurdo, porque b resultaría ser una cota superior de A menor que $\sup A$.

2) Es análogo.

3) Se deduce de las anteriores. En efecto, $\sup A$ es cota inferior de B, luego $\sup A$ no puede ser mayor que la mayor cota inferior de B; esto es: $\sup A \precsim \inf B$. ∎

Lema 5.4.2

Un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$ es Dedekind-completo si y sólo si existe el ínfimo de todo subconjunto no vacío de X acotado inferiormente.

Demostración

Supongamos $(X, \precsim)$ Dedekind-completo, y sea B un subconjunto no vacío de X acotado inferiormente. Consideremos el subconjunto no vacío $A \subseteq X$ de las cotas inferiores de B. Claramente, todo elemento de B es cota superior de A, luego existe el supremo del conjunto A: $\sup A$.

Comprobemos que el elemento $\sup A$ es, además, el ínfimo de B:

Dado un elemento cualquiera $b \in B$, no puede ocurrir que $b \prec \sup A$ porque, en tal caso, existiría algún elemento $a \in A$ con $b \prec a$, en contradicción con la definición de A. Por tanto, $\sup A$ es cota inferior de B.

Por otra parte, dada una cota inferior cualquiera de B, por definición de A se cumple que $c \in A$, y por tanto $c \precsim \sup A$.

Concluímos que $\sup A$ es la mayor cota inferior de b, es decir, existe el ínfimo de B y, en particular,

$$\sup A = \inf B$$

El recíproco es análogo. ■

Lema 5.4.3

Sea $(X, \precsim)$ un conjunto totalmente ordenado, Dedekind-completo, y sea $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío de X, acotado superiormente. Entonces se verifica que $\sup A \in \overline{A}$ (clausura de A, en la topología del orden). Análogamente, si $B \subseteq X$ es un subconjunto de X no vacío y acotado inferiormente, se verifica $\inf B \in \overline{B}$.

<u>*Demostración*</u>

Supondremos el caso en que X no tiene "cotas universales", es decir, no existe el supremo ni el ínfimo del conjunto X. (En cualquier otro caso, la prueba resultaría similar).

Si $\sup A \notin \overline{A}$, puesto que $X - \overline{A}$ es abierto, es posible encontrar elementos a y b en X tales que

$$a \prec \sup A \prec b \qquad \text{y} \qquad (a, b) \cap A = \emptyset$$

En estas condiciones, para cualquier $x \in A$, puesto que $x \precsim \sup A$, se sigue $x \precsim a$. Este hecho contradice la definición de $\sup A$, luego debe ser $\sup A \in \overline{A}$.

La demostración para el ínfimo es análoga. ■

Definición 5.4.2: Semigrupo topológico totalmente ordenado

Se llama *semigrupo topológico* a una estructura $(S, +, \tau)$ verificando:

1) $(S, +)$ es semigrupo.

2) (S, τ) es espacio topológico.

3) La operación interna $+$

$$\begin{array}{rccc} + : & S \times S & \longrightarrow & S \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

es una aplicación continua.

Se llama *semigrupo topológico totalmente ordenado*, a un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$ que es semigrupo topológico, cuando se considera en $(S, \precsim)$ la topología del orden.

Se llama *grupo topológico* a una estructura $(G, +, \tau)$ verificando:

1) $(G, +)$ es grupo.

2) (G, τ) es espacio topológico.

3) La operación interna $+$

$$\begin{array}{rccc} + : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

y la aplicación "inv"

$$\begin{array}{rccc} \text{inv} : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \mapsto & -x \end{array}$$

son ambas continuas.

Observación

Es conocido que todo grupo totalmente ordenado es grupo topológico con respecto a la topología del orden (ver Fuchs [1963], p.33 o Nyikos y Reichel [1975]). Sin embargo, esto no es cierto en general para semigrupos, como comprobamos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.4.1

Sea $S = [2,3) \cup [4,+\infty)$, con la suma y orden habituales en los números reales. Tal suma es claramente estable en S, por lo que se trata de un semigrupo totalmente ordenado.

Consideremos el intervalo $(7,9)$, entorno de $4+4 = 8$, con $4, 8 \in S$. Puesto que todo entorno de 4 (en la topología del orden de S) contiene algún elemento menor que 3, la suma de dos entornos de 4 contendrá, necesariamente, algún elemento menor que 6, que por ello no pertenecerá al intervalo $(7,9)$

Por tanto, no pueden determinarse entornos de 4 cuya suma quede contenida en $(7,9)$, por lo que $+$ no es continua con respecto a la topología del orden en $(S,+,\precsim)$.

Observación

En el Capítulo 1 explicamos que dado un conjunto totalmente ordenado $(X,\precsim)$, dotado de la topología del orden, y un subconjunto $A \subseteq X$, ocurre que la topología del orden en $(A,\precsim)$ es menos fina que la topología que A hereda de la topología del orden en $(X,\precsim)$.

El ejemplo anterior pone de manifiesto esta circunstancia, tratándose de un subconjunto de los números reales cuya topología del orden es menos fina que la topología restringida usual inducida por la de $\mathbb{R}$.

A partir de los conceptos y lemas anteriores podemos introducirnos ya en los resultados que conducirán a la caracterización del continuo, objetivo de esta sección. Comenzamos con una Proposición, para la que damos una prueba análoga a la que aparece en Pontryaguin [1978], p.110, para el caso de grupos topológicos.

Proposición 5.4.1

Sea $(S, +, \tau)$ un semigrupo topológico, y sea $a \in S$ cualquiera. Entonces, la aplicación traslación por la izquierda $i_a : S \longrightarrow S$ dada por: $i_a(x) = a + x$ $(x \in S)$, es continua. También, la aplicación traslación por la derecha $d_a : S \longrightarrow S$ dada por: $d_a(x) = x + a$ $(x \in S)$, es continua.

Demostración

Sea W un entorno de $i_a(x) = a+x$. Puesto que $+$ es una operación continua, existe un entorno U de a y también un entorno V de x tales que $U+V \subseteq W$. En particular, $a+V \subseteq W$, esto es, $i_a(V) \subseteq W$, por lo que la traslación i_a es continua.

De la misma forma, d_a resulta continua. ■

Proposición 5.4.2

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado, Dedekind-completo. Entonces, para todo subconjunto no vacío $A \subseteq S$ acotado superiormente (resp. inferiormente), y para todo $a \in S$, existe $\sup(a+A)$ y además es $\sup(a+A) \precsim a + \sup A$ (resp. existe $\inf(a+A)$ y es $a + \inf A \precsim \inf(a+A)$).

Demostración

Supongamos A acotado superiormente. Para todo $x \in A$, se tiene $x \precsim \sup A$. Entonces, para cualquier $a \in S$ fijo, se verifica por la invariancia por traslaciones de $\precsim$:

$$a + x \precsim a + \sup A$$

Obtenemos así que $a + \sup A$ es una cota superior de $a + A$, por lo que siendo S Dedekind-completo, existe $\sup(a + A)$, y debe ser

$$\sup(a + A) \precsim a + \sup A$$

La prueba para el caso en que A está acotado inferiormente es análoga. ■

Observación

Las desigualdades que aparecen en la anterior Proposición son, en general, estrictas, como veremos en el siguiente ejemplo. Sin embargo, probaremos en la Proposición 5.4.3 que, en el contexto de semigrupos topológicos totalmente ordenados, se verifican las igualdades.

Ejemplo 5.4.2

Sea, como antes $S = [2, 3) \cup [4, +\infty)$, con la suma y orden habituales en los números reales. Notemos que:

$$\sup(2 + (2, 3)) = \sup(4, 5) = 5$$

mientras que

$$2 + \sup(2, 3) = 2 + 4 = 6$$

Esto es, $\sup(2 + (2, 3)) < 2 + \sup(2, 3)$. ■

Proposición 5.4.3

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, Dedekind-completo. Entonces, para todo subconjunto no vacío $A \subseteq S$ acotado superiormente (resp. inferiormente), y para todo $a \in S$, existe $\sup(a + A)$ *y además es* $\sup(a + A) = a + \sup A$ *(resp. existe* $\inf(a + A)$ *y es* $a + \inf A = \inf(a + A)$*).*

Demostración

Supongamos A acotado superiormente. Sabemos por la proposición anterior que existe $\sup(a+A)$ y es $\sup(a+A) \precsim a + \sup A$.

Si suponemos $\sup(a+A) \prec a + \sup A$, entonces el conjunto

$$W = (\sup(a+A), \rightarrow) = \{x \in S; \sup(a+A) \prec x\}$$

es un entorno del elemento $a + \sup A$.

Para cualquier $x \in a + A$, está claro que $x \precsim \sup(a+A)$, de donde

$$W \cap (a+A) = \emptyset$$

Por otra parte, puesto que (por la Proposición 5.4.1) toda traslación es continua, se sigue que existe un entorno U de $\sup A$ tal que $a+U \subseteq W$. Aplicando ahora el Lema 5.4.3, tenemos que $\sup A \in \overline{A}$, de donde $A \cap U \neq \emptyset$.

Tomemos un elemento $x \in A \cap U$. Se sigue que

$$a + x \in (a+A) \qquad \text{y también} \qquad a + x \in (a+U) \subseteq W$$

Así, $a + x \in W \cap (a+A)$, lo que supone una contradicción.

La prueba cuando A es un subconjunto acotado inferiormente es análoga. ■

Teorema 5.4.1

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, positivo y conexo. Sean $a, b, x \in S$ tales que $a \prec b$ y $a + x \precsim b$. Entonces existe un elemento $y \in S$ tal que $a + y = b$.

(Lo mismo será cierto considerando la suma de los elementos x e y por la izquierda).

Demostración

Supongamos $a, b, x \in S$, con $a \prec b$ y $a + x \precsim b$. Consideramos los siguientes subconjuntos de S:

$$X = \{x \in S; a + x \precsim b\}$$

$$Y = \{y \in S; b \prec a + y\}$$

El subconjunto Y es no vacío, pues siendo S positivo se verifica $b \prec a + b$, por lo que $b \in Y$. El subconjunto X es no vacío por hipótesis. Por tanto, $\{X, Y\}$ es una partición de S.

Claramente para todo $x \in X$, $y \in Y$ es $a + x \prec a + y$. Por la invariancia por traslaciones, es también $x \prec y$. Por tanto, X resulta ser un subconjunto acotado superiormente, e Y un subconjunto acotado inferiormente. Por los Lemas 5.4.1 y 5.4.2, existen $\sup X$, $\inf Y$, y es $\sup X \precsim \inf Y$.

Veamos que, además, $\sup X = \inf Y$. En efecto, si la igualdad no fuera cierta, sino por el contrario, $\sup X \prec \inf Y$, puesto que S carece de huecos debería existir un elemento $z \in S$ tal que

$$\sup X \prec z \prec \inf Y$$

Pero en estas condiciones, tal elemento no puede pertenecer ni a X ni a Y, contra el hecho de ser $\{X, Y\}$ partición de S.

Comprobado que $\sup X = \inf Y$, por continuidad de la operación $+$, y según la Proposición 5.4.3, obtenemos además

$$\sup(a + X) = a + \sup X = a + \inf Y = \inf(a + Y)$$

Por definición de los subconjuntos X e Y, debe ser

$$\sup(a + X) \precsim b \precsim \inf(a + Y)$$

Por lo que necesariamente

$$\sup(a+X) = \inf(a+Y) = b$$

Esto es:

$$a + \sup X = a + \inf Y = b$$

Por lo que $\sup X = \inf Y$ resulta ser el elemento buscado. ■

Corolario 5.4.1

Cualquier monoide totalmente ordenado $(M, +, \precsim)$, topológico, positivo y conexo, es resoluble.

Demostración

Dado $(M, +, \precsim)$ en las condiciones del enunciado, y considerando el elemento neutro $e \in M$, está claro que para todo $a, b \in M$, con $a \prec b$, se cumple:

$$a = a + e \prec b$$

Por el Teorema anterior, existe $y \in M$ tal que $a + y = b$.

Un argumento análogo justifica que existe $z \in M$ tal que $z + a = b$. Por tanto M es resoluble. ■

Corolario 5.4.2

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, conmutativo, positivo y conexo, Sean $a, b \in S$ con $a \prec b$. Entonces, existen $x, y \in S$ tales que

$$a \prec x \precsim y \prec b \qquad y \qquad a + b = x + y$$

<u>*Demostración*</u>

Puesto que S carece de huecos, existe $z_1 \in S$ tal que $a \prec z_1 \prec b$. Por la invariancia por traslaciones y por ser S positivo, obtenemos $z_1 \prec a + z_1 \prec a + b$.

Aplicando el Teorema 5.4.1, existe $z_2 \in S$ tal que $z_2 + z_1 = a + b$. Comprobemos que $a \prec z_2 \prec b$:

Por ser $z_1 \prec b$:

$$z_2 + z_1 \prec z_2 + b \Longrightarrow a + b \prec z_2 + b \Longrightarrow a \prec z_2$$

Por ser $a \prec z_1$ y S conmutativo:

$$a + z_2 \prec z_1 + z_2 \Longrightarrow a + z_2 \prec z_2 + z_1 \Longrightarrow a + z_2 \prec a + b \Longrightarrow z_2 \prec b$$

Denominando $x = \min\{z_1, z_2\}$, $y = \max\{z_1, z_2\}$, se tiene

$$a + b = x + y \qquad \text{y} \qquad a \prec x \precsim y \prec b$$

Lo que completa la demostración. ■

Teorema 5.4.2

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, conmutativo, positivo y conexo. Entonces, dados $a, b \in S$, $a \prec b$, existe $m \in S$ tal que $2m = a + b$. (El elemento m es el "punto medio" del intervalo $[a, b]$).

<u>*Demostración*</u>

Supongamos, por reducción al absurdo, que existen elementos $a, b \in S$, $a \prec b$, para los que $2m \neq a + b$ para todo $m \in S$. Consideramos los subconjuntos:

$$X = \{x \in S; 2x \prec a + b\}$$

$$Y = \{y \in S; a + b \prec 2y\}$$

Al ser $a \prec b$ y por la invariancia por traslaciones resulta $2a \prec a+b$ y también $a + b \prec 2b$. Esto indica que el elemento a pertenece a X y el elemento b pertenece a Y, por lo que ambos subconjuntos X e Y son no vacíos. Resulta así que $\{X, Y\}$ es una partición de S.

Además, para todo $x \in X$, para todo $y \in Y$, es claramente $2x \prec 2y$, y por tanto (aplicando el Lema 3.3.1–2) $x \prec y$. Ahora, por los Lemas 5.4.1 y 5.4.2, existen $\sup X$, $\inf Y$, y es $\sup X \precsim \inf Y$. Más aún, razonando como en el anterior Teorema 5.4.1, por conexión de S se sigue que $\sup X = \inf Y$.

Sea $m = \sup X = \inf Y$.

Si $m \in X$ ($\Longrightarrow 2m \prec a + b$) entonces por el Teorema 5.4.1, existe $m' \in S$ tal que $m + m' = a + b$. Así $2m \prec m + m'$ y, por la invariancia por traslaciones, debe ser $m \prec m'$.

Aplicando ahora el Corolario 5.4.2, existen $m_2, m_2' \in S$ tales que

$$m + m' = m_2 + m_2' = a + b \quad , \quad m \prec m_2 \precsim m_2' \prec m'$$

De $m \prec m_2$, siendo $m = \sup X$, deducimos que $m_2 \in Y$. Por tanto

$$a + b \prec 2m_2 \precsim m_2 + m_2' = a + b$$

que es una contradicción.

Concluímos que $m \notin X$. Analogamente puede probarse que $m \notin Y$. Esto contradice que $\{X, Y\}$ es partición de S, luego la existencia de elementos a, b en las condiciones propuestas debe rechazarse, lo que concluye la demostración. ■

Corolario 5.4.3

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, conexo, positivo y representable por una función de utilidad aditiva $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Sean $a, b \in S$, con $a \prec b$. Sea $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$; entonces $u([a, b])$ es denso en $[\alpha, \beta]$, con la topología usual de los números reales.

Demostración

Es consecuencia inmediata del Teorema 5.4.2, y del siguiente hecho sencillo: Dados $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$, el conjunto

$$A = \{p + \frac{k}{2^n}.(q-p); 0 \leq k \leq 2^n,\ \ k, n \in \mathbb{N}\}$$

es denso en $[p, q]$. ■

Observación

Si supiéramos "*a priori*" que la función de utilidad u que se ha empleado es continua, entonces este Corolario habría resultado obvio porque las aplicaciones continuas preservan la conexión, y es un hecho bien conocido que los subconjuntos conexos de la recta real son intervalos.

En realidad, la función de utilidad u es, de hecho, continua, pero esto lo veremos ahora como consecuencia del propio Corolario 5.4.3 anterior.

Corolario 5.4.4

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, positivo, conexo y representable por una función de utilidad aditiva $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, u es continua (con la topología usual en $\mathbb{R}$).

Demostración

Sea $a \in S$. Admitamos que $a \neq \inf S$, y sea $u(a) = \alpha$. Consideremos un entorno de α $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

Por el Corolario 5.4.3, existe $s \in S$, $s \prec a$, tal que

$$u(s) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha)$$

y existe $t \in S$, $a \prec t$, tal que

$$u(t) \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$$

Por tanto, (s,t) es un entorno de a tal que $u(s,t) \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Se sigue que u es continua en el punto a.

Si fuera $a = \inf S$, un argumento análogo, usando intervalos del tipo $[a,t)$ y $[\alpha, \alpha + \varepsilon)$, muestra que u es también continua en a. Esto concluye la demostración. ■

Observación

Dado un conjunto totalmente ordenado representable $(X, \precsim)$, toda función de utilidad $u : (X, \precsim) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$, establece, por definición, un homeomorfismo entre $(X, \precsim)$ y $(u(X), \leq)$, considerando la topología del orden en ambos conjuntos. Teniendo en cuenta que en $u(X)$ la topología euclídea restringida es siempre más fina que la del orden, resulta que cualquier función de utilidad u es una aplicación abierta, con la topología usual de $\mathbb{R}$, restringida a $u(X)$.

Con este hecho, estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado:

Corolario 5.4.5

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, positivo, conexo y super-arquimediano (i.e., verificando la propiedad $\{n+1, n\}$). Entonces existe un número real no negativo, α, de tal forma que S es isomorfo, isótono y homeomorfo, o bien a $(\alpha, +\infty)$, o bien a $[\alpha, +\infty)$, con la suma, orden y topología usuales en los números reales. (En la segunda situación, deberá ser $\alpha > 0$).

Demostración

Por ser S positivo y cumplir la propiedad $\{n+1, n\}$, $(S, +, \precsim)$ es representable por una función de utilidad u aditiva y estrictamente positiva. Por el Corolario anterior, u es continua.

Puesto que una aplicación continua preserva la conexión, y los subconjuntos conexos de los números reales son intervalos, obtenemos que o bien $u(S) = (\alpha, +\infty)$, o bien $u(S) = [\alpha, +\infty)$, dependiendo de la existencia de $\inf S$. ■

Observación

En el siguiente Teorema probaremos que todo semigrupo topológico positivo y conexo admite utilidad aditiva. Así, la condición de super-arquimediano puede ser eliminada del enunciado del anterior Corolario 5.4.5.

Teorema 5.4.3

Todo semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$ topológico, positivo y conexo es representable por una función de utilidad aditiva.

Demostración

La prueba contiene varios pasos.

1) Comprobaremos que un semigrupo en las condiciones del enunciado es arquimediano. En efecto, dados $a, b \in S$ con $a \prec b$, supongamos por reducción al absurdo que

$$n.a \prec b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

El conjunto $A = \{n.a; n \in \mathbb{N}\}$ resulta estar acotado superiormente. Puesto que S es Dedekind-completo, existe $\sup A$. Dado que S es topológico, por la

Proposición 5.4.3, debe cumplirse:

$$a + \sup A = \sup(a + A)$$

Sin embargo, por la naturaleza del conjunto A, está claro que

$$\sup A = \sup(a + A)$$

Esto es, obtenemos la contradicción:

$$a + \sup A = \sup A$$

por lo que S debe ser arquimediano.

2) Por el Corolario 3.5.1, existe pseudo-utilidad aditiva no trivial

$$u : (S, +, \precsim) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, \leq)$$

Fijemos un elemento cualquiera $x \in S$, y consideremos el subconjunto:

$$Y = \{y \in S; u(y) = u(x)\}$$

Nótese que se trata de la componente $\{n+1, n\}$ a la que pertenece el elemento x. Probaremos que Y contiene nada más un elemento; esto es, que u es inyectiva, y por tanto función de utilidad aditiva.

El subconjunto Y está acotado superiormente (por ejemplo, $2x$ es una cota superior de Y). Representemos por y^* su supremo:

$$y^* = \sup Y$$

3) Comprobemos ahora que $y^* \in Y$. En efecto, admitamos por el contrario que $y^* \notin Y$. Entonces debe ser $x \prec y^*$, y además $u(x) < u(y^*)$, por definición de Y.

Por la invariancia por traslaciones y ser $x \prec y^*$, obtenemos $x + y^* \prec 2y^*$. Esto es

$$U = (x + y^*, \rightarrow)$$

es entorno del elemento $2y^*$. Aplicando de nuevo que S es topológico, debe existir W, entorno de y^* tal que

$$2W \subset U$$

El Lema 5.4.3 garantiza que $y^* \in \overline{Y}$ (clausura de Y). Por tanto, existe algún elemento $z \in W$ tal que $u(z) = u(x)$.

Por otra parte, $2z \in U$; de donde

$$x + y^* \prec 2z$$

Aplicando la pseudo-utilidad u:

$$u(x) + u(y^*) \leq 2u(z) = 2u(x)$$

Entonces $u(y^*) \leq u(x)$, contra lo supuesto.

4) Comprobado que $y^* \in Y$, podemos garantizar que $u(x) = u(y^*)$. Fijado $y \in Y$, completaremos la prueba demostrando que $y = y^*$, cualquiera que sea el elemento y. En efecto, por ser $y^* = \sup Y$, se verifica

$$y \precsim y^*$$

Aplicando invariancia por traslaciones, tenemos:

$$y + y^* \precsim 2y^*$$

El Teorema 5.4.1 garantiza la existencia de un elemento $t \in Y$ tal que

$$y + t = 2y^*$$

Veamos que $t = y^*$. En efecto, por una parte:

$$y + y^* \precsim 2y^* \quad \Longrightarrow \quad y + y^* \precsim y + t \quad \Longrightarrow \quad y^* \precsim t$$

Al mismo tiempo $t \precsim y^*$, porque:

$$y + t = 2y^* \quad \Longrightarrow \quad u(y) + u(t) = 2u(y^*) = 2u(y)$$

de donde

$$u(t) = u(y)$$

Es decir, $t \in Y$, por lo que $t \precsim y^*$, ya que es $y^* = \sup Y$.

Así, $y^* = t$; y de la igualdad $y + t = 2y^*$ obtenemos

$$y + y^* = 2y^*$$

Concluímos que necesariamente $y = y^*$, lo que completa la demostración. ■

Observación

En la demostración del anterior Teorema, se obtiene que la pseudo-utilidad aditiva no trivial, cuya existencia se garantiza por resultar el semigrupo arquimediano, es de hecho una función de utilidad aditiva. Destacamos este resultado en el siguiente Corolario.

Corolario 5.4.6

Dado un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$, positivo topológico y conexo, son equivalentes:

i) $(S, +, \precsim)$ es pseudo-representable a través de una función de pseudo-utilidad aditiva no trivial.

ii) $(S, +, \precsim)$ es aditivamente representable.

<u>*Demostración*</u>

Inmediata. ■

Tras mostrar una versión mejorada del anterior Corolario 5.4.5, consecuencia del Teorema 5.4.3, proseguiremos con diversas caracterizaciones del *continuo*.

Corolario 5.4.5'

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, positivo y conexo. Entonces existe un número real no negativo, α, de tal forma que S es isomorfo, isótono y homeomorfo, o bien a $(\alpha, +\infty)$, o bien a $[\alpha, +\infty)$, con la suma, orden y topología usuales en los números reales.

<u>*Demostración*</u>

Inmediata. ■

Corolario 5.4.7

Un monoide totalmente ordenado $(M, +, \precsim)$, topológico, positivo y conexo, es isomorfo, isótono y homeomorfo a $[0, +\infty)$, con la suma, orden y topología usuales en los números reales.

<u>*Demostración*</u>

Es consecuencia inmediata de los anteriores resultados y el hecho de que, siendo e el elemento neutro de un monoide M, para cualquier aplicación aditiva

$$u : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

debe ser $u(e) = 0$. ■

Observación

La existencia de elemento neutro es esencial en la caracterización de la recta real aditiva y no negativa del último Corolario. Para el caso de un semigrupo positivo, ninguna de las restantes condiciones del enunciado anterior permite distinguir entre $(0, +\infty)$ y $(\alpha, +\infty)$, con $\alpha > 0$; por lo que la caracterización de la recta real positiva requiere de alguna condición adicional.

Una posible vía es el recurso al concepto de *semigrupo divisible* (véase Alling [1960]): un grupo $(G, +)$ (un semigrupo) se dice *divisible* si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica: $n.G = G$. Así, por ejemplo, el grupo aditivo de los racionales es divisible, pero el de los enteros no lo es. Para nuestro propósito, es suficiente suponer esta capacidad de "división por números naturales" a uno de los elementos del semigrupo.

Otra propiedad que distingue las estructuras $(0, +\infty)$ y $(\alpha, +\infty)$, con $\alpha > 0$, es el carácter *resoluble* de la primera de ellas.

Ambas alternativas quedan reflejadas en los siguientes Corolarios.

Corolario 5.4.8

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, positivo y conexo. Si existe un elemento $d \in S$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x \in S$ con $n.x = d$, entonces $(S, +, \precsim)$ es isomorfo, isótono y homeomorfo a $(0, +\infty)$, con la suma, orden y topología usuales en los números reales. (El elemento d se dice divisible).

<u>*Demostración*</u>

Es consecuencia inmediata del Corolario 5.4.5'. ■

Corolario 5.4.9

Un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$*, topológico, positivo, resoluble y conexo, es isomorfo, isótono y homeomorfo a* $(0, +\infty)$*, con la suma, orden y topología usuales en los números reales.*

Demostración

Es consecuencia inmediata del Corolario 5.4.5'. ■

Observación

En el siguiente Lema probaremos que todo semigrupo positivo y resoluble es topológico. Como consecuencia, cuando un semigrupo de estas características sea, además, conexo, el Teorema 5.4.3 garantiza su carácter super-arquimediano. Esto nos permite relajar las condiciones del enunciado de los anteriores Corolarios 5.4.7 y 5.4.9.

Lema 5.4.4

Todo semigrupo positivo y resoluble es topológico.

Demostración

Sabemos, por el Apéndice 3.A, que todo semigrupo positivo y resoluble S es el cono positivo de un grupo totalmente ordenado G. Puesto que todo grupo totalmente ordenado es topológico, basta comprobar que la topología del orden del grupo G, restringida a su cono positivo S, coincide con la topología del orden de S.

Es obvio que todo abierto básico (a, b) de S lo es también en G. Para el recíproco, consideremos (a, b), abierto básico de G. Pueden distinguirse tres casos:

1) $a \in S$. Entonces, debe ser $(a,b) \cap S = (a,b)$, por lo que dicha intersección es un abierto en la topología del orden de S.

2) $b \notin S$. Entonces, $(a,b) \cap S = \emptyset$, también abierto.

3) $a \notin S$, $b \in S$. Entonces, $(a,b) \cap S$ es de la forma $(\leftarrow, b)$, abierto.

Esto completa la demostración. ■

Corolario 5.4.7'

Un monoide totalmente ordenado $(M, +, \precsim)$*, positivo, resoluble y conexo, es isomorfo, isótono y homeomorfo a* $[0, +\infty)$*, con la suma, orden y topología usuales en los números reales.*

Demostración

Inmediata. ■

Corolario 5.4.9'

Un semigrupo totalmente ordenado $(S, +, \precsim)$*, positivo, resoluble y conexo, es isomorfo, isótono y homeomorfo a* $(0, +\infty)$*, con la suma, orden y topología usuales en los números reales.*

Demostración

Inmediata. ■

Con el siguiente ejemplo de monoide no resoluble, comprobamos que tanto la conexión como el carácter topológico son esenciales en los resultados presentados.

Obsérvese que el ejemplo es una extensión a coordenadas reales del semigrupo

$$\mathcal{A} = \{(m+n, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; m \geq 0, n \geq 0, m+n > 0\}$$

analizado en el Teorema 5.3.1 como germen de la no representabilidad en semigrupos conmutativos.

Ejemplo 5.4.3

Sea $(M_1, +, \precsim_L)$ la subestructura del plano lexicográfico dada por:

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq x\}$$

Se trata de un monoide totalmente ordenado y conexo, no representable aditivamente. No es resoluble, como muestran por ejemplo los elementos $(1, 0)$, $(1, 1)$ en M_1, con $(1, 0) \prec (1, 1)$.

Este monoide no puede ser topológico (de lo contrario, sería isomorfo a $[0, +\infty)$ y en particular resoluble). Para ver este hecho de otra forma, consideremos el subconjunto de M_1:

$$A = \{(x, y) \in M_1; (x, y) \prec_L (1, 0)\} = \{(x, y) \in M_1; x < 1\}$$

A es un subconjunto de M_1, no vacío, acotado superiormente, cuyo supremo es claramente $(1, 0)$. Si consideramos ahora:

$$(1, 1) + A = \{(x, y) \in M_1; 1 \leq y \leq x < 2\}$$

obtenemos $\sup[(1, 1) + A] = (2, 0)$, es decir

$$(1, 1) + \sup A = (1, 1) + (1, 0) = (2, 1) \neq (2, 0) = \sup[(1, 1) + A]$$

Por lo que, de acuerdo con lo establecido en la Proposición 5.4.3, M_1 no puede ser topológico.

Nótese, sin embargo, que si nos restringimos nada más al interior de M_1:

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < x\}$$

el semigrupo M_2 resultante es ahora topológico, pero se pierde el carácter conexo, pues M_2 no es Dedekind-completo. Por ejemplo, el subconjunto

$$B = \{(x, y) \in M_2; x = 1\}$$

está acotado superiormente, pero carece de supremo. ■

Observación

Para terminar la Sección analizamos un caso en el que cierta topología aparece definida de antemano en la estructura ordenada, de manera que el orden resulta continuo (la topología dada es natural, es decir, más fina que la del orden; véase Definición 1.3.1).

Con argumentos similares a los de un importante resultado debido a Beardon (véase Beardon [1994]), obtenemos en el siguiente Lema que, bajo ciertas hipótesis, la topología dada y la del orden deben coincidir. Este resultado lo utilizaremos para dar una caracterización adicional del continuo real no negativo.*

Lema 5.4.5

Sea (X, τ) un espacio topológico, conexo y localmente compacto, dotado de un orden total continuo $\precsim$. Entonces, la topología del orden y la topología τ coinciden en X.

∗ Los aspectos relacionados con la convergencia de redes y otros resultados topológicos que se usan en la prueba del Lema pueden verse Dugundji [1966].

Demostración

Supondremos que X tiene más de un punto (si no, la conclusión es obvia).

Denotemos θ la topología del orden. La equivalencia de la misma con τ supone demostrar que la aplicación identidad

$$i : (X, \tau) \longrightarrow (X, \theta)$$

es un homeomorfismo. Claramente, i es continua, por definición de orden continuo. La continuación del argumento se articula en dos puntos:

1) Veremos primero que dados $a, b \in X$, con $a \prec b$, el subconjunto

$$[a, b] = \{x \in X\,; a \precsim x \precsim b\}$$

es cerrado y conexo en τ: En efecto, $[a, b]$ es τ-cerrado, pues su complementario es

$$(\leftarrow, a) \cup (b, \rightarrow)$$

con $(\leftarrow, a)$ y $(b, \rightarrow)$ τ abiertos, por ser θ-abiertos.

Para la conexión, consideremos la aplicación:

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \prec a \\ x & \text{si } a \precsim x \precsim b \\ b & \text{si } b \prec x \end{cases}$$

Claramente, $h(X) = [a, b]$; luego si probamos que h es continua, se tendrá $[a, b]$ conexo por serlo X.

Dado un abierto (relativo) cualquiera A de $[a, b]$, es de la forma $W \cap [a, b]$, con W τ-abierto de X. Entonces, h resulta continua, sin más que observar

$$h^{-1}(A) = \begin{cases} (\leftarrow, a) \cup W \cup (b, \rightarrow) & \text{si } a \in A, b \in A \\ W \cap (a, b) & \text{si } a \notin A, b \notin A \\ (\leftarrow, a) \cup \big(W \cap (\leftarrow, b)\big) & \text{si } a \in A, b \notin A \\ \big(W \cap (a, \rightarrow)\big) \cup (b, \rightarrow) & \text{si } a \notin A, b \in A \end{cases}$$

2) Para ver que i es homeomorfismo, tomamos una red $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset X$ tal que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge a $x \in X$ en la topología del orden θ, y debemos probar que también $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge a x en τ. Para verlo, procedemos por reducción al absurdo:

Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ no converge a x en la topología τ. Entonces, debe existir una subred (que seguiremos denotando $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$), para la que existe un τ-entorno V_x de x, de manera que

$$\forall \alpha \in I: \quad x_\alpha \notin V_x$$

Puesto que X es localmente compacto, no hay pérdida de generalidad en suponer que $\overline{V}_x$ (clausura de V_x) es τ-compacto. Nótese también que $\{x\}$ es τ-cerrado (su complementario es $(\leftarrow, x) \cup (x, \rightarrow)$, τ-abierto); por lo que la conexión de X (y el hecho de tener X más de un punto) garantiza que $\{x\}$ no es τ-abierto. Por tanto es $V_x \neq \{x\}$, lo que en particular garantiza que $x \notin Fr(V_x)$ (frontera de V_x).

Sabemos que para todo $\alpha \in I$, los subconjuntos $[x_\alpha, x]$ (eventualmente, $[x, \alpha_x]$) son τ-conexos. Entonces, necesariamente, la intersección

$$Fr(V_x) \cap [x_\alpha, x] \quad (\text{o } [x, x_\alpha])$$

es no vacía, para todo α. De lo contrario, cada punto de $[x_\alpha, x]$ ($[x, x_\alpha]$) pertenecería bien al interior de V_x, bien al interior del complementario de V_x, esto es, $[x_\alpha, x]$ ($[x, x_\alpha]$) podría expresarse como unión de dos abiertos (relativos) no vacíos, contra su conexión.

Por tanto, puede escogerse, para cada $\alpha \in I$

$$y_\alpha \in Fr(V_x) \cap [x_\alpha, x] \quad (\text{o } [x, x_\alpha])$$

Además, al ser $Fr(V_x)$ compacto (por ser subconjunto cerrado de $\overline{V}_x$ compacto), existe una subred (que seguiremos denotando $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$) convergente a

$y \in Fr(V_x)$ en la topología τ (y por tanto, también en la topología del orden θ).

Pero $y_\alpha \in [x_\alpha, x]$ ($[x, x_\alpha]$) para todo α, con $x_\alpha \to x$ en θ implica que $y_\alpha \to x$ en θ. De aquí (por ser la toplogía del orden θ Hausdorff), se concluye $x = y$.

Esto es absurdo, porque $y \in Fr(V_x)$, mientras que $x \notin Fr(V_x)$.

Así la identidad debe ser homeomorfismo, lo que completa la demostración. ■

Teorema 5.4.4

Sea $(M, +, \precsim, \tau)$ un monoide totalmente ordenado, positivo, τ-topológico, con $\precsim$ orden continuo. Supongamos además que (M, τ) es conexo y localmente compacto. Entonces, $(M, +, \precsim, \tau)$ es isomorfo, isótono y homeomorfo a $\big([0, +\infty), +, \leq, \tau_u\big)$, con la suma, orden y topología usuales en los números reales.

Demostración

En la condiciones del enunciado, la topología τ coincide con la del orden. Así, M es topológico y además conexo para la topología del orden; con lo que, por el Corolario 5.4.7, se tiene el resultado. ■

5.5. Existencia de función de utilidad continua y aditiva

A lo largo de la sección anterior hemos analizado condiciones que permitan caracterizar la estructura aditiva de los números reales positivos, y hemos obtenido, en particular, que la *conexión* en un semigrupo topológico totalmente ordenado y aditivamente representable $(S, +, \precsim)$ es suficiente para garantizar que cualquier utilidad aditiva para S es una función continua.

Es interesante plantear ahora la cuestión de la continuidad de la representación en el caso general: *Dado un semigrupo topológico* $(S, +, \precsim)$ *totalmente ordenado y representable aditivamente, ¿admite utilidad aditiva y continua?* Probaremos que la respuesta es afirmativa, basando la demostración en un resultado de gran fuerza debido a Debreu, y conocido con el nombre de Lema del "*open gap*" (véase Debreu [1964], Bowen [1968], Beardon [1992], o Beardon y Mehta [1994, (1)]).

Aplicado al caso de grupos, nuestro resultado permite asegurar que *todo grupo totalmente ordenado y arquimediano es representable por una función de utilidad aditiva y continua*, lo que constituye por sí mismo una extensión al clásico Teorema de Hölder.

Como vimos en el Ejemplo 5.4.1, no todo semigrupo totalmente ordenado es topológico (es decir, la operación interna no es necesariamente continua para la topología del orden; ver Definición 5.4.2). Comenzaremos probando que la existencia de utilidad aditiva y continua necesita de esta condición, lo que justifica que trabajemos en el contexto de semigrupos topológicos totalmente ordenados.

Proposición 5.5.1

Sea $(S, +, \precsim)$ *un semigrupo totalmente ordenado, dotado de la topología del orden, representable por una función de utilidad* $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *aditiva y continua. Entonces,* $(S, +, \precsim)$ *es topológico.*

Demostración

El siguiente diagrama, claramente conmutativo, permite observar que la operación $+$ del semigrupo S puede obtenerse como una composición de aplicaciones continuas.

$$\begin{tikzcd} S \times S \arrow[r, "+_S"] \arrow[d, "(u,u)"'] & S \\ u(s) \times u(S) \arrow[r, "+_R"] & u(S) \arrow[u, "u^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$(u, u) : S \times S \longrightarrow u(S) \times u(S) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es continua, por serlo u.

$+_R : u(S) \times u(S) \longrightarrow u(S)$, representa una suma habitual de números reales, continua en la topología usual.

$u^{-1} : u(S) \longrightarrow S$ es continua, por ser $u : S \longrightarrow u(S)$ una aplicación abierta (con la topología usual restringida en $u(S)$). ■

Definición 5.5.1: "Gap" *

Un "*gap*" de un subconjunto S del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un intervalo no degenerado maximal de $\mathbb{R}$, disjunto con S y con cota superior e inferior en el conjunto S.

Presentaremos a continuación el Lema del "open gap" de Debreu, que será clave en nuestra argumentación. Pueden verse pruebas del mismo en Debreu [1964], Bowen [1968], Beardon [1992], o Beardon y Mehta [1994, (1)].

Lema 5.5.1

Sea $(X, \precsim)$ un conjunto totalmente ordenado, dotado de la topología del orden, representable por una función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $u(X)$ no tiene "gaps" de la forma $(a, b]$ ni $[a, b)$ (intervalos semiabiertos-semicerrados), entonces u es una aplicación continua (con la topología usual en $\mathbb{R}$).

Plantearemos el análisis de la continuidad considerando en primer lugar el caso de grupos totalmente ordenados. Vamos a obtener un refinamiento del Teorema clásico

* Hemos preferido mantener la denominación inglesa "gap" para el concepto que se define, por haber utilizado su traduccion castellana, "hueco", con otro significado no necesariamente equivalente. Quizá "laguna" sería una denominación alternativa correcta; pero también este término se ha utilizado a veces en la literatura con otro significado.

de Hölder, combinando las ideas topológicas de Debreu. En concreto probaremos que la propiedad arquimediana caracteriza la representabilidad a través de una función de utilidad continua y aditiva.

Teorema 5.5.1

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado. Entonces, $(G, +, \precsim)$ es representable a través de una función de utilidad continua y aditiva si y sólo si G es arquimediano.

Demostración

Por el Teorema de Hölder (2.4.1), $(G, +, \precsim)$ es aditivamente representable si y sólo si G es arquimediano.

Supongamos G arquimediano, y sea $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de utilidad aditiva cualquiera. La imagen $u(G)$ del grupo es un subgrupo de los números reales de uno de los tres tipos siguientes:

1) $u(G) = \{0\}$

2) $u(G) = a.\mathbb{Z} = \{a.z; z \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad (a \in \mathbb{R}$ fijo).

3) $u(G)$ denso en $\mathbb{R}$.

En efecto, la primera situación corresponde al grupo trivial $G = \{e\}$.

Si no es este el caso, pero G tiene mínimo elemento positivo, entonces, como se vio en el Lema 2.6.1, G es isomorfo a $\mathbb{Z}$, lo que corresponde a la segunda situación.

Por último, si G carece de mínimo elemento positivo, lo mismo ocurrirá con su imagen $u(G)$. Resulta entonces que $\mathbb{R}$ es un grupo arquimediano, que contiene un subgrupo $u(G)$ sin mínimo elemento positivo. El Lema 2.6.3 garantiza que en estas condiciones, $u(G)$ es denso en $\mathbb{R}$.

Para terminar la argumentación, basta observar que solamente en el segundo caso aparecen "gaps", y que además todos ellos son abiertos, por lo que el Lema 5.5.1 garantiza la continuidad de u. ■

Observación

Podría esperarse que la propiedad clave establecida en el Teorema anterior, para el caso de grupos totalmente ordenados: *toda función de utilidad aditiva es necesariamente continua*, pudiera mantenerse para otras estructuras algebraicas ordenadas, como semigrupos totalmente ordenados.

Sin embargo, en la Proposición 5.5.1 hemos probado que se requiere una operación interna continua, y en el Ejemplo 5.4.1 hemos mostrado un semigrupo totalmente ordenado que no verifica esta condición.

En la prueba del Teorema 5.5.1 la dificultad se salva porque, como se señaló en la Sección anterior, todo grupo totalmente ordenado es topológico, de manera que está implícita la necesaria continuidad de la operación.

Demostraremos a partir de aquí el resultado análogo para semigrupos topológicos totalmente ordenados. Por supuesto que, entonces, el Teorema demostrado para grupos sería simplemente un caso particular. A pesar de ello, hemos preferido ofrecer la prueba directa, precisamente por su sencillez. En el caso de un semigrupo, el análisis de los "*gaps*" que pueden aparecer en la imagen de la función de utilidad es mucho más delicado, y lo presentamos dividido en tres Lemas. Sólo el primero de estos Lemas no requiere del carácter topológico del semigrupo.

Lema 5.5.2

Sea $(S, +, \precsim)$ *un semigrupo totalmente ordenado, representable por una función de utilidad aditiva* $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$*. Entonces,* $u(S)$ *no da lugar a la aparición en* $\mathbb{R}$ *de "gaps" de los tipos siguientes:*

1) $(a, b]$ *con* $a < 0 \leq b$

2) $[a, b)$ *con* $a \leq 0 < b$

<u>*Demostración*</u>

Supongamos, por reducción al absurdo, la existencia de algún "*gap*" de los tipos anteriores.

<u>Tipo 1</u>: $(a, b]$

Se verifican las condiciones: $a \in u(S)$, $b \notin u(S)$, $a < 0 \leq b$. Denotemos $\alpha = u^{-1}(a)$.

Siendo $a < 0$, se tiene $b < b - a$. Por ser $b = \inf\{x \in u(S); b < x\}$, debe existir $s \in S$ verificando:

$$b < u(s) \leq b - a$$

de donde

$$a + b < a + u(s) \leq b$$

Puesto que $a \leq a + b$, por ser $b \geq 0$, resulta

$$a + u(s) \in (a, b]$$

Esto es una contradicción, porque $a + u(s) = u(\alpha) + u(s) = u(\alpha + s) \in u(S)$

<u>Tipo 2</u>: $[a, b)$

Se verifican las condiciones: $a \notin u(S)$, $b \in u(S)$, $a \leq 0 < b$. Denotemos $\beta = u^{-1}(b)$.

Siendo $0 < b$, se tiene $a - b < a$. Por ser $a = \sup\{x \in u(S); x < a\}$, debe existir $s \in S$ verificando:

$$a - b \leq u(s) < a$$

de donde

$$a \leq u(s) + b < a + b$$

Puesto que $a + b \leq b$, por ser $a \leq 0$, resulta

$$u(s) + b \in [a, b)$$

Lo que supone una contradicción, porque $u(s)+b = u(s)+u(\beta) = u(s+\beta) \in u(S)$ Esto completa la demostración. ■

Lema 5.5.3

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, representable por una función de utilidad aditiva $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, $u(S)$ no da lugar a la aparición en $\mathbb{R}$ de "gaps" de los tipos siguientes:

3) $(0, b]$

4) $[a, 0)$

<u>*Demostración*</u>

Supongamos, por reducción al absurdo, la existencia de algún "*gap*" de los tipos anteriores. Nótese que, entonces, S debe ser un monoide. Siendo e su elemento neutro, ha de verificarse $u(e) = 0$.

Tipo 3: $(0, b]$

Se verifican las condiciones: $0 = u(e) \in u(S)$, $0 < b \notin u(S)$. Nótese además que dado cualquier entorno, E del elemento neutro e (para la topología del orden en S), necesariamente existe algún $z \in E$ tal que $b < u(z)$.

Puesto que $b < 2b$ y es $b = \inf\{x \in u(S); b < x\}$, debe existir $s \in S^+$ tal que

$$b < u(s) \leq 2b$$

Consideremos $(\leftarrow, s)$, entorno de e. Por la continuidad de $+$ y ser $e + e = e$, debería existir otro entorno E de e tal que

$$E + E \subset (\leftarrow, s)$$

Sin embargo, existe $z \in E$ con $b < u(z)$, de donde

$$u(s) \leq 2b < 2u(z) = u(2z)$$

lo que conduce a la contradicción $s < 2z \in E + E$.

Tipo 4: $[a, 0)$

Se verifican las condiciones: $a \notin u(S)$, $a < 0$, $0 = u(e) \in u(S)$. En este caso, dado cualquier entorno, E del elemento neutro e (para la topología del orden en S), necesariamente existe algún $z \in E$ tal que $u(z) < a$.

Puesto que $2a < a$ y es $a = \sup\{x \in u(S); x < a\}$, debe existir $s \in S^-$ tal que

$$2a \leq u(s) < a$$

Consideremos $(s, \rightarrow)$, entorno de e. Por la continuidad de $+$ y ser $e + e = e$, debería existir otro entorno E de e tal que

$$E + E \subset (s, \rightarrow)$$

Sin embargo, existe $z \in E$ con $u(z) < a$, de donde

$$u(2z) = 2u(z) < 2a \leq u(s)$$

lo que conduce a la contradicción $2z < s$, con $2z \in E + E$. ■

Lema 5.5.4

Sea $(S, +, \precsim)$ *un semigrupo topológico totalmente ordenado, representable por una función de utilidad aditiva* $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$*. Entonces,* $u(S)$ *no da lugar a la aparición en* $\mathbb{R}$ *de "gaps" de los tipos siguientes:*

5) $(a, b]$ *con* $0 < a < b$ *o* $a < b < 0$

6) $[a, b)$ *con* $0 < a < b$ *o* $a < b < 0$

Demostración

Supondremos el caso $0 < a < b$, siendo la demostración para el otro caso análoga. Admitamos, por reducción al absurdo, la existencia de algún "*gap*" de los tipos anteriores.

Tipo 5: $(a, b]$

Se verifican las condiciones: $a \in u(S)$, $b \notin u(S)$, $0 < a < b$. Denotemos $\alpha = u^{-1}(a)$. Nótese además que dado cualquier entorno, E del elemento a (para la topología del orden en S), necesariamente existe algún $z \in E$ tal que $b < u(z)$.

Siendo $a < 2a$ y $a = \sup\{x \in u(S); x < a\}$, debe existir $s \in S^+$ tal que

$$a < u(s) < 2a$$

Pero si $u(s) > a$, entonces necesariamente $u(s) > b$, luego:

$$b < u(s) < 2a$$

Puesto que $\mathbb{R}$ verifica la propiedad $\{n + 1, n\}$, para $0 < a < b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n_0 + 1)a < n_0 b$$

Además es $n_0 > 1$, pues $1.b = b < (1+1).a = 2a$. Así obtenemos:

$$b < u(s) < 2a \leq n_0 a < (n_0+1)a < n_0 b$$

En particular:

$$u(s) < n_0 a < (n_0+1)a$$

de donde:

$$s \prec n_0 \alpha \prec (n_0+1)\alpha$$

Esto es, $(s, (n_0+1)\alpha)$ es entorno de $n_0 a$, para la topología del orden en S.

Por la continuidad de la operación + en S, debe existir E, entorno de a, tal que:

$$n_0 E \subseteq (s, (n_0+1)a)$$

Pero E contiene algún elemento z tal que $b < u(z)$, de donde

$$u((n_0+1)\alpha) = (n_0+1)a < n_0 b < n_0 u(z) = u(n_0 z)$$

lo que conduce a la contradicción $(n_0+1)a \prec n_0 z$, con $n_0 z \in n_0 E$.

<u>Tipo 6</u>: $[a, b)$

Se verifican las condiciones: $a \notin u(S)$, $b \in u(S)$, $0 < a < b$. Denotemos $\beta = u^{-1}(b)$. Nótese que para cualquier entorno, E del elemento b (para la topología del orden en S), necesariamente existe algún $z \in E$ tal que $u(z) < a$.

Puesto que $\mathbb{R}$ verifica la propiedad $\{n+1, n\}$, para $0 < a < b$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n_0+1)a < n_0 b$$

Comprobemos que debe existir $s \in S$, con $u(s) < a$ tal que $n_0 a < (n_0+1)u(s)$. En efecto, si para todo $s \in S$, con $u(s) < a$, ocurriera $(n_0+1)u(s) \leq n_0 a$, entonces

$$u(s) \leq \frac{n_0}{n_0+1} a < a \quad \forall s \in S \text{ con } u(s) < a$$

contra ser $a = \sup\{x \in u(S); x < a\}$.

Por tanto, alcanzamos la situación:

$$n_0 a < (n_0+1)u(s) < (n_0+1)a < n_0 b < (n_0+1)b$$

En particular:

$$u((n_0+1)s) < u(n_0\beta) < u((n_0+1)\beta)$$

de donde:

$$(n_0+1)s \prec n_0\beta \prec (n_0+1)\beta$$

Esto es, $((n_0+1)s, (n_0+1)\beta)$ es entorno de $n_0\beta$, para la topología del orden en S.

Por la continuidad de la operación $+$ en S, debe existir E, entorno de b, tal que:

$$n_0 E \subseteq ((n_0+1)s, (n_0+1)\beta)$$

Pero E contiene algún elemento z tal que $u(z) < a$, de donde

$$u(n_0 z) = n_0 u(z) < n_0 a < (n_0+1)u(s) = u((n_0+1)s)$$

lo que conduce a la contradicción $n_0 z \prec (n_0+1)s$, con $n_0 z \in n_0 E$. ■

Teorema 5.5.2

Sea $(S, +, \precsim)$ un semigrupo topológico totalmente ordenado, representable por una función de utilidad aditiva $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, u es necesariamente continua (con la topología usual en $\mathbb{R}$).

Demostración

Los Lemas anteriores prueban que $u(S)$ no da lugar a la aparición en $\mathbb{R}$ de ningún "*gap*" semiabierto-semicerrado. El resultado es entonces consecuencia del Lema del "open gap" de Debreu (Lema 5.5.1). ■

5.A. Apéndice

A lo largo de la Sección 5.4 hemos analizado algunas condiciones que permiten la caracterización del continuo real positivo. La clave ha venido dada por la conexión de la estructura y la continuidad de la operación interna para la topología del orden.

Mostraremos ahora la manera de realizar una extensión que permita alcanzar la estructura de los números reales. Existen en la literatura diversas introducciones formales de los números reales, entre las que podemos destacar las de Hewitt y Stromberg [1965], Rey Pastor, Pi-Calleja y Trejo [1969], Garay, Cuadra y Alfaro [1974], Apostol [1976], Dieudonné [1979], Cuesta-Dutari [1981], Spivak [1987] o Aliprantis y Burkinshaw [1990].

Partiremos de un grupo totalmente ordenado y conexo, cuyo cono positivo, por ser un semigrupo positivo, resoluble y conexo, ha sido ya caracterizado como la recta real aditiva y positiva (véase Corolario 5.4.9').

La operación producto la obtendremos admitiendo la existencia de una función biyectiva creciente (la función "exponencial"), de la estructura en su cono positivo. Como condición adicional, impondremos solamente que esta función verifique cierta ecuación funcional, destinada a garantizar la distributividad de la operación producto que se induce respecto a la operación suma. (En Eichhorn [1978], Aczél y Dhombres [1989], o Castillo y Ruiz [1993] pueden estudiarse diversas técnicas referidas a ecuaciones funcionales).

A partir de estos supuestos, realizaremos una construcción que cumple la axiomática de los números reales que presentamos a continuación (véase, por ejemplo, Garay, Cuadra y Alfaro [1974] o Aliprantis y Burkinshaw [1990]).

5.A.1. Sistema axiomático de los números reales

Axioma 1: Existe un conjunto $\mathbb{R}$ de elementos que llamaremos números reales.

Axioma 2: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado. Esto es, hay definidas en $\mathbb{R}$ dos operaciones internas $+$, $.$; y un orden total $\leq$, de manera que:

2.1) $(\mathbb{R}, +, .)$ es un cuerpo conmutativo.

2.2) $+$ es invariante por traslaciones:

$$a \leq b \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + c \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

Y respecto a la operación producto:

$$a \leq b, c \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad ac \leq bc$$

Axioma 3: $\mathbb{R}$ es Dedekind-completo.

5.A.2. Construcción del sistema de los números reales

Sea $(G, +, \precsim)$ un grupo totalmente ordenado y conexo, con neutro 0. Supongamos definida una función:

$$F : (G, \precsim) \longrightarrow (G^+, \precsim)$$

verificando las condiciones:

1) F es biyectiva e isótona: para todo $x, y \in G$:

$$x \precsim y \Longleftrightarrow F(x) \precsim F(y)$$

2) F verifica la siguiente ecuación funcional. Para todo $x, y, z \in G^+$:

$$F(F^{-1}(x) + F^{-1}(y + z)) = F(F^{-1}(x) + F^{-1}(y)) + F(F^{-1}(x) + F^{-1}(z))$$

Entonces, puede extenderse $(G, +, \precsim)$ hasta una estructura $(G, +, ., \precsim, \tau)$ isomorfa, isótona y homeomorfa al cuerpo totalmente ordenado y completo de los números reales, con la topología euclídea usual.

Demostración

Realizaremos la construcción en varios pasos, comprobando que se cumplen los axiomas de los números reales.

1) El cono positivo G^+ del grupo G definido es claramente un semigrupo totalmente ordenado, positivo, resoluble y conexo. El Corolario 5.4.9' identifica tal semigrupo con $(0, +\infty)$, por lo que el grupo de partida es, necesariamente, la recta real aditiva, totalmente ordenada y conexa (en particular, completa), con la topología euclídea usual. (En Iseki [1951] se prueba directamente la isomorfía de un grupo totalmente ordenado y conexo en la topología del orden con el grupo aditivo de los números reales).

2) Nótese que F, por ser biyectiva e isótona, define un homeomorfismo para los topologías del orden en $(G, \precsim)$ y $(G^+, \precsim)$. En efecto, la imagen de un abierto básico (a, b) de G es, trivialmente:

$$F(a, b) = (F(a), F(b))$$

Por lo que F es una aplicación abierta. Reciprocamente, la imagen inversa de un abierto básico (r, s) de G^+ es:

$$F^{-1}(r, s) = (F^{-1}(r), F^{-1}(s))$$

Por lo que F es también continua. En particular, $(G^+, \precsim)$ es por tanto también conexo.

3) A partir de F, definimos una operación "producto" en G^+ mediante:

$$\forall s, t \in G^+ : \quad s.t = F(F^{-1}(s) + F^{-1}(t))$$

Con esta operación, $(G^+, .)$ es un grupo abeliano totalmente ordenado. En efecto:

3.1) Para todo $s, t \in G^+$:

$$s.t = F(F^{-1}(s) + F^{-1}(t)) = F(F^{-1}(t) + F^{-1}(s)) = t.s$$

Por lo que la operación es conmutativa.

3.2) Para todo $r, s, t \in G^+$:

$$\begin{aligned}(rs).t &= F(F^{-1}(rs) + F^{-1}(t)) \\ &= F[F^{-1}(F(F^{-1}(r) + F^{-1}(s))) + F^{-1}(t)] \\ &= F[F^{-1}(r) + F^{-1}(s) + F^{-1}(t)]\end{aligned}$$

El cálculo de $r(st)$ conduce al mismo resultado, por lo que la operación es asociativa.

3.3) Para todo $s \in G^+$:

$$s.F(0) = F(F^{-1}(s) + 0) = s$$

Por lo que $F(0)$ es elemento neutro para la operación. Además, claramente $F(0) \neq 0$, pues $F(0) \in G^+$. Denotaremos

$$F(0) = 1$$

3.4) Para todo $s \in G^+$:

$$s.F(-F^{-1}(s)) = F(F^{-1}(s) - F^{-1}(s)) = F(0) = 1$$

Por lo que todo elemento de G^+ tiene inverso para la operación. Lo representaremos s^{-1}.

Queda comprobado que $(G^+, .)$ es un grupo abeliano. Veamos que el orden de G es invariante por traslaciones en G^+ para la nueva operación.

3.5) Sean $r, s, t \in G^+$. Puesto que F es isótona y biyectiva:

$$\begin{aligned} r \prec s &\Longrightarrow F^{-1}(r) \prec F^{-1}(s) \\ &\Longrightarrow F^{-1}(r) + F^{-1}(t) \prec F^{-1}(s) + F^{-1}(s) \\ &\Longrightarrow F(F^{-1}(r) + F^{-1}(t)) \prec F(F^{-1}(s) + F^{-1}(s)) \\ &\Longrightarrow rt \prec st \end{aligned}$$

4) Por construcción, la función F establece un isomorfismo entre $(G, +)$ y $(G^+, .)$. En efecto, dados $a, b \in G$:

$$F(a + b) = F[(F^{-1}(F(a)) + F^{-1}(F(b))] = F(a).F(b)$$

5) La operación producto es distributiva respecto a la suma. Es consecuencia de la ecuación funcional. En efecto, para todo $r, s, t \in G^+$:

$$\begin{aligned} r(s + t) &= F(F^{-1}(r) + F^{-1}(s + t)) \\ &= F(F^{-1}(r) + F^{-1}(s)) + F(F^{-1}(r) + F^{-1}(t)) \\ &= rs + rt \end{aligned}$$

6) Extendemos la operación producto a la totalidad de G mediante:

$$x.0 = 0.x = 0 \quad \forall x \in G$$

$$x(-y) = (-x)y = -(xy) \quad \forall x, y \text{ con } 0 \precsim x, y$$

$$(-x)(-y) = xy \quad \forall x, y \text{ con } 0 \precsim x, y$$

Con esta extensión, la operación producto resulta asociativa y distributiva respecto a la suma en todo G, y cualquier elemento $x \in G$ no nulo admite inverso para el producto x^{-1}.

Realizamos la comprobación en algún caso significativo, siendo los restantes análogos.

Dados x, y, con $0 \precsim x, y$:

$$x(-y) = -(xy) = -(yx) = (-y)x$$

$$(-x)(-y) = xy = yx = (-y)(-x)$$

Por lo que la operación producto es conmutativa.

Dados x, y, con $0 \precsim x, y$:

$$(xy)(-z) = -[(xy)z] = -[x(yz)] = x[-(yz)] = x[y(-z)]$$

Otras comprobaciones de la asociativa son análogas.

Dados x, y, z, con $0 \precsim x, y, z$, $0 \precsim y - z$:

$$x[y + (-z)] + xz = x[y + (-z) + z] = xy$$

De donde:

$$x[y + (-z)] = xy - (xz) = xy + x(-z)$$

Otras comprobaciones de la distributiva son análogas.

Para todo $x \in G^+$

$$(-x)(-x^{-1}) = xx^{-1} = 1$$

Por lo que todo elemento no nulo admite inverso.

7) Sólo falta comprobar que para la operación producto, siendo $x, y \in G$ cualesquiera, y siendo $0 \precsim z$:

$$x \precsim y \Longrightarrow xz \precsim yz$$

La propiedad está vista en el cono positivo. Entonces:

$$x \precsim y \Longrightarrow 0 \precsim y - x \Longrightarrow 0 \precsim (y - x)z \Longrightarrow 0 \precsim yz - xz \Longrightarrow xz \precsim yz$$

Concluimos que la estructura definida es un cuerpo conmutativo, totalmente ordenado y completo. Así; debe ser isomorfo e isótono al cuerpo totalmente ordenado y completo de los números reales. En particular, la topología del orden de la estructura, coincide con la topología del orden en los números reales, esto es, con la topología euclídea usual. ∎

Bibliografía

ACZÉL, J.; DHOMBRES, J. "*Functional equations in several variables*" Cambridge University Press. Cambridge. U.K. (1989).

ALIMOV, N. G. "*Sobre semigrupos ordenados*" (Ruso). Izvestia Akad. Nauk. SSSR. Math. Ser. 14, pp.569–576 (1950).

ALIPRANTIS, Ch. D.; BURKINSHAW, O. "*Principles of real analysis*" Academic Press. Boston (1990).

ALLING, N. L. "*On ordered divisible groups*" Transactions of the American Mathematical Society 94, pp.498–514 (1960).

APOSTOL, T. M. "*Calculus I y II*" Reverté. Barcelona (1976).

ARIAS DE REYNA, J.; ESTÉVEZ, M., HERVÉS, C. "*On the existence of continuous preference orderings without utility representations*" Aprarecerá en: Journal of Mathematical Economics. (1995).

BEARDON, A. F. "*Debreu's gap theorem*" Economic Theory 2, pp.150–152 (1992).

——————. "*Totally ordered subsets of Euclidean space*" Journal of Mathematical Economics 23, pp.391–393 (1994).

BEARDON, A. F.; MEHTA, G. B. "*The utility theorems of Wold, Debreu and Arrow–Hahn*" Econometrica 62 (1), pp.181–186 (1994 [1]).

——————. "*Debreu's theorem and the order type of the linear continuum*" Journal of Mathematical Economics 23, 387–390 (1994 [2]).

BIRKHOFF, G. "*Lattice theory*" American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV (1940). Tercera Edición (1967).

——————. "*Lattice-ordered groups*" Annals of Mathematics 43 (2), pp.298–331 (1942).

——————. "*Groupes reticulés*" Annales de l'Institut Henri Poincaré 11, pp.241–250 (1949).

BOWEN, R. "*A new proof of a theorem in utility theory*" International Economic Review 9 (3), p.374 (1968).

BRITTON, J. L.; SHEPPERD, J. A. H. "*Almost ordered groups*" Proceedings of the London Mathematical Society 1, pp.188–199 (1951).

BURGES, D. C. J. "*Generalized intervals in partially ordered groups*" Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 55, pp.165–171 (1959)

CANDEAL, J. C.; INDURAIN, E. "*Sobre preórdenes y funciones de utilidad*" Cuadernos Aragoneses de Economía, 15. pp.35–50 (1990 [1]).

——————. "*Sobre caracterizaciones topológicas de la representabilidad de cadenas mediante funciones de utilidad*" Revista Española de Economía 7 (2), pp.235–244 (1990 [2]).

——————. "*Utility functions on chains*" Journal of Mathematical Economics 22, pp.161–168 (1993).

CANTOR, G. "*Beiträge zur Begründung der transfinite Mengenlehre*" Mathematische Annalen 46, pp.481–512 (1895).

——————. "*Beiträge zur Begründung der transfinite Mengenlehre II*" Mathematische Annalen 49, pp.207–246 (1897).

CAPEL, C. E. "*Inverse limit spaces*" Duke Mathematical Journal 21, pp.233–245 (1954).

CARTAN, H. "*Un théorème sur les groupes ordonnés*" Bulletin des Sciences Mathématiques 63 (1), pp.201–205 (1939).

CASTILLO, E.; RUIZ, R. "*Ecuaciones funcionales y modelización en Ciencia, Ingeniería y Economía*" Reverté. Barcelona (1993).

CHATEAUNEUF, A. "*Continuous representation of a preference relation on a connected topological space*" Journal of Mathematical Economics 16, pp.139–146 (1983).

CHEHATA, A. "*On an ordered semigroup*" Journal of the London Mathematical Society 28, pp.353–356 (1953).

——————. "*On a theorem on ordered groups*" Proceedings of the Glasgow Mathematial Association 4, pp.16–21 (1958).

CHIPMAN, J. S. "*The foundations of utility*" Econometrica 28, pp.193–224 (1960)

CLIFFORD, A. H. "*Partially ordered Abelian groups*" Annals of Mathematics 41 (3), pp.465–473 (1940).

——————. "*A non conmutative ordinally simple linearly ordered group*" Proceedings of the American Mathematical Society 2, pp.902–903 (1952).

——————. "*Note on Hahn's theorem on ordered abelian groups*" Proceedings of the American Mathematical Society 5, pp.860–863 (1954).

——————. "*Totally ordered conmutative semigroups*" Bulletin of the American Mathematical Society 64, pp.305–316 (1958).

——————. "*Completion of semi-continuous ordered conmutative semigroups*" Duke Mathematical Journal 26, pp.41–59 (1959).

CLIFFORD, A. H.; PRESTON, G. B. "*The algebraic theory of semigroups (I y II)*" Mathematical Surveys and Monographs 7. American Mathematical Society (1964, 1961–1967).

COHEN, L. W.; GOFFMAN, C. "*The topology of ordered abelian groups*" Transactions of the American Mathematical Society 67, pp.310-319 (1949).

CONRAD, P. "*Non-Abelian ordered groups*" Pacific Journal of Mathematics 9, pp.25–41 (1959).

——————. "*Semigroups or real numbers*" Portugaliae Mathematica 18, pp. 199–201 (1959).

——————. "*Ordered semigroups*" Nagoya Mathematical Journal 16, pp.51–64 (1960).

CUESTA-DUTARI, N. "*La sinfonía del infinito. Y ya en el paraíso de Euler (99 lecciones de Análisis Matemático)*" Universidad de Salamanca (1981).

DAY, M. M. "*Arithmetic of ordered systems*" Transactions of the American Mathematical Society 58, pp.1–43 (1945).

DE MIGUEL, J. R.; CANDEAL, J. C.; INDURAIN, E. "*Archimedeaness and additive utility on totally ordered semigroups*" Aparecerá en: Semigroup Forum (1995).

DEBREU, G. "*Representation of a preference ordering by a numerical function*" En Decission Processes, Wiley (New York) pp.159–165 (1954).

——————. "*Theory of Value: An axiomatic analysis of economic equilibrium*" John Wiley. New York (1959). (Traducción castellana: "Teoria del valor". Bosch. Barcelona, 1973).

——————. "*Continuity properties of Paretian utility*" International Economic Review 30, pp.441-462 (1964).

DIEUDONNÉ, J. "*Fundamentos de Análisis Moderno*" Reverté. Barcelona (1979).

DUGUNDJI, J. "*Topology*" Allyn and Bacon. Boston (1966).

EICHHORN, W. "*Functionals equations in Economics*" Volumen 11 de "Applied Mathematics and Computation Series". Addison-Wesley Pub. Co. (1978).

EILENBERG, S. "*Ordered topological spaces*" American Journal of Mathematics 63, pp.39–45 (1941).

EVERETT, C. S.; ULAM, S. "*On ordered groups*" Transactions of the American Mathematical Society 57, pp.208–216 (1945).

FISHBURN, P. C. "*Utility theory for decision making*" Wiley, New York (1970).

——————. "*Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey*" Management Science 20 (11), pp.1442–1471 (1974).

——————. "*Utility functions on ordered convex sets*" Journal of Mathematical Economics 12, pp.221–232 (1983).

——————. "*Foundations of decision analysis: along the way*" Management Science 35 (4), pp.387–405 (1989).

FLEISCHER, I. "*Numerical representation of utility*" Journal of the Society for Industrial Applied Mathematics (SIAM) 9 (1), pp.48–50 (1961 [1]).

——————. "*Embedding linearly ordered sets in real lexicographic products*" Fundamenta Matematicae 49, 147–150 (1961 [2]).

FUCHS, L. "*On partially ordered groups*" Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen 53, pp.828–834 (1950).

——————. "*On the ordering of quotient rings and quotient semigroups*" Acta Scientiarum Mathematicorum 22, pp.42–45 (1961 [1]).

——————. “*Note on fully orderered semigroups*” Acta Mathematica Academie Scientiarum Hungaricae 12, pp.255–259 (1961 [2]).

——————. “*Partially ordered algebraical systems*” Pergamon Press. New York (1963).

GARAY, J.; CUADRA, J. L.; ALFARO, M. “*Una introducción al Cálculo Infinitesimal*” Octavio y Félez. Zaragoza (1974).

GELBAUM, B. R.; OLMSTED, J. M. H. “*Theorems and counterexamples in Mathematics*” Springer-Verlag. New York (1990).

HAHN, H. “*Über die nichtarchimedischen Grossensysteme*” Sitz. der K. Akademie der Wissenschaften. Math. Nat. Klass Vol 116, Abteilung IIa, pp.601–655 (1907).

HAUSNER, M.; WENDEL, J. G. “*Ordered vector spaces*” Proceedings of the American Mathematical Society 3, pp.977–982 (1952).

HENRIKSEN, M.; ISBELL, J. R. “*Lattice-ordered rings and function rings*” Pacific Journal of Mathematics 12, pp.533–565 (1962).

HERDEN, G. “*On the existence of utility functions I, II*” Mathematical Social Sciences 17, pp.297–313 y 18, pp.107–117 (1989).

——————. “*Topological spaces for which every continuous total preorder can be represented by a continuous utility function*” Mathematical Social Sciences 22, pp.123–136 (1991).

HERDEN, G.; MEHTA, B. “*The continuous analogue and generalization of the clasical Birkhoff–Milgram theorem*” Mathematical Social Sciences 28, pp.59–66 (1994).

HEWITT, E.; STROMBERG, K. “*Real and Abstract Analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*” Springer-Verlag. New York (1965).

HIGGINGS, P. J. "*An introduction to topological groups*" Cambridge University Press. Cambridge. U.K. (1979).

HILBERT, D. "*Fundamentos de la Geometría*" CSIC. Madrid (1991).

HION, Ya. V. "*Semigrupos ordenados*" (Ruso). Izvestia Akad. Nauk. SSSR. Math. Ser. 21, pp.209–222 (1957).

HÖLDER, O. "*Die Axiome der Quantität und die Lehre von Mass*" Leipzig Ber., Math. Phys. C1. 53, pp.1–64 (1901).

HOLMAN, E. W. "*A note on aditive conjoint measurement*" Journal of Mathematical Psychology 8, pp.489–494 (1971).

HUNGERFORD, T. W. "*Algebra*" Springer-Verlag. New York (1974).

INDURAIN, E. "*Sobre relaciones de preferencia*" Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano. Serie II. Sección 5 (Cuadernos), 20 (1989).

ISEKI, K. "*On simple ordered groups*" Portugaliae Mathematica 10, pp.85–88 (1951).

IWASAWA, K. "*On linearly ordered groups*" Journal of the Mathematical Society of Japan 1, pp.1–9 (1948).

JAFFARD, P. "*Contribution à l'étude des groupes ordonnés*" Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 32, pp.203–280 (1952).

JAFFRAY, J. Y. "*Existence of a continuous utility function: An elementary proof*" Econometrica 43 (5–6), pp.981–983 (1975).

KANTOROVICH, L. V. "*Lineare halbgeordnete Räume*" Mathematcheskie Sbornik 2, pp.121–168 (1937).

KATZNELSON, Y. "*Harmonic Analysis*" Dover, New York (1976).

KATZNER, D. W. "*Static demand theory*" Macmillan. London (1970).

KELLY, J. S. "*Social choice theory*" Springer Verlag. Berlin (1988)

KRANTZ, D. H.; LUCE, R. D.; SUPPES, P.; TVERSKY, A. "*Foundations of Measurement. Vol. 1*" Academic Press. London (1971).

KRULL, W. "*Über die Endomorphismen von total geordneten archimedischen abelschen Gruppen*" Mathematische Zeitschrift 74, pp.81–90 (1960).

LOONSTRA, F. "*Ordered groups*" Proc. Koninklijke Nederlandse van Wetenschappen 49, pp.41–46 (1946).

——————. "*The classes of partially ordered groups*" Compositio Mathematica 9, pp.130–140 (1951).

LORENZEN, P. "*Über halbgeordnete Gruppen*" Mathematische Zeitschrift 52, pp. 483–526 (1950).

LUCE, R. D.; KRANTZ, D. H.; SUPPES, P.; TVERSKY, A. "*Foundations of Measurement. Vol. 3: Representation, axiomatization and invariance*" Academic Press. San Diego (1990).

LUCE, R. D.; NARENS, L. "*Intrinsic archimedeannes and the continuum*" Harvard University y University of California at Irvine (Documento de trabajo). (1987). Aparecerá en "The nature and purpose of Measurement" C. Wade Savage and Philip Ehrlich eds.

LUCE; R. D.; RAIFFA, H. "*Games and decisions*" John Wiley. New York (1957).

MARTINEZ-LEGAZ, J. E. "*Lexicographic Utility*" Aparecerá en Handbook of Utility Theory. North Holland (1995).

MATKOWSKI, J. SWIATKOWSKI, T. "*On subaditive functions*" Proceedings of the American Mathematical Society 119 (1), pp.187–1993 (1993).

MEHTA, G. B. "*Recent developments in utility theory*" The Indian Economic Journal 30 (4), pp-103–124 (1983).

——————. "*Existence of an order-preserving function on normally preordered sets*" Bulletin of the Australian Mathematical Society 34, pp.141–147 (1986 [1]).

——————. "*On a theorem of Fleischer*" Journal of the Australian Math. Society (Series A) 40, pp.261–266 (1986, [2]).

——————. "*Some general results on the existence of order-preserving functions*" Mathematical Social Sciences 15 (2), pp.135–143 (1988).

——————. "*Utility functions on preordered normed linear spaces*" Applied Mathematical Letters 4 (5), pp.53–55 (1991).

MILGRAM, A. N. "*Partially ordered sets, separating systems and inductiveness*" En Reports of a Mathematical Colloquium, serie 2, 1, University of Notre Dame, IN. (Ed. K. Menger) (1939).

MONNA, F. "*Analyse non-archimédienne*" Springer-Verlag. Berlin (1970).

MONTEIRO, P. K. "*Some results on the existence of utility functions on path-connected spaces*" Journal of Mathematical Economics 16, pp.147–156 (1987).

NACHBIN, L. "*Topology and order*" Van Nostrand. Princeton. NJ (1965).

NADLER Jr, S. B. "*Continuum theory*" Marcel Dekker. New York (1992).

NAKADA, O. "*Partially ordered Abelian semigroups I and II*" Journal Fac. Sciences Hokkaido University 11, pp. 181–189 (1951) y 12, pp. 73–86 (1952).

NARENS, L. “*Abstract measurement theory*” MIT Press. Cambridge, MA (U.S.A.) (1985).

NEUEFEIND, W.; TROCKEL, W. “*Continuous linear representability for binary relations*” (Documento de trabajo). Department of Economics. Washington University in Saint Luis (1992).

NEUMANN, B. H. “*On ordered groups*” American Journal of Mathematics 71, pp.1–18 (1949).

NOVAK, V. “*On the lexicographic dimension of linearly ordered sets*” Fundamenta Mathematicae 56, pp.9–20 (1964).

NOWAKOWSKA, M. “*Quantitative psychology: some chosen problems and new ideas*” North Holland. Amsterdam (1983).

NYIKOS, P. J.; REICHEL, H. C. “*Topologically orderable groups*” General Topology and Applications 5, pp.195–204 (1975).

OSTASZEWSKI, A. J. “*On the descriptive set theory of the lexicographic square*” Fundamenta Mathematicae 87, pp.261–281 (1975).

PELEG, B. “*Utility functions for partially ordered topological spaces*” Econometrica 38, núm. 1, pp.93–96 (1970).

PERIS, J. E.; SUBIZA, B. “*Maximal elements of not necessarily acyclic relations*” Economic Letters 44, pp.385–388 (1994).

POLYÁ, G.; SZEGÖ, G. “*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I y II*” Springer-Verlag. (Zweite Auflage) Berlin (1954).

PONTRYAGIN, L.S. “*Grupos continuos*” Mir. Moscú (1978).

REY PASTOR, J.; PI-CALLEJA, P.; TREJO, C. A. “*Análisis Matemático. Vol 1*” Kapelusz. Buenos Aires (1969).

ROBERTS, F.S. "*Measurement theory with applications to decision making, utility, and the social sciences*" Addison Wesley. Londres (1979).

SAMUEL, P. "*Algebraic theory of numbers*" Hermann (Kershaw Pub. Comp. LTD) London (1971).

SCHMEIDLER, D. "*A condition for the completness of partial preference relations*" Econometrica 39 (2), pp.403–404 (1971).

SKALA, H. J. "*Non-Archimedean utility theory*" Reidel. Dordrecht, Holanda (1975).

SPIVAK, M. "*Calculus. Cálculo infinitesimal*" Reverté. Barcelona (1987).

SUBIZA, B. "*Representaciones numéricas de preferencias cuasitransitivas y acíclicas*" (Tesis doctoral) Universidad de Alicante (1992).

TAKAYAMA, A. "*Mathematical economics*" (Segunda ed.) Cambridge University Press (1985).

TANGUIANE, A. S. "*Representation of a weak ordering by a numerical function*" Doklady Akad. Nauk. SSSR 298 (5), pp.222–225 (1988).

——————. "*Aggregation and representation of preferences*" Springer-Verlag. Berlin (1991).

TEH, H. H. "*Constructions of orders in abelian groups*" Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 57, pp.476–482 (1961).

TROCKEL, W. "*An alternative proof for the linear utility representation theorem*" Ecnomic Theory 2, pp.298–302 (1992).

VAN DALEN, J.; WATTEL, E. "*A topological characterization of ordered spaces*" General Topology and its Applications 3, pp.347–354 (1973).

WAKKER, P. "*Continuity of preference relations for separable topologies*" International Economic Review 29 (1), pp.105–110 (1988).

WALKER, M. "*On the existence of maximal elements*" Journal of Economic Theory 16, pp.470–474 (1977).

YI, G. "*Continuous extension of preferences*" Journal of Mathematical Economics 22, pp.547–555 (1993).