

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Leyre LÓPEZ CUETO

LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EL
ALUMNADO DE 1º de ESO

TFM 2018

upna
Universidad
Pública de Navarra
Nafarroako
Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL
PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

**Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria
y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas**

Trabajo Fin de Máster
Ámbito Matemáticas

**La estadística y la probabilidad en el
alumnado de 1º de ESO**

Leyre López Cueto

ÍNDICE

	Página
Introducción general	7
Parte I: La estadística y la probabilidad en el currículo vigente y en los libros de texto	9
1. La estadística y la probabilidad en el currículo vigente	13
1.1. Contenidos en Educación Primaria	14
1.2. Contenidos en ESO	15
1.3. Contenidos en Bachillerato	18
2. Los criterios de evaluación de la estadística y la probabilidad en el currículo vigente	23
2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria	24
2.2. Criterios de evaluación en ESO	25
2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato	29
3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la estadística y la probabilidad en el currículo vigente	35
3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 5º de primaria	35
3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º de primaria	38
3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de ESO	41
3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO	43
3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO	46
4. Resultados	51
4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto	51
4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.....	53
Parte II: Análisis de un proceso de estudio de la estadística y la probabilidad en secundaria	55
5. La estadística y la probabilidad en el libro de texto de referencia	59
5.1. Objetos matemáticos involucrados.....	59
5.2. Análisis global de la unidad didáctica.....	62
6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica	69
6.1. Dificultades	69
6.2. Errores y su posible origen.....	70

7. El proceso de estudio	73
7.1. Distribución del tiempo de la clase	73
7.2. Actividades adicionales planificadas	75
7.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista.....	76
8. Experimentación	77
8.1. Muestra y diseño de la experimentación	77
8.2. El cuestionario.....	78
8.3. Cuestiones y comportamientos esperados.....	80
8.4. Resultados	82
8.5. Discusión de los resultados	87
Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas	93
Síntesis.....	93
Conclusiones	93
Cuestiones abiertas	97
Referencias	99
Anexos	101
A. Unidad didáctica del libro de texto	103
B. Apuntes de contenido en pizarra.....	119
C. Actividades adicionales	121
D. Prueba corta	129
E. Ejercicios de repaso: operaciones elementales	131

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo analizar el estudio de la estadística y la probabilidad en el alumnado de 1º de ESO.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre el proceso de aprendizaje de la estadística y la probabilidad, que se ha puesto en marcha en un aula de 1º de ESO de matemáticas básicas en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

La estadística y la probabilidad en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la estadística y la probabilidad en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulos se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a la estadística, la probabilidad y los procesos, métodos y actitudes en matemáticas en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 1º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

La estadística y la probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo se recogen en diferentes tablas los contenidos del currículo vigente en Primaria, ESO y Bachiller relacionados con la estadística y la probabilidad (bloque 5), para poder analizar su evolución a lo largo de los diferentes cursos.

Estos contenidos son los establecidos en el Boletín Oficial de Navarra para Primaria ^[1]: Boletín nº 174 - 5 de septiembre de 2014, Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio; ESO ^[2]: Boletín nº 127 - 2 de julio de 2015, Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril; y Bachiller ^[3]: Boletín nº 127 - 2 de julio de 2015, Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril.

Para ello, se han definido varios descriptores comunes a todas las etapas educativas. Éstos se mostrarán en cada una de las tablas junto a los contenidos a los que engloban, identificados tras el bloque al que pertenecen.

Los descriptores son los siguientes:

- C1: Utilización de las TICs
- C2: Análisis y recogida de información
- C3: Representación e interpretación de datos
- C4: Medidas, parámetros y variables
- C5: Inferencia estadística
- C6: Espacio muestral
- C7: Cálculo de probabilidades
- C8: Experimentos simples y compuestos
- C9: Distribuciones normal y binomial

Para una mejor identificación, el bloque 5: Estadística y Probabilidad, se ha dividido en dos: bloque estadística y bloque probabilidad. De manera general, los descriptores C2, C3, C4 y C5 se tratan en el bloque de estadística y los descriptores C6, C7, C8 y C9 en el bloque de probabilidad.

La presencia de guiones en las tablas indica que el descriptor al que hacen referencia no se trata mediante ningún contenido del bloque 5 del currículo de ese curso. Cabe destacar que el descriptor C1 aparece de esta manera en todos los cuadros, ya que solo se aborda en el bloque 1: “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, pero se ha decidido incluir ya que este bloque ha de impartirse de manera simultánea a los demás en la medida de lo posible, por lo que tiene gran importancia en el desarrollo del curso. En concreto, en el descriptor C1 se encuadra el contenido “Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje” que aparece en el bloque 1 de todos los cursos desde primaria a bachiller, descrito con mayor extensión y con alguna variación entre ellos.

No obstante, casi todos los descriptores se abordan mediante contenidos del bloque 1.

- Por ejemplo al C2 le corresponden los contenidos “Análisis y comprensión del enunciado” del currículo de Primaria y “Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos” del currículo de ESO.
- Las “Estrategias y procedimientos puestos en práctica” definido en Primaria como “hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.” se incluye en el C3; mientras que más

adelante, al estar definida la primera parte del contenido como “uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.)”, se aborda también mediante los descriptores C6 en ESO y C8 y C9 en Bachiller.

- Por otro lado, mediante la parte final “reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.” de este último contenido se aborda el C7, así como la “Reflexión sobre los resultados” y la “Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad.” de los últimos cursos de ESO y Bachiller, que también se incluye en el descriptor C4.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

Descriptor	Contenidos tercer ciclo Educación Primaria	
	5º	6º
C1: Utilización de las TICs	-	-
C2: Análisis y recogida de información	<p>Bloque Estadística Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos.</p> <p>Construcción de tablas de frecuencias.</p>	<p>Bloque Estadística Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos.</p> <p>Construcción de tablas de frecuencias.</p>
C3: Representación e interpretación de datos	<p>Bloque Estadística Gráficos.</p> <p>Interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras y sectoriales.</p> <p>Análisis de las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.</p>	<p>Bloque Estadística Gráficos.</p> <p>Interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales.</p> <p>Análisis de las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.</p>
C4: Medidas, parámetros y variables	<p>Bloque Estadística Parámetros estadísticos.</p> <p>Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética.</p>	<p>Bloque Estadística Parámetros estadísticos.</p> <p>Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética y la moda.</p>
C5: Inferencia estadística	-	-
C6: Espacio muestral	<p>Bloque Probabilidad Carácter aleatorio de algunas experiencias.</p>	<p>Bloque Probabilidad Carácter aleatorio de algunas experiencias.</p>
C7: Cálculo de probabilidades	-	<p>Bloque Probabilidad Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.</p>
C8: Experimentos simples y compuestos	-	-

C9: Distribuciones normal y binomial	-	-
--------------------------------------	---	---

Tabla 1: Contenidos tercer ciclo Educación Primaria

1.2. Contenidos en ESO

Descriptor	Contenidos primer ciclo Educación Secundaria	
	1º	2º
C1: Utilización de las TICs	-	-
C2: Análisis y recogida de información	<p>Bloque Estadística Población e individuo. Muestra.</p> <p>Variables estadísticas. Variables cualitativas y cuantitativas.</p> <p>Frecuencias absolutas y relativas.</p>	
C3: Representación e interpretación de datos	<p>Bloque Estadística Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.</p> <p>Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias.</p>	
C4: Medidas, parámetros y variables	<p>Bloque Estadística Medidas de tendencia central: media, mediana, moda.</p> <p>Medidas de dispersión.</p>	
C5: Inferencia estadística	-	-
C6: Espacio muestral	<p>Bloque Probabilidad Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.</p> <p>Espacio muestral en experimentos sencillos. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Tablas y diagramas de árbol sencillos.</p>	

C7: Cálculo de probabilidades	-	Bloque Probabilidad Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos. Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.
C8: Experimentos simples y compuestos	-	-
C9: Distribuciones normal y binomial	-	-

Tabla 2: Contenidos primer ciclo ESO

Descriptor	Contenidos segundo ciclo Educación Secundaria	
	3º Enseñanzas Académicas	3º Enseñanzas Aplicadas
C1: Utilización de las TICs	-	-
C2: Análisis y recogida de información	<p>Bloque Estadística Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra.</p> <p>Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas.</p> <p>Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra.</p> <p>Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.</p>	<p>Bloque Estadística Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra.</p> <p>Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas.</p> <p>Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra.</p> <p>Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.</p>
C3: Representación e interpretación de datos	<p>Bloque Estadística Gráficas estadísticas.</p> <p>Diagrama de caja y bigotes. Agrupación de datos en intervalos.</p>	<p>Bloque Estadística Gráficas estadísticas.</p> <p>Diagrama de caja y bigotes. Agrupación de datos en intervalos.</p>
C4: Medidas, parámetros y variables	<p>Bloque Estadística Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades.</p> <p>Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.</p> <p>Parámetros de dispersión.</p>	<p>Bloque Estadística Parámetros de posición: media, moda, mediana y cuartiles. Cálculo, interpretación y propiedades.</p> <p>Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.</p> <p>Parámetros de dispersión:</p>

		rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación.
C5: Inferencia estadística	-	-
C6: Espacio muestral	Bloque Probabilidad Experiencias aleatorias. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. Sucesos y espacio muestral. Diagramas de árbol sencillos.	
C7: Cálculo de probabilidades	Bloque Probabilidad Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Permutaciones, factorial de un número.	
C8: Experimentos simples y compuestos	-	-
C9: Distribuciones normal y binomial	-	-

Tabla 3: Contenidos 3º ESO

Descriptor	Contenidos segundo ciclo Educación Secundaria	
	4º Enseñanzas Académicas	4º Enseñanzas Aplicadas
C1: Utilización de las TICs	-	-
C2: Análisis y recogida de información	Bloque Estadística Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.	Bloque Estadística Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación.
C3: Representación e interpretación de datos	Bloque Estadística Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.	Bloque Estadística Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.
C4: Medidas, parámetros y variables	Bloque Estadística Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización.	Bloque Estadística Interpretación, análisis y utilidad de las medidas de centralización y dispersión.

	Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.	Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
C5: Inferencia estadística	-	-
C6: Espacio muestral	Bloque Probabilidad Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística.	Bloque Probabilidad Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio.
C7: Cálculo de probabilidades	Bloque Probabilidad Probabilidad simple y compuesta. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento. Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.	Bloque Probabilidad Probabilidad simple y compuesta. Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.
C8: Experimentos simples y compuestos	Bloque Probabilidad Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes e independientes. Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.	Bloque Probabilidad Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol.
C9: Distribuciones normal y binomial	-	-

Tabla 4: Contenidos 4º ESO

1.3. Contenidos en Bachillerato

Descriptor	1º Ciencias Sociales	1º Ciencias
C1: Utilización de las TICs	-	-
C2: Análisis y recogida de información	-	-
C3: Representación e interpretación de datos	Bloque Estadística Representación gráfica: Nube de puntos. Estadística descriptiva bidimensional: Tablas de contingencia.	Bloque Estadística Representación gráfica: Nube de puntos. Estadística descriptiva bidimensional: Tablas de contingencia.

	Distribución conjunta y distribuciones marginales. Distribuciones condicionadas.	Distribución conjunta y distribuciones marginales. Distribuciones condicionadas.
C4: Medidas, parámetros y variables	<p>Bloque Estadística Variables aleatorias continuas. Función de densidad y de distribución. Interpretación de la media, varianza y desviación típica.</p> <p>Medias y desviaciones típicas marginales y condicionadas. Variables aleatorias discretas. Media, varianza y desviación típica.</p> <p>Independencia de variables estadísticas. Dependencia de dos variables estadísticas.</p> <p>Dependencia lineal de dos variables estadísticas.</p> <p>Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal.</p> <p>Regresión lineal. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas. Coeficiente de determinación.</p>	<p>Bloque Estadística Medias y desviaciones típicas marginales.</p> <p>Independencia de variables estadísticas. Estudio de la dependencia de dos variables estadísticas.</p> <p>Dependencia lineal de dos variables estadísticas.</p> <p>Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal.</p> <p>Regresión lineal. Estimación. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas.</p>
C5: Inferencia estadística	-	-
C6: Espacio muestral	-	-
C7: Cálculo de probabilidades	<p>Bloque Probabilidad Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.</p> <p>Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.</p>	-
C8: Experimentos simples y compuestos	<p>Bloque Probabilidad Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.</p>	-
C9: Distribuciones normal y binomial	<p>Bloque Probabilidad Distribución de probabilidad.</p>	-

	<p>Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.</p> <p>Distribución normal. Tipificación de la distribución normal.</p> <p>Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.</p>
--	---

Tabla 5: Contenidos 1º Bachillerato

Descriptor	2º Ciencias Sociales	2º Ciencias
C1: Utilización de las TICs	-	-
C2: Análisis y recogida de información	Bloque estadística Población y muestra.	-
C3: Representación e interpretación de datos	Bloque Estadística Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra.	-
C4: Medidas, parámetros y variables	Bloque Estadística Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual. Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral.	Bloque Estadística Variables aleatorias discretas. Media, varianza y desviación típica.
C5: Inferencia estadística	Bloque Estadística Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo	-

	desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.	
C6: Espacio muestral	-	-
C7: Cálculo de probabilidades	<p>Bloque Probabilidad Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.</p>	<p>Bloque Probabilidad Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.</p>
C8: Experimentos simples y compuestos	<p>Bloque Probabilidad Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.</p>	<p>Bloque Probabilidad Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.</p>
C9: Distribuciones normal y binomial	<p>Bloque Probabilidad Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes.</p>	<p>Bloque Probabilidad Distribución de probabilidad. Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades. Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.</p>

Tabla 6: Contenidos 2º Bachillerato

Capítulo 2

Los criterios de evaluación de la estadística y la probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo son los criterios de evaluación del currículo vigente en Primaria, ESO y Bachiller relacionados con la estadística y la probabilidad (bloque 5) los que se recogen en tablas de igual manera que en el *Capítulo 1*.

Estos criterios de evaluación son los establecidos en el Boletín Oficial de Navarra para Primaria ^[1], ESO ^[2] y Bachiller ^[3] ya mencionado.

La notación y clasificación se ha realizado como en el anterior análisis, utilizándose los mismos descriptores, con la salvedad de se han denominado comenzando por “CE” (de Criterio de Evaluación) en lugar de “C” (de Contenido).

De igual manera que ocurría en el capítulo anterior, pese a que no aparezcan en los cuadros, muchos de los criterios de evaluación del bloque 1: “procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, también se cubren con estos descriptores. De esta forma:

- En primaria, el CE1 se cubre con los criterios de evaluación 12: “Utilizar los medios tecnológicos de modo habitual...”, 13: “Seleccionar y utilizar las herramientas tecnológicas...” y 14: “Utilizar herramientas y lenguajes de programación...”. Estos criterios de evaluación corresponderían con el 11 de ESO y el 12 y 13 de Bachiller. No obstante, a diferencia de lo que ocurría con los contenidos, este descriptor sí que se aborda mediante criterios de evaluación del bloque 5.
- Por otro lado, el criterio de evaluación 5 de Primaria: “Elaborar y presentar pequeños informes sobre el desarrollo, resultados y conclusiones obtenidas en el proceso de investigación”, se enmarca dentro de los descriptores CE2 y CE3, mientras que el 6: “Identificar y resolver problemas de la vida cotidiana...”, dentro del CE6.
- En ESO, los descriptores CE2, CE6, CE7 y CE8 se abordan mediante el criterio de evaluación 6: “Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad”, mientras esto corresponde al 8 en 2º Bachiller Ciencias y al 7 en todo Bachiller, que también cubre el CE3, CE4, CE7 y CE8.
- A su vez, los descriptores CE3 y CE4 se abordan en ESO con el criterio de evaluación 5: “Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación”.
- Además, el criterio de evaluación 2: “Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas” de ESO y Bachiller, se incluye dentro de los descriptores CE4 (3º ESO y 2º Bachiller CCSS), CE5 (2º Bachiller CCSS), CE6 (2º ESO, 3º ESO Académicas y 4º ESO), CE7 (2º ESO, 3º ESO Académicas, 4º ESO, 1º Bachiller CCSS y 2º Bachiller), CE8 (4º ESO, 1º Bachiller CCSS y 2º Bachiller), y CE9 (1º Bachiller CCSS y 2º Bachiller Ciencias).
- Por último, los descriptores CE4 y CE5 también se abordan en 2º Bachiller CCSS mediante el criterio de evaluación 1: “Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema”.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

Descriptor	Criterios evaluación tercer ciclo Educación Primaria	
	5º	6º
CE1: Utilización de las TICs	-	-
CE2: Análisis y recogida de información CE3: Representación e interpretación de datos	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Recoger y registrar una información cuantificable, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... comunicando la información.</p> <p>2. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Recoger y registrar una información cuantificable, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... comunicando la información.</p> <p>2. Realizar, leer e interpretar. Representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.</p>
CE4: Medidas, parámetros y variables	-	-
CE5: Inferencia estadística	-	-
CE6: Espacio muestral CE7: Cálculo de probabilidades	<p>Bloque Probabilidad</p> <p>3. Identificar situaciones de la vida diaria en la que se dan sucesos, imposibles, posibles o seguros, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.</p>	<p>Bloque Probabilidad</p> <p>3. Observar, hacer estimaciones y constatar que hay sucesos imposibles, posibles o seguros, o que se repiten.</p> <p>4. Identificar, y resolver problemas de la vida diaria, conectando la realidad y los conceptos estadísticos y de probabilidad, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.</p>
CE8: Experimentos simples y compuestos	-	-
CE9: Distribuciones normal y binomial	-	-

Tabla 7: Criterios evaluación tercer ciclo Educación Primaria

2.2. Criterios de evaluación en ESO

Descriptor	Criterios evaluación primer ciclo Educación Secundaria	
	1º	2º
CE1: Utilización de las TICs	<p>Bloque Estadística</p> <p>2. Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada.</p>	-
CE2: Análisis y recogida de información	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.</p>	-
CE3: Representación e interpretación de datos	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.</p>	-
CE4: Medidas, parámetros y variables	<p>2. Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los</p>	-

	resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada.
CE5: Inferencia estadística	-
CE6: Espacio muestral CE7: Cálculo de probabilidades	<p>Bloque Probabilidad</p> <p>1. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.</p> <p>2. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.</p>
CE8: Experimentos simples y compuestos	-
CE9: Distribuciones normal y binomial	-

Tabla 8: Criterios evaluación primer ciclo ESO

Descriptor	Criterios evaluación segundo ciclo Educación Secundaria	
	3º Enseñanzas Académicas	3º Enseñanzas Aplicadas
CE1: Utilización de las TICs	<p>Bloque Estadística</p> <p>3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.</p>
CE2: Análisis y recogida de información	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante</p>

	<p>tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.</p> <p>3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.</p>	<p>tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.</p> <p>3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.</p>
CE3: Representación e interpretación de datos	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.</p>
CE4: Medidas, parámetros y variables	<p>Bloque Estadística</p> <p>2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas.</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas.</p>
CE5: Inferencia estadística	-	-
CE6: Espacio muestral	-	-
CE7: Cálculo de probabilidades	<p>Bloque Probabilidad</p> <p>4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento.</p>	-
CE8: Experimentos simples y compuestos	-	-
CE9: Distribuciones normal y binomial	-	-

Tabla 9: Criterios evaluación 3º ESO

Criterios evaluación segundo ciclo Educación Secundaria		
Descriptor	4º Enseñanzas Académicas	4º Enseñanzas Aplicadas
CE1: Utilización de las TICs	Bloque Estadística 3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.	Bloque Estadística 3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.
CE2: Análisis y recogida de información	Bloque Estadística 1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada. 3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.	Bloque Estadística 1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada. 3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.
CE3: Representación e interpretación de datos CE4: Medidas, parámetros y variables	Bloque Estadística 4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.	Bloque Estadística 2. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo), valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.
CE5: Inferencia estadística	-	-
CE6: Espacio muestral	-	-
CE7: Cálculo de probabilidades	Bloque Probabilidad 1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.	Bloque Probabilidad 3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como

	2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.	los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.
CE8: Experimentos simples y compuestos	Bloque Probabilidad 2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.	
CE9: Distribuciones normal y binomial	-	-

Tabla 10: Criterios evaluación 4º ESO

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Descriptor	1º Ciencias Sociales	1º Ciencias
CE1: Utilización de las TICs	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con la economía y otros fenómenos sociales y obtener los parámetros estadísticos más usuales mediante los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo) y valorando la dependencia entre las variables.</p> <p>5. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, la publicidad y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con el mundo científico y obtener los parámetros estadísticos más usuales, mediante los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo) y valorando, la dependencia entre las variables.</p> <p>3. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, la publicidad y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.</p>

	presentación de los datos como de las conclusiones.	
CE2: Análisis y recogida de información	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con la economía y otros fenómenos sociales y obtener los parámetros estadísticos más usuales mediante los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo) y valorando la dependencia entre las variables.</p> <p>5. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, la publicidad y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.</p>	
CE3: Representación e interpretación de datos	<p>Bloque Estadística</p> <p>2. Interpretar la posible relación entre dos variables y cuantificar la relación lineal entre ellas mediante el coeficiente de correlación, valorando la pertinencia de ajustar una recta de regresión y de realizar predicciones a partir de ella, evaluando la fiabilidad de las mismas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos económicos y sociales.</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>2. Interpretar la posible relación entre dos variables y cuantificar la relación lineal entre ellas mediante el coeficiente de correlación, valorando la pertinencia de ajustar una recta de regresión y, en su caso, la conveniencia de realizar predicciones, evaluando la fiabilidad de las mismas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos científicos.</p>

CE4: Medidas, parámetros y variables	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con la economía y otros fenómenos sociales y obtener los parámetros estadísticos más usuales mediante los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo) y valorando la dependencia entre las variables.</p> <p>2. Interpretar la posible relación entre dos variables y cuantificar la relación lineal entre ellas mediante el coeficiente de correlación, valorando la pertinencia de ajustar una recta de regresión y de realizar predicciones a partir de ella, evaluando la fiabilidad de las mismas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos económicos y sociales.</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>1. Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con el mundo científico y obtener los parámetros estadísticos más usuales, mediante los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo) y valorando, la dependencia entre las variables.</p> <p>2. Interpretar la posible relación entre dos variables y cuantificar la relación lineal entre ellas mediante el coeficiente de correlación, valorando la pertinencia de ajustar una recta de regresión y, en su caso, la conveniencia de realizar predicciones, evaluando la fiabilidad de las mismas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos científicos.</p>
CE5: Inferencia estadística	-	-
CE6: Espacio muestral	-	-
CE7: Cálculo de probabilidades	<p>Bloque Probabilidad</p> <p>3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.</p> <p>4. Identificar los fenómenos</p>	-

	que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.	
CE8: Experimentos simples y compuestos	Bloque Probabilidad 3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.	-
CE9: Distribuciones normal y binomial	Bloque Probabilidad 4. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.	-

Tabla 11: Criterios evaluación 1º Bachillerato

Descriptor	2º Ciencias Sociales	2º Ciencias
CE1: Utilización de las TICs	Bloque Estadística 3. Presentar de forma ordenada información estadística utilizando vocabulario y representaciones adecuadas y analizar de forma crítica y argumentada informes estadísticos presentes en los medios de comunicación, publicidad y otros ámbitos, prestando especial atención a su ficha técnica, detectando posibles errores y manipulaciones en su presentación y conclusiones.	Bloque Estadística 3. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, en especial los relacionados con las ciencias y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.

<p>CE2: Análisis y recogida de información</p> <p>CE3: Representación e interpretación de datos</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>3. Presentar de forma ordenada información estadística utilizando vocabulario y representaciones adecuadas y analizar de forma crítica y argumentada informes estadísticos presentes en los medios de comunicación, publicidad y otros ámbitos, prestando especial atención a su ficha técnica, detectando posibles errores y manipulaciones en su presentación y conclusiones.</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>3. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, en especial los relacionados con las ciencias y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.</p>
<p>CE4: Medidas, parámetros y variables</p> <p>CE5: Inferencia estadística</p>	<p>Bloque Estadística</p> <p>2. Describir procedimientos estadísticos que permiten estimar parámetros desconocidos de una población con una fiabilidad o un error prefijados, calculando el tamaño muestral necesario y construyendo el intervalo de confianza para la media de una población normal con desviación típica conocida y para la media y proporción poblacional cuando el tamaño muestral es suficientemente grande.</p>	-
<p>CE6: Espacio muestral</p>	-	-
<p>CE7: Cálculo de probabilidades</p>	<p>Bloque Probabilidad</p> <p>1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia, la axiomática de la probabilidad, el teorema de la probabilidad</p>	<p>Bloque Probabilidad</p> <p>1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real.</p> <p>2. Identificar los fenómenos que</p>

	total y aplica el teorema de Bayes para modificar la probabilidad asignada a un suceso (probabilidad inicial) a partir de la información obtenida mediante la experimentación (probabilidad final), empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.	pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.
CE8: Experimentos simples y compuestos		<p>Bloque Probabilidad</p> <p>1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real.</p>
CE9: Distribuciones normal y binomial	-	<p>Bloque Probabilidad</p> <p>2. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.</p>

Tabla 12: Criterios evaluación 2º Bachillerato

Capítulo 3

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la estadística y la probabilidad en el currículo vigente

En este capítulo se ha realizado un análisis de los ejercicios, problemas y cuestiones tipo que aparecen en los libros de texto de 5º y 6º de primaria y de 1º, 2º y 3º de ESO. Para ello se han utilizado los libros de texto de matemáticas del centro de desarrollo de las prácticas: Cardenal Larraona. En 5º y 6º se emplean libros de la editorial *Edelvives* [4] [5], mientras que en toda la Secundaria se usan los de la editorial *SM* [6] [8] [9], con el fin de que los contenidos vayan evolucionando progresivamente. Cabe destacar que en 3º se ha escogido la rama de enseñanzas académicas, ya que es la única que se imparte en el centro y además es la más completa, ya que en la de enseñanzas aplicadas aparecen los mismos contenidos de estadística en el currículo pero no está contemplada la probabilidad.

En cada apartado se va a analizar el tipo de actividad propuesta, una breve descripción y una imagen de la misma extraída de cada uno de los libros de texto.

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 5º de primaria

Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: Cuestiones en las que el alumnado debe diferenciar entre los tipos de variables estudiados: variables cualitativas y variables cuantitativas.

Ejemplo: Página 198 del libro de texto.

- 1 Clasifica las siguientes variables estadísticas en cualitativas o cuantitativas.
- El número de hijos que tienen las familias de una ciudad.
 - El nombre de los alumnos de una clase.
 - El número de piezas de fruta que comen al día los alumnos de Primaria.

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado en el que se aplican los contenidos explicados: tipos de variables, tabla de frecuencias y media aritmética.

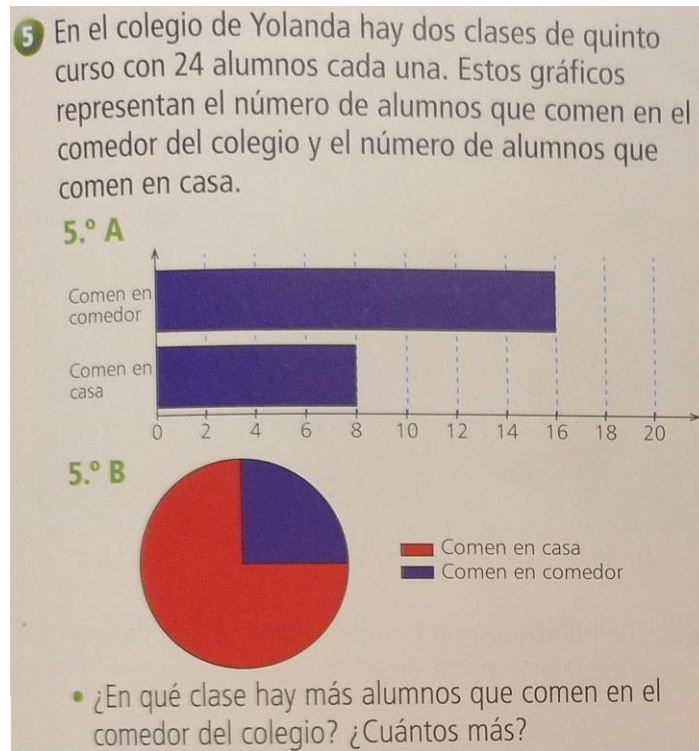
Ejemplo: Página 198 del libro de texto.

- 2 Estos datos representan el número de veces que han lanzado un dado los jugadores de un campeonato de parchís para sacar un 5.
- 1 4 5 1 3 3 7 4 1 9 3 2 7 2 1
- ¿De qué tipo es la variable? Representa los datos en una tabla de frecuencias.
 - ¿Cuál es la media aritmética?

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Se trata de un problema contextualizado de comparación e interpretación de dos gráficos estadísticos: el diagrama de barras y el de sectores.

Ejemplo: Página 213 del libro de texto.



Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión **Situación**

Descripción: Situación que busca fomentar la autonomía de los y las estudiantes, así como la utilización de las TIC a la vez que afianzan conocimientos adquiridos; haciendo que realicen una búsqueda de gráficos de barras dobles para luego elaborar tablas y polígonos de frecuencias.

Ejemplo: Página 201 del libro de texto.

- 3 Busca en periódicos y revistas digitales cuatro artículos donde aparezcan gráficos de barras dobles.
- ¿Qué información representan esos gráficos?
 - Elabora una tabla de frecuencias para cada uno de ellos.
 - Representa los datos en un polígono de frecuencias doble.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado en el que los alumnos y alumnas tienen que identificar la moda a partir de una tabla de frecuencias, así como identificar el gráfico de sectores correspondiente a dicha tabla.

Ejemplo: Página 208 del libro de texto.

6 La siguiente tabla muestra los juegos de patio favoritos de los alumnos de 5.º de un colegio.

Juego	Número de alumnos
Balón prisionero	20
Pañuelo	10
Comba	10
Peonza	40

- ¿Qué juego representa la moda?
- ¿Cuál de los siguientes gráficos de sectores representa correctamente los datos de la tabla anterior?

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Cuestión en la que se pide al alumnado dar ejemplos de sucesos.

Ejemplo: Página 197 del libro de texto.

2 Indica un suceso seguro, otro posible y otro imposible que puedan darse al tirar un dado.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Cuestiones descontextualizadas en las que se aplican conocimientos acerca de sucesos y probabilidad de sucesos con la regla de Laplace.

Ejemplo: Página 205 del libro de texto.

4 Observa la ruleta y contesta a las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es el número de casos posibles?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja se pare en color verde?
- ¿Y de que se pare en color azul?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se pare en color verde o amarillo?

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º de primaria

Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: Cuestión no contextualizada en la que el alumno o alumna tiene que discernir entre los tipos de variables que ha aprendido.

Ejemplo: Página 211 del libro de texto.

1 ¿De qué tipo es la siguiente variable estadística: *cuantitativa* o *cualitativa*?
• El color de ojos de los miembros de una familia.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión **Situación**

Descripción: Situación en la que ha de ser el alumnado, por su cuenta, el que recopile la información necesaria (en este caso lo que miden diez de sus compañeros) para elaborar una tabla de frecuencias y determinar la media, moda, mediana y rango a partir de ella.

Ejemplo: Página 200 del libro de texto.

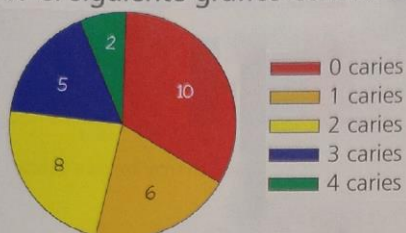
2 Realiza una encuesta a diez compañeros de clase para averiguar su altura en centímetros.
• Elabora una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los datos que has obtenido.
• Calcula la media aritmética, la moda, la mediana y el rango de los datos que has recogido.

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Problema contextualizado en el que se deben aplicar casi todos los contenidos de estadística estudiados: tipo de datos, gráfico de sectores y su interpretación, media, moda, mediana y rango.

Ejemplo: Página 212 del libro de texto.

1 La semana pasada se celebró en tu colegio una campaña de salud bucodental. Un dentista revisó la dentadura a todos los alumnos de tu clase. Hoy os ha enviado el siguiente gráfico con los resultados.



- ¿De qué tipo de gráfico se trata?
- ¿De qué tipo son los datos representados en el gráfico, cualitativos o cuantitativos?
- ¿Cuál es el número mayor de caries que ha encontrado el dentista?
- ¿Cuántos alumnos no tienen ninguna caries?
- ¿Qué número de caries tienen 5 alumnos?
- ¿Qué dato representa la moda?
- Calcula la media aritmética de los datos.
- Calcula la mediana y el rango de los datos.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión **Situación**

Descripción: Situación en la que el alumnado debe realizar una búsqueda de gráficos de barras y polígonos de frecuencias en medios de comunicación para después analizarlos e interpretarlos adecuadamente.

Ejemplo: Página 202 del libro de texto.

- 3** Busca en periódicos y revistas gráficos de barras y polígonos de frecuencias. ¿Qué información representan?
- ¿Entiendes la información que representan? Explícala en tu cuaderno.
 - ¿Crees que es importante que la prensa publique estos gráficos? ¿Por qué?

Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: Cuestiones contextualizadas en las que el alumnado tiene que diferenciar entre experiencias aleatorias y no aleatorias.

Ejemplo: Página 204 del libro de texto.

- 1** ¿Cuáles de las siguientes experiencias son de azar?
- Tener 13 aciertos en una quiniela.
 - Saber cuánto cuestan 2 l de agua conociendo el precio de 1 l.
 - Elegir una carta de la baraja y que salgan oros.


Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: En estas cuestiones descontextualizadas se pide a los y las estudiantes que discernan entre sucesos seguros, posibles e imposibles.

Ejemplo: Página 204 del libro de texto.

2 En la experiencia de lanzar un dado de 6 caras con puntuaciones del 1 al 6, clasifica estos sucesos en seguros, posibles o imposibles.

- Lanzar un dado y que salga 7.
- Lanzar un dado y que salga 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
- Lanzar un dado y que salga 5.

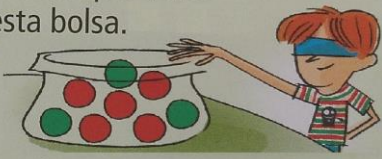


Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Problema descontextualizado en el que el alumnado debe aplicar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de sucesos, así como interpretarla e identificar sucesos imposibles.

Ejemplo: Página 210 del libro de texto.

8 Observa las bolas que tiene Marcos en esta bolsa.



- Calcula la probabilidad de sacar sin mirar una bola roja y de sacar una bola verde.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola negra?
- Ordena de mayor a menor la probabilidad de sacar una bola roja, de sacar una bola verde y de sacar una bola negra.

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de ESO

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado en el que se debe distinguir el tipo de carácter estadístico a estudio y realizar una tabla de frecuencias en base al enunciado.

Ejemplo: Página 175 del libro de texto.

30. Al preguntar a 50 personas su sabor de chicle favorito, 18 eligieron menta, 27, fresa, y el resto, sandía.

a) ¿Qué tipo de carácter estadístico es?
b) Construye la tabla de frecuencias.

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Problema contextualizado en el que el alumnado tiene que aplicar casi todos los conocimientos estadísticos adquiridos: tabla y polígono de frecuencias, diagrama de barras y de sectores, media y moda.

Ejemplo: Página 176 del libro de texto.

44. Se ha realizado una encuesta telefónica a varios hogares en la que se preguntó el número de teléfonos móviles que había en la casa, obteniendo estos resultados:

2, 3, 0, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 3, 4,
2, 4, 4, 2, 1, 1, 2, 2, 4, 0, 4, 0, 4, 0, 1

a) Construye la tabla de frecuencias.
b) Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.
c) Construye el diagrama de sectores.
d) ¿En cuántos hogares no hay ningún móvil? ¿En qué proporción de hogares hay 4 teléfonos móviles?
e) Calcula la media y la moda.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio descontextualizado en el que se debe calcular la media, moda, media ponderada y rango de los datos proporcionados.

Ejemplo: Página 171 del libro de texto.

19. Con estos datos:



4	1	1	1	3	5	6	1	1	4
1	5	2	3	4	4	3	4	5	6
2	3	1	2	1	3	1	5	5	5

a) Halla la media y la moda.

b) Halla la media ponderada, sabiendo que el peso de los datos de la primera fila es 1, el de la segunda es 2, y el de la tercera, 3.

c) Calcula el rango.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Se pide dar ejemplos de experimentos aleatorios y deterministas.

Ejemplo: Página 173 del libro de texto.

23. Da tres ejemplos más de experimentos aleatorios y otros tres de experimentos deterministas.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado para identificar y describir el espacio muestral y tipos de sucesos del mismo.

Ejemplo: Página 173 del libro de texto.

24. En una rifa de un centro escolar se han vendido papeletas numeradas del 1 al 20.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Da tres ejemplos de sucesos elementales y otros tres de sucesos compuestos.

c) Describe el suceso "obtener un número que sea múltiplo de 9".

d) Describe el suceso "obtener un número capicúa de dos cifras".

e) Describe el suceso "obtener un número mayor que 100".

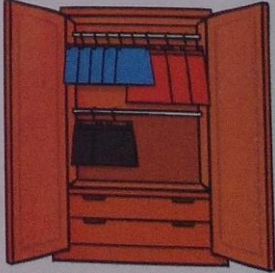
Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Problema contextualizado en el que el alumnado debe calcular la probabilidad de diferentes sucesos.

Ejemplo: Página 179 del libro de texto.

5. Observa las faldas del armario de Rosa.
Si elige una de ellas al azar, calcula la probabilidad de estos sucesos:

- Sacar una falda roja.
- No sacar una falda negra.
- Sacar una falda azul o negra.
- Sacar una falda que no sea ni azul ni roja.
- No sacar una falda.



3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO

Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: Cuestiones contextualizadas en las que se pregunta al alumnado acerca de la población, la muestra y su representatividad.

Ejemplo: Página 261 del libro de texto.

28. Para hacer un estudio sobre la calidad de la prensa escrita de una ciudad de 1000000 de habitantes se han seleccionado 2000 personas, de las cuales, 150 tienen estudios superiores, y el resto, estudios medios. Además, 995 son mayores de 45 años, y el resto, menores.

- Indica cuáles son la población y la muestra del estudio.
- ¿La muestra seleccionada con respecto al nivel de estudios es representativa? ¿Y con respecto a la edad?

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Problema contextualizado en el que se trabaja el tipo de variable estudiada, la tabla de frecuencias y la interpretación de la misma.

Ejemplo: Página 251 del libro de texto.

5. El número de portátiles Normal, Premium y Supra reparados en los últimos 7 días por un servicio técnico son:

N, P, P, S, P, S, P, N, S, S, S, N, N, P,
P, N, S, P, P, S, N, P, N, P, P, N, P, N, S

- ¿De qué tipo es la variable estudiada?
- Presenta los datos en una tabla de frecuencias.
- ¿Qué ordenadores parecen ser los más defectuosos?

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado en el que se pide realizar un diagrama de barras, un polígono de frecuencias y un diagrama de sectores.

Ejemplo: Página 253 del libro de texto.

8. Con el fin de preservar la riqueza de nuestros bosques, se ha llevado a cabo una política de plantación de árboles en los últimos años:

Año	2011	2012	2013	2014	2015
N.º de árboles	510	405	356	421	298

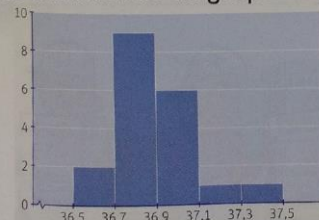
- Representa estos datos mediante un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.
- Construye el diagrama de sectores de los datos asociados.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado cuyo objetivo es construir una tabla de frecuencias a partir de un histograma y determinar los intervalos modal y mediano, la media y el rango.

Ejemplo: Página 263 del libro de texto.

45. En el siguiente histograma se representa la temperatura corporal habitual de un grupo de personas.



- Construye la tabla de frecuencias asociada.
- Calcula el intervalo modal.
- Halla la media y el intervalo mediano.
- ¿Cuál es el recorrido o rango de los datos?

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado para identificar la mayoría de las variables de posición y dispersión estudiadas: moda, media, mediana, desviación media, varianza y desviación típica.

Ejemplo: Página 262 del libro de texto.

41. Un pediatra hace un estudio sobre la edad, en meses, a la que los bebés comienzan a caminar y obtiene los siguientes datos de 12 bebés: 12, 13, 12, 11, 15, 12, 13, 10, 14, 11, 12 y 13 meses.

- Halla la moda y la media de los datos.
- Calcula la mediana.
- Halla la desviación media.
- Calcula la varianza y la desviación típica.

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Problema contextualizado en el que el alumnado debe calcular la media ponderada.

Ejemplo: Página 257 del libro de texto.

22. En un concurso de debate se valoran cuatro aspectos con distintos pesos: con 4 el respeto, con 3 la comunicación, con 2 la claridad de las ideas y con 1 el lenguaje gestual. El equipo A obtuvo 8, 7, 8 y 6 puntos, respectivamente, en cada categoría, y el equipo B obtuvo 7, 10, 8 y 5 puntos. ¿Quién ganó el debate?

Actividad tipo: Ejercicio Problema **Cuestión** Situación

Descripción: Cuestiones para discernir entre experimentos aleatorios y deterministas.

Ejemplo: Página 268 del libro de texto.

2. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

- Tirar un tótem al aire y que caiga de pie.
- Anotar el horario de salida del tren de la estación.
- Reproducir una canción de una lista de música.
- Extraer una carta de la baraja y medir su anchura.
- Lanzar un dado jugando al parchís.

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio descontextualizado en el que el alumnado debe determinar el espacio muestral y sucesos de un experimento, así como identificar sucesos equiprobables.

Ejemplo: Página 283 del libro de texto.

3. Lanzamos dos dados de distinto color y anotamos el producto de los resultados.
a) Escribe el espacio muestral.
b) ¿Son equiprobables los sucesos elementales?
c) Escribe los resultados del suceso “salir 12”.
d) Escribe los resultados del suceso “salir menos de 3”.
e) Escribe los resultados del suceso “salir número primo”.

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio no contextualizado cuyo objetivo es que el alumnado sepa determinar el espacio muestral de un experimento construyendo un diagrama de árbol, así como calcular la probabilidad de diferentes sucesos.

Ejemplo: Página 280 del libro de texto.

52. Lanzamos una moneda tres veces.
a) Utiliza un diagrama de árbol para encontrar el espacio muestral.
b) Calcula la probabilidad de sacar tres cruces.
c) Calcula la probabilidad de sacar exactamente dos caras.
d) Calcula la probabilidad de sacar al menos una cara.

3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Actividad contextualizada en la que el alumnado debe tener claros los conceptos de población, muestra, variable estadística, tipo de la misma y diagrama de barras.

Ejemplo: Página 288 del libro de texto.

45. En España hay cerca de 20 millones de mascotas. Una empresa de productos para animales domésticos ha realizado una encuesta en 900 hogares, de los 17 millones de hogares que hay en nuestro país. En 385 de los hogares no había ninguna mascota, en 212 había perros, en 143, gatos, en 286, pájaros, en 165, peces, y en 71 había animales exóticos.

a) Identifica cuál es la población y cuál es la muestra de la distribución.

b) Di cuál es la variable e indica de qué tipo es.

c) ¿En cuántos hogares españoles hay perros? ¿Y gatos?

d) Haz un diagrama de barras del estudio.

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Problema contextualizado que busca la reflexión del alumnado acerca de la representatividad de la muestra.

Ejemplo: Página 272 del libro de texto.

1. En una editorial se quiere hacer una encuesta a 50 editores sobre su comida preferida. Si en total trabajan 360 mujeres y 240 hombres, ¿cuántos hombres y mujeres deben formar la muestra para que sea representativa?

Actividad tipo: Ejercicio **Problema** Cuestión Situación

Descripción: Problema contextualizado en el que se pide calcular las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas para poder resolverlo.

Ejemplo: Página 288 del libro de texto.

48. Se ha hecho un estudio estadístico sobre la duración de una marca de pilas. Los resultados, en horas, de una muestra de 15 pilas han sido:

20	22	25	21	22	20	23	21
24	21	23	22	21	24	22	

- a) Construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas.
- b) Calcula las frecuencias absolutas y relativas acumuladas
- c) ¿Qué porcentaje de pilas dura más de 22 horas?

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Actividad contextualizada en la que se pide construir un diagrama de barras y otro de sectores.

Ejemplo: Página 290 del libro de texto.

66. Los 8 países ganadores del mundial de fútbol han sido: Alemania 3 veces
Argentina 2, Brasil 5, España 1, Francia 1, Inglaterra 1, Italia 4 y Uruguay 1.
Haz un diagrama de barras y uno de sectores de la distribución.

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado con el que se pretende que el alumnado realice un histograma y lo sepa interpretar.

Ejemplo: Página 279 del libro de texto.

25. La distribución de las edades del profesorado en España el año 2013 era la siguiente:

Edad	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70]
%	11,7	29,4	29,0	25,6	4,4

Dibuja un histograma que represente la distribución.

- a) ¿Qué porcentaje de profesores hay entre 30 y 50 años.
b) ¿Cuántos estimas entre 45 y 55 años?

Actividad tipo: **Ejercicio** Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado con el que se pide al alumnado que calcule medidas de posición: media, moda, mediana y cuartiles.

Ejemplo: Página 281 del libro de texto.

30. El número de libros leídos en el último mes viene dado por la siguiente tabla:

Libros	0	1	2	3	4	5
f_i	14	22	18	10	6	2

- a) Halla la moda, la media y la mediana.
b) Calcula los cuartiles.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado cuyo objetivo es calcular el recorrido, la varianza y la desviación típica de los datos de la tabla de frecuencias proporcionada, así como dibujar el diagrama de caja y bigotes.

Ejemplo: Página 283 del libro de texto.

36. Se ha realizado una encuesta a 50 personas sobre el número de veces que han ido al teatro en el pasado año.

N.º veces	0	1	2	3	4	5	6
f_i	1	1	8	12	6	18	4

a) Calcula el recorrido, la varianza y la desviación típica.
b) Dibuja el diagrama de caja y bigotes. ¿Es simétrica la distribución?

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Problema contextualizado con el que se busca una interpretación conjunta de la media y la desviación típica gracias al coeficiente de variación.

Ejemplo: Página 285 del libro de texto.

41. En una oposición se han realizado dos pruebas de 200 preguntas tipo test.

- En la prueba A la media ha sido de 120 puntos, y la desviación típica, de 32 puntos.
- En la prueba B la media ha sido de 90 puntos, y la desviación típica, de 27 puntos.


¿En que prueba ha habido mayor dispersión relativa?

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Problema contextualizado con el que el alumnado pone en práctica sus conocimientos acerca de experimentos aleatorios, espacio muestral, sucesos y conceptos de probabilidad para tomar decisiones.

Ejemplo: Página 307 del libro de texto.

1. Los billetes de la lotería nacional están formados por números de cinco cifras. En cada sorteo hay un premio gordo y varios de menor cuantía.



a) ¿Es un experimento aleatorio?
b) Describe el espacio muestral.
c) ¿Cuántos elementos tiene el suceso “terminar en 5”?
d) Los billetes que tienen las tres últimas cifras iguales que el Gordo tienen premio. ¿Cuántos son?
e) Te dan a elegir entre el billete 11.111 y el 14.804. ¿Cuál elegirías?

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio no contextualizado cuyo objetivo es la obtención del espacio muestral con una tabla de doble entrada o un diagrama de árbol.

Ejemplo: Página 299 del libro de texto.

13. Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos utilizando una tabla de doble entrada o un diagrama de árbol.

a) "Sacar dos bolas de una bolsa que contiene 4 bolas rojas y una blanca."
b) Lanzar una moneda y un dado cúbico.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Actividad contextualizada para calcular la probabilidad de diferentes sucesos.

Ejemplo: Página 315 del libro de texto.

4. Laura tiene que elegir con los ojos vendados dos regalos de los que le han traído para su cumpleaños. Hay 3 regalos envueltos en papel azul, dos con papel rosa y 1 con papel verde. Calcula la probabilidad de que elija dos regalos que:

a) Estén envueltos con papel verde.
b) Que no estén envueltos en papel verde.
c) Qué estén envueltos en dos colores distintos.

Actividad tipo: Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado de permutaciones.

Ejemplo: Página 315 del libro de texto.

6. En la fila de un cine van a sentarse 6 personas y la sesión es sin numerar. ¿De cuantas formas distintas pueden colocarse?

Capítulo 4 Resultados

En este capítulo se realiza un análisis comparativo entre los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente y los ejercicios, problemas y cuestiones tipo presentes en los libros de texto (*capítulos 1, 2 y 3* de este Trabajo Fin de Máster).

El texto de matemáticas de referencia utilizado es el libro: *Elementary Geometry and Statistics* [10], de *Parker-Baldrige*, recomendado por *Gustavo Ochoa*, director de este Trabajo Fin de Máster.

El capítulo se divide en dos apartados. En el primero se examinan las ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto utilizados, que son los ya mencionados en el *capítulo 3*. En el segundo se estudia la coherencia de estos libros de texto en relación con el currículo, para ver si estos libros favorecen la correcta adquisición de los contenidos establecidos en el curso correspondiente del currículo.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Al analizar tanto el currículo desde Primaria a Bachillerato como los libros de texto escogidos, se puede observar que los contenidos de estadística y probabilidad se van introduciendo paulatinamente, siempre tras repetir los conceptos vistos en cursos anteriores. Es decir, se trata de un aprendizaje en espiral en el que los contenidos van evolucionando por cursos desde lo sencillo y específico a lo complejo y general.

En el currículo de los cursos para los que se ha estudiado sus libros de texto (5º y 6º de Primaria; 1º, 2º y 3º de ESO) los contenidos nuevos que se van introduciendo son:

Curso	Bloque	Contenidos nuevos
5º Primaria	Estadística	Datos cualitativos y cuantitativos Tablas de frecuencias Gráficos: diagramas de barras, sectoriales, análisis información Media aritmética
	Probabilidad	Carácter aleatorio experiencias
6º Primaria	Estadística	Diagramas poligonales Moda
	Probabilidad	Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso
1º ESO	Estadística	Población e individuo. Muestra Mediana Medidas de dispersión
	Probabilidad	<i>No aparecen contenidos de probabilidad</i>
2º ESO	Estadística	<i>No aparecen contenidos de estadística</i>
	Probabilidad	Fenómenos deterministas y aleatorios Espacio muestral Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables Tablas y diagramas de árbol Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace

3º ESO Enseñanzas Académicas	Estadística	Fases y tareas de un estudio estadístico Métodos de selección de una muestra estadística Representatividad de una muestra Diagrama de caja y bigotes Agrupación de datos en intervalos Interpretación conjunta de la media y la desviación típica
	Probabilidad	Permutaciones, factorial de un número

Tabla 13: Contenidos nuevos

En 5º y 6º de Primaria, así como en 3º de ESO, todos los contenidos ya trabajados en cursos previos se vuelven a impartir añadiendo siempre alguno más, de forma que la complejidad también va aumentando paulatinamente.

En 1º de ESO esto solo ocurre con la parte de estadística, ya que la de probabilidad no está contemplada en el currículo. Lo mismo ocurre con 2º de ESO pero de manera contraria, ya que los contenidos que no aparecen en el currículo son los de estadística.

Como ya se ha mencionado con anterioridad, los libros analizados de 5º y 6º de Primaria son los de la editorial *Edelvives* [4][5], mientras que los de 1º, 2º y 3º de ESO son los de la editorial *SM* [6][8][9], que también se utilizan en el centro para el resto de cursos.

En 5º y 6º de Primaria todos los contenidos del currículo y del libro de matemáticas de referencia para estos cursos están presentes en los libros de texto mediante explicaciones y distintos tipos de actividades; y además aparecen contenidos adicionales.

Por un lado, en 5º se añaden los *pictogramas*, el *diagrama de barras doble*, el *polígono de frecuencias* normal y doble, la *moda* y *tipos de sucesos* que puede haber. Casi todos estos conceptos están planteados para 6º de Primaria en el currículo.

Por otro lado, en 6º aparece el *diagrama de barras triple*, el *diagrama poligonal triple*, la *mediana*, el *rango* y el cálculo de *probabilidades* mediante la *regla de Laplace*. Todos los contenidos estadísticos mencionados aparecen en el currículo en 1º de ESO, mientras que el referente a probabilidad se introduce en 2º de ESO.

En el libro de 1º de ESO están presentes todos los contenidos de estadística del currículo y del libro de matemáticas de referencia a excepción de la mediana, lo cual supone una ausencia en el libro de texto. Otras ausencias podrían considerarse que pese a que se explican los conceptos de *población* y *muestra*, no existen ejercicios, problemas, cuestiones o situaciones en el libro que ayuden a afianzar estos contenidos. Pese a esto, también cabe destacar que se ha añadido gran parte del contenido probabilístico de 2º ESO, ya que aparece la diferencia entre *experimentos aleatorios* y *deterministas*, el concepto de *espacio muestral* y de *sucesos*; y el cálculo de *probabilidades* mediante la *regla de Laplace*.

Con el libro de 2º de ESO ocurre algo similar a lo del de 1º. En este curso sí que están presentes en el libro todos los contenidos del currículo, que en este caso son todos de probabilidad. Además, se añaden todos los contenidos estadísticos de 1º de ESO ya vistos, incluyendo las ausencias ya mencionadas (*muestra*, *mediana* y actividades referentes al concepto de *población*); así como algunos nuevos que forman parte del currículo del curso

siguiente (3° de ESO): *representatividad de la muestra, histograma, varianza y desviación típica*.

En el libro de 3° de ESO el único contenido del currículo que no está presente es los *métodos de selección de una muestra* estadística, aunque sí que se explica la *representatividad de una muestra* y aparecen ejercicios y problemas relativos a ello.

Para terminar, se podría decir que mientras que en los libros de 5° y 6° de Primaria se anima a la utilización de las TIC mediante algunos ejercicios, problemas o situaciones; en general en los de ESO no sucede lo mismo ya que no aparecen casi referencias a la utilización de medios tecnológicos que complementen el aprendizaje.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Como se ha podido observar en el apartado anterior, existe una gran coherencia entre los libros de texto y el currículo.

Por un lado, los libros de 5° y 6° de Primaria de la editorial *Edelvives* ^{[4] [5]}, se ajustan totalmente a lo establecido en el currículo, ya que trabajan los contenidos mínimos que se recogen en el mismo y además aparece contenido adicional, exigido para cursos superiores.

Por otro, pese a que en los libros de 1° y 3° de ESO de la editorial *SM* ^{[6] [9]} hay algunas ausencias, éstas se solventan en cursos posteriores. Por ejemplo, en 1° es llamativa la ausencia del concepto de *mediana*, pero aparece en el libro de 2° (pese a que en este curso no se plantea contenido estadístico en el currículo), así como ejercicios acerca de la *población* o la *muestra*.

Se puede por tanto apreciar que en esta editorial se ha preferido abarcar contenido tanto de estadística como de probabilidad en 1° y 2° de ESO, posponiendo algunos conceptos como los mencionados para 2°; en lugar de ceñirse al currículo y plasmar los contenidos de estadística en 1° y los de probabilidad en 2°. No obstante, cuando esto ocurre, en los centros de enseñanza estos contenidos adicionales se suelen impartir más por encima o no impartir por falta de tiempo, ya que el currículo matemático del curso es bastante extenso.

En 3° de ESO quizás se debería hacer más hincapié a las fases y tareas de un estudio estadístico ya que solo se nombran en un apartado pequeño al comienzo del tema. También a los métodos de selección de una muestra estadística, que no aparecen descritos como tal en todo el contenido, pese a que sí que se explica la *representatividad de la muestra* (concepto bastante importante) y aparecen varios ejercicios que invitan a reflexionar acerca de ello.

Además, en cuanto a la utilización de las TIC, pese a que en algunos ejercicios de los libros de la editorial *Edelvives* se invite a su utilización (por ejemplo para buscar *gráficos* en medios digitales), en general en ambas editoriales es llamativa su ausencia. En la editorial *SM* en cada apartado existe un ejercicio que invita a utilizar su *plataforma digital* ^[11], pero eso no es suficiente, ya que no suele utilizarse en el centro de enseñanza y sería mucho más beneficioso para los estudiantes si, por ejemplo desde los ejercicios del propio libro, se les alentase a utilizar hojas de cálculo o calculadora.

En síntesis, se puede concluir que hay coherencia de los libros de texto con el currículo.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de la estadística y la probabilidad en secundaria

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio sobre estadística y probabilidad en Matemáticas Básicas con alumnos de 1º de ESO, en su gran mayoría con dificultades de aprendizaje.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se analiza el contenido estadístico y probabilístico en el libro de texto de referencia. En el segundo, se establecen y estudian las dificultades y errores previstos en el aprendizaje de este tema, así como sus posibles orígenes. A continuación, en el tercer capítulo, se describe la implementación del proceso de estudio con la distribución del tiempo de clase, las actividades adicionales planificadas y la actividad autónoma del alumno prevista. Finalmente, en el último capítulo, se detalla y analiza la experimentación de dicho proceso en el aula, así como los resultados obtenidos a partir de ella.

Adicionalmente, para evaluar todo el proceso, se exponen una síntesis y unas conclusiones generales, además de algunas cuestiones abiertas extraídas del análisis.

Capítulo 5

La estadística y la probabilidad en el libro de texto de referencia

En el presente capítulo se analiza en profundidad el contenido correspondiente al tema 9: “*Estadística y probabilidad*”, del libro de texto de matemáticas de 1º ESO de la editorial SM ^[6] (*Anexo A*), empleado como referencia para impartir las clases durante el Practicum II. También se han utilizado apuntes teóricos de los contenidos del tema desarrollados a partir del libro de referencia recién mencionado (*Anexo B*) y ejercicios del libro: “*Refuerzo de matemáticas 1º ESO*” ^[7] de la misma editorial, como complemento a los del anterior, repartidos al alumnado en fotocopias (*Anexo C*).

Como fundamento del análisis se emplea como referencia el artículo “*Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*” de Juan D. Godino, Vincenç Font, y Miguel R. Wilhelmi (2006) ^[12].

Nuevamente, el capítulo se divide en dos partes. En la primera se identifican los objetos matemáticos involucrados en la unidad didáctica mencionada, mientras que en la segunda se realiza un análisis global de la misma.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

Tal y como se expone en el artículo de referencia ^[12] mencionado (Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., 2006), es vital analizar críticamente los textos escolares revisando su pertinencia, ya que serán un gran condicionante del proceso de estudio matemático. Desde el “enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática” se postula que esta idoneidad se debe valorar siguiendo cinco criterios que definen idoneidades diferentes, que deben ser integradas teniendo en cuenta sus interacciones:

- Idoneidad epistémica: representatividad del saber enseñado respecto del saber a enseñar.
- Idoneidad cognitiva: proximidad de los significados que se van a llevar a cabo respecto de los personales iniciales del propio alumnado.
- Idoneidad semiótica: resolución de diferencias entre los significados que el alumnado atribuye a una expresión, potencialmente y durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional: disponibilidad y adecuación de los medios materiales y temporales que se necesitan.
- Idoneidad emocional: implicación del alumnado en el proceso de estudio.

A la hora de evaluar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción como es la estadística y la probabilidad, éste se debe comparar con el significado de referencia que se determine. A continuación se van a detallar sus principales elementos agrupados en los seis tipos de entidades que propone el enfoque ontosemiótico (lenguaje, situaciones, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos), teniendo en cuenta que dichos elementos se relacionan entre sí. Se han organizado de manera tabular, tal y como aparecen en la página 139 del artículo de referencia ^[12], dividiéndolos entre los de estadística (primera tabla) y los de probabilidad (segunda tabla).

ESTADÍSTICA	
LENGUAJE	
<p>Verbal Estudio estadístico, encuesta, cuestionario, población, muestra, carácter, variable, cuantitativo, cualitativo, datos, valores, experimento, resultados, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, tabla de frecuencias, análisis, representar, ordenar, agrupar, diagrama de barras, diagrama de líneas, polígono de frecuencias, eje horizontal, eje vertical, eje de abscisas, eje de ordenadas, barra, altura, leyenda, diagrama de sectores, sector, grados, transportador, proporción, parámetro, media, media aritmética simple, media ponderada, peso, moda, rango, recorrido, porcentaje, etc.</p> <p>Gráfico Diagrama de barras, diagrama de líneas, polígono de frecuencias, diagrama de sectores</p> <p>Simbólico F_i, f_i, x_i, N, %, °, “(“, “)”</p>	
SITUACIONES	CONCEPTOS
<ul style="list-style-type: none"> - Cuestiones descontextualizadas de clasificación de caracteres estadísticos - Ejercicios descontextualizados para elaborar o completar tablas de frecuencias - Ejercicios y problemas contextualizados a partir de un estudio estadístico para diferenciar los tipos de caracteres estadísticos, elaborar la tabla de frecuencias, construir gráficos estadísticos y calcular parámetros estadísticos 	<p>Previos Ejes de coordenadas y gráficas Datos cualitativos y cuantitativos Tabla de frecuencias Diagrama de barras, poligonal y de sectores Media, moda</p> <p>Emergentes Población, muestra Variable, parámetro Media ponderada, rango o recorrido</p>
PROCEDIMIENTOS	PROPIEDADES
<ul style="list-style-type: none"> - Descontextualización del enunciado de ejercicios o problemas contextualizados - Contextualización de enunciados descontextualizados - Diferenciar los tipos de caracteres estadísticos de un estudio estadístico - Cálculo de las frecuencias absolutas y relativas - Elaboración e interpretación de gráficos estadísticos: diagrama de barras, de polígonos y de sectores - Cálculo de parámetros estadísticos - Interpretación de resultados 	<ul style="list-style-type: none"> - Los caracteres estadísticos cualitativos no se pueden expresar con números - La suma de las frecuencias absolutas debe ser igual al número total de datos - La suma de las frecuencias relativas siempre es igual a 1 - En el diagrama de barras la frecuencia absoluta se representa sobre el eje vertical y los números han de estar siempre ordenados y a distancia proporcional - En el eje horizontal del diagrama de barras se sitúan solo los datos que se tengan - La suma de los grados de todos los sectores del diagrama de sectores ha de ser 360° - La suma de los pesos que se utilizan para calcular la media ponderada debe ser 1 o 100 si se trata de porcentajes - Puede existir más de una moda

	- Para calcular el rango siempre se resta el dato de mayor numeración menos el de menor numeración
ARGUMENTOS	
	<ul style="list-style-type: none"> - Comprobación de las propiedades en casos particulares como ejercicios, problemas o situaciones - Justificación de las propiedades utilizando ejemplos concretos - Comprobación de las definiciones en casos particulares - Observación de las diferencias de los distintos gráficos a la hora de mostrar los datos

Tabla 14: Elementos estadística

PROBABILIDAD	
LENGUAJE	
<p>Verbal Experimento, experiencia, aleatorio, azar, determinista, predecir, resultado, espacio muestral, posible, suceso, suceso elemental, suceso compuesto, suceso seguro, suceso imposible, descomponer, expresar, unión, elementos, conjunto, conjunto vacío, probabilidad, analizar, regla de Laplace, equiprobable, favorable, posible, , etc.</p> <p>Gráfico Dibujos en los que se representan situaciones contextualizadas de cálculo de probabilidades (por ejemplo de ruletas o dados de distintos tipos)</p> <p>Simbólico E, \emptyset, P(A), “(, “), “{, “}”</p>	
SITUACIONES	CONCEPTOS
<ul style="list-style-type: none"> - Cuestiones descontextualizadas de diferenciación de experimentos aleatorios o deterministas - Cuestiones descontextualizadas de clasificación de sucesos - Ejercicios descontextualizados para calcular la probabilidad de un suceso - Ejercicios y problemas contextualizados para calcular la probabilidad de un suceso 	<p>Previos Carácter aleatorio de algunas experiencias Probabilidad intuitiva de un suceso</p> <p>Emergentes Fenómenos deterministas y aleatorios Espacio muestral Sucesos equiprobables y no equiprobables Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace</p>
PROCEDIMIENTOS	PROPIEDADES
<ul style="list-style-type: none"> - Descontextualización del enunciado de ejercicios o problemas contextualizados - Contextualización de enunciados descontextualizados - Diferenciar el tipo de experimento que se describa - Cálculo de la probabilidad de un suceso aleatorio - Interpretación de resultados 	<ul style="list-style-type: none"> - En el espacio muestral deben aparecer todos los resultados posibles del experimento aleatorio - La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 - La probabilidad de un suceso imposible es 0 - La probabilidad de un suceso seguro es 1 - Regla de Laplace: $P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ casos favorables}}{n^{\circ} \text{ casos posibles}}$

ARGUMENTOS

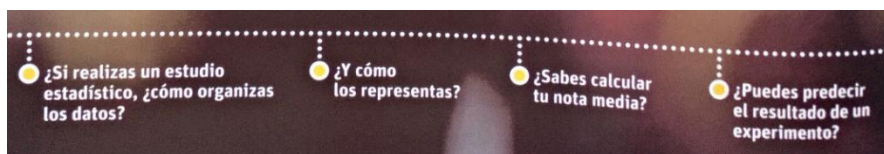
- Comprobación de las propiedades en casos particulares como ejercicios o problemas
- Justificación de las propiedades utilizando ejemplos concretos

Tabla 15: Elementos probabilidad

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

Tal y como se ha indicado al comienzo de este capítulo, la unidad didáctica que se va a analizar a continuación es la correspondiente al tema 9: “*Estadística y probabilidad*” del libro de texto de referencia [6], que se puede ver al completo en el primer *Anexo* de este Trabajo Fin de Máster.

Al igual que el resto de temas del libro, el tema comienza con dos caras a modo de “portada” en las que aparece una imagen, en este caso de bolas numeradas de la lotería. En la parte superior izquierda de la primera, se puede ver el número de tema y su título, mientras que en la inferior izquierda aparece una línea temporal con preguntas, que corresponden a cada uno de los apartados que se estudiarán.



Además, en la segunda cara, se pueden ver unos círculos de 4 tipos distintos. El de mayor tamaño es del tipo: “Lee y comprende” y contiene una lectura relacionada con el tema denominada: “Una lotería a su medida”. El resto de tipos de círculos: “Piensa y decide”, “Analiza y saca conclusiones” e “Y tú, ¿qué opinas?”, contienen preguntas asociadas con la lectura que invitan a la reflexión de aspectos probabilísticos.

A continuación, el tema se divide en cuatro apartados teórico-prácticos de dos caras cada uno en los que se explican los contenidos, un resumen de contenidos denominado: “Organiza tus ideas”, un apartado de actividades y uno final llamado “Ponte a prueba”, que consta de problemas para discurrir más y actividades de autoevaluación. Los títulos de cada uno de ellos son los siguientes:

1. Estadística. Datos y frecuencias
 2. Gráficos estadísticos
 3. Parámetros estadísticos
 4. Sucesos y probabilidad
- ❖ Organiza tus ideas
 - ❖ Actividades
 - ❖ Ponte a prueba

De la misma forma que ocurría con la portada del tema, la estructura de todos los apartados del libro, y por lo tanto también de este tema, es la misma: primero se presentan los contenidos y después aparecen una serie de actividades para practicarlos. Los contenidos se desarrollan mediante una introducción, definiciones y ejemplos. Además, en cada una de las hojas de contenidos, aparece un margen (izquierdo para las caras situadas en la parte trasera o derecho para las de la delantera) en el que se van mostrando diferentes notas de aspectos a destacar o a practicar en la ya nombrada plataforma digital [11] de la editorial. Las denominaciones de dichas notas al margen son: “Pon en valor”, “Ten en cuenta”, “Sabías que...”, “MAT-TIC GeoGebra” y “Practica”.

También cabe destacar que en todas las hojas, tanto de este tema como de los demás que componen el libro de referencia, aparecen gráficos o dibujos que acompañan las explicaciones de contenidos, los ejemplos de las mismas o las actividades que se proponen.

A continuación se va a analizar cada uno de los apartados.

1. Estadística. Datos y frecuencias

La primera cara de este apartado comienza con una introducción para definir a partir de ella un *estudio estadístico*, *población* y los tipos de caracteres estadísticos: *cuantitativos* y *cualitativos*. A continuación se muestra un ejemplo en el que, a partir de un enunciado, se define la *población* y los *tipos de caracteres* del *estudio estadístico* descrito. Para finalizar se define *muestra*.

No obstante, cabe destacar dos aspectos. Por un lado, *estudio estadístico* solo se define a través de la introducción, es decir, no se define de manera general. Esto puede ser confuso a la hora de entender que existen otros tipos de estudios estadísticos diferentes a los del ejemplo.

El curso de Jorge va a realizar un viaje. Tienen que decidir todavía el destino al que prefieren ir y la duración del viaje.
Para recoger sus opiniones, la profesora les pregunta qué opciones prefieren:
Con los datos que obtenga, sabrá qué tipo de viaje prefiere el grupo de alumnos.
La profesora de Jorge está realizando un estudio estadístico.

Por otro, no ocurre lo mismo con *población* y *muestra*, pero sus breves definiciones son las únicas menciones a ellas que se hacen en el tema, ya que no aparecen descritas posteriormente y no hay ejercicios en los que se pregunten estos conceptos. Esto puede resultar escaso a la hora de entenderlas y diferenciarlas.

La **población** es el conjunto de elementos sobre el que se realiza un estudio estadístico.

Cuando el tamaño de la población es demasiado grande, se suele utilizar una parte de ella, a la que se llama **muestra**.

Tal y como se había detallado con anterioridad, al ser una cara de contenidos, aparecen dos notas al margen. La primera se observa en la parte superior y con ella se busca la reflexión del alumnado acerca de la fiabilidad de la información.

La segunda es una nota del tipo: “Ten en cuenta” para resaltar que algunos aspectos pueden ser de ambos tipos: *cuantitativos* y *cualitativos*.

Ten en cuenta
Algunos aspectos pueden estudiarse de las dos formas. Por ejemplo, una nota puede ser numérica (de 0 a 10) o expresarse de forma cualitativa (mal, regular, bien etc.)

La segunda cara del apartado está dividida en dos partes: superior e inferior. En la superior se define la tabla de frecuencias y por lo tanto los tipos de frecuencias que aparecen en ella: la *frecuencia absoluta* y la *relativa*. A continuación aparece un ejemplo. Este libro no utiliza notación para referirse a ninguna de ellas, lo cual no estaría de más, ya que en cursos posteriores u otros libros sí que se utiliza.

Respuesta	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Playa	I	11	$\frac{11}{25} = 0,44$
Montaña	I	6	$\frac{6}{25} = 0,24$
Ciudad	III	8	$\frac{8}{25} = 0,32$
		25	1

Además, quizás sería de gran ayuda para el alumnado que en el caso de caracteres *cuantitativos*, se añadiese otra columna que multiplicase la *frecuencia absoluta* por el dato, ya que esto le facilitaría en gran medida otros cálculos que se aprenderán en esta unidad didáctica como la *media*.

También aparecen dos notas en el margen derecho: una para practicar con las *frecuencias absolutas y relativas* en la plataforma de la editorial ^[11] y otra para que los alumnos tengan en cuenta dos propiedades descritas en el apartado 5.1: que la suma de las *frecuencias absolutas* es igual al número total de datos y que la de las *frecuencias relativas* es 1.

En la parte inferior aparecen una serie de actividades de todos los contenidos vistos anteriormente: una cuestión acerca de *tipos de caracteres estadísticos*, un ejercicio no contextualizado resuelto, un ejercicio contextualizado sobre *frecuencias* y un problema contextualizado que engloba todo lo anterior.

2. Gráficos estadísticos

La primera cara es de contenidos por lo que tras una breve introducción, se definen, describen y ejemplifican el *diagrama de barras*, el de *líneas* (o *polígono de frecuencias*) y el de *sectores*.

Las explicaciones de estos contenidos son bastante claras aunque, no obstante, quizás cabría añadir o cambiar algún aspecto. Por un lado, en la del *diagrama de barras* (así como en su ejemplo) no se especifica que en el eje vertical las *frecuencias absolutas* deben estar ordenadas y a distancia proporcional, mientras que en el horizontal los *datos* no tienen por qué estar ordenados y solo es necesario mostrar los *datos* de los que se disponga. Esto puede dar problemas a los estudiantes a la hora de representar *datos cuantitativos* en un diagrama, ya que tienden a confundir un eje con el otro. Podría ser útil la ejemplificación no solo de datos *cualitativos* sino también de *cuantitativos*.

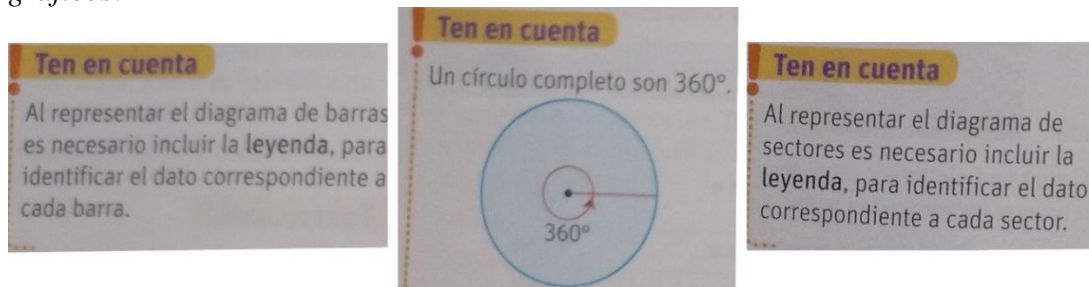
Por otro, en la explicación del *diagrama* de sectores se muestra cómo ha de realizarse el cálculo del número de grados de cada uno de los *sectores*, sin embargo no se deja éste despejado, de forma que resulta más confuso. Además, para facilitar su cálculo

a los estudiantes, podría dejarse en función de la *frecuencia relativa* en lugar de la *frecuencia absoluta* y el número total de datos.

Para representar un **diagrama de sectores** dividimos un círculo en varios sectores, de amplitudes proporcionales a las frecuencias absolutas de los datos. Para conocer la amplitud en grados de cada sector, usamos la siguiente proporción:

$$\frac{360^\circ}{n.º \text{ total de datos}} = \frac{n.º \text{ grados del sector}}{\text{frecuencia absoluta correspondiente}}$$

Además aparecen cuatro notas al margen. Tres de ellas son del tipo “Ten en cuenta”, en las que se describe la *leyenda* de los *gráficos* y los *grados de un círculo* para entender mejor cómo se calcula la amplitud de los *sectores* del *diagrama de sectores*. Quizás hubiese sido mejor agrupar las dos notas acerca de la leyenda en una, de manera que no parezcan contenidos diferentes al tratarse de lo mismo para distintos *gráficos*.



La otra incita a los estudiantes a practicar en la plataforma de la editorial ^[11] la construcción de diagramas.

En la segunda cara aparecen cinco actividades a resolver, una resuelta a modo de ejemplo y de nuevo una para que los estudiantes practiquen estos conocimientos en la plataforma digital ^[11]. En estas actividades el alumnado debe aplicar los contenidos aprendidos hasta el momento, tanto de *datos* y *frecuencias* como de *gráficos estadísticos*. Como se ha comentado con anterioridad, ya que en este tema no hay actividades que pregunten por la *población* o *muestra*, alguna de las que aparece en esta página podría ser fácilmente modificada para hacerlo. Por ejemplo en la número 6, antes de preguntar acerca de la *tabla de frecuencias*, se podría añadir un apartado para que el alumnado identificase la *población* y *muestra* del ejercicio:

6. Durante un viaje en coche, Tomás se aburría tanto que se puso a mirar las matrículas de los coches que pasaban y fue apuntando la última cifra de cada una.

6, 3, 8, 6, 6, 6, 5, 4, 2, 0, 2, 1, 3,
 5, 5, 5, 1, 5, 2, 2, 0, 3, 9, 9, 0, 5, 4,
 3, 1, 7, 4, 8, 6, 5, 9, 2, 9, 4, 9, 6

a) Construye la tabla de frecuencias asociada.
 b) ¿Cuál es la cifra más repetida? ¿Y la que menos aparece?
 c) Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

3. Parámetros estadísticos

Al igual que en el anterior apartado, en la primera cara se tratan contenidos mediante definiciones y ejemplos; y en la segunda se plantean una serie de actividades bastante variadas para aplicar los conocimientos relativos a esos contenidos.

Los contenidos que se trabajan son: la *media aritmética simple y ponderada*, la *moda* y el *rango o recorrido*. Todos ellos se definen y ejemplifican. Tal y como se ha comentado en el apartado 1, quizás sería mejor que a la hora de mostrar un ejemplo para calcular la *media*, en la *tabla de frecuencias* se añadiese otra columna con la multiplicación del dato por la *frecuencia absoluta*, de forma que el alumnado se acostumbre a hacerlo así siempre y de esta forma le resulte más sencillo obtener el resultado y repasarlo.

Ejemplo ▶ Calcula la nota media del último examen de Matemáticas de 1.º A. Las notas han sido las siguientes:
10, 10, 6, 7, 10, 10, 8, 9, 9, 5, 8, 7, 5, 9, 9, 6, 5, 10, 5, 5, 5, 7, 7, 10, 8, 6, 9, 6

Nota	Frecuencia absoluta
5	6
6	4
7	4
8	3
9	5
10	6

Para realizar el cálculo de forma rápida multiplicamos cada nota por su frecuencia absoluta, en lugar de sumar todos los números uno a uno.
La nota media de 1.º A será:

$$\frac{5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 6}{28} = \frac{211}{28} = 7,54$$

Como se puede observar, tampoco aparece notación a la hora de referirse a la *media*, ni *poblacional* (μ), ni *muestral* (\bar{x}); pero en este caso dado el curso a estudio, no se considera necesario utilizarla todavía.

Tal y como se vio con anterioridad, es destacable la ausencia de la *mediana*, ya que aparece en el currículo pero en este libro no se explica y por lo tanto tampoco aparecen actividades que pidan su obtención.

En este caso, como notas al margen solo aparecen dos para practicar los contenidos en la plataforma de la editorial ^[11].

4. Sucesos y probabilidad

Este cuarto apartado se estructura igual que el inicial, ya que en la primera cara y en la parte superior de la segunda se explican contenidos; mientras que sus actividades correspondientes aparecen en la parte media e inferior de la segunda.

Los contenidos consisten en una introducción a la *probabilidad*, explicando los *fenómenos aleatorios y deterministas*, así como las definiciones de *espacio muestral*, *suceso* y *tipos de sucesos*, así como su *probabilidad* de manera general y con la *regla de Laplace* con sendos ejemplos. Las definiciones y el diseño de la propia cara, hacen más fácil su comprensión.

Las tres notas que aparecen al margen son bastante variadas. Una es del tipo “Sabías que...” y por lo tanto se trata de una curiosidad, que en este caso es la etimología de la palabra *aleatorio*. La segunda es del tipo “Ten en cuenta” y aclara que la *probabilidad* de un *suceso imposible* es 0 y la del *suceso seguro* es 1, lo cual es necesario que lo sepa el alumnado. Al explicarlo de esta manera se le da bastante importancia. La tercera es de práctica del *cálculo de probabilidades* en la plataforma ^[11].

Las actividades, tal y como sucedía en los anteriores apartados, permiten practicar los contenidos recién vistos. En este caso no hay ninguna resuelta.

❖ Organiza tus ideas

Este apartado de una cara de extensión se trata de un resumen del tema, de forma que los estudiantes puedan estudiar y repasar todos contenidos de un vistazo. Es decir, tal y como describe su título, sirve para que el alumnado organice sus ideas, por lo que parece una muy buena idea su inclusión en cada uno de los temas del libro.

❖ Actividades

Esta hoja y media (consta de tres caras) de actividades al final del tema sirve para que el alumnado repase todos los contenidos vistos. Está organizada en los cuatro apartados de contenidos, de forma que se pueda saber en qué van a consistir de manera general sin leerlos. Para finalizar, también hay unos últimos apartados con actividades de síntesis, problemas para resolver y actividades para pensar más; que sintetizan todos los contenidos de diversas formas y que sirven más a modo de repaso de todo el tema. De la misma manera que ocurría con el apartado “Organiza tus ideas”, esta estructura se repite en todos los temas del libro.

❖ Ponte a prueba

El último apartado del tema también tiene una estructura que se repite a lo largo del libro de texto de referencia. Consta de dos caras en las que primero se muestra un problema resuelto, después aparecen una serie de problemas (tres en el tema que nos ocupa) y por último cinco ejercicios de autoevaluación. Todas estas actividades se pueden utilizar como repaso final del tema, ya que normalmente o su complejidad es mayor que la de las de anteriores apartados, o aglutinan todos los contenidos necesarios para alcanzar los objetivos del tema.

Tal y como se ha mencionado con anterioridad, a la hora de introducir la *media aritmética simple* no se utiliza notación. Sin embargo, en la solución del problema resuelto de este apartado, sí que aparece \bar{x} , por lo que el alumnado no tendría por qué entender a qué se refiere.

SOLUCIÓN

1. Como 35,25 representa el 49 %, entonces el 100 % son 72 personas.

2.

Ocupación media (personas)	35,25	31,25	48,5	24	50	67	63,75
Ocupación media (porcentaje)	49 %	43,4 %	67,36 %	33,33 %	69,44 %	93,06 %	88,54 %

3. Forma 1: Hacer la media de todos los viajeros que suben al teleférico: $\bar{x} = \frac{1279}{28} = 45,68$

Forma 2: Hacer la media de la ocupación media: $\bar{x} = \frac{319,75}{7} = 45,68$

Conclusiones

Tras este análisis exhaustivo de la unidad didáctica, se puede concluir que su grado de idoneidad con respecto al nivel en el que se debe impartir es muy alto.

Por un lado, la estructura de todos los apartados es la misma o muy similar; y los contenidos están, de manera general, bien definidos y presentados, pese a que se haya encontrado algún fallo y en ocasiones les falte rigor matemático. Además, la utilización de diferentes colores en los textos, así como de gráficos y dibujos a lo largo de todo el tema, hace más atractivo su estudio. Este estudio, debido al esquema que se utiliza, consiste en comprender la teoría, asimilarla mediante ejemplos y practicarla gracias a diferentes actividades.

Por otro lado, es destacable que todos los contenidos se aprenden y asimilan no solo de manera atomizada mediante ejercicios relativos a saberes recién explicados, sino también interrelacionando conceptos y en gran medida con cuestiones, ejercicios y problemas contextualizados, que buscan captar la atención del alumnado y relacionar su vida cotidiana con la unidad didáctica. Estas actividades son bastante variadas y repasan todo el saber que se pretende que los alumnos y alumnas alcancen.

No obstante, se deberían introducir la *población* y la *muestra* en los ejercicios y problemas, así como explicar la *mediana* y añadir ejercicios relativos a ella. También convendría incorporar más ejemplos de *gráficos estadísticos* de *datos cuantitativos*, que son los que más problemas potenciales van a dar a los y las estudiantes.

Capítulo 6

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se exponen las dificultades y errores que se espera que el alumnado cometa durante el estudio de la unidad didáctica de la estadística en 1º de ESO. Cabe notar que se ha excluido la probabilidad debido a que no se ha intervenido en su proceso de aprendizaje.

El primer apartado del presente capítulo detalla las dificultades previsibles a las que se enfrentará el alumnado; mientras que el segundo analiza los errores que presumiblemente cometerá, así como su posible origen.

6.1. Dificultades

Las dificultades que previsiblemente afrontará el alumnado de 1º de ESO en el estudio de la estadística con el libro de referencia son las siguientes:

- **Diferencia entre población y muestra.** Habrá alumnos o alumnas que tengan problemas para distinguir ambos conceptos, sobre todo si no se incide en ellos más de lo que lo hace el libro, ya que solo se mencionan mediante breves definiciones. Esto podría llevar a errores en cursos posteriores, donde la diferencia entre ambos es mucho más importante para poder llevar a cabo un estudio estadístico de manera correcta.
- **Distinción entre carácter cuantitativo y cualitativo.** Supondrá una dificultad sobre todo para aspectos que puedan estudiarse de ambas formas, como una nota de una asignatura. Para aclararlo el libro le hace una mención especial y además podría evitarse la confusión con la aportación de abundantes ejemplos en clase.
- **Notación.** Pese a que en el libro no hay notación científica para referirse a conceptos como los *datos*, la *frecuencia absoluta*, la *frecuencia relativa* o la *media*; probablemente a la hora de impartirlos se optará por utilizarla ya que será beneficioso para que el alumnado comience a familiarizarse con ella. Sin embargo, también supondrá una dificultad añadida para parte del alumnado.
- **Agrupación de datos y cálculo de parámetros.** El hecho de tener que agrupar los *datos* en *tablas de frecuencias*, supone un inconveniente para algunos alumnos y alumnas a la hora de interpretar de manera global los *datos*, incluso para quienes no tienen problemas para hacerlo cuando estos no se presentan sin agrupar. En consecuencia, este hecho les genera dificultades a la hora de calcular *parámetros estadísticos* como la *media* o la *media ponderada*.
- **Creación de tablas y gráficos.** Los y las estudiantes están habituados a elaborar tablas a partir de variables ya definidas y gráficos desde tablas ya diseñadas. Esto puede suponer un problema a la hora de distinguir de manera autónoma las variables y por lo tanto, al crear a partir de ellas sus *tablas de frecuencias* y *gráficos* asociados, pudiendo terminar haciéndolo de manera totalmente mecánica. Además, deberán tener asentados los conocimientos de funciones para saber representar puntos en los ejes cartesianos.

- **Interpretación y verificación de tablas de frecuencias.** Algunos estudiantes puede que encuentren dificultades a la hora de interpretar correctamente una *tabla de frecuencias*. Saber hacerlo les serviría, por ejemplo, para verificar que es correcta, deduciendo que la suma total de las *frecuencias absolutas* debe ser igual al número total de datos o individuos de la muestra; o que la suma total de las *frecuencias relativas* ha de ser 1. Debido a este problema, muchos terminan aprendiéndose estas “comprobaciones” de memoria.
- **Cálculo de los ángulos del diagrama de sectores.** El alumnado deberá partir de conocimientos previos como la *proporcionalidad*, los *ángulos* y el uso del *transportador*, por lo que tendrá que tenerlos asentados. De no ser así, a algunos alumnos o alumnas les costará mucho entender la proporción que han de aplicar y optarán por hacerlo de manera mecánica o por realizar una regla de tres.
- **Interpretación de gráficos.** Será un problema para el alumnado interpretar *gráficos* ya creados si, a la hora de explicarlos, solo se hace desde su construcción a partir de datos ya proporcionados. Se podría evitar describiendo los elementos que los componen y razonando su significado.

6.2. Errores y su posible origen

A continuación se detallan los errores que de manera previsible cometerán los alumnos y alumnas de 1º de ESO en el estudio de la estadística, así como su posible origen:

- **Asociación de conceptos.** Cada año se cometerán los mismos errores sobre los mismos contenidos si estos conceptos no se recuerdan, por ejemplo, al comienzo de cada unidad didáctica.
- **Población, muestra y variable.** Al no darse una definición más rigurosa de *población* y *muestra* hasta cursos posteriores, el alumnado puede cometer errores al intentar identificarlas o diferenciarlas, confundiendo la *población* con la *muestra* o viceversa, e incluso con la *variable estadística* estudiada.
- **Identificación de variables.** Si a los alumnos y alumnas no les queda clara la noción de *variable estadística* e incluso llegan a confundirla con la *población* o *muestra*, no podrán realizar correctamente *gráficos estadísticos* a partir de ellas ni calcular sus *parámetros estadísticos* asociados.
- **Operaciones elementales.** El alumnado cometerá errores de cálculo al sumar número total de datos (suma de las *frecuencias absolutas*), lo cual en consecuencia repercutirá en las *frecuencias relativas* y en el cálculo de *parámetros estadísticos* como la *media aritmética simple*. Esto sucederá si los estudiantes no tienen asentadas las operaciones elementales.
- **Conteo frecuencias absolutas.** A medida que el conjunto de datos sea mayor, el alumnado cometerá más errores de cálculo de *frecuencias absolutas*, sobre todo por falta de rigor, orden y paciencia en el conteo. Será más probable que suceda si siempre se le acostumbra a practicar con conjuntos limitados de datos.

- **Suma total frecuencias.** Muchos estudiantes cometerán el error de que la suma total de *frecuencias absolutas* no será igual al número total de datos, o de que el resultado de la suma *frecuencias relativas* no será igual a 1. Algunos serán capaces de advertirlo y buscar dónde se han confundido, lo cual pondrá de manifiesto que comprenden qué están realizando y por qué, o que se han aprendido de memoria que esos deben ser los resultados. Los estudiantes a los que se aplique este segundo caso, serán más proclives a que se les olvide esta comprobación y sucederá porque habrán automatizado la ejecución de ejercicios como la creación de *tablas de frecuencias*. Esta automatización de ejercicios será también el origen de que cometa estos errores y no sea capaz de darse cuenta.
- **Datos agrupados y diagramas.** A la hora de crear un *diagrama* (por ejemplo un *diagrama de barras*) de una *variable cuantitativa* a partir de datos agrupados, muchos alumnos y alumnas tendrán dificultades para diferenciar la *variable* y la *frecuencia absoluta*, lo que les podrá llevar a confundirlas y a cometer errores al representarlas en el *diagrama*. Un posible origen de este error será no haberle dedicado tiempo suficiente a incidir bien en los elementos del *diagrama*, en dónde se ubican y en que siempre hay que identificarlos en el *gráfico estadístico*. También habrá que insistir en que lo primero que han de hacer es fijarse en qué se está analizando; y por lo tanto en cuál es la *variable*; y posteriormente, en cuál es el número de veces que se repite ese dato (su *frecuencia absoluta*).
- **Datos inexistentes en diagrama de barras.** Representar una *variable cuantitativa* en un *diagrama de barras* puede dar lugar a otro error bastante común, como es que se intente representar datos intermedios que no existen. Por ejemplo si en un grupo de amigos el número preferido de tres es 2 y el del otro es 4; algunos alumnos y alumnas dibujarán una barra para el 2, otra para el 4 y dejarán huecos para el 1 y el 3, escribiéndolos en el eje aunque sin representar sus barras. Sin embargo, no ocurrirá lo mismo cuando se trate de *variables cualitativas*, ya que por ejemplo, si se tratase de un estudio sobre el color favorito de los amigos; a ningún alumno o alumna se le ocurriría dejar huecos y escribir en el eje de abscisas colores que no han sido elegidos. Esto ocurre porque el alumnado tiende a confundir mucho las *variables cuantitativas* con sus *frecuencias absolutas*, en ocasiones no entendiendo la diferencia. En el libro podría subsanarse añadiendo más ejemplos con este tipo de variables, en lugar de hacerlo en su mayor parte con *variables cualitativas*.
- **Datos agrupados y parámetros estadísticos.** A la hora de calcular *parámetros estadísticos* como la *media* o la *media ponderada*, por lo general, el alumnado no tendrá problemas para hacerlo si se trata de datos sin agrupar. Sin embargo, cuando estos datos estén agrupados, muchos estudiantes cometerán errores en los cálculos de sus *parámetros* asociados. Para que no se de este tipo de equivocaciones, a la hora de explicar medidas como las mencionadas, habrá que incidir mucho en su significado y cálculo, con múltiples ejemplos. En caso contrario, los contenidos no quedarán claros, provocando en consecuencia los errores.

Capítulo 7

El proceso de estudio

En el presente capítulo se realiza una descripción del proceso de estudio llevado a cabo durante el Practicum II, en el aula de matemáticas básicas de 1º de ESO del centro Cardenal Larraona de Pamplona.

Dicha asignatura se imparte como optativa durante 3 horas a la semana, a un grupo de 12 alumnos y alumnas. La mayoría de este alumnado tiene dificultades en matemáticas y otras asignaturas, por dificultades específicas de aprendizaje como dislexia o déficit de atención (con o sin hiperactividad). Por lo tanto, el temario que se sigue es el mismo que en la asignatura troncal de matemáticas, con un enfoque ligeramente diferente, más centrado en las dificultades que tiene el grupo. El objetivo es que los estudiantes superen con éxito los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la asignatura de matemáticas para 1º de ESO, fomentando a su vez las competencias clave de forma integrada.

En este caso, el capítulo se divide en tres partes. En la primera se detalla la distribución del tiempo de la clase a lo largo de las sesiones en las que se ha impartido la unidad didáctica de estadística. En la segunda se exponen las actividades adicionales al libro de texto de referencia llevadas a cabo, mientras que en la última se especifica la tarea que se le ha requerido al alumnado que realice.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

La docencia de la unidad didáctica de estadística se ha impartido en 5 sesiones de 55 minutos cada una, ya que el horario del centro está configurado en sesiones de esta duración. Debido a las necesidades específicas del alumnado, todas las sesiones han sido configuradas de forma que en todo momento se intente captar la atención de los estudiantes, haciendo que estén continuamente realizando algo: copiando de la pizarra siempre que se explique y se apunten definiciones, resolviendo actividades, respondiendo preguntas, etc. La penúltima sesión consistió en una prueba corta (de la cual se avisó previamente) puntuable para la nota final, que una vez corregida, se resolvió en clase durante la última sesión, con el fin de aclarar conceptos y dudas. El examen lo realizará la profesora titular junto a los contenidos del siguiente tema.

Como ya se ha mencionado con anterioridad, el texto de referencia utilizado ha sido el libro: *Matemáticas 1 ESO*, de la editorial SM^[6], ya que es el que se utiliza en la asignatura troncal de matemáticas para introducir el contenido y proponer las actividades a los y las estudiantes. No obstante, se ha intentado que las definiciones utilizadas fuesen lo más claras posible; siguiendo las del libro pero modificándolas levemente si se consideraba oportuno para este fin. Además, para cada concepto se ha proporcionado algún ejemplo y pedido al alumnado que aportase el resto, de forma que participase activamente en su proceso de aprendizaje.

A sugerencia de la profesora titular, no se explicaron los contenidos: *mediana* y *diagrama de sectores* ya que en la asignatura troncal de matemáticas no se iban a impartir por decisión de los profesores de las distintas clases de 1º de ESO. El primero porque pese a aparecer en el currículo, no se menciona en el libro de texto de referencia y el segundo por su dificultad a la hora de calcular los grados de los sectores, pese a que inicialmente sí que se planteó y planificó su impartición.

En las tablas que se muestran a continuación se resume cada una de las sesiones.

Sesión 1 – 11/04/2018			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Introducción del tema y explicación conceptos en pizarra con preguntas y ejemplos: <i>población, muestra, estudio estadístico, carácter estadístico, tipos de caracteres.</i>	15 min.	Compartida	Dialógica
Cuestionario inicial	3 min.	Alumnado	Constructivista
Ejercicios sobre <i>población y tipos de caracteres</i> del cuestionario	5 min.	Alumnado	Constructivista
Resultados de un carácter en pizarra en tabla con palitos y números	5 min.	Compartida	Dialógica
Explicación conceptos en pizarra: <i>frecuencia absoluta y frecuencia relativa,</i>	5 min.	Profesora	Magistral
Conclusión <i>tabla de frecuencias</i> y corrección en pizarra	5 min.	Compartida	Dialógica
Explicación concepto en pizarra: <i>diagrama de barras</i> , ejercicio en hojas	17 min.	Compartida	Dialógica

Tabla 16: Sesión 1

Sesión 2 – 13/04/2018			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Repaso sesión 1	5 min.	Compartida	Dialógica
Finalización ejercicio <i>diagrama de barras</i>	2 min.	Alumnado	Constructivista
Diferentes soluciones en pizarra	13 min.	Compartida	Dialógica
Explicación concepto en pizarra: <i>diagrama de líneas o polígono de frecuencias</i>	4 min.	Profesora	Magistral
Explicación concepto en pizarra: <i>media</i> , ejercicio y corrección	16 min.	Compartida	Dialógica
Explicación concepto en pizarra: <i>media ponderada</i> , ejercicio y corrección	10 min.	Compartida	Dialógica

Tabla 17: Sesión 2

Sesión 3 – 17/04/2018			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Explicación conceptos: <i>moda y rango</i> en pizarra con preguntas	5 min.	Compartida	Dialógica
Ejercicios <i>moda y rango</i> en hojas	3 min.	Alumnado	Constructivista
Corrección ejercicios en voz alta	2 min.	Compartida	Dialógica
Ejercicio de repaso en pizarra de casi todos los contenidos apartado a apartado: <i>población, carácter estadístico, tipos de caracteres, tabla de frecuencias, diagrama de barras, diagrama de líneas, media, moda y rango.</i>	20 min.	Alumnado	Constructivista (resolución apartado en sus cuadernos)
	10 min.	Compartida	Dialógica (corrección apartado en pizarra)
Resolución dudas	10 min.	Compartida	Dialógica

Tabla 18: Sesión 3

Sesión 4 – 18/04/2018			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Prueba corta + ejercicios fotocopias de repaso (al acabar la prueba corta)	55 min.	Alumnado	Constructivista

Tabla 19: Sesión 4

Sesión 5 – 20/04/2018			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Entrega pruebas cortas corregidas y corrección en pizarra	45 min.	Compartida	Dialógica
Entrega (corregidos los terminados) y continuación ejercicios fotocopias de repaso	10 min.	Alumnado	Constructivista

Tabla 20: Sesión 5

7.2. Actividades adicionales planificadas

Tal y como se ha mencionado, se ha seguido el libro de texto de referencia ^[6] para la introducción de contenidos. Sin embargo y debido a que en la asignatura troncal de matemáticas éste también se utiliza para la realización de cuestiones, ejercicios y problemas; en esta asignatura se han introducido otras actividades adicionales y una prueba corta.

Cabe destacar que en todas las unidades didácticas de esta asignatura se fomenta mucho la competencia digital, ya que se utiliza en casi todas las sesiones la aplicación *OnMat*. Lo más frecuente es que el alumnado pase los apuntes a limpio y realice actividades diferentes a las del libro de texto de manera más amena y de forma que sus progenitores puedan observar sus progresos de manera directa, ya que desde la propia aplicación el profesorado corrige todo lo que los y las estudiantes vayan realizando. No obstante, para

esta unidad didáctica no se ha utilizado en gran medida ya que las actividades que se proponían no eran del todo claras.

Las actividades y prueba corta mencionadas se encuentran respectivamente en los *Anexos C y D* de la presente memoria y son las que se detallan a continuación divididas por sesiones:

Sesión	Actividad	Descripción
Sesiones 1 y 2	Hoja 1	Cuestionario inicial y ejercicios acerca de: <i>tabla de frecuencias, diagrama de barras y diagrama de sectores</i> (no utilizado).
Sesiones 2 y 3	Hoja 2	Ejercicios acerca de: <i>media, media ponderada, moda y rango</i> .
Sesión 3	Hoja 3	Ejercicio de repaso de contenidos a partir del ejercicio 14 de la página 171 del libro de texto de referencia ^[6] (ampliado). Se dictó en voz alta y se copió en pizarra para que lo fuesen copiando en sus cuadernos.
Sesión 4	Prueba corta	Prueba corta realizada al alumnado que cuenta para la nota final.
Sesiones 4 y 5	Fotocopias	Hojas de actividades fotocopiadas del libro de texto de refuerzo de la editorial SM ^[7] .

Tabla 21: Actividades adicionales

7.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista

A continuación se muestra de forma tabular la tarea que el alumnado ha tenido que realizar durante el proceso de aprendizaje después de cada una de las sesiones.

Sesión	Tipo	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
Sesión 1	Teoría en <i>OnMat</i> : Copiar los apuntes de contenidos de sus cuadernos en la <i>Master Class</i> de este día.	15 min.	Refuerzo
Sesión 2	Repaso teoría clase.	10 min.	Refuerzo
Sesión 3	Estudio autónomo.	20 min.	Refuerzo
Sesión 4	Hacer 5 apartados del siguiente ejercicio de las hojas de repaso de operaciones elementales (<i>Anexo E</i>).	20 min.	Ampliación
Sesión 5	Ejercicios y problemas: Acabar los de las fotocopias o repetir los incorrectos ya corregidos (<i>Anexo C, Fotocopias</i>).	15 min.	Ampliación

Tabla 22: Tarea

Capítulo 8

Experimentación

En este capítulo se detalla la experimentación llevada a cabo durante el periodo de docencia del Practicum II, con los alumnos de la clase de matemáticas básicas de 1º de ESO del centro Cardenal Larraona de Pamplona.

En primer lugar se describe la muestra y el diseño de la experimentación. En segundo lugar el cuestionario, seguido de un análisis de las cuestiones y comportamientos esperados por los alumnos, así como los resultados obtenidos. Para finalizar se realiza una discusión de estos resultados.

8.1. Muestra y diseño de la experimentación

Para la experimentación de este análisis se ha tomado una muestra de 12 alumnos y alumnas de 1º ESO del colegio privado concertado Cardenal Larraona de Pamplona, que corresponde con la clase de matemáticas básicas de este curso.

Se trata de un grupo bastante homogéneo en cuanto a que todos pertenecen a un estrato social de clase media con un nivel socioeconómico medio-alto, tienen la misma edad (12-13 años) y se conocen entre ellos, ya que al ser un centro que imparte enseñanza desde Educación infantil hasta Bachillerato, todos cursaron 6º de Primaria juntos. Además, pese a que en 1º de ESO los alumnos y alumnas todavía no tienen definido su futuro académico, prácticamente el 100% del alumnado del centro obtiene su título de Educación Secundaria Obligatoria y el 90% sigue sus estudios por el Bachillerato. Por lo tanto, presumiblemente este será el camino que tomen estos estudiantes. Esto se traduce en que se trata de una muestra homogénea en cuanto a los conocimientos previos y su orientación posterior.

Sin embargo, son un grupo muy diverso. Casi todos tienen necesidades específicas de apoyo educativo derivadas de dificultades específicas de aprendizaje o por ser alumnado con necesidades educativas especiales. De esta manera, en cuanto a características de los estudiantes, se pueden destacar los siguientes alumnos y alumnas:

- Cinco alumnos con TDAH medicados, dos de los cuales interrumpen en numerosas ocasiones las clases porque pese a la medicación no consiguen prestar atención, distraiéndose continuamente.
- Un alumno con TDA medicado y dos alumnas con TDA sin medicar, a los que les suele costar entender los contenidos.
- Un alumno con TDA y problemas de agresividad que suele entender muy bien los contenidos matemáticos; y solo suele presentar problemas por pasotismo a la hora de entregar actividades resueltas.
- Una alumna con TDA y dislexia, a la cual le ayudan muchísimo en casa y es muy trabajadora, lo cual se suele reflejar positivamente en los resultados y por lo tanto en las calificaciones.

Debido a ello, por lo general, este grupo se suele distraer con mucha facilidad y tiene dificultades para seguir el ritmo normal de clase, unos en mayor medida que otros. De hecho, hay dos alumnas que no tienen estas necesidades específicas de apoyo educativo y por lo tanto no suelen tener problemas en seguir y comprender las explicaciones, lo que se traduce en resultados positivos, normalmente superiores a los de sus compañeros y compañeras. Todo ello pone de manifiesto que es un grupo al que hay que prestar muchísima atención y para el que hay que ajustar los tiempos y actividades de manera diferente, siempre teniendo en cuenta a todo el alumnado, de manera que no haya muchos alumnos o alumnas rezagados o muy adelantados.

Debido a que no se había programado un examen específico del tema sino que su evaluación se realizaría junto al tema siguiente, el diseño de esta experimentación ha consistido en una prueba corta puntuable para la nota final de la asignatura. Esta prueba corta se resolvió durante la última sesión, de manera que se pudiesen resolver dudas y aclarar conceptos. Cabe destacar que el alumnado de este centro realiza desde este curso pruebas de este tipo, con el objetivo de que se acostumbre a ir estudiando al día y no sólo lo haga los días previos al examen correspondiente.

8.2. El cuestionario

Tal y como se ha indicado, el cuestionario consiste en una prueba corta en la que se pretende analizar el grado de asimilación de los conocimientos por parte de los estudiantes, una vez finalizada la docencia de contenidos de la unidad didáctica de estadística. Por lo tanto, sus objetivos son los siguientes:

- Conocer e identificar *población y carácter estadístico*.
No así la muestra, ya que los profesores titulares consideraron que este concepto no forma parte de los conocimientos mínimos que evalúa esta asignatura, porque la diferencia entre población y muestra se verá con mayor profundidad en cursos posteriores.
- Diferenciar los *tipos* de caracteres estadísticos.
- Construir una *tabla de frecuencias*.
- Saber representar los datos en *diagramas*.
- Calcular los parámetros estadísticos: *media, moda y rango*.

Debido a que gran parte del alumnado tiene dificultades específicas de aprendizaje, siempre que se le realiza una prueba corta como en este caso, se le avisa previamente. Además, ésta se estructura de forma que cada pregunta tenga a continuación espacio suficiente para contestarla y de manera que aparezca resaltado el concepto clave que se está preguntando. También se les explica en voz alta qué van a tener que contestar antes de que comiencen a hacerlo.

Como se puede observar a continuación, es muy similar al ejercicio planteado (*Anexo C, Hoja 3*) en la sesión previa a la realización de esta prueba corta, de modo que el nivel de dificultad no sea muy elevado pero se traten casi todos los contenidos explicados con anterioridad. Es importante destacar que se exigió a los estudiantes numerosas veces en voz alta que justificasen todas sus respuestas, de modo que se pueda observar que entienden bien qué contestan y por qué, además de que siempre se acostumbren a hacerlo aunque no se les pida expresamente en cada una de las preguntas.

Nombre:

1º ESO Matemáticas Básicas

PRUEBA CORTA ESTADÍSTICA

El profesor de matemáticas le ha pasado al tutor las notas de sus alumnos en la 3ª evaluación:

3, 5, 7, 8, 5, 4, 10, 8, 5, 4.

- ¿Cuál es la **población**?
- ¿Qué **carácter estadístico** se está estudiando?
- ¿De qué **tipo** es ese carácter?
- Construye la **tabla de frecuencias**

- Dibuja su **diagrama de barras** y su **diagrama de líneas** (o polígono de frecuencias)
- ¿Cuál es la **media**?
- ¿Cuál es la **moda**?
- ¿Cuál es el **rango**?

8.3. Cuestiones y comportamientos esperados

A continuación se describen los comportamientos esperados por parte del alumnado en cada una de las preguntas del ejercicio contextualizado planteado en la prueba corta.

Cuestión 1

Como ya se ha comentado con anterioridad, en el libro de texto de referencia ^[6] no aparecen actividades que pregunten por el concepto de *población* o *muestra* y además sus definiciones son bastante escuetas. Sin embargo, son contenidos que cobrarán mucha importancia en cursos posteriores. Por ello, en clase sí que se incidió sobre el concepto *población* mediante una explicación con ejemplos, así como preguntas al alumnado para comprobar su comprensión. También se realizó un ejercicio en el que se preguntaba por él. Esta es la razón por la que en la primera cuestión se analiza su comprensión preguntando por la *población* del ejercicio planteado.

Al ser un concepto nuevo, se espera que algunos alumnos o alumnas no sepan identificar la *población* del ejercicio, incluso que la confundan con el *carácter estadístico* a estudio.

Cuestión 2

Esta cuestión es de suma importancia ya que en un *estudio estadístico* es imprescindible determinar el *carácter estadístico* que se quiere analizar.

Al igual que en la anterior pregunta, se espera que algún o alguna estudiante no conteste adecuadamente, puede que confundiéndola con la *población*. No obstante, como es un concepto más trabajado ya desde cursos anteriores, se espera que la identifiquen con algo más de facilidad que la *población*.

Cuestión 3

El objetivo de la tercera cuestión del ejercicio es que los y las estudiantes sepan identificar el tipo de *variable* o *carácter estadístico* que se está estudiando.

Dado que son conceptos bastante trabajados en clase para los cuales el alumnado no tuvo problema alguno en entenderlos y resolver ejercicios relativos a ellos, se espera que prácticamente todo el alumnado la resuelva sin dificultad.

Cuestión 4

La cuarta cuestión propuesta propone la realización de una *tabla de frecuencias* en la que el alumnado tendrá que calcular la *frecuencia absoluta*, la *frecuencia relativa* y escribir en una tercera columna el *dato* por la *frecuencia absoluta* (que luego le servirá para calcular *parámetros* como la *media aritmética*), tal y como se ha trabajado en clase.

Al ser un grupo con bastantes dificultades de concentración y atención en su mayor parte, se espera que muchos alumnos o alumnas cometan algún error al completar la *tabla de frecuencias*. Con bastante probabilidad, varios o varias se olvidarán de escribir los títulos de las columnas (para indicar qué están calculando) y otros u otras cometerán errores de cálculo al sumar los totales o multiplicar los datos por las *frecuencias absolutas*. No obstante, no se espera que tengan dificultades al determinar las *frecuencias absolutas*. Tampoco a la hora de calcular las *frecuencias*

relativas si la suma total de datos es correcta, ya que las divisiones a realizar son muy sencillas.

Cuestión 5

En esta cuestión se pide representar los datos en un *diagrama de barras* y otro de *líneas*.

Se espera que la mayor parte del alumnado realice los *diagramas* correctamente, ya que se han trabajado bastante en clase y se han resuelto muchas dudas que existían acerca de su representación. No obstante, se espera que algún alumno o alumna confunda el lugar de representación de la *frecuencia absoluta* y el de los *datos*, dibujándolas al revés. También se espera que alguno o alguna escriba en el eje de abscisas no sólo los *datos* que se tienen, sino que al tratarse de una *variable cuantitativa*, también deje espacio para los que no; pese a que se insistió bastante en este aspecto en clase.

Cuestión 6

Con esta cuestión se comienza con el cálculo de *parámetros estadísticos*, en este caso la *media aritmética*. Se ha considerado más importante valorar la comprensión de ésta que de la *media ponderada*.

Se espera que algunos alumnos o alumnas tengan algún error de cálculo y por lo tanto no consigan obtener el resultado correcto. No obstante sí que se espera que casi todos o todas sepan cómo se calcula este *parámetro*.

Cuestión 7

La penúltima cuestión de la prueba corta pregunta acerca de la *moda*.

Es esperable que todo o prácticamente todo el alumnado sepa identificar este *parámetro*, ya que no se observaron dificultades al explicar su concepto. Sin embargo, puede que algún alumno o alumna se olvide de justificarlo.

Cuestión 8

La octava y última cuestión plantea el cálculo del *rango* de los datos.

Al igual que en la anterior cuestión, se espera que casi ningún alumno y alumna tenga problemas al contestar esta pregunta, aunque puede que no se acuerden de dar una explicación del resultado proporcionado.

8.4. Resultados

Para poder corregir los cuestionarios de manera homogénea y más rápidamente, se ha realizado una plantilla con las soluciones paso a paso de cada uno de los ejercicios, asignando a cada paso/ejercicio una determinada puntuación. Se ha intentado que los apartados tengan el mismo peso, ya que su importancia es similar. A continuación se presenta un resumen de forma tabular:

Contenido	Puntuación (Sobre 10 puntos)
Población	1 punto
Carácter estadístico	1 punto
Tipo de carácter	1 punto
Tabla de frecuencias	2,5 puntos
Columna: frecuencia absoluta	1 punto
Columna: frecuencia relativa	1 punto
Columna: dato · frecuencia absoluta	0,5 puntos
Diagramas	1,5 puntos
Diagrama de barras	1 punto
Diagrama de líneas	0,5 puntos
Media	1 punto
Moda	1 punto
Rango	1 punto
TOTAL	10 puntos

Tabla 23: Plantilla corrección

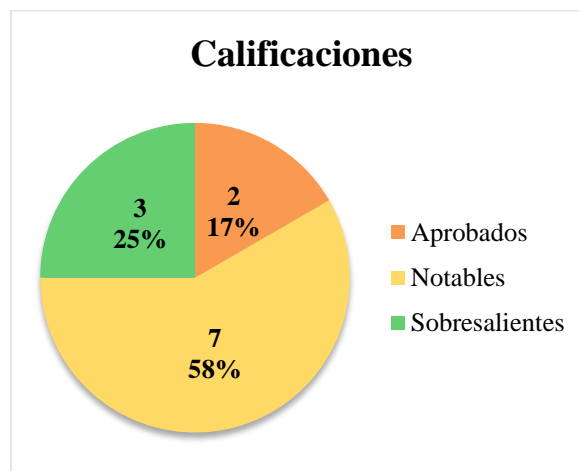
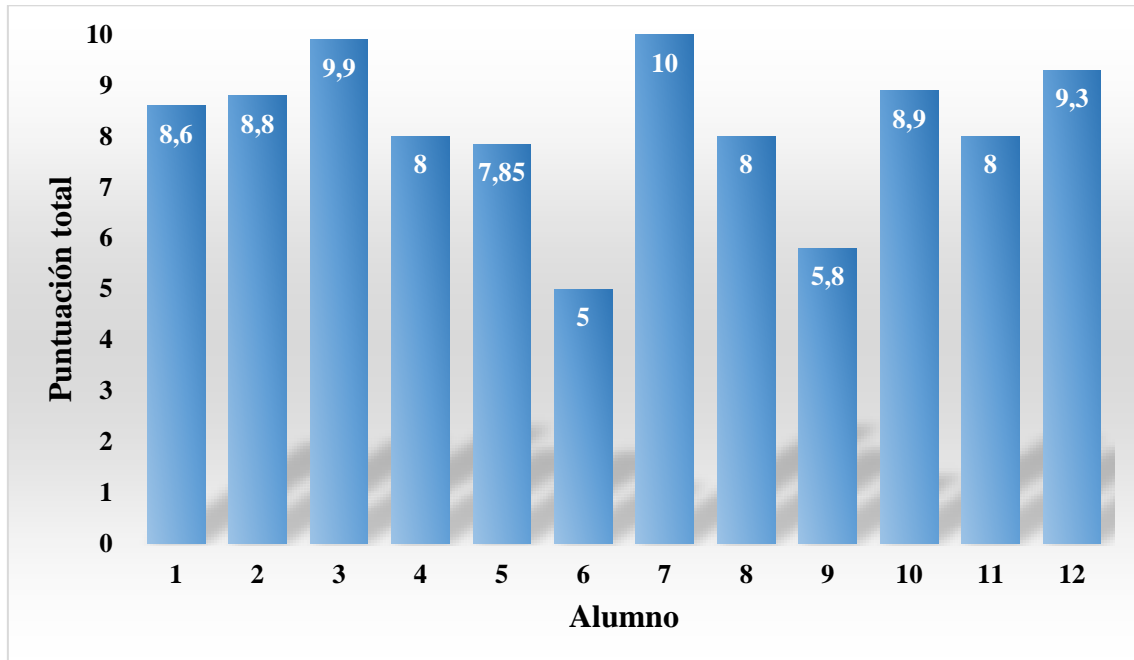
Asimismo, algunos aspectos restan puntos a cada uno de los apartados. Cabe aclarar que en la cuestión de la tabla de frecuencias, lo que se busca es que el alumnado sepa qué tiene que realizar y cómo; no tanto la exactitud a la hora de hacer los cálculos (por ejemplo en la última columna). Casi todo el grupo tiene que mejorar al realizar operaciones elementales, por lo que siempre hay que darles importancia; pero ya se están ejercitando en cada tema y mediante ejercicios de refuerzo que suelen realizar como tarea (*Anexo E*). Por ello, las sumas de totales y las multiplicaciones restan puntos pero no hacen que ese apartado deje de puntuar.

Aspecto	Puntuación
No explicar la respuesta	- 0,5 (la mitad de la pregunta)
Resultado correcto pero explicación incorrecta	No puntúa
En tabla de frecuencias:	
No escribir títulos de las columnas	- 0,1
Sumar mal un total	- 0,1
Multiplicar mal	- 0,05 cada vez
Resultado media, moda o rango incorrecto	No puntúa

Tabla 24: Plantilla corrección, aspectos negativos

Una vez determinados los criterios de corrección, se muestran los resultados, primero de manera global y en segundo lugar mediante una serie de variables definidas.

La puntuación de los alumnos y alumnas en sus pruebas cortas se puede ver en los siguientes gráficos:



Es decir, sobre los 12 alumnos de clase:

- El 100% ha aprobado la prueba corta (puntuación igual o superior a 5 sobre 10).
- La media es: 8,17.
- 2 alumnos (un 17%) han obtenido un aprobado (puntuación entre 5 y 6).
- 7 alumnos (un 58%) han obtenido un notable (puntuación entre 7 y 9).
- 3 alumnos (un 25%) han obtenido un sobresaliente (puntuación entre 9 y 10).

Entrando en más detalle, las puntuaciones de cada cuestión son las siguientes:

Cuestión Alumno	C1 (1)	C2 (1)	C3 (1)	C4 (2,5)	C5 (1,5)	C6 (1)	C7 (1)	C8 (1)	Puntuación total (10)
1	0	1	1	2,1	1,5	1	1	1	8,6
2	0	1	1	2,3	1,5	1	1	1	8,8
3	1	1	1	2,4	1,5	1	1	1	9,9
4	1	0,5	1	2	1,5	0	1	1	8
5	0	1	1	2,35	1,5	0	1	1	7,85
6	1	0	0	2	1	0	0,5	0,5	5
7	1	1	1	2,5	1,5	1	1	1	10
8	0	1	1	2,5	1,5	0	1	1	8
9	0	0	1	2,3	0,5	1	1	0	5,8
10	1	1	1	2,4	1,5	0	1	1	8,9
11	0	1	1	2,5	1,5	1	1	0	8
12	0,8	1	1	2,5	1	1	1	1	9,3

Tabla 25: Puntuaciones cuestiones

Para tener un mejor análisis de cada cuestión, se han definido algunas variables para evaluar la comprensión de cada uno de los contenidos, así como para identificar los errores encontrados. Las primeras se han denominado con la letra V, el número de la cuestión, un punto y el número de variable dentro de esa cuestión. El nombre de las segundas se ha construido de la misma manera pero sustituyendo la letra V por la letra E de “error”. Son las siguientes:

Cuestiones	Variables de comprensión	Variables de error
Cuestión 1	V1.1 Población	E1.1 Confusión con carácter estadístico E1.2 Confusión con el número total de individuos de la población
Cuestión 2	V2.1 Carácter estadístico	E2.1 Confusión con población
Cuestión 3	V3.1 Tipo de carácter estadístico	
Cuestión 4	V4.1 Tabla de frecuencias V4.2 Frecuencia absoluta V4.3 Frecuencia relativa	E4.1 Ausencia de títulos E4.2 Errores de cálculo
Cuestión 5	V5.1 Diagrama de barras V5.2 Diagrama de líneas	E5.1 Confusión con los ejes E5.2 Espacio para datos inexistentes
Cuestión 6	V6.1 Media	E6.1 Errores de cálculo
Cuestión 7	V7.1 Moda	E7.1 Ausencia de justificación
Cuestión 8	V8.1 Rango	E8.1 Ausencia de justificación E8.2 Confusión entre datos mayores o menores y los de mayor o menor frecuencia

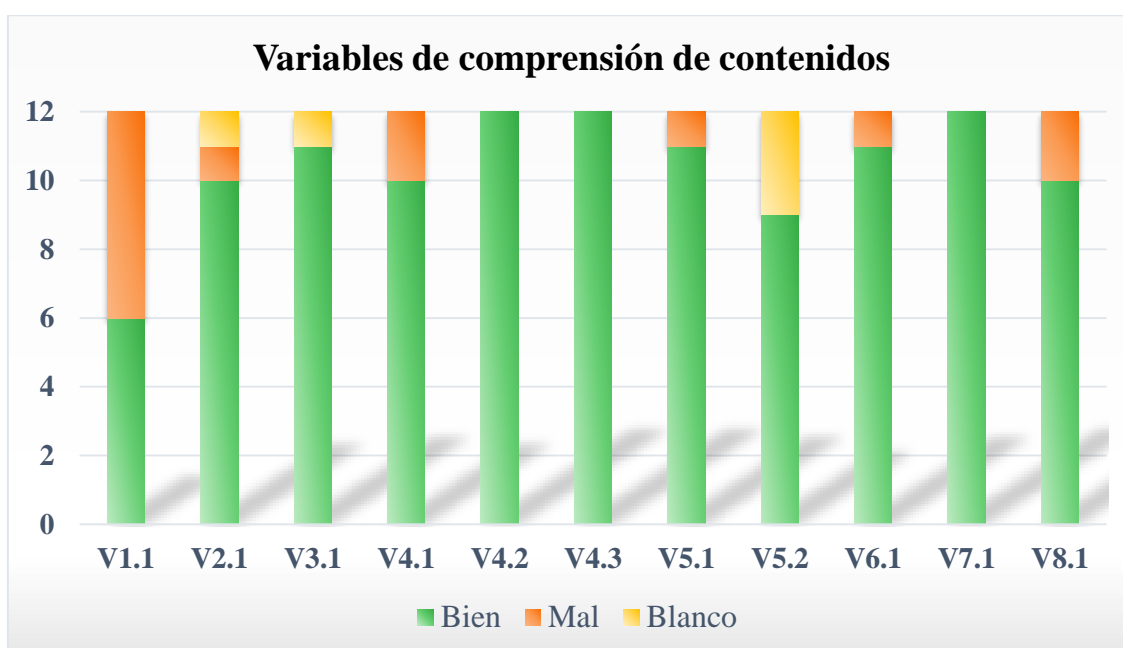
Tabla 26: Variables a estudio

Como se puede observar, las variables se han definido a partir de los contenidos que son necesarios que el alumno o alumna haya aprendido tras esta unidad didáctica de estadística, de los comportamientos esperados a la hora de contestar las cuestiones y de otros errores detectados tras la corrección de la prueba.

A continuación se muestra la presencia (✓) o ausencia (✗) de cada una de las variables de comprensión de contenidos en las pruebas cortas de cada uno de los alumnos y alumnas. El símbolo - indica que no se puede valorar esa variable debido a que la pregunta en la que se evalúa, se dejó en blanco. Para esta evaluación, no se han tenido en cuenta errores de cálculo, ya que son independientes al entendimiento de los contenidos.

Cuestión	C1	C2	C3	C4			C5		C6	C7	C8
	Variable V1.1	V2.1	V3.1	V4.1	V4.2	V4.3	V5.1	V5.2	V6.1	V7.1	V8.1
1	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
6	✓	-	-	✗	✓	✓	✓	-	✓	✓	✓
7	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
8	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓
9	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✗	-	✓	✓	✗
10	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
11	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗
12	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	-	✓	✓	✓
Total ✓	6	10	11	10	12	12	11	9	11	12	10

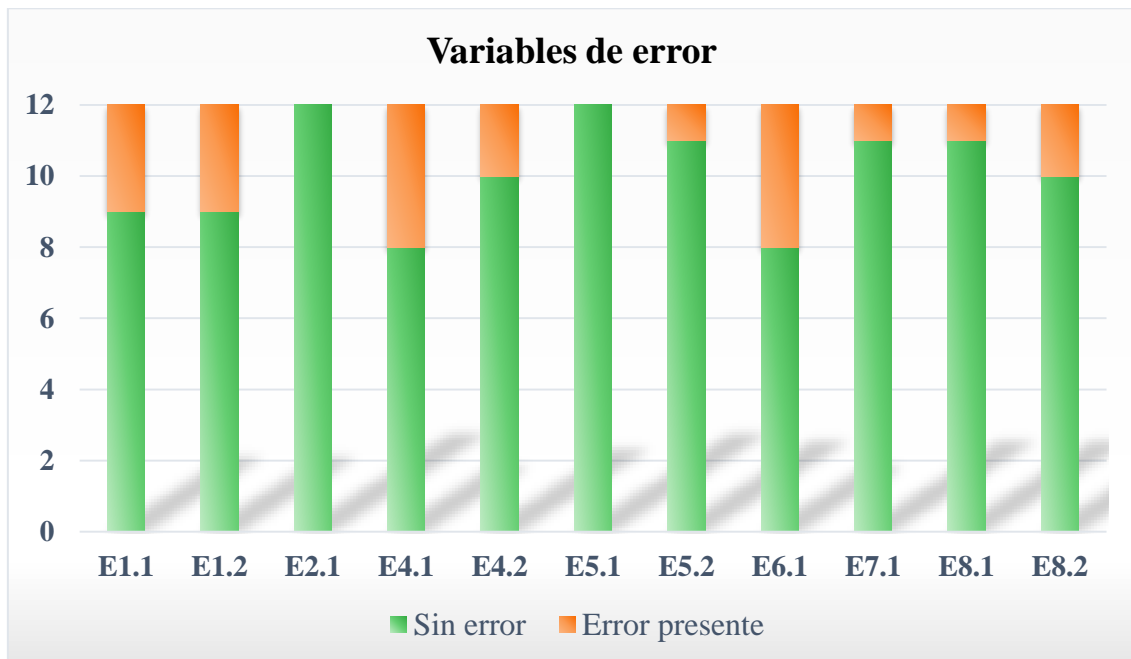
Tabla 27: Resultados variables de comprensión de contenidos



De la misma manera, en la siguiente tabla se observa la presencia (✓) o ausencia (-) de las variables de error a estudio en las cuestiones de cada uno de los alumnos y alumnas.

Cuestión	C1		C2	C4		C5		C6	C7	C8	
Variable	E1.1	E1.2	E2.1	E4.1	E4.2	E5.1	E5.2	E6.1	E7.1	E8.1	E8.2
Alumno											
1	-	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-	-
2	✓	-	-	✓	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	✓	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	✓	-	-	-
5	-	✓	-	-	✓	-	-	✓	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	✓	✓	✓	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	✓	-	-	✓	-	-	✓	-	-	-	✓
10	-	-	-	-	✓	-	-	✓	-	-	-
11	-	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	✓
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total ✓	3	3	0	4	2	0	1	4	1	1	2

Tabla 28: Resultados variables de error



8.5. Discusión de los resultados

Como se puede observar en los gráficos globales de las calificaciones, el balance es muy positivo ya que en general, las puntuaciones han sido muy buenas. Por un lado, todos los alumnos y alumnas han aprobado la prueba corta (puntuación igual o superior a 5 sobre 10) y un 83% de ellos y ellas (10 de 12) ha obtenido una calificación de notable o sobresaliente, es decir, igual o superior a 7.

Esto también se refleja en la nota media, que es 8,18 (notable alto); que como el coeficiente de variación ($\frac{\text{desviación típica}}{\text{media}} = \frac{1,5}{8,18} = 0,18$) es menor que 0,5, es representativa. Otro buen indicador de estos buenos resultados es la mediana (8,3), ya que indica que el 50% de los alumnos y alumnas ha obtenido una puntuación por encima del 8,3 sobre 10.

Por todo ello, puede deducirse que en general, el alumnado ha comprendido bien los conceptos de la unidad didáctica, si bien es cierto que hay una alumna y un alumno que van más justos que los demás, ya que han obtenido un 5,8 y un 5 respectivamente.

No obstante, es necesario analizar cada una de las cuestiones para vislumbrar posibles dificultades con las que se han encontrado los y las estudiantes, así como errores que han cometido a la hora de resolver cada una de las ellas. Como se ha visto en el anterior apartado (8.4. Resultados), para ello se han creado variables de dos tipos: de comprensión de conceptos de la unidad didáctica y de error. Estas variables se han dividido por cuestiones y evalúan respectivamente el correcto entendimiento de los contenidos y los comportamientos esperados (desarrollados en el tercer apartado del presente capítulo) en cuanto a errores que ha cometido el alumnado al enfrentarse a las cuestiones del ejercicio. De los resultados se han obtenido las siguientes reflexiones:

Cuestión 1

VARIABLES A ESTUDIO:

- VI.1 Población
- EI.1 Confusión con carácter estadístico
- EI.2 Confusión con el número total de individuos de la población

Con los resultados de la variable VI.1 se puede ver que la mitad del alumnado (6 sobre 12) ha comprendido este concepto, mientras que la otra mitad no. De esos 6 alumnos y alumnas, la variable EI.1 muestra que 3 de ellos la han confundido con el *carácter estadístico* a estudio, mientras que la EI.2 pone de manifiesto que los otros 3 la han confundido con el número total de individuos de la *población*, identificándola, por tanto, como un número.

Tal y como se especifica en el apartado 8.3 *Cuestiones y comportamientos esperados*, se esperaba que hubiese algunos alumnos o alumnas que no tuviesen clara la diferencia entre *población* y *carácter estadístico* a la hora de identificar la primera. Esto puede deberse, como se apunta, a que es un concepto nuevo que además no suele trabajarse muy en profundidad.

Sin embargo, el segundo error detectado no se había intuido con anterioridad. La causa del mismo puede ser un incorrecto uso de las palabras a la hora de definir el

concepto y será importante tenerlo en cuenta en adelante a la hora de impartir la unidad didáctica.

Conjuntamente, queda muy claro que es un contenido que es necesario trabajarlo más. No solamente porque solo ha sabido contestar correctamente a la cuestión la mitad del alumnado, sino también porque a comparación con el resto de cuestiones, son muchos más los alumnos y alumnas que la han fallado y por lo tanto, no han entendido el contenido.

Cuestión 2

Variables a estudio:

- *V2.1 Carácter estadístico*
- *E2.1 Confusión con población*

Los resultados de esta cuestión son bastante llamativos, si se tienen en cuenta los de la anterior. Para comenzar, la variable *V2.1* muestra que solamente hay una alumna y un alumno que aparentemente no han comprendido el concepto de *carácter estadístico*. La primera porque ha dejado la pregunta en blanco y el segundo porque ha cometido un error al.

Por un lado, dejar la pregunta en blanco puede ser un indicador de que no se sabe qué se está preguntando y por lo tanto no se ha entendido en las explicaciones y al estudiarlo, o de que se ha dejado de contestar por falta de interés o despiste. En este caso, se trata de una alumna con TDA que suele dejar preguntas sin contestar en las pruebas cortas, exámenes y ejercicios a entregar. Esto se demuestra precisamente en la que se está analizando, ya que ha dejado en blanco varias cuestiones, siendo la única en hacerlo en la segunda y tercera pregunta. Probablemente el motivo sea falta de interés y ganas de terminar, ya que precisamente los y las estudiantes con este trastorno se dispersan con mucha facilidad, tienen problemas a la hora de retener información nueva y muchas veces no completan sus tareas por ello.

Por otro lado, el alumno que no ha contestado correctamente a la presente cuestión, tampoco lo ha hecho a la anterior. Sin embargo, así como en la pregunta previa la causa era la confusión de la *población* con el *carácter estadístico*, en esta no ha sido así, ya que el análisis de la variable *E2.1* muestra que ningún alumno o alumna ha incurrido en este error. Este estudiante, en lugar de contestar: “El carácter estadístico son las notas de la 3ª evaluación en matemáticas”, ha contestado: “El de la 3ª evaluación”. Parece un error anecdótico que podría haberse resuelto con repasando, ya que la siguiente cuestión que pide identificar el *tipo de carácter*, la ha contestado correctamente.

Lo más llamativo es que los otros dos alumnos que habían confundido la *población* con el *carácter estadístico*, curiosamente no han hecho lo contrario ya que han contestado bien en este caso. Esto vuelve a poner de manifiesto que es necesario incidir en la explicación de *población*.

Cuestión 3

VARIABLES A ESTUDIO:

- *V3.1 Tipo de carácter estadístico*

El comportamiento esperado con esta cuestión era que prácticamente todo el alumnado la resolviese sin dificultad. Esto es lo que ha sucedido a la vista de los resultados, ya que todos los alumnos que la han respondido, lo han hecho correctamente. No obstante, ha habido una alumna que la ha dejado en blanco, la misma que lo había hecho en la cuestión previa.

Cuestión 4

VARIABLES A ESTUDIO:

- *V4.1 Tabla de frecuencias*
- *V4.2 Frecuencia absoluta*
- *V4.3 Frecuencia relativa*
- *E4.1 Ausencia de títulos*
- *E4.2 Errores de cálculo*

Las variables designadas para analizar esta cuestión en lo referente a la comprensión de contenidos, estudian tres aspectos relacionados entre sí. Por un lado, que el alumnado sepa construir una *tabla de frecuencias* (V4.1), conociendo qué deben escribir en cada una de las columnas e identificando correctamente los datos. Por otro, que los y las estudiantes tengan conocimientos acerca de cómo se calcula la *frecuencia absoluta* (V4.2) y la *frecuencia relativa* (V4.3). Este entendimiento de los conceptos es independiente a cometer errores por olvidarse de identificar las columnas de la tabla (E4.1) o errores de cálculo (E4.2).

Los resultados son muy positivos en cuanto a comprensión de contenidos, ya que todos los alumnos y alumnas saben identificar y calcular la *frecuencia absoluta* y la *frecuencia relativa* en la *tabla de frecuencias*. Los resultados de la variable V4.1 pueden ser interpretables ya que los dos alumnos que aparecen en la tabla que no han comprendido del todo la tabla de frecuencias, realmente sí que han sabido que se construye con la *frecuencia absoluta* y la *frecuencia relativa*. El problema ha sido que no se han acordado de qué tenían que escribir en la última columna (*dato · frecuencia absoluta*), que se les explicó en clase para facilitar posteriormente el cálculo de *parámetros estadísticos*. No obstante, estos cálculos los han hecho correctamente en la sexta cuestión (cálculo de la *media*), por lo que es consecuente pensar que de haberlo recordado, lo habrían hecho bien.

Los resultados de la presencia de la variable E4.1 son bastante llamativos, porque 4 alumnos y alumnas no han identificado las columnas de la tabla, puede que por descuido o porque no consideran que esto sea importante. Se ve necesario, en consecuencia, recalcar la necesidad de identificar todo lo que se presente, al igual que con la justificación de todas sus respuestas.

Además, la variable *E4.2* pone de manifiesto que al construir la tabla, 2 alumnas han tenido errores de cálculo al sumar o multiplicar. Se ampliará el estudio de esta variable en la cuestión 6, con el análisis de la *E6.1*.

En conclusión, se puede afirmar que no ha habido cambios en base a los comportamientos esperados.

Cuestión 5

VARIABLES A ESTUDIO:

- *V5.1 Diagrama de barras*
- *V5.2 Diagrama de líneas*
- *E5.1 Confusión con los ejes*
- *E5.2 Espacio para datos inexistentes*

Los resultados obtenidos tras la corrección de esta cuestión han diferido en algunos aspectos de los comportamientos esperados.

Por un lado, tal y como se preveía, prácticamente todos los alumnos y alumnas han sabido construir correctamente el *diagrama de barras* en función de los datos del ejercicio. Sólo ha habido un alumno que no lo ha hecho del todo bien ya que, tal y como también se esperaba, al tratarse de una *variable cuantitativa*, ha dejado espacio en el *eje de abscisas* para datos que no se proporcionan, como si se tratase del *eje de ordenadas*.

Por otro, no ha ocurrido lo mismo con el *diagrama de líneas*, ya que 3 alumnos y alumnas no lo han intentado dibujar. La razón más plausible es que al estar escrito en la misma línea que el diagrama de barras, probablemente han construido el primero y se han olvidado de que tenían que realizar el segundo. De hecho, estos 3 estudiantes tienen TDA y TDAH, por lo que este comportamiento se ajusta totalmente a sus trastornos. Es interesante tener en cuenta este tipo de comportamientos de alumnos y alumnas con dificultades específicas de aprendizaje, para en adelante, además de tomar medidas como resaltar los conceptos clave de la prueba (tal y como se ha hecho en esta) o pedir al alumnado que repase de nuevo cuando va a entregarla, se lleven a cabo otras como repetir en voz alta las preguntas.

Además, se ve claramente mediante la tabla y gráfico del apartado previo, que ningún alumno o alumna incurre en el error que mide la variable *E5.1*. Esto, pese a no ser lo previsible, es muy positivo, ya que indica que este error que se tuvo durante la explicación de contenidos, fue detectado y solucionado a tiempo.

Cuestión 6

VARIABLES A ESTUDIO:

- *V6.1 Media*
- *E6.1 Errores de cálculo*

Tal y como se esperaba, el análisis de la variable *V6.1* pone de manifiesto que prácticamente todos los alumnos y alumnas han entendido qué es y cómo se calcula la *media*. Solo ha habido un alumno que no lo ha realizado correctamente, ya que en lugar de dividir entre el número total de personas, ha dividido entre el número total de “tipos” de notas que hay. Con errores de este estilo, es necesario discernir si se trata de una confusión puntual o si por el contrario no se ha entendido bien qué se está realizando. En este caso y tras hablar con el alumno al entregarle los resultados, se comprobó que fue de los primeros, es decir, que había sido un error puntual, al contestar el ejercicio rápidamente.

Asimismo, como se puede ver gracias a la variable *E6.1*, también hubo errores de cálculo en este apartado, tal y como se preveía. Como era de esperar, los alumnos y alumnas que habían cometido errores de cálculo en la cuestión 4 (variable *4.2*), también han incurrido en ellos en esta pregunta, por lo que se detecta una relación directa entre ambas. Es destacable que han sido 4 sobre 12 los alumnos y alumnas que los han cometido, sobre todo teniendo en cuenta que las operaciones a realizar eran muy sencillas. Debido a que son errores bastante recurrentes en este grupo, desde el principio de curso se intenta mejorar la destreza con las operaciones elementales mediante ejercicios de fotocopias que realizan de tarea o en algunos momentos en clase. Estos ejercicios se encuentran en el *Anexo E* de la presente memoria.

Cuestión 7

VARIABLES A ESTUDIO:

- *V7.1 Moda*
- *E7.1 Ausencia de justificación*

Tal y como se suponía en los *comportamientos esperados* del presente capítulo, los resultados del análisis de la variable *V7.1* han sido muy favorables, ya que todo el alumnado ha sabido identificar la *moda* a partir de los datos del ejercicio.

No obstante, la variable *E7.1* pone de manifiesto que una alumna no ha justificado su respuesta, tal y como se les había indicado. Este comportamiento de la estudiante, se corresponde con el que ha tenido a lo largo de toda la prueba, dejando cuestiones sin respuesta o sin justificación, como en este caso, o el de la última pregunta. Por ello, la interpretación que se hace del mismo es igual a la que se ha desarrollado en la *cuestión 2* de este apartado.

Cuestión 8

VARIABLES A ESTUDIO:

- *V8.1 Rango*
- *E8.1 Ausencia de justificación*
- *E8.2 Confusión entre datos mayores o menores y los de mayor o menor frecuencia*

A diferencia de la anterior cuestión, los resultados de esta no han seguido totalmente los comportamientos esperados.

Por un lado, sí que la mayoría de estudiantes ha comprendido el significado de *rango*, tal y como se puede ver en los resultados de la variable *V8.1*, ya que 10 de 12 alumnos y alumnas, han contestado correctamente la cuestión y 7 de ellos y ellas la han justificado adecuadamente (*E8.1*). La alumna que no lo ha hecho es la misma que se ha comentado en cuestiones previas.

Sin embargo, no se esperaba que, tal y como se puede ver en los resultados del análisis de la variable *E8.2*, dos estudiantes identificasen el *rango* como la resta entre el *dato* de mayor y el de menor *frecuencia*, en lugar de la resta entre el *dato* mayor y el menor. En adelante, será importante tener estos resultados en cuenta a la hora de explicar la definición de *rango*. Por ejemplo, podría ser interesante definirlo como: “la resta entre el *dato* de mayor numeración y el de menor numeración” y además hacer la advertencia de que no se trata de los que más y menos veces se repiten.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Síntesis

El presente Trabajo Fin de Máster se ha realizado con el objetivo de analizar la estadística y la probabilidad y su docencia en un aula de 1º de ESO, durante el Practicum II del Máster de Formación del Profesorado en Educación Secundaria. Para ello se ha estructurado en dos partes bien diferenciadas.

En la primera parte, se ha hecho un estudio longitudinal de la estadística y la probabilidad en el currículo vigente desde 5º de Primaria hasta 2º de Bachiller; así como su coherencia con los libros de texto de 5º y 6º de Primaria y de 1º, 2º y 3º de ESO, analizando ejercicios, problemas, cuestiones tipo y sus ausencias y presencias en relación a la normativa.

La segunda parte estudia la docencia de la unidad didáctica mencionada desarrollada en un grupo de 1º de ESO del centro de prácticas, en la asignatura de matemáticas básicas. Para comenzar se analiza el tema en el libro de texto de referencia, utilizado en clase. A continuación se tratan las dificultades y errores previsibles que puede encontrarse y cometer el alumnado, así como su posible origen. Para finalizar se describe el proceso de estudio llevado a cabo y su experimentación, terminando con una discusión de los resultados a modo de conclusión.

Conclusiones

Una vez desarrollado el Trabajo Fin de Máster, se han extraído las conclusiones que se describen a continuación.

Currículo vigente

En primer lugar, tras el análisis del currículo vigente, se observa que para el bloque de estadística y probabilidad, se utiliza un aprendizaje en espiral, en el que sobre todo en Primaria y ESO, los contenidos se van presentando de manera paulatina, repasando siempre los introducidos en años anteriores. Teóricamente, esto tiene la ventaja de que el alumnado va afianzando los conceptos curso a curso de manera sencilla. Sin embargo, son disciplinas a las que siempre se les ha relegado al último lugar y por lo tanto se les ha dado menos importancia y sesiones de clase. Prueba de ello es que aparecen en el último bloque del currículo y hasta ahora ni siquiera se planteaba su presencia en los exámenes de *Selectividad* o *Evaluación para el Acceso a la Universidad*, por lo que se impartían al final del curso e incluso muchos centros optaban por no hacerlo por falta de tiempo. De hecho, esto se puede constatar en base a mi experiencia académica y tras la realización de las prácticas. También es una de las quejas más repetidas de los profesores de estadística y probabilidad de la Universidad, ya que gran parte del alumnado llega a su carrera sin una base sólida de estas disciplinas precisamente por lo recién comentado.

También ha podido verse que muchos libros deciden incluir contenidos de ambas disciplinas incluso aunque en el currículo vigente no vengán especificados. Esto podría ser una consecuencia de las reflexiones previas, ya que como en muchos centros no se imparten los contenidos estadísticos y probabilísticos en un determinado curso, sería recomendable que se viesen en el curso siguiente, pese a que no aparezcan explicitados en la normativa. Es lo que típicamente ocurre en 1º y

2º de ESO, ya que según el currículo, en 1º ha de impartirse solo la estadística, mientras que en 2º únicamente la probabilidad; pero tal y como se ha visto en el libro utilizado para la docencia de las prácticas, algunos libros eligen incluir ambas y repartir los contenidos según su criterio. Si un alumno o alumna cambia de centro o se opta por utilizar libros de otra editorial en cursos posteriores, puede dar lugar a problemas. Por lo tanto, es necesario que el profesorado de los centros tenga interés y capacidades para poder valorar el contenido de libros de texto de diferentes editoriales, con el objetivo de encontrar los que se ajusten mejor a la materia.

Libros de texto

En segundo lugar y en relación con lo anterior, es conveniente examinar el tratamiento del saber que realizan diferentes libros de texto a la hora de analizarlos, de manera que exista un equilibrio entre el rigor matemático y la presentación que se le hace al alumnado de los contenidos y ejercicios. Por tanto, es adecuado llamar la atención de los alumnos y alumnas al presentar de forma atractiva los saberes matemáticos, con una correcta notación sin caer en errores de lenguaje. Como se ha podido observar, el libro de texto de referencia propone un diseño atractivo aunque en ocasiones le falta rigor matemático. Pese a que en el curso a estudio (1º de ESO) esta notación no es imprescindible, sí que conviene que se comience a usar con anterioridad en esta y otras editoriales, ya que cuando se introduce en cursos posteriores en conceptos para los que el alumnado no está acostumbrado a utilizarla, muchas veces éstos tienen problemas para recordarla y no la emplean o la emplean de manera incorrecta.

Además, también hay que buscar una adecuada combinación de teoría, ejemplos y actividades, esquema que presenta el libro de referencia acertadamente. No obstante, sí que podrían añadirse al mismo más ejemplos y más variados, porque sobre todo a edades tempranas, los alumnos y alumnas entienden mejor los contenidos mediante ejemplos. Por ejemplo, podrían incluirse más de tablas de frecuencias o diagramas de barras a partir de variables *cuantitativas* y no solo *cualitativas*. Asimismo y como se intenta hacer en clase, es muy beneficiosa la introducción de ejercicios con otros formatos; por ejemplo de otros libros o, tal y como suele hacerse en el centro en el que se han realizado las prácticas, de aplicaciones matemáticas como *OnMat*. De esta forma se obliga al alumnado a no ceñirse solo a los ejercicios tipo de su libro, a pensar de manera diferente e incluso a utilizar las TIC como herramienta de trabajo habitual.

De igual manera, es muy importante la contextualización del tema y de los ejercicios y problemas, de forma que el alumnado se percate de la utilidad de los mismos y sepa distinguir cuándo, cómo y para qué realizar determinados procedimientos de forma crítica. Muchas veces el problema es que los objetos estadísticos y probabilísticos se imparten de manera atómica, con la construcción de *gráficos* y el cálculo de *parámetros* y *probabilidades* de manera aislada. Si no se promueve desde el principio una visión global, la interpretación de los resultados no es sencilla ni evidente para los alumnos y alumnas.

Proceso de aprendizaje

En tercer lugar, el proceso de aprendizaje de las matemáticas no debe consistir en una mera repetición de técnicas, ejercicios y problemas. En numerosas ocasiones el alumnado mecaniza los ejercicios que ha aprendido a resolver a base de repetirlos muchas veces. Esto merma su capacidad de interpretación y reflexión, ya que a veces los alumnos y alumnas incluso dejan de saber qué están realizando. Por ello, es necesario que siempre se le acostumbre y exija una justificación de sus respuestas. Podría ayudar la introducción de alguna actividad en la que tengan que explicar conceptos y procedimientos a sus compañeros, ya que según la *pirámide de aprendizaje* de *Cody Blair* ^[13], pasadas las 24 horas se retiene el 90% de lo aprendido si se lleva a cabo esta práctica; mientras que de otras como escuchar, leer o que el profesor haga demostraciones la pizarra, solo se retiene el 5%, 10% y 30% respectivamente. También podría ser beneficioso forzar argumentaciones en grupo dado que el porcentaje asciende al 50%.

Tampoco se debe olvidar que el aprendizaje de un procedimiento hasta llegar a unos resultados, no conlleva que se sepa efectuar al revés; y más si se ha desarrollado de manera mecánica. Por ejemplo, normalmente se explica a los y las estudiantes cómo distinguir la variable estadística y construir una tabla de frecuencias y un gráfico a partir de un ejercicio o problema con unos datos, pero no se dedica tiempo suficiente para que, partiendo de ese gráfico, aprendan a interpretarlo y a determinar la tabla de frecuencias y la variable a estudio.

Docencia

En cuarto lugar y tras la docencia en el centro de prácticas, es reseñable que los errores más frecuentes que cometen los alumnos y alumnas son de cálculo de operaciones elementales, no de comprensión de contenidos tal y como cabría esperar. Si este nivel 0 de algebrización ^[14], puramente aritmético, no está consolidado, cuando se introduzcan símbolos y relaciones entre números y símbolos, provocará una serie de dificultades que desembocarán en obstáculos y terminarán provocando errores de otro tipo. Es por tanto imprescindible intentar corregirlos desde el momento en el que se detecten.

No obstante, también se ha observado que a la hora de impartir estadística, resulta curioso que conceptos estadísticos tan elementales como *población* o *muestra* no se profundizan hasta el segundo ciclo de ESO. En 1º, el alumnado aprende a distinguir las *variables* y su *tipo* y a construir *tablas de frecuencias* y *gráficos*, pero sin embargo, no logra identificar la *población* de un ejercicio sencillo o diferenciar entre *población* y *muestra*. Esto es sin duda, un aspecto a tener en cuenta en el futuro al dar clases de esta disciplina.

Otro cambio que puede llevarse a cabo tras el análisis de la experimentación, es el ya mencionado en la *Cuestión 8* del *apartado 8.5*. Conviene tener mucho cuidado con la elección de las palabras que se utilizan al desarrollar contenido, ya que, una correcta explicación puede evitar errores como confundir el *dato* mayor por el de mayor *frecuencia*, al calcular el *rango* de un ejercicio como el de la prueba corta efectuada.

Alumnado

En quinto lugar, es destacable que pese a que la mayoría de alumnos y alumnas del grupo en el que se ha impartido la unidad didáctica tiene necesidades específicas de apoyo educativo, sus resultados han sido muy positivos. El alumnado, pese a las dificultades específicas de aprendizaje que pueda tener, con suficiente motivación y esfuerzo por su parte, es capaz de alcanzar todos los objetivos del curso. Un buen ejemplo de ello es una alumna de este grupo, que pese a tener TDA y dislexia, suele obtener buenas calificaciones debido al interés que le pone a todas las explicaciones y a todo lo que trabaja tanto en clase como en casa. Es, por tanto, muy importante la actitud que tenga el docente al transmitir los conocimientos y el interés que despierten las actividades que plantee; así como también es de gran ayuda un refuerzo positivo y colaboración por parte de los padres de estos alumnos y alumnas en casa.

Cabe aclarar que tan fundamental es motivar y ayudar al alumnado cuando lo necesite, como no hacerlo en determinados momentos. Por lo general, los y las estudiantes de primaria y primer ciclo de ESO buscan la aprobación del docente en todo momento porque no tienen asentado el contrato pedagógico. Estos alumnos y alumnas con dificultades todavía lo harán con mayor asiduidad. Como docente, es esencial, tras dar las pautas adecuadas, fomentar su autonomía y concentración con actividades individuales en las que no se les conteste más que a las preguntas primordiales.

Asimismo y para terminar, se ha visto que como este grupo, por sus características, tiene muchos problemas de atención y concentración, es recomendable que en todo momento realice alguna tarea y que las actividades que se propongan sean variadas. Por ejemplo, que cada vez que se expliquen conceptos los alumnos y alumnas los copien en sus cuadernos, que realicen un ejercicio de manera individual y salgan a la pizarra a corregirlo, que trabajen en grupos para resolver una situación planteada, etc. Esto podría ser extensible a todos los estudiantes en general, porque debido a las nuevas tecnologías y a la inmediatez a la que la sociedad se ha acostumbrado hoy en día, no son pocos los alumnos y alumnas que necesitan estar todo el rato ocupados para mantener la atención.

Cuestiones abiertas

¿Cómo podría modificarse el currículo o la enseñanza de las matemáticas para tener tiempo de impartir todos los contenidos y no mecanizar la mayoría de los ejercicios de cara al examen?

¿Cuál es la mejor manera de que el profesorado valore los libros de texto de diferentes editoriales? ¿Qué criterios debe seguir para buscar la más preparada para impartir estadística y probabilidad?

¿Cuál es la forma más óptima de introducir las TIC en el aula en cada uno de los cursos?

Para que el alumnado no llegue a 3º de ESO con concepciones erróneas que dificulten su aprendizaje, ¿sería conveniente centrarse más en la diferencia entre *población* y *muestra* y su *representatividad* en 1º?

¿Cómo debería reformarse la educación del profesorado de Educación Secundaria y Formación Profesional para que estuviese más formado en cuestiones pedagógicas y de atención a la diversidad? ¿Convendría hacer como en otros países Europeos que tienen una carrera específica para ello?

¿Sería conveniente recibir formación específica obligatoria acerca de alumnos con dificultades de aprendizaje para saber cómo ayudarles de la mejor manera posible?

Referencias

- [1] Boletín Oficial de Navarra (2014). Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra. (BON 174, de 5 de septiembre, Anexo I 41-57)
- [2] Boletín Oficial de Navarra (2015). Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra. (BON 127, de 2 de julio, 44-57)
- [3] Boletín Oficial de Navarra (2015). Decreto Foral 25/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra. (BON 127, de 2 de julio, 81-90)
- [4] VV.AA. (2017). *Matemáticas 5º Primaria. Superpixépolis*. Madrid, España: Edelvives.
- [5] VV.AA. (2017). *Matemáticas 6º Primaria. Superpixépolis*. Madrid, España: Edelvives.
- [6] Nieto, M., Moreno, A., Pérez, A. (2015). *Matemáticas 1º ESO. Savia*. Madrid, España: SM.
- [7] Anaya, M. A. (2007). *Refuerzo de matemáticas. Aprende y aprueba. 1º ESO*. Madrid, España: SM.
- [8] Nieto, M., Pérez, A., Alcaide, F. (2016). *Matemáticas 2º ESO. Savia*. Madrid, España: SM.
- [9] Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., M., Pérez, A. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO. Savia*. Madrid, España: SM.
- [10] Baldrige, S., Parker, T. H. (2008). *Elementary Geometry and Statistics*. Okemos, Michigan, USA: Sefton-Ash Publishing.
- [11] SM (2018). Savia digital. Recuperado de: <http://smsaviadigital.com>
- [12] Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(Especial), 133–156.
- [13] Blair, C. (2008). *The Learning Pyramid*. Alexandria, VA, USA: NTL Institute for Applied Behavioral Sciences.
- [14] Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias*, 32(1), 199-219.

Anexos

- A. Unidad didáctica del libro de texto
- B. Apuntes de contenido en pizarra
- C. Actividades adicionales
- D. Prueba corta
- E. Ejercicios de repaso: operaciones elementales

A. Unidad didáctica del libro de texto

9 Estadística y probabilidad

¿Si realizas un estudio estadístico, ¿cómo organizas los datos?

¿Y cómo los representas?

¿Sabes calcular tu nota media?

¿Puedes predecir el resultado de un experimento?

Piensa y decide

Analiza mentalmente el juego, ¿qué crees que es más probable: ganar con número muy bajo o con un número muy alto?

¿Dependería tu elección del número de jugadores? Si hubiese 6 jugadores, ¿qué número elegirías?

Si jugases muchas veces con los mismos jugadores, ¿podrías descubrir una estrategia para ganar?

Lee y comprende

Una lotería a su medida

La ley fuerte de los números pequeños: no existen suficientes números pequeños para satisfacer todas las exigencias que se les hace.

Richard Guy

Si necesitas un juego de salón sencillo [...] puede probar algo que llamo la lotería a su medida. Para empezar, pida a todos los participantes que elijan un número entero positivo y lo escriban en una tarjeta con su nombre. El objetivo es elegir el número más pequeño que no haya elegido ningún otro. ¿Hay alguna estrategia para ganar? Alguien podría pensar que lo que hay que hacer es apuntarse a los números más pequeños como 1 o 2. Pero dado que otras personas pueden haber llegado a la misma conclusión por este camino no se terminará con un número que nadie haya elegido. Si por el contrario elige un número muy grande con seguridad habrá perdido: que alguien elija un número más pequeño que el suyo es sencillamente demasiado fácil. Esto sugiere que los mejores números son los ubicados entre ambos extremos. ¿Pero dónde? ¿Qué tal 7 u 11? ¿Es seguro que nadie más pensará en escoger el 7? [...] La psicología es importante. Cada jugador intenta imaginar qué escogerán los demás. Pero la tentación de pensar que uno no razona como el resto es tan fuerte que casi todos tragaremos el anzuelo...

JOHN D. BARROW
El salto del tigre. Ed. Crítica 2009

Analiza y saca conclusiones

Ganar o perder, ¿depende sólo de la suerte? ¿Puedes aumentar las probabilidades de ganar siguiendo un plan? ¿Qué pasaría si todos siguen ese mismo plan?

Y tú, ¿qué opinas?

¿Se podría "hacer trampas" en este juego? ¿Si pudieras las harías? ¿Cómo te sentirías si fuese un compañero el que te "hace trampas" a ti? ¿Nunca es justificable hacer trampas? Debátelo con tus compañeros.

1 Estadística. Datos y frecuencias

✓ PON EN VALOR

En realidad no se sabe con certeza cuántas personas sufren hambre y desnutrición en el mundo. Por lo que se han ideado distintos métodos para estimar el hambre mundial.

Estos métodos dan distintos resultados, pero debemos ser capaces de analizar la **fiabilidad de la información** para poder hacer frente a este problema con **responsabilidad**. Entra en smSaviadigital.com y elabora un mural sobre la fiabilidad de la información.

Ten en cuenta

Algunos aspectos pueden estudiarse de las dos formas. Por ejemplo, una nota puede ser numérica (de 0 a 10) o expresarse de forma cualitativa (mal, regular, bien etc.)

El estudio estadístico

El curso de Jorge va a realizar un viaje. Tienen que decidir todavía el destino al que prefieren ir y la duración del viaje.

Para recoger sus opiniones, la profesora les pregunta qué opciones prefieren:



Con los datos que obtenga, sabrá qué tipo de viaje prefiere el grupo de alumnos.

La profesora de Jorge está realizando un **estudio estadístico**.

El curso de Jorge es el conjunto de personas que van a ser preguntadas, esa será nuestra **población**.

La **población** es el conjunto de elementos sobre el que se realiza un **estudio estadístico**.

Tipos de caracteres estadísticos

Sobre nuestra población, queremos analizar dos aspectos:

- El destino del viaje, que no se puede expresar con un número.
- La duración del viaje, que sí se puede expresar numéricamente.

En una población podemos estudiar distintos aspectos. Cada uno de ellos recibe el nombre de **carácter estadístico**, y puede ser de dos tipos:

- **Cuantitativo**, si se puede expresar con un número: edad, peso, etc.
- **Cualitativo**, si no se puede expresar con un número: color de ojos, país de nacimiento, etc.

Ejemplo ► Pablo quiere abrir una librería en su municipio, pero antes quiere conocer los hábitos de lectura de sus vecinos. Para ello va a realizar un estudio estadístico:

La población está formada por todos los vecinos del municipio.

Quiere recoger datos sobre dos aspectos:

- El número de horas de lectura semanales de cada uno. (Carácter cuantitativo)
- El tipo de libro que más le gusta: novela, aventuras o terror. (Carácter cualitativo)

Con este estudio conocerá mejor a sus posibles clientes.



Cuando el tamaño de la población es demasiado grande, se suele utilizar una parte de ella, a la que se llama **muestra**.

Datos y frecuencias

Para recoger la información necesaria se suelen utilizar diferentes métodos: encuestas, mediciones directas, observación, etc.

Los **datos estadísticos** son los valores que se obtienen al realizar un experimento. Estos resultados conviene representarlos en una tabla, llamada **tabla de frecuencias**.

- La **frecuencia absoluta** de un dato estadístico es el número de veces que se repite ese dato.
- La **frecuencia relativa** de un dato estadístico es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos.

Ejemplo ▶ Al preguntar el destino favorito a sus 25 alumnos la profesora obtuvo estos resultados:

Respuesta	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Playa		11	$\frac{11}{25} = 0,44$
Montaña		6	$\frac{6}{25} = 0,24$
Ciudad		8	$\frac{8}{25} = 0,32$
		25	1

smSaviadigital.com

PRACTICA Trabaja con las frecuencias absolutas y relativas.

Ten en cuenta

Observa que la suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos. Por tanto, la suma de las frecuencias relativas siempre es igual a 1.

ACTIVIDADES

1. Escribe tres ejemplos de caracteres estadísticos cualitativos y tres de caracteres cuantitativos.

ACTIVIDAD RESUELTA

2. Elabora la tabla de frecuencias con estos resultados obtenidos al tirar un dado de cuatro caras.

3 2 4 2 2 3 4 1 1 4 3 2 2 2 4
1 3 4 4 3 2 4 4 1 4 4 4 1 1 4

Resultado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	6	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
2	7	$\frac{7}{30}$
3	5	$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$
4	12	$\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$
	30	1

3. En un concurso de televisión se realiza una pregunta a 100 personas, que eligen su respuesta entre tres posibles. Copia en tu cuaderno y completa la tabla.

Respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
A	80	●●●
B	●●●	$\frac{11}{100}$
C	●●● ●●●	0,09 ●●●

4. A Isabel le encantan los cómics. Ha preguntado a sus compañeros de 1.º qué tipo de libros les gusta leer y ha obtenido las siguientes respuestas:

- Doce de ellos leen cómics.
- Cinco leen novelas de misterio.
- Ocho prefieren novelas de ciencia ficción.
- Los demás no han contestado.



Sabiendo que en clase son 30 alumnos, elabora la tabla de frecuencias. ¿De qué tipo de carácter estadístico se trata?

2 Gráficos estadísticos

Al realizar un estudio estadístico, las tablas de frecuencias sirven para realizar un análisis inicial de los datos, pero en ocasiones es conveniente presentar esos mismos datos de una forma más visual. Para ello utilizamos los gráficos estadísticos. Los gráficos más frecuentes son los **diagramas de barras** y los de sectores.

Diagrama de barras

En un **diagrama de barras**, representamos los datos en un eje horizontal y sobre cada uno de ellos dibujamos una barra cuya altura es proporcional a su frecuencia absoluta.

Si unimos los extremos de las barras, obtenemos el **diagrama de líneas** o **polígono de frecuencias**.

Ten en cuenta

Al representar el diagrama de barras es necesario incluir la **leyenda**, para identificar el dato correspondiente a cada barra.

Ejemplo ▶ Alba tiene una colección de películas y ha representado cuántas tiene de cada estilo en un diagrama de barras. También ha representado su polígono de frecuencias.

Películas	Frecuencia absoluta
Comedia	6
Acción	4
Drama	1
Dibujos	5
	16



MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSavia.digital.com y construye diagramas de barras y de sectores.

Ten en cuenta

Un círculo completo son 360° .

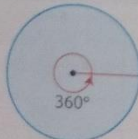


Diagrama de sectores

Se utiliza cuando queremos conocer la proporción que representa cada dato respecto del total de datos.

Para representar un **diagrama de sectores** dividimos un círculo en varios sectores, de amplitudes proporcionales a las frecuencias absolutas de los datos.

Para conocer la amplitud en grados de cada sector, usamos la siguiente proporción:

$$\frac{360^\circ}{n.\text{o total de datos}} = \frac{n.\text{o grados del sector}}{\text{frecuencia absoluta correspondiente}}$$

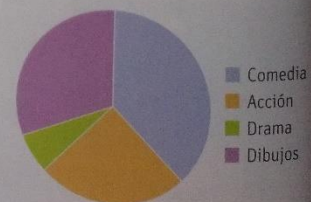
Ejemplo ▶ Para representar en un diagrama de sectores cuántas películas tiene de cada estilo, primero calcula la amplitud de cada sector.

$$\text{Comedia: } \frac{360^\circ}{16} = \frac{n^\circ}{6} \rightarrow n^\circ = \frac{360^\circ \cdot 6}{16} = 135^\circ$$

$$\text{Acción: } \frac{360^\circ}{16} = \frac{n^\circ}{4} \rightarrow n^\circ = \frac{360^\circ \cdot 4}{16} = 90^\circ$$

$$\text{Drama: } \frac{360^\circ}{16} = \frac{n^\circ}{1} \rightarrow n^\circ = \frac{360^\circ \cdot 1}{16} = 22,5^\circ$$

$$\text{Dibujos: } \frac{360^\circ}{16} = \frac{n^\circ}{5} \rightarrow n^\circ = \frac{360^\circ \cdot 5}{16} = 112,5^\circ$$



Ten en cuenta

Al representar el diagrama de sectores es necesario incluir la **leyenda**, para identificar el dato correspondiente a cada sector.

ACTIVIDADES

5. Se ha realizado una encuesta a varias personas, preguntando con qué frecuencia van al cine a lo largo de un mes. Los resultados de la encuesta se recogen en la siguiente tabla.

N.º de veces	Frecuencia absoluta
0	15
1	20
2	35
3	25
4	10

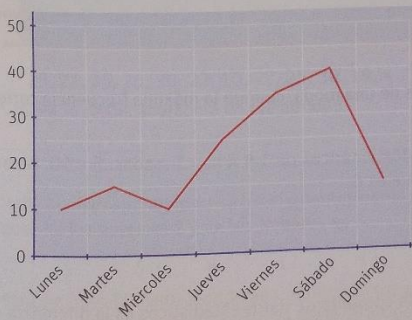
Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

6. Durante un viaje en coche, Tomás se aburría tanto que se puso a mirar las matrículas de los coches que pasaban y fue apuntando la última cifra de cada una.

6, 3, 8, 6, 6, 6, 5, 4, 2, 0, 2, 1, 3,
5, 5, 5, 1, 5, 2, 2, 0, 3, 9, 9, 0, 5, 4,
3, 1, 7, 4, 8, 6, 5, 9, 2, 9, 4, 9, 6

- a) Construye la tabla de frecuencias asociada.
b) ¿Cuál es la cifra más repetida? ¿Y la que menos aparece?
c) Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

7. Un hotel ha hecho un estudio sobre el día de la semana pasada en el que llegaron sus huéspedes. Ha obtenido la siguiente gráfica, pero al imprimirlo se han borrado las barras del diagrama.



- a) Completa el diagrama en tu cuaderno.
b) Construye la tabla de frecuencias asociada.
c) ¿Cuántos clientes llegaron esa semana?

ACTIVIDAD RESUELTA

8. En una clase se ha preguntado a cada alumno cuál es su deporte favorito, obteniéndose los siguientes resultados:

Fútbol: 15 alumnos
Baloncesto: 10 alumnos
Tenis: 5 alumnos

Dibuja el diagrama de sectores.

Calculamos los grados que tendrá cada sector.

$$\text{Fútbol: } \frac{360^\circ}{30} = \frac{n^\circ}{15} \rightarrow n^\circ = \frac{360^\circ \cdot 15}{30} = 180^\circ$$

$$\text{Baloncesto: } \frac{360^\circ}{30} = \frac{n^\circ}{10} \rightarrow n^\circ = \frac{360^\circ \cdot 10}{30} = 120^\circ$$

$$\text{Tenis: } \frac{360^\circ}{30} = \frac{n^\circ}{5} \rightarrow n^\circ = \frac{360^\circ \cdot 5}{30} = 60^\circ$$



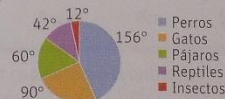
9. Una tienda ha dado a probar a varios clientes un helado de un sabor nuevo. A continuación les ha pedido que lo valoraran, obteniendo estos resultados:

Muy bueno: 25 personas
Bueno: 20 personas
Malo: 10 personas
Muy malo: 5 personas



- a) Calcula la medida, en grados, que deberá tener el sector correspondiente a cada una de las respuestas.
b) Representa el diagrama de sectores.

10. El siguiente diagrama representa los resultados de una encuesta, en la que se preguntó a 120 personas su animal favorito.



No conocemos las frecuencias correspondientes a cada uno de los sectores, pero sí los ángulos correspondientes a cada uno. Reconstruye la tabla de frecuencias.

11. smSaviadigital.com

PRACTICA Con los gráficos estadísticos.

3 Parámetros estadísticos



MAT-TIC GeoGebra
 Entra en smSavialdigital.com e identifica la media en un diagrama de barras.

smSavialdigital.com
PRACTICA Calcula la puntuación media en una competición.

Media aritmética simple y ponderada

La **media aritmética simple** o **media** es el cociente que se obtiene dividiendo la suma de todos los datos entre el número total de datos.

Ejemplo ► Calcula la nota media del último examen de Matemáticas de 1.º A. Las notas han sido las siguientes:

10, 10, 6, 7, 10, 10, 8, 9, 9, 5, 8, 7, 5, 9, 9, 6, 5, 10, 5, 5, 5, 7, 7, 10, 8, 6, 9, 6

Nota	Frecuencia absoluta
5	6
6	4
7	4
8	3
9	5
10	6

Para realizar el cálculo de forma rápida multiplicamos cada nota por su frecuencia absoluta, en lugar de sumar todos los números uno a uno.

La nota media de 1.º A será:

$$\frac{5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 6}{28} = \frac{211}{28} = 7,54$$

A veces no todos los datos tienen la misma importancia. En estos casos se utiliza la media ponderada.

Para hallar la **media ponderada** sumamos los productos de cada dato por su peso y dividimos el resultado entre la suma de los pesos.

Ejemplo ► El profesor calcula la nota final de cada alumno valorando dos aspectos: la nota del examen representará el 70 % de la nota final, y la de clase, el 30 %.

Un alumno tiene un 6 de nota de examen y un 8 de nota de clase. Su nota será:

$$\frac{6 \cdot 70 + 8 \cdot 30}{70 + 30} = 6,6$$

Moda

La **moda** de un conjunto de datos estadísticos es el dato que tiene mayor frecuencia, es decir, el que más veces se repite.

Un conjunto puede tener más de una moda, cuando la máxima frecuencia corresponde a varios datos distintos.

Ejemplo ► En las notas de Matemáticas de 1.º A hay 2 modas: 5 y 10. Ambas tienen la mayor frecuencia, que es 6.

Rango o recorrido

El **rango o recorrido** de un conjunto de datos estadísticos es la diferencia entre el mayor y el menor de esos datos.

Ejemplo ► El rango de las notas de matemáticas de los alumnos de 1.º ESO A es:
 $10 - 5 = 5$

ACTIVIDADES

12. Halla la media y la moda de los siguientes datos estadísticos.

4	1	1	6	3	5	2
1	1	4	1	5	2	3
5	3	5	3	4	5	6

13. Las temperaturas máximas en una ciudad durante un mes, en grados centígrados, han sido las siguientes:

25, 24, 24, 23, 21, 21, 23, 23, 24, 25
25, 26, 26, 26, 27, 26, 27, 30, 30, 30
27, 29, 29, 28, 23, 23, 24, 26, 30, 29

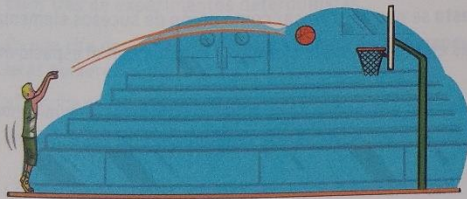
- a) Construye la tabla de frecuencias.
- b) Calcula la media de las temperaturas máximas.

14. El tutor de un grupo ha apuntado las edades de sus alumnos, por orden de lista.

14, 13, 14, 13, 13, 13, 12, 14, 12, 14
12, 12, 12, 13, 13, 12, 14, 12, 13, 13
13, 12, 13, 13, 12, 14, 13, 13, 13, 13

- a) Calcula la media de edad de la clase.
- b) Calcula la moda.

15. Durante los últimos partidos, un jugador de baloncesto ha conseguido las siguientes puntuaciones.



25, 22, 25, 25, 30, 22, 10, 22, 25, 30, 19, 4
Calcula su media anotadora en ese período.

ACTIVIDAD RESUELTA

16. Halla la media ponderada de los siguientes datos si el peso de los pares es 2 y de los impares es 3.

3 5 8 12 13

Para calcular la media ponderada multiplicamos cada dato por su peso y dividimos entre la suma de los pesos.

$$\frac{8 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 13 \cdot 3}{2 + 2 + 3 + 3 + 3} = 7,92$$

17. Estas son las notas de los exámenes de Eva:



Calcula la media en los siguientes casos:

- a) Si todos tienen el mismo peso.
- b) Si el último examen es global y vale el triple que cualquiera de los otros.

18. En un concurso de ortografía hay 3 pruebas: rapidez, número de letras y palabras poco comunes. Cada una de las pruebas tiene distinta importancia, por lo que se asigna a cada una un peso: 7, 2 y 1, respectivamente.

Si un participante ha obtenido en las respectivas categorías 4, 7 y 9 puntos, ¿cuál será su media ponderada?

19. Con estos datos:

4	1	1	1	3	5	6	1	1	4
1	5	2	3	4	4	3	4	5	6
2	3	1	2	1	3	1	5	5	5

- a) Halla la media y la moda.
- b) Halla la media ponderada, sabiendo que el peso de los datos de la primera fila es 1, el de la segunda es 2, y el de la tercera, 3.
- c) Calcula el rango.

20. Los estilos de música preferidos por 12 alumnos son:

Pop	Dance	Pop	Clásica
Rock	Pop	Dance	Rock
Clásica	Rock	Pop	Dance

- a) ¿Es un carácter cualitativo o cuantitativo?
- b) ¿Cuál es la moda?
- c) ¿Es posible calcular el rango? ¿Por qué?

21. smSaviadigital.com

PRACTICA Practica con los parámetros estadísticos.

4 Sucesos y probabilidad



Sabías que...

En latín, la palabra *alea* significa *dado*. Se usaba también para hacer referencia a los juegos de azar. Lo *aleatorio* es lo relativo al azar.

Experimentos aleatorios

No siempre podemos predecir el resultado de un experimento. Podemos predecir con seguridad si el 20 de julio de 2028 caerá en miércoles... aunque quizás nos lleve algún tiempo realizar los cálculos necesarios. En cambio, si Marta le pide a Luis que piense un número natural del 1 al 10, Marta puede intentar adivinar el número, pero no lo puede saber con seguridad.

Los experimentos se pueden clasificar en dos tipos: **aleatorios** y **deterministas**.

- Un experimento es **aleatorio** cuando no se puede predecir de antemano el resultado que se va a obtener.
- Un experimento es **determinista** si se puede conocer de antemano su resultado.

Sucesos

El **espacio muestral**, es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa con la letra ***E***.

Ejemplo ▶ En el experimento de Marta y Luis hay 10 resultados posibles, por tanto, el espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Un **suceso** es cualquier parte del espacio muestral.

- Un **suceso elemental** es aquel que no se puede descomponer en sucesos más sencillos.
- Un **suceso compuesto** se puede expresar como unión de sucesos elementales.
- El **suceso seguro** es el que se cumple siempre. Coincide con el espacio muestral, E .
- El **suceso imposible** es el que nunca se cumple. No contiene ningún elemento del espacio muestral. Se representa con el símbolo \emptyset , que representa el conjunto vacío.

Ejemplo ▶ En el experimento de Marta y Luis podemos encontrar, entre otros:

- Sucesos elementales: "Elegir el número 4" $\Rightarrow \{4\}$
- Sucesos compuestos: "Elegir un número par" $\Rightarrow \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- Suceso seguro: "Elegir un número menor o igual que 10" $\Rightarrow E$
- Suceso imposible: "Elegir el número 11" $\Rightarrow \emptyset$

Probabilidad

Para analizar las posibilidades de que ocurra un determinado suceso, utilizamos la **probabilidad**.

La **probabilidad de un suceso** es un número entre 0 y 1, que indica la facilidad con la que ese suceso puede ocurrir.

Ten en cuenta

La probabilidad del suceso imposible es 0 y la del suceso seguro, 1.

Regla de Laplace

Si todos los resultados de un experimento tienen las mismas posibilidades de ocurrir, decimos que son **equiprobables**. En ese caso, la probabilidad de un suceso se determina usando la **regla de Laplace**.

Regla de Laplace:
$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso } A}{\text{n.º de casos posibles}}$$

Ejemplo ► Calcular la probabilidad del suceso "salir par" en este dado.

$$\begin{aligned} \text{Casos favorables} &= \{2, 4, 6\} \\ \text{Casos posibles} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(\text{salga par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y calcula probabilidades en distintas situaciones.

ACTIVIDADES

22. Indica si los siguientes experimentos son aleatorios.

- Predecir en qué día de la semana caerá tu cumpleaños el año que viene.
- Comprar un sobre de cromos que contenga el cromo que te falta para la colección.
- Sacar una bola de una caja en la que hay bolas verdes, blancas y rojas.
- Sacar una bola de una caja en la que solo hay bolas verdes.

23. Da tres ejemplos más de experimentos aleatorios y otros tres de experimentos deterministas.

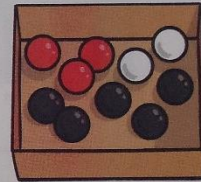
24. En una rifa de un centro escolar se han vendido papeletas numeradas del 1 al 20.

- Escribe el espacio muestral.
- Da tres ejemplos de sucesos elementales y otros tres de sucesos compuestos.
- Describe el suceso "obtener un número que sea múltiplo de 9".
- Describe el suceso "obtener un número capicúa de dos cifras".
- Describe el suceso "obtener un número mayor que 100".

25. Se lanza un dado cúbico con las caras numeradas de 1 a 6. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos.

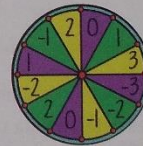
- Obtener un 6.
- Sacar un número impar.
- Sacar un número menor que 3.
- Sacar 1 o 6.
- Sacar un número menor que 10.
- Sacar un número menor que 1.

26. En una caja hay 3 bolas rojas, 5 bolas negras y 2 bolas blancas. Se saca una bola al azar. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos.



- Sacar una bola roja.
- Sacar una bola negra.
- Sacar una bola que no sea azul.
- Sacar una bola que no sea blanca.

27. Para un juego se utiliza una ruleta que tiene la siguiente forma.



- Calcula la probabilidad de caer en un 2.
- Calcula la probabilidad de caer en un número negativo.
- Calcula la probabilidad de no caer en verde.

28. Una persona nació en el mes de diciembre. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos.

- Que naciera el día de Navidad.
- Que naciera el 22 o más tarde.
- Que naciera en un día par.
- Que naciera en un día impar.

29. smSaviadigital.com

PRACTICA Calcula probabilidades.

Organiza tus ideas

ESTADÍSTICA. DATOS Y FRECUENCIAS

- **Población:** conjunto de elementos sobre el que se realiza un estudio estadístico.
- **Carácter estadístico:**
 - **Cuantitativo:** se puede expresar con un número.
 - **Cualitativo:** no se puede expresar con un número.
- **Frecuencia absoluta:** número de veces que se repite ese dato.
- **Frecuencia relativa:** cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos.

Tabla de frecuencias

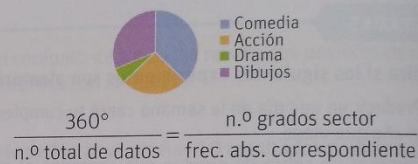
Dato	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	11	$\frac{11}{25} = 0,44$
2	6	$\frac{6}{25} = 0,24$
3	8	$\frac{8}{25} = 0,32$
	25	1

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Diagrama de barras y líneas



Diagrama de sectores



PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

- **Media aritmética simple:** es el cociente de la suma de todos los datos entre el número total de datos.
- **Media ponderada:** se obtiene sumando los productos de cada dato por su **peso** y dividiendo el resultado entre la suma de los pesos.
- **Moda:** es el dato que tiene mayor frecuencia.
- **Rango o recorrido:** es la diferencia entre el mayor y el menor valor de un conjunto de datos estadísticos.

EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS

- Un experimento es **aleatorio** cuando no podemos predecir de antemano el resultado que vamos a obtener.
- Un experimento es **determinista** si podemos conocer de antemano su resultado.
- El **espacio muestral, E**, es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- Un **suceso** es cualquier parte del espacio muestral.
 - **Suceso elemental:** no se puede descomponer en sucesos más sencillos.
 - **Suceso compuesto:** se puede expresar como unión de sucesos elementales.
 - **Suceso seguro:** se cumple siempre.
 - **Suceso imposible:** nunca se cumple.

PROBABILIDAD

- La **probabilidad de un suceso** es un número entre 0 y 1, que indica la facilidad con la que puede ocurrir.
- Regla de Laplace:
$$P(A) = \frac{n.º \text{ de casos favorables al suceso } A}{n.º \text{ de casos posibles}}$$

Actividades

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Estadística. Datos y frecuencias

30. Al preguntar a 50 personas su sabor de chicle favorito, 18 eligieron menta, 27, fresa, y el resto, sandía.
- ¿Qué tipo de carácter estadístico es?
 - Construye la tabla de frecuencias.
31. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de frecuencias.

Visitas	frecuencia absoluta	frecuencia relativa
0	25	0,125
1	•••	0,225
2	50	•••
3	•••	0,3
4	15	•••
5	•••	0,025
	•••	•••

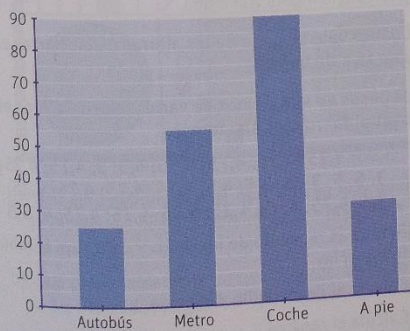
Gráficos estadísticos

32. Se realiza una campaña para aumentar el consumo de fruta. Se ha preguntado a varios alumnos cuántas piezas de fruta comen cada día y se han obtenido los siguientes resultados:

3, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 3, 1, 1, 3, 1,
1, 3, 1, 3, 2, 0, 1, 1, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1

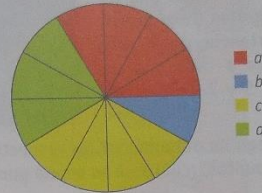
- Construye la tabla de frecuencias.
- Representa los datos mediante un diagrama de barras.
- Representa los datos mediante un diagrama de sectores.

33. Se ha preguntado a varias personas qué medio de transporte usan para ir al trabajo. Con sus respuestas se ha elaborado el siguiente gráfico.



Construye la tabla de frecuencias asociada.

34. El diagrama de sectores representa los resultados de un estudio estadístico realizado a 300 personas



Construye la tabla de frecuencias asociada.

Parámetros estadísticos

35. Las estaturas en centímetros de un grupo de personas son las siguientes:

154, 160, 154, 158, 158, 158, 156, 158, 156, 150, 152, 154, 156, 156, 156, 150, 152, 158, 156

- Calcula la estatura media.
- Halla la moda y el recorrido.

ACTIVIDAD RESUELTA

36. Julián ha realizado varios exámenes en esta evaluación. Algunos de ellos son globales y valen el triple que los parciales. Calcula su nota media ponderada, sabiendo que las notas de los parciales fueron 4, 7, 5 y 3, y de los globales 7 y 8. ¿Es mejor o peor que la media aritmética simple?

Al calcular la media ponderada tenemos en cuenta que los globales puntúan el triple:

$$\frac{4+7+5+3+7\cdot3+8\cdot3}{4\cdot1+2\cdot3} = \frac{64}{10} = 6,4$$

Calculamos la media simple y la comparamos con la ponderada.

$$\frac{4+7+5+3+7+8}{6} = \frac{34}{6} = 5,67$$

En este caso es mejor la media ponderada, debido a que ha sacado mejores notas en los exámenes que tenían más peso.

37. En un concurso, las puntuaciones de las pruebas de la segunda fase tienen el triple de peso que las de la primera. Una concursante obtuvo las siguientes puntuaciones:

- 1.ª fase: 100, 90, 85, 95, 100
- 2.ª fase: 60, 75, 60, 50, 65

¿Cuál será su puntuación media ponderada?

38. La media de cinco datos es 7. Si los cuatro primeros son 8, 4, 5 y 8, ¿cuánto vale el quinto dato?

Actividades

39. Para elegir el mejor videojuego, una revista otorga tres puntuaciones distintas: gráficos, diversión y originalidad. Cada una de las categorías tiene distinta importancia, por lo que se asigna a cada una un peso: 3, 5 y 2, respectivamente.



Si un juego ha obtenido en las respectivas categorías 6, 8 y 7 puntos, ¿cuál será su media ponderada?

Sucesos. Probabilidad

ACTIVIDAD RESUELTA

40. Se lanza un dado de ocho caras, numeradas de 1 a 8.



- a) Calcula la probabilidad de obtener 5.
 b) Calcula la probabilidad de obtener número par.
 c) Calcula la probabilidad de obtener un número mayor o igual que 3.
- a) Suceso "obtener 5" $\Rightarrow A = \{5\}$
 $n.^{\circ}$ de casos favorables = 1
 $n.^{\circ}$ de casos posibles = 8 $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{8}$
- b) $B = \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- c) $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow P(C) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
41. En una caja hay 3 lápices rojos, 2 negros y 1 azul. Se sacan a la vez dos lápices.
- a) ¿El experimento es aleatorio? ¿Por qué?
 b) Forma el espacio muestral.
 c) Describe el suceso "sacar uno de los lápices azul".
 d) Describe el suceso "sacar dos colores distintos".
42. En un sobre hay ocho tarjetas, numeradas del 1 a 8. Se saca una tarjeta al azar. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.
- a) Sacar el 3.
 b) Sacar un múltiplo de 3.
 c) No sacar 1 ni 8.
 d) Sacar un 3 o menos.

43. Un equipo de fútbol está formado por los siguientes jugadores.

6 delanteros 3 porteros 8 defensas
 8 centrocampistas



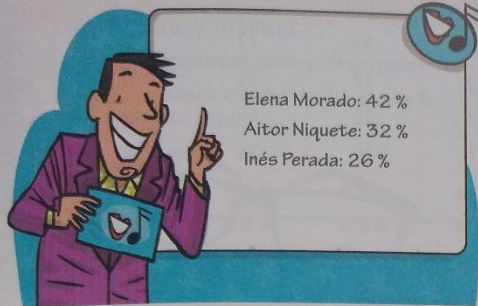
Si elegimos un jugador al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

- a) Que sea un defensa.
 b) Que no sea un delantero.
 c) Que sea portero o defensa.
 d) Que sea portero y centrocampista.

Actividades de síntesis

44. Se ha realizado una encuesta telefónica a varios hogares en la que se preguntó el número de teléfonos móviles que había en la casa, obteniendo estos resultados:
- 2, 3, 0, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 3, 4,
 2, 4, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 0, 4, 0, 4, 0, 1
- a) Construye la tabla de frecuencias.
 b) Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.
 c) Construye el diagrama de sectores.
 d) ¿En cuántos hogares no hay ningún móvil? ¿En qué proporción de hogares hay 4 teléfonos móviles?
 e) Calcula la media y la moda.
45. ¿Cuánto vale la suma de las alturas de las barras en un diagrama de barras?
46. Los pesos en kilogramos de varios recién nacidos en un hospital fueron los siguientes.
- 3,25; 3,25; 4,25; 4,75; 4,75; 4,5; 3; 4,75; 4,25;
 3; 5; 3,75; 3,5; 4,5; 4,75; 4,75; 4,75; 4,25;
 3,5; 4,75; 4,25; 4,25; 4,25; 4,75; 4,75; 4; 3,5
- a) Realiza el recuento de los datos y construye la tabla de frecuencias.
 b) Calcula el peso medio y la moda.
 c) Calcula el rango.
 d) Se elige un bebé al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya pesado 3,25 kg?

47. Para elegir al ganador de un concurso musical, un programa de televisión pide a los espectadores que manden mensajes apoyando a los participantes. Los resultados han sido:

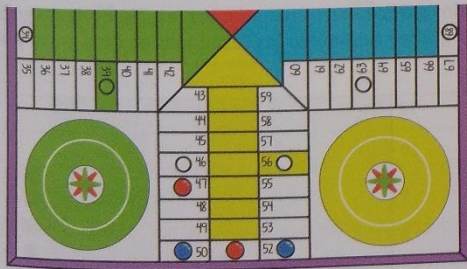


Si han votado 200 personas en total, representa el diagrama de sectores correspondiente.

48. En una clase se ha realizado la revisión médica. El médico ha apuntado los siguientes datos:
- Estatura media de las chicas: 1,45 m
 - Estatura media de los chicos: 1,55 m
 - Estatura media del grupo: 1,52 m
- ¿Puede ser que haya tantos chicos como chicas? Razona la respuesta.

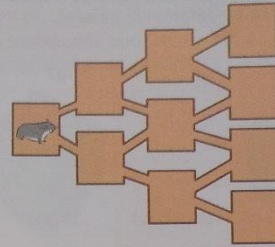
PROBLEMAS PARA RESOLVER

49. Ricardo y Marga están jugando al parchís. Él juega con fichas rojas, y ella, con fichas azules. En un momento de la partida, es el turno de Ricardo y las fichas están en estas posiciones:



- a) ¿Qué probabilidad hay de que la ficha más adelantada de Ricardo se coma alguna de las de Marga? ¿Y la más retrasada?
- b) ¿Qué probabilidad hay de que Ricardo se coma alguna de las fichas de Marga?
- c) ¿Para qué valores del dado, Ricardo no podrá comer ninguna ficha de Marga? ¿Qué probabilidad hay de que eso ocurra?

50. Un ratón recorre un laberinto yendo siempre de izquierda a derecha. Al llegar a cada cruce, la probabilidad de elegir un camino u otro es la misma.



- a) Copia el esquema en tu cuaderno y busca todos los recorridos posibles.
- b) ¿En qué casilla es más probable que acabe?
- c) Calcula la probabilidad de que termine en cada una de las casillas.
51. La nota media de cinco alumnos de la clase es 7, y la nota media de otros diez, 5. ¿Cuál es la nota media de los quince?

ACTIVIDADES PARA PENSAR MÁS

52. Un jugador de baloncesto encesta 12 de 30 tiros libres. Tiene que tirar 10 más. ¿Cuántos debe encestar para llegar al 50 % de aciertos?
- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8
53. La media de 6 números es 4,5. Añadimos dos más y la media sigue siendo 4,5. ¿Cuál es la suma de estos dos nuevos números?
- A. 27 B. 9 C. 36 D. 4,5
54. Las caras de un dado están numeradas con 1, 1, 2, 2, 3, 3 y las de otro con 4, 4, 5, 5, 6, 6. Los tiramos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de las caras superiores sea impar?
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{9}$

Encuentra el error

55. Un juego de ordenador simula el lanzamiento con arco a una diana. Se van lanzando dos flechas negras y una morada, luego se aleja la diana y se vuelve a tirar. Los lanzamientos con flechas negras puntúan de 1 a 10, y los de flechas moradas multiplican su valor por 2.
- Guillermo ha conseguido las siguientes puntuaciones:
- 10 10 10 8 7 9 6 5 6 4 7
- Él asegura que su puntuación media es menor que 7,2. ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.

Ponte a prueba

PROBLEMA RESUELTO El teleférico

En una estación de esquí, la ocupación del teleférico que sube a las pistas en el primer viaje de cada día de la semana, durante las cuatro semanas de enero, viene dada por la siguiente tabla.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
1.ª semana	47	45	58	32	72	72	72
2.ª semana	42	38	52	17	55	70	59
3.ª semana	38	13	47	28	49	68	63
4.ª semana	14	29	37	19	24	58	61
Ocupación media (personas)	35,25	•••	•••	•••	•••	•••	•••
Ocupación media (porcentaje)	49 %	•••	•••	•••	•••	•••	•••

- Calcula la capacidad máxima del teleférico.
- Completa la tabla calculando los datos que faltan.
- Calcula de dos formas diferentes la ocupación media a lo largo del mes.
- La dirección quiere suprimir este viaje los días en que la tasa de ocupación sea menor al 45 %. ¿Qué días debe suprimir?

SOLUCIÓN

- Como 35,25 representa el 49 %, entonces el 100 % son 72 personas.

Ocupación media (personas)	35,25	31,25	48,5	24	50	67	63,75
Ocupación media (porcentaje)	49 %	43,4 %	67,36 %	33,33 %	69,44 %	93,06 %	88,54 %

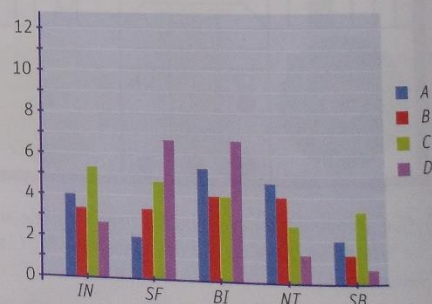
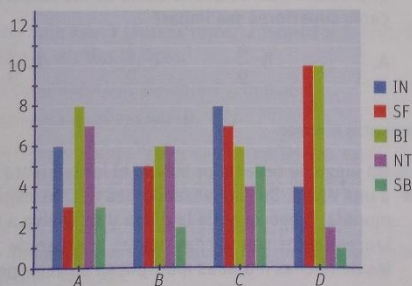
- Forma 1: Hacer la media de todos los viajeros que suben al teleférico: $\bar{x} = \frac{1279}{28} = 45,68$

Forma 2: Hacer la media de la ocupación media: $\bar{x} = \frac{319,75}{7} = 45,68$

- Debe suprimir los primeros viajes de los martes y los jueves.

Dando la nota

Los profesores de matemáticas de un centro escolar han elaborado dos gráficos para comparar los resultados de sus grupos en 1.º E.S.O. en la pasada evaluación. Uno de ellos ha elaborado el gráfico separando los resultados de cada grupo y otro ha agrupado los datos según las notas obtenidas.



- A partir de los gráficos, calcula el número de alumnos de cada clase.
- ¿Qué gráfico crees que es mejor para estudiar los resultados de un grupo?
- Calcula la nota media de cada grupo. Para hacerlo, considera las siguientes equivalencias: IN = 4; SF = 5; BI = 6; NT = 7; SB = 9.

¿Usas gafas?

La clase de María tiene 30 alumnos. María les ha clasificado teniendo en cuenta varias variables:

- Hay 20 chicos y 10 chicas.
- Hay 11 personas con gafas y 19 sin gafas.
- Hay 22 personas que tienen 13 años y 8 que tienen 14 años.



1. ¿Cuántos chicos de 13 años, con gafas, puede haber como máximo?
2. ¿Es posible que no haya ninguno?
3. ¿Cuántas chicas de 14 años que lleven gafas puede tener como máximo esa clase?
4. Forma una clase con esos datos, de manera que estén presentes todas las combinaciones posibles y haya al menos dos personas en cada una de ellas (es decir, al menos dos chicos con gafas de 13 años, dos chicos con gafas de 14 años, etc).

Juego justo

Julián y Ana juegan con un dado cada uno. El de Julián tiene 1 uno, 2 doses y 3 treses, y el de Ana, 2 unos, 2 doses y 2 treses. Quieren inventarse un juego que sea justo, de forma que si cada uno lanza su dado, los dos tengan la misma probabilidad de ganar.



1. Anota en tu cuaderno todos los resultados posibles y las probabilidades de que ocurran. Por ejemplo, como el dado de Julián tiene un uno y el de Ana tiene dos, hay dos formas de obtener dos 1. En cambio, hay $2 \cdot 2 = 4$ formas de sacar un 2 y un 1.
2. En el primer juego que inventan, Julián gana si la suma de los dados es par y pierde si es impar. ¿Cuál de los dos jugadores tiene ventaja?
3. Ana propone multiplicar los resultados. Ganará ella si el producto es par y ganará Julián si es impar. ¿Es un juego justo?
4. Si los dos dados fueran como el de Ana, ¿alguno de los dos juegos sería justo?

AUTOEVALUACIÓN

1. En las últimas elecciones en un pueblo, los resultados fueron los siguientes:

Candidato	Votos
Ana	80
Daniel	40
José Luis	30
Olga	20
Víctor	10

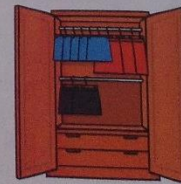
- a) Calcula las frecuencias relativas.
 - b) Representa los datos en un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias.
2. En una encuesta sobre el número de mascotas en varios hogares se obtuvieron las siguientes respuestas:
 1, 2, 1, 1, 3, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 4, 1, 3, 1
 1, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 1, 2, 1, 2
- a) Forma la tabla de frecuencias.
 - b) Calcula la media y la moda.

3. En un grupo de 16 personas, 5 quieren ir al cine, 4 quieren ir a pasear, 6 quieren ir a cenar y la última quiere ir a bailar. Representa el diagrama de sectores correspondiente.
4. La calificación de una asignatura depende de tres notas: exámenes, ejercicios y trabajos. Para calcular la nota se asigna a cada parte un peso: 12, 5 y 3, respectivamente.
 Alberto obtuvo unas notas de 8, 3 y 4, respectivamente. ¿Cuál será su media ponderada?

5. Observa las faldas del armario de Rosa.

Si elige una de ellas al azar, calcula la probabilidad de estos sucesos:

- a) Sacar una falda roja.
- b) No sacar una falda negra.
- c) Sacar una falda azul o negra.
- d) Sacar una falda que no sea ni azul ni roja.
- e) No sacar una falda.



B. Apuntes de contenido en pizarra

SESIÓN 1

POBLACIÓN: Conjunto de elementos sobre el que se realiza un estudio estadístico (*Encuesta, cuestionario...*).

Ejemplos: Estudiantes de una clase, huéspedes de un hotel, habitantes de una ciudad...

MUESTRA: Parte de la población, utilizada cuando el tamaño población es muy grande.

Ejemplos: 10 estudiantes de una clase, parte de los huéspedes de un hotel, algunos habitantes de una ciudad...

CARÁCTER ESTADÍSTICO: Aspecto estudiado en una población.

Tipos:

- **Cuantitativo:** Se puede expresar con un número. *Ejemplo: peso*
- **Cualitativo:** No se puede expresar con un número. *Ejemplo: Deporte que practican*

TABLA DE FRECUENCIAS:

- **FRECUENCIA ABSOLUTA:** Número de veces que se repite un dato
- **FRECUENCIA RELATIVA:** $\frac{\text{Frecuencia absoluta de un dato}}{\text{Número total de datos}}$

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS:

- **DIAGRAMA DE BARRAS:** Representa la frecuencia absoluta de los datos con barras.
 - **Eje horizontal:** los datos. **IMPORTANTE:** Sólo los datos
 - **Eje vertical:** la frecuencia absoluta. **IMPORTANTE:** Números ordenados



- **DIAGRAMA DE LÍNEAS o POLÍGONO DE FRECUENCIAS:** Se forma a partir del diagrama de barras, uniendo el punto medio de la parte superior de cada barra.
- **DIAGRAMA DE SECTORES:** Representa la frecuencia absoluta de los datos con sectores de un círculo.

$$\text{Grados del sector} = \frac{360^\circ \cdot \text{frecuencia absoluta}}{\text{número total de datos}} = 360^\circ \cdot \text{Frecuencia relativa}$$

SESIÓN 2

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS:

- **MEDIA (o MEDIA ARITMÉTICA SIMPLE):** Cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.

$$\text{Media} = \frac{\text{Suma de datos}}{\text{Número total de datos}} = \frac{\text{Dato1} \cdot \text{Fa1} + (\text{Dato2} \cdot \text{Fa2}) + \dots}{\text{Número total de datos}}$$

- **MEDIA PONDERADA:** Cociente entre la suma del producto de cada dato por su peso y la suma de los pesos.

$$\text{Media ponderada} = \frac{\text{Suma de cada dato por su peso}}{\text{Suma de los pesos}} = \frac{(\text{Dato 1} \cdot \text{peso1}) + (\text{dato2} \cdot \text{peso2}) + \dots}{\text{Peso1} + \text{peso2} + \dots}$$

SESIÓN 3

- **MODA:** El dato con mayor frecuencia (el dato que más se repite).
¡ATENCIÓN! Puede haber más de una.
- **RANGO (o RECORRIDO):** Diferencia (resta) entre el mayor dato y el menor.

$$\text{Rango} = \text{Mayor dato} - \text{menor dato}$$

C. Actividades adicionales

Hoja 1

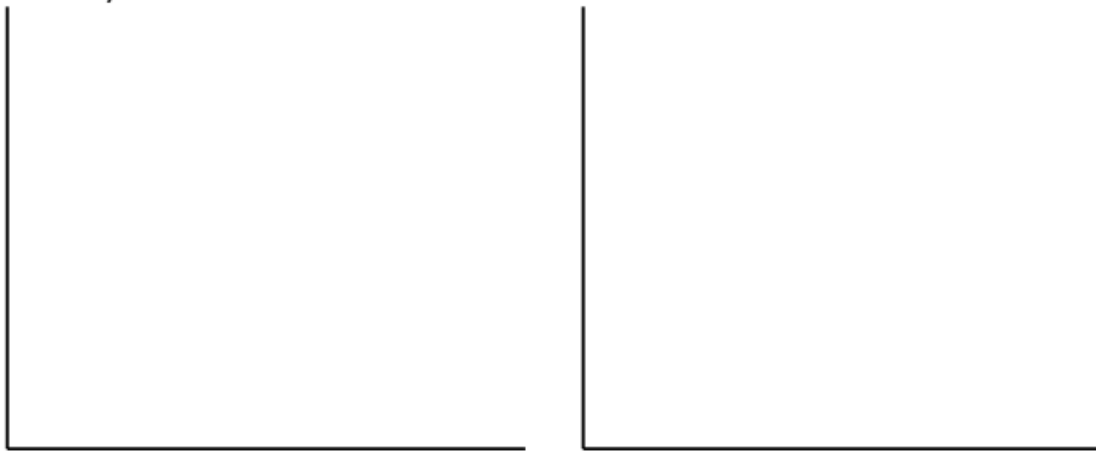
Nombre: _____

1) CUESTIONARIO

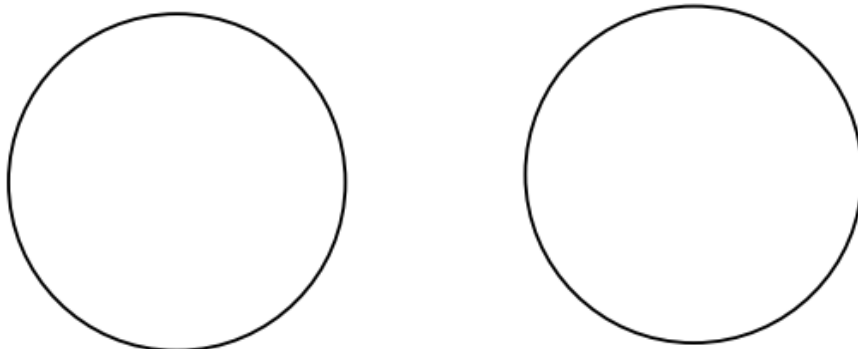
- Color favorito: _____
- Número de pie: _____
- Número de primos y primas: _____
- Una ciudad de España que te gustaría ver: _____
- Edad: _____

2) TABLA DE FRECUENCIAS

3) DIAGRAMA DE BARRAS



4) DIAGRAMA DE SECTORES



Hoja 2

Nombre:

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

En la final de un concurso de la tele un jurado puntúa a cada participante del 1 al 5.

Las puntuaciones han sido las siguientes:

Puntuación	Frecuencia absoluta
1	2
4	1

- ¿Cuál es la **media**?

- Si un participante que ha obtenido un 1 del jurado (que cuenta un 40%) y un 5 del público (que cuenta un 60%), ¿cuál será su **media ponderada** o puntuación final?

- ¿Cuál es la **moda**?

- ¿Cuál es el **rango**?

Hoja 3

EJERCICIO DE REPASO DE CONTENIDOS ESTADÍSTICA

El tutor de un grupo ha apuntado las edades de sus alumnos:

14, 13, 14, 13, 13, 13, 12, 14, 12, 14

- ¿Cuál es la **población**?
- ¿Qué **carácter estadístico** se está estudiando?
- ¿De qué **tipo** es ese carácter?
- Construye la **tabla de frecuencias**

- Dibuja su **diagrama de barras** y su **diagrama de líneas** (o polígono de frecuencias)

- ¿Cuál es la **media**?

- ¿Cuál es la **moda**?

- ¿Cuál es el **rango**?

Fotocopias

9. Estadística y probabilidad

1 Experiencias y resultados: frecuencias

- La **frecuencia absoluta** es el número de veces que aparece un determinado valor en un estudio estadístico.
- La **frecuencia relativa** de un determinado valor es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos.

377 Las notas de un grupo de alumnos en un examen de Matemáticas han sido las siguientes.

9 5 6 8 4 7 8 9 3 3 7 8 8 10 6 7 8 5 7 3

Construye una tabla con las frecuencias absolutas y relativas. Calcula la suma de las frecuencias relativas.

El número total de datos es 20.

Notas	3	4	5	6	7	8	9	10
F. absolutas	3	1	2	2	4	5	2	1
F. relativas	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{1}{20} = 0,05$	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{4}{20} = 0,2$	$\frac{5}{20} = 0,25$	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{1}{20} = 0,05$

La suma de las frecuencias relativas es: $0,15 + 0,05 + 0,1 + 0,2 + 0,25 + 0,1 + 0,05 = 1$.

378 En un estudio a 75 personas sobre el uso de gafas o lentillas se ha obtenido que 15 de ellas usan gafas; 21, lentillas, y 39, ninguna de las dos. Calcula sus frecuencias relativas y luego súmalas.

Uso	Gafas	Lentillas	Nada	Suma
F. absolutas				
F. relativas				

379 En un concesionario de automóviles se vendieron durante un año coches de los siguientes colores: blanco, 140; gris, 100; azul, 90; otros, 70. Completa la tabla de frecuencias.

Colores	F. absolutas	F. relativas
Suma		

380 En un estudio con 100 personas sobre su estado civil se han obtenido los siguientes datos.

Estado civil	Mujeres	Hombres
Soltero	14	12
Casado	17	13
Viudo	9	3
Separado	5	7
Divorciado	9	11

Calcula las siguientes frecuencias.

Ejemplo Frecuencia relativa de casados.

$$F. \text{ relativa: } \frac{F. \text{ absoluta casados}}{N.^\circ \text{ total de personas}} = \frac{\text{Hombres y mujeres casados}}{N.^\circ \text{ total de personas}} = \frac{17 + 13}{100} = \frac{30}{100} = 0,3$$

- Frecuencia absoluta de casados.
- Frecuencia absoluta de mujeres viudas.
- Frecuencia relativa de hombres.
- Frecuencia relativa de mujeres separadas.

381 Al realizar una encuesta a 200 alumnos de un centro escolar sobre el gusto por las matemáticas se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias relativas.

Poco	Regular	Bastante	Mucho
0,45	0,25	0,2	0,1

Calcula sus frecuencias absolutas.

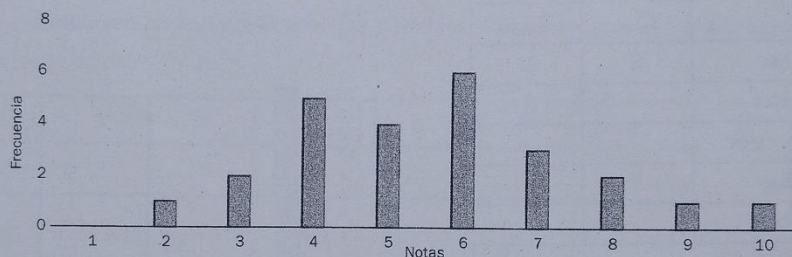
Ejemplo Poco: $\frac{F. \text{ absoluta}}{200} = 0,45 \Rightarrow F. \text{ absoluta} = 0,45 \cdot 200 = 90 \text{ alumnos}$

9. Estadística y probabilidad

2 Tablas y gráficas estadísticas

- Cuando queremos obtener información de un conjunto de datos, recurrimos a la estadística. Los datos se reúnen en **tablas estadísticas**, también llamadas **tablas de valores** o **tablas de frecuencias**. Por ejemplo, los datos pueden ser las notas que han obtenido los alumnos de una clase, y las frecuencias, el número de alumnos que han obtenido cada nota.
- Los datos se pueden representar en gráficos estadísticos. Los más usuales son: el **diagrama de barras**, el **polígono de frecuencias** y el **diagrama de sectores**.

382 El siguiente diagrama de barras representa las notas obtenidas por un grupo de alumnos en la asignatura de Ciencias de la Naturaleza. Construye su tabla de valores.

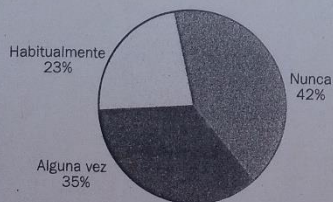


Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de alumnos	0	1	2	5	4	6	3	2	1	1

383 Las notas del segundo examen de Lengua castellana y Literatura hecho a 25 alumnos han sido: 5, 6, 4, 1, 7, 10, 5, 6, 5, 5, 4, 6, 4, 2, 5, 3, 9, 4, 5, 7, 2, 4, 5, 8, 6. Completa su tabla de valores.

Nota										
N.º de alumnos										

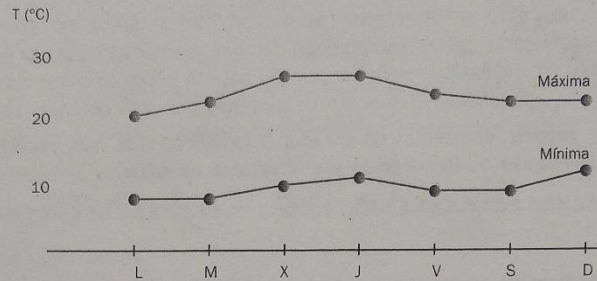
384 El siguiente diagrama de sectores muestra los datos obtenidos al preguntar a 500 personas si consumen productos de comercio justo.



a) ¿Cuántas personas los consumen habitualmente?

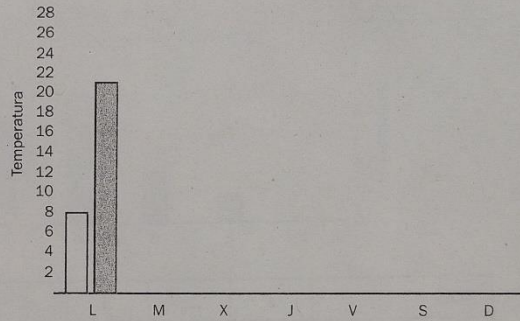
b) ¿Cuántas no consumen nunca estos productos?

385 Se ha representado en sendos polígonos de frecuencias las temperaturas mínima y máxima, en grados centígrados, que ha marcado un termómetro durante una semana.

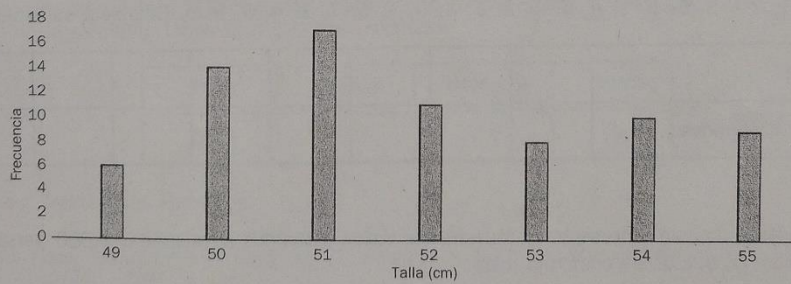


Completa la tabla de valores y el diagrama de barras de los datos.

	$T_{\text{mínima}}$	$T_{\text{máxima}}$
Lunes	8	21
Martes		
Miércoles		
Jueves		
Viernes		
Sábado		
Domingo		



386 Este diagrama de barras muestra la talla de los recién nacidos en un hospital durante una semana.



Construye la tabla de valores correspondiente a estos datos.

D. Prueba corta

Nombre:

1º ESO Matemáticas Básicas

PRUEBA CORTA ESTADÍSTICA

El profesor de matemáticas le ha pasado al tutor las notas de sus alumnos en la 3ª evaluación:

3, 5, 7, 8, 5, 4, 10, 8, 5, 4.

- ¿Cuál es la **población**?
- ¿Qué **carácter estadístico** se está estudiando?
- ¿De qué **tipo** es ese carácter?
- Construye la **tabla de frecuencias**

- Dibuja su **diagrama de barras** y su **diagrama de líneas** (o polígono de frecuencias)
- ¿Cuál es la **media**?
- ¿Cuál es la **moda**?
- ¿Cuál es el **rango**?

E. Ejercicios de repaso: operaciones elementales

1. Quita paréntesis;

- a) $+(-5)$ d) $-(-4)$ g) $-(+6)$
 b) $-(+8)$ e) $+ (+12)$ h) $+(-7)$
 c) $-[-(-3)]$ f) $-[+(-15)]$ i) $-[-(+7)]$

2. Calcula:

- a) $12 - 8 + 4 - 9 - 3 + 10$
 b) $5 - 9 - 7 + 4 - 6 + 8$
 c) $-1 - 3 + 5 - 8 - 4 - 3 + 2$
 d) $-6 - 9 + 4 + 12 - 15 + 21$
 e) $(-5) - (-5) - (+5)$
 f) $(-12) + (+6) - (-7)$
 g) $(+6) + (-2) - (+5) - (-7)$
 h) $(+18) - (-11) - (+10) + (-14)$
 i) $(-8) - (-1) - (+3) + (-5) + (+9)$
 j) $(+2) - (+12) + (-11) - (-15) - (-5)$

3. Realiza las siguientes operaciones:

- a) $10 - (8 + 4)$
 b) $6 - (3 - 12)$
 c) $(5 + 7) - (2 - 8)$
 d) $18 + (3 - 5 + 2 - 8)$
 e) $15 - (8 - 2 - 6 + 1)$
 f) $(5 - 3 + 2) - (10 - 5 - 3 + 1)$
 g) $(4 - 6) - [(-2) + (-7)]$
 h) $(-9) + [(-4) - (-2) + (-3)]$
 i) $(+12) - [(+2) + (-7) - (+14)]$
 j) $[(-12) - (-20)] - [(+6) + (5 - 9) - (16 - 8 - 11)]$

4. Calcula:

- a) $20 + 5 \cdot (6 - 9)$
 b) $18 - 3 \cdot (4 + 2)$
 c) $4 \cdot (2 - 6) - 5 \cdot (3 - 7)$
 d) $150 : (7 - 12)$
 e) $(35 - 15) : (5 - 8)$
 f) $(6 - 2 - 10) : (5 - 11)$
 g) $(-2) \cdot (+7) + (+5) \cdot (+6)$
 h) $(+4) \cdot (-20) - (+2) \cdot (-40)$
 i) $(+5) \cdot (+10) - (+4) \cdot (-20)$
 j) $(+5) \cdot [(-3) + (+7)]$

5. Calcula:

- a) $(-2) \cdot [8 - (+4) - (-10)]$
 b) $[(-6) - (-3)] \cdot [(+5) - (-2)]$
 c) $(-5) \cdot [(-5) + (+2) - (4 + 6 - 1)]$
 d) $(-3) \cdot (+2) - [(-5) + (-7) - (-1)] \cdot (-3)$
 e) $3 \cdot [(+4) + (-6)] - (-2) \cdot [8 - (+4)]$
 f) $6 + (3 - 5 + 4) \cdot 2 - 3 \cdot (6 - 9 + 8)$
 g) $6 \cdot 4 - 5 \cdot 6 - 2 \cdot 3$
 h) $15 - 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3$
 i) $(+4) \cdot (1 - 9 + 2) : (-3)$
 j) $(-12 - 10) : (-2 - 6 - 3)$

6. Opera estas expresiones:

- a) $3 - [(5 - 8) - (3 - 6)]$
 b) $1 - (3 - [4 - (1 - 3)])$
 c) $(2 + 7) - (5 - [6 - (10 - 4)])$
 d) $13 - [8 - (6 - 3) - 4 \cdot 3] : (-7)$
 e) $5 \cdot (8 - 3) - 4 \cdot (2 - 7) - 5 \cdot (1 - 6)$
 f) $12 \cdot (12 - 14) - 8 \cdot (16 - 11) - 4 \cdot (5 - 17)$
 g) $18 - 40 : (5 + 4 - 1) - 36 : 12$
 h) $4 + 36 : 9 - 50 : [12 + (17 - 4)]$
 i) $48 : [5 \cdot 3 - 2 \cdot (6 - 10) - 17]$
 j) $3 \cdot 4 - 15 : [12 + 4 \cdot (2 - 7) + 5]$

7. Efectúa:

- a) $2^2 - 4^2 : 8 + 3$
 b) $6^2 : 4 - 1^3 - 4^2 : 2 - 3^2$
 c) $2 \cdot 3^2 - 4^2 : 2 + 3^2 - 1^4$
 d) $3 \cdot 41 - 4^2 - 5 + 1 - 2^3$
 e) $20 + [3 \cdot 4 - (17 - 3 \cdot 2^2)] \cdot 2$
 f) $10 + 8 \cdot 3^2 - 5 \cdot (27 - 2^2 \cdot 3)$
 g) $18 - [2 \cdot (8 - (29 - 3 \cdot 2^3)) - 4]$

8. Calcula:

- a) $(-3)^2 - (-2)^2 + (-4)^2 : 2^2$ d) $5^2 + (-3^2) + 2 \cdot (-2)^3$
 b) $20 - 3 \cdot (-4)^3 + 6 \cdot (-2)^2$ e) $-2 \cdot 2^3 + 3 \cdot (-3)^3$
 c) $(-3)^2 - 6 \cdot 2^2 + (-3)^3 : (2 \cdot 3)$ f) $12 - (2^2 - 10^2 : 5) + (-6)^2$

Realiza las siguientes operaciones con fracciones.

9

a) $\left(\frac{4}{6} + \frac{3}{6}\right) - \frac{1}{3} =$

b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{6}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right) =$

c) $\left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{10} =$

d) $\left(1 - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{2}{10} - 4\right) =$

10 Resuelve las multiplicaciones y divisiones siguientes.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} =$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} =$

c) $\frac{13}{5} : \frac{5}{10} =$

d) $\frac{2}{9} \cdot 3 \cdot \frac{5}{4} =$

e) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} : \frac{2}{3} =$

f) $\left(\frac{2}{12} \cdot \frac{6}{4}\right) : \left(\frac{3}{4} : \frac{3}{2}\right) =$

11 Expresa el resultado en forma de fracción:

a) $\frac{1}{8} \left(3 - \frac{2}{5}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{7}{4} - 1\right) =$

f) $\left(-\frac{1}{6} - 1\right) \cdot \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{8}\right) + \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4} + 1\right)\right] =$

b) $\frac{4}{5} - \frac{7}{5} : \frac{2}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{10} =$

g) $\frac{7}{2} \left(\frac{3}{8} - \frac{4}{3}\right) + \frac{2}{5} : \left(\frac{5}{4} - 2\right) =$

c) $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3}{4} : \frac{2}{5}\right) - 1 =$

h) $3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{7}{4} - 1\right) =$

d) $\frac{6}{9} \left(\frac{1}{8} : \frac{1}{3}\right) - \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{3} \left(2 - \frac{3}{2}\right)\right] =$

i) $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} - \left[\frac{5}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{3} - \frac{1}{9}\right] =$

e) $\frac{6}{5} \left(\frac{9}{4} - \frac{7}{3}\right) - \left(\frac{7}{2} - 3\right) : \left(-2 + \frac{1}{4}\right) =$

12 Resuelve:

a) $1 + \frac{3}{2} : \frac{3}{5} =$

b) $\frac{7}{22} \cdot \frac{33}{9} + \frac{10}{11} =$

c) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} =$

d) $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) =$

e) $\frac{5}{24} : \left(\frac{7}{42} + \frac{9}{14}\right) =$

f) $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) : \frac{2}{6} =$

g) $\left(\frac{3}{10} + \frac{12}{4}\right) : \left(\frac{13}{9} - \frac{4}{8}\right) =$

h) $\left(\frac{9}{4} - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{17}{4} - \frac{15}{6}\right) =$

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:

Gustavo Ochoa Lezaun, Departamento de Matemáticas