Susana JORAJURÍA LÁZARO

GEOMETRÍA

PROPUESTA DE INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES DE LA RECTA EN 4º ESO

TFM 2018

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Propuesta de ingeniería didáctica para la enseñanza de ecuaciones de la recta en 4º ESO

Susana Jorajuría Lázaro

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar las diferentes ecuaciones de la recta, así como los contenidos previos necesarios para su aprendizaje, como son los vectores y sus operaciones, que servirán también para un posterior estudio de las posiciones relativas entre dos rectas.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre las ecuaciones de la recta, que se ha puesto en marcha en un aula de 4º ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Las ecuaciones de la recta en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las ecuaciones de la recta en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a las ecuaciones de la recta en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 4º ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1
Las ecuaciones de la recta en el currículo vigente

En este capítulo se presenta un estudio longitudinal del currículo, teniendo en cuenta únicamente los contenidos que guardan relación con las ecuaciones de la recta. El capítulo cuenta con tres secciones, una para cada una de las etapas que se analizan ya que, a pesar de que el interés principal es la Educación Secundaria (ESO y Bachillerato), también se considera relevante analizar el punto de partida que se consigue durante la Educación Primaria. Para cada contenido se hace una referencia a cuál de los diferentes bloques del currículo pertenece.

Con este fin, se ha procedido a un estudio de los currículos oficiales dados por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) [1]. Concretamente se estudian los siguientes Reales Decretos, en función del curso al que correspondan:

- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria [2].
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato [3].

Para la realización de este análisis se resume la información en las tablas 1 a 6 y se analiza una serie de descriptores que se detallan a continuación:

- Resolución de problemas
- Proporcionalidad directa
- Álgebra y operaciones
- Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas
- Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores
- Medios tecnológicos: representación y análisis

Hay un par de aspectos relacionados con las ecuaciones de la recta que no se analizan mediante descriptores porque su presencia en el currículo es limitada, por lo que se explican a continuación:

- Razones trigonométricas: aparecen por primera vez en 4º ESO en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y continúan en 1º del Bachillerato de Ciencias y Tecnología, no así en el de Ciencias Sociales.
- Correlación y regresión lineal: es el único aspecto del bloque de Estadística que se menciona en el currículo que está estrechamente relacionado con las ecuaciones de las recta. Aparece una introducción a la correlación en 4º ESO de las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y a las aplicadas, para estudiarse con mayor detalle en las matemáticas de los dos bachilleratos en el primer curso, en el segundo curso ya no se vuelve a estudiar.

El Bloque 1 correspondiente a *"Procesos, métodos y actitudes en matemáticas"* es muy similar entre la Educación Primaria y la Educación Secundaria y el Bachillerato, donde todos los años es prácticamente constante. Este bloque es el que debe servir como soporte para el aprendizaje del resto de los bloques de las matemáticas y, por ello, todos los contenidos podrían considerarse relacionados con el estudio de las ecuaciones de la recta. Sin embargo, en las siguientes tablas solo se tienen en cuenta los más relevantes, como guía, y se puede ver que el Bloque 1 es especialmente importante para la resolución de problemas y para la utilización de medios tecnológicos para la representación y el análisis, el primer y último descriptor respetivamente.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

Tabla 1. Contenidos en tercer ciclo de Educación Primaria

DESCRIPTORES	Contenidos 3^{er} ciclo de Primaria
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Planteamiento de pequeñas investigaciones en contextos numéricos, geométricos y funcionales.
Proporcionalidad directa	Bloque 2. Números. - Porcentajes y proporcionalidad. - Proporcionalidad directa.
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números. - Operaciones.
Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 4. Geometría. - Posiciones relativas de rectas y circunferencias.
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	Bloque 2. Números. - Números enteros, decimales y fracciones: - Orden numérico. Utilización de los números ordinales. Comparación de números. - Números positivos y negativos. - Ordenación de conjuntos de números de distinto tipo. Bloque 4. Geometría. - La situación en el plano y en el espacio. - Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos. - La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para obtener información, realizar cálculos numéricos, resolver problemas y presentar resultados. - Integración de las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje. Bloque 2. Números. - Utilización de la calculadora.

1.2. Contenidos en ESO

Tabla 2. Contenidos en primer ciclo de Educación Secundaria

DESCRIPTORES	Contenidos 1º ESO	Contenidos 2º ESO
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Reflexión sobre los resultados.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Reflexión sobre los resultados.
Proporcionalidad directa	Bloque 2. Números y Álgebra. - Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.	Bloque 2. Números y Álgebra. - Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números y Álgebra. - Jerarquía de las operaciones. - Iniciación al lenguaje algebraico. - Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.	Bloque 2. Números y Álgebra. - Jerarquía de las operaciones. - Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. - Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.
Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 3. Geometría. - Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Bloque 4. Funciones. - El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Cortes con los ejes. Análisis y comparación de gráficas.	Bloque 4. Funciones. - Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	Bloque 2. Números y Álgebra. - Números negativos. Significado y utilización en contextos reales. - Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones. Operaciones con calculadora. - Números decimales. Representación, ordenación y operaciones.	Bloque 4. Funciones. - Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.

Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 4. Funciones. - Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. Bloque 4. Funciones. - Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

Tabla 3. Contenidos en segundo ciclo de Educación Secundaria (rama académica)

DESCRIPTORES	**Contenidos 3º ESO (académicas)**	**Contenidos 4º ESO (académicas)**
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Reflexión sobre los resultados.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Reflexión sobre los resultados.
Proporcionalidad directa	—	—
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números y Álgebra. - Jerarquía de las operaciones. - Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.	Bloque 2. Números y Álgebra. - Jerarquía de operaciones. - Manipulación de expresiones algebraicas. Utilización de igualdades notables. - Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. - Inecuaciones de primer y segundo grado. Interpretación gráfica. Resolución de problemas
Análisis de funciones: ecuaciones y	Bloque 4. Funciones. - Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones pro-	Bloque 3. Geometría. - Iniciación a la geometría analítica en el plano: Ecuaciones de

posiciones relativas	venientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. - Expresiones de la ecuación de la recta.	la recta. Paralelismo, perpendicularidad.
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	—	Bloque 2. Números y Álgebra. - Representación de números en la recta real. Intervalos. Bloque 3. Geometría. - Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores.
Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.

Tabla 4. Contenidos en segundo ciclo de Educación Secundaria (rama aplicadas)

DESCRIPTORES	Contenidos 3º ESO (aplicadas)	Contenidos 4º ESO (aplicadas)
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Reflexión sobre los resultados.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Reflexión sobre los resultados.
Proporcionalidad directa	—	Bloque 2. Números y Álgebra. - Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números y Álgebra. - Jerarquía de las operaciones. - Transformación de expresiones algebraicas con una indeterminada. Igualdades notables. - Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas.	Bloque 2. Números y Álgebra. - Jerarquía de las operaciones. - Resolución de ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. - Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas.

Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 4. Funciones. - Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. - Expresiones de la ecuación de la recta.	—
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	—	Bloque 2. Números y Álgebra. - Diferenciación de números racionales e irracionales. Expresión decimal y representación en la recta real.
Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.

1.3. Contenidos en Bachillerato

Tabla 5. Contenidos en Bachillerato (Ciencias y Tecnología)

DESCRIPTORES	Contenidos 1º Bachillerato (Matemáticas I)	Contenidos 2º Bachillerato (Matemáticas II)
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Soluciones y/o resultados obtenidos. Bloque 4. Geometría. - Geometría métrica plana. Resolución de problemas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Soluciones y/o resultados obtenidos.
Proporcionalidad directa	—	—
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números y Álgebra. - Planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana	Bloque 2. Números y Álgebra. - Representación matricial de un sistema: discusión y resolución

	mediante ecuaciones e inecuaciones. Interpretación gráfica. - Método de Gauss para la resolución e interpretación de sistemas de ecuaciones lineales.	de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas.
Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 3. Análisis. - Funciones reales de variable real. - Funciones básicas: polinómicas. - Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal. Bloque 4. Geometría. - Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos.	Bloque 4. Geometría. - Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. - Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos).
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	Bloque 3. Análisis. - Representación gráfica de funciones. Bloque 4. Geometría. - Vectores libres en el plano. Operaciones geométricas	Bloque 4. Geometría. - Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.
Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.

Tabla 6. Contenidos en Bachillerato (Ciencias Sociales)

DESCRIPTORES	Contenidos 1º Bachillerato (CC. SS.)	Contenidos 2º Bachillerato (CC. SS.)
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Análisis de los resultados obtenidos.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica. - Análisis de los resultados obtenidos.

Proporcionalidad directa	—	—
Álgebra y operaciones	<u>Bloque 2. Números y Álgebra.</u> - Ecuaciones lineales. Aplicaciones. - Sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado con dos incógnitas. Clasificación. Aplicaciones. Interpretación geométrica. - Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas: método de Gauss.	<u>Bloque 2. Números y Álgebra.</u> - Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (hasta tres ecuaciones con tres incógnitas). Método de Gauss. - Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Resolución gráfica y algebraica. - Programación lineal bidimensional. Región factible. Determinación e interpretación de las soluciones óptimas. - Aplicación de la programación lineal a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos.
Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	<u>Bloque 3. Análisis.</u> - Interpolación y extrapolación lineal y cuadrática. Aplicación a problemas reales. - Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones reales de variable real: polinómicas. - Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto.	—
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	<u>Bloque 2. Números y Álgebra.</u> - Números racionales e irracionales. El número real. Representación en la recta real. Intervalos.	—
Medios tecnológicos: representación y análisis	<u>Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.</u> - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.	<u>Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.</u> - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos y facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.

Capítulo 2

Los criterios de evaluación de las ecuaciones de la recta en el currículo vigente

En este capítulo se presenta un estudio longitudinal del currículo, teniendo en cuenta únicamente los criterios de evaluación que guardan relación con las ecuaciones de la recta. El capítulo cuenta con tres secciones, una para cada una de las etapas que se analizan ya que, a pesar de que el interés principal es la Educación Secundaria (ESO y Bachillerato), también se considera relevante analizar el punto de partida que se consigue durante la Educación Primaria. Para cada criterio de evaluación se hace una referencia a cuál de los diferentes bloques del currículo pertenece.

Con este fin, se ha procedido a un estudio de los currículos oficiales dados por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) [1]. Concretamente se estudian los siguientes Reales Decretos, en función del curso al que correspondan:

- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria [2].
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato [3].

Para la realización de este análisis se resume la información en las tablas 7 a 12 y se analiza una serie de descriptores que se detallan a continuación:

- Resolución de problemas
- Proporcionalidad directa
- Álgebra y operaciones
- Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas
- Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores
- Medios tecnológicos: representación y análisis

Hay un par de aspectos relacionados con las ecuaciones de la recta que no se analizan mediante descriptores porque su presencia en el currículo es limitada, por lo que se explican a continuación:

- Razones trigonométricas: aparecen por primera vez en 4º ESO en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y continúan en 1º del Bachillerato de Ciencias y Tecnología, no así en el de Ciencias Sociales.
- Correlación y regresión lineal: es el único aspecto del bloque de Estadística que se menciona en el currículo que está estrechamente relacionado con las ecuaciones de las recta. Aparece una introducción a la correlación en 4º ESO de las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y a las aplicadas, para estudiarse con mayor detalle en las matemáticas de los dos bachilleratos en el primer curso, en el segundo curso ya no se vuelve a estudiar.

El Bloque 1 correspondiente a *"Procesos, métodos y actitudes en matemáticas"* es muy similar entre la Educación Primaria y la Educación Secundaria y el Bachillerato, donde todos los años es prácticamente constante. Este bloque es el que debe servir como soporte para el aprendizaje del resto de los bloques de las matemáticas y, por ello, todos los criterios de evaluación podrían considerarse relacionados con el estudio de las ecuaciones de la recta. Sin embargo, en las siguientes tablas solo se tienen en cuenta los más relevantes, como guía, y se puede ver que el Bloque 1 es especialmente importante para la resolución de problemas y para la utilización de medios tecnológicos para la representación y el análisis, el primer y último descriptor respetivamente.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

Tabla 7. Criterios de evaluación en tercer ciclo de Educación Primaria

DESCRIPTORES	Criterios de evaluación 3er ciclo de Primaria
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. Bloque 2. Números. 3. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas.
Proporcionalidad directa	Bloque 2. Números. 7. Iniciarse en el uso de los de porcentajes y la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana.
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números. 6. Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora), usando más adecuado.
Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 4. Geometría. 1. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, geometría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	Bloque 2. Números. 1. Leer, escribir y ordenar, utilizando razonamientos apropiados, distintos tipos de números (romanos, naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas).
Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 13. Seleccionar y utilizar las herramientas tecnológicas y estrategias para el cálculo, para conocer los principios matemáticos y resolver problemas.

2.2. Criterios de evaluación en ESO

Tabla 8. Criterios de evaluación en primer ciclo de Educación Secundaria

DESCRIPTORES	Criterios de evaluación 1º ESO	Criterios de evaluación 2º ESO
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
Proporcionalidad directa	—	Bloque 2. Números y Álgebra. 5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números y Álgebra. 1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.	Bloque 2. Números y Álgebra. 7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados.
Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 4. Funciones. 2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto. 3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.	Bloque 4. Funciones. 4. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales, utilizándolas para resolver problemas.
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	Bloque 4. Funciones. 1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.	Bloque 4. Funciones. 1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.

Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

Tabla 9. Criterios de evaluación en segundo ciclo de Educación Secundaria (rama académica)

DESCRIPTORES	Criterios de evaluación 3º ESO (académicas)	Criterios de evaluación 4º ESO (académicas)
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
Proporcionalidad directa	—	—
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números y Álgebra. 4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.	Bloque 2. Números y Álgebra. 3. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades. 4. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.
Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 4. Funciones. 1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.	Bloque 3. Geometría. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.

Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	—	Bloque 3. Geometría. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.
Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

Tabla 10. Criterios de evaluación en segundo ciclo de Educación Secundaria (rama aplicadas)

DESCRIPTORES	Criterios de evaluación 3º ESO (aplicadas)	Criterios de evaluación 4º ESO (aplicadas)
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
Proporcionalidad directa	—	—
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números y Álgebra. 4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado, sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos y valorando y contrastando los resultados obtenidos.	Bloque 2. Números y Álgebra. 2. Utilizar con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.

Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 4. Funciones. 1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.	—
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	—	—
Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Tabla 11. Criterios de evaluación en Bachillerato (Ciencias y Tecnología)

DESCRIPTORES	Criterios de evaluación 1º Bachillerato (Matemáticas I)	Criterios de evaluación 2º Bachillerato (Matemáticas II)
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
Proporcionalidad directa	—	—
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números y Álgebra. 4. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando recursos algebraicos (ecuaciones, inecuaciones y sistemas) e interpretando críticamente los resultados.	Bloque 2. Números y Álgebra. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.

Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 3. Análisis. 3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos. Bloque 4. Geometría. 4. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo las ecuaciones de rectas y utilizarlas, para resolver problemas de incidencia y cálculo de distancias.	Bloque 4. Geometría. 2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	Bloque 3. Análisis. 5. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	Bloque 4. Geometría. 1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores.
Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

Tabla 12. Criterios de evaluación en Bachillerato (Ciencias Sociales)

DESCRIPTORES	Criterios de evaluación 1º Bachillerato (CC. SS.)	Criterios de evaluación 2º Bachillerato (CC. SS.)
Resolución de problemas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

Proporcionalidad directa	—	—
Álgebra y operaciones	Bloque 2. Números y Álgebra. 3. Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico situaciones relativas a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas y herramientas tecnológicas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas en contextos particulares.	Bloque 2. Números y Álgebra. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.
Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Bloque 3. Análisis. 3. Interpolar y extrapolar valores de funciones a partir de tablas y conocer la utilidad en casos reales.	—
Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores	—	—
Medios tecnológicos: representación y análisis	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 12. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 12. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

Capítulo 3

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las ecuaciones de la recta en el currículo vigente

Tras hacer un análisis de la legislación vigente en los dos capítulos anteriores, donde se han concretado los contenidos y criterios de evaluación de los distintos cursos que guardan relación con el estudio de las ecuaciones de la recta, en este capítulo se estudian los libros de texto utilizados en las clases de 2º, 3º y 4º de secundaria y de 1º y 2º de Bachillerato. Como se ha podido ver anteriormente, la rama académica de 3º y 4º da más importancia a las ecuaciones de las rectas, así como el Bachillerato de Ciencias y Tecnología, por lo que solo se estudia esa rama dentro de cada curso correspondiente.

El capítulo se va a dividir en cinco secciones, cada una de ellas correspondiente a uno de los cursos que se van a analizar. El objetivo es ver las unidades temáticas más relevantes dentro de cada libro de texto para encontrar ejercicios, problemas y cuestiones que estén relacionados con el tema que se estudia: las ecuaciones de la recta.

La información se va a recoger en las tablas 13 a 17, una para cada curso, donde se detalla el tipo de actividad, que puede ser ejercicio, problema, cuestión o situación, así como una breve descripción del mismo acompañado de una fotografía de la actividad procedente del libro de texto.

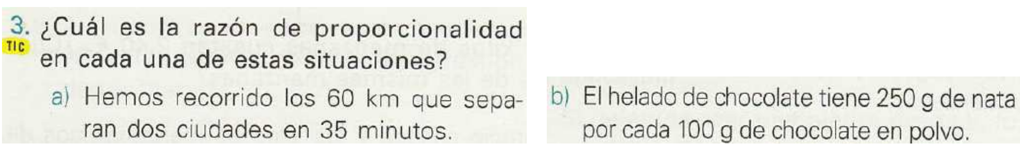
Los libros de texto utilizados vienen detallados en las Referencias.

En los contenidos y criterios de evaluación del currículo se analizaban una serie de descriptores, como resolución de problemas, álgebra y operaciones y utilización de medios tecnológicos para representación y análisis, que en este capítulo no se van a mostrar, porque se entiende que proporcionan una base que podría utilizarse con cualquier otro contenido matemático. Así pues, aquí se presta especial atención a la proporcionalidad directa, análisis de funciones lineales, ecuaciones de la recta y posiciones relativas.

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO [4]

Las unidades didácticas más relevantes que se tienen en cuenta de este libro de texto son las correspondientes a "*Proporcionalidad. Porcentajes*" y a "*Funciones*".

Tabla 13. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO

Actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación **Descripción**: Se proporcionan valores de dos parámetros que tienen una relación proporcional y se pide calcular la razón de proporcionalidad, que realmente correspondería con la pendiente si la función fuera de proporcionalidad directa. **Ejemplo**: Tema "*Proporcionalidad. Porcentajes*". Página 121.  3. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad en cada una de estas situaciones? TIC a) Hemos recorrido los 60 km que separan dos ciudades en 35 minutos. b) El helado de chocolate tiene 250 g de nata por cada 100 g de chocolate en polvo.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se proporciona una tabla de valores para magnitudes distintas y se pide comprobar si son proporcionales o no. Para cada pareja de valores se debe calcular la razón de proporcionalidad y ver si es la misma. Equivaldría a mirar si todas las parejas de puntos forman parte de la misma recta.

Ejemplo: Tema "*Proporcionalidad. Porcentajes*". Página 121.

6. El precio del agua Fuente del Pino depende del envase:

Capacidad envase	Precio
250 cL	0,22 €
500 cL	0,30 €
1 L	0,50 €
5 L	1,50 €

¿Son proporcionales las magnitudes capacidad y precio?

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se pide calcular la imagen para una serie de puntos según una función lineal, lo que corresponde a sacar la coordenada y para cada coordenada x de los puntos de una recta.

Ejemplo: Tema "*Funciones*". Página 141.

4. Copia y completa en tu cuaderno la tabla de valores correspondiente a la función $f(x) = x - 2$:

x	-10	-3	0	1	2	7	9	20
$f(x)$	•	•	•	•	•	•	•	•

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Consiste en representar en el plano cartesiano una serie de puntos, lo que es útil a la hora de dibujar una recta.

Ejemplo: Tema "*Funciones*". Página 141.

5. Representa estos puntos en el plano.

$A = (3, 5)$ $B = (6, -2)$ $C = (-2, 4)$

$D = (5, -7)$ $E = (4, -3)$ $F = (0, 6)$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: De manera indirecta, se pide representar rectas partiendo de una tabla de valores, aunque se estudian como funciones cualesquiera.

Ejemplo: Tema "*Funciones*". Página 143.

9. Escribe una tabla de valores para cada función y represéntalas gráficamente.

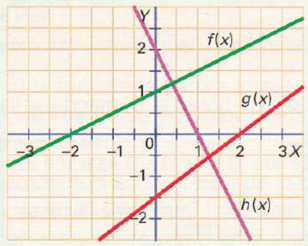
a) $f(x) = 0{,}5x$ b) $h(x) = 2x - 5$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Consiste en hallar las coordenadas de los puntos de corte con los ejes, tanto de manera gráfica como a partir de la función. Es un primer paso hacia la introducción de la ordenada en el origen.

Ejemplo: Tema "*Funciones*". Página 145.

14. Halla las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de estas gráficas:



16. Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = -3x + 6$

c) $f(x) = 2x$ d) $f(x) = 2x - 3$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Análisis de la pendiente de una recta para indicar su crecimiento o decrecimiento. De manera gráfica y a partir de la función.

Ejemplo: Tema *"Funciones"*. Página 147.

20. a) Indica en qué tramos la gráfica es creciente y en cuáles es decreciente.

21. Indica si las funciones siguientes son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = -3x + 4$ b) $f(x) = x + 4$

c) $f(x) = 4x - 1$ d) $f(x) = -5x + 3$

e) $f(x) = 2x$ f) $f(x) = -5x - 1$

Actividad: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: A partir de una descripción textual de una situación, se pide obtener la fórmula de la función que la representa, tanto para funciones lineales como para funciones afines. En el caso de la función lineal, la pendiente se calcula como la razón de proporcionalidad. Además, también piden obtener información de puntos de la recta.

Ejemplo: Tema *"Funciones"*. Página 149 (proporcionalidad directa) y 151 (afín).

25. Escribe en cada caso la fórmula de la función:

a) El precio de los tomates es de 3,20 € el kg. Escribe la fórmula de la función que calcula el precio que tenemos que pagar a partir del peso.

b) El precio de unos caramelos es de 0,20 € cada uno. Halla la fórmula de la función que da el precio que tenemos que pagar a partir de la cantidad comprada.

30. El sueldo de Mireia depende del número de horas extra que trabaja. Cobra 1.250 € más 24 € por cada hora extra.

a) Escribe la fórmula de la función que calcula el sueldo a partir del número de horas extra.

b) ¿Cuánto cobrará un mes si ha trabajado 10 horas extra? ¿Y si ha trabajado 20?

c) ¿Cuántas horas extra ha trabajado un mes si ha cobrado 1.634 €?

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

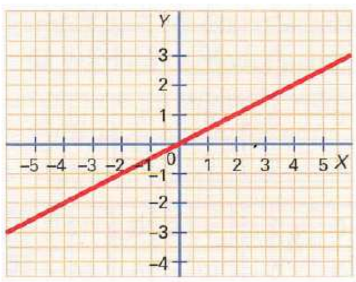
Descripción: A partir de una representación gráfica de una recta, se pide escribir la función cuya gráfica corresponda con la dada.

Ejemplo: Tema *"Funciones"*. Página 157.

54. **Gráfica y puntos**

a) Determina los valores $f(-2)$, $f(1)$ y $f(4)$.

b) Escribe la fórmula de la función.



3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO [5]

Las unidades didácticas más relevantes que se tienen en cuenta de este libro de texto son las correspondientes a *"Sistemas de ecuaciones"*, por el método de resolución gráfica, que consiste en entender que cada ecuación es la expresión de una recta y la solución del sistema correspondería con el punto de corte entre ambas rectas, y a *"Funciones lineales y afines"*, que tienen su propio tema y hay una sección dedicada directamente a la ecuación de la recta, donde se ve únicamente la explícita, ya que es la más parecida a la forma de expresar la función vista anteriormente.

Tabla 14. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Se da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y se pide resolverlo de manera gráfica, por lo que se deben dibujar las rectas y estudiar el punto de corte. Para la resolución de este ejercicio se recomienda el empleo de las TICs.
Ejemplo: Tema *"Sistemas de ecuaciones"*. Página 83.

21. Resuelve por el método gráfico:
TIC

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: A partir de una tabla de valores de distintos puntos de una recta, se pide calcular la fórmula de la función.
Ejemplo: Tema *"Funciones lineales y afines"*. Página 241.

2. Halla la fórmula de la función lineal que tiene esta tabla de valores:

x	–5	–2,5	–1,25	0	1,25	2,5	5
$f(x)$	–17	–8,5	–4,25	0	4,25	8,5	17

Actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación
Descripción: Se dan una serie de funciones y se pregunta si corresponden a funciones lineales o no y, en caso afirmativo, indicar el valor de la constante de proporcionalidad, que se indica como m (la pendiente).
Ejemplo: Tema *"Funciones lineales y afines"*. Página 241.

5. Señala cuáles de estas funciones son lineales. Si lo son, indica el valor de la constante de proporcionalidad *m*:

a) $f(x) = \frac{x}{7}$ b) $f(x) = \frac{7}{x}$ c) $f(x) = \frac{7}{3}x$

d) $f(x) = 2x$ e) $f(x) = 2 + x$ f) $f(x) = \sqrt{x}$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Se pide dibujar y calcular la expresión de la función que cumpla con ciertas características: que pase por el origen de coordenadas y por otro punto o con una pendiente determinada.
Ejemplo: Tema *"Funciones lineales y afines"*. Página 243.

10. Escribe la fórmula de la función lineal de pendiente 5 y dibuja su gráfica. Haz lo mismo con la función lineal de pendiente –2.

12. Dibuja la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (2, –6) y escribe la fórmula de la función lineal que tiene esta gráfica.

Actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación
Descripción: Se dan una serie de funciones y se pregunta si corresponden a funciones afines o no y, en caso afirmativo, se pide indicar el valor de la pendiente (m) y de la ordenada en el origen (n).
Ejemplo: Tema "*Funciones lineales y afines*". Página 245.

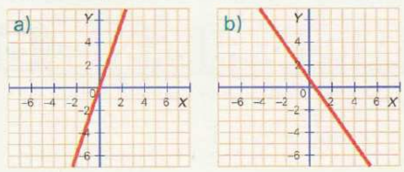
16. Señala si estas funciones son afines y, si lo son, indica el valor de *m* y *n*.
a) $f(x) = 3x + 5$ b) $f(x) = 3x$
c) $f(x) = -9 + 4x$ d) $f(x) = -10 - 2x$

Actividad: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: A partir de una situación contextualizada de la vida real, se pide escribir la expresión de la función afín.
Ejemplo: Tema "*Funciones lineales y afines*". Página 245.

18. Escribe la fórmula de las siguientes funciones afines.
a) El peso de un camión de 3.830 kg cargado de sacos de 25 kg en función del número de sacos que transporta.
b) El beneficio de una compañía de teatro en función del número total de espectadores de una obra, sabiendo que ha invertido 22.500 € y que vende las entradas a 16,25 €.

Actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación
Descripción: Dada una representación gráfica de una recta, se pide la pendiente.
Ejemplo: Tema "*Funciones lineales y afines*". Página 247.

26. Indica la pendiente de estas funciones.



Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Calcular el punto de corte con los ejes para distintas rectas.
Ejemplo: Tema "*Funciones lineales y afines*". Página 251.

36. Indica las coordenadas del punto de corte con el eje de abscisas de estas rectas.
a) $y = 3x + 2$ b) $y = 4 - 6x$
c) $y = 3 - 0{,}2x$ d) $y = 8x + 9$

37. Indica el punto de corte con el eje de ordenadas de estas rectas.
a) $y = 2x + 4$ b) $y = -3x + 5$
c) $y = -4 + 6x$ d) $y = 4 - 0{,}5x$

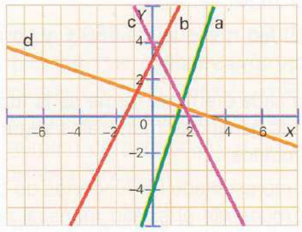
Actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación
Descripción: Dada una expresión de una fórmula, se pide indicar la pendiente y la ordenada en el origen, habiendo que operar en algún caso sobre la expresión.
Ejemplo: Tema "*Funciones lineales y afines*". Página 251.

38. Indica la pendiente y la ordenada en el origen de estas rectas.
a) $y = 2x + 6$ b) $y = 5 - 2(3 - 2x)$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Cálculo de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
Ejemplo: Tema "*Funciones lineales y afines*". Página 251.

40. Calcula en cada caso la ecuación de las rectas que pasan por los puntos dados.
a) (2, −3) y (4, 1) b) (3, −2) y (−1, 10)
c) (2, 6) y (4, 12) d) (1, −5) y (−2, 2,5)

Actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación
Descripción: Dada una representación gráfica de un serie de rectas, se pide relacionarlas con las funciones ya escritas.
Ejemplo: Tema *“Funciones lineales y afines”*. Página 253.


54. Fórmulas y gráficas
TIC
Relaciona cada gráfica con su función.

A. $f(x) = 2x + 3$ B. $g(x) = 3x - 4$
C. $h(x) = -2x + 4$ D. $i(x) = -\frac{x}{3} + 1$

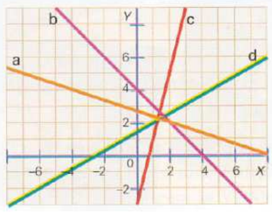
Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Dada la ecuación de una recta, se pide obtener la recta paralela que pasa por un punto determinado.
Ejemplo: Tema *“Funciones lineales y afines”*. Página 253.

57. Gráficas paralelas

a) Escribe la fórmula de la función afín paralela a $f(x) = 6x + 2$ que pasa por el punto $(0, -9)$.

b) Escribe la fórmula de la función afín paralela a $f(x) = -4x + 5$ que pasa por el punto $(3, 6)$.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: A partir de una representación gráfica de una serie de rectas, se pide escribir la expresión.
Ejemplo: Tema *“Funciones lineales y afines”*. Página 253.


60. Fórmula a partir de la gráfica
Escribe la fórmula que corresponde a cada gráfica.

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO [6]

La unidad didáctica más relevante que se tiene en cuenta de este libro de texto es la de *“Geometría Analítica”*, que se analiza en mayor profundidad en el Capítulo 5 y que se adjunta en el Anexo A, pues es la que se ha utilizado durante la realización del Practicum II para impartir las clases.

En este tema aparecen vectores, operaciones con vectores, ecuaciones de las rectas y posiciones relativas entre dos de ellas. Es decir, los vectores se utilizan para introducir nuevas ecuaciones de la recta, ya que hasta ahora solo se había visto la ecuación explícita, que es la más parecida a una expresión funcional.

Tabla 15. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: A partir de un punto y un vector se pide calcular otro punto. Esto es muy parecido a lo que se hace con un punto y un vector director para el cálculo de la ecuación vectorial de la recta.

Ejemplo: Tema "*Geometría Analítica*". Página 137.

2. Las coordenadas del vector libre $\vec{u}$ son $(-5, 4)$, y las del origen A de uno de sus representantes, $(4, -6)$. Calcula las coordenadas del extremo B de ese representante.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (4, -6) + (-5, 4) = (-1, -2)$

Por tanto, las coordenadas de B son $(-1, -2)$.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se estudia qué condiciones tienen que cumplir dos vectores libres para que sean perpendiculares. Es un conocimiento previo necesario para estudiar la perpendicularidad entre dos rectas.

Ejemplo: Tema "*Geometría Analítica*". Página 141.

16. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (-2, 2m)$ y $\vec{v} = (m-1, 3)$ sean perpendiculares.

Para que sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2m + 2 + 6m = 0 \Rightarrow 4m + 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Dada una ecuación de la recta en cualquiera de sus seis expresiones, se pide comprobar si un punto determinado pertenece o no a la recta.

Ejemplo: Tema "*Geometría Analítica*". Página 143.

21. Indica si $A(0, -1)$ y $B(6, -1)$ pertenecen o no a las rectas.

a) $r: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 - t \end{cases}$ b) $s: 2x - 3y = 15$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Dada una ecuación de la recta en cualquiera de sus seis expresiones, se pide obtener uno o varios puntos que pertenezcan a la misma, un vector director y un vector normal.

Ejemplo: Tema "*Geometría Analítica*". Página 143.

22. Halla un punto, un vector director y un vector normal de cada una de las siguientes rectas.

a) $4x - 3y - 1 = 0$ b) $y = x$ c) $(x, y) = (-3, 2) + t(-1, 4)$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se pide la ecuación de la recta (en una expresión concreta, en una cualquiera o en todas ellas) que cumple ciertas condiciones: que pasa por dos puntos, que pasa por un punto y con un vector director conocido o que pasa por un punto y cuya pendiente es conocida. También se puede indicar de manera concreta que obtengan el valor de la pendiente de la recta (si no es dato inicial) y la ordenada en el origen. Es interesante señalar que es el tipo de ejercicio más repetido dentro de este apartado ya que posibilita múltiples variaciones según los datos de partida y la ecuación pedida.

Ejemplo: Tema "*Geometría Analítica*". Página 143.

27. Calcula, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta en los siguientes casos.

a) Pasa por el punto $A(5, -2)$ y lleva la dirección de $\vec{u} = (1, -3)$.

b) Pasa por el punto $A(-5, 4)$ y tiene pendiente $m = -2$.

c) Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, -2)$.

Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de cada una.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Se pide estudiar la posición relativa entre dos rectas. Esta pregunta puede incluir algún parámetro en una o en las dos ecuaciones de la recta, de manera que se tenga que estudiar la posición relativa en función del valor correspondiente de los parámetros. Además, otra variación es añadir la pregunta de que obtengan el punto de corte en caso de que las rectas sean secantes.
Ejemplo: Tema *"Geometría Analítica"*. Página 145.

28. Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $r: 2x + y - 5 = 0$ y $s: 4x + 3y = 11$

b) $r: -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4} = 0$ y $s: 2x - 3y - 5 = 0$

30. Calcula el valor de m para que las rectas $r: 5x + my + 1 = 0$ y $s: -x - y + 3 = 0$ sean paralelas. ¿Hay algún valor de m que las haga coincidentes? ¿Y secantes?

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Hallar la ecuación de la recta que sea paralela o perpendicular a una dada y que pase por un punto concreto. En los ejemplos mostrados no se pide ninguna expresión concreta, por lo que cualquiera de ellas sería válida. Sin embargo, hay ejercicios en los que se pide una en particular.
Ejemplo: Tema *"Geometría Analítica"*. Página 145.

31. Halla la ecuación de la recta paralela a $r: 3x - 4y = 12$ y que pasa por el punto $P(5, -5)$.

32. Halla la ecuación de la recta perpendicular a $r: -2x - 4y = 5$ y que pasa por el origen de coordenadas.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Se pide comprobar si dos rectas dadas son perpendiculares o no.
Ejemplo: Tema *"Geometría Analítica"*. Página 145.

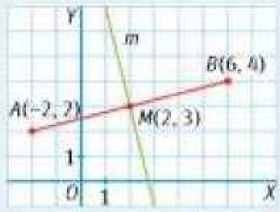
35. Comprueba si las rectas r y s son perpendiculares.

a) $r: \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y = -6$ y $s: \frac{5}{6}x - \frac{3}{5}y = -8$

b) $r: \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 0$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - \frac{9}{8}t \end{cases}$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Se pide calcular la expresión de rectas características, como puede ser la mediatriz de un segmento o las medianas de un triángulo. Además, también se pide calcular las coordenadas de un punto interesante, como puede ser el baricentro de un triángulo, mediante la intersección de ciertas rectas.
Ejemplo: Tema *"Geometría Analítica"*. Página 147.

3. Calcula la mediatriz del segmento de extremos $A(-2, 2)$ y $B(6, 4)$.



4. Calcula las ecuaciones de las medianas y el baricentro del triángulo de vértices $A(1, 3)$, $B(3, -1)$ y $C(-3, -2)$.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: A partir de una expresión de la recta, obtener las restantes cinco expresiones. El objetivo es saber pasar de una a otra con agilidad.
Ejemplo: Tema *"Geometría Analítica"*. Página 149.

67. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de las rectas:

a) $r: 3x - 2y = -10$ c) $r: y = -2x + 3$

b) $r: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+1}{2}$ d) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$

Actividad: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Consiste en realizar un estudio de un triángulo partiendo de conocer las ecuaciones de las rectas que forman los lados del triángulo. Es parecido a los ejercicios puestos hasta ahora, pero así se añade un grado de contextualización.
Ejemplo: Tema *"Geometría Analítica"*. Página 150.

82. Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas $3x - y - 6 = 0$, $3x + y - 18 = 0$ e $y = 0$.

a) Halla las coordenadas de los vértices.
b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.
c) Halla las ecuaciones de las medianas.
d) Halla el baricentro del triángulo.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Cálculo de un punto simétrico a otro dado, respecto a una recta.
Ejemplo: Tema *"Geometría Analítica"*. Página 150.

88. Calcula el punto simétrico de:

a) $A(3, -4)$ respecto de la recta $r: 2x + y = 3$

b) $A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ respecto de la recta $r: \dfrac{1}{2}x + y = 0$

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato [7]

La unidad didáctica más relevante que se tiene en cuenta de este libro de texto es la de *"Geometría"*, que es muy parecida a la vista en 4º ESO, ya que trata de vectores, operaciones con vectores, rectas en el plano y posiciones relativas de las mismas, aunque sí que se ven ciertos aspectos con mayor profundidad y, además, se añade el estudio de distancias en el plano. Por tanto, supone una buena continuación y complementación de lo visto el curso anterior y es la razón de que los primeros ejercicios se parezcan tanto a los anteriormente descritos.

Tabla 16. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Determinar puntos que pertenezcan a rectas expresadas de distintas maneras. También se pide obtener un vector director de las mismas.
Ejemplo: Tema "*Geometría*". Página 56.

9 Determina tres puntos y un vector director de cada una de las siguientes rectas:

a) $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ *b)* $3x - 2y + 7 = 0$ *c)* $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-5}$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Se pide la ecuación de la recta (en una expresión concreta, en una cualquiera o en todas ellas) que cumple ciertas condiciones: que pasa por dos puntos, que pasa por un punto y con un vector director conocido o que pasa por un punto y cuya pendiente es conocida o que forma un ángulo determinado con el eje de las abscisas o con otra recta cualquiera (aumenta la dificultad con respecto a 4º ESO). Es interesante señalar que es el tipo de ejercicio más repetido dentro de este apartado ya que posibilita múltiples variaciones según los datos de partida y la ecuación pedida.
Ejemplo: Tema "*Geometría*". Página 56.

10 Escribe, en forma general y paramétrica, la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1, 3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (-3, 4)$.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Después de pedir que se calcule la ecuación de una recta con ciertas características, se pide obtener el ángulo que forma la recta con el eje de abscisas.
Ejemplo: Tema "*Geometría*". Página 58.

14 Escribe, en forma explícita, la ecuación de la recta que corta el eje de abscisas en el punto $x = -2$, y cuyo vector director es $\vec{v} = \left(1, \sqrt{3}\right)$. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas?

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Hallar la ecuación de la recta que sea paralela o perpendicular a una dada y que pase por un punto concreto. Además, se puede pedir una expresión concreta.
Ejemplo: Tema "*Geometría*". Página 59.

19 Determina la ecuación punto-pendiente de una recta paralela a la de ecuación $(x, y) = (2, 5) + (-2/3, 1)\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ que pase por el punto $P(1, -2)$.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Se pide determinar la posición relativa de varios pares de rectas, siguiendo varios métodos. Además, se pide el punto de intersección en el caso de que las rectas sean secantes.
Ejemplo: Tema "*Geometría*". Página 61.

20 Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas, estudiando la proporcionalidad de los vectores directores y la de los coeficientes de la recta en forma general, antes de iniciar la resolución del sistema. En los casos en que sean secantes, determina el punto de intersección:

a) $r: 3x + 2y - 1 = 0 \quad s: 5x - y + 7 = 0$
b) $r: 2x - 3y + 7 = 0 \quad s: -4x + 6y = 0$
c) $r: 8x - 2y + 2 = 0 \quad s: -4x + y - 1 = 0$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Cálculo del ángulo que forman dos rectas secantes. Además, previamente es necesario calcular las ecuaciones de las rectas con cierta información.
Ejemplo: Tema *"Geometría"*. Página 61.

21 Dados los puntos $A(0, -3)$, $B(1, 5)$, $C(-1, 3)$ y $D(1, 0)$, averigua los ángulos que determinan las rectas cuyos vectores directores son:
a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ *b)* $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: A partir de unas rectas con parámetros, se pide el cálculo de estos parámetros para que esas rectas cumplan ciertas características como pasar por un punto o ser perpendiculares entre sí. Es una complejidad mayor que los ejercicios de 4º ESO.
Ejemplo: Tema *"Geometría"*. Página 61.

23 Dadas las rectas $r: ax - 2y + 7 = 0$ y $s: \dfrac{x+1}{b} = \dfrac{y}{2}$, halla a y b sabiendo que las rectas son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(-1, 2)$.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Calcular la distancia entre una recta y un punto, cuando ese punto pueden darlo directamente como dato o, por ejemplo, ser la intersección entre otras dos rectas.
Ejemplo: Tema *"Geometría"*. Página 63.

26 Calcula la distancia de la recta $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ al punto de intersección de las rectas $s: 2x + 3y - 1 = 0$ y $t: x + y + 2 = 0$.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Calcular la distancia entre dos rectas que sean paralelas.
Ejemplo: Tema *"Geometría"*. Página 63.

29 Calcula la distancia entre la recta $r: 3x - 4y + 6 = 0$ y una paralela a ella que dista 3 unidades del origen de coordenadas (dos soluciones).

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Consiste en obtener las coordenadas del punto simétrico a otro punto cualquiera, respecto a una determinada recta. También pueden preguntar por la recta que sea simétrica respecto a una determinada recta.
Ejemplo: Tema *"Geometría"*. Páginas 68 y 69.

32 Halla las coordenadas del punto simétrico al punto $P(2, 2)$ respecto de la recta $x - 2y - 5 = 0$.

44 Calcula la ecuación de la recta simétrica de $r: x + y - 1 = 0$ respecto de la recta $s: x - 2y + 3 = 0$.

Actividad: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Consiste en utilizar simetrías para obtener los vértices de una figura geométrica (triángulos y cuadriláteros), para luego pedir calcular áreas o perímetros.
Ejemplo: Tema *"Geometría"*. Página 69.

43 Calcula el perímetro del cuadrilátero $ABCD$ si $A = (3, 4)$; B es el punto simétrico de A respecto de la bisectriz del primer cuadrante; C, el simétrico de B respecto del eje de ordenadas, y D, el simétrico de C respecto del eje de abscisas.

3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachillerato [8]

Las unidades didácticas más relevantes que se tienen en cuenta de este libro de texto son dos, que se llaman *"Geometría en el espacio (I)"* y *"Geometría en el espacio (II)"*. El hecho de que sean dos las unidades dedicadas a vectores, rectas, posiciones relativas y distancias, deja claro que el peso en 2º de Bachillerato es muy grande, ya que es prácticamente en este curso cuando se estudia toda la Geometría en el espacio. Además, el paso de geometría en el plano al espacio, hace que entre en juego el plano, también para las distintas posiciones relativas y para las distancias.

Tabla 17. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachillerato

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Consiste en calcular la ecuación de la recta (en una de sus formas concretamente o en cualquiera de ellas) partiendo de cierta información inicial: paso por dos puntos, paso por un punto y según un vector director, perpendicular a un plano y que pase por un punto concreto, paralela a otra recta o plano y que pase por un punto…

Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (I)"*. Páginas 290 y 293.

13 Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(7, -5, 2)$ y que tiene la dirección del vector $\vec{k}$.

19 Calcula la ecuación vectorial de una recta que pasa por el punto $P(3, -2, -1)$ y es perpendicular al plano $x - 3y + 2z - 10 = 0$.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Consiste en hallar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos, o que contiene a una recta y pasa por un punto concreto, o que pasa por un punto y cuya dirección viene determinada por dos vectores, o que contiene a dos rectas…

Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (I)"*. Página 293.

18 Determina la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

Actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación

Descripción: Determinar si una serie de puntos del espacio pertenecen o no a una recta, utilizando para ello alguna de las ecuaciones estudiadas.

Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (I)"*. Página 296.

28 Dada la recta de ecuación: $(x, y, z) = (-3, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2)$, determina si los puntos $A(-2, 1, 3)$, $B(-1, 0, 5)$, $C(3, 1, 3)$ y $D(-5, 4, -3)$ pertenecen a ella.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se pregunta por el punto de corte con los planos coordenados para una recta que pasa por dos puntos, aunque podría haberse dado directamente la ecuación.

Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (I)"*. Página 296.

32 Dados los puntos $A(2, 6, -3)$ y $B(3, 3, -2)$, determina los puntos en que la recta que pasa por A y B corta a los planos coordenados.

Actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación

Descripción: Analizando una serie de ecuaciones paramétricas, ver si representan a un punto, una recta, un plano o todo el espacio tridimensional.

Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (I)"*. Página 297.

38 Di qué representa cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 3\mu \\ y = 2 + 2\lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda + \mu \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \delta \end{cases}$

Actividad: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación
Descripción: Se pide completar una tabla a modo de resumen de la teoría vista en las páginas anteriores, para ver cómo puede conocerse la posición relativa de dos planos.
Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (II)"*. Página 304.

1 Completa la tabla siguiente:

rango (*M*)	rango (*M**)	Solución del sistema	Posición de los planos
2			Secantes
	2	Incompatible	
1	1		

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Se presentan dos ecuaciones de planos con parámetros desconocidos y se pide determinar el valor de los mismos para que los planos cumplan ciertas condiciones como, por ejemplo, que ambos sean paralelos.
Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (II)"*. Página 304.

2 Determina los valores de m y n para que el plano $-9x + my - 12z - 10 = 0$ y el $3x - y + nz - m = 0$ sean paralelos.

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Determinación de la posición relativa de parejas de planos o de tres planos diferentes, pudiendo incluir la dependencia del valor de ciertos parámetros.
Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (II)"*. Página 304.

3 Determina las posiciones relativas de los siguientes planos:

a) π_1: $3x - 2y + 3z = -4$
π_2: $y = z$

b) π_1: $x + y + z = 2$
π_2: $2x + 2y + 2z + 4 = 0$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Determinación de la posición relativa de parejas de rectas (cuyas ecuaciones corresponden al espacio), pudiendo incluir la dependencia del valor de ciertos parámetros.
Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (II)"*. Página 313.

8 Dados los siguientes pares de rectas, determina su posición relativa:

a)

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 4x + 4y - 7z + 2 = 0 \end{cases}$$

b)

$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+3}{2} \qquad s: \begin{cases} x + y + 2z + 7 = 0 \\ 2x - y + z + 8 = 0 \end{cases}$$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Determinación de la posición relativa entre una recta y un plano.
Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (II)"*. Página 316.

11 Determina las posiciones relativas de las siguientes rectas y planos:

a)

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{y el plano} \quad \pi: x + 5y - 7z + 14 = 0$$

b)

$$r: \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 5x - y + z = 2 \end{cases} \quad \text{y el plano} \quad \pi: 2x - 2y = 5$$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Determinación del ángulo que forman dos planos, un plano y una recta o dos rectas.
Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (II)"*. Página 319.

14 Determina el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 3x - y + z - 5 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Actividad: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Cálculo de diferentes distancias en el espacio: entre dos puntos, de un punto a un plano, de un punto a una recta o entre rectas que se cruzan.
Ejemplo: Tema *"Geometría en el espacio (II)"*. Página 325.

18 Calcula la distancia entre la recta $r: (x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(2, 2, -1)$ y el plano:

$$\pi: \; 4x + 4y - 2z - 7 = 0$$

Capítulo 4
Resultados

En este capítulo se presenta un análisis de lo expuesto en los tres capítulos anteriores. El objetivo consiste en analizar el contenido y los criterios de evaluación del currículo relacionados con el aprendizaje de las ecuaciones de la recta en Primaria, ESO y Bachillerato, viendo la evolución de los distintos descriptores que se han utilizado, para poder compararlos con la información obtenida de los libros de texto. También se compara el proceso de enseñanza con un libro del saber, *"Elementary Geometry for Teachers"* [9], para ver otros enfoques de enseñanza para el mismo tema.

Así pues, el capítulo cuenta con dos secciones: en la primera se estudian las ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto, ya que se considera necesario ver la continuidad o saltos en los descriptores y en los libros, mientras que la segunda se centra en la coherencia entre los libros de texto y el currículo.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

En esta primera sección se hace un análisis más detallado de la continuidad de los contenidos que se consideran necesarios para el estudio de las ecuaciones de la recta. Para ello se analizan los descriptores utilizados en los Capítulos 1 y 2, para ver su evolución durante la Educación Primaria, Secundaria y el Bachillerato.

En primer lugar, se señala que la información contenida en los descriptores *"Resolución de problemas"* y *"Medios tecnológicos: representación y análisis"* procede prácticamente del Bloque 1, por lo que permanece prácticamente constante a lo largo de todos los cursos. Como excepción en el tercer ciclo de Educación Primaria se introduce el uso de la calculadora para la resolución de problemas y en 2º ESO se estudia la utilización de calculadoras gráficas o de programas informáticos adecuados para la representación gráfica y el análisis de funciones.

Por otra parte, los cuatro descriptores restantes sí muestran una evolución y saltos en los contenidos de un curso a otro. Con el fin de analizar los resultados, se resumen los contenidos mostrados en el Capítulo 1 en la Tabla 18 que aparece a continuación.

Se debe destacar que en la tabla solo se han contemplado los contenidos de la rama académica de 3º y 4º ESO y el Bachillerato de Ciencias y Tecnología. Esto se debe a que la rama de matemáticas aplicadas en la ESO y del Bachillerato de Ciencias Sociales no añade ningún contenido adicional para el estudio de las rectas, más bien al contrario, ya que algunos contenidos no son ni tan siquiera estudiados en estas opciones. Además, como la enseñanza durante el Practicum II en 4º ESO es para las matemáticas académicas, parece más relevante el análisis únicamente de esta rama.

Tabla 18. Resumen de los contenidos del currículo en las diferentes etapas

DESCRIPTORES	Proporcionalidad directa	Álgebra y operaciones	Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas	Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores
3er ciclo de Primaria	Porcentajes. Proporcionalidad. Proporcionalidad directa.	Operaciones.	Posiciones relativas.	Números. Orden numérico. Situación en el plano y en el espacio. Sistema de coordenadas cartesianas. Gráficas sencillas.
1º ESO	Razón y proporción. Magnitudes directamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.	Jerarquía de las operaciones. Iniciación al lenguaje algebraico. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.	Paralelismo y perpendicularidad. Concepto de función. Análisis y comparación de gráficas.	Números negativos. Ordenación en la recta real. Sistema de ejes coordenados: representación de puntos.
2º ESO	Razón y proporción. Magnitudes directamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.	Jerarquía de las operaciones. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos de resolución: algebraico y gráfico.	Funciones lineales. Pendiente de la recta. Pasar de representación gráfica a ecuación de la recta y viceversa.	Pasar de representación gráfica a ecuación de la recta y viceversa.
3º ESO (Académicas)	—	Jerarquía de las operaciones. Transformación de expresiones algebraicas. Operaciones elementales con polinomios.	Modelos lineales mediante: tabla, representación gráfica y expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta.	—
4º ESO (Académicas)	—	Jerarquía de operaciones. Manipulación de expresiones algebraicas. Resolución de problemas mediante ecuaciones y sistemas. Inecuaciones de primer grado. Vista gráfica.	Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.	Representación de números en la recta real. Coordenadas. Vectores.

1º Bachiller (Ciencias y Tecnología)	—	Resolución de problemas mediante ecuaciones e inecuaciones. Interpretación gráfica. Método de Gauss para sistemas de ecuaciones lineales.	Funciones reales de variable real. Polinómicas. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal. Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos.	Representación gráfica de funciones. Vectores libres en el plano. Operaciones geométricas.
2º Bachiller (Ciencias y Tecnología)	—	Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.	Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos).	Vectores en el espacio tridimensional. Operaciones.

El descriptor de *"Proporcionalidad directa"* es el más sencillo de analizar: se introduce en el tercer ciclo de Educación Primaria para hablar de porcentajes y proporcionalidad directa, y se sigue estudiando durante los dos primeros cursos de Educación Secundaria para introducir la razón y la constante de proporcionalidad. Después el contenido desaparece del currículo, porque se supone la completa asimilación por parte de los alumnos y aunque no sea un contenido explícito en el currículo, se presupone su correcta utilización en otros ámbitos. Como anotación, aunque no se haya representado en la Tabla 18, en 4º ESO para las matemáticas aplicadas vuelve a hacer aparición la proporcionalidad directa para la resolución de ejercicios.

Se puede observar cómo el descriptor de *"Álgebra y operaciones"* va evolucionando de manera gradual. Durante el tercer ciclo de Educación Primaria se trabajan las operaciones aritméticas para, en 1º ESO comenzar a estudiar la jerarquía de las operaciones y realizar una introducción al álgebra, con operaciones algebraicas sencillas. En 2º ESO se añaden los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas así como su resolución, que serán necesarios para obtener en un futuro el punto de corte entre dos rectas, por ejemplo. En cursos sucesivos se va complicando el alcance de las operaciones algebraicas así como la capacidad para manipular polinomios y la resolución de sistemas lineales. Por otra parte, en 4º ESO se introducen las inecuaciones y en 1º de Bachillerato se profundiza en su resolución trabajando también la interpretación gráfica. Finalmente, en los dos cursos de Bachillerato se trabaja el método de Gauss para la resolución de sistemas lineales, que será necesario para el estudio de posiciones relativas en el espacio entre otros.

El tercer descriptor que se analiza es el de *"Análisis de funciones: ecuaciones y posiciones relativas"*. El estudio de las posiciones relativas tiene una presencia muy homogénea en el currículo, ya que aparece todos los años excepto en 2º y 3º ESO; sin embargo, se debe resaltar que el estudio no es el mismo en todos los cursos: en los cursos más bajos se estudia de una manera más intuitiva y gráfica mientras que en los más elevados se hace de forma analítica. Además, en 2º de Bachillerato se estudian posiciones relativas en el espacio analizando planos y rectas, mientras que en 4º ESO y 1º de Bachillerato se da, exclusivamente, geometría en el plano, por lo que se ven posiciones relativas entre dos rectas.

Por otra parte, el concepto de función se introduce en 1º ESO, aunque más centrado en la comparación de gráficas, para en 2º ESO poder empezar a estudiar las funciones lineales, apareciendo por primera vez la ecuación de la recta (la explícita, que es la más parecida a la forma funcional), con la definición de la pendiente de la recta y buscando el paso de fórmula a gráfica y viceversa. En cursos sucesivos se van elevando los contenidos estudiando más ecuaciones de la recta o pasando, en 2º de Bachillerato, de la geometría en el plano al espacio. Además, en 1º de Bachillerato, cuando se introduce el concepto de derivada, se ve una relación con las ecuaciones de la recta al estudiar la interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la misma en dicho punto.

El cuarto y último descriptor que se estudia es el correspondiente a la *"Representación gráfica: sistema de coordenadas y vectores"*. El primer paso que se da durante el tercer ciclo de Educación Primaria y 1º ESO es el estudio de los distintos tipos de números, así como su ordenación en la recta real, lo que es necesario para la situación en un sistema de coordenadas. Desde el tercer ciclo de Educación Primaria se introduce el sistema de coordenadas, así como la situación de puntos en el plano y gráficas sencillas. Estos contenidos se trabajan en los cursos sucesivos complicando las situaciones de estudio, con la excepción de 3º ESO, donde no hay una mención concreta a este aspecto.

En cuanto al contenido vectorial, se introduce en 4º ESO, así como las operaciones con vectores, que se van complicando con el paso de los cursos. Estos contenidos se trabajan también durante el Bachillerato, con la diferencia de que en el segundo curso se realiza un estudio espacial y no en el plano.

Este resumen sirve para percatarse de que el estudio de las rectas se puede hacer desde varios puntos de vista. Hasta 3º ESO el estudio es más funcional y, en consecuencia, se encuentra en el bloque de Funciones de los libros de texto correspondientes. Se comienza estudiando las funciones lineales y afines, analizando la constante de proporcionalidad y viendo que ésta definiría la pendiente de la recta para, finalmente, estudiar la ecuación de la recta como tal. Sin embargo, a partir de 4º ESO el enfoque es más geométrico y se puede ver que los temas correspondientes se encuentran en el bloque de Geometría de los libros de texto. Además, como contrapunto, es interesante señalar que, según lo visto en los libros de texto, este paso hace que se ignore por completo el punto de vista funcional, como si fueran dos aspectos opuestos cuando, en realidad, son complementarios.

Es decir, se comienza viendo la recta a partir de la función lineal, analizando la pendiente como una razón de proporcionalidad, y dentro de un contexto. Sin embargo, cuando se ve la recta desde el punto de vista geométrico, solo permanece la expresión como tal y los problemas están prácticamente descontextualizados, lo que supone una pérdida con respecto al enfoque inicial ya que se ve la pendiente como un simple número perdiendo su significado dentro de un contexto.

Con estas relaciones se puede ver cómo el estudio de las ecuaciones de la recta supone la compaginación de muchos campos dentro de las matemáticas, ya que involucra gran variedad de contenidos como pueden ser funciones, ecuaciones, sistemas de ecuaciones, representaciones gráficas...

Además se puede comparar con lo visto en el libro del saber *"Elementary Geometry for Teachers"* [9], un libro orientado a la formación del profesorado para la enseñanza según el modelo Singapur en Estados Unidos. En él se puede ver la importancia de entender la pendiente desde un punto de vista contextual, estudiando su significado concreto en cada ejercicio que se propone, y de utilizarla, desde el primer momento, para comparar las posiciones relativas entre dos rectas. Desde ese punto de vista, se realizaría en primer lugar el estudio de las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta, partiendo siempre de la definición de pendiente.

Con respecto a otro libro del saber que se considera y que se titula *"Elementary Mathematics for Teachers"* [10], muy relacionado con el anterior, se destaca un capítulo de especial relevancia: *"Word Problems"*. En éste se habla de la importancia de los *problemas de letra*, aquellos que están contextualizados y que son los que van a surgir en la vida cotidiana, donde se plantee una situación real que el alumnado deba ser capaz de resolver, aplicando para ello las técnicas matemáticas aprendidas. Sin embargo, en el Capítulo 3 del presente trabajo, se puede ver que en los libros de texto escasean los problemas contextualizados y abundan los ejercicios cuya resolución es totalmente mecánica y poco novedosa.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Los libros de texto se redactan siguiendo la legislación vigente, lo que explica que haya una coherencia muy buena entre ambos. Se ha podido ver cómo los libros de texto tratan todos los contenidos vistos en el currículo en su año correspondiente de manera muy satisfactoria.

Además, al utilizar libros de la misma editorial en cursos sucesivos, se tiene la ventaja de utilizar nomenclaturas idénticas o formatos iguales durante la unidad didáctica que pueden ayudar al alumno en el proceso de aprendizaje. Es decir, ver similitudes de un curso al siguiente o utilizar la misma manera de explicar los conceptos se puede considerar un buen punto de partida para que el alumno pueda repasar conocimientos previos del curso anterior, que le resultan familiares, antes de profundizar en los mismos o de añadir nuevos contenidos. Como ejemplo de esto se puede ver cómo los primeros ejercicios de la unidad didáctica, que sirven de repaso de lo visto anteriormente, son prácticamente iguales a los del año anterior.

En cuanto al descriptor *"Medios tecnológicos: representación y análisis"* que detalla lo relacionado con el uso de las nuevas tecnologías para el estudio de las matemáticas, especialmente hoy en día que la tecnología y el aprendizaje empiezan a estar estrechamente relacionadas, se ve cubierto completamente en los libros de texto. Hay gran variedad de ejercicios que recomiendan el uso de las TICs para su realización y hay varias secciones en las distintas unidades didácticas que enseñan la utilización de GeoGebra, software informático muy interesante para el estudio de las matemáticas en general y de las funciones y de la geometría en particular.

Como único contrapunto se podría analizar la dificultad de mostrar el descriptor *“Resolución de problemas”*. Sí es cierto que normalmente hay un ejercicio resuelto por cada problema tipo propuesto, donde se intenta explicar el mejor procedimiento para su resolución. Sin embargo, no hay una sección específica donde se explique qué mecanismos seguir para la resolución general de problemas, entendiéndolo como procedimientos mentales o estrategias que se puedan aplicar en cualquier contexto.

Finalmente, se puede mencionar que en los libros de 4º de la ESO y los dos bachilleratos de Ciencias y Tecnologías, aparecen muchas expresiones para la recta, haciendo énfasis en la importancia de memorizar los nombres y la forma de las ecuaciones, cuando lo más importante es que el alumnado sea capaz de utilizar aquella que le permita resolver el problema que se le presente de la manera más sencilla posible a partir de los datos disponibles.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de las ecuaciones de la recta en 4º ESO

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se propone un proceso de estudio sobre las ecuaciones de la recta, que se ha puesto en marcha en un aula de 4º ESO en el marco del Practicum II del Máster.

La propuesta se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se hace un análisis del contenido matemático de la unidad didáctica tal y como se muestra en el libro de texto de referencia. En el segundo se estudian las dificultades y los errores previsibles que se pueden dar durante el aprendizaje del contenido. En el tercer capítulo se propone un proceso de estudio de la unidad didáctica teniendo en cuenta tiempos y actividades.

Finalmente, en el cuarto capítulo se recogen los resultados obtenidos mediante la experimentación, gracias a un cuestionario pasado a los alumnos. Se incluye, de igual manera, una previsión de los acontecimientos y una discusión de los resultados.

Capítulo 5
Las ecuaciones de la recta en el libro de texto de referencia

En este capítulo se presenta un análisis de la unidad didáctica del libro de referencia [6] utilizada durante la enseñanza del tema de ecuaciones de la recta que se estudia en 4º ESO (rama académica), en el Practicum II que, para mayor información, se puede encontrar en el Anexo A, y que corresponde con el *"Tema 7. Geometría analítica*". Se considera necesario un estudio de ese tipo a la hora de que el docente elija la idoneidad o no de un material para impartir la enseñanza a los alumnos sobre el tema que se deba tratar.

Para la realización de este capítulo también se ha utilizado como referencia el artículo *"Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y resta"* (2006, Godino, Font, Wilhelmi) [11], donde se muestra un procedimiento adecuado para el examen de una unidad didáctica de un libro de texto.

El capítulo cuenta con dos secciones; en la primera de ellas se hace un estudio sobre las matemáticas que se estudian en la unidad didáctica, mientras que en la segunda el análisis es más global.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

En la primera sección de este capítulo se va a realizar un estudio de los objetos matemáticos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema correspondiente a las ecuaciones de la recta en 4º ESO. Para ello, se va a dividir el análisis en una serie de subapartados, siguiendo una configuración epistémica-empírica, que se describen a continuación: lenguaje utilizado (verbal, gráfico, simbólico), situaciones presentadas, conceptos previos y emergentes, procedimientos propuestos, definiciones y proposiciones matemáticas y argumentos.

La información queda recogida en las tablas 19 a 24, pero es importante tener en cuenta que no son apartados excluyentes, sino que se relacionan entre sí como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Configuración epistémica de las ecuaciones de la recta [11]

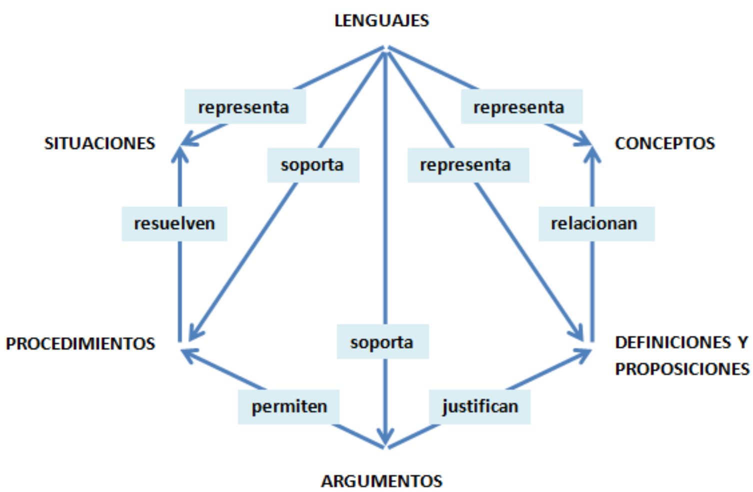


Tabla 19. Análisis sobre el lenguaje utilizado en la unidad didáctica

LENGUAJE UTILIZADO
Verbal
o <u>Vectores</u>: vector fijo, origen, extremo, módulo, dirección, sentido, coordenadas, distancia, vector unitario, vector de posición, vectores equipolentes, vector libre, plano… o <u>Operaciones con vectores</u>: suma de dos vectores libres, suma gráfica, paralelogramo, producto de un número por un vector, combinación lineal, dependencia o independencia lineal, punto medio de un segmento, punto simétrico, producto escalar, sistema de referencia ortonormal, propiedad conmutativa y distributiva respecto de la suma, ángulo entre dos vectores, perpendicularidad… o <u>Rectas</u>: ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general, explícita, punto-pendiente, vector normal o vector director de una recta, pendiente, ordenada en el origen, recta vertical y horizontal, posición relativa de dos rectas en el plano, secantes, paralelas, coincidentes, rectas paralelas, rectas perpendiculares… o <u>Triángulos</u>: vértices, lados, equilátero, isósceles, escalenos, acutángulo, rectángulo, obtusángulo, mediatriz, medianas, baricentro…
Gráfico
o <u>Sistema de coordenadas cartesiano</u>: puntos, vectores, representaciones gráficas de las operaciones con vectores, rectas… o Posiciones relativas de dos rectas, punto de corte entre dos rectas...
Simbólico
o <u>Vectores</u>: $A(a_1, a_2)$, $\overline{AB}$, $\lvert\overline{AB}\rvert$, $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, $\bar{u}$, $\bar{u} = (u_1, u_2)$, $\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, $k\bar{u}$, $\bar{u} \cdot \bar{v}$, $cos(\bar{u}, \bar{v})$… o <u>Rectas</u>: $\overline{OX} = \overline{OA} + t\bar{u}$, $(x, y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2)$, $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = a_1 + t\,u_1 \\ y = a_2 + t\,u_2 \end{cases}$, $\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2}$, $Ax + By + C = 0$, $y = mx + n$, $y - a_2 = m(x - a_1)$, m, n, $tan\,\alpha$, $x = k$, $m \neq m'$, $Ax + By + k = 0$…

Tabla 20. Análisis sobre las situaciones presentadas en la unidad didáctica

SITUACIONES PRESENTADAS
Vectores y operaciones con vectores
o <u>Situaciones descontextualizadas</u>: representar o calcular las coordenadas de un vector dado su origen y su extremo, cálculo de su módulo, cálculo de distancias entre dos puntos, cálculo del punto extremo conociendo el origen y el vector, identificación de vectores equipolentes y libres, operaciones con vectores, identificación de dependencia o independencia lineal, cálculo de ángulos, obtención de puntos simétricos…

o <u>Situaciones contextualizadas</u>: partiendo de que los puntos son los vértices de un triángulo realizar las cálculos de situaciones descontextualizadas (longitud de los lados como distancia entre dos puntos, puntos medios para las medianas, cálculo de la medida de los ángulos internos, clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos…), estudio de la alineación o no de tres puntos (puede incluir la utilización de parámetros)… Todos ellos escenarios contextualizados referentes a cuestiones propias de la geometría, y nunca teniendo en cuenta situaciones de la física o de la vida real.
Ecuaciones de la recta
o <u>Situaciones descontextualizadas</u>: comprobar si un punto pertenece a una recta dada la ecuación de la misma, hallar puntos, vectores directores, vectores normales, pendiente y ordenada en el origen de rectas a partir de una ecuación, obtener la ecuación de la recta (de una forma determinada) que cumple determinadas condiciones (pasa por dos puntos, pasa por un punto y con pendiente conocida, pasa por un punto y con vector director conocido, pasa por un punto y el ángulo que forma con la parte positiva del eje de abscisas es conocido), pasar de un tipo de ecuación a otra, … o <u>Situaciones contextualizadas</u>: obtener las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados de un triángulo de vértices conocidos, o las ecuaciones de mediantes o mediatrices, obtención del baricentro u ortocentro del triángulo…
Posiciones relativas
o <u>Situaciones descontextualizadas</u>: estudiar la posición relativa de dos rectas y hallar, en su caso, el punto de corte, a partir de las ecuaciones, estudiar la posición relativa de dos rectas en función de uno o varios parámetros de las rectas, hallar la ecuación de la recta paralela o perpendicular a una dada y que pase por determinado punto, comprobar si dos rectas son perpendiculares…

Tabla 21. Análisis sobre los conceptos previos y emergentes en la unidad didáctica

CONCEPTOS
Previos
o <u>Proporcionalidad directa</u>: porcentajes, proporcionalidad, proporcionalidad directa, razón, constante de proporcionalidad… o <u>Álgebra y operaciones</u>: jerarquía de las operaciones, control del lenguaje algebraico y de operaciones algebraicas, resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (métodos algebraicos y gráfico)… o <u>Funciones</u>: función (fórmula algebraica, gráfica, tablas,…), función lineal, función afín, pendiente de la gráfica, ecuación de la recta (explícita, aunque sin nombrarla como tal), pendiente de la recta, ordenada en el origen, pasar de representación gráfica a ecuación y viceversa… o <u>Posiciones relativas</u>: conceptos de paralelismo y perpendicularidad. o <u>Sistema de coordenadas cartesianas</u>: utilización y representación de gráficos sencillos y puntos. Capacidad de ordenar los números reales.

o Utilización de medios tecnológicos para la representación y el análisis de funciones: conocimientos de GeoGebra. o Triángulos: elementos notables y clasificaciones según las características de lados y los ángulos.
Emergentes
o Vectores: vector fijo en el plano, módulo, dirección y sentido de un vector, vector unitario, vector de posición, vector equipolente y vector libre, distancia entre dos puntos. o Operaciones con vectores: suma de dos vectores (gráfica y analítica), producto de un número por un vector, combinación lineal de vectores, dependencia e independencia lineal, punto medio de un segmento, producto escalar y cálculo del ángulo entre dos vectores. o Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua, general, explícita y punto pendiente. o Problemas de incidencia: cálculo analítico de la posición relativa de dos rectas en el plano (secantes, paralelas o coincidentes) y obtención de la recta paralela o perpendicular a una dada.

Tabla 22. Análisis sobre los procedimientos propuestos en la unidad didáctica

PROCEDIMIENTOS PROPUESTOS
o Contextualización de enunciados descontextualizados. o Descontextualización del enunciado del problema. o Identificación de vectores equipolentes y determinación de vectores libres. o Operaciones entre vectores de manera analítica y, en su caso, comprobación gráfica de la veracidad del resultado. o Utilización de vectores y rectas para el estudio de un triángulo: medida de los lados, de los ángulos, clasificación del mismo con respecto a los dos parámetros anteriores, obtención de medianas, alturas… o Obtención de la ecuación de una recta que cumple determinadas características, teniendo en cuenta seis tipos diferentes de expresiones de la ecuación. o Extracción de información sobre una recta dada la ecuación. o Estudio de la posición relativa de un par de rectas a partir de las ecuaciones correspondientes, mediante el estudio de las pendientes y las ordenadas en el origen. o Obtención de rectas paralelas o perpendiculares a otra dada.

Tabla 23. Análisis sobre las definiciones y proposiciones matemáticas de la unidad didáctica

DEFINICIONES Y PROPOSICIONES MATEMÁTICAS
Vectores y operaciones con vectores
o Un vector fijo del plano, $\overline{AB}$, es un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en el punto B. o Los elementos de un vector fijo son: • Módulo de un vector es la distancia que separa a su origen de su extremo. Se representa por $\lvert\overline{AB}\rvert$. • Dirección de un vector es la dirección de la recta que pasa por su origen y por su extremo y la de todas sus paralelas. • Sentido de un vector es el que queda determinado al ir desde el origen al extremo. o Las coordenadas del vector de origen el punto $A(a_1, a_2)$ y de extremo el punto $B(b_1, b_2)$ son las del extremo menos las del origen. Es decir: $$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)\ .$$ o El módulo de un vector $\overline{AB}$ calculado a partir de las coordenadas de su origen y de su extremo es $\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$. o La distancia entre dos puntos cualesquiera P y Q se puede calcular como el módulo del vector que forman: $d(P, Q) = \lvert\overline{PQ}\rvert$. o Si $\lvert\overline{AB}\rvert = 1$, el vector $\overline{AB}$ es unitario. o Un vector de posición es cualquier vector fijo que tenga como origen el origen de coordenadas. Las coordenadas de un vector de posición coinciden con las coordenadas de su extremo. o Dos vectores fijos no nulos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son equipolentes cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Dos vectores equipolentes tienen las mismas coordenadas. o El conjunto formado por todos los vectores equipolentes a un vector fijo dado se denomina vector libre. Se representa por $\bar{u}$. o Para hallar las coordenadas del vector suma $\bar{u} + \bar{v}$ se suman las coordenadas de $\bar{u} = (u_1, u_2)$ con las de $\bar{v} = (v_1, v_2)$, $\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. o Para hallar las coordenadas del vector $k\bar{u}$ se multiplican las dos coordenadas de $\bar{u}$ por k: $k\bar{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$. o Dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes si tienen la misma dirección. En este caso, sus coordenadas son proporcionales: $\bar{u} = k\bar{v}$. o El vector $\bar{w}$ es combinación lineal de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ si se pueden encontrar dos números reales a y b, tales que: $\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$. Se dice que los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son linealmente dependientes.

- Las coordenadas del punto medio M de un segmento AB son combinación lineal de las coordenadas de sus extremos. Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$: $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.
- El producto escalar de dos vectores libres es el número que resulta de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman, es decir:
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos(\bar{u}, \bar{v}).$$
- El módulo de un vector también se puede definir como $|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$.
- La suma de dos vectores es otro vector. Sin embargo, el producto escalar de dos vectores es un número.
- El producto escalar de los vectores $\bar{u} = (u_1, u_2) y\ \bar{v} = (v_1, v_2)$ es:
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2.$$
- El coseno del ángulo que forman los vectores $\bar{u} = (u_1, u_2) y\ \bar{v} = (v_1, v_2)$ es:
$$\cos(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$
- Dos vectores no nulos son perpendiculares cuando su producto escalar vale cero.

Ecuaciones de la recta

- La ecuación vectorial de una recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene por vector director $\bar{u} = (u_1, u_2)$ es:
$$(x, y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2), con\ t \in \mathbb{R}.$$
- Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene por vector director $\bar{u} = (u_1, u_2)$ son $\begin{cases} x = a_1 + t\, u_1 \\ y = a_2 + t\, u_2 \end{cases}$, donde $t \in \mathbb{R}$.
- La ecuación continua de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene por vector director $\bar{u} = (u_1, u_2)$ es: $\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2}$.
- La ecuación general de la recta es de la forma: $Ax + By + C = 0$. El vector $\bar{n} = (A, B)$ se llama vector normal y es perpendicular al vector director de la recta.
- Al despejar y en la ecuación general se obtiene la ecuación explícita: $y = mx + n$; m es la pendiente de la recta y representa la tangente del ángulo α que forma la recta con la parte positiva del eje X $\left(m = \tan\alpha = \frac{u_2}{u_1}\right)$; n es la ordenada en el origen y representa el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas $x = 0$.
- La ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(a_1, a_2)$ y tiene por pendiente m es $y - a_2 = m(x - a_1)$.
- Las rectas verticales tienen pendiente infinita y no se pueden expresar con las ecuaciones habituales. Son de la forma $x = k$.

Posiciones relativas

- Sean dos rectas r y s, cuyas ecuaciones generales son $r\colon Ax + By + C = 0$ y $s\colon A'x + B'y + C' = 0$, para determinar la posición relativa entre ambas se puede utilizar el siguiente criterio:

- Son secantes si $m \neq m'$, es decir, si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$.
- Son paralelas si $m = m'$, pero $n \neq n'$, es decir, si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$.
- Son coincidentes si $m = m'$ y $n = n'$, es decir, si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

- Dada la recta de ecuación general $Ax + By + C = 0$, todas las rectas paralelas a ella tienen por ecuación: $Ax + By + k = 0$, donde k es cualquier número real.
- Dada la recta de ecuación general $Ax + By + C = 0$, todas las rectas perpendiculares a ella tienen por ecuación: $Bx - Ay + k = 0$, donde k es cualquier número real.

Tabla 24. Análisis sobre los argumentos presentados en la unidad didáctica

ARGUMENTOS
o Comprobación de las propiedades en casos particulares. o Justificación de las propiedades utilizando elementos genéricos. o Utilización del estudio vectorial para introducir la ecuación vectorial de la recta y deducir, a partir de ella, el resto de las ecuaciones de la recta. o Justificación de la posición relativa de dos rectas basándose en las pendientes y las ordenadas en el origen de ambas.

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

En esta sección se realiza el análisis global de la unidad didáctica con el fin de identificar su objetivo y la estructura de su configuración didáctica. Además, se puede observar que el formato de todas las unidades didácticas del libro de texto de referencia [6] es muy similar, lo que ayuda al estudio por parte del alumno.

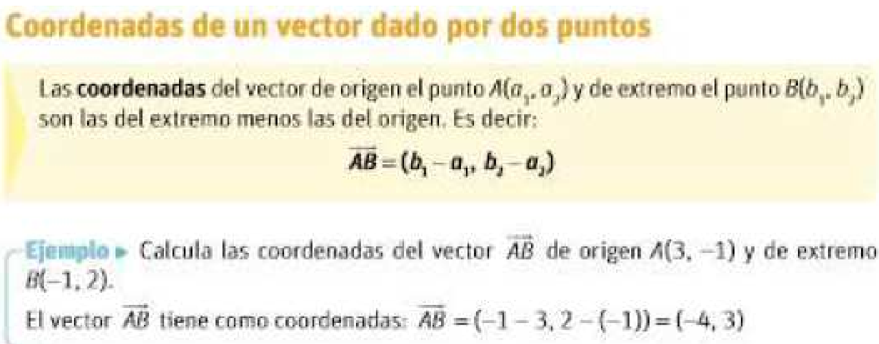
La presentación de la unidad didáctica se hace mediante el uso de una doble página, donde se enumera el capítulo correspondiente junto a su título en la parte superior izquierda, como se puede ver en la Figura 2. Además, se aprovecha el espacio para enunciar un problema contextualizado que se puede asociar al día a día y que tiene relación con el tema que se está estudiando. En este caso concreto se relacionan los vectores con el billar, poniendo al alumno en situación de estar frente a una mesa de bilar y explicando cómo utilizar los vectores a su favor.

Tras esta introducción, el capítulo tiene cinco secciones principales numeradas independientes, de manera que cada una de ellas ocupa una doble página. Los títulos de las mismas son los siguientes: (1) Vectores fijos y libres en el plano, (2) Operaciones con vectores. Combinación lineal, (3) Producto escalar de dos vectores. Aplicaciones, (4) Ecuaciones de la recta, (5) Problemas de incidencia

El esquema que siguen estas secciones que ocupan doble cara es idéntico y se explica a continuación. La teoría explicada, con las proposiciones matemáticas y junto a los ejemplos se encuentra en la parte más importante de la cara, dejando el margen libre para anotaciones que se ejemplificarán más adelante. Esta teoría ocupa la página izquierda y la mitad de la página derecha en todos los casos y suele contar con la presencia de subapartados, según el aspecto de interés que se trate, para ayudar a distinguir unos conceptos de otro con facilidad. Se puede ver la teoría o explicaciones seguidas de las proposiciones que, para que el alumno preste una mayor atención a su importancia, aparecen sombreadas en amarillo. Siempre hay un ejemplo después de una proposición para aclarar el significado de la misma, como puede verse en la Figura 3.

Figura 2. Presentación de la unidad didáctica (pp. 134-135) [6]

Figura 3. Ejemplo de proposición seguida de ejemplo en la teoría (p. 136) [6]



Coordenadas de un vector dado por dos puntos

Las **coordenadas** del vector de origen el punto $A(a_1, a_2)$ y de extremo el punto $B(b_1, b_2)$ son las del extremo menos las del origen. Es decir:

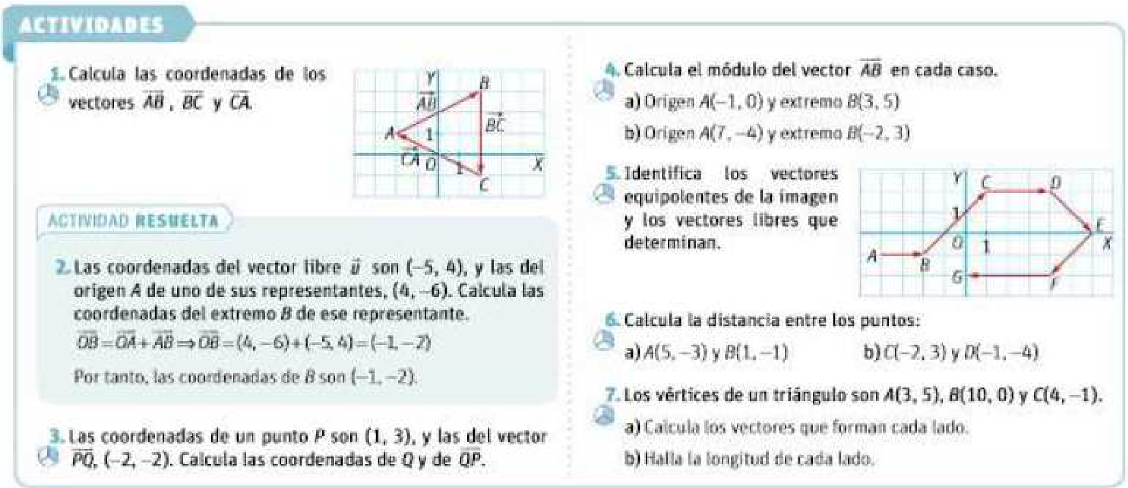
$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Ejemplo ▸ Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ de origen $A(3, -1)$ y de extremo $B(-1, 2)$.

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (-1 - 3, 2 - (-1)) = (-4, 3)$

Para finalizar la sección, en la parte inferior de la página derecha siempre aparece una zona recuadrada donde se encuentran las actividades propuestas que guardan relación con la teoría explicada en la parte inmediatamente anterior, como puede verse en la Figura 4. Suelen aparecer entre seis y ocho actividades y los ejercicios se basan en los ejemplos vistos anteriormente, aunque también es frecuente ver actividades resueltas donde se explica cómo hacer un tipo de ejercicio que se pregunta a continuación. Un ejemplo de este caso también se puede ver en la Figura 4, concretamente el ejercicio 2. Es interesante ver que estas actividades están numeradas de manera correlacionada en todas las secciones de la unidad, de manera que solo hay un ejercicio 2 en todo el tema, lo que induce a menor confusión a la hora de mandar o corregir ejercicios. Otra anotación de interés que puede hacerse con respecto a estas actividades es que su complejidad viene expresada mediante un gráfico de sectores, con tres dificultades diferenciadas mediante uno, dos o tres sectores. Normalmente la complicación máxima en este apartado es de solo dos sectores y solo hay uno o dos ejercicios de este tipo por sección, ya que la finalidad de estos ejercicios es comprender la teoría.

Figura 4. Ejemplo de actividades para la sección correspondiente (p. 137) [6]



ACTIVIDADES

1. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.

ACTIVIDAD RESUELTA

2. Las coordenadas del vector libre $\vec{u}$ son (–5, 4), y las del origen A de uno de sus representantes, (4, –6). Calcula las coordenadas del extremo B de ese representante.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (4, -6) + (-5, 4) = (-1, -2)$

Por tanto, las coordenadas de B son (–1, –2).

3. Las coordenadas de un punto P son (1, 3), y las del vector $\overrightarrow{PQ}$, (–2, –2). Calcula las coordenadas de Q y de $\overrightarrow{QP}$.

4. Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ en cada caso.
a) Origen $A(-1, 0)$ y extremo $B(3, 5)$
b) Origen $A(7, -4)$ y extremo $B(-2, 3)$

5. Identifica los vectores equipolentes de la imagen y los vectores libres que determinan.

6. Calcula la distancia entre los puntos:
a) $A(5, -3)$ y $B(1, -1)$ b) $C(-2, 3)$ y $D(-1, -4)$

7. Los vértices de un triángulo son $A(3, 5)$, $B(10, 0)$ y $C(4, -1)$.
a) Calcula los vectores que forman cada lado.
b) Halla la longitud de cada lado.

A continuación se analizan los márgenes de estas secciones, donde se pueden encontrar anotaciones de tres tipos diferentes, como se muestra en la Figura 5. La primera de ellas se denomina *"Sabías que…"* y, en ella, se contextualizan los conocimientos que se explican con situaciones reales donde pueden ser de utilidad o se mencionan matemáticos célebres por las aportaciones que han hecho al campo. La segunda consiste en enlazar a la página *"smSaviadigital.com"* para la realización de ejercicios relacionados vía informática, incluyendo la posibilidad de utilizar el programa GeoGebra. La tercera y última se denomina *"Ten en cuenta"* y es la más relacionada con la teoría que se está explicando, ya que suelen ser conclusiones e ideas que se extraen a partir de la sección del tema correspondiente.

Figura 5. Ejemplos de anotaciones en los márgenes (pp. 136 y 143) [6]

Sabías que…

Los vectores son esenciales en física y otras ciencias. Se utilizan para representar cualquier magnitud que, además de un valor, tiene dirección y sentido, como la velocidad, la aceleración o la fuerza.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y recuerda vectores fijos y libres.

smSaviadigital.com

PRACTICA Comprueba lo que has aprendido a lo largo de la unidad.

Ten en cuenta

La distancia entre dos puntos cualesquiera P y Q se puede calcular como el módulo del vector que forman.

$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$

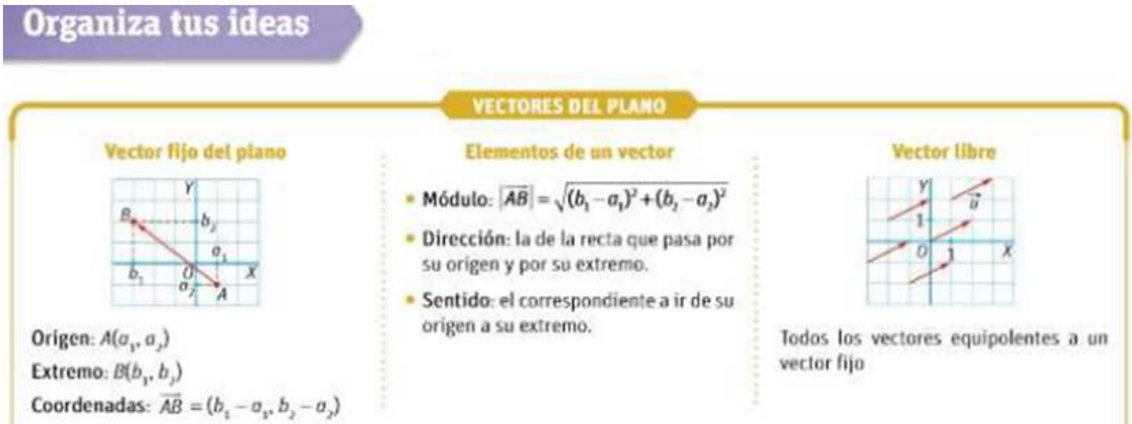
Ten en cuenta

Las rectas verticales tienen pendiente infinita y no se pueden expresar con las ecuaciones habituales.
Son de la forma $x = k$.

Hasta aquí se ha explicado el esquema que siguen las cinco secciones principales de la unidad didáctica, que aparecen numeradas y son todas ellas idénticas a excepción de los contenidos. Pero la unidad didáctica tiene otras secciones igualmente importantes y que están presentes en todos los temas del libro. Se citan a continuación y, a pesar de no estar numeradas en sí mismas, se les adjudica un número identificador para indicar la sucesión de las mismas: (6) Organiza tus ideas (p.146), (7) Actividades clave (p. 147), (8) Actividades (pp. 148-151), (9) Ponte a prueba (pp. 152 y 153). En los párrafos siguientes se realizará un breve análisis de las estructura de cada una de estas secciones.

La sección *"Organiza tus ideas"* ocupa únicamente una cara y sirve de resumen de las fórmulas o ideas claves vistas en toda la unidad didáctica. En la misma se ven cinco apartados, uno por cada una de las cinco secciones principales, tal y como se puede apreciar en la Figura 6, donde se muestra el correspondiente a *"Vectores del plano"*.

Figura 6. Ejemplo dentro de la sección *"Organiza tus ideas"* (p. 146) [6]



Viene seguida de la sección *"Actividades clave"*, donde se muestran cuatro ejercicios de una complejidad superior de los vistos hasta el momento y que también ocupa únicamente una cara. Son ejercicios resueltos, donde se explica paso a paso el procedimiento que se debe seguir para resolver problemas de ese tipo, ya que es la primera vez que se proponen.

La siguiente sección corresponde a *"Actividades"*, que tiene una extensión de cuatro caras y cuenta con un total de 64 ejercicios propuestos, alguno de ellos ya resueltos. Se presenta una división en tres grupos, quedando la primera de ellas subdividida en cinco apartados, tal y como se muestra en el siguiente esquema:

- Ejercicios para practicar: como su propio nombre indica, su finalidad es practicar lo visto en las cinco secciones de teoría y, por tanto, son muy similares a los vistos en el apartado *"Actividades"* correspondientes a cada sección y, por eso, también están divididos en grupos similares a dichas secciones. De esta manera, los ejercicios están clasificados según la teoría necesaria para poder resolverlos. Dentro de cada subapartado la complejidad va de menor a mayor, aunque nunca alcanza un nivel tres de dificultad, que corresponde con el máximo.
  - Coordenadas de vectores y equipolencia.
  - Operaciones con vectores y dependencia lineal.

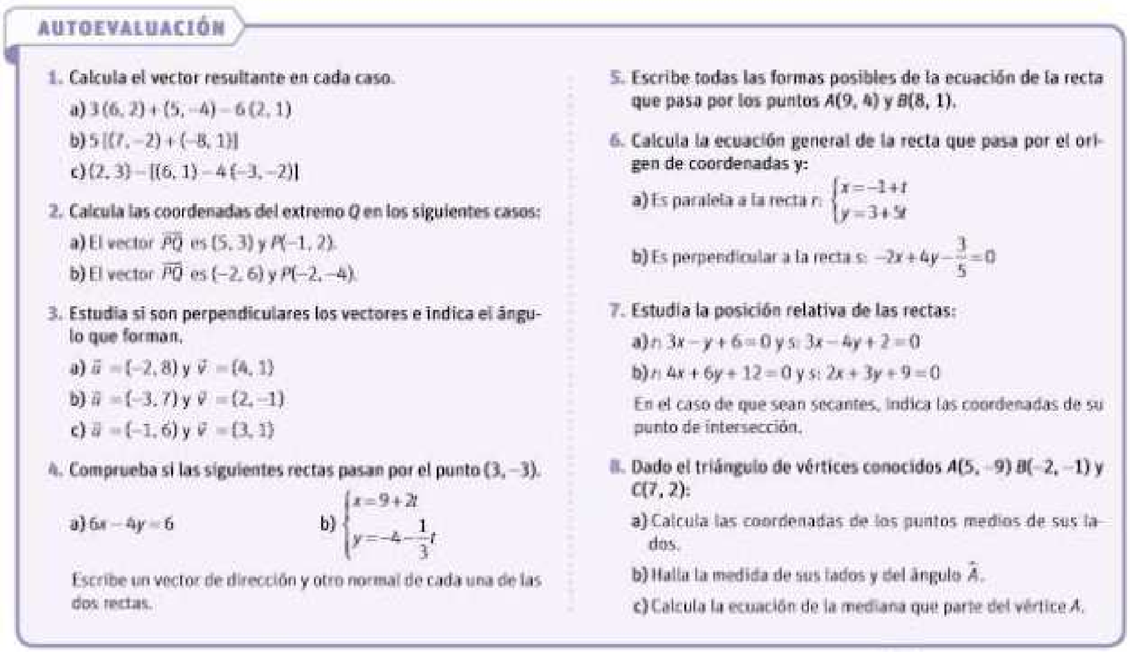
- Producto escalar. Aplicaciones.
- Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas.
- Actividades de síntesis: este subapartado es el único diferente a los anteriores ya que los ejercicios son más complicados, todos de dificultad dos o intermedia, y no se marca de manera explícita la teoría necesaria para resolverlos ya que pueden ser necesarias más de una herramienta, en contraposición con lo que ocurre en los subapartados anteriores.

o <u>Problemas para resolver</u>: como su nombre indica son problemas contextualizados con situaciones comunes. Todos ellos presentan un enunciado que hay que descontextualizar para obtener la información necesaria para la resolución de los mismos. La dificultad también es gradual y, en este caso, sí se ven problemas de dificultad máxima.

o <u>Actividades para pensar más</u>: como se puede intuir, son los problemas más complejos dentro de la unidad didáctica, todos ellos marcados con una dificultad de nivel tres (a excepción de uno de nivel dos). Además, todos ellos son problemas contextualizados.

La última sección del libro se denomina *"Ponte a prueba"* y ocupa dos caras. Empieza con un problema resuelto titulado *"Situación del punto limpio"* y es una situación contextualizada donde se deben utilizar los contenidos explicados en la unidad didáctica y se explica paso por paso el procedimiento a seguir. La siguiente situación también es contextualizada y se denomina *"Superficie de un huerto"* y hay preguntas de elección múltiple y otras de resolución numérica. Finalmente, se puede ver una autoevaluación de ocho preguntas cuyas respuestas se encuentran al final del libro y que se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Autoevaluación de la unidad didáctica (p. 153) [6]



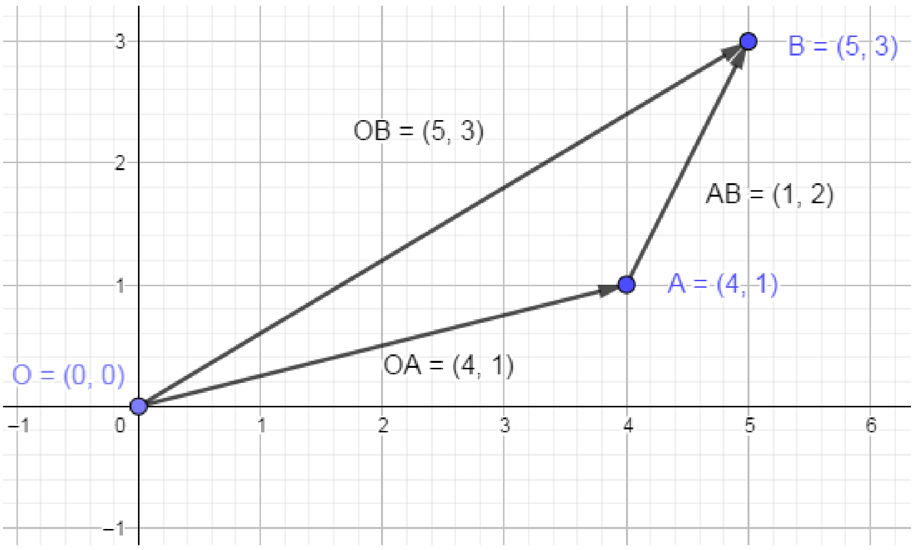
AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula el vector resultante en cada caso.
   a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1)$
   b) $5[(7, -2) + (-8, 1)]$
   c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)]$
2. Calcula las coordenadas del extremo Q en los siguientes casos:
   a) El vector $\overrightarrow{PQ}$ es $(5, 3)$ y $P(-1, 2)$.
   b) El vector $\overrightarrow{PQ}$ es $(-2, 6)$ y $P(-2, -4)$.
3. Estudia si son perpendiculares los vectores e indica el ángulo que forman.
   a) $\vec{u} = (-2, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1)$
   b) $\vec{u} = (-3, 7)$ y $\vec{v} = (2, -1)$
   c) $\vec{u} = (-1, 6)$ y $\vec{v} = (3, 1)$
4. Comprueba si las siguientes rectas pasan por el punto $(3, -3)$.
   a) $6x - 4y = 6$
   b) $\begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = -4 - \frac{1}{3}t \end{cases}$
   Escribe un vector de dirección y otro normal de cada una de las dos rectas.
5. Escribe todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(9, 4)$ y $B(8, 1)$.
6. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y:
   a) Es paralela a la recta r: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$
   b) Es perpendicular a la recta s: $-2x + 4y - \frac{3}{5} = 0$
7. Estudia la posición relativa de las rectas:
   a) r: $3x - y + 6 = 0$ y s: $3x - 4y + 2 = 0$
   b) r: $4x + 6y + 12 = 0$ y s: $2x + 3y + 9 = 0$
   En el caso de que sean secantes, indica las coordenadas de su punto de intersección.
8. Dado el triángulo de vértices conocidos $A(5, -9)$ $B(-2, -1)$ y $C(7, 2)$:
   a) Calcula las coordenadas de los puntos medios de sus lados.
   b) Halla la medida de sus lados y del ángulo $\hat{A}$.
   c) Calcula la ecuación de la mediana que parte del vértice A.

Para finalizar este capítulo, se hace un análisis de una cuestión observada en la parte teórica de la unidad didáctica. Se ha visto que el libro opta por dar las instrucciones que se deben seguir para obtener un resultado como si fuera una simple receta que hay que memorizar y luego aplicar, en lugar de explicar el concepto de una manera más razonada y contextualizada.

En la Figura 3, se puede ver un ejemplo, en este caso se da una fórmula para calcular las coordenadas del vector sin añadir más explicación de dónde viene ese procedimiento, cuando se podría haber razonado de una manera muy sencilla como se muestra en la Figura 8. Así pues, se podría hacer una representación gráfica con tres vectores: $\overline{OA}$, cuyas coordenadas coinciden con las del punto A, $\overline{OB}$, con coordenadas iguales a las de B y $\overline{AB}$, cuyas coordenadas se podrían obtener mediante la resta de los dos vectores anteriores.

Figura 8. Explicación para la obtención de las coordenadas de un vector



Otro ejemplo se ve en la Figura 6, el cuadro resumen de final de tema, donde aparece la información como fórmulas para memorizar, olvidando el contexto. Por ejemplo, se muestra la fórmula para calcular el módulo del vector, cuando parece más sencillo recordar que éste correspondería con la hipotenusa del triángulo rectángulo que formaría el mismo con los ejes, y solo habría que aplicar Pitágoras.

Es decir, parece que se busca más la memorización de fórmulas que la comprensión de los conceptos, lo que parece contraproducente porque la memoria puede fallar pero entender de manera correcta hace que sea innecesario memorizar.

Capítulo 6

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se presentan las dificultades y los errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica que se ha analizado en el Capítulo 5, que incluye el estudio, por primera vez, de vectores y de operaciones que se pueden realizar con los mismos y el estudio de diferentes ecuaciones de la recta y de las posiciones relativas entre dos rectas. Para ello, el capítulo cuenta con dos secciones correspondientes, respectivamente, a las dificultades y los errores.

La finalidad de este análisis es anticiparse a los problemas que puedan surgir durante la enseñanza para buscar una manera de evitarlos o, cuando menos, minimizar su efecto buscando alternativas. Éstas pueden consistir en repasar conocimientos previos que la mayor parte de la clase haya olvidado o recalcando la importancia de nueva información que pudiera pasar desapercibida.

6.1. Dificultades

Parte de las dificultades van a provenir de conceptos previos que se deberían conocer y dominar pero que muchos alumnos pueden ignorar o no haber asentado de manera correcta en cursos anteriores lo que puede complicar la comprensión de los nuevos conceptos.

Un ámbito especialmente peliagudo va a ser el relacionado con el álgebra, ya que las rectas se expresan de manera algebraica y es necesario realizar operaciones con las mismas que pueden crear problemas a alumnos que no tengan esta práctica consolidada. Se prevén dificultades en las transformaciones de expresiones algebraicas, en la jerarquía de las operaciones e, incluso, en el entendimiento de qué representan la x y la y dentro de las ecuaciones de la recta (son variables algebraicas que pueden tomar infinitos valores y no un único valor solución). También se anticipan dificultades a la hora de resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, pese a que es un contenido que se trabaja desde 2º ESO, que va a ser necesario para obtener el punto de corte entre dos rectas. A esto se añade la dificultad de entender que el punto de corte entre dos rectas corresponde con la solución obtenida del sistema de ecuaciones correspondiente.

Se puede suponer que parte de los alumnos vayan a tener dificultades relacionadas con el sistema de coordenadas cartesianos y con la representación de puntos en la misma, aunque el contenido se introduce en 1º y 2º ESO. Sin embargo, se espera que la dificultad sea fácil de sobrellevar y superada rápidamente con un breve repaso.

También se anticipan dificultades asociadas a los nuevos conceptos que se ven en la unidad temática, especialmente con los vectores, ya que es la primera vez que se introduce dicho contenido. Se prevé que no se vaya a entender el sentido físico de un vector como, por ejemplo, un desplazamiento en los dos ejes a partir de un punto concreto y, en su lugar, se vea como un elemento numérico totalmente descontextualizado. Otra situación sería la dificultad de diferenciar entre vectores fijos, de posición y libres, ya que pueden resultar muy parecidos en un primer momento. Una forma de ayudar a comprenderlos podría ser llevar una flecha de madera o plástico, que haga las veces de vector libre, y que se pueda colocar en distintos puntos de la pizarra, sin cambiar su dirección ni sentido, dando así lugar a distintos vectores fijos. Esta práctica también podría hacerse con GeoGebra y merecería la pena descubrir si es más útil para los alumnos la presencia física de la flecha o si el software informático sirve de la misma manera. Por otra parte, también habrá complicaciones en las operaciones con vectores.

Se predicen problemas especialmente con el entendimiento de la dependencia e independencia lineal y de la combinación lineal de vectores, ya que es un concepto que requiere cierto grado de abstracción y no todos los alumnos van a poder llevarlo a cabo. Es por eso que, en la enseñanza de estos conceptos, será especialmente importante utilizar el apoyo visual, es decir, mostrar gráficamente qué representan estos conceptos y, por eso, la utilización de GeoGebra va a ser prácticamente imprescindible.

En cuanto a las ecuaciones de la recta, las más difíciles de comprender para los alumnos van a ser la vectorial y la paramétrica debido a la presencia del parámetro t. En este sentido, los alumnos que estudien Física van a tener una mayor facilidad porque el parámetro se puede entender como el tiempo que multiplica al vector director, que correspondería con la velocidad, para obtener un vector desplazamiento que se suma a las coordenadas del punto de origen. Así pues, tendrían un campo relacionado que les ayude en el entendimiento. Esta es una de las desventajas de que todos los alumnos que quieran cursar el Bachillerato tengan que estudiar las mismas matemáticas académicas, a pesar de que conceptos como los vectores no vayan a ser de utilidad en el Bachillerato de Ciencias Sociales.

De igual manera, se puede imaginar la confusión al ver que una misma recta se puede expresar con muchas fórmulas que pueden ser totalmente diferentes entre sí y se prevé la tendencia de verlas como rectas diferentes. Es por eso que convendrá no transmitir rigidez a la hora de hallar una u otra ecuación de la recta, haciendo ver que una misma expresión se modifica, para convertirse en otra, de forma natural cuando se trabaja con ella.

Se puede suponer que la existencia de infinitos vectores directores de una recta vaya a crear problemas, ya que los alumnos están acostumbrados, en muchas ocasiones, a problemas de solución única. De igual manera ocurre con el vector normal a la recta, que encima añade la complicación de entender el concepto de perpendicularidad con la abstracción que requiere. Un posible camino sería definir la perpendicularidad de manera gráfica, lo que simplificaría la comprensión, para después comprobar con varios ejemplos que esa definición coincide con la de que el producto escalar de dos vectores perpendiculares da resultado nulo.

En cuanto a las posiciones relativas entre dos rectas y los problemas de incidencia, se puede presuponer que la mayor dificultad vaya a estar en entender que haya infinitas rectas paralelas o perpendiculares a una dada, sobre todo al analizar qué partes de la ecuación permanecen invariables dentro de una familia de rectas de este tipo, para cada una de las expresiones de la recta.

6.2. Errores y su posible origen

Los alumnos cometerán errores debidos a fallos del momento, despistes o por no comprobar lo que escriben, pero estos no son interesantes para su análisis pues pueden ser fácilmente solucionados. Los errores que más preocupan en esta sección son los debidos a las dificultades explicadas en la sección anterior y, por tanto, de igual manera, unos proceden de fallos en la consolidación de conceptos de cursos anteriores y otros de la complejidad de los nuevos contenidos.

Se espera que algunos de los errores que provienen de la dificultad de haber olvidado conocimientos previos se puedan resolver de manera sencilla al recordar lo necesario. Por ejemplo, repasando brevemente los métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Además, una ventaja es que este repaso no tiene por qué ser realizado por parte del profesor en clase, sino que puede ser una tarea autónoma del alumno que yerre en dichas cuestiones.

Se pueden prever los siguientes errores con origen algebraico:

- Incapacidad de despejar correctamente una incógnita.
- Fallos en las operaciones y en las transformaciones al manipular las expresiones algebraicas.
- Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En cuanto a los vectores se puede adelantar la aparición de los siguientes errores:

- Confundir dirección y sentido.
- No entender que un vector tiene inicio y fin, y decir que el vector $\overline{AB}$ es el mismo que el $\overline{BA}$. Esto deriva en fallos al calcular las coordenadas de un vector, ya que muchos harán el inicio menos el fin, en lugar del extremo menos el origen.
- Calcular el módulo de un punto, lo que no tiene sentido, en vez del vector.
- Fallos en las operaciones con vectores, aunque es de suponer que con práctica se pueda superar fácilmente.
- Una vez estudiado que el punto medio de un segmento AB, con $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, se obtiene como $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$, decir que para dividir un segmento en tres partes iguales se puede hacer $M\left(\frac{a_1+b_1}{3}, \frac{a_2+b_2}{3}\right)$.

En cuanto a las ecuaciones de la recta se pueden prever los siguientes errores:

- No ser capaces de obtener puntos de la recta o el vector director a partir de una ecuación. Esto provocará errores al intentar pasar de una expresión de la recta a otra.
- Confusión en los nombres de las diferentes expresiones de la recta.
- Al escribir las ecuaciones vectorial o paramétricas que los alumnos quieran darle un valor a t, porque ven el parámetro como una incógnita que deben resolver.
- Como se ve que la ecuación general es $Ax + By + C = 0$, se verán incapaces de dar la expresión porque no saben qué es A, B o C.

- La pendiente se estudia este curso de manera muy descontextualizada y se ve solo como un número. Ante la frase de "la pendiente es lo que multiplica a la x" que es solo válida en la ecuación explícita, ante la recta $r: 3x + 2y + 5 = 0$ afirmarán sin dudas que la pendiente de la recta r es 3.

Finalmente, se analizan los errores que pueden surgir en el estudio de las posiciones relativas de la recta, que se listan a continuación:

- No ser capaces de obtener la pendiente y la ordenada de origen de una recta a partir de cualquiera de sus expresiones, para poder compararlas y determinar la posición relativa.
- En la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a la hora de hallar el punto de corte entre dos rectas. Ya sea por incapacidad por parte del alumno al haber olvidado los métodos de resolución o por fallos en el manejo de las expresiones algebraicas.

Se pueden clasificar los errores en tres tipos según su origen: por la dificultad propia del concepto, por la forma en la que se realiza la enseñanza o por la inmadurez de los estudiantes, al no corresponder el contenido con la edad a la que se está enseñando. Así pues, se puede ver que en esta unidad didáctica hay una mayor tendencia hacia los errores del segundo tipo.

Si se imparten los contenidos como una receta cuyos pasos se deben seguir al pie de la letra, sin importar el sentido contextualizado —como dar fórmulas sin justificación para obtener las coordenadas de un vector, el módulo de éste o el punto medio entre dos puntos o explicar las distintas ecuaciones de la recta como expresiones rígidas que hay que buscar de una manera artificial— es muy fácil que los alumnos malinterpreten el significado de los parámetros y los coloquen fuera de su sitio o los utilicen erróneamente. Estos problemas se solucionarían buscando una enseñanza basada en la comprensión de los conceptos, evitando los procedimientos rutinarios y mecánicos.

Capítulo 7
El proceso de estudio

Se puede observar cómo la unidad didáctica analizada en el Capítulo 5 incluye el estudio de vectores y sus operaciones y, por otra parte, las ecuaciones de la recta y sus posiciones relativas. Sin embargo, durante el Practicum II la explicación correspondiente a vectores y sus operaciones fue realizada por el profesor responsable de la asignatura, por lo que este Trabajo Fin de Máster se centra únicamente en la enseñanza de las ecuaciones de la recta y las posiciones relativas.

Así pues, en este capítulo se presenta un proceso de estudio de estos últimos conceptos, que se describen con mayor detalle en el Capítulo 5. Sin embargo, el Departamento de Matemáticas del colegio decidió prescindir de la enseñanza de ciertos contenidos que aparecen en el libro y que se consideran más adecuados para las Matemáticas I del Bachillerato de Ciencias y Tecnología. Estos se corresponderían con la perpendicularidad, lo que implicaría no enseñar qué es un vector normal ni cómo calcular la recta perpendicular a otra dada que pase por un punto determinado.

Observando la unidad didáctica que se encuentra en el Anexo A, se puede ver que se introducen las ecuaciones de la recta a partir de la ecuación vectorial, ya que se estudia a continuación de los vectores, para deducir a partir de ella el resto de las expresiones. Sin embargo, el enfoque que se va a dar en esta propuesta es diferente, ya que se considera más útil continuar con la perspectiva vista en cursos anteriores.

Después de todo, la recta se había visto hasta este curso a partir de la función afín y la pendiente era un elemento clave, no un simple dato que se extrae de una de las ecuaciones. Además, parece relevante darle un contexto a la pendiente para evitar posibles errores y se considera importante que los nuevos conceptos aparezcan en relación a los ya conocidos para facilitar su aprendizaje.

Así pues, los primeros pasos consisten en recordar el significado de pendiente y deducir, a partir de la misma, las ecuaciones punto-pendiente, explícita y general. Después, una vez repasado el concepto de recta, se relaciona con el contenido vectorial para deducir la ecuación vectorial y, a partir de la misma, las ecuaciones paramétricas y la general. Por otra parte, el análisis de las posiciones relativas que hace el libro se basa en el análisis de la expresión general y en este capítulo se propone, en cambio, a partir de la pendiente (obteniéndose de la forma que sea necesaria). De igual manera ocurre con la determinación de una recta paralela que pase por un punto, en la que el libro utiliza la ecuación general, cuando parece que resultaría más intuitiva la ecuación punto-pendiente.

Sin embargo, es importante señalar que esta propuesta no se pudo llevar al aula por falta de tiempo de preparación y que es un planteamiento hipotético cuya eficiencia no se ha corroborado todavía. La enseñanza del tema consistió en seguir el planteamiento marcado por el libro de referencia y los resultados del mismo se muestran en el Capítulo 8 del presente trabajo. No obstante, se ha considerado de mayor interés generar una nueva propuesta con un enfoque diferente al empleado en los libros de texto.

El capítulo cuenta con tres secciones diferenciadas. La primera consiste en la explicación de la distribución del tiempo de la clase así como de los contenidos que se tratan. La segunda detalla las actividades adicionales planteadas y la tercera la tarea que se propone a los alumnos.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

El proceso de estudio se va a fundamentar en una enseñanza dialógica, donde el profesor plantee preguntas y las respuestas de los estudiantes vayan orientando la búsqueda del aprendizaje. El profesor continuará o corregirá las ideas de los alumnos con el fin de llegar a los contenidos clave, que remarcará como conceptos clave.

La teoría se impartirá en pizarra, con la ayuda de una presentación de Power Point si se considera necesaria, que solo se mostrará como resumen una vez que se hayan alcanzado los conceptos con las ideas de los alumnos y nunca se mostrará de antemano.

Las sesiones cuentan con 55 minutos, aunque se considera prudente descontar 5 minutos del tiempo que los alumnos tardan en llegar de otras aulas y preparar los materiales para comenzar la enseñanza. Así pues, se tendrá en cuenta que las sesiones son, a efectos prácticos de 50 minutos. El esquema global se repetirá en todas ellas y consistirá en un repaso de 5 minutos de lo visto en días anteriores, la explicación de los nuevos contenidos ocupará 40 minutos (para teoría o práctica), dejando los 5 minutos finales para repasar lo visto en el mismo día.

El total de sesiones que se emplearán para la impartición de los contenidos es de ocho más la correspondiente a la realización del examen, teniendo en cuenta que se utilizará una clase extra para la realización del examen correspondiente a la unidad didáctica. En las siguientes tablas (25 a 33) se muestra la distribución del tiempo de la clase en cada una de las sesiones dentro de los apartados correspondientes.

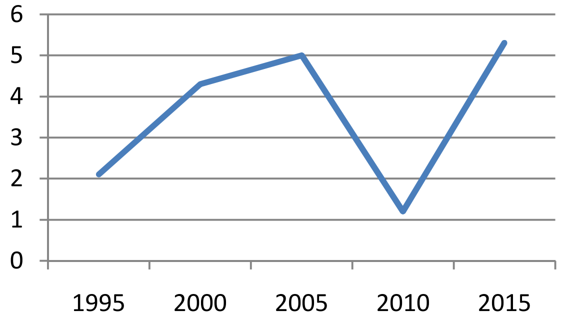
7.1.1. Sesión 1

Tabla 25. Distribución del tiempo de clase en la sesión 1

TIPO	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Introducción al tema	10 min	Profesor	Magistral
Repaso de la pendiente	20 min	Compartida	Dialógica
Ejercicios sobre la pendiente	15 min	Compartida	Dialógica
Repaso de la sesión	5 min	Profesor	Magistral

La introducción al tema consistiría en recordar cómo se había visto la recta en cursos pasados, es decir, como la función afín o tabulada y se podrían mostrar ejemplos. Además, sería el momento adecuado para decir que un punto de la recta tiene unas coordenadas x e y, y que conociendo una de ellas y con la fórmula se podría obtener la otra. También es recomendable mostrar gráficamente diferentes rectas, para que vean distintas pendientes y ordenadas en el origen. Un ejemplo se muestra en la Figura 9, donde se puede explicar cómo cada tramo lineal quedaría identificado con la ecuación de una recta diferente, introduciendo también las funciones a trozos.

Figura 9. Ejemplo de gráfico lineal para ver distintas rectas



El repaso de la pendiente se realizaría como en cursos anteriores, presentándola como la constante de proporcionalidad de una función de proporcionalidad directa o afín. Se recordaría cómo la pendiente se obtenía a partir de una función tabulada, mediante la observación de dos puntos contiguos y eso se podría llevar al sistema de coordenadas para darle un enfoque gráfico e ir acercándose a los vectores. Es muy importante recalcar que la pendiente es lo que se aumenta en el eje y dividido por lo que se aumenta en el eje x, así como explicar cómo afecta el signo de una pendiente o si su valor es mayor o menor. Se debe analizar rectas horizontales y verticales y ver cómo le afectaría esas condiciones especiales al valor de la pendiente. Convendría explicar que es una relación entre dos magnitudes y, por tanto, puede tener unidades y no es lo mismo decir m/s que s/m.

Para enlazar con el contenido de vectores, se explicaría cómo calcular la pendiente de un vector, ya que sería muy similar a lo realizado en cursos anteriores con la función tabulada. Además, se puede recalcar que para que dos vectores tengan la misma dirección, la pendiente de ambos tiene que ser la misma, aunque no sean vectores iguales, y que hay infinitos vectores que tienen la misma dirección. Así se va preintroduciendo el concepto de vector director de una recta. También es importante, pues se utilizará en la sesión 2, enseñar cómo a partir de una pendiente se puede obtener un vector director que corresponda con ese valor.

En la parte de ejercicios se puede entregar una fotocopia para que los alumnos los vayan resolviendo de manera individual o por parejas o proyectar en la pizarra las situaciones y resolverlas de forma conjunta en gran grupo. Debe haber varios tipos de problemas, aunque sean sencillos y rápidos de realizar:

- Comparación visual de las pendientes de dos rectas. Se muestran en una misma gráfica varias rectas nombradas y el alumno debe ser capaz de diferenciar entre rectas crecientes y decrecientes, entendidas como funciones, (lo que implica un signo positivo o negativo de la pendiente) o contestar cuál es la más inclinada entre varias crecientes (lo que conlleva que la pendiente es mayor) y ver que para una misma inclinación (mismo valor de pendiente) una recta puede ser creciente o decreciente (dependiendo del signo).
- Comparación analítica: se pide calcular la pendiente de una recta que se muestre en una gráfica o en una tabla. Es muy importante que los dos ejes tengan unidades, para dar a la pendiente un sentido contextualizado.
- Cálculo de la pendiente de vectores. Se añade la pregunta: “Supongamos que sobre el vector se dibujara una recta: ¿sería creciente, decreciente o constante?”.

Finalmente, en el repaso de la sesión se recordaría la fórmula para calcular la pendiente, asociada a un vector de origen en $A(a_1, a_2)$ y extremo en $B(b_1, b_2)$ que se muestre dibujado en la pantalla con sus coordenadas. Una tabla con posibles valores de la pendiente (m) y cómo correspondería con una recta, con ejemplos gráficos.

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}}$$

$m > 0$ Creciente	$m < 0$ Decreciente	$m = 0$ Horizontal	$m \to \infty$ Vertical

Como el concepto que más dudas puede generar es el de la recta vertical, habría que explicar que la pendiente tiende a infinito cuando la coordenada x del punto B se aproxima a la coordenada x del punto A, una vez más se ve la importancia de apoyar la explicación en un medio de representación visual como GeoGebra, que permite mostrar de forma dinámica estos cambios, facilitando la comprensión.

En conclusión, toda la sesión se basaría en la comprensión de la pendiente, pero parece totalmente necesario contextualizarla y que no sea simplemente un número, sino que tenga un sentido físico. Además, servirá para asegurar una mejor comprensión de los siguientes conceptos, tanto en este curso como en cursos sucesivos, donde se trabaja, por ejemplo, el concepto de derivada.

7.1.2. Sesión 2

Tabla 26. Distribución del tiempo de clase en la sesión 2

TIPO	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Repaso de la sesión anterior	5 min	Profesor	Magistral
Resolución dudas de la tarea	5 min	Compartida	Dialógica
Enseñanza de las ecuaciones de la recta: punto-pendiente, explícita y general	25 min	Compartida	Dialógica
Realización ejercicios	10 min	Alumno	Constructivista
Repaso de la sesión	5 min	Profesor	Magistral

El repaso de la sesión anterior consistiría en repetir el resumen de los últimos minutos de la clase anterior, con las mismas ideas clave. Seguidamente, se preguntará a los alumnos por las dudas que hayan surgido en la realización de la tarea, haciendo en la pizarra o resolviendo en común solo aquellos ejercicios que hayan generado problemas. El peso recaerá fundamentalmente en el alumno que ha presentado la duda, ayudando el profesor con las preguntas necesarias para que el alumno se responda a sí mismo. Esto será así salvo que gran parte de los estudiantes tuvieran el mismo problema, entonces el profesor se hará cargo de la explicación. Este mecanismo de resolución de dudas se repetirá en todas las sesiones, por lo que en adelante solo se mencionará la actividad.

La enseñanza de las ecuaciones de la recta se va a enfocar de una manera diferente a la sugerida por el libro de texto de referencia (Anexo A), ya que se ha decidido que el factor de mayor importancia es la pendiente de la recta y se seguirá el camino sugerido en el texto del saber [9].

Así pues, se propone empezar con la ecuación punto-pendiente, deducida inmediatamente de la fórmula para calcular la pendiente. Para ello se muestra un punto de la recta, que es conocido y denominado $A(a_1, a_2)$ y se indica que un punto cualquiera de la recta se puede denominar $P(x, y)$, recalcando la importancia de que hay infinitos valores para la pareja (x, y), ya que hay una para cada punto de la recta. Entonces se pregunta cuál es la pendiente de la recta si se sabe que pasa por los puntos A y P. La respuesta se correspondería con:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

Esta información no debería generar problemas después de haber pasado la sesión 1 dominando el concepto de pendiente y su cálculo. De esta manera, el siguiente paso consistiría en explicar que manipulando esta ecuación y expresándola de diferentes formas, se obtendrían las distintas expresiones de la recta, que tienen un nombre concreto para determinarlas.

- Ecuación punto-pendiente: $\boldsymbol{y - a_2 = m(x - a_1)}$. Se puede indicar que su nombre viene de que se puede obtener directamente conociendo la pendiente de la recta y un punto por el que pase la misma. De esta manera, la pareja de valores (x, y) quedaría indefinida; como hay una sola ecuación y dos incógnitas, se podría comprobar si un punto pertenece a la recta siempre y cuando cumpla la ecuación. Por otra parte, para determinar un punto que pertenezca a la recta de interés, se debe fijar el valor de una coordenada para conocer cuánto debe valer la otra.
- Ecuación explícita: despejando la y y operando $y = mx - m\, a_1 + a_2$, se puede llegar a una ecuación explícita, que es de la forma $\boldsymbol{y = mx + n}$. Sí es cierto que $n = -m\, a_1 + a_2$, pero se debe remarcar la importancia de que no es necesario aprender eso de memoria, que bastaría con operar a partir de la ecuación anterior, lo que quedaría más claro haciendo ejemplos con números concretos en lugar de letras. Además, se puede recordar que esa es la forma que habían visto el curso anterior relacionada con la función afín y repasar el concepto de ordenada en el origen: el valor de y cuando $x = 0$. Se puede señalar la utilidad de esta expresión porque al tener despejada la y, facilita el cálculo de puntos de la recta.
- Ecuación general: operando cualquiera de las expresiones anteriores (punto-pendiente o explícita) de manera que a un lado de la igualdad se tengan todos los términos, que quedan igualados a cero, se obtiene la ecuación general, que es de la forma $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$. Los valores de A, B y C corresponderían con $A = m$, $B = -1$, $C = n = -m\, a_1 + a_2$. Sin embargo, no se considera recomendable explicar esto a los alumnos para que no tengan la tendencia de intentar memorizar la expresión, que solo va a llevar a cometer errores. Es más sencillo que a partir de una expresión anterior despejen, y se debe guiar a los estudiantes para que sigan ese camino haciendo, para ello, ejemplos numéricos concretos.

Se debe concluir que la información necesaria para representar estas ecuaciones es un punto y la pendiente de la recta. Sin embargo, como ya se vio en la sesión 1, el alumno no debe tener dificultad en poder extraer la pendiente de la recta si los datos son dos puntos o un punto y un vector director de la recta.

A continuación, se dejan 10 minutos para la resolución de manera individual de ejercicios propuestos, quedando los que no se hagan en clase como tarea personal del alumno. El profesor pasará por las mesas y resolverá dudas particulares. Los ejercicios propuestos serán de tres tipos, aunque todos ellos se basarán en las tres expresiones de la recta anteriormente explicadas:

- A partir de una expresión de la recta en forma de ecuación, se pregunta comprobar si un punto dado pertenece o no a la misma.
- A partir de una expresión de la recta en forma de ecuación, se pide extraer información: un punto que pertenezca a la recta, un vector director, la pendiente y la ordenada en el origen.
- Dada cierta información de una recta, se pide escribir una o las tres ecuaciones anteriores. Ésta puede consistir en dos puntos, un punto y el vector director o un punto y la pendiente.

Finalmente, y como en todas las sesiones, los últimos cinco minutos se reservan para resumir los contenidos de la sesión. En este caso, se repasarían los nombres y las fórmulas de las tres ecuaciones, así como la información necesaria para escribirlas y cómo pasar de dos puntos a vector director y de vector director a pendiente y viceversa.

7.1.3. Sesión 3

Tabla 27. Distribución del tiempo de clase en la sesión 3

TIPO	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Repaso de la sesión anterior	5 min	Profesor	Magistral
Resolución dudas de la tarea	10 min	Compartida	Dialógica
Enseñanza de las ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas y continua	20 min	Compartida	Dialógica
Realización ejercicios	10 min	Alumno	Constructivista
Repaso de la sesión	5 min	Profesor	Magistral

El esquema de esta sesión es muy similar al previo. Se realizaría un repaso de la sesión anterior y, seguidamente, se procedería a la resolución de dudas. Se estima que 10 minutos son suficientes porque ya se resolvieron dudas al final de la clase anterior y las ecuaciones vistas en la sesión 2 están muy relacionadas con la pendiente, que se estudió en la sesión 1 y, por tanto, no debería haber grandes dificultades.

La enseñanza de las ecuaciones de la recta propuestas para esta sesión está relacionada con los vectores estudiados al principio de la unidad didáctica. La primera ecuación que se ve es la vectorial, que será la más complicada de entender por los alumnos debido al parámetro t. Por tanto, se va a prestar una especial atención a su comprensión dedicando, como mínimo, 10 de los 20 minutos disponibles; incluso más tiempo, si es necesario, que se restaría de la realización de ejercicios en clase.

Para la explicación se utiliza un ejercicio preparado con GeoGebra que permita una mejor contextualización y que se muestra en la Figura 10 y 11. Un hombre se sitúa en el punto $A(2,3)$ y quiere pintar una línea amarilla sobre la raya blanca del dibujo. Primero se pregunta qué vector ha de seguir para no salirse de la línea (introduciendo el concepto de vector director). La ventaja es que el profesor puede mover el vector para ver cuál es paralelo a la raya blanca.

Figura 10. Ejercicio de GeoGebra para la ecuación vectorial

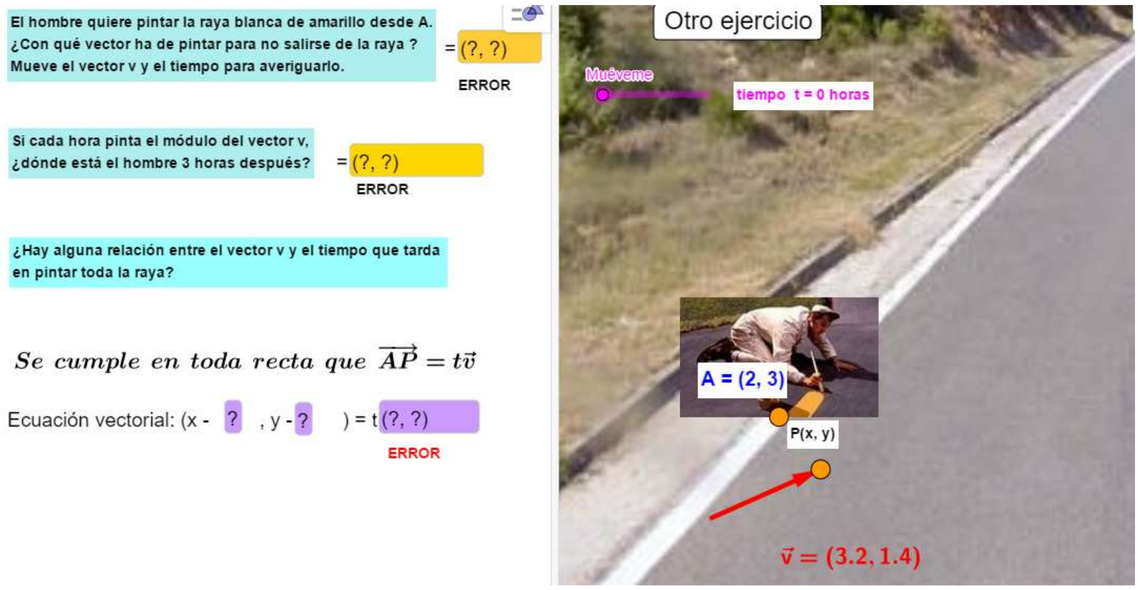
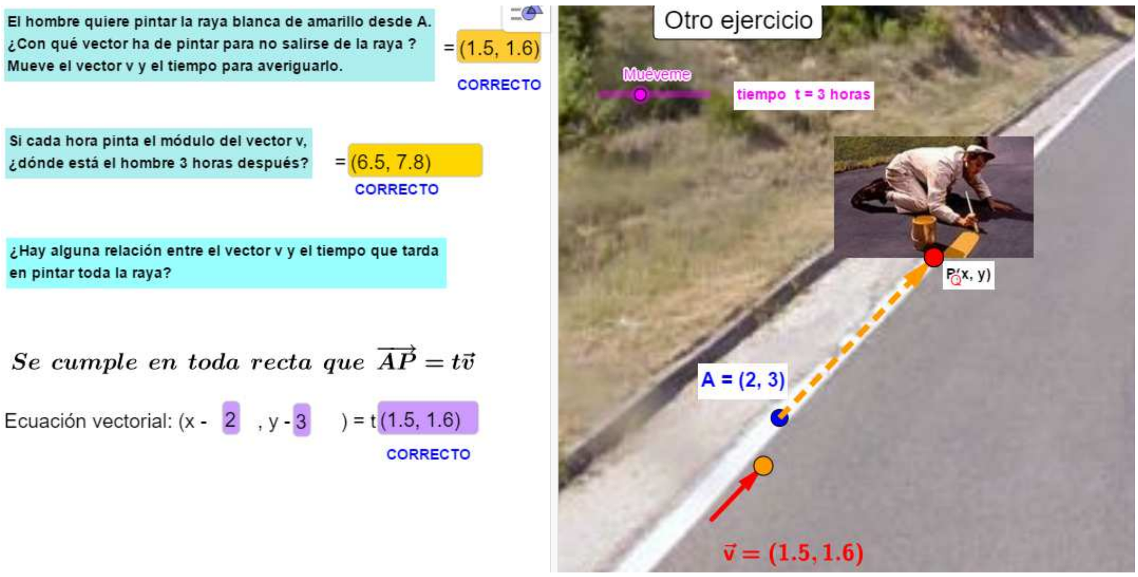


Figura 11. Ejercicio de GeoGebra para la ecuación vectorial (resuelto)



Además, se puede introducir el concepto de parámetro de una manera que no resulte demasiado abstracta para los alumnos. Se dice que el módulo del vector director v es lo que pinta el hombre en una hora (se está dando un significado de velocidad), entonces se pregunta en qué punto se encontrará después de 3 horas de trabajo si sigue la dirección marcada por el vector. De nuevo, la ventaja es que el profesor puede manejar el tiempo con la barra que se muestra, de manera que el resultado queda como en la Figura 11 y se puede ver el punto final. Sin embargo, los alumnos pueden hacer el cálculo numérico para ese caso concreto sin mayores dificultades.

Otra ventaja de la utilización de este programa es que se pueden introducir los resultados para que el alumno compruebe la veracidad de los resultados, como se ve en la Figura 11. También se puede presionar el botón *"Otro ejercicio"* y el programa da otro punto A y resetea el vector director, para tener que buscarlo de nuevo.

De esta manera, el parámetro t se puede introducir como el tiempo que avanza una persona en la dirección marcada por el vector director, suponiendo que en una unidad de tiempo camina un tramo igual al módulo del vector. Aquí podría inducirse el error de que no hay tiempos negativos, pero debería explicarse que un valor de t negativo se correspondería con avanzar en el sentido contrario al que marca el vector.

Así se deduce $\overline{AP} = t\bar{u}$ y, como ya conocen después del estudio de los vectores, pueden obtener las coordenadas de $\overline{AP}$ como las de P menos las de A. Sabiendo que $A(a_1, a_2)$, $P(x, y)$ y el vector director es $\bar{u}(u_1, u_2)$, se puede expresar según sus coordenadas como: $(x, y) - (a_1, a_2) = t(u_1, u_2)$, y despejando las coordenadas del punto P se obtendría la <u>ecuación vectorial</u>, que se escribe: $\boldsymbol{(x, y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2)}$.

Una vez los estudiantes comprendan con claridad esta ecuación y el sentido del parámetro t, es muy sencillo determinar las dos ecuaciones restantes:

- <u>Ecuaciones paramétricas</u>: se puede sugerir operar la ecuación vectorial, para obtener $(x, y) = (a_1 + t\,u_1, a_2 + t\,u_2)$ para determinar que comparando las coordenadas x y las y repectivamente, se tienen dos ecuaciones, que si se expresan como $\boldsymbol{\begin{cases} x = a_1 + t\,u_1 \\ y = a_2 + t\,u_2 \end{cases}}$ representan las ecuaciones paramétricas.
- <u>Ecuación continua</u>: en las dos ecuaciones paramétricas se tiene el parámetro t que se puede despejar e igualar. Así se obtiene la ecuación continua que queda representada mediante:

$$\boldsymbol{\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}}$$

Se debe concluir que la información necesaria para representar estas ecuaciones es un punto y un vector director de la recta. Sin embargo, es importante recordar a los alumnos que no deberían tener problema si los datos iniciales son dos puntos de la recta, pues ya saben determinar el vector director de la misma o, de igual manera, si se indica la pendiente y un punto.

A continuación, se dejan 10 minutos para la resolución de manera individual de ejercicios propuestos, quedando los que no se hagan en clase como tarea personal del alumno. El profesor pasará por las mesas y resolverá dudas particulares. Los ejercicios propuestos serán de tres tipos, exactamente iguales a los de la sesión 2, aunque en este caso todos ellos se basarán en las tres nuevas expresiones de la recta:

- A partir de una expresión de la recta en forma de ecuación, se pregunta comprobar si un punto dado pertenece o no a la misma.
- A partir de una expresión de la recta en forma de ecuación, se pide extraer información: un punto que pertenezca a la recta, un vector director, la pendiente y la ordenada en el origen.
- Dada cierta información de una recta, se pide escribir una o las tres ecuaciones anteriores. Ésta puede consistir en dos puntos, un punto y el vector director o un punto y la pendiente.

Finalmente, y como en todas las sesiones, los últimos cinco minutos se reservan para resumir los contenidos de la sesión. En este caso, se repasarían los nombres y las fórmulas de las tres ecuaciones, así como la información necesaria para escribirlas y cómo pasar de dos puntos a vector director y de vector director a pendiente y viceversa.

7.1.4. Sesión 4

Tabla 28. Distribución del tiempo de clase en la sesión 4

TIPO	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Repaso de la sesión anterior	10 min	Profesor	Magistral
Resolución dudas de la tarea	15 min	Compartida	Dialógica
Realización ejercicios	25 min	Alumno	Constructivista

Esta sesión es un poco diferente con respecto al esquema general porque es de repaso y ejercicios. En esta ocasión, el repaso de la sesión anterior se hace en 10 minutos porque se pretende recordar las seis ecuaciones de la recta, aunque de manera muy breve, es decir, los contenidos de las sesiones 2 y 3. Además, se estiman necesarios 15 minutos de resolución de dudas de la tarea porque es probable que la ecuación vectorial resulte más complicada que el resto.

El resto de la sesión se deja para la realización de los ejercicios propuestos de tarea, porque se considera recomendable hacer un parón antes de continuar con los nuevos conceptos y asentar los vistos hasta el momento. En esta ocasión, como hay más tiempo, se podría dejar a los alumnos trabajar en parejas, de manera que el profesor pase por las mesas resolviendo dudas personales.

Además, en este caso no es necesario un repaso de lo visto en la sesión, aunque podrían dejarse unos minutos finales, a consideración del profesor, para señalar las dudas más comunes y la manera de solucionarlas.

7.1.5. Sesión 5

Tabla 29. Distribución del tiempo de clase en la sesión 5

TIPO	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Repaso de conocimientos previos necesarios	5 min	Profesor	Magistral
Resolución dudas de la tarea	10 min	Compartida	Dialógica
Enseñanza de las posiciones relativas entre dos rectas	15 min	Compartida	Dialógica
Realización ejercicios	15 min	Alumno	Constructivista
Repaso de la sesión	5 min	Profesor	Magistral

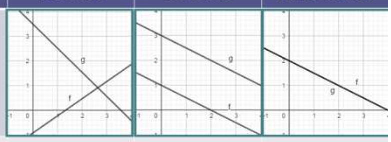
En esta ocasión se considera recomendable un repaso de los conocimientos previos necesarios para el estudio que consistiría en recordar qué es la pendiente y la ordenada en el origen y que a partir de cualquier ecuación de la recta el alumno debe ser capaz de obtener dichos valores.

Seguidamente, se preguntará a los alumnos por las dudas que hayan surgido en la realización de la tarea. Se considera que 10 minutos es tiempo suficiente puesto que los ejercicios se estuvieron haciendo en clase durante la sesión anterior.

Para la enseñanza de las posiciones relativas entre dos rectas se propone entregar a los alumnos (o hacer copiar) la tabla de la izquierda de la Figura 12 para que los propios alumnos la vayan rellenando conforme se va explicando la teoría, hasta completarla como la tabla de la derecha. Para ello se recomienda proyectar en la pizarra GeoGebra y mostrar diferentes rectas secantes, paralelas y coincidentes, para ir analizando con los alumnos la información que se pregunta en cada fila.

Figura 12. Tablas para el estudio de las posiciones relativas entre dos rectas

Dos rectas son	Secantes	Paralelas	Coincidentes
Dibujo			
Puntos en común			
Coordenadas de los vectores directores			
Pendiente (m)			
Ordenada en el origen (n)			

Dos rectas son	Secantes	Paralelas	Coincidentes
Dibujo			
Puntos en común	1	0	∞
Coordenadas de los vectores directores	No son proporcionales	Son proporcionales	Son proporcionales
Pendiente (m)	Distinta	Igual	Igual
Ordenada en el origen (n)	-	Distinta	Igual

Esto se hace así porque se quiere remarcar la importancia de la pendiente y de la ordenada en el origen, independientemente de la ecuación ya que los alumnos ya deben ser capaces de conocer esos valores esté la recta expresada en la forma que sea. Sin embargo, el libro de texto opta por mostrar la recta solo mediante la ecuación general, como se ve en la Figura 13, dando demasiada importancia a los valores A, B y C.

Figura 13. Explicación del libro de texto sobre posiciones relativas (p. 144) [6]

Al expresar en forma general dos rectas, $r: Ax + By + C = 0$ y $s: A'x + B'y + C' = 0$, sus pendientes y ordenadas en el origen son:

$$m = -\frac{A}{B} \qquad m' = -\frac{A'}{B'} \qquad n = -\frac{C}{B} \qquad n' = -\frac{C'}{B'}$$

Por tanto, para determinar su posición relativa se puede utilizar el siguiente criterio:

- Son **secantes** si $m \neq m'$, es decir, si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$.
- Son **paralelas** si $m = m'$, pero $n \neq n'$, es decir, si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$.
- Son **coincidentes** si $m = m'$ y $n = n'$, es decir, si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

Además, se debe buscar una respuesta por parte de los alumnos a cómo se podría encontrar en qué punto exacto se cortan dos rectas que sean secantes. Y repasar de manera muy breve, si es necesario, los distintos métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. También es un momento recordar que aunque la recta venga expresada mediante las ecuaciones paramétricas, es necesario pasarla a la forma general, por ejemplo, para la resolución del sistema.

La realización en clase de los ejercicios de tarea seguirá el mismo método que en sesiones anteriores y, si es posible, se les permitirá trabajar en parejas. En este caso, solo hay un tipo de ejercicio propuesto en el libro: dadas las ecuaciones de dos rectas, determinar su posición relativa y, en caso de ser secantes, hallar el punto de corte. Aunque es cierto que pueden darse las condiciones que cumple una de las rectas en lugar de dar inmediatamente la ecuación correspondiente para aumentar la profundidad del ejercicio. Un inconveniente que se ve en cuanto a los ejercicios procedentes del libro es que las ecuaciones de la recta dadas son únicamente la general, lo que puede inducir a errores si la recta viniera expresada de otra manera.

Finalmente, para el repaso de la sesión se considera recomendable mostrar la tabla de la derecha de la Figura 12 mientras se recuerdan las ideas clave.

7.1.6. Sesión 6

Tabla 30. Distribución del tiempo de clase en la sesión 6

TIPO	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Repaso de la sesión anterior	5 min	Profesor	Magistral
Resolución dudas de la tarea	10 min	Compartida	Dialógica
Enseñanza de rectas paralelas a una dada	15 min	Compartida	Dialógica
Realización ejercicios	15 min	Alumno	Constructivista
Repaso de la sesión	5 min	Profesor	Magistral

Una vez más, se realiza un repaso de la sesión anterior en los primeros 5 minutos de clase, que consistiría en repetir lo visto al final del último día. Seguidamente, se cuenta con 10 minutos para resolver dudas surgidas durante la realización de la tarea.

El apartado de teoría de esta sesión corresponde con la búsqueda de rectas paralelas a una dada. El libro de texto utiliza la ecuación general para la explicación, pero en esta propuesta no se considera la más adecuada. En un primer lugar se utiliza la ecuación explícita para indicar que hay infinitas rectas paralelas, porque todas ellas deben tener la misma pendiente y solo tiene que variar la ordenada en el origen (que puede tomar cualquier valor excepto el de la recta original. Parece una manera más intuitiva de explicar que las rectas paralelas a $y = mx + n$ van a ser de la forma $y = mx + k$, con k cualquier número real diferente de n. Para esta explicación se puede utilizar GeoGebra, que posibilita enseñar muchas rectas paralelas a una dada y se puede visualizar fácilmente cómo solo varía la ordenada en el origen.

Después se debe señalar que si se determina un punto por el que debe pasar esa recta paralela, entonces ésta ya es única. Además, se recomienda la utilización de la recta punto-pendiente por la información de la que se dispone (un punto y una pendiente), sin embargo, se debe motivar la utilización de la expresión que más cómoda le resulte a cada estudiante. A continuación, se deja tiempo en clase para ir avanzando la tarea en parejas. Mientras tanto, el profesor puede resolver dudas.

Finalmente, se hace un breve resumen de la sesión en los últimos 5 minutos.

7.1.7. Sesión 7

Tabla 31. Distribución del tiempo de clase en la sesión 7

TIPO	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Repaso de la sesión anterior	10 min	Profesor	Magistral
Resolución dudas generales	20 min	Compartida	Dialógica
Realización ejercicios y resolución dudas particulares	20 min	Alumno	Constructivista

Esta sesión es un poco diferente con respecto al esquema general porque es de repaso y ejercicios. En esta ocasión, el repaso de la sesión anterior se hace en 10 minutos porque se pretende recordar todo lo referente a las posiciones relativas de la recta, es decir, los contenidos de las sesiones 5 y 6.

Se busca la resolución de dudas de este tipo de problemas y, por ello, se divide en dos partes, cada una de 20 minutos. En la primera se plantean dudas generales y se debaten con todo el grupo. La segunda parte se reserva para el trabajo individual del alumno, que puede ir resolviendo los ejercicios propuestos y planteando al profesor las dudas de manera individual.

Además, en este caso no es necesario un repaso de lo visto en la sesión, aunque podrían dejarse unos minutos finales, a consideración del profesor, para señalar las dudas más comunes y la manera de solucionarlas.

7.1.8. Sesión 8

Tabla 32. Distribución del tiempo de clase en la sesión 8

TIPO	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Planteamiento dudas generales	25 min	Compartida	Dialógica
Realización ejercicios y resolución dudas particulares	25 min	Alumno	Constructivista

Esta sesión es de repaso de toda la unidad didáctica el día anterior al examen correspondiente. Por tanto, entran los contenidos de vectores, operaciones con vectores, ecuaciones de la recta y posiciones relativas.

Se busca la resolución de dudas de todo tipo de problemas y, por ello, se divide la clase en dos partes, cada una de 25 minutos. En la primera se plantean dudas generales y se debaten con todo el grupo. La segunda parte se reserva para el trabajo individual del alumno, que puede ir resolviendo o repasando ejercicios propuestos en sesiones anteriores y planteando al profesor las dudas de manera individual, aunque el profesor puede considerar necesario señalar los problemas más comunes y la manera de solucionarlas.

7.1.9. Sesión 9

Tabla 33. Distribución del tiempo de clase en la sesión 9

TIPO	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Realización del examen	50 min	Alumno	Constructivista

Como se había indicado, esta sesión corresponde con la realización del examen de la unidad didáctica por parte del alumno.

7.2. Actividades adicionales planificadas

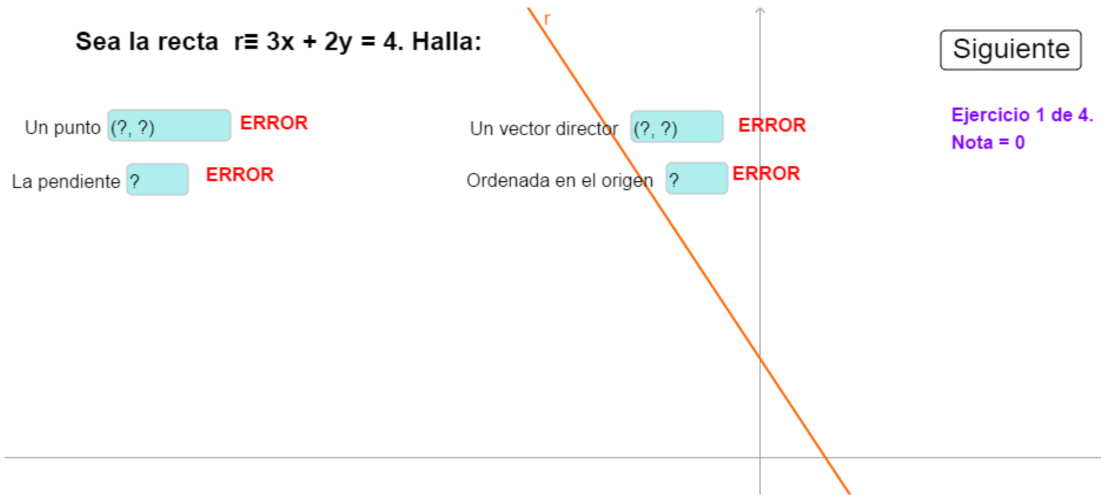
La mecánica de los ejercicios de esta parte de la unidad didáctica ha quedado muy definida y se puede ver que hay tres bloques diferenciados:

- Obtener información a partir de la ecuación de una recta: punto, pendiente, ángulo formado con el eje positivo de las abscisas, ordenada en el origen y vector director.
- Obtener diferentes ecuaciones de la recta a partir de dos puntos o de un punto y un vector director, entre otras.
- Estudiar la posición relativa entre dos rectas obteniendo, en su caso, el punto de corte de las mismas.

Existe la posibilidad de utilizar GeoGebra para hacer unos programas que generen problemas de estos tipos de manera aleatoria y que se autocorrijan, permitiendo el estudio autónomo del alumno ya que hay infinidad de cuestiones para practicar. En el Anexo B se muestran capturas de pantallas de distintas situaciones obtenidas a partir de estos programas y se explica con mayor profundidad las múltiples posibilidades. Como puede verse, se ha dividido en tres secciones diferentes, una para cada tipo de programa.

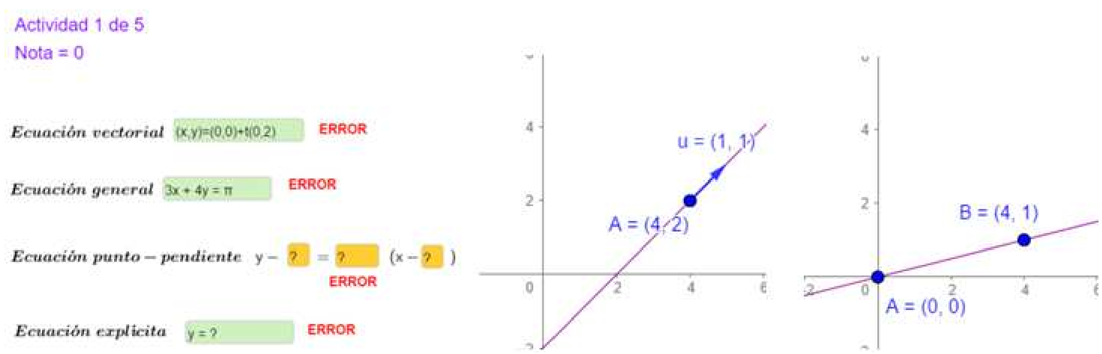
En el primero de ellos se pide obtener información a partir de una ecuación de la recta, tal como se muestra en la Figura 14, aunque la recta aparece graficada para mayor ayuda. Por las limitaciones del programa, esta expresión puede ser la general o explícita, y se pide obtener un punto, un vector director, la pendiente y la ordenada en el origen, así como el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas, en un segundo paso. La ventaja consiste en que el alumno puede saber si la información introducida es la correcta porque desaparece el mensaje de *"ERROR"* y que tiene la posibilidad de hacer tantos ejercicios como estime necesario, pues se van generando de manera aleatoria.

Figura 14. Ejemplo de ejercicio en GeoGebra sobre elementos de la recta



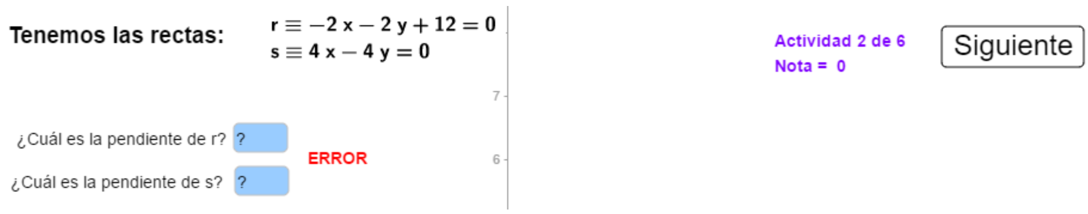
El segundo tipo de ejercicios consiste en escribir distintas ecuaciones de la recta aunque, por limitaciones del programa, solo se pueden preguntar la vectorial, general, punto-pendiente y explícita, como puede verse en la parte izquierda de la Figura 15. La información que se proporciona se puede ver en la parte derecha de la misma figura: aparece la recta representada de manera gráfica y se indica un punto y un vector director o dos puntos que pertenecen a la recta.

Figura 15. Ejemplo de ejercicio en GeoGebra sobre ecuaciones de la recta



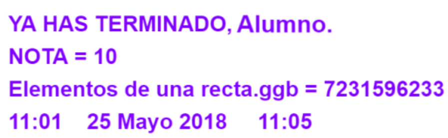
El último tipo de ejercicio que se propone consiste en el estudio de la posición relativa entre dos rectas cuyas tres posibilidades (secantes, paralelas y coincidentes) se explican con mayor detalle en el Anexo B. El enunciado presenta las fórmulas de dos rectas, como puede verse en la Figura 16, aunque, una vez más, la limitación del programa permite utilizar exclusivamente las expresiones general y explícita. La primera cuestión consiste en calcular la pendiente de cada una de ellas, si la respuesta es correcta el programa pregunta a continuación si eso implica que son secantes, paralelas o coincidentes. En caso de ser secantes añade dos actividades adicionales: el cálculo del punto de corte y la búsqueda de la ecuación de una recta paralela a otra dada que pase por el punto de corte.

Figura 16. Ejemplo de ejercicio en GeoGebra sobre posiciones relativas



Otra ventaja de dar estos programas a los alumnos para que practiquen y estudien consiste en que también hace posible pedir al alumno que realice estos ejercicios al menos una vez y entregue al profesor el resultado de los mismos, que podría evaluarse como un 5% de la nota trimestral de la asignatura. Cada documento tiene entre 4 ó 6 actividades del tipo correspondiente, de manera que se puede conseguir una nota máxima de 10. Al finalizar de todos los ejercicios, aparece la información que se muestra en la Figura 17, donde figuran el nombre del alumno, la nota conseguida, el nombre del archivo en formato GeoGebra *".ggb"*, la fecha y la hora de inicio y final del trabajo, que debería enviarse al profesor.

Figura 17. Resultado obtenido al finalizar una actividad de GeoGebra



7.3. La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista

En matemáticas es muy importante la correcta comprensión de la teoría, pues de nada sirve memorizar fórmulas y procedimientos si el alumno no sabe lo que está haciendo. Además, se considera una asignatura que no se puede dominar simplemente estudiando lo que aparece en el libro de texto, por lo que resulta imprescindible el trabajo individual de los alumnos con un doble propósito: que les surjan dudas de lo que aparentemente habían comprendido y, finalmente, capacitarles para resolver problemas.

Por eso, como se ha visto en la sección 1 de este capítulo, la distribución de la clase gira en torno a la explicación de la teoría seguida de un tiempo para ejercitar los conocimientos aprendidos. De igual manera, se dispone de tres sesiones de repaso que se orientan a la resolución de dudas sobre los ejercicios.

Es totalmente necesario motivar al alumno para que realice los ejercicios personalmente y ponga a prueba sus capacidades, y por eso se mandan de tarea ejercicios relacionados con lo visto en cada una de las sesiones. Con el fin de motivar a los estudiantes, siempre se reserva una parte de la sesión para que comiencen a trabajar en clase, ya sea individualmente o en parejas. La principal finalidad de esto es que si no son capaces de empezar los problemas por encontrar una barrera de entrada, el profesor pueda estar ahí para dar ese empujón inicial de tal manera que los alumnos puedan continuar el camino.

Los alumnos ya se encuentran en 4º ESO y la mayor parte comenzará a cursar el Bachillerato unos pocos meses después. Por eso se presenta la tarea como una responsabilidad del alumno que debe ver como un método de estudio y preparación para el examen. No se va a revisar la tarea realizada por norma general, aunque se puede pedir al azar a algún estudiante que muestre los resultados.

En las sesiones 1, 2, 3, 5 y 6 se imparte teoría nueva y, por tanto, los ejercicios que se mandan de tarea están relacionados con los conocimientos recientemente adquiridos. La ventaja es que pueden practicar lo que se acaba de explicar y la desventaja es que los ejercicios están muy centrados, cuando lo lógico es que un problema abarque más temas y no solo lo último estudiado.

Lo relativo a la sesión 1 no se ve en el libro de referencia, por lo que la tarea debe entregarla el profesor en fotocopias y se adjuntan los ejercicios propuestos en el Anexo C. La sesión 2 y la 3 sí tiene relación con el libro de texto, pero los ejercicios están mezclados y se ha optado por un enfoque separado, de manera que tres rectas se ven en una sesión y las otras tres en la otra. Se pretende seguir la misma separación en los problemas de tarea y, por tanto, también se adjuntan en el Anexo C.

Algo similar ocurre con la sesión 5 y 6, ya que el enfoque del libro de referencia no parece el más adecuado. Al hablar de posiciones relativas o de rectas paralelas a una dada, el libro solo utiliza la ecuación general y se considera más oportuno recordar al alumno que tiene que ser capaz de manejar las distintas ecuaciones de la recta. Por eso también se proponen ejercicios diferentes a los del libro.

La sesión 4 sirve de repaso para las seis ecuaciones de la recta, mientras que la sesión 7 se dedica a las posiciones relativas y a las rectas paralelas. En esta ocasión sí parecen satisfactorios los ejercicios del libro y se eligen los que se proponen a continuación:

Tabla 34. Ejercicios de tarea para las sesiones 4 y 7

SESIÓN	PÁGINA	EJERCICIOS
Sesión 4	149	63, 64, 65, 66, 67, 68, 72, 74, 76 a)
Sesión 7	149	69, 70, 71, 76 b), 78, 80, 81

Pueden parecer muchos, pero se recuerda que los alumnos cuentan con la sesión correspondiente para trabajar en clase, por lo que deberían adelantar gran parte del trabajo antes de salir del colegio.

La sesión 8 se reserva para el repaso de toda la unidad didáctica, por lo que no se considera necesario mandar tarea, así pues, se reserva el tiempo para repasar o rehacer ejercicios anteriores.

Capítulo 8
Experimentación

Este capítulo se centra en la experimentación que pudo realizarse durante el Practicum II. Para ello se cuenta con la información obtenida del examen realizado por los alumnos como evaluación final de la unidad didáctica. Se adelanta que el examen correspondía a la totalidad de la unidad, por lo que se evalúan los conocimientos de vectores y de rectas y, por ello, en este capítulo se analizan los dos aspectos a pesar de que el Capítulo 7 se centraba únicamente en el estudio de las ecuaciones de la recta y de las posiciones relativas.

El capítulo cuenta con cinco secciones. La primera de ellas detalla la muestra que realiza el examen y cómo ha sido preparado para, a continuación, detallar las preguntas del cuestionario. En la tercera sección se repasan las cuestiones y los comportamientos esperados por parte del alumnado, mientras que en la cuarta se exponen los resultados obtenidos. Finalmente, la última sección se dedica a la discusión de los mismos.

8.1. Muestra y diseño de la experimentación

El curso de 4º ESO del colegio en cuestión cuenta con dos líneas y con aproximadamente 30 alumnos en cada grupo. Las dos clases se dividen en tres grupos para las horas de matemáticas: dos de ellos imparten matemáticas académicas, mientras que el tercer grupo, de solo seis estudiantes, estudia las matemáticas aplicadas.

Hay un profesor responsable para cada uno de los tres grupos, siendo mi tutor de prácticas el correspondiente a 4ºA, que da la rama académica. El examen es elaborado por los dos profesores de esta rama en conjunto y cuenta con ejercicios muy similares a los realizados utilizando GeoGebra por los alumnos.

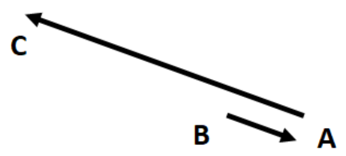
Como las sesiones de matemáticas coinciden, los dos grupos realizan el examen el mismo día en la misma hora. Mi tutor me permite corregir los correspondientes a su clase, de donde se extrae la muestra que se analiza en las secciones siguientes: 29 alumnos de 4º ESO, lo que supone edades comprendidas entre los 15 y 16 años, 18 chicas y 11 chicos. Siete de estos alumnos tenían pendiente de recuperar la 2º evaluación. Entre ellos se encuentra una chica diagnosticada con TDH que hace un examen más reducido optando a una nota máxima en la evaluación de 5, por lo que se elimina de la muestra. El día de la evaluación otra chica se ausenta y tiene que recuperar el examen en otro momento, por lo que el cuestionario es diferente y también se debe excluir de la muestra. Así pues, la muestra analizada la forman 16 chicas y 11 chicos.

Sociocultaralmente la totalidad de los alumnos son de origen español y de clase media-alta. Además, la impartición de las clases ha sido sencilla ya que prácticamente la totalidad de los estudiantes mostraba interés y participaba de manera muy positiva.

8.2. El cuestionario

El examen se evalúa sobre 7.5 puntos y está formado por las siguientes preguntas, quedando indicado el valor de cada apartado entre paréntesis:

1. Salgo de la ciudad Zolina, que está localizada en las coordenadas $A(1,1)$, moviéndome según el vector $\bar{v} = (-1,3)$ llego a la ciudad Cáceres, que se encuentra en el punto de B.
   a) ¿Cuáles son las coordenadas de B, donde se encuentra Cáceres? **(0.5 puntos)**
   b) Calcula el punto medio entra las ciudades Zolina y Cáceres. **(0.5 puntos)**
2. Sea la recta de ecuación $-3x - 2y = 1$ calcula:
   a) Un punto. **(0.25 puntos)**
   b) Un vector director. **(0.5 puntos)**
   c) La pendiente. **(0.25 puntos)**
   d) La ordenada en el origen. **(0.25 puntos)**
3. Teniendo el punto de coordenadas $A(2,2)$ y el vector director $\bar{v} = (-1,1)$, expresa las ecuaciones de la recta siguientes: vectorial, paramétrica, continua, general, explícita y punto-pendiente. **(1.5 puntos)**
4. Una persona sale del punto $B(-5,2)$ y se mueve hacia A, moviéndose según el vector $\bar{v} = (-3,-4)$. Después, y desde A, se desplaza hacia C, moviéndose $4\bar{v}$, pero en sentido contrario. Responde a las siguientes cuestiones:



   a) Halla el punto A. **(0.5 puntos)**
   b) Halla el punto C. **(0.5 puntos)**
   c) Halla la distancia recorrida. **(0.5 puntos)**
5. Sean los puntos $A(-4,0)$, $B(1,-5)$, $C(5,2)$ calcula el punto D para que ABCD formen un paralelogramo (calcular matemáticamente). **(1 punto)**
6. Responde a las siguientes preguntas:
   a) Sean las rectas $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \end{cases}$ y $s: x - 3y + 1 = 0$ determina su posición relativa. **(0.5 puntos)**
   b) Si son secantes calcula el punto de corte. **(0.75 puntos)**

Así pues, se puede ver que las preguntas que guardan una mayor relación con las ecuaciones de la recta y posiciones relativas son la 2, 3 y la 6, lo que corresponde con 4 puntos de los 7.5 del examen, y son muy similares a los ejercicios realizados durante la explicación de la teoría:

- Obtener información a partir de la ecuación de una recta: punto, vector director, pendiente y ordenada en el origen.
- Obtener las seis ecuaciones de la recta estudiadas a partir de un punto y un vector director de la misma.
- Estudiar la posición relativa entre dos rectas obteniendo, en su caso, el punto de corte de las mismas.

Los alumnos cuentan con una sesión de 55 minutos la realización del examen.

8.3. Cuestiones y comportamientos esperados

En esta sección se analizan de manera individual cada una de las cuestiones, detallando qué comportamiento se espera por parte de los alumnos para la resolución, tanto los procedimientos correctos como los errores más probables.

8.3.1. Pregunta 1

El apartado a) se espera que no presente problemas para los alumnos. Lo ideal sería que identificaran el vector $\bar{v} = \overline{AB} = B - A$, de coordenadas iguales a las de B menos las de A, y que de ahí despejen $B = A + \bar{v}$, pero es poco probable que lo hagan. Sin embargo, sí se espera que los alumnos escriban la operación final sustituyendo A y $\bar{v}$ por sus valores correspondientes. Se espera que los alumnos dibujen los vectores gráficamente para ayudar a la comprensión del problema.

El apartado b) se presupone más complicado. A pesar de haber explicado la obtención del punto medio a partir del vector $\overline{AB}$, multiplicándolo por $1/2$ y sumándoselo a las coordenadas de A, de manera que $PM = A + \frac{\overline{AB}}{2}$, lo más probable es que la mayor parte de los alumnos se hayan aprendido de memoria la fórmula y simplemente la apliquen. Los errores previsibles están en escribir mal la expresión y en sustituir de manera incorrecta los valores.

8.3.2. Pregunta 2

El primer paso que se espera por parte de los alumnos consiste en pasar a la expresión explícita, porque así tienen el valor de y en función de x con mayor claridad, y podrían saber de manera inmediata el valor de la pendiente y el de la ordenada en el origen. De hecho, esto hará que algunos alumnos quieran responder primero a los apartados c) y d), ya que tienen la información directamente de la expresión.

Obtener un punto no debería causarles problemas, darán un valor a x y obtendrán el valor correspondiente de y. Para el vector director el camino esperado es que obtengan un segundo punto que pertenezca a la recta y calculen el vector que une ambos puntos. Algunos alumnos calcularán el vector director mediante la pendiente de la recta. Y viceversa, algunos alumnos obtendrán el valor de la pendiente utilizando el vector director del apartado b). Otra manera de obtener la ordenada en el origen que se puede esperar es que los alumnos sustituyan en la ecuación el valor $x = 0$ y obtengan la y correspondiente.

8.3.3. Pregunta 3

Se espera que los alumnos escriban los nombres correspondientes a las expresiones seguidos de la ecuación teórica con los parámetros. Después algunos alumnos simplemente sustituirán y obtendrán las seis ecuaciones de manera aislada, pero se supone que otros alumnos operarán las expresiones para pasar de una a otra.

Los errores esperados consisten en los fallos de memorización, aquellos alumnos que no hayan entendido que todas las expresiones están relacionadas cometerán errores al nombrar los parámetros de las ecuaciones. Además, es muy probable errores al nombrar las expresiones. Aquí se podrán ver un poco los resultados de hacer que los alumnos memoricen las fórmulas en lugar de perseguir que utilicen la más adecuada.

8.3.4. Pregunta 4

El apartado a) consiste en obtener el punto de llegada sabiendo el vector de desplazamiento, por lo que es idéntico a la pregunta 1, y no debería dar mayor problema. Sin embargo, se puede prever que algunos alumnos se confundirán y restarán las coordenadas de B menos las de A, cuando en este caso concreto, habría que restarlas en orden inverso.

En el apartado b) se pueden esperar dos caminos: desde el punto A obtenido en el apartado anterior, desplazarse según el vector $-4\bar{v}$ o desde el punto B inicial desplazarse según el vector $-3\bar{v}$, aunque esta segunda opción es menos probable que la elijan. El principal error que se puede adelantar es olvidar el signo negativo para representar el sentido contrario.

Para el apartado c) también se puede adelantar dos caminos: algunos alumnos calcularán los vectores $\overline{BA}$ y $\overline{AC}$ y sumarán los módulos correspondientes, y otros observarán que la distancia recorrida es $5|\bar{v}|$ y simplificarán los cálculos. A parte de errores de cuentas, se puede suponer que algunos alumnos cometerán el error de decir que la distancia recorrida es $\overline{BC} = 3\bar{v}$.

8.3.5. Pregunta 5

Lo primero que se espera por parte de los alumnos es que representen los puntos en los ejes coordenados, para hacerse una idea de dónde tiene que quedar el punto D. Después lo ideal sería que escribieran los vectores e igualaran sus coordenadas, y que despejaran así las coordenadas del punto D. Finalmente, se espera que los estudiantes comparen el resultado obtenido analíticamente con la representación gráfica, para poder validar la solución.

8.3.6. Pregunta 6

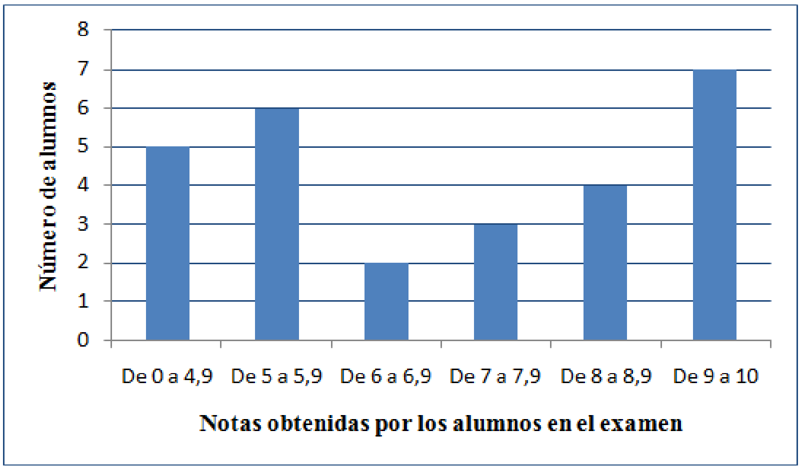
El apartado a) consiste en determinar la posición relativa entre dos rectas, y se espera que lo hagan comparando las pendientes. Para la recta r, expresada mediante las ecuaciones paramétricas, se espera que obtengan el vector director y, con éste, la pendiente; aunque es probable que algunos alumnos intenten pasar a la expresión explícita. La recta s les resultará más sencilla manejar y pasar a la explícita para tener, de manera inmediata, la pendiente correspondiente. De haber alguna dificultad, vendrá de la recta r. Se espera que identifiquen correctamente la pendiente de cada recta, que digan que son diferentes y que, por tanto, las rectas son secantes. No hace falta que den la información de la ordenada en el origen, pero es probable que algún alumno la proporcione.

Para calcular el punto de corte en el apartado b) el primer paso que harán los alumnos, si no lo han hecho en el apartado anterior, será pasar la recta r a la expresión general o explícita. Como ya tienen la pendiente y pueden sacar fácilmente un punto, lo lógico sería que calcularan la expresión punto-pendiente en un primer momento. Teniendo las expresiones de la forma adecuada, los alumnos deberán utilizar los métodos de igualación, sustitución y reducción para resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se espera que los alumnos no se limiten a dar el valor de x y de y correspondientes, sino que lo expresen en forma de coordenadas del punto de corte $P(x, y)$.

8.4. Resultados

En esta sección se hace un análisis de los procedimientos empleados por parte de los alumnos, mostrando ejemplos de los aciertos y de los fallos. Así mismo, también se hace una evaluación global de los resultados obtenidos en la nota total. En la Figura 18 se muestran las notas de los alumnos, representando el número de alumnos para cada rango de notas que se tiene en cuenta. Así pues, se puede ver que 22 de los 27 alumnos han aprobado el examen, 14 de ellos con una nota superior a 7. Por tanto, se pueden considerar unos resultados muy satisfactorios. Además, se puede señalar que los 5 alumnos que han suspendido el examen presentan dificultades con la asignatura en general, pues tenían pendiente la segunda evaluación.

Figura 18. Notas obtenidas por los alumnos en el examen



8.4.1. Pregunta 1

Como se había previsto, el apartado a) lo realizan casi todos los alumnos bien y el b), aunque ya presenta más problemas, en general también es resuelto correctamente. Sin embargo, se comprueba que prácticamente ningún alumno recurre a la representación gráfica del vector y de las ciudades.

En la Figura 19 se muestra una resolución perfecta del ejercicio, donde el alumno identifica correctamente $\overline{AB}$ como el vector $\bar{v}$ y despeja de manera correcta el punto B. También obtiene el punto medio utilizando la fórmula.

En la Figura 20 se muestra el formato más habitual de respuesta, donde no se explica detalladamente los pasos y solo se representan los valores numéricos. Además, en este caso, el alumno comete un error de expresión al olvidar los paréntesis del vector; son pocos alumnos los que tienen fallos de este tipo.

Finalmente, en la Figura 21 se muestran ciertos errores en la resolución del apartado b) que muestran fallos en el entendimiento del concepto del punto medio y en la forma de calcularlo.

Figura 19. Resolución perfecta del ejercicio 1

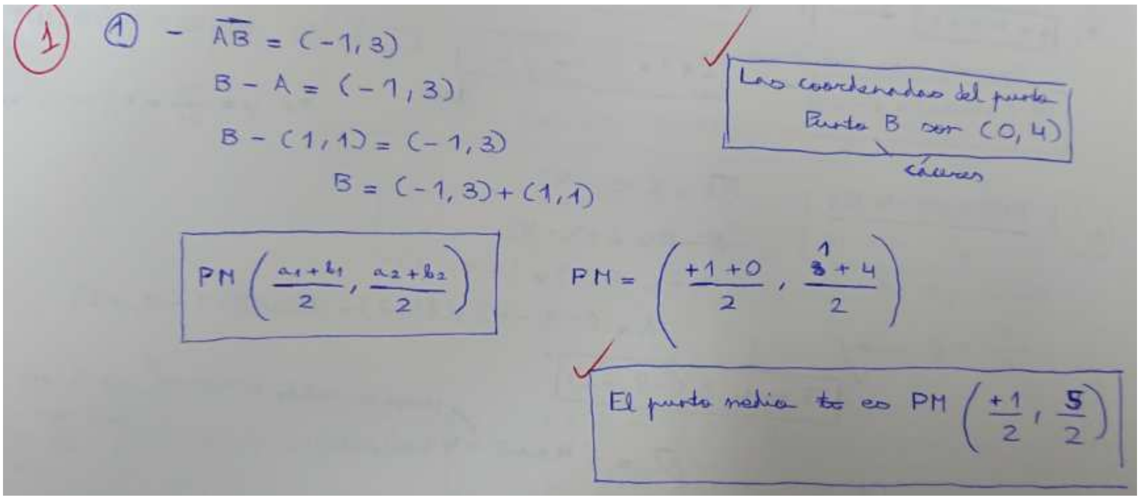


Figura 20. Resolución correcta del ejercicio 1

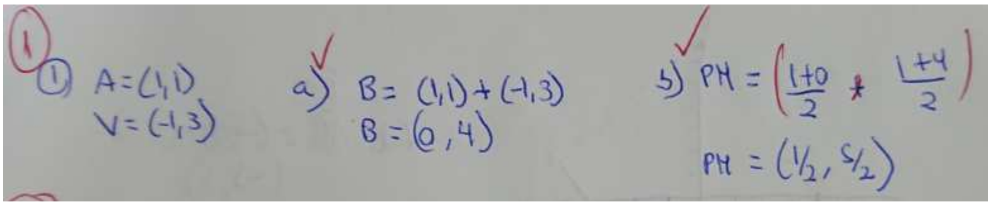
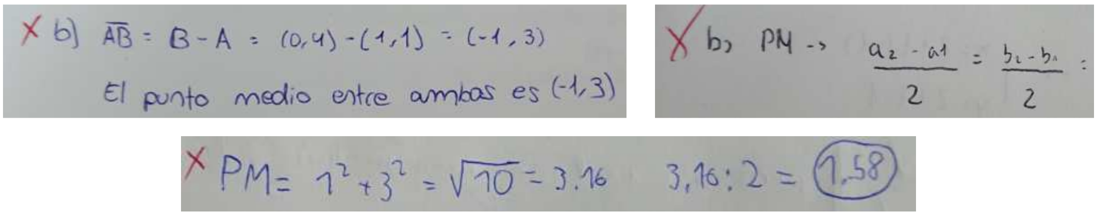


Figura 21. Errores en la resolución del apartado b) del ejercicio 1



8.4.2. Pregunta 2

En las Figura 22 y Figura 23 se muestran resoluciones correctas al ejercicio, utilizando los procedimientos tales y como se esperaban. En la primera, se ve la forma más común entre los alumnos: despeja la y para obtener la expresión explícita y calcula los puntos con ésta, para después, a partir de dos puntos, calcular el vector director; los valores de la pendiente y la ordenada en el origen se extraen de la ecuación explícita. En la segunda, calcula los puntos comprobando que se cumple la ecuación (en lugar de dar un valor a x y despejar la y correspondiente), la pendiente la obtiene a partir del vector director y para la ordenada en el origen supone el valor de $x = 0$ y calcula la y.

Aunque no ha sido muy común, pues casi todos los alumnos lo han conseguido, un par de ellos ha presentado problemas en la obtención de puntos que pertenezcan a la recta. Un ejemplo se muestra en la Figura 24.

En la Figura 25 se muestran errores al obtener la pendiente y la ordenada en el origen. La idea del alumno es extraer la información a partir de la ecuación explícita e intenta despejar la y, pero se queda en un paso intermedio porque no parece entender la diferencia entre $y = mx + n$ y $2y = mx + n$. Finalmente, en la Figura 26 se muestra un error anecdótico de carácter algebraico, donde se despeja de manera incorrecta la y.

Figura 22. Resolución correcta del ejercicio 2 (más común)

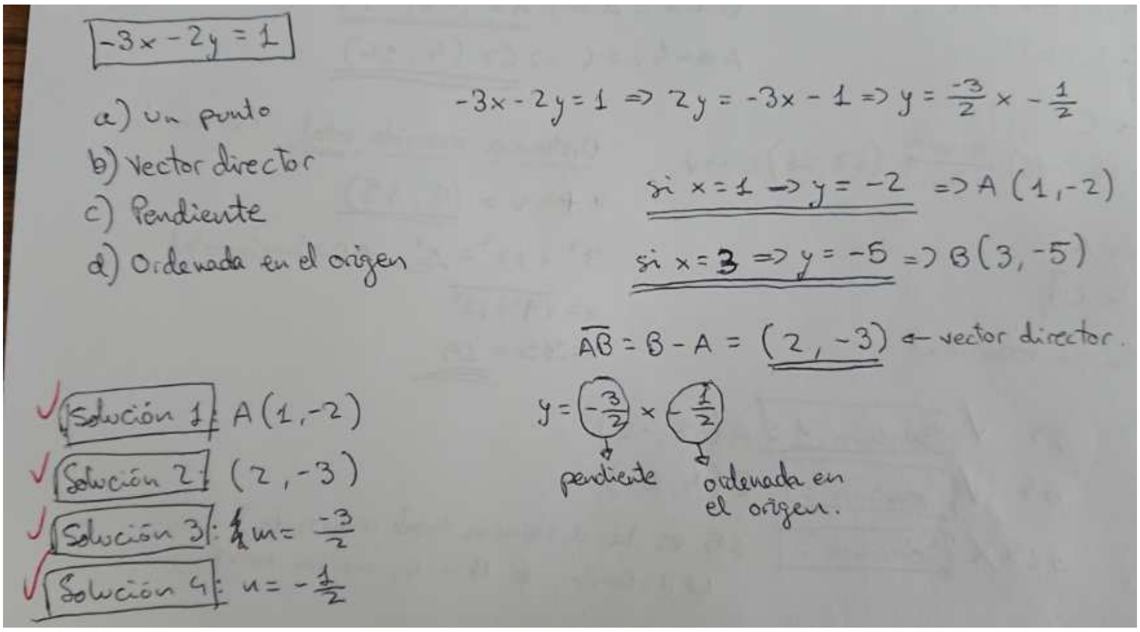


Figura 23. Resolución correcta del ejercicio 2 (menos común)

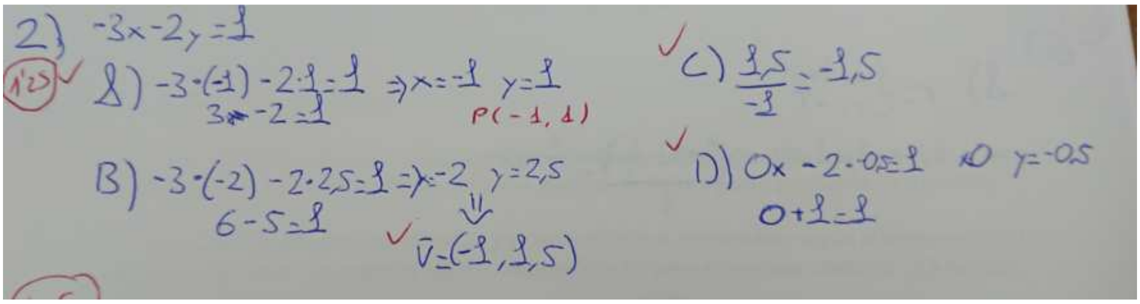


Figura 24. Error al obtener puntos pertenecientes a una recta

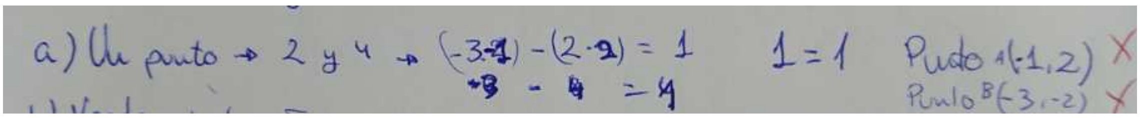
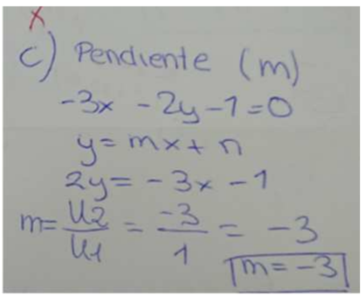


Figura 25. Error de concepto en la ecuación explícita



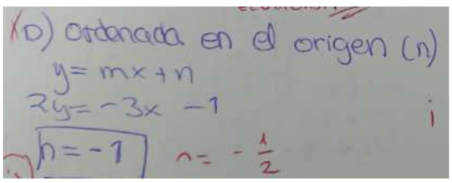
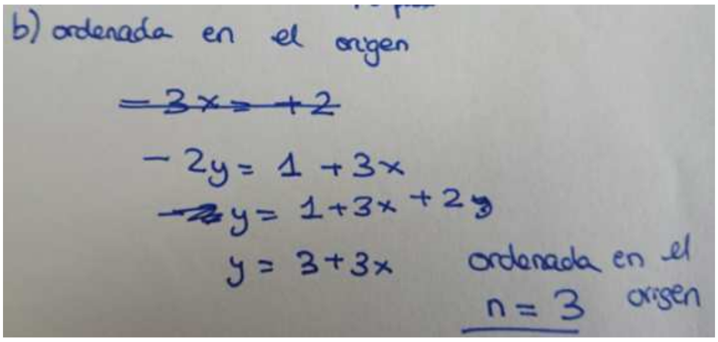


Figura 26. Error algebraico al intentar pasar a la ecuación explícita



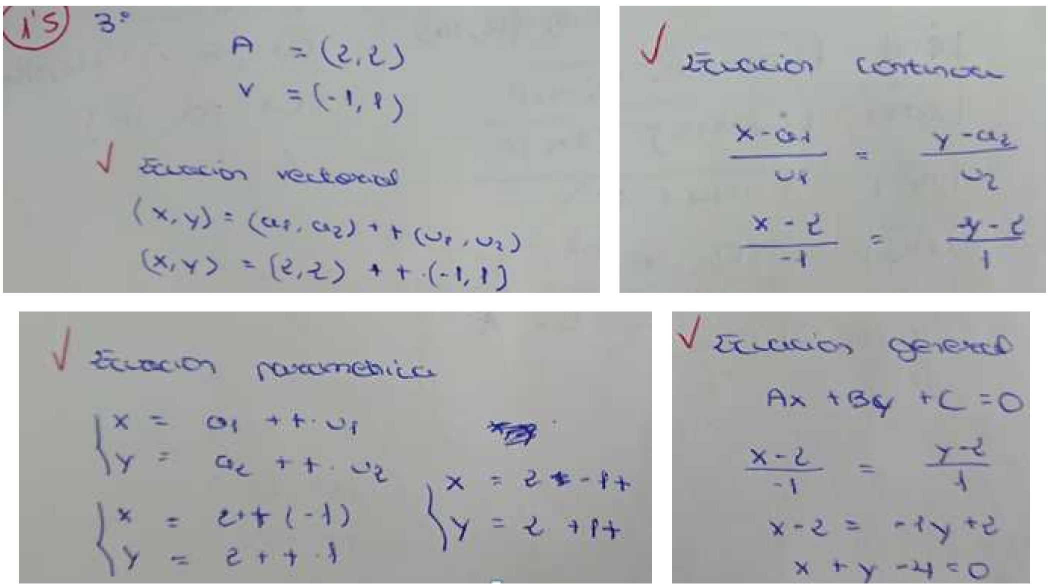
8.4.3. Pregunta 3

Este ejercicio ha sido resuelto, en general, de manera correcta, mostrando un procedimiento como el que se ve en la Figura 27. Se escriben los nombres de las ecuaciones, con la fórmula y la sustitución de los valores concretos. La ecuación general se tiende a obtener operando la ecuación continua y la explícita deriva de la general. En la Figura 28 se muestra una alternativa que solo dos alumnos de la clase han escogido: han memorizado cómo obtener los valores A, B y C de la ecuación general en función del punto y del vector director.

Un grupo reducido de alumnos ha mostrado desconocimiento sobre qué representa la n en la ecuación explícita o incapacidad en el cálculo de la ordenada en el origen. Un ejemplo de esto puede verse en la Figura 29, donde se observa que sustituyen el valor de la pendiente pero no saben qué hacer con la n.

Finalmente, en la Figura 30 se ve una recopilación de los errores más típicos que han tenido lugar en la resolución de este ejercicio. Estos consisten en la equivocación en los signos de las expresiones, en escribir de manera incorrecta los datos involucrados (intercambiar la posición de a_1 y a_2, y confundir los nombres de las expresiones. Todos estos problemas derivan de fallos en la memorización.

Figura 27. Resolución correcta del ejercicio 3



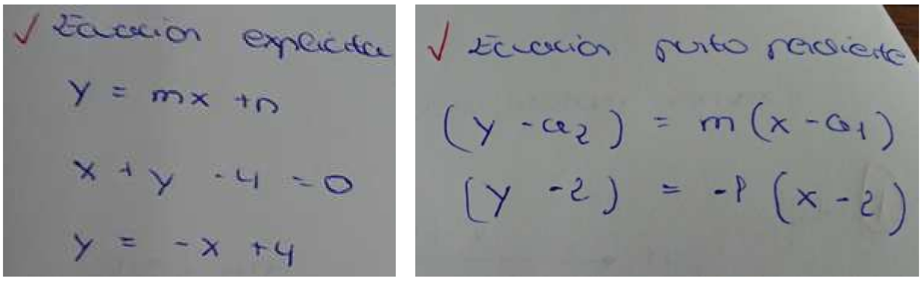


Figura 28. Obtención de la ecuación general a partir de los valores de A, B y C

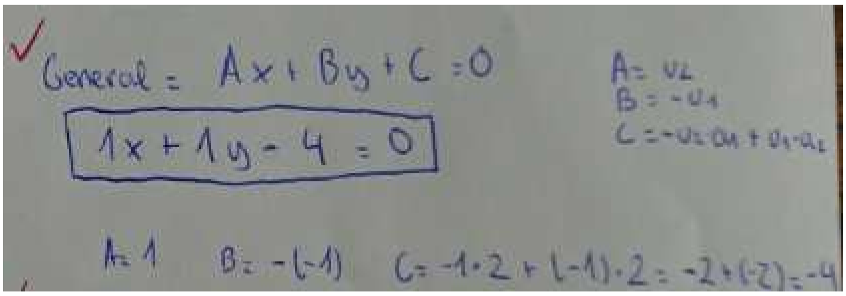


Figura 29. Desconocimiento de que es la n de la ecuación explícita

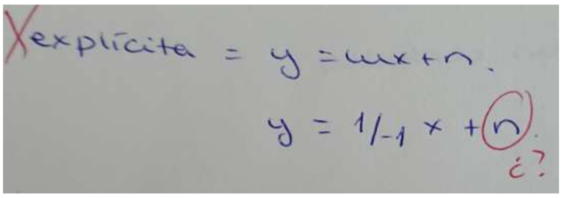
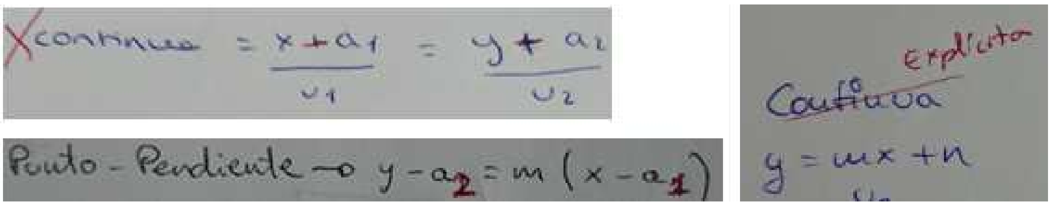


Figura 30. Errores típicos en el ejercicio 3



8.4.4. Pregunta 4

Los apartados a) y b) no han causado problemas a los alumnos, que los han resuelto de la manera esperada y como se ve en la Figura 31. El error más habitual en el apartado b) ha sido no tener en cuenta el cambio de signo en el vector que implica el cambio de sentido, un ejemplo se muestra en la Figura 32.

Por otra parte, la resolución del apartado c) sí ha generado más problemas y son muchos los alumnos que no han sabido resolverlo y han dejado la respuesta en blanco o que lo han realizado de manera incorrecta. En la Figura 33 se observan tres distintos caminos seguidos por los alumnos y que ya habían sido pronosticados: (1) se calcula el módulo de los dos vectores por separado y se suman; (2) se deduce que el recorrido es cinco veces el vector inicial; (3) se calcula el vector total recorrido y se obtiene el módulo de éste.

En la Figura 34 se muestra una compilación de los errores vistos en el cálculo de la distancia total recorrida: (1) el más común es calcular el módulo del vector que une el inicio con el final, a pesar de que no corresponde con la distancia total recorrida sino con el desplazamiento; (2) tres alumnos indican que la distancia recorrida es un vector, lo que supone un error conceptual y falta de comprensión en el significado del módulo; (3) como error anecdótico de un solo alumno, calcula la pendiente de los dos vectores de recorrido y los suma.

Figura 31. Resolución correcta del ejercicio 4, apartados a) y b)

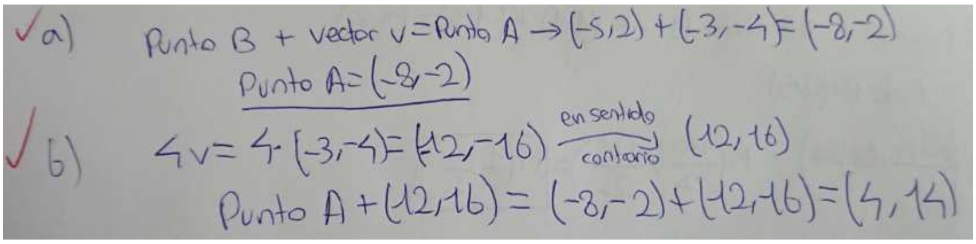


Figura 32. Error con el signo en el apartado b) del ejercicio 4

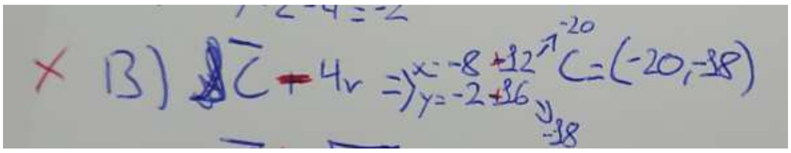
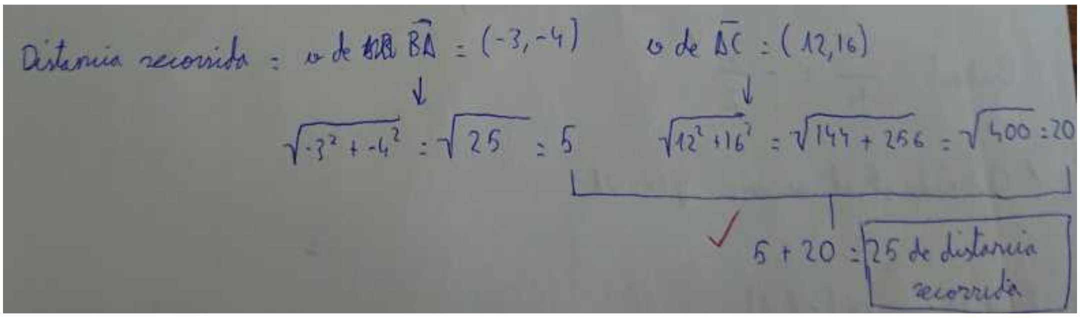
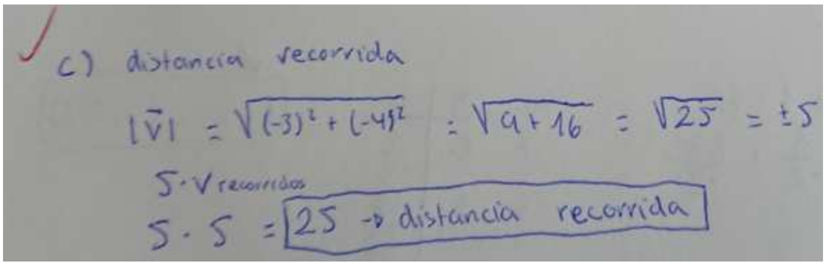


Figura 33. Resoluciones correctas del ejercicio 4, apartado c)

(1) 

(2) 

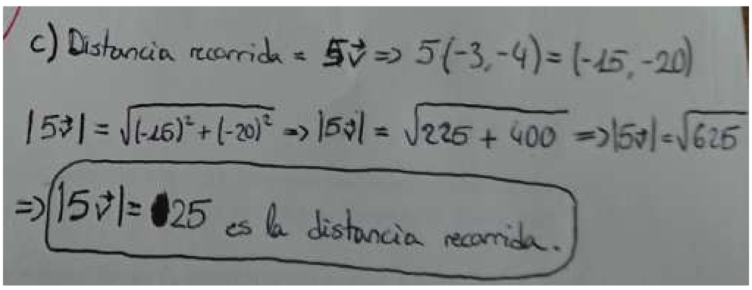
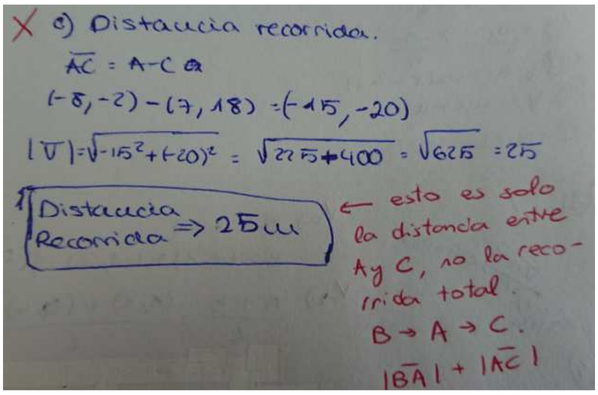
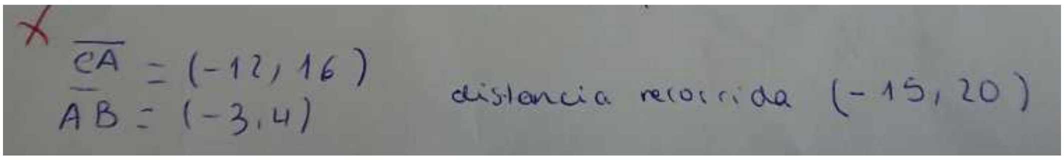
(3) 

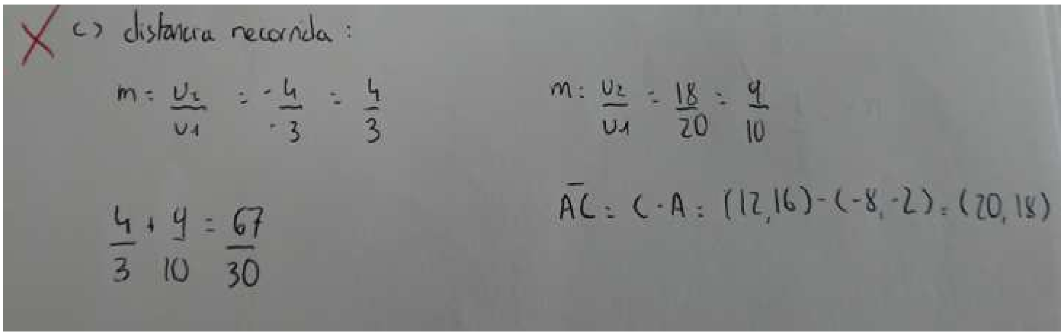
Figura 34. Errores en la resolución del apartado c) del ejercicio 4



(1)



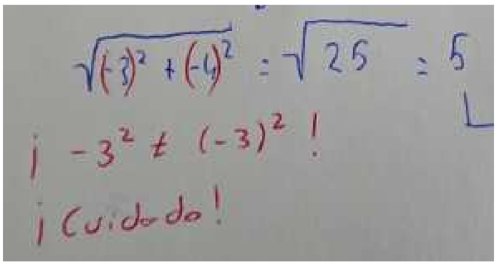
(2)



(3)

Finalmente, en la Figura 35 se muestra un error de concepto o de rigor en las operaciones, ya que son varios alumnos los que lo cometen y consideran que $-3^2 = (-3)^2$.

Figura 35. Error de concepto en las operaciones



8.4.5. Pregunta 5

Aunque el primer paso lógico era representar los puntos con el sistema de ejes cartesianos para entender mejor la situación y poder ver qué vectores son los que pueden ayudar en la resolución, se ve que gran número de los alumnos no utilizan ninguna representación gráfica o solo una intuitiva donde dibujan los puntos pero sin mirar las coordenadas. En la Figura 36 se ve cómo el alumno responde de manera correcta y detallada, pero sin la utilización de representaciones gráficas. Por otra parte, se puede ver en la Figura 37, cómo hay otros alumnos que utilizaron primero una representación intuitiva e incorrecta, para después sí tener en cuenta las coordenadas.

En la Figura 38 se muestra un error muy común que ha sido cometido por varios miembros de la clase, y es la representación del vector como una línea, sin ninguna flecha indicando el sentido. Esto puede marcar un error muy grave de concepto ya que no ven que el vector tiene un principio y un final y, por tanto, pueden confundir los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$.

Finalmente, en la Figura 39 se muestra un ejemplo de error cometido por dos alumnos. A pesar de utilizar una representación gráfica que les da de manera intuitiva las coordenadas del punto D, al obtenerlo de manera analítica no comprueban con el dibujo, ya que esto les habría servido para ver la incoherencia del resultado. Esto lleva a pensar que los alumnos ven la representación como un extra y no como una ayuda que les sirva para la resolución y comprobación.

Figura 36. Resolución correcta del ejercicio 5. Sin representación gráfica

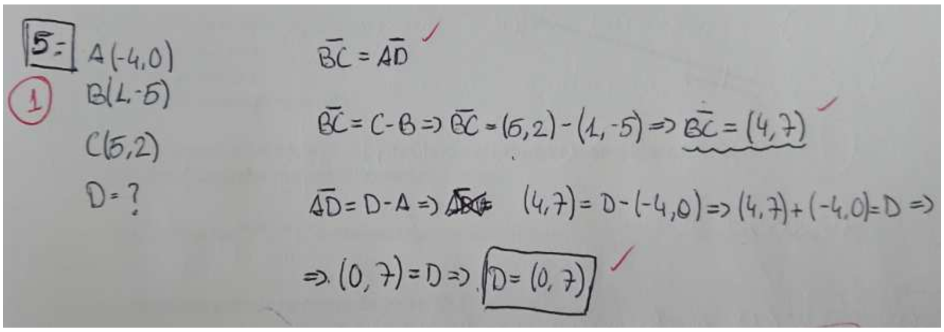


Figura 37. Resolución correcta del ejercicio 5. Con representación gráfica

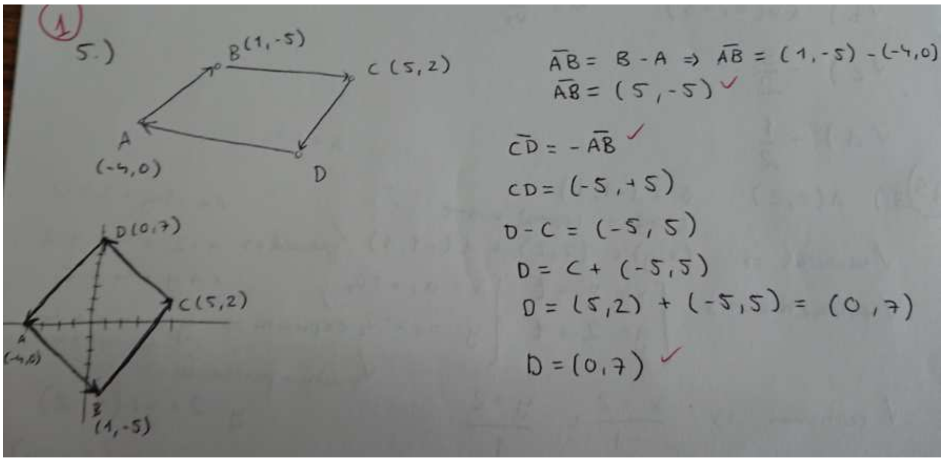


Figura 38. Error al no representar el vector con flecha

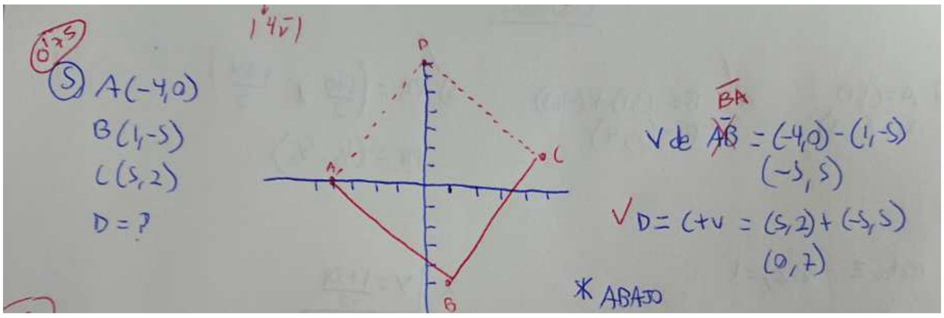
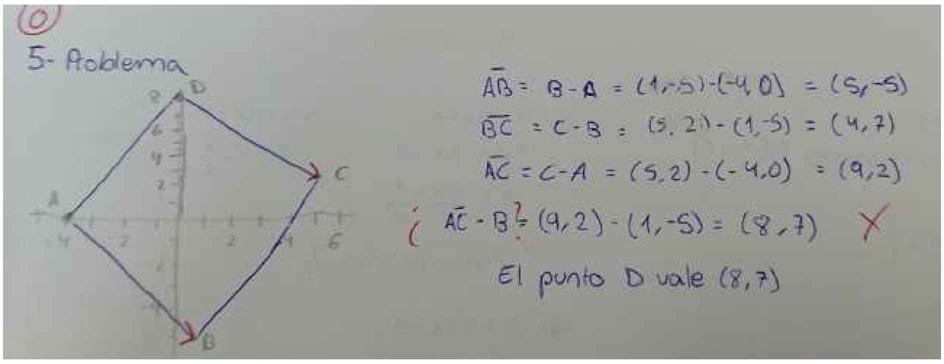


Figura 39. Error al no comprobar los resultados



8.4.6. Pregunta 6

Este ejercicio ha sido realizado como se había adelantado y se han visto las dificultades previstas. Una sola persona ha resuelto el sistema de ecuaciones para dar el punto de corte de las dos rectas, pero sin analizar primero la posición relativa de las mismas (es decir, solo ha resuelto el apartado b). El resto de los alumnos que han respondido a la pregunta, ha realizado las dos partes o solo la primera, aunque no se puede asegurar si ha sido por falta de tiempo al ser el último ejercicio del examen o por no ser capaces de resolver el sistema de ecuaciones.

La recta r se expresa mediante las ecuaciones paramétricas por lo que se siguen dos caminos: pasar a la ecuación explícita, donde identifican claramente la pendiente o identificar el vector director de la recta y, con éste, calcular la pendiente. Ejemplos de estos casos se muestran en la Figura 40 y en la Figura 41, respectivamente. Aunque se puede afirmar que un mayor número de alumnos ha seguido el primer procedimiento. También se puede señalar, como se ve en la Figura 42, que gran parte de los alumnos ha seguido el procedimiento de la manera correcta, pero ha fallado a la hora de justificar por qué las rectas son secantes.

Como caso de interés, aunque muy aislado, pues solo un alumno lo ha cometido, en la Figura 43 se ve cómo el alumno tiene un fallo de concepto muy grave, pues considera que la pendiente de dos rectas es la misma cuando dos rectas son secantes. Otro error, cometido solo por tres alumnos, ha sido la incapacidad de pasar de manera correcta de las ecuaciones paramétricas a la ecuación explícita.

En la Figura 44 se muestra un ejemplo de la obtención del punto de corte entre dos rectas. Tres alumnos han cometido errores de cuentas pero el resto que lo ha intentado, lo ha resuelto de manera correcta. Una vez obtenidos los valores de x e y al resolver el sistema de ecuaciones, casi todos los alumnos, con dos excepciones, han representado el punto de corte como $P(x, y)$, dando una interpretación geométrica a la solución del sistema.

Figura 40. Resolución correcta del ejercicio 6 utilizando la ecuación explicita de r

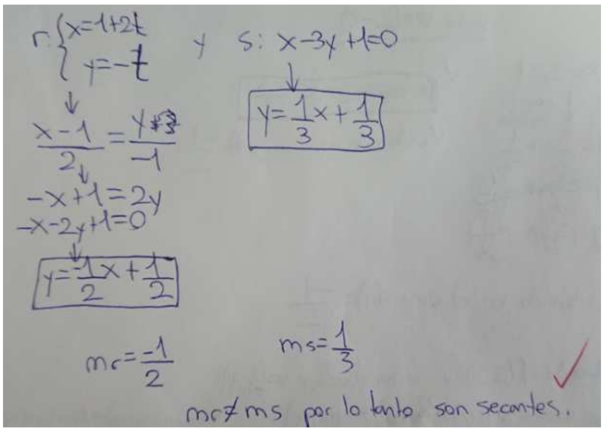


Figura 41. Resolución correcta del ejercicio 6 utilizando el vector director de r

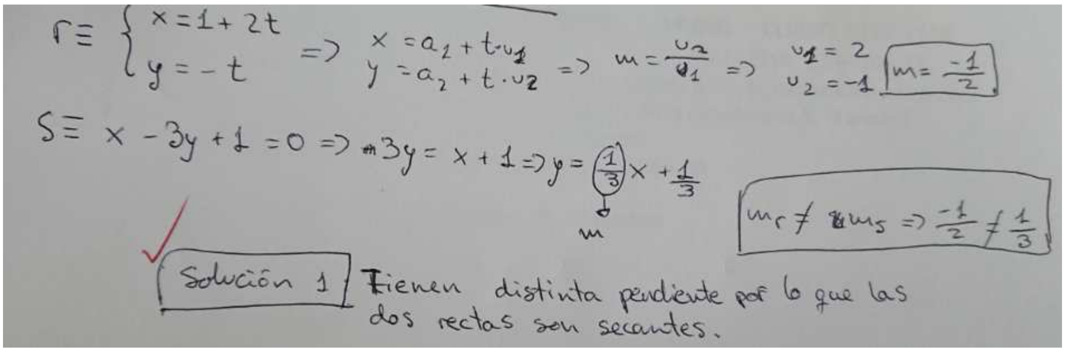


Figura 42. Resolución correcta del ejercicio 6 pero sin justificación correcta

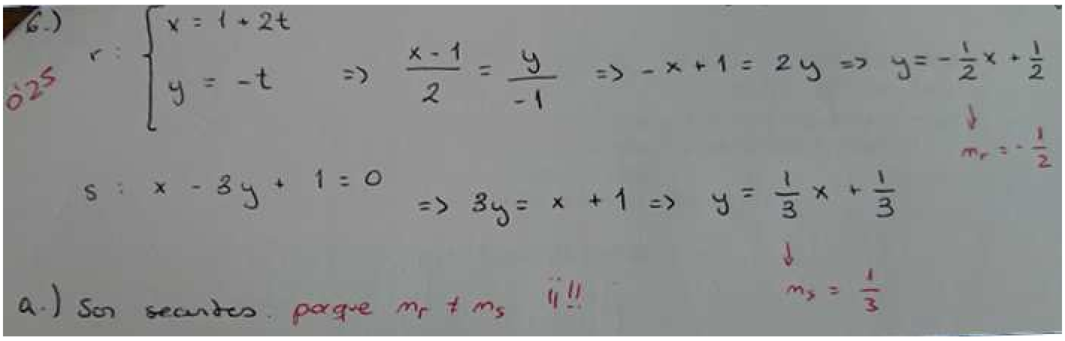


Figura 43. Fallo de concepto de los valores necesarios de las pendientes

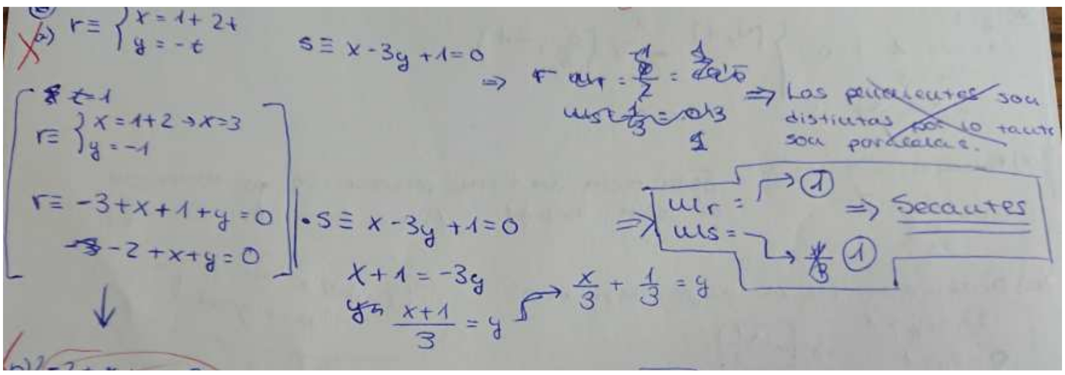
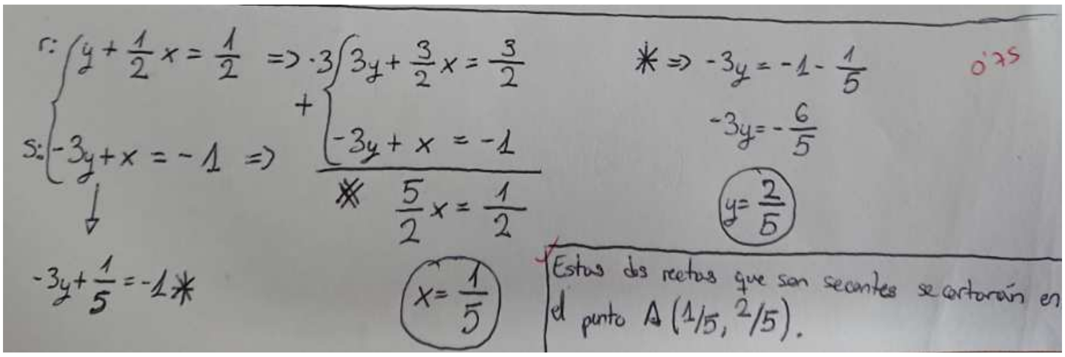


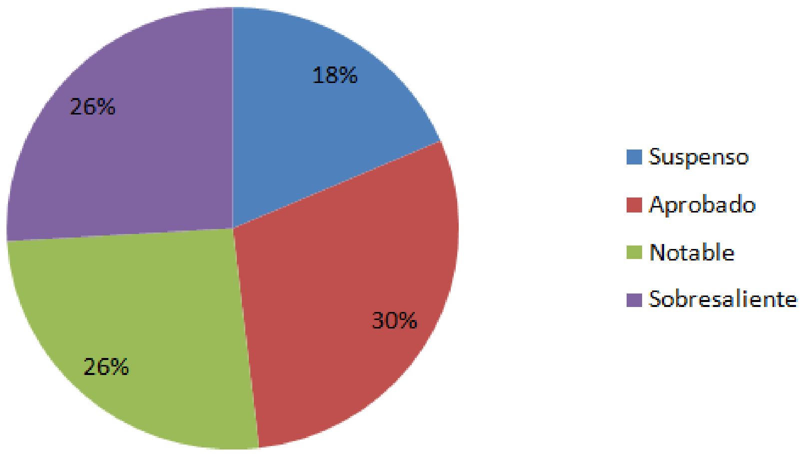
Figura 44. Resolución correcta del punto de corte entre dos rectas



8.5. Discusión de los resultados

En primer lugar, se puede afirmar que los resultados del examen son bastante buenos, ya que solo 5 de los 22 alumnos han suspendido el examen, lo que supone el 18%. Por otra parte, se ve que son 8 alumnos los que han obtenido una nota entre el 5 y el 6.9, lo que se considera un aprobado, y corresponde con el 30% de la clase. Así pues, el 54% de los alumnos, más de la mitad, han obtenido una nota superior a 7. Son 7 los alumnos que han obtenido un notable (7-8.9) y otros tantos un sobresaliente (9-10). Una representación de estos datos se muestra en la Figura 45.

Figura 45. Porcentaje de alumnos según los resultados del examen



También se ha podido ver que la mayor parte de los pronósticos de la sección *"8.3. Cuestiones y comportamientos esperados"* se han cumplido en la sección *"8.4. Resultados"*, al analizar las respuestas de los alumnos.

Algunos de los errores más comunes son los que se describen a continuación:

- Dibujar el vector como una línea sin poner flecha para tener en cuenta el sentido, lo que viene asociado con no distinguir la diferencia entre $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$.
- Relajación en la escritura al olvidar, en algunos casos, poner la raya o flecha encima del vector, así como no poner $|\overline{AB}|$ para representar el módulo del vector.

- No utilizar las representaciones gráficas como un medio que les ayude a resolver los problemas y comprobar si la respuesta es coherente, y verlo más como un elemento adicional sin relación.
- Fallos al memorizar los nombres de las ecuaciones de la recta y las expresiones de las mismas.
- Dificultad para pasar de las ecuaciones paramétricas a la general o explícita.

Finalmente, se puede concluir que la ecuación a la que más recurren los alumnos es la explícita, tanto para la obtención de puntos, ya que queda la y en función de la x, como para saber de manera inmediata los valores de la pendiente y de la ordenada en el origen. Esto puede deberse a su semejanza con la fórmula funcional vista en años anteriores. Además, es algo positivo porque es la que más se va a utilizar en cursos siguientes.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Esta última parte del trabajo se utiliza para resumir las ideas clave que se han conseguido, tanto derivadas del estudio realizado como generadas por la nueva propuesta que se ha sugerido. Por ello, cuenta con tres secciones. En primer lugar se hace una brece síntesis de lo que se ha visto hasta el momento. En segundo lugar se resumen las conclusiones más relevantes de lo analizado. Finalmente, se comentan unas cuestiones abiertas para futuras investigaciones.

Breve síntesis

El objetivo de este Trabajo Fin de Máster ha sido estudiar las diferentes ecuaciones de la recta, así como los contenidos previos necesarios para su aprendizaje, como son los vectores y sus operaciones, que sirven también para un posterior estudio de las posiciones relativas entre dos rectas, concretamente en el curso de 4º ESO. Para ello, el trabajo se ha dividido en dos partes.

La primera de ellas, titulada *"Las ecuaciones de la recta en el currículo vigente y en los libros de texto",* ha servido para analizar el contexto en el que se encuentra la enseñanza. Por eso, en primer lugar, se ha realizado un estudio longitudinal del currículo para el tercer ciclo de Primara, en ESO y en Bachillerato, analizando una serie de descriptores que guardan relación con el tema indicado. Así se ha podido ver la evolución de los contenidos y de los criterios de evaluación en los distintos cursos. En segundo lugar, se han analizado los libros de texto que se utilizan en el centro donde se han realizado las prácticas para el curso de interés y los dos inmediatamente inferiores y superiores, con la idea de analizar los problemas tipo en los diferentes años. Finalmente, se ha dedicado una sección al análisis de las conclusiones obtenidas mediante la comparación entre los distintos cursos y entre la legislación vigente y los libros de texto.

En la segunda de ellas, titulada *"Análisis de un proceso de estudio de las ecuaciones de la recta en 4º ESO",* se ha propuesto un proceso de estudio sobre las ecuaciones de la recta, que se puso en marcha en un aula de 4º ESO durante la realización del Practicum II del Máster. Por eso, en primer lugar, se ha hecho un análisis sobre el contenido matemático de interés en el curso y cómo se explica en el libro de texto de referencia, así como un estudio de las dificultades y errores previstos. Por otra parte, a continuación se ha detallado el proceso de enseñanza recomendado, con la temporalización y la descripción de las actividades planeadas. Finalmente, se ha explicado un proceso de experimentación, donde se ha entregado a los alumnos un cuestionario para poder analizar los procedimientos empleados por su parte y los resultados obtenidos.

Conclusiones generales del trabajo

El estudio de las rectas ocupa un papel importante dentro del currículo, ya que pone en relación muchos campos dentro de las matemáticas al involucrar gran variedad de contenidos como pueden ser funciones, ecuaciones, sistemas de ecuaciones, representaciones gráficas... Se ha visto cómo en los primeros cursos se ve un enfoque funcional, empezando con la función lineal, afín y la razón de proporcionalidad; para, a partir de 4º ESO, ver un enfoque más geométrico.

También se ha llegado a la conclusión de que el estudio de las rectas tiene más importancia en la rama académica y en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología, donde se terminan viendo las rectas en el espacio. En el Bachillerato de Ciencias Sociales solo se ve la ecuación explícita de la recta.

Por otra parte, y en relación a lo visto en los libros de texto, se ve la presencia de muchos ejercicios muy similares entre sí y que buscan más el dominio de la mecánica. No aparecen casi problemas contextualizados, cuando éstos se pueden considerar de gran importancia, ya que son los que relacionan las matemáticas que se introducen en los centros escolares con el día a día de las personas.

Concretando este tema en la enseñanza de 4º ESO y viendo el libro de texto [6], se aprecia que se introducen las ecuaciones de la recta a partir de la ecuación vectorial, como continuación natural del estudio de vectores de las primeras secciones de la unidad didáctica. Sin embargo, de cara a que el alumno consiga un aprendizaje significativo, este camino no se considera del todo recomendable, ya que no tiene en cuenta ni el aprendizaje sobre la recta realizado en cursos anteriores, como función lineal y afín, ni la contextualización del concepto. Por esta razón, se elige en el presente trabajo la alternativa descrita por el libro del saber [9]. Ésta consiste en centrar la importancia en la pendiente de la recta, lo que ayuda a una mayor contextualización y a no ver solo la ecuación como una expresión algebraica sin sentido geométrico. Desde este punto de vista se puede afianzar primero lo visto sobre la recta en cursos pasados para unirlo, después, con su carácter vectorial.

Durante la explicación del proceso de enseñanza propuesto se ha comentado la utilización de programas como GeoGebra, tanto para la impartición de la teoría gracias a la posibilidad de mostrar infinidad de ejemplos que ayuden a la comprensión como para que el alumno pueda hacer ejercicios tipo que se autocorrijan. Esto es posible en el tema de la recta gracias a que hay poca variedad de ejercicios tipo y se busca la perfección en la mecánica de resolución.

Los resultados de la experimentación siguiendo el camino marcado por el libro de texto [6] han sido muy positivos, aunque se ha podido observar que algunos alumnos han cometido los errores consecuencia de las dificultades previstas. Se puede concluir que los conceptos que más problemas han causado han sido los relacionados con el nuevo contenido vectorial, introducido por primera vez en 4º ESO. Sin embargo, parece que los alumnos controlan más el concepto de pendiente y tienen cierta tendencia a elegir la expresión explícita de la recta sobre las demás.

Cuestiones abiertas

La primera pregunta que cabría plantearse sería ver si es necesario el uso de tantas ecuaciones de la rectas, pidiendo la memorización de los nombres y las expresiones. Tal vez sería más adecuado buscar que el alumno sea capaz de encontrar la expresión con que resolver el problema con mayor sencillez en cada uno de los casos planteados.

También es necesario ver cómo atajar el problema de la no contextualización de los ejercicios. Si solo se piensa en la realización de los exámenes, resulta útil que haya pocos ejercicios tipo y que se busque la mejora de la mecánica para que los estudiantes los resuelvan de manera correcta. Sin embargo, de cara a un aprendizaje significativo, mucho más formativo y útil para cursos posteriores, parece más adecuada la utilización de *problemas de letra* que permitan contextualizar la necesidad del dominio de las rectas con la vida real.

En la propuesta de estudio presentada se ha mostrado el interés de utilizar GeoGebra para la explicación y estudio de los contenidos, pero parece interesante ver si puede ser aún de mayor utilidad y cómo conseguirlo.

Finalmente, en el Capítulo 7 se presenta el proceso de estudio propuesto y se explica cómo se dedica una sesión entera al repaso de la pendiente, para recordar conocimientos de cursos anteriores que van a ser de vital importancia para el estudio de los nuevos contenidos. Sería necesario llevar esta sesión a la práctica para plantearse si va a ser realmente de utilidad o si, por el contrario, no solo no es beneficiosa, sino que utiliza el tiempo que podría emplearse con otros contenidos.

De igual manera, sería recomendable poner en práctica el proceso de estudio propuesto en el Capítulo 7 de manera general, para poder realizar una experimentación global sobre el camino planteado según el libro del saber [9]. Los resultados obtenidos en el Capítulo 8 proceden de la propuesta descrita en el libro de texto [6], y podría resultar muy interesante comparar ambos caminos.

Referencias

[1] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, núm. 295, de 10 de diciembre de 2013, pp. 97858 a 97921.
http://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf

[2] Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado, núm. 52, de 1 de marzo de 2014, pp. 19349 a 19420.
https://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf

[3] Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, núm. 3, de 3 de enero de 2015, pp. 169 a 546.
https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

[4] Nieto, M., Pérez, A. y Alcaide, F. (2016). *Matemáticas 2º ESO*. SM.

[5] Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M. y Pérez, A. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO*. SM.

[6] Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., Pérez, A. y Donaire, J. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. SM.

[7] Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Sanz, L. y Serrano, E. (2015). *Matemáticas I orientadas a las enseñanzas académicas.* SM.

[8] Alcaide Guindo, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Rivière, V. y Sanz, L. (2016). *Matemáticas II orientadas a las enseñanzas académicas*. SM.

[9] Parker, T. y Baldridge, S. (2008). *Elementary geometry for teachers*. Sefton-Ash Publishing.

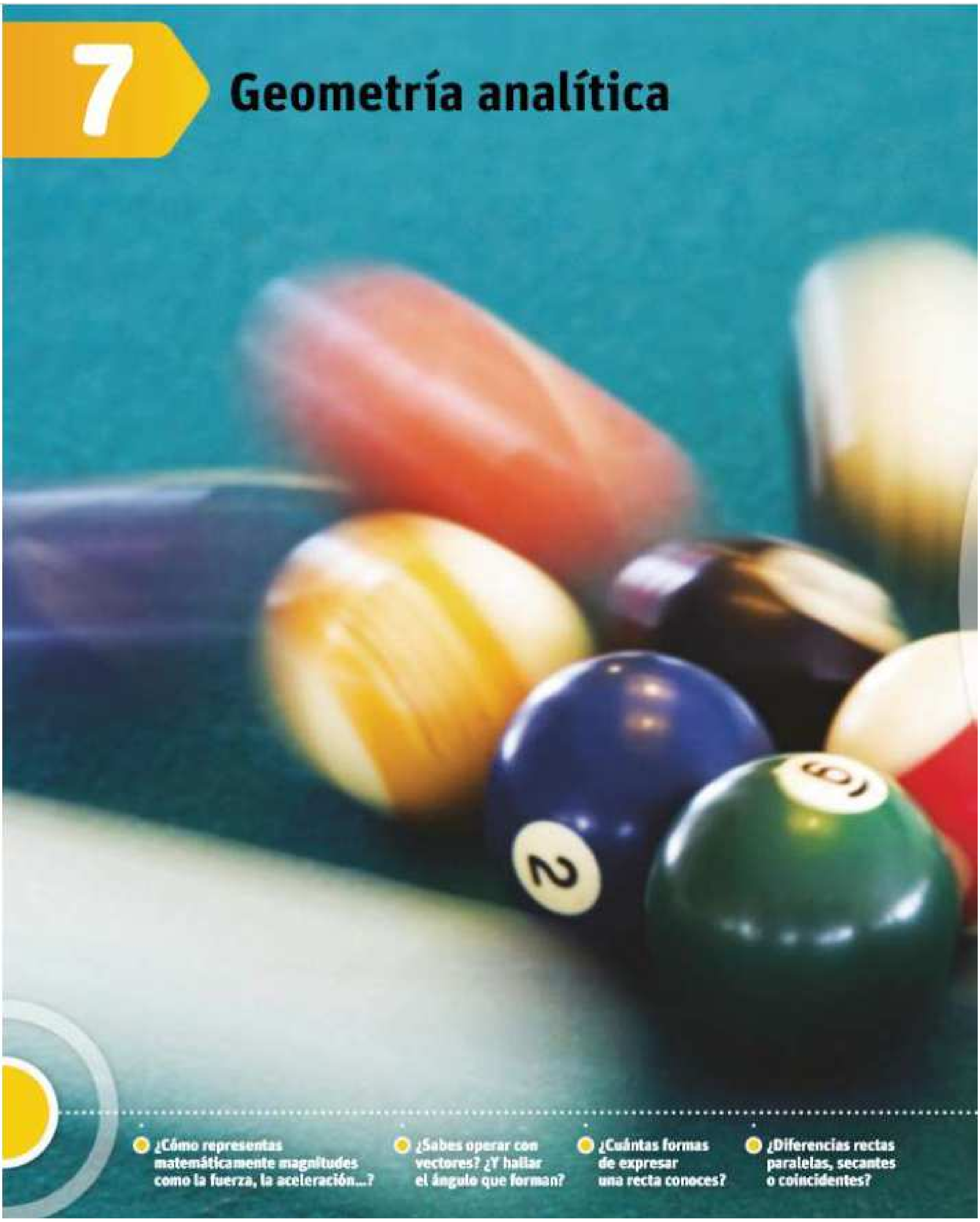
[10] Parker, T. y Baldridge, S. (2004). *Elementary mathematics for teachers*. Sefton-Ash Publishing.

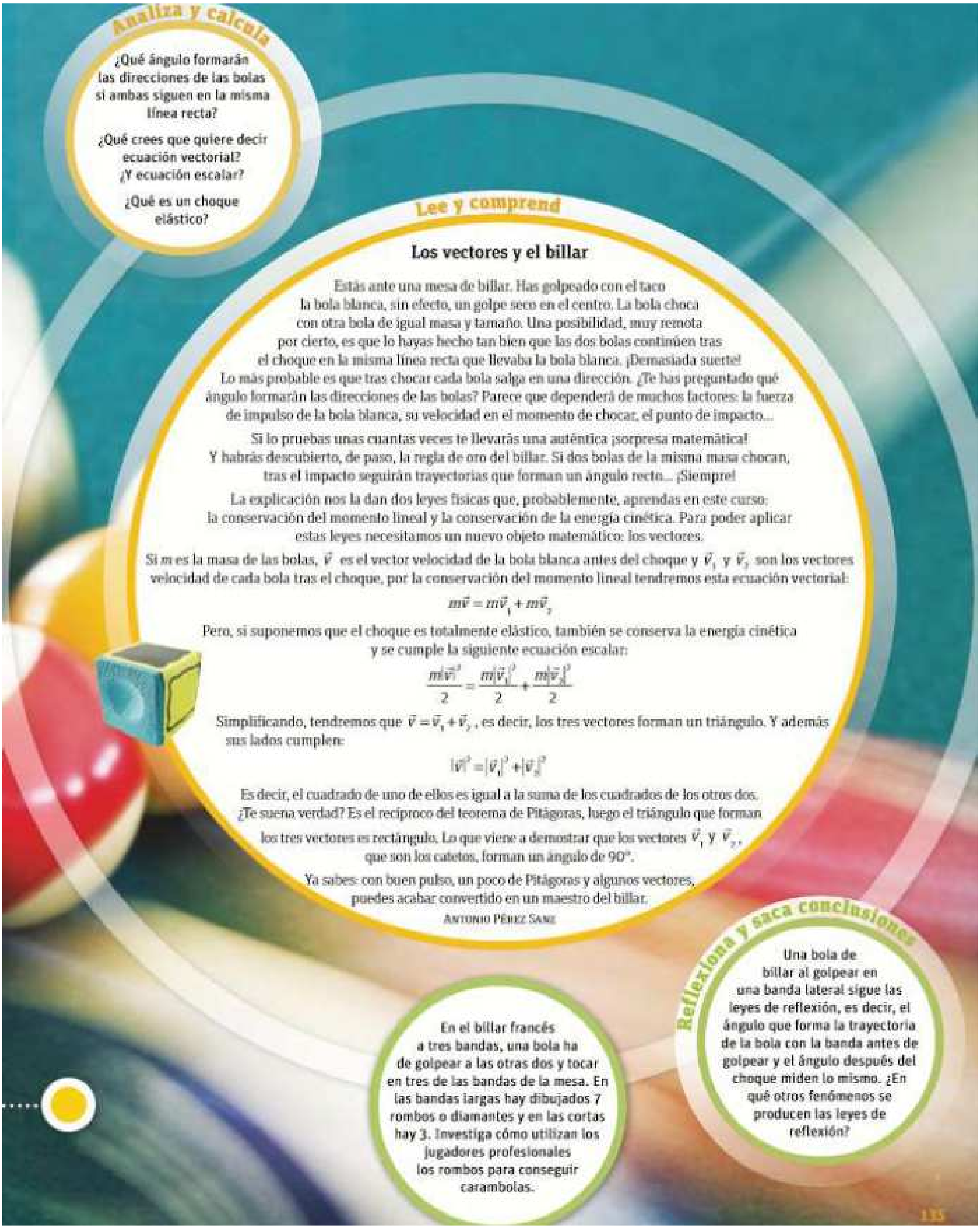
[11] Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 133–156.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Programas de GeoGebra como actividades adicionales
C. Ejercicios de tarea
D. Índice de tablas
E. Índice de figuras

A. Unidad didáctica del libro de texto





Analiza y calcula

¿Qué ángulo formarán las direcciones de las bolas si ambas siguen en la misma línea recta?

¿Qué crees que quiere decir ecuación vectorial? ¿Y ecuación escalar?

¿Qué es un choque elástico?

Lee y comprende

Los vectores y el billar

Estás ante una mesa de billar. Has golpeado con el taco la bola blanca, sin efecto, un golpe seco en el centro. La bola choca con otra bola de igual masa y tamaño. Una posibilidad, muy remota por cierto, es que lo hayas hecho tan bien que las dos bolas continúen tras el choque en la misma línea recta que llevaba la bola blanca. ¡Demasiada suerte! Lo más probable es que tras chocar cada bola salga en una dirección. ¿Te has preguntado qué ángulo formarán las direcciones de las bolas? Parece que dependerá de muchos factores: la fuerza de impulso de la bola blanca, su velocidad en el momento de chocar, el punto de impacto...

Si lo pruebas unas cuantas veces te llevarás una auténtica ¡sorpresa matemática! Y habrás descubierto, de paso, la regla de oro del billar. Si dos bolas de la misma masa chocan, tras el impacto seguirán trayectorias que forman un ángulo recto... ¡Siempre!

La explicación nos la dan dos leyes físicas que, probablemente, aprendas en este curso: la conservación del momento lineal y la conservación de la energía cinética. Para poder aplicar estas leyes necesitamos un nuevo objeto matemático: los vectores.

Si m es la masa de las bolas, $\vec{v}$ es el vector velocidad de la bola blanca antes del choque y $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son los vectores velocidad de cada bola tras el choque, por la conservación del momento lineal tendremos esta ecuación vectorial:

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

Pero, si suponemos que el choque es totalmente elástico, también se conserva la energía cinética y se cumple la siguiente ecuación escalar:

$$\frac{m|\vec{v}|^2}{2} = \frac{m|\vec{v}_1|^2}{2} + \frac{m|\vec{v}_2|^2}{2}$$

Simplificando, tendremos que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, es decir, los tres vectores forman un triángulo. Y además sus lados cumplen:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2$$

Es decir, el cuadrado de uno de ellos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. ¿Te suena verdad? Es el recíproco del teorema de Pitágoras, luego el triángulo que forman los tres vectores es rectángulo. Lo que viene a demostrar que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, que son los catetos, forman un ángulo de 90°.

Ya sabes: con buen pulso, un poco de Pitágoras y algunos vectores, puedes acabar convertido en un maestro del billar.

ANTONIO PÉREZ SANZ

Reflexiona y saca conclusiones

Una bola de billar al golpear en una banda lateral sigue las leyes de reflexión, es decir, el ángulo que forma la trayectoria de la bola con la banda antes de golpear y el ángulo después del choque miden lo mismo. ¿En qué otros fenómenos se producen las leyes de reflexión?

En el billar francés a tres bandas, una bola ha de golpear a las otras dos y tocar en tres de las bandas de la mesa. En las bandas largas hay dibujados 7 rombos o diamantes y en las cortas hay 3. Investiga cómo utilizan los jugadores profesionales los rombos para conseguir carambolas.

135

1 Vectores fijos y libres en el plano

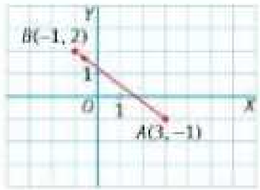
Sabías que...

Los vectores son esenciales en física y otras ciencias. Se utilizan para representar cualquier magnitud que, además de un valor, tiene dirección y sentido, como la velocidad, la aceleración o la fuerza.

Un **vector fijo** del plano, $\overrightarrow{AB}$, es un segmento orientado con **origen** en el punto ***A*** y **extremo** en el punto ***B***.

Ejemplo ▸ Representa el vector de origen $A(3, -1)$ y de extremo $B(-1, 2)$.

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(-4, 3)$, ya que, como se observa en el dibujo, para ir desde el origen A hasta el extremo B se necesita avanzar 4 unidades hacia la izquierda y 3 hacia arriba.



Los elementos de un vector fijo son:

- **Módulo** de un vector es la distancia que separa a su origen de su extremo. Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Dirección** de un vector es la dirección de la recta que pasa por su origen y por su extremo y la de todas sus paralelas.
- **Sentido** de un vector es el que queda determinado al ir desde el origen al extremo.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y recuerda vectores fijos y libres.

Coordenadas de un vector dado por dos puntos

Las **coordenadas** del vector de origen el punto $A(a_1, a_2)$ y de extremo el punto $B(b_1, b_2)$ son las del extremo menos las del origen. Es decir:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Ejemplo ▸ Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ de origen $A(3, -1)$ y de extremo $B(-1, 2)$.

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (-1 - 3, 2 - (-1)) = (-4, 3)$

Ten en cuenta

La distancia entre dos puntos cualesquiera P y Q se puede calcular como el módulo del vector que forman.

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$

Módulo de un vector

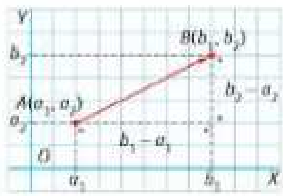
El **módulo** de un vector $\overrightarrow{AB}$ calculado a partir de las coordenadas de su origen y de su extremo es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Para demostrarlo, se representa $\overrightarrow{AB}$.

El módulo de $\overrightarrow{AB}$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos $b_1 - a_1$ y $b_2 - a_2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Ten en cuenta

Si $|\overrightarrow{AB}| = 1$, el vector $\overrightarrow{AB}$ es unitario.

Ejemplo ▸ Calcula el módulo del vector de origen $A(3, -1)$ y de extremo $B(-1, 2)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

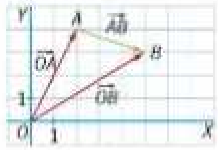
Como el módulo es 5, la distancia entre los puntos A y B es también 5.

Vector de posición

Un **vector de posición** es cualquier vector fijo que tenga como origen el origen de coordenadas. Las coordenadas de un vector de posición coinciden con las coordenadas de su extremo.

Ejemplo ▸ El vector de posición de origen $O(0, 0)$ y extremo el punto $A(3, 4)$ tiene las mismas coordenadas que su extremo: $\overrightarrow{OA} = (3, 4)$.

Ten en cuenta



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Vectores equipolentes

Dos vectores fijos no nulos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **equipolentes** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

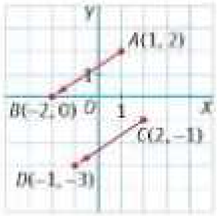
Dos vectores equipolentes **tienen las mismas coordenadas**.

Ejemplo ▸ Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, ya que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Las coordenadas de ambos vectores son iguales:

$\overrightarrow{AB} = (-2 - 1, 0 - 2) = (-3, -2)$

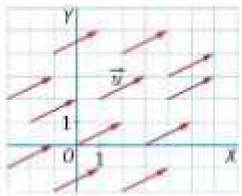
$\overrightarrow{CD} = (-1 - 2, -3 - (-1)) = (-3, -2)$



Vectores libres del plano

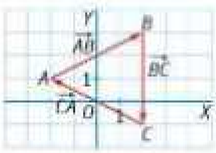
El conjunto formado por todos los vectores equipolentes a un vector fijo dado se denomina **vector libre**. Se representa por $\vec{u}$.

- Cada vector fijo que pertenece a un vector libre es un representante del vector libre.
- El módulo, dirección y sentido de un vector libre son el módulo, dirección y sentido de cualesquiera de sus representantes.



ACTIVIDADES

1. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.



ACTIVIDAD **RESUELTA**

2. Las coordenadas del vector libre $\vec{u}$ son $(-5, 4)$, y las del origen A de uno de sus representantes, $(4, -6)$. Calcula las coordenadas del extremo B de ese representante.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (4, -6) + (-5, 4) = (-1, -2)$

Por tanto, las coordenadas de B son $(-1, -2)$.

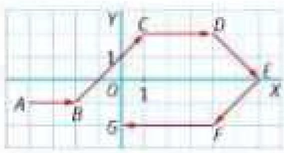
3. Las coordenadas de un punto P son $(1, 3)$, y las del vector $\overrightarrow{PQ}$, $(-2, -2)$. Calcula las coordenadas de Q y de $\overrightarrow{QP}$.

4. Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ en cada caso.

a) Origen $A(-1, 0)$ y extremo $B(3, 5)$

b) Origen $A(7, -4)$ y extremo $B(-2, 3)$

5. Identifica los vectores equipolentes de la imagen y los vectores libres que determinan.



6. Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A(5, -3)$ y $B(1, -1)$ b) $C(-2, 3)$ y $D(-1, -4)$

7. Los vértices de un triángulo son $A(3, 5)$, $B(10, 0)$ y $C(4, -1)$.

a) Calcula los vectores que forman cada lado.

b) Halla la longitud de cada lado.

137

2 Operaciones con vectores. Combinación lineal

Sabías que...

Sir William Rowan Hamilton
(1805-1865)

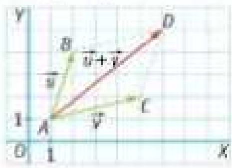
Los términos "vector" y "escalar" los acuñó en 1846 Hamilton, un brillante matemático irlandés que a los 13 años ya hablaba 13 idiomas.

Suma de dos vectores libres

Para sumar gráficamente dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano se pueden utilizar dos procedimientos:

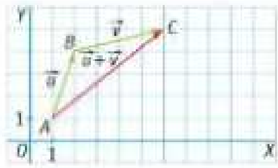
1.º

- Se toma un representante $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ y otro $\overrightarrow{AC}$ de $\vec{v}$, que tengan el mismo origen A.
- Se construye el paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. El cuarto vértice del paralelogramo es el punto D.
- La suma de vectores $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector libre que tiene como representante al vector de origen A y extremo D: $\overrightarrow{AD}$.



2.º

- Se toma un representante $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ y otro $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$ de forma que el extremo del representante de $\vec{u}$ coincida con el origen del representante de $\vec{v}$.
- La suma de vectores $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector libre que tiene como representante al vector de origen A y extremo C: $\overrightarrow{AC}$.



Para hallar las coordenadas del vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ se suman las coordenadas de $\vec{u}=(u_1, u_2)$ con las de $\vec{v}=(v_1, v_2)$.

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1, u_2+v_2)$$

Ejemplo ▸ Se considera el triángulo de vértices $A(-4, 3)$, $B(5, 6)$ y $C(-1, -3)$. Comprueba que la suma $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ coincide con el vector $\overrightarrow{AC}$.

Se calculan las coordenadas de cada vector:

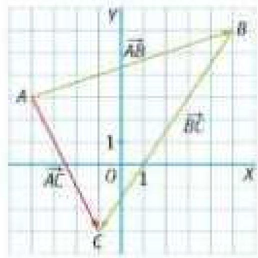
$\overrightarrow{AB}=(5-(-4), 6-3)=(9, 3)$

$\overrightarrow{BC}=(-1-5, -3-6)=(-6, -9)$

$\overrightarrow{AC}=(-1-(-4), -3-3)=(3, -6)$

Se comprueba que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(9, 3)+(-6, -9)=(3, -6)=\overrightarrow{AC}$



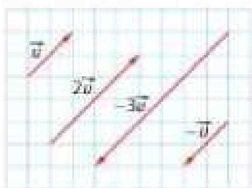
Producto de un número por un vector

El producto de un número real k por un vector libre $\vec{u}$ es otro vector $k\vec{u}$ con los siguientes elementos:

- El **módulo** es el producto del valor absoluto de k por el módulo de $\vec{u}$:

$$|k\vec{u}|=|k||\vec{u}|$$

- La **dirección** es la dirección de $\vec{u}$.
- El **sentido** coincide con el sentido de $\vec{u}$ si $k>0$ y es contrario si $k<0$.



Para hallar las coordenadas del vector $k\vec{u}$ se multiplican las dos coordenadas de $\vec{u}$ por k:

$$k\vec{u}=k(u_1, u_2)=(ku_1, ku_2)$$

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y recuerda suma y resta de vectores.

Combinación lineal de vectores

MAT-TIC GeoGebra

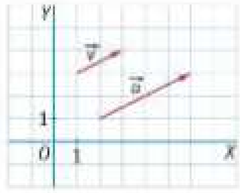
Entra en smSaviadigital.com y recuerda combinación lineal.

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes si tienen la misma dirección. En este caso, sus coordenadas son proporcionales:

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Ejemplo ▸ ¿Son linealmente dependientes $\vec{u} = (4, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1)$?

Sus coordenadas son proporcionales, $\vec{u} = 2\vec{v}$, por tanto, son linealmente dependientes.
En la gráfica se observa que son paralelos, es decir, tienen la misma dirección.



El vector $\vec{w}$ es **combinación lineal** de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se pueden encontrar dos números reales a y b, tales que:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Se dice que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son **linealmente dependientes**.

Ejemplo ▸ ¿Es el vector (−3, 4) combinación lineal de los vectores (1, 0) y (0, 1)?

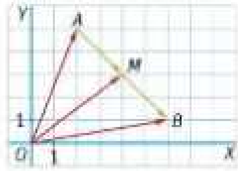
Es combinación lineal pues existen dos números reales $a = -3$ y $b = 4$ que cumplen que

$$(-3, -4) = (-3)(1, 0) + 4(0, 1)$$

Punto medio de un segmento

Las coordenadas del **punto medio M** de un segmento AB son combinación lineal de las coordenadas de sus extremos. Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$:

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$



$$\overline{AB} = 2\overline{AM} \Rightarrow \overline{OB} - \overline{OA} = 2\overline{OM} - 2\overline{OA} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$$

ACTIVIDADES

8. Si $\vec{u} = (-3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 3)$, realiza las operaciones:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $5\vec{u} + \vec{w}$ c) $\vec{v} + \vec{w}$ d) $3\vec{w} + 2\vec{v}$

9. Dados los vectores $\vec{u} = (4, 2)$, $\vec{v} = (-6, 3)$ y $\vec{w} = (2, 0)$, indica si son linealmente dependientes:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ b) $\vec{u}$ y $\vec{w}$ c) $\vec{v}$ y $\vec{w}$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

10. Estudia si $A(-2, 3)$, $B(1, -4)$ y $C(4, -11)$ están alineados.

A, B y C estarán alineados si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = (1+2, -4-3) = (3, -7) \\ \overline{AC} = (4+2, -11-3) = (6, -14)\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{AB}$$

Por tanto, los puntos A, B y C están alineados.

11. Comprueba si los puntos $A(-2, 3)$, $B(-2, 1)$ y $C(-5, 5)$ están alineados.

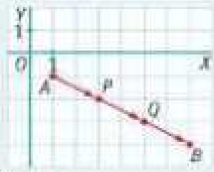
ACTIVIDAD **RESUELTA**

12. Halla los puntos P y Q, que dividen el segmento de extremos $A(1, -1)$ y $B(7, -4)$ en tres partes iguales.

Si se considera el vector:

$$\overline{AB} = (7-1, -4-(-1)) = (6, -3)$$

se observa que:



$$\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \left(\frac{6}{3}, -\frac{3}{3}\right) = (2, -1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = (1, -1) + (2, -1) = (3, -2)$$

Por tanto, el punto P es $P(3, -2)$.

Siguiendo el mismo procedimiento:

$$\overline{OQ} = \overline{OA} + 2\overline{AP} = (1, -1) + 2(2, -1) = (5, -3) \Rightarrow Q(5, -3)$$

13. Dado el segmento de extremos $A(2, -5)$ y $B(10, -1)$, halla los puntos P, Q y R que dividen AB en cuatro partes iguales.

139

3 Producto escalar de dos vectores. Aplicaciones

Ten en cuenta

La suma de dos vectores es otro vector. Sin embargo, el producto escalar de dos vectores es un número.

El **producto escalar** de dos vectores libres es el número que resulta de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman, es decir:

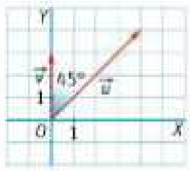
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$$

Ejemplo ▸ Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}=(4,4)$ y $\vec{v}=(0,3)$.

Se calculan sus módulos:

$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}$ $\quad |\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\sqrt{0^2+3^2}=3$

Y su producto escalar es: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{32}\cdot 3\cdot\cos 45^\circ=4\sqrt{2}\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=12$



smSaviadigital.com

PRACTICA Utiliza el producto escalar para construir tu cometa.

Si se calcula el producto escalar de un vector $\vec{u}$ por sí mismo, se obtiene:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}||\vec{u}|\cos 0^\circ=|\vec{u}|^2$$

El **módulo** de un vector también se puede definir como $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

Producto escalar conocidas las coordenadas

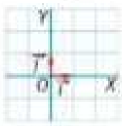
El **producto escalar** de los vectores $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$$

Ten en cuenta

El sistema de referencia formado por $\{O;\vec{i},\vec{j}\}$ con $|\vec{i}|=1=|\vec{j}|$ y $\widehat{(\vec{i},\vec{j})}=90^\circ$ se denomina sistema de referencia ortonormal.

Para probarlo, como los vectores $\vec{i}=(1,0)$ y $\vec{j}=(0,1)$ son unitarios, porque su módulo es 1 y son perpendiculares entre sí, se cumple que:



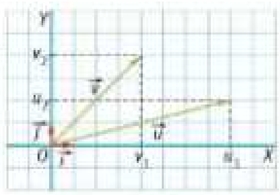
- $\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}||\vec{i}|\cos 0^\circ=1\cdot 1\cdot 1=1$
- $\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}||\vec{j}|\cos 0^\circ=1\cdot 1\cdot 1=1$
- $\vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}||\vec{j}|\cos 90^\circ=1\cdot 1\cdot 0=0$

Cualquier vector del plano se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Así, los vectores $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ se pueden expresar como:

$$\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}\qquad \vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}$$

Por tanto:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1\vec{i}+u_2\vec{j})\cdot(v_1\vec{i}+v_2\vec{j})=$$
$$=u_1v_1\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{1}+u_1v_2\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{0}+u_2v_1\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{0}+u_2v_2\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{j}}_{1}=u_1v_1+u_2v_2$$



Ten en cuenta

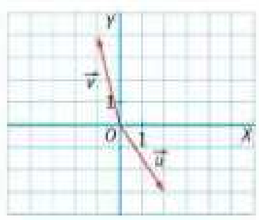
El producto escalar es una operación que verifica las propiedades conmutativa y distributiva respecto de la suma:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Ejemplo ▸ Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}=(2,-3)$ y $\vec{v}=(-1,4)$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2(-1)+(-3)4=-2-12=-14$



Ángulo entre dos vectores

A partir del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede calcular el coseno del ángulo que forman.

El **coseno del ángulo** que forman los vectores $\vec{u}=(u_1, u_2)$ y $\vec{v}=(v_1, v_2)$ es:

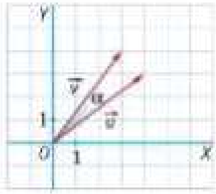
$$\cos(\vec{u}, \vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y practica el producto escalar y calcula el ángulo entre dos vectores.

Ejemplo ▸ Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}=(4, 3)$ y $\vec{v}=(3, 4)$.

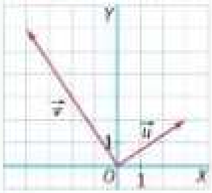
$$\cos(\vec{u}, \vec{v})=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\frac{12+12}{\sqrt{16+9}\sqrt{9+16}}=\frac{24}{25}$$

$$\alpha=\arccos\frac{24}{25}=\arccos 0{,}96=16^\circ\ 16'$$



Dos vectores **no nulos son perpendiculares** cuando su producto escalar vale cero.

Ejemplo ▸ Comprueba si los vectores $\vec{u}=(3, 2)$ y $\vec{v}=(-4, 6)$ son perpendiculares.



Para comprobar que forman un ángulo de 90° se calcula el producto escalar.

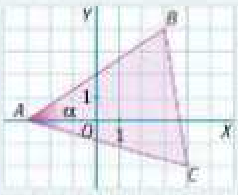
$\vec{u}\cdot\vec{v}=3(-4)+2\cdot 6=-12+12=0$

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD **RESUELTA**

14. **Dado el triángulo de vértices $A(-3, 0)$, $B(3, 4)$ y $C(4, -2)$ calcula el ángulo del vértice A y la medida del lado BC.**

Se representa el triángulo:



Para hallar el ángulo α se consideran los vectores:

$\overrightarrow{AB}=(6, 4)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(7, -2)$

$$\cos\alpha=\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{42-8}{\sqrt{52}\sqrt{53}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=0{,}6476\Rightarrow\alpha=\arccos 0{,}6476=49^\circ\ 38'$$

La medida del lado BC es el módulo del vector $\overrightarrow{BC}$:

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(4-3)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$$

15. **Dados los vectores $\vec{u}=(-2, 2)$ y $\vec{v}=(-1, 3)$, calcula su producto escalar, sus módulos y el ángulo que forman.**

ACTIVIDAD **RESUELTA**

16. **Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(-2, 2m)$ y $\vec{v}=(m-1, 3)$ sean perpendiculares.**

Para que sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-2m+2+6m=0\Rightarrow 4m+2=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$

17. **Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(m, 2m-1)$ y $\vec{v}=(1-m, m)$:**

a) Sean perpendiculares.

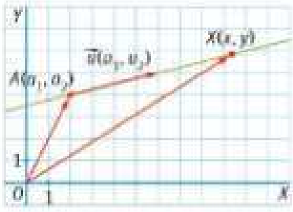
b) Tengan módulo 1.

18. **Comprueba que el triángulo de vértices $A(8, 9)$, $B(2, 1)$ y $C(1, 8)$ es rectángulo e indica el vértice correspondiente al ángulo recto.**

19. **Calcula los ángulos del triángulo $A(-1, 0)$, $B(2, -1)$ y $C(4, 2)$. ¿Suman 180°?**

141

4 Ecuaciones de la recta



Ecuación vectorial de la recta

Una recta del plano queda determinada si se conoce un punto $A(a_1, a_2)$ y su vector director, es decir, un vector libre $\vec{u} = (u_1, u_2)$ que lleva su dirección.

Un punto $X(x, y)$ pertenece a una recta r si los vectores $\overrightarrow{AX}$ y $\vec{u}$ son proporcionales, es decir, existe t tal que $\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}$.

Utilizando vectores de posición, se cumple: $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = t\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$

La **ecuación vectorial** de una recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es el conjunto de puntos $X(x, y)$ que cumplen:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}), \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo ▸ Halla la ecuación vectorial de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (3, -2)$.

Sustituyendo: $(x, y) = (2, -1) + t(3, -2)$

Ecuaciones paramétricas de la recta

Al operar en la ecuación vectorial e igualar, se obtienen las ecuaciones paramétricas.

Las **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene como dirección $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son: $\begin{cases} \boldsymbol{x = a_1 + tu_1} \\ \boldsymbol{y = a_2 + tu_2} \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ejemplo ▸ Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $A(-1, 5)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-2, 3)$.

Se sustituyen las coordenadas del punto y del vector director: $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua de la recta y ecuación general

Al despejar e igualar el parámetro t en las paramétricas se obtiene la ecuación continua.

La **ecuación continua** de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene como dirección $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es: $\dfrac{\boldsymbol{x - a_1}}{\boldsymbol{u_1}} = \dfrac{\boldsymbol{y - a_2}}{\boldsymbol{u_2}}$

Transformando la ecuación continua para escribir todos los términos en el primer miembro, se obtiene la ecuación general.

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} \Rightarrow u_2(x - a_1) = u_1(y - a_2) \Rightarrow \underbrace{u_2}_{A} x \underbrace{- u_1}_{B} y \underbrace{- u_2 a_1 + u_1 a_2}_{C} = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0$$

La **ecuación general** de la recta es de la forma: $Ax + By + C = 0$

El vector $\vec{n} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ se llama **vector normal** y es perpendicular al vector director de la recta.

Ejemplo ▸ Halla las ecuaciones continua y general de la recta r que pasa por $A(3, -2)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-2, 3)$.

- Continua: $\dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y + 2}{3}$
- General: $3x - 9 = -2y - 4 \Rightarrow 3x + 2y - 5 = 0$

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y encuentra las ecuaciones de la recta vectorial, paramétricas, continua y general.

smSaviadigital.com

PRACTICA Encuentra el tesoro utilizando el mapa y todo lo que has aprendido sobre geometría.

Ten en cuenta

El vector normal $\vec{n} = (A, B) = (u_2, -u_1)$ y el vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son perpendiculares por ser su producto escalar nulo:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (u_1, u_2) \cdot (u_2, -u_1) = u_1 u_2 - u_2 u_1 = 0$$

Ecuación explícita. Pendiente y ordenada en el origen

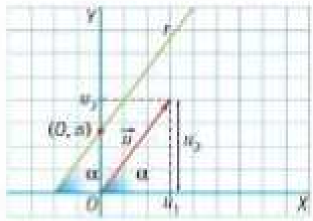
Al despejar y en la ecuación general se obtiene la **ecuación explícita**:

$$y = mx + n$$

- m es la **pendiente** de la recta y representa la tangente del ángulo α que forma la recta con la parte positiva del eje X: $m = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{u_2}{u_1}$
- n es la **ordenada en el origen** y representa el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas $x = 0$.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y calcula la ecuación explícita.



Ecuación punto-pendiente

La **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por el punto $A(a_1, a_2)$ y tiene por pendiente m es $\boldsymbol{y - a_2 = m(x - a_1)}$.

Si (u_1, u_2) es el vector director, se deduce de la ecuación continua:

$$\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} \Rightarrow y - a_2 = \frac{u_2}{u_1}(x - a_1) \Rightarrow y - a_2 = m(x - a_1)$$

Ejemplo ▸ Halla la ecuación de la recta punto-pendiente si el vector director es $(3, 1)$ y pasa por el punto $(0, 2)$.

La pendiente es $m = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{3}$, por tanto, la ecuación es $y - 2 = \dfrac{1}{3}(x - 0)$.

Ten en cuenta

Las rectas verticales tienen pendiente infinita y no se pueden expresar con las ecuaciones habituales.

Son de la forma $x = k$.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD **RESUELTA**

20. **Comprueba si el punto $A(3, -1)$ pertenece a $r: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$.**

Se sustituyen sus coordenadas:

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -1 - 2t \\ -1 = 5 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Como el valor de t en las ecuaciones coincide, se deduce que A sí pertenece a la recta.

21. **Indica si $A(0, -1)$ y $B(6, -1)$ pertenecen o no a las rectas.**

a) $r: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 - t \end{cases}$ b) $s: 2x - 3y = 15$

22. **Halla un punto, un vector director y un vector normal de cada una de las siguientes rectas.**

a) $4x - 3y - 1 = 0$ b) $y = x$ c) $(x, y) = (-3, 2) + t(-1, 4)$

23. **Halla dos puntos de cada una de las siguientes rectas y el vector director.**

a) $(x, y) = (1, 1) + t(0, -3)$ c) $y - 3 = -2(x + 5)$

b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ d) $x = \dfrac{y+4}{5}$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

24. **Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $P(-3, -1)$ y $Q(0, 0)$.**

Si P y Q están en la recta, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es un vector director de la recta.

$\overrightarrow{PQ} = (0 - (-3), 0 - (-1)) = (3, 1)$. Por tanto, la ecuación continua es: $\dfrac{x-0}{3} = \dfrac{y-0}{1} \Rightarrow \dfrac{x}{3} = y$

25. **Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos:**

a) $P(-2, 3)$ y $Q(1, 2)$ b) $P(0, 3)$ y $Q(-2, -3)$

26. **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por $P(-2, 3)$ y tiene pendiente $m = -4$.**

27. **Calcula, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta en los siguientes casos.**

a) Pasa por el punto $A(5, -2)$ y lleva la dirección de $\vec{u} = (1, -3)$.

b) Pasa por el punto $A(-5, 4)$ y tiene pendiente $m = -2$.

c) Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, -2)$.

Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de cada una.

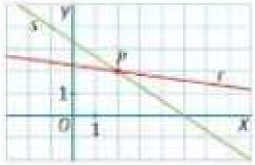
143

5 Problemas de incidencia

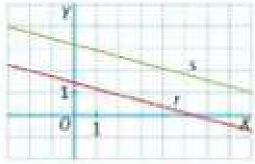
Posición relativa de dos rectas en el plano

Dos rectas en el plano pueden ser:

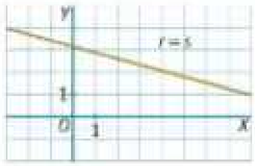
- **Secantes** cuando tienen un único punto en común. Sus vectores directores no son proporcionales, es decir, las rectas tienen distinta dirección y, por tanto, distinta pendiente.



- **Paralelas** cuando no tienen ningún punto en común. Sus vectores directores son proporcionales. Las rectas tienen la misma pendiente y diferente ordenada en el origen.



- **Coincidentes** cuando tienen infinitos puntos en común. Sus vectores directores son proporcionales y las rectas pasan por un mismo punto, es decir, tienen la misma pendiente y la misma ordenada en el origen.



smSaviadigital.com

PRACTICA Comprueba lo que has aprendido a lo largo de la unidad.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y estudia las posiciones relativas de las rectas.

Al expresar en forma general dos rectas, $r: Ax + By + C = 0$ y $s: A'x + B'y + C' = 0$, sus pendientes y ordenadas en el origen son:

$$m = -\frac{A}{B} \qquad m' = -\frac{A'}{B'} \qquad n = -\frac{C}{B} \qquad n' = -\frac{C'}{B'}$$

Por tanto, para determinar su posición relativa se puede utilizar el siguiente criterio:

- Son **secantes** si $\boldsymbol{m \neq m'}$, es decir, si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$.
- Son **paralelas** si $\boldsymbol{m = m'}$, pero $\boldsymbol{n \neq n'}$, es decir, si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$.
- Son **coincidentes** si $\boldsymbol{m = m'}$ y $\boldsymbol{n = n'}$, es decir, si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

Ejemplo ▸ Estudia la posición relativa de las rectas y halla, en su caso, el punto de corte:

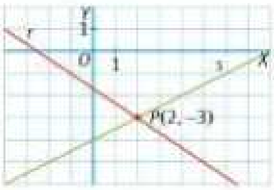
- $r: 2x + 3y + 5 = 0$ y $s: x - 2y - 8 = 0$

Se estudian los coeficientes de x e y:

$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2} \Rightarrow$ Las rectas son secantes, es decir, se cortan en un punto P. Para calcularlo, se resuelve el sistema:

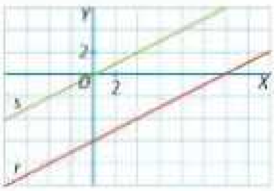
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ -2x + 4y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y + 21 = 0 \Rightarrow y = -3,\ x = 2$$

El punto de corte es $P(2, -3)$.



- $r: -x + 2y + 12 = 0$ y $s: 2x - 4y = 0$

$\frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{12}{0} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas y, por tanto, no se cortan en ningún punto.



Rectas paralelas a una dada

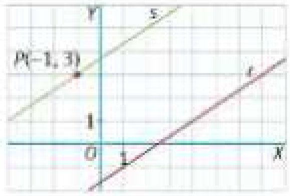
Dada la recta de ecuación general $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, todas las rectas **paralelas** a ella tienen por ecuación:

$\boldsymbol{Ax + By + k = 0}$, donde $\boldsymbol{k}$ es cualquier número real.

Ejemplo ▸ Halla la recta s que es paralela a la recta r: $2x - 3y - 5 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1, 3)$:

Se escriben todas las rectas paralelas a r: $2x - 3y + k = 0$

- Como pasa por P, el punto debe verificar la ecuación. Resolviendo la ecuación se obtiene el valor de k: $2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 + k = 0 \Rightarrow k = 11$
- La ecuación de s es: $2x - 3y + 11 = 0$



Rectas perpendiculares a una dada

Dada la recta de ecuación general $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, todas las rectas **perpendiculares** a ella tienen por ecuación:

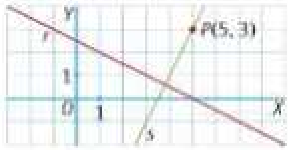
$\boldsymbol{Bx - Ay + k = 0}$, donde $\boldsymbol{k}$ es cualquier número real.

Ten en cuenta

Los vectores (A, B) y $(B, -A)$ son perpendiculares, ya que su producto escalar es 0.

Ejemplo ▸ Halla la recta s que es perpendicular a la recta r: $x + 2y = 5$ y que pasa por el punto $P(5, 3)$.

- Se escriben todas las rectas perpendiculares a r: $2x - y + k = 0$
- Se calcula k, obligando a que pase por P: $2 \cdot 5 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = -7$
- La ecuación de s es: $2x - y - 7 = 0$



ACTIVIDADES

28. Estudia la posición relativa de las rectas:

a) r: $2x + y - 5 = 0$ y s: $4x + 3y = 11$

b) $r: -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4} = 0$ y s: $2x - 3y - 5 = 0$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

29. Estudia, a partir de m y n, las posiciones relativas de:

$$r: 3x - my + 2 = 0 \text{ y } s: -6x - y + n = 0$$

$$\frac{3}{-6} = \frac{-m}{-1} \Rightarrow -3 = 6m \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{-6} = \frac{2}{n} \Rightarrow 3n = -12 \Rightarrow n = -4$$

Para $m = -\frac{1}{2}$ y $n = -4$, las rectas son coincidentes.

Para $m = -\frac{1}{2}$ y $n \neq -4$, las rectas son paralelas.

Para $m \neq -\frac{1}{2}$, las rectas son secantes.

30. Calcula el valor de m para que las rectas r: $5x + my + 1 = 0$ y s: $-x - y + 3 = 0$ sean paralelas. ¿Hay algún valor de m que las haga coincidentes? ¿Y secantes?

31. Halla la ecuación de la recta paralela a r: $3x - 4y = 12$ y que pasa por el punto $P(5, -5)$.

32. Halla la ecuación de la recta perpendicular a r: $-2x - 4y = 5$ y que pasa por el origen de coordenadas.

33. Dada la recta de ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$:

a) Calcula su ecuación general.

b) Halla la recta paralela a r que pasa por $A(-1, 4)$.

c) Halla la recta perpendicular a r que pasa por $(-2, 2)$.

34. Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y es paralela a la que tiene por ecuación $7x - 14y + 3 = 0$.

35. Comprueba si las rectas r y s son perpendiculares.

a) $r: \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y = -6$ y $s: \frac{5}{6}x - \frac{3}{5}y = -8$

b) $r: \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 0$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - \frac{9}{8}t \end{cases}$

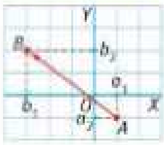
c) $r: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - \frac{1}{2}t \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 10t \end{cases}$

145

Organiza tus ideas

VECTORES DEL PLANO

Vector fijo del plano



Origen: $A(a_1, a_2)$

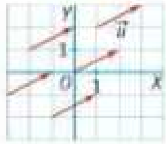
Extremo: $B(b_1, b_2)$

Coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Elementos de un vector

- **Módulo**: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
- **Dirección**: la de la recta que pasa por su origen y por su extremo.
- **Sentido**: el correspondiente a ir de su origen a su extremo.

Vector libre



Todos los vectores equipolentes a un vector fijo

OPERACIONES CON VECTORES

Suma de vectores

$$\begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Producto de un número por un vector

$$k \cdot (u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$$

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \qquad \begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Ángulo entre dos vectores

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

ECUACIONES DE LA RECTA

Vectorial

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} \Rightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2)$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = a_1 + t u_1 \\ y = a_2 + t u_2 \end{cases}$$

Continua

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$

General

$$Ax + By + C = 0$$

Punto-pendiente

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

Explícita

$$y = mx + n$$

Donde $A(a_1, a_2)$: punto de la recta, $\vec{u} = (u_1, u_2)$: vector director, $m = \frac{u_2}{u_1}$: pendiente y n: ordenada en el origen.

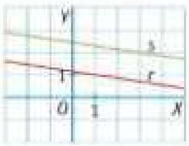
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

$r: Ax + By + C = 0 \qquad s: A'x + B'y + C' = 0$

Secantes

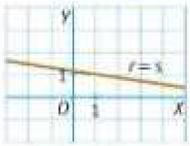
$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

Paralelas



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Coincidentes



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Actividades clave

1. Escribe el vector $\vec{a}=(-13, 17)$ como combinación lineal de los vectores:

$\vec{u}=(-1, 3)$

$\vec{v}=(4, -1)$

Para que sea combinación lineal deben existir dos números reales, λ y μ, tales que $\vec{a}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.

$$\vec{a}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \Rightarrow (-13, 17)=\lambda(-1, 3)+\mu(4, -1) \Rightarrow (-13, 17)=(-\lambda+4\mu, 3\lambda-\mu)$$

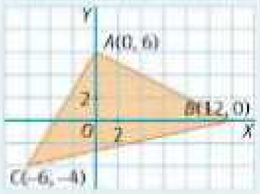
$$\begin{cases}-\lambda+4\mu=-13\\ 3\lambda-\mu=17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\lambda+4\mu=-13\\ 12\lambda-4\mu=68\end{cases} \Rightarrow 11\lambda=55 \Rightarrow \lambda=5,\ \mu=-2$$

Por tanto: $\vec{a}=5\vec{u}-2\vec{v}$

2. Clasifica el triángulo de vértices $A(0, 6)$, $B(12, 0)$ y $C(-6, -4)$:

a) Según sus lados.

b) Según sus ángulos.



a) Para estudiar si es equilátero, isósceles o escaleno, se calculan las medidas de los lados:

- $|\overline{AB}|=\sqrt{12^2+(-6)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$
- $|\overline{AC}|=\sqrt{(-6)^2+(-10)^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$
- $|\overline{BC}|=\sqrt{(-18)^2+(-4)^2}=\sqrt{340}=2\sqrt{85}$

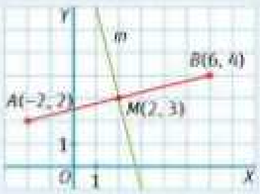
Al ser medidas diferentes, el triángulo es escaleno.

b) Para estudiar si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo, se calculan los ángulos del triángulo:

$$\cos\hat{A}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}=\frac{(12, -6)\cdot(-6, -10)}{\sqrt{180}\cdot\sqrt{136}}=\frac{-72+60}{\sqrt{180}\cdot\sqrt{136}}=-0{,}0767 \Rightarrow \hat{A}=94°\,24'$$

Como el triángulo tiene un ángulo mayor de 90°, es obtusángulo.

3. Calcula la mediatriz del segmento de extremos $A(-2, 2)$ y $B(6, 4)$.



La mediatriz del segmento de extremos A y B es la recta m que pasa por el punto medio M del segmento y que es perpendicular a la recta r que pasa por A y B.

- Ecuación de la recta r que pasa por A y B:

$$\frac{x+2}{6-(-2)}=\frac{y-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x+2}{8}=\frac{y-2}{2} \Rightarrow \frac{x+2}{4}=y-2 \Rightarrow x+2=4y-8 \Rightarrow x-4y=-10$$

- Todas la rectas perpendiculares a la recta r son de la forma: $4x+y+k=0$
- Se calcula el punto medio, M, del segmento de extremos A y B: $M\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right)=M(2, 3)$
- De todas las perpendiculares, se elige la que pasa por el punto M:

$$4\cdot 2+3+k=0 \Rightarrow k=-11 \Rightarrow m: 4x+y-11=0$$

4. Calcula las ecuaciones de las medianas y el baricentro del triángulo de vértices $A(1, 3)$, $B(3, -1)$ y $C(-3, -2)$.

Las medianas de un triángulo son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El baricentro es el punto donde se cortan las medianas.

- Se calculan los puntos medios de los lados del triángulo:

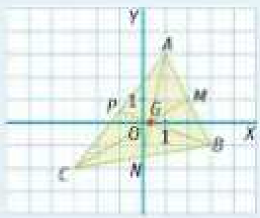
$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right)=M(2, 1),\ N\left(\frac{3-3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right)=N\left(0, -\frac{3}{2}\right) \text{ y } P\left(\frac{1-3}{2}, \frac{3-2}{2}\right)=P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

- Se calculan las ecuaciones de las medianas:

$$m_{AN}: \frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{-\frac{9}{2}} \Rightarrow -\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}=-y+3 \Rightarrow 9x-2y-3=0$$

$$m_{CM}: \frac{x+3}{5}=\frac{y+2}{3} \Rightarrow 3x+9=5y+10 \Rightarrow 3x-5y-1=0$$

$$m_{BP}: \frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=-4y-4 \Rightarrow 3x+8y-1=0$$



- Se calcula el baricentro resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de dos medianas:

$$\begin{cases}3x-5y=1\\ 3x+8y=1\end{cases} \Rightarrow -13y=0 \Rightarrow y=0,\ x=\frac{1}{3} \Rightarrow G\left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

147

Actividades

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Coordenadas de vectores y equipolencia

36. Decide en cuáles de los siguientes casos los puntos A, B y C están alineados y en cuáles forman un triángulo.

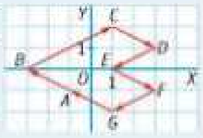
a) $A(-1, -5)$, $B(0, -3)$, $C(-2, -7)$

b) $A(1, -2)$, $B(0, 1)$, $C(-2, 7)$

c) $A(1, 2)$, $B(2, 7)$, $C(-1, 3)$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

37. Identifica los vectores equipolentes y los vectores libres que determinan.



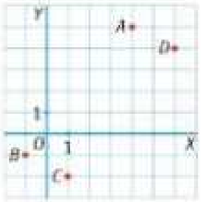
Son equipolentes:

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{GA}$, que determinan $\vec{u}=(-2, 1)$.

$\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$, que determinan $\vec{v}=(2, -1)$.

$\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{FG}$, que determinan $\vec{w}=(-2, -1)$.

38. Dados los puntos A, B, C y D, calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. ¿Cuáles de ellos son equipolentes?



39. Calcula las coordenadas del punto A y el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=(5, 3)$, si el punto B es $(-1, 4)$.

40. Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A(4, -2)$ y $B(0, 9)$ b) $C(-1, 10)$ y $D(8, -5)$

41. Calcula los puntos P, Q, R y S que dividen el segmento de extremos $A(-2, 6)$ y $B(13, -4)$ en cinco partes iguales.

ACTIVIDAD **RESUELTA**

42. Calcula el valor de m para que los puntos $A(1, 2)$, $B(-2, m-2)$ y $C(3, -m)$ estén alineados.

Para que A, B y C estén alineados debe verificarse que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean proporcionales. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3, m-4)\\ \overrightarrow{AC}=(2, -m-2)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-3}{2}=\frac{m-4}{-m-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m+6=2m-8 \Rightarrow m=-14$$

43. Calcula el valor o los valores de m para que los puntos A, B y C estén alineados:

a) $A(5, 0)$, $B(2, 4)$, $C(m, 8)$

b) $A(-2, 2)$, $B(m, m-1)$, $C(0, -6)$

c) $A(4, -5)$, $B(m, -4)$, $C(2, -m)$

Operaciones con vectores y dependencia lineal

44. Realiza estas operaciones con vectores.

a) $(2, -1)-(4, 3)$ d) $4(1, -1)+2(3, 0)$

b) $6(-3, 1)+(10, -2)$ e) $(3, -1)-5(1, -2)$

c) $2(-4, 0)-3(-1, 2)$ f) $(9, 6)-2(4, 1)$

45. Dados los vectores $\vec{u}=(5, -3)$, $\vec{v}=(-1, 4)$ y $\vec{w}=(2, 2)$, calcula:

a) $\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$ d) $5\vec{w}-3\vec{v}+\vec{u}$

b) $3\vec{u}-2(\vec{w}-\vec{v})$ e) $2(\vec{w}+\vec{v})-\vec{u}$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{u})$ f) $\frac{3}{4}\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$

46. Calcula el valor de x e y en cada caso.

a) $(5, -9)=3(x, y)-2(x, 0)$

b) $(x, -4)=2(y, 5)+(3, x)$

c) $(2y, 0)=(x, y)-2(x, 5)$

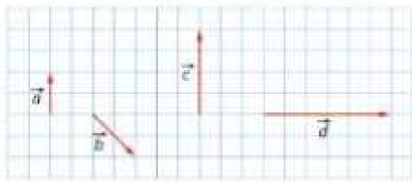
d) $(3x, -y)=2(1, -x)+(y, 9)$

47. Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(2, 5)$ y $C(-2, 3)$.

48. Estudia si los vectores $\vec{u}=(2, -4)$, $\vec{v}=(3, 1)$ y $\vec{w}=(11, -15)$ son linealmente dependientes.

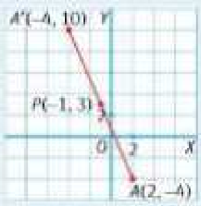
49. Escribe $\vec{a}=(-7, -9)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=(4, -3)$ y $\vec{v}=(5, 1)$.

50. Expresa los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



ACTIVIDAD **RESUELTA**

51. Calcula el punto simétrico de $A(2, -4)$ respecto de $P(-1, 3)$.



Para que A' sea el simétrico de A respecto de P, se debe verificar que P sea el punto medio del segmento de extremos A y A':

$$\left.\begin{array}{l}A(2, -4)\\ P(-1, 3)\\ A'(a, b)\end{array}\right\}\Rightarrow -1=\frac{2+a}{2}, 3=\frac{-4+b}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=-4, b=10 \Rightarrow A'(-4, 10)$$

52. Calcula el punto simétrico de:

a) $A(-3, 7)$ respecto del punto $P(0, -3)$.

b) $A(3, 1)$ respecto del punto $P(2, 2)$.

c) $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ respecto del punto $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Producto escalar. Aplicaciones

53. Dados $\vec{u}=(5, 8)$, $\vec{v}=(-2, 6)$, y $\vec{w}=(-1, -3)$, calcula:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b) $\vec{u}\cdot\vec{w}$ c) $\vec{v}\cdot\vec{w}$ d) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

54. Conocidos los vectores $\vec{u}=(-6, 8)$ y $\vec{v}=(1, 7)$, realiza las siguientes operaciones.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b) $(-2\vec{u})\cdot\vec{v}$ c) $|\vec{u}-3\vec{v}|$ d) $|2\vec{v}-3\vec{u}|$

55. Estudia si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares entre sí.

a) $\vec{u}=(6, 9)$ y $\vec{v}=(-3, 2)$

b) $\vec{u}=(2, 4)$ y $\vec{v}=(-8, -4)$

c) $\vec{u}=(-3, 6)$ y $\vec{v}=(10, 5)$

d) $\vec{u}=(-1, -2)$ y $\vec{v}=(4, 2)$

56. Calcula el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u}=(-2, -4)$ y $\vec{v}=(2, -1)$

b) $\vec{a}=(3, 9)$ y $\vec{b}=(2, -1)$

c) $\vec{u}=(2, \sqrt{3})$ y $\vec{v}=(\sqrt{3}, 1)$

57. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=1$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{3}$.

58. Comprueba si son perpendiculares los vectores $\vec{u}=(6, 15)$ y $\vec{v}=(5, -2)$.

59. Halla el valor de a para que los vectores $\vec{u}=(a, 3)$ y $\vec{v}=(-1, 5)$ sean perpendiculares.

60. Calcula el valor de a para que los vectores $\vec{u}=(4, 3)$ y $\vec{v}=(a, 1)$ formen un ángulo de 45°.

61. Determina mediante vectores si el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(0, 1)$ y $C(3, 2)$ es rectángulo.

62. Clasifica los siguientes triángulos según sus lados y según sus ángulos.

a) $A(3, 4)$, $B(4, -1)$, $C(-1, -2)$

b) $A(-1, -2)$, $B(3, 4)$, $C(6, -2)$

Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas

63. Comprueba si el punto $B(4, -6)$ pertenece a alguna de las rectas siguientes.

a) $y=9-3x$ b) $5x+3y-2=0$

64. Determina el vector director, un vector normal y un punto de las siguientes rectas.

a) $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+4}{5}$ c) $\begin{cases} x=2-t \\ y=5+3t \end{cases}$

b) $(x, y)=(4, 0)+t\,(2, -6)$ d) $4x-y=0$

65. Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=5t \end{cases}$$

66. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de las siguientes rectas.

a) Pasa por el punto $A(3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u}=(5, -2)$.

b) Pasa por el punto $A(-2, 2)$ y su pendiente es $m=-3$.

67. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de las rectas:

a) r: $3x-2y=-10$ c) r: $y=-2x+3$

b) $r:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{2}$ d) $r:\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-3t \end{cases}$

68. Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas y represéntalas gráficamente.

a) $\dfrac{x+1}{2}=y$ c) $5x-2y+3=0$

b) $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-2}{-4}$ d) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{y}{5}=1$

69. ¿Son secantes las rectas r: $4x-5y-2=0$ y s: $y=2x-4$? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.

70. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) r: $4x-6y+10=0$ y s: $2x-3y+4=0$

b) r: $2x+3y+6=0$ y s: $6x+9y+18=0$

71. Estudia la posición relativa de estos pares de rectas y, si son secantes, halla su punto de corte.

a) r: $2x-5y+7=0$ y s: $x-2y-2=0$

b) r: $6x+4y-12=0$ y s: $3x+2y-6=0$

c) r: $x-5y+3=0$ y s: $3x-15y+8=0$

72. Calcula la ecuación general de las rectas que contienen a los lados del triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(1, -1)$ y $C(2, -2)$.

ACTIVIDAD **RESUELTA**

73. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(5, -4)$ y forma un ángulo de 30° con la parte positiva del eje de abscisas.

Como la recta forma un ángulo de 30° con la parte positiva del eje X, su pendiente valdrá:

$$m=\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Utilizando la ecuación punto–pendiente:

$$y+4=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-5)\Rightarrow 3y+12=\sqrt{3}x-5\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{3}x-3y-12-5\sqrt{3}=0$$

74. Calcula la ecuación general de la recta r si cumple las siguientes condiciones.

a) Pasa por $A(-2, -4)$ y forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje X.

b) Pasa por el origen de coordenadas y forma un ángulo de 60° con la parte positiva del eje X.

149

Actividades

ACTIVIDAD **RESUELTA**

75. Dados los puntos $A(-1, 3)$, $B(4, 0)$ y $C(-1, 2)$:

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a la que pasa por B y C.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por A y C y que pasa por B.

a) Se calcula la recta que pasa por B y C:

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y}{2-0}\Rightarrow 2x-8=-5y\Rightarrow 2x+5y=8$$

Las paralelas a esta recta son: $2x+5y+k=0$

Como debe pasar por A, se sustituyen sus coordenadas y se obtiene el término k:

$$2(-1)+5\cdot 3+k=0\Rightarrow k=-13$$

La recta buscada es: $2x+5y-13=0$

b) Se calcula la recta que pasa por A y C:

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{2-3}\Rightarrow x+1=0$$

Es una recta vertical. Por tanto, todas las perpendiculares a ella serán horizontales y tendrán por ecuación $y+k=0$.

Como pasa por B: $0+k=0\Rightarrow k=0$

La recta buscada es: $y=0$ (Eje de abscisas)

76. Dados los puntos $A(2, 3)$, $B(-4, -1)$ y $C(0, 2)$:

a) Calcula las ecuaciones de todas las rectas que pasan por dos de los puntos anteriores.

b) Calcula la paralela a la que contiene a A y a B y que pasa por C.

c) Calcula la perpendicular a la que contiene a A y a B y que pasa por C.

77. Halla la ecuación de la recta perpendicular a la que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(-1, -1)$ y que pasa por el origen de coordenadas.

78. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 3)$ y por el punto de corte de r: $8x-5y+2=0$ y s: $2x+y-4=0$.

79. Halla la mediatriz del segmento de extremos A y B en los siguientes casos.

a) $A(-2, 4)$ y $B(2, -4)$

b) $A(1, 4)$ y $B(-2, 3)$

80. Halla las medianas y el baricentro del triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ y $C(5, 0)$.

81. Se consideran las rectas r: $y=x-3$ y s, determinada por los puntos $A(7, 5)$ y $B(-4, 1)$. ¿Cuál es su posición relativa?

82. Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas $3x-y-6=0$, $3x+y-18=0$ e $y=0$.

a) Halla las coordenadas de los vértices.

b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.

c) Halla las ecuaciones de las medianas.

d) Halla el baricentro del triángulo.

Actividades de síntesis

83. Un triángulo tiene dos vértices en $A(0, 0)$ y $B(2, 0)$. Halla las coordenadas del tercer vértice sabiendo que es un triángulo equilátero.

84. Siendo $\vec{u}=(4, x)$, halla el valor de x en cada una de las siguientes situaciones.

a) El módulo de $\vec{u}$ vale $\sqrt{20}$ unidades.

b) Si $\vec{v}=(3, -5)$ es tal que el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ es igual a 2.

85. Determina un vector cuyo módulo valga $\sqrt{10}$ unidades lineales y que forme un ángulo de 30° con la horizontal.

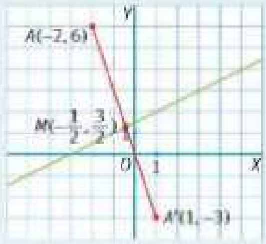
86. Las rectas r: $x-y+1=0$, s: $x+y-7=0$, t: $x-y-5=0$ y u: $x+y-5=0$ determinan un cuadrilátero.

a) Calcula las medidas de los lados y de los ángulos interiores.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

ACTIVIDAD **RESUELTA**

87. Calcula el punto simétrico de $A(-2, 6)$ respecto de la recta r: $x-3y=-5$.



Para que A' sea el simétrico de A respecto de r, se debe verificar que r sea la mediatriz del segmento de extremos A y A'.

Se calcula la recta perpendicular a r y que pasa por A:

$3x+y+k=0\Rightarrow$

$\Rightarrow -6+6+k=0\Rightarrow k=0$

La recta que pasa por A y A' es s: $3x+y=0$.

Se calcula el punto M intersección de r y de s:

$$\begin{cases}x-3y=-5\\3x+y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-9y=-15\\3x+y=0\end{cases}\Rightarrow -10y=-15\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{3}{2},\ x=-\frac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Como M debe ser el punto medio del segmento de extremos A y A', despejando:

$$\left.\begin{array}{l}A(-2, 6)\\ M\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\\ A'(a, b)\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{-2+a}{2},\ \frac{3}{2}=\frac{6+b}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=1,\ b=-3\Rightarrow A'(1, -3)$$

88. Calcula el punto simétrico de:

a) $A(3, -4)$ respecto de la recta r: $2x+y=3$

b) $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ respecto de la recta r: $\frac{1}{2}x+y=0$

89. Calcula el triángulo simétrico del que tiene como vértices $A(-2, 0)$, $B(1, 4)$ y $C(2, -2)$ respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

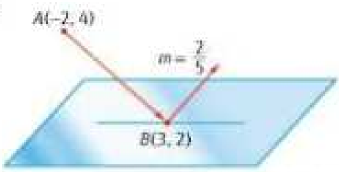
90. Se va a implantar un sistema de riego automático en una rosaleda. Si dos rosales están situados en los puntos $A(4, 6)$ y $B(9, 8)$, y un tercero, en el punto $C(0, 6)$, ¿es posible que una tubería recta pase por los tres a la vez?

91. Un barco lanza un mensaje de socorro indicando su posición: $A(1460, 765)$. Dos barcos situados en $B(3525, 2490)$ y $C(585, 3500)$ acuden en su ayuda. Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia A, ¿cuál llegará primero?

92. Con un solo golpe sobre la bola A, debe golpear primero a la bola B y después a la bola C. Si se consideran dos lados de la mesa como ejes de coordenadas, las coordenadas de las bolas son $A(20, 28)$, $B(5, 10)$ y $C(12, 36)$.

¿Con qué ángulo, respecto de la trayectoria seguida por A cuando golpea a B, debe salir la bola para golpear a la bola C?

93. Un rayo de luz incide en el espejo con una trayectoria rectilínea determinada por los puntos $A(-2, 4)$ y $B(2, 3)$, siendo B el punto de contacto con el espejo, y A, el punto de origen. Al reflejarse, la pendiente de la recta que describe su trayectoria es $\frac{2}{5}$.



a) Escribe las ecuaciones de las rectas que determinan los rayos incidente y reflejado.

b) Halla un vector director de cada una de ellas y el ángulo que forman.

c) La posición del espejo forma el mismo ángulo con el rayo incidente y el reflejado. Encuentra la ecuación de la recta que la define.

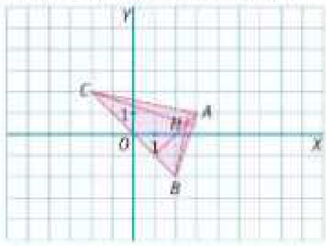
94. Una altura de un triángulo es el segmento que tiene por extremo uno de los vértices y es perpendicular al lado opuesto. El ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres alturas.

Dado el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(2, -2)$ y $C(-2, 2)$:

a) Halla las ecuaciones de sus tres alturas.

b) Calcula el ortocentro H resolviendo el sistema formado por dos de sus alturas.

c) Comprueba que H pertenece a las tres alturas.



ACTIVIDADES PARA PENSAR MÁS

95. Considera dos puntos B y C en un plano. Sea S el conjunto de todos los puntos A de ese plano para los que el área del triángulo ABC es 1. ¿Qué es S?

A. Dos rectas paralelas

B. Una circunferencia

C. Un segmento

D. Dos puntos

96. Si m y b son números reales y $mb > 0$, la recta de ecuación $y = mx + b$ no puede contener al punto:

A. (0, 2011)

B. (20, 10)

C. (20, −10)

D. (2011, 0)

97. El área del triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$ e $y = 6$ es:

A. 48 B. 36 C. 24 D. 18

98. Una recta r divide en dos trozos de igual área al rectángulo de vértices $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 4)$ y $(-2, 4)$ y al rectángulo de vértices $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(1, 12)$ y $(5, 12)$.

¿Cuál es la pendiente de esta recta?

A. −4 B. −1 C. 0 D. 1

Encuentra el error

99. Andrea ha realizado uno de los ejercicios propuestos por su profesor:

Calcula la recta que tiene como vector normal $\vec{u} = (5, -2)$ y que pasa por el punto $A(-2, 4)$. Esta es su respuesta:

$2x + 5y + k = 0 \Rightarrow -4 + 20 + k = 0 \Rightarrow k = -16$

La recta es $2x + 5y = 16$.

¿Dónde está el error?

151

Ponte a prueba

PROBLEMA **RESUELTO** **Situación del punto limpio**

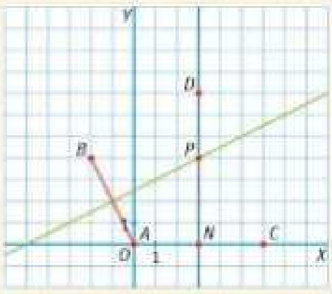
Se ha decidido construir un punto limpio para que los habitantes de las cuatro localidades *A*, *B*, *C* y *D*, puedan llevar sus residuos que, posteriormente, se enviarán a una planta de reciclaje.

El criterio para construir la instalación es que debe ser un lugar situado a igual distancia de las localidades *A*, *B* y *C* ya que son las que, con mucha diferencia, tienen mayor población.

1. **Dibuja un sistema de referencia de ejes perpendiculares que sitúe su origen en el punto *A* y de forma que el punto *C* pertenezca a uno de los ejes. Escribe las coordenadas de las cuatro localidades en este sistema de referencia.**
2. **Encuentra gráficamente el punto elegido para construir el punto limpio según el criterio dado y calcula sus coordenadas en el sistema de referencia anterior.**
3. **Si finalmente se construye la instalación en este punto, ¿a qué distancia estará la localidad *D*?**

   A. 2 km **B.** 3 km **C.** 4 km **D.** 5 km

SOLUCIÓN



1. Las coordenadas de las localidades son:

   $A(0, 0)$, $B(-2, 4)$, $C(6, 0)$, $D(3, 7)$

2. El punto donde hay que construir el punto limpio es el circuncentro del triángulo de vértices A, B y C, es decir, el punto que equidista de los tres puntos. Para calcular sus coordenadas, se halla la intersección de las mediatrices del triángulo.

   - Se calcula la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos *A* y *B*.

     Para ello, se halla el punto medio de los extremos *A* y *B*, $M(-1, 2)$. Todas las rectas perpendiculares al segmento *AB* son de la forma:

     $\overrightarrow{AB} = (-2, 4) \Rightarrow -2x + 4y + k = 0$

     Entre ellas, la que pasa por *M* es:

     $-2(-1) + 4 \cdot 2 + k = 0 \Rightarrow k = -10 \Rightarrow -2x + 4y - 10 = 0 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

   - La mediatriz del segmento *AC* será la recta vertical que pasa por el punto $N(3, 0)$. Por tanto, su ecuación es $x = 3$.
   - Se resuelve el sistema formado por las mediatrices:

     $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 4 \Rightarrow$ El punto $P(3, 4)$ equidista de *A*, *B* y *C*.

     En este punto se colocará el punto limpio.

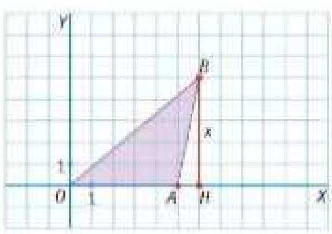
   - Se puede comprobar que *P* equidista de *A*, *B* y *C*.

     $d(P, A) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = d(P, B) = \sqrt{(3+2)^2 + (4-4)^2} = d(P, C) = \sqrt{(3-6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$ km

3. $d(P, D) = \sqrt{(3-3)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9} = 3$ km. El punto limpio quedará más cerca de la localidad *D* que de las otras tres *A*, *B* y *C*.

Superficie de un huerto

Un huerto de hortalizas tiene forma de triángulo y quiere conocerse su área. Los vértices están situados en los puntos $O(0, 0)$, $A(5, 0)$ y $B(6, 5)$.



1. **La distancia menor entre los vértices es:**

   A. $d(O, A)$ **B.** $d(O, B)$ **C.** $d(A, B)$ **D.** Ninguna

2. **Halla la ecuación de la perpendicular *r* al eje *X* y que pasa por *B*.**
3. **¿Cuáles son las coordenadas del punto *H* donde *r* corta al eje *X*?**
4. **¿Cuál es la distancia que separa a *B* de *H*?**

   A. 3 u **B.** 4 u **C.** 5 u **D.** 6 u

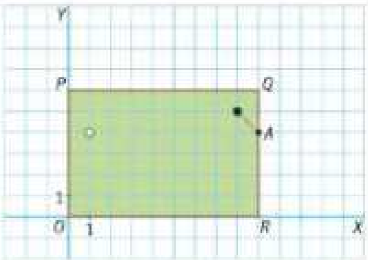
5. **Calcula el área del huerto.**

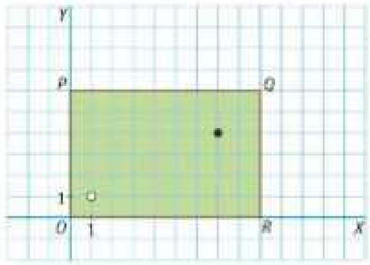
152 UNIDAD 7

La trayectoria adecuada

Cualquier jugador de billar debe recordar el principio de reflexión: cuando una bola golpea un lado de la mesa, el ángulo que forma su trayectoria con el lado al llegar es igual al ángulo que forma con él al rebotar.

Observa estas dos situaciones:





El objetivo es golpear la bola negra y lograr que choque con la bola blanca pero rebotando previamente en los lados QR y RO de la mesa de billar. Por ejemplo, en el primer caso, se ha marcado el punto A que es donde la bola negra debe rebotar en el lado QR.

1. Utiliza el sistema de referencia para calcular la trayectoria adecuada en cada situación.
2. Indica las coordenadas de los dos puntos de rebote y los ángulos correspondientes en cada caso.

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula el vector resultante en cada caso.
   a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1)$
   b) $5[(7, -2) + (-8, 1)]$
   c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)]$
2. Calcula las coordenadas del extremo Q en los siguientes casos:
   a) El vector $\overrightarrow{PQ}$ es $(5, 3)$ y $P(-1, 2)$.
   b) El vector $\overrightarrow{PQ}$ es $(-2, 6)$ y $P(-2, -4)$.
3. Estudia si son perpendiculares los vectores e indica el ángulo que forman.
   a) $\vec{u} = (-2, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1)$
   b) $\vec{u} = (-3, 7)$ y $\vec{v} = (2, -1)$
   c) $\vec{u} = (-1, 6)$ y $\vec{v} = (3, 1)$
4. Comprueba si las siguientes rectas pasan por el punto $(3, -3)$.
   a) $6x - 4y = 6$
   b) $\begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = -4 - \frac{1}{3}t \end{cases}$

   Escribe un vector de dirección y otro normal de cada una de las dos rectas.
5. Escribe todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(9, 4)$ y $B(8, 1)$.
6. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y:
   a) Es paralela a la recta r: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$
   b) Es perpendicular a la recta s: $-2x + 4y - \frac{3}{5} = 0$
7. Estudia la posición relativa de las rectas:
   a) r: $3x - y + 6 = 0$ y s: $3x - 4y + 2 = 0$
   b) r: $4x + 6y + 12 = 0$ y s: $2x + 3y + 9 = 0$

   En el caso de que sean secantes, indica las coordenadas de su punto de intersección.
8. Dado el triángulo de vértices conocidos $A(5, -9)$ $B(-2, -1)$ y $C(7, 2)$:
   a) Calcula las coordenadas de los puntos medios de sus lados.
   b) Halla la medida de sus lados y del ángulo $\hat{A}$.
   c) Calcula la ecuación de la mediana que parte del vértice A.

smSaviadigital.com VALORA LO APRENDIDO > Autoevaluación.

153

B. Programas de GeoGebra como actividades adicionales

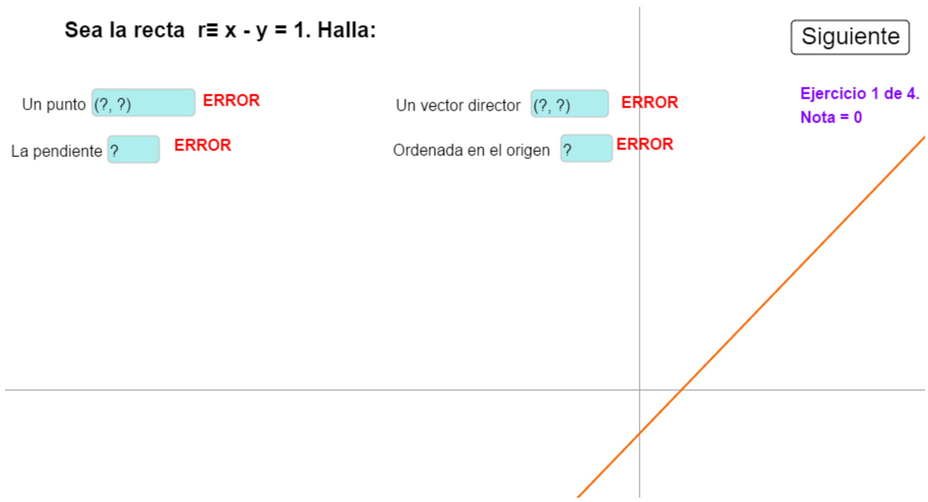
Como se ha explicado en el Capítulo 7, en la sección 7.2 correspondiente a las actividades adicionales planificadas, se han preparado tres programas en GeoGebra que permiten el repaso y evaluación de los tres tipos de ejercicios siguientes:

- Obtención de información a partir de la ecuación de una recta.
- Obtención de diferentes ecuaciones de la recta a partir de ciertos datos.
- Estudio de la posición relativa entre dos rectas.

B.1. Obtención de elementos de la recta

Se pide obtener información a partir de una ecuación de la recta, tal como se muestra en la Figura 46, aunque la recta aparece graficada para mayor ayuda. Además, este programa cuenta con 4 actividades diferentes para sumar los 10 puntos máximos de nota. Las preguntas iniciales de cada una de ellas aparecen acompañadas de un recuadro azul donde debe introducirse la respuesta y consisten en calcular: un punto y un vector director de la recta, así como la pendiente y la ordenada en el origen.

Figura 46. Enunciado actividad adicional sobre elementos de la recta



Una vez introducida la respuesta correcta a cada apartado el mensaje de *"ERROR"* pasa a ser *"CORRECTO"*, como puede verse en la Figura 47, por lo que el alumno puede autocorregirse. Al escribir el punto y el vector director éstos se dibujan sobre la recta, y al poner el valor de la pendiente se activa una nueva pregunta sobre el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas. Para ayudar en la respuesta, este ángulo aparece dibujado, como también se aprecia en la figura, así como la explicación que indica que el valor de la pendiente corresponde con la tangente de dicho ángulo.

Aunque la información del punto y del vector sea incorrecta, estos también se representan en el sistema de coordenadas, como se muestra en la Figura 48, quedando de color rojo e indicando de manera gráfica por qué la respuesta no es correcta

Figura 47. Respuesta actividad adicional sobre elementos de la recta

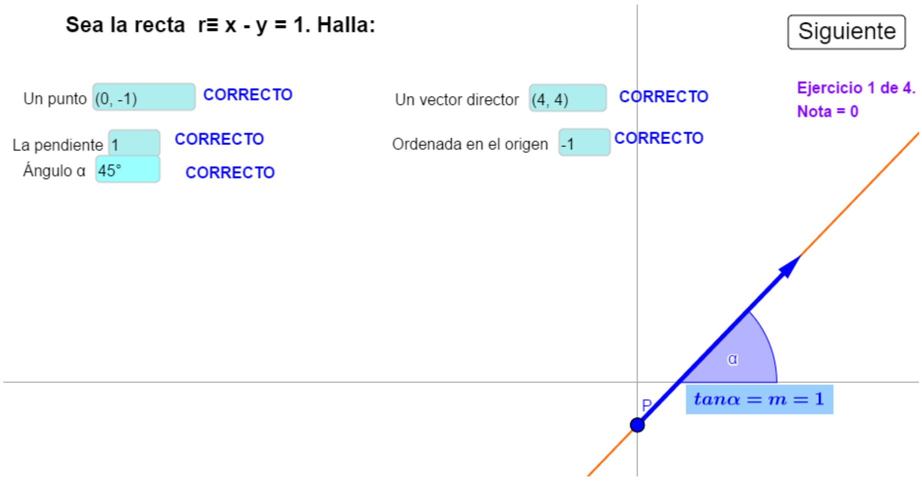
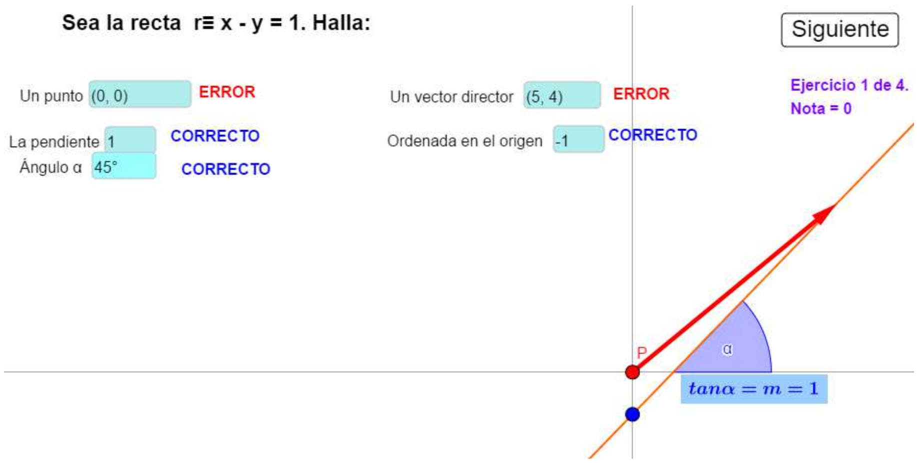


Figura 48. Respuesta incorrecta para la actividad sobre elementos de la recta



B.2. Obtención de ecuaciones de la recta

Se pide escribir distintas ecuaciones de la recta aunque, por limitaciones del programa, solo se pueden preguntar la vectorial, general, punto-pendiente y explícita, como puede verse en la Figura 49. Este ejercicio cuenta con un total de cinco actividades para poder conseguir una nota máxima de 10 puntos.

Conforme se van rellenando las expresiones de la manera correcta, el mensaje de “$ERROR$” se transforma en uno de “$CORRECTO$”, como se muestra en el ejemplo de la Figura 50.

Por otra parte, aunque en la teoría y en los ejercicios se han visto más maneras de determinar una recta, con un punto y la pendiente o con un punto y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas, en este caso el programa solo puede generar los dos casos que se ven en la Figura 51. Así pues, se general de manera aleatoria casos de dos puntos pertenecientes a la recta conocidos o de un punto y un vector director.

Figura 49. Enunciado actividad adicional sobre ecuaciones de la recta

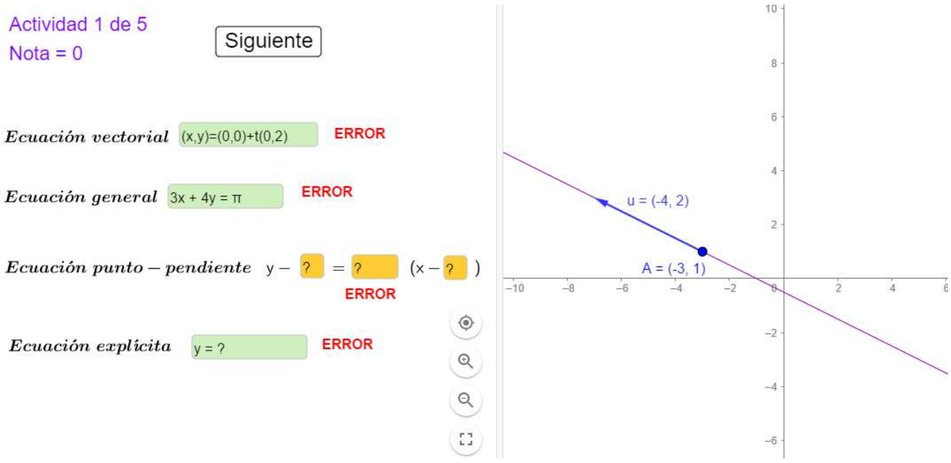


Figura 50. Respuesta actividad adicional sobre ecuaciones de la recta

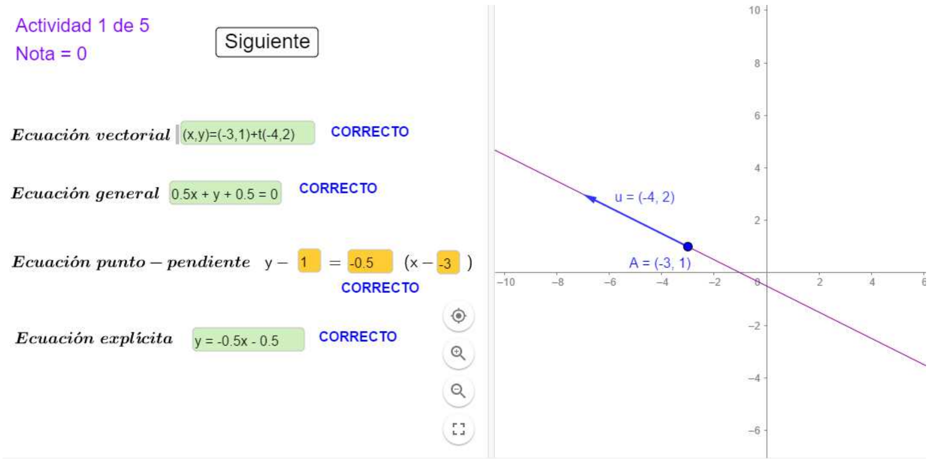
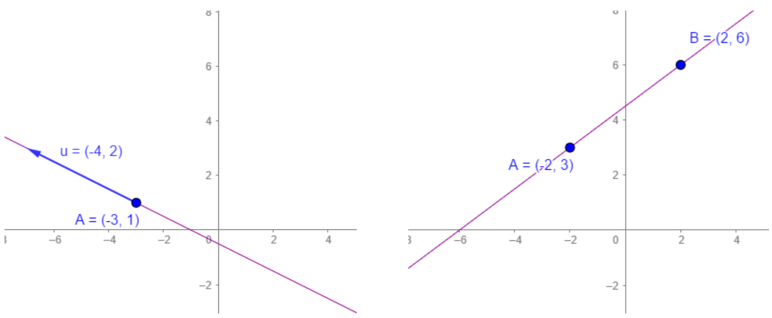


Figura 51. Ejemplos datos de partida para ejercicio sobre ecuaciones de la recta



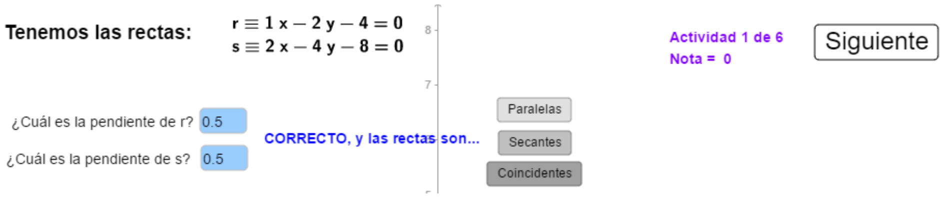
B.3. Posiciones relativas entre dos rectas

Este programa consiste en el estudio de la posición relativa entre dos rectas y tiene 6 actividades. El enunciado presenta las fórmulas de dos rectas, como puede verse en la Figura 52, aunque, una vez más, la limitación del programa permite utilizar exclusivamente las expresiones general y explícita. La primera cuestión consiste en calcular la pendiente de cada una de ellas, dejando un recuadro para completar con el valor.

Figura 52. Enunciado actividad adicional sobre posiciones relativas

Una vez introducidos los valores correctos de cada una de las pendientes de la recta, el mensaje *"ERROR"* se transforma en *"CORRECTO"* y aparece una nueva pregunta, Figura 53, con la finalidad de elegir la opción sobre si las rectas son paralelas, secantes o coincidentes. Tras elegir el resultado correcto, aparece un mensaje indicándolo, así como la representación gráfica de las dos rectas.

Figura 53. Pregunta sobre las posiciones relativas en función de las pendientes



En la Figura 54 se muestra el resultado obtenido cuando las rectas son coincidentes y en la Figura 55 cuando son paralelas.

Por otra parte, en la Figura 56 se puede ver lo que sucede cuando las rectas son secantes: aparece una segunda pregunta donde se pide calcular el punto de corte. Al introducir el valor correcto sucede lo mostrado en Figura 57: se representan las dos rectas y el punto de corte en color rojo. También se puede leer una tercera pregunta en la que se pide escribir la ecuación de la recta paralela a una dada y que pasa por el punto de corte que se ha calculado previamente.

Figura 54. Ejemplo de rectas coincidentes

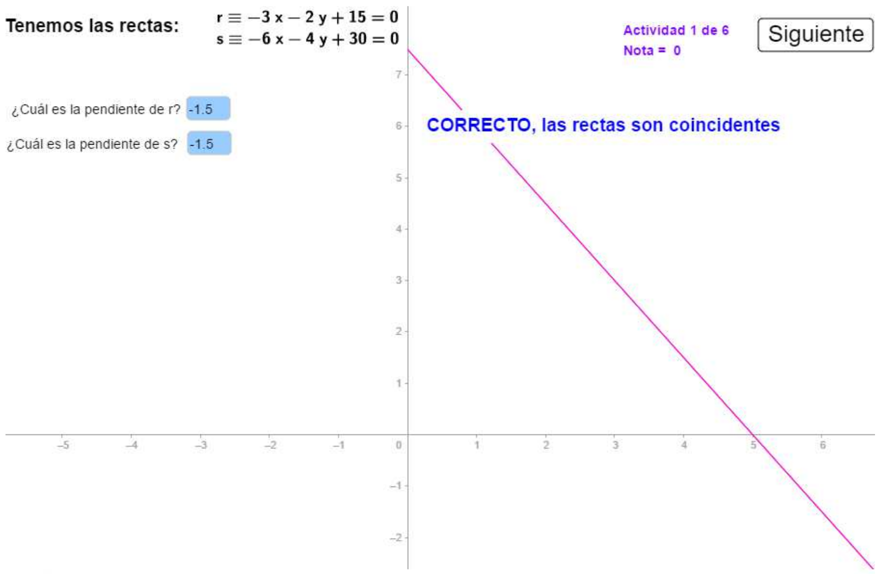


Figura 55. Ejemplo de rectas paralelas

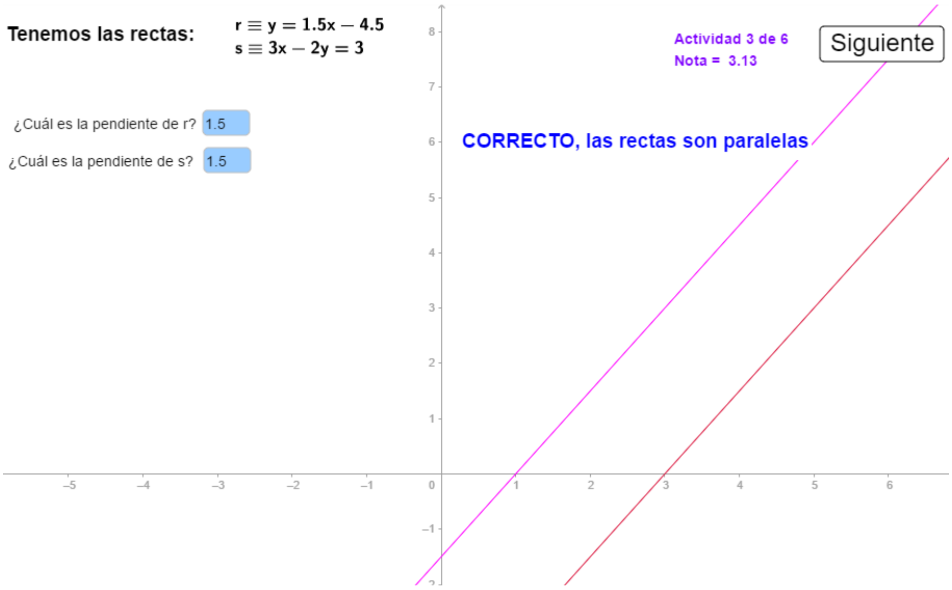


Figura 56. Ejemplo de rectas secantes (1/2)

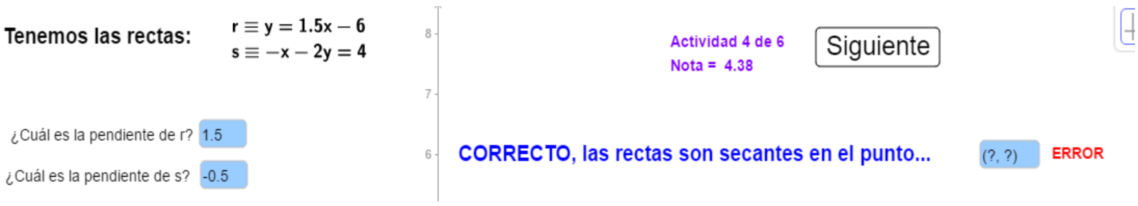
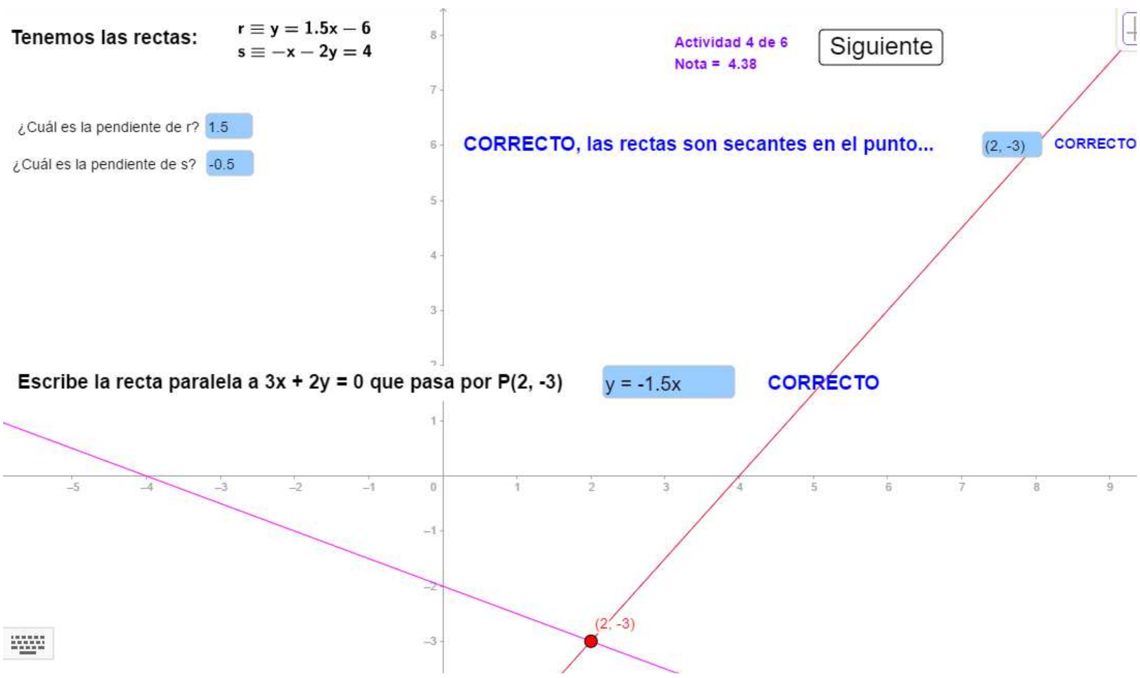


Figura 57. Ejemplo de rectas secantes (2/2)



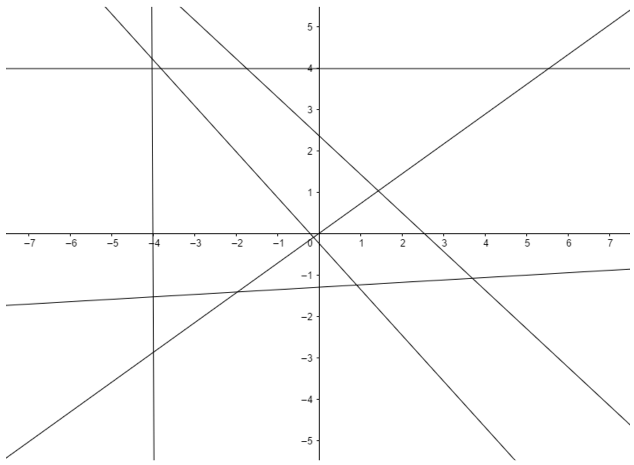
C. Ejercicios de tarea

Como se ha explicado en el Capítulo 7, en la sección 7.3 correspondiente a la tarea que deberá realizar el alumno como trabajo individual, se considera que existen razones para no utilizar el libro de texto en busca de ejercicios para tal fin en algunas clases. Así pues, para las sesiones 1, 2, 3, 5 y 6 se preparan los problemas que se muestran en las siguientes secciones y que el profesor deberá entregar al alumno.

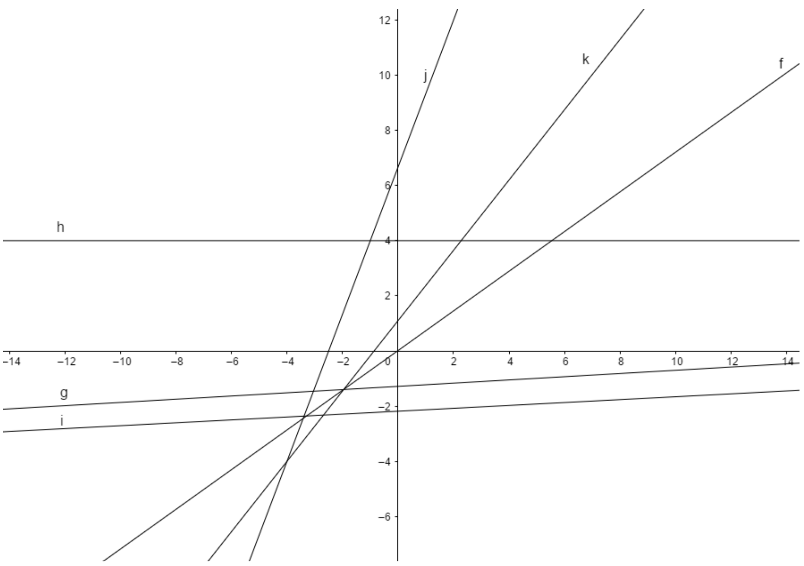
C.1. Sesión 1

Se recuerda que esta sesión corresponde con un primer acercamiento a la pendiente de la recta como se había visto en cursos anteriores. Por tanto, se distinguen tres tipos de ejercicios, como se ha analizado en el Capítulo 7 en la sección 7.1, que determinan la estructura de la tarea.

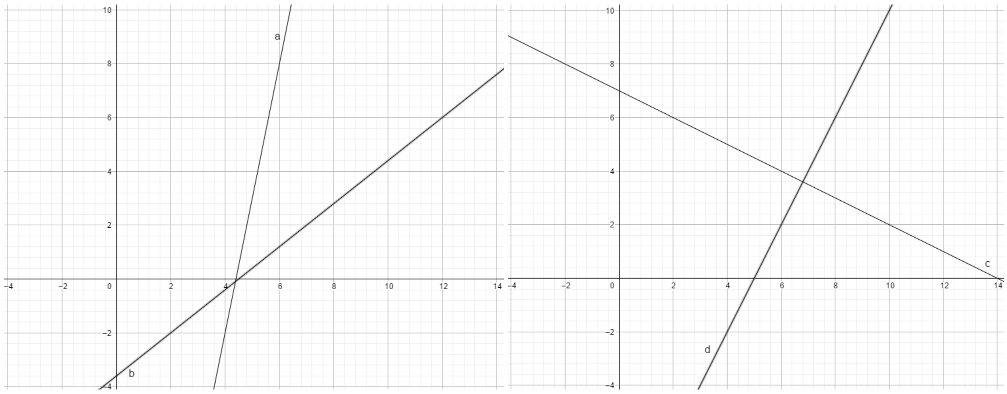
EJERCICIO 1. Determina qué rectas son **crecientes** y cuáles **decrecientes** pintándolas de color azul y rojo, respectivamente.

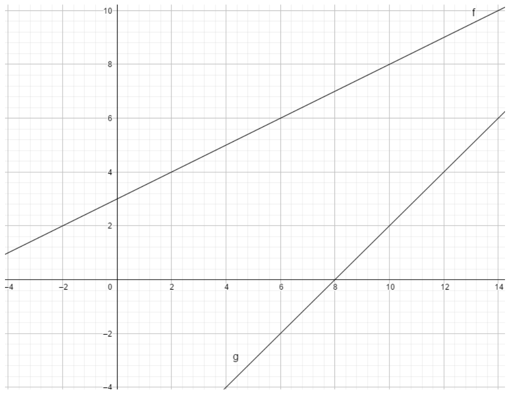


EJERCICIO 2. Ordena de **menor a mayor** la pendiente de las rectas que se muestran a continuación.



EJERCICIO 3. Calcula la **pendiente** de las siguientes rectas y **ordénalas**.





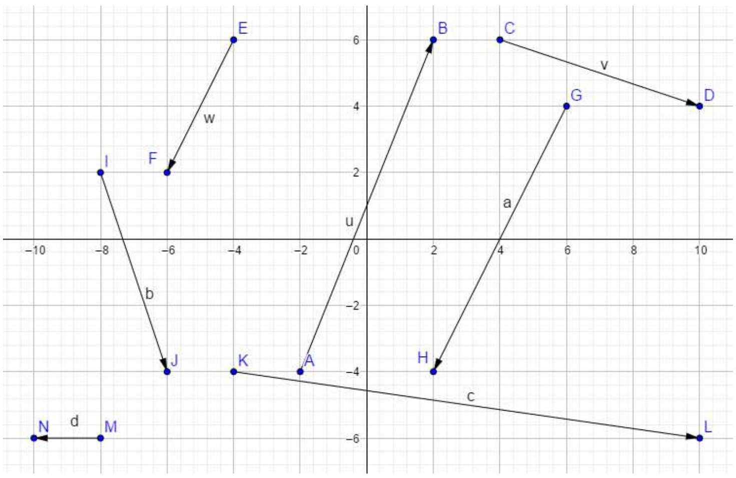
EJERCICIO 4. Calcula la **pendiente** de las siguientes rectas.

Recta r	x	0	1	2	3	4
	y	3	-2	-7	-12	-17

Recta s	x	-5	3	5	7	8
	y	-538	262	462	662	762

Recta t	x	-2	-1	4	6	7
	y	0.69	0.44	-0.81	-1.31	-1.56

EJERCICIO 5. Calcula la **pendiente** de los siguientes vectores. Si se prolongara una recta siguiendo el vector, ¿sería creciente, decreciente o constante?



C.2. Sesión 2

Se recuerda que en esta sesión se ven las ecuaciones punto-pendiente, explícita y general, por lo que los ejercicios tienen relación con estas. Hay tres tipos de ejercicios que son los que determinan la estructura que se muestra a continuación.

EJERCICIO 1. Comprueba si los siguientes puntos **pertenecen** o no a las rectas correspondientes, marca con una X.

PUNTO	RECTA	SÍ	NO
A(-2,1)	$y = 3x + 7$		
B(3,2)	$5x + 2y - 8 = 0$		
C(0,-5)	$y - 3 = 2(x + 2)$		

PUNTO	RECTA	SÍ	NO
D(4,4)	$0.5x - y + 2 = 0$		
E(1,-8)	$y = -x$		
F(-1,0)	$y + 6 = -2(x - 2)$		

EJERCICIO 2. Obtén un **punto**, un **vector director**, la **pendiente** y la **ordenada en el origen** para cada una de las siguientes rectas:

a) $x + y = 3$

b) $y - 1.5 = 3.5x$

c) $-x + 9y + 2 = 0$

d) $y = -2.5x + 4$

EJERCICIO 3. Escribe la ecuación **punto-pendiente**, **explícita** y **general** de la recta que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por los puntos $A(-1,3)$ y $B(5,-2)$.
b) Pasa por el punto $A(5,-2)$ y lleva la dirección de $\bar{u} = (1,-3)$.
c) Pasa por el punto $A(-5,4)$ y tiene pendiente $m = -2$.

C.3. Sesión 3

Se recuerda que en esta sesión se ven las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua, por lo que los ejercicios tienen relación con estas. Hay tres tipos de ejercicios que son los que determinan la estructura que se muestra a continuación.

EJERCICIO 1. Comprueba si los siguientes puntos **pertenecen** o no a las rectas correspondientes, marca con una X.

PUNTO	RECTA	SÍ	NO
A(-2,1)	$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \end{cases}$		
B(3,2)	$(x, y) = (3,2) + t(-1,6)$		

PUNTO	RECTA	SÍ	NO
D(4,4)	$(x, y) = (-2,1) + t(3,6)$		
E(1,-8)	$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 8}{-5}$		

C(0,-5)	$-x=\dfrac{y-5}{2}$			F(-1,0)	$\begin{cases} x=8.5+2.5t \\ y=-3-1.5t \end{cases}$		

EJERCICIO 2. Obtén un **punto**, un **vector director**, la **pendiente** y la **ordenada en el origen** para cada una de las siguientes rectas:

a) $\dfrac{-x+2}{3}=\dfrac{y+7}{8}$

b) $(x,y)=(-5,0)+t(1,3)$

c) $\begin{cases} x=2-3t \\ y=4 \end{cases}$

d) $\dfrac{x-2.5}{1.5}=\dfrac{y+3}{2}$

EJERCICIO 3. Escribe las **ecuaciones vectorial**, **paramétricas** y **continua** de la recta que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por los puntos $A(-1,3)$ y $B(5,-2)$.
b) Pasa por el punto $A(5,-2)$ y lleva la dirección de $\bar{u}=(1,-3)$.
c) Pasa por el punto $A(-5,4)$ y tiene pendiente $m=-2$.

C.4. Sesión 5

Se recuerda que en esta sesión se estudian las posiciones relativas entre dos rectas. Así pues, solo hay un tipo de ejercicio, que consiste en determinar la posición relativa y, en caso de que sean secantes, calcular el punto de corte. Sin embargo, se puede decidir si preguntar directamente por el valor de la pendiente y la ordenada en el origen de la recta.

EJERCICIO. Determina la **posición relativa** de los siguientes pares de recta y, en su caso, obtén el **punto de corte**. En primer lugar, determina el valor de la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de ellas.

a) $g: \dfrac{-x+2}{3}=\dfrac{y+7}{8}$
$h: (x,y)=(-5,0)+t(1,3)$

b) $i: (x,y)=(-5,0)+t(1,3)$
$j: y-6=3(x+3)$

c) $k: 6x+2y-8=0$
$l: y=3x+4$

d) $m: 4x+3y-8=0$
$n: \begin{cases} x=2-3t \\ y=4+4t \end{cases}$

e) $o: \begin{cases} x=2-3t \\ y=4 \end{cases}$
$p: \dfrac{x-2.5}{1.5}=\dfrac{y+3}{2}$

f) $q: y=-x-2$
$r: y+2=-x$

C.5. Sesión 6

Se recuerda que en esta sesión se estudia cómo obtener la expresión de una recta paralela a otra dada y que pase por un punto determinado. Así pues, solo hay un tipo de ejercicio, pero se pueden introducir variantes para hacer el problema más completo y enlazarlo con los contenidos de sesiones anteriores. Por ejemplo, la recta se puede dar expresada mediante cualquiera de las seis fórmulas o dar información para que el alumno tenga, en primer lugar, que obtener la recta que pasa por dos puntos, por ejemplo. Además, se puede dar directamente el punto de paso de la nueva recta paralela o hacer que éste corresponda al punto de corte de dos rectas secantes. También se podría pedir una expresión concreta para la recta paralela, aunque no se elige esa opción ya que se considera que el alumno debe decidir por sí mismo cuál puede presentarle más utilidad.

EJERCICIO. Determina las siguientes rectas paralelas:

a) Recta paralela a $(x, y) = (-5,0) + t(1,3)$ que pasa por el punto $A(3, -2)$.

b) Recta paralela a $y - 6 = -3(x + 3)$ que pasa por el punto $A(0,0)$.

c) Recta paralela a $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 4t \end{cases}$ que pasa por el punto $A(-3, -7)$.

d) Recta paralela a $4x + 3y - 8 = 0$ que pasa por el punto $A(1,2)$.

e) Recta paralela a $y = -x - 2$ que pasa por el punto de corte entre las rectas r: $4x - 3y + 2 = 0$ y s: $y + 8 = 2(x - 5)$.

f) Recta paralela a $\frac{-x+2}{3} = \frac{y+7}{8}$ que pasa por el punto de corte entre las rectas r: $y = -4x + 2$ y s: $(x, y) = (-5,0) + t(1,3)$.

g) Recta paralela a la recta que pasa por el punto $A(7,2)$ y sigue la dirección del vector director $\bar{u} = (9, -2)$ y que pasa por el punto $B(1, -1)$.

h) En un jardín existe una tubería recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(2, -5)$ y $B(-3,0)$, que marcan los lugares donde se encuentran los rosales existentes. Por motivos de construcción, es necesario buscar la fórmula que indica el recorrido de una nueva tubería que sea paralela a la ya existente, pero que pase por el punto de coordenadas $C(0,1)$, donde se va a plantar un nuevo rosal.

D. Índice de tablas

E. Índice de figuras

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Directora:
Inmaculada Lizasoain Iriso
Departamento de Matemáticas e Informática