

Proceso de enseñanza de funciones en 2º de ESO

Trabajo Fin de Máster
Ámbito Matemáticas

Jose Javier Beldad Ramírez
UNIVERSIDAD PÚBLICA NAVARRA

ÍNDICE

	Página
Introducción general	1
Parte I: Las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto	3
1. Las funciones en el currículo vigente	7
1.1.Contenidos en Educación Primaria	7
1.2.Contenidos en ESO	8
2. Los criterios de evaluación de las funciones en el currículo vigente	15
2.1.Criterios de evaluación en Educación Primaria	15
2.2.Criterios de evaluación en ESO.....	16
3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones en el currículo vigente	23
3.1.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º de Educación Primaria	23
3.2.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de ESO	25
3.3.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO	27
3.4.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO	29
3.5.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO	31
4. Resultados	35
4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto	35
4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo	36
Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las funciones en 2º de ESO	39
5. Las funciones en el libro de texto de referencia	43
5.1. Objetos matemáticos involucrados	43
5.1.1. <i>Lenguaje</i>	43
5.1.2. <i>Conceptos</i>	44
5.1.3. <i>Procedimientos</i>	44
5.1.4. <i>Situaciones</i>	44
5.1.5. <i>Propiedades</i>	45
5.2. Análisis global de la unidad didáctica	45
5.3. Otros aspectos relevantes	50

6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica	51
6.1. Dificultades	51
6.2. Errores y su posible origen	55
7. El proceso de estudio	59
7.1. Distribución del tiempo de la clase	59
7.2. Actividades adicionales planificadas	63
7.3. La tarea: actividad autónoma del alumnos prevista	67
8. Experimentación	71
8.1. Muestra y diseño de la experimentación	71
8.2. El cuestionario	73
8.3. Cuestiones y comportamientos esperados	74
8.4. Resultados	75
8.5. Discusión de los resultados	82
Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas	85
Referencias	87
Anexo	89
A. Unidad didáctica del libro de texto	91

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la evolución en la comprensión del tema de funciones en los alumnos de 2º de ESO mediante un proceso de enseñanza.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Educación Primaria, en Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre el tema de funciones que se ha puesto en marcha en un aula de 2º de ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Las funciones en el currículum vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Educación Primaria y en los dos ciclos de ESO.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a las funciones en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 2º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

Las funciones en el currículo vigente

En este capítulo presentamos y analizamos someramente cuáles son los contenidos relativos a funciones que se encuentran presentes en el currículo vigente, abarcando desde 6º de Educación Primaria (Boletín Oficial de Navarra, Decreto 60/2014) hasta 4º de ESO (Boletín Oficial de Navarra, Decreto 24/2015). Para ello, se utilizarán los siguientes descriptores: tipos de funciones, propiedades de funciones, representación gráfica e interpretación, relación de las matemáticas con la vida cotidiana y uso de herramientas tecnológicas.

1.1. Contenidos en Educación Primaria.

Puesto que en el currículo vigente no hay un bloque específico referente a funciones en Educación Primaria tal como ocurre en ESO o Bachiller, nos centraremos en mencionar los contenidos matemáticos que guarden cierta relación con este tema.

6º de Educación Primaria

Descriptor	Contenido
Representación gráfica e interpretación	Bloque 4. Geometría. <ul style="list-style-type: none"> – Sistema de coordenadas cartesianas – Descripción de posiciones y movimientos – La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas
Propiedades de funciones	_____
Tipos de funciones	Bloque 2. Números y álgebra. <ul style="list-style-type: none"> – Proporcionalidad directa.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	Bloque 2. Números y álgebra. <ul style="list-style-type: none"> – Resolución de problemas en la vida cotidiana.
Uso de herramientas tecnológicas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. <ul style="list-style-type: none"> – Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para obtener información, realizar cálculos numéricos, etc.

1.2. Contenidos en ESO.

En esta sección se analiza el currículo correspondiente a los dos ciclos de ESO, abarcando el primer ciclo a 1º, 2º y 3º de ESO y el segundo ciclo a 4º de ESO, distinguiendo las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y a las enseñanzas aplicadas.

1º de ESO

Descriptor	Contenido
Representación gráfica e interpretación	Bloque 4. Funciones. – Representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados
Propiedades de funciones	Bloque 4. Funciones. – Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
Tipos de funciones	Bloque 2. Números y álgebra. – Proporcionalidad directa.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. – Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
Uso de herramientas tecnológicas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. – Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.

2º de ESO

Descriptor	Contenido
Representación gráfica e interpretación	Bloque 4. Funciones. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta
Propiedades de funciones	Bloque 4. Funciones. Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.

Tipos de funciones	<p>Bloque 2. Números y álgebra.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Raíces cuadradas. – Proporcionalidad directa e inversa. <p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Funciones lineales/afines
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

3º de ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)

Descriptor	Contenido
Representación gráfica e interpretación	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. – Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
Propiedades de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
Tipos de funciones	<p>Bloque 2. Números y álgebra.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Raíces cuadradas <p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Funciones lineales/afines. – Funciones cuadráticas.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.

Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 3. Geometría.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.
----------------------------------	--

3º de ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas)

Descriptor	Contenido
Representación gráfica e interpretación	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. – Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
Propiedades de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica.
Tipos de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Funciones cuadráticas.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 3. Geometría.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

4º de ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)

Descriptor	Contenido
Representación gráfica e interpretación	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
Propiedades de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.

Tipos de funciones	<p>Bloque 2. Números y álgebra.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Logaritmos. <p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Funciones lineales/afines. – Funciones cuadráticas.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Reconocimiento de otros modelos: aplicación a contextos y situaciones reales.
Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 3. Geometría.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

4º de ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas)

Descriptor	Contenido
Representación gráfica e interpretación	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
Propiedades de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
Tipos de funciones	<p>Bloque 2. Números y álgebra.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Proporcionalidad directa e inversa. <p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Funciones lineales/afines. – Funciones cuadráticas.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales.
Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 3. Geometría.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

Podemos observar que, en los dos primeros años de ESO los alumnos tienen un primer contacto con el concepto de función, así como con algunas de las funciones más sencillas y comunes. Asimismo, comienzan a ver distintas representaciones de funciones.

Tanto en la rama de las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas como en la de las orientadas a las enseñanzas aplicadas, podemos ver que los contenidos de 3º y 4º de ESO son muy similares, presentando diferencias mínimas. En estos cursos el alumno ya ve de una forma más directa la relación de lo estudiado con la realidad, además de un estudio más completo de las funciones tanto gráfica como analíticamente.

A modo de resumen, a continuación, se añade una tabla que recoge la evolución de cinco descriptores desde 6º de Educación Primaria hasta 4º de ESO, sin hacer distinción entre enseñanzas académicas o aplicadas.

	Primaria	ESO			
Descriptor	6º	1º	2º	3º	4º
Representación gráfica e interpretación	Bloque 4. Geometría. Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimiento. La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.	Bloque 4. Funciones. Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.	Bloque 4. Funciones. Interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y viceversa.	Bloque 4. Funciones. Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.	Bloque 4. Funciones. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
Propiedades de funciones	—————	Bloque 4. Funciones. El concepto de función: tipo de variables. Crecimiento. Continuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos.	Bloque 4. Funciones. El concepto de función: tipo de variables. Crecimiento. Continuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos.	Bloque 4. Funciones. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica.	Bloque 4. Funciones. Tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
Tipos de funciones	Bloque 2. Números y álgebra. Proporcionalidad directa.	Bloque 2. Números y álgebra. Proporcionalidad directa.	Bloque 2. Números y álgebra. Funciones inversamente proporcionales. Bloque 4. Funciones. Funciones lineales/afines.	Bloque 4. Funciones. Funciones lineales/afines. Cuadráticas.	Bloque 4. Funciones. Funciones lineales/afines. Cuadráticas.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	Bloque 2. Números y álgebra. Resolución de problemas en la vida cotidiana.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	Bloque 2. Números y álgebra. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.	Bloque 4. Funciones. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana.	Bloque 4. Funciones. Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.
Uso de herramientas tecnológicas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para obtener información, realizar cálculos numéricos, etc.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.	Bloque 4. Funciones. Utilización de calculadores gráficos y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.	Bloque 3. Geometría. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	Bloque 3. Geometría. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

Capítulo 2

Los criterios de evaluación de las funciones en el currículo vigente

En este capítulo presentamos y analizamos someramente cuales son los criterios de evaluación presentes en el tema de funciones en el currículo vigente, abarcando desde 6º de Educación Primaria hasta 4º de ESO.

Utilizaremos los mismos descriptores que en el capítulo anterior para hacer posteriormente una comparación con los correspondientes contenidos.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria.

Debido a la inexistencia de un bloque específico referente a funciones en Educación Primaria, nos centraremos en mencionar los criterios de evaluación para los contenidos expuestos en la sección anterior.

6º de Educación Primaria

Descriptor	Criterio de evaluación
Representación gráfica e interpretación	Bloque 4. Geometría. <ul style="list-style-type: none"> – Reconocer los ejes de coordenadas en el plano. – Representar pares ordenados en un sistema cartesiano. Interpretar una representación espacial.
Propiedades de funciones	—————
Tipos de funciones	Bloque 2. Números y álgebra. <ul style="list-style-type: none"> – Iniciarse en la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	Bloque 2. Números y álgebra. <ul style="list-style-type: none"> – Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas.
Uso de herramientas tecnológicas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. <ul style="list-style-type: none"> – Utilizar las herramientas tecnológicas y estrategias para el cálculo, para conocer los principios matemáticos y resolver problemas.

En 6º de Educación Primaria podemos ver cómo están involucrados los contenidos mencionados en el capítulo anterior, ya que para una correcta interpretación de las representaciones espaciales necesitamos utilizar un sistema de coordenadas cartesianas y saber identificar los puntos en el plano.

2.2. Criterios de evaluación en ESO.

En esta sección nos centraremos de nuevo en los dos ciclos de ESO distinguiendo las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y aplicadas, para finalmente, hacer una comparación con los contenidos mencionados en el capítulo anterior.

1º de ESO

Descriptor	Criterios de evaluación
Representación gráfica e interpretación	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas. – Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.
Propiedades de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.
Tipos de funciones	<p>Bloque 2. Números y álgebra.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Utilizar los números, sus propiedades y operaciones para recoger, transformar e intercambiar información y resolver los problemas relacionados con la vida real
Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos.

2º de ESO

Descriptor	Criterios de evaluación
Representación gráfica e interpretación	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Utilizar las diferentes formas de presentación de funciones.
Propiedades de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.

Tipos de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Reconocer, representar y analiza las funciones lineales o afín, utilizándolas para resolver problemas.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 2. Números y álgebra.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Utilizar los números, sus propiedades y operaciones para recoger, transformar e intercambiar información y resolver los problemas relacionados con la vida real
Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos.

En 1º de ESO podemos ver que todos los criterios de evaluación son conforme a los contenidos que recoge el currículo para el mismo curso. En cambio, si nos fijamos en 2º de ESO, podemos observar que en el currículo viene un contenido referente al uso de las TIC's, el cual no tiene ningún criterio de evaluación.

3º de ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)

Descriptor	Criterios de evaluación
Representación gráfica e interpretación	<p>Bloque 5. Estadística y probabilidad.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada.
Propiedades de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.
Tipos de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo.

Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilizar las TIC's de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante.
----------------------------------	---

3º de ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas)

Descriptor	Criterios de evaluación
Representación gráfica e interpretación	<p>Bloque 5. Estadística y probabilidad.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada.
Propiedades de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.
Tipos de funciones	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo.
Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilizar las TIC's de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante.

Podemos observar que los criterios de evaluación de ambos cursos son exactamente los mismos y que, además, reflejan los contenidos mencionados en el capítulo anterior.

4º de ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)

Descriptor	Criterios de evaluación
Representación gráfica e interpretación	Bloque 5. Estadística y probabilidad. <ul style="list-style-type: none"> – Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.
Propiedades de funciones	Bloque 4. Funciones. <ul style="list-style-type: none"> – Interpretar la tasa de variación media (TVM) a partir de una gráfica, de datos numéricos o los coeficientes de la expresión algebraica.
Tipos de funciones	Bloque 4. Funciones. <ul style="list-style-type: none"> – Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinando el tipo de función que puede representarlas.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	Bloque 4. Funciones. <ul style="list-style-type: none"> – Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales.
Uso de herramientas tecnológicas	Bloque 3. Geometría. <ul style="list-style-type: none"> – Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

4º de ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas)

Descriptor	Criterios de evaluación
Representación gráfica e interpretación	Bloque 5. Estadística y probabilidad. <ul style="list-style-type: none"> – Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.
Propiedades de funciones	Bloque 4. Funciones. <ul style="list-style-type: none"> – Aproximar e interpretar la TVM a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.
Tipos de funciones	Bloque 4. Funciones. <ul style="list-style-type: none"> – Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas.

Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	<p>Bloque 4. Funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.
Uso de herramientas tecnológicas	<p>Bloque 3. Geometría.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

Podemos observar que los criterios de evaluación de ambos cursos son exactamente los mismos y que, además, reflejan los contenidos mencionados en el capítulo anterior.

De nuevo, a modo de resumen, recogemos la evolución de los criterios de evaluación a lo largo de estos cursos en una tabla, relacionándolos con los descriptores mencionados en el capítulo anterior.

	Primaria	ESO			
Descriptor	6º	1º	2º	3º	4º
Representación gráfica e interpretación	Bloque 4. Geometría. Reconocer los ejes de coordenadas en el plano. Representar pares ordenados en un sistema cartesiano. Interpretar una representación espacial.	Bloque 4. Funciones. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas. Manejar las distintas formas de presentar una función.	Bloque 4. Funciones. Utilizar las diferentes formas de presentación de funciones.	Bloque 5. Estadística y probabilidad. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada.	Bloque 5. Estadística y probabilidad. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.
Propiedades de funciones	—————	Bloque 4. Funciones. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.	Bloque 4. Funciones. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.	Bloque 4. Funciones. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.	Bloque 4. Funciones. Interpretar la TVM a partir de una gráfica, de datos numéricos o los coeficientes de la expresión algebraica.
Tipos de funciones	Bloque 2. Números y álgebra. Iniciarse en la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información.	Bloque 2. Números y álgebra. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen.	Bloque 4. Funciones. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales o afín, utilizándolas para resolver problemas.	Bloque 4. Funciones. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	Bloque 4. Funciones. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinando el tipo de función que puede representarlas.
Relación de las matemáticas con la vida cotidiana	Bloque 2. Números y álgebra. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. Utilizar los números, sus propiedades y operaciones para recoger, transformar e intercambiar información y resolver los problemas relacionados con la vida real	Bloque 2. Números y álgebra. Utilizar los números, sus propiedades y operaciones para recoger, transformar e intercambiar información y resolver los problemas relacionados con la vida real	Bloque 4. Funciones. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo.	Bloque 4. Funciones. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales.
Uso de herramientas tecnológicas	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. Utilizar las herramientas tecnológicas y estrategias para el cálculo, para conocer los principios matemáticos y resolver problemas.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos.	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes. Utilizar las TIC's de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante.	Bloque 3. Geometría. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

Capítulo 3

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones en el currículo vigente


En este capítulo analizamos tanto el curso que hemos tenido a nuestro cargo en el Prácticum II como los dos cursos inferiores y superiores a él, siendo un total de 5 cursos, en los que escogemos una serie de actividades, de forma justificada.

Antes de mostrar las actividades elegidas junto a su descripción y justificación, se incluye una breve explicación de los conceptos de ejercicio, problema, cuestión y situación, que ayudará a entender mejor este capítulo.

- Ejercicio: trabajo práctico que en el aprendizaje de ciertas disciplinas sirve de complemento y comprobación de la enseñanza teórica.
- Problema: planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.
- Cuestión: pregunta que se hace con intención dialéctica para averiguar la verdad de algo.
- Situación: espacio de interrogantes que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y aplicación significativa de los conceptos para plantear y resolver problemas.


3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º de Educación Primaria.

Como hemos mencionado en capítulos anteriores, en 6º de Educación Primaria no hay un bloque específico dedicado a las funciones, por lo que seleccionamos algunas actividades que están relacionadas con el tema de funciones. El libro del cual hemos seleccionado las actividades pertenece a la editorial Anaya.

Actividad tipo	Problema
Descripción	En este curso se da una introducción a la función raíz cuadrada explicando el concepto de raíz con los ejemplos más sencillos.
Ejemplo	<p>8 Si hemos utilizado 100 baldosas de 30 cm de lado para enlosar una cocina que tiene el suelo cuadrado, ¿cuáles son las dimensiones del suelo de la cocina?</p>  <p>https://es.slideshare.net/JUDIMENDIPRL/matematicas-6-anaya</p>

El principal inconveniente que encontramos en este problema es que el enunciado dice que las baldosas tienen 30 cm de lado, haciendo mención a que son baldosas cuadradas, pero luego aparece una ilustración en la que se pueden ver baldosas que son claramente rectangulares, habiendo una incongruencia entre el enunciado y el dibujo, sin hacer mención a que claramente no puede haber 100 baldosas guardadas ahí.

Esto puede ser un problema en este nivel de educación ya que los alumnos no tienen todavía una mente completamente abstracta, lo que puede acarrear en un trabajo extra para el alumno.

Actividad tipo	Ejercicio
Descripción	Se explica de forma gráfica la demostración del área del triángulo y a continuación se plantean una serie de actividades para aplicar lo aprendido.
Ejemplo	<p>1 Calcula el área de estos triángulos:</p>  <p>https://es.slideshare.net/JUDIMENDIPRL/matematicas-6-anaya</p>

En este ejercicio se puede observar que se han tenido en cuenta muchas de las propiedades que no son características de los triángulos, como pueden ser los colores, el tipo de ángulos o la longitud de sus lados, en el sentido de que no todos los triángulos tienen que tener los mismos ángulos o las mismas medidas, siendo lo único importante el hecho de ser un polígono de 3 lados y 3 ángulos.

Sin embargo, hay una propiedad que no es característica de los triángulos a la que sí le han dado mucha importancia, y es a la posición, ya que todos los triángulos de la ilustración aparecen apoyados sobre una base.

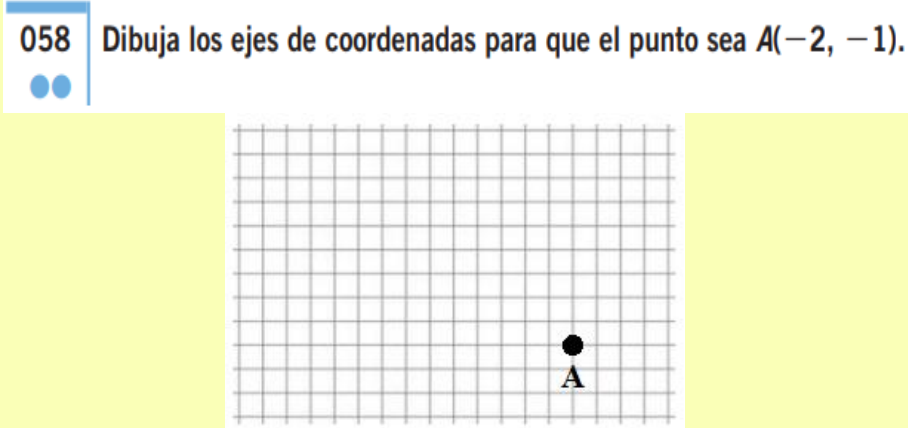
Este hecho puede acarrear en futuro un obstáculo, puesto que los alumnos pueden interpretar que todos los triángulos únicamente tienen una base y una altura.

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de ESO.

Para las actividades referentes a este curso académico, se utiliza el libro de 1º ESO de la editorial Santillana.

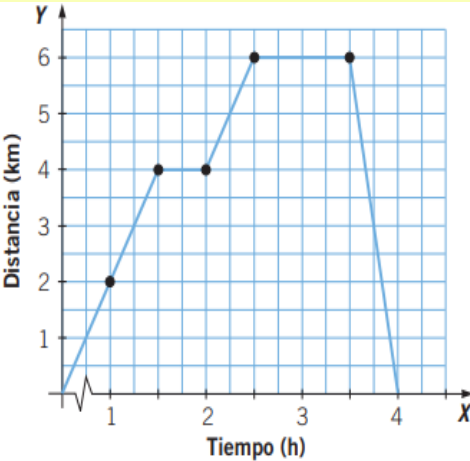
Actividad tipo	Cuestión
Descripción	Tras explicar el contenido referente a las coordenadas cartesianas, aparece una actividad en la que los alumnos deberán comprender correctamente la teoría para poder resolverla.
Ejemplo	<p>¿Qué ocurre con los puntos que tienen igual ordenada y distinta abscisa? ¿Y con los que tienen igual abscisa y distinta ordenada? Dibuja unos ejes de coordenadas y señálalo.</p> <p>https://www.edu.xunta.gal/centros/iesagraleboris/system/files/solucionario1.pdf</p>

Para resolver este ejercicio los alumnos tienen que saber el nombre de los ejes de coordenadas, y lo más probable es que tengan que ayudarse de una gráfica para poder ver la solución a la pregunta.

Actividad tipo	Ejercicio
Descripción	Actividad original en la que se pide dado un punto en el plano, dibujar los ejes cartesianos para que el punto esté bien colocado.
Ejemplo	<p>058 Dibuja los ejes de coordenadas para que el punto sea $A(-2, -1)$.</p>  <p>https://www.edu.xunta.gal/centros/iesagraleboris/system/files/solucionario1.pdf</p>

Cabe destacar este ejercicio debido a que no suelen aparecer de este estilo, ya que normalmente aparece el ejercicio contrario, en el que se dan los ejes de coordenadas y un punto el cuál tienes que representar.

Además, se ha evitado que los ejes una vez dibujados por el alumno, queden en el centro de la gráfica como normalmente aparecen en los libros de texto.

Actividad tipo	Problema
Descripción	Actividad en la que se busca una relación entre lo estudiado y la realidad, plasmando en una gráfica el camino a la compra de una persona.
Ejemplo	<p>Observa la gráfica que representa el paseo que ha dado Julio: ha salido de casa, ha ido a comprar y ha regresado.</p> <p>a) ¿Qué variables están representadas?</p> <p>b) ¿Cuánto tiempo ha durado el paseo?</p> <p>c) ¿Cuál es la distancia más lejana a la que ha ido?</p> <p>d) ¿Cuándo ha caminado más rápido, a la ida o a la vuelta?</p> <p>e) ¿Qué crees que significan los tramos horizontales?</p>  <p>https://www.edu.xunta.gal/centros/iesagraleboris/system/files/solucionario1.pdf</p>

Este problema es bastante completo ya que requiere que el alumno interprete las variables que representan los ejes de coordenadas, tanto de forma independiente como relacionando ambos.

Como observación, señalar el corte que han hecho en el eje de abscisas entre el 0 y el 1, el cual induce a confusión, ya que así parece que la gráfica entre el 0 y el 1,5 es directamente proporcional cuando realmente no lo es.

Esto se ve de forma más clara al pasar los puntos a una tabla:


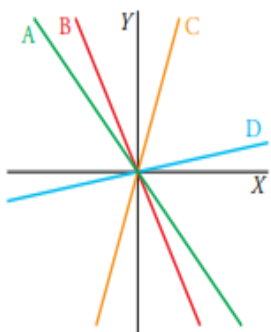
X	Y
1	2
1,5	4

Como observación final, cabe mencionar que en este libro de 1º de ESO de la editorial Santillana no aparece ninguna actividad en la que se trabajen los siguientes contenidos relativos a funciones: crecimiento y decrecimiento, continuidad, dominio, puntos de corte con los ejes y máximos y mínimos relativos. En cambio, estos contenidos si aparecen recogidos en el currículo vigente del curso.

Todos los demás contenidos aparecen recogidos en los distintos ejercicios del tema.

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO.

Para las actividades referentes a este curso académico, se ha utilizado el libro de 2º de ESO de la editorial Anaya.

Actividad tipo	Ejercicio
Descripción	Tras explicar la teoría referente a la pendiente de una recta, los alumnos tienen que saber relacionar distintas pendientes con una gráfica en la que aparecen varias rectas.
Ejemplo	<p>3.  Indica cuál de estas puede ser la pendiente de cada una de las rectas representadas a la derecha.</p> <p>a) $m = 3$ b) $m = 1/4$ c) $m = -1$ d) $m = -7/3$</p>  <p>https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf</p>

Se ha escogido este ejercicio por varios motivos:

- No aparece una cuadrícula en el plano, por lo que los alumnos no pueden valerse de contar cuadraditos para conocer la pendiente de cada recta y necesitan entender la teoría para poder resolver correctamente el ejercicio.
- Aparecen pendientes que son fracciones, por lo que puede que muchos alumnos duden o pongan mal las pendientes referentes a los apartados c) y d) si intentan resolver el ejercicio rápidamente.

Por lo que resulta ser una actividad muy útil para poder conocer si los alumnos han comprendido realmente el concepto de pendiente y sus características.

Actividad tipo	Problema
Descripción	Los alumnos tienen que poner en práctica lo aprendido en un problema que relaciona las matemáticas con el mundo real y saber interpretar una gráfica.

Ejemplo	<p>3. Esta gráfica describe la velocidad de un coche de carreras en cada lugar de ese circuito:</p> <p>a) Di en qué tramos la velocidad es creciente y en cuáles es decreciente.</p> <p>b) ¿A qué crees que se deben los aumentos y las disminuciones de velocidad?</p> <p>c) Señala el máximo y el mínimo de esta función.</p> <p>https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf</p>
---------	--

Se ha elegido este problema porque hay varios aspectos que podrían mejorarse;

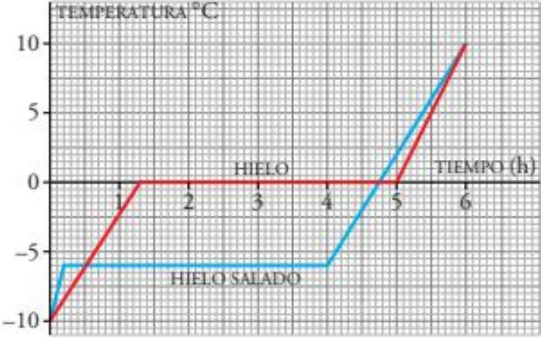
- El haber nombrado esos cuatro tramos en el dibujo y en la gráfica pueden ser muy liosos para un alumno que esté estudiando estos contenidos por primera vez, ya que puede llevar a pensar que la función es creciente entre A y B, decreciente entre B y C, creciente entre C y D, y decreciente entre D y A.
- En el apartado c) se da a entender que únicamente hay un máximo y un mínimo, por lo que podría darse el caso en el que algún alumno entienda el concepto de máximo y mínimo como absoluto, sin diferenciar que puede haber otros máximos y mínimos relativos.

Actividad tipo	Cuestión
Descripción	Una actividad sencilla que nos permite comprobar si los alumnos han entendido el concepto de función y son capaces de pensar de forma abstracta.
Ejemplo	<p>2. a) ¿Puede una recta vertical, paralela al eje Y, ser la representación gráfica de una función?</p> <p>b) ¿Y una recta horizontal?</p> <p>c) ¿Y una circunferencia?</p> <p>https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf</p>

Esta cuestión da pie a debatir en clase sobre si una circunferencia es la representación gráfica de una función, ya que según lo explicado en la teoría la respuesta es no, pero se puede hacer dudar a los alumnos para que debatan escribiéndoles la fórmula de una circunferencia y dibujándola en la pizarra, como por ejemplo $x^2 + y^2 = 4$.

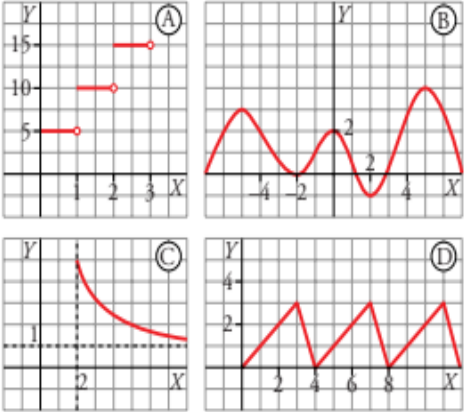
3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO.

Debido a que los dos itinerarios de 3º de ESO (tanto el de enseñanzas académicas como el de aplicadas) tienen los mismos contenidos, no haremos distinción entre ambos. Para las actividades referentes a este curso académico, hemos utilizado el libro de 3º de ESO de la editorial Anaya de enseñanzas aplicadas.

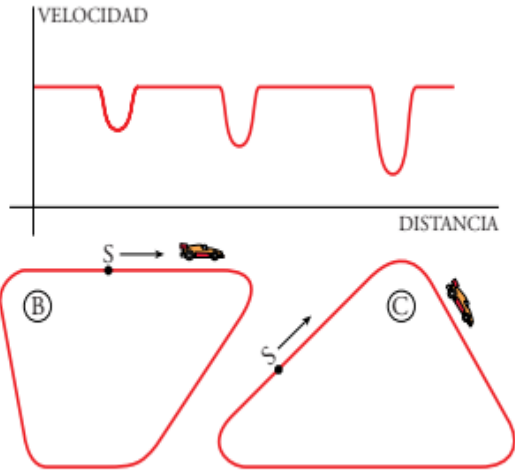
Actividad tipo	Problema
Descripción	Actividad en la que se relaciona un hecho de la vida real con las matemáticas mediante una gráfica, y los alumnos pueden entender el motivo por el que se le echa sal a las calles cuando se forma hielo.
Ejemplo	<p>6 Si sacamos del congelador hielo muy frío (a $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$, por ejemplo), su temperatura va aumentando hasta llegar a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Esta temperatura se mantiene y, cuando ya no queda hielo, aumenta hasta igualarse con la temperatura ambiente. El hielo con sal se derrite a, digamos, $-6\text{ }^{\circ}\text{C}$ (por eso se echa sal en las calles heladas), y permanece a esa temperatura durante el tiempo que tarde en derretirse. Las siguientes gráficas muestran ambas situaciones:</p>  <p>El gráfico muestra la temperatura en grados Celsius (eje vertical) frente al tiempo en horas (eje horizontal). Hay dos líneas: una roja para 'HIELO' y una azul para 'HIELO SALADO'. Ambas comienzan en $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ a las 0 h. La línea roja (HIELO) sube a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ a las 1 h, se mantiene constante hasta las 4 h, y luego sube a $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ a las 6 h. La línea azul (HIELO SALADO) sube a $-6\text{ }^{\circ}\text{C}$ a las 1 h, se mantiene constante hasta las 4 h, y luego sube a $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ a las 6 h.</p> <p>a) ¿Cuál es la temperatura del hielo normal y cuál la del hielo salado a las 3 h?</p> <p>b) ¿Cuándo empiezan a derretirse?</p> <p>c) ¿Cuánto permanecen por debajo de $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$?</p> <p>d) Si estamos a $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$ y las calles están heladas, ¿tiene sentido echarles sal? ¿Por qué?</p> <p>https://docs.google.com/a/iesboliches.org</p>

Esta actividad resulta ser muy buena para explicar a los alumnos el motivo por el cual se le echa sal a las calles cuando tienen hielo.

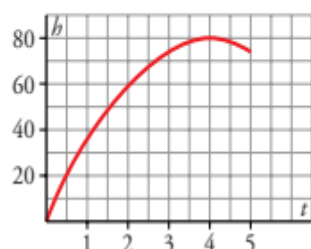
El único inconveniente que se observa es el de contar las unidades en ambos ejes, ya que si bien es cierto que en el eje de ordenadas no cuesta mucho ver que cada cuadradito equivale a $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$, en el eje de abscisas el alumno tiene que interpretar que cada cuadradito es una décima parte de hora, es decir, 6 minutos.

Actividad tipo	Ejercicio
Descripción	Actividad típica en la que los alumnos tienen que analizar distintas funciones indicando sus propiedades.
Ejemplo	<p>23 En cada una de estas gráficas, indica cuál es el dominio de definición, dónde crecen y dónde decrecen, los máximos y los mínimos. Indica también si alguna es discontinua, periódica o tiende a un valor fijo.</p>  <p style="text-align: right;">https://docs.google.com/a/iesboliches.org</p>

Se ha escogido esta actividad porque pese a ser un ejercicio tipo muy común, tiene una introducción al tema de límites, ya que al final del enunciado se pide que se indique si la gráfica tiende a un valor fijo.

Actividad tipo	Cuestión
Descripción	Actividad en la que los alumnos tienen que relacionar la realidad con una gráfica e interpretarla correctamente.
Ejemplo	<p>27 Esta gráfica muestra cómo varía la velocidad de un coche al recorrer uno de los circuitos dibujados más abajo.</p>  <p>a) ¿A cuál de los dos corresponde? b) Haz la gráfica correspondiente al otro.</p> <p style="text-align: right;">https://docs.google.com/a/iesboliches.org</p>

Se ha escogido esta actividad por la curiosidad de si los alumnos tendrían en cuenta el detalle de que no en todas las curvas se frena de la misma forma, y que esto depende de lo pronunciada que sea la curva y, por lo tanto, de si el ángulo de la curva es más o menos amplio.

Actividad tipo	Cuestión
Descripción	Actividad en la que hay que relacionar una gráfica referente a una función cuadrática con su fórmula.
Ejemplo	<p>21 Una de las siguientes ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por un balón que se lanza hacia arriba, y el tiempo, t. ¿Cuál de ellas es?</p> <p>a) $h = t^2 + 80$ b) $h = 8t - t^2$ c) $h = 40t - 5t^2$ d) $h = -4t^2 + 80t$</p>  <p>https://docs.google.com/a/iesboliches.org</p>

Se ha escogido esta actividad por varios motivos:

- En este libro solo hay dos actividades que tengan relación directa con las funciones cuadráticas.
- No todas las fórmulas empiezan con el coeficiente de mayor grado.

Por lo tanto, podemos comprobar que en este libro de texto de la editorial Anaya aparecen en mayor o menor medida actividades relacionadas con todos los contenidos del currículo vigente mencionados en la sección 1.2.

3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO.

De nuevo, debido a que los itinerarios de 4º de ESO (tanto el de enseñanzas académicas como el de aplicadas) tienen los mismos contenidos, no haremos distinción entre ambos. Para las actividades referentes a este curso académico, se ha utilizado el libro de 4º de ESO de la editorial Anaya de enseñanzas académicas.

Actividad tipo	Ejercicio
Descripción	Actividad con la que el alumno trabaja los conceptos de dominio, crecimiento, decrecimiento, corte con los ejes y máximo y mínimo de una función.

17 Observa las cuatro gráficas siguientes:

Ejemplo

a) Di cuáles son sus puntos de discontinuidad. ¿Cuál es su dominio de definición?

b) ¿En qué intervalos son crecientes y en cuáles son decrecientes?

<https://docs.google.com/a/iesboliches.org>

Aunque es un ejercicio bastante completo hay varios aspectos que considero que podrían mejorarse:

- Las gráficas aparecen demasiado juntas, lo que puede dificultar al alumno el saber con exactitud y rapidez donde se sitúan los puntos interesantes a estudiar.
- En este caso en concreto, puesto que todas las gráficas tienen en común que su dominio son todos los números reales menos los puntos de discontinuidad, algún alumno podría suponer que esto supone siempre, siendo un saber erróneo.

Actividad tipo	Problema
Descripción	Actividad en la que el alumno tiene que interpretar una gráfica que hace alusión a una situación real y responder a una serie de preguntas.

Ejemplo	<p>4 Esta gráfica muestra cómo varía la altura del agua en un depósito que se llena con una bomba y que lleva dos válvulas para regular la entrada y la salida del agua.</p> <p>a) ¿Cuál es el máximo de esta función? Explica su significado.</p> <p>b) ¿En qué puntos corta el eje de las x? ¿Qué significan esos puntos?</p> <p>c) ¿Cuál es su dominio de definición?</p> <p>d) Di en qué intervalo es creciente y en cuál es decreciente.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: right;">https://docs.google.com/a/iesboliches.org</p>
---------	--

En esta actividad aparecen recogidos muchos de los contenidos que hay en 4º de ESO, como son la interpretación de datos mediante una gráfica y la relación con situaciones reales.

Actividad tipo	Cuestión
Descripción	Actividad cuyo fin es conocer de forma rápida si los alumnos tienen bien asentados conocimientos relativos a cursos anteriores referentes a la pendiente de una recta.
Ejemplo	<p>22 Di, sin representarlas, cuáles de las siguientes rectas son paralelas:</p> <p>a) $y = \frac{2x - 1}{3}$ b) $y = \frac{1}{2}$ c) $y = 2x + 3$</p> <p>d) $y - 2x = -5$ e) $y = -7$ f) $2x - 3y = 0$</p> <p style="text-align: right;">https://docs.google.com/a/iesboliches.org</p>

En este tema la mayoría de las actividades eran ejercicios o problemas, por lo que apenas aparecen cuestiones en las actividades.

Tampoco aparece en el tema ninguna actividad relacionada con la tasa de variación media, siendo este un contenido que sí aparece en el currículo oficial para este curso académico.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo mostramos las conclusiones que se extraen del análisis realizado en los capítulos anteriores. En concreto se señalan tanto las ausencias y presencias que se han detectado en los libros de texto como la relación que hay entre estos y el currículo.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto.

En esta sección presentamos las ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto, organizando la información por cursos académicos desde 6º de Educación Primaria hasta 4º de ESO.

6º de Educación Primaria

En este curso no hay un bloque específico en el currículo dedicado al tema de funciones, por lo que tampoco aparece recogido en el libro de texto. Aun así, podemos encontrar diversas actividades y se explican teorías que están relacionadas más o menos directamente con el tema de funciones, tal como hemos visto en capítulos anteriores.

1º de ESO

Es el primer curso en el que aparece un bloque de funciones en el currículo oficial, que contiene una introducción al eje cartesiano y a las propiedades y concepto de función. Estos contenidos aparecen reflejados en los libros de texto, aunque el referente a las propiedades de las funciones puede variar según la editorial.

2º de ESO

Se observa continuidad con los contenidos aprendidos el curso anterior. Hay un repaso del concepto de función junto a sus propiedades, las cuales se estudian en mayor detalle. Además, se trabaja con funciones lineales y se estudia la forma de calcular la pendiente de una recta.

Por último, el currículo recoge el uso de las TIC's, aunque normalmente este contenido no viene recogido en los libros de texto.

3º de ESO

En el currículo vienen diferenciados los contenidos de este curso en matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas o a las enseñanzas aplicadas, aunque realmente los contenidos relativos a funciones en este curso son exactamente idénticos en ambos itinerarios.

Ya se da por sabido los contenidos que aparecen en los cursos anteriores y hay una profundización en la teoría, apareciendo el estudio gráfico de funciones, una mayor relación de las matemáticas con la realidad y aparecen nuevos tipos de funciones como las cuadráticas.

4º de ESO

Tal como sucede en el curso anterior, el currículum diferencia los contenidos matemáticas orientadas a enseñanzas académicas o a enseñanzas aplicadas. Sin embargo, los contenidos relativos a funciones son idénticos en ambos itinerarios.

Los contenidos que aparecen en el currículum en este curso son esencialmente una profundización a los contenidos del curso anterior, siendo la única diferencia la aparición del concepto de tasa de variación media.

Como conclusión, se observa una evolución en el bloque referente a funciones en los cursos de la ESO, empezando por los conceptos más básicos y cuyo objetivo es saber interpretar y analizar diferentes tipos de gráficas, hasta relacionar las matemáticas con la realidad.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículum.

En esta última sección relacionaremos los contenidos que aparecen en los libros de texto con los contenidos que aparecen en el currículum, con el fin de ver si hay una coherencia entre ellos o por el contrario hay algunos contenidos que aparecen en el libro pero que no vienen recogidos en el currículum o viceversa.

De nuevo diferenciaremos el curso académico en el que nos encontramos.

6º de Educación Primaria

Al no haber un bloque de funciones para este curso académico en el currículum, tampoco aparece ningún tema del libro que hable directamente sobre las funciones o sus propiedades, lo cual se considera coherente.

1º de ESO

Como es el primer curso en el que se ven las funciones, los libros empiezan explicando el concepto de función para más tarde explicar sus propiedades. Algunos libros no profundizan tanto en las propiedades de las funciones como dice el currículum oficial, como pueden ser estudiar las zonas de crecimiento, puntos de corte o máximos y mínimos, tal como hemos mencionado en el capítulo anterior.

Esto se debe a la dificultad que estos contenidos pueden acarrear a los estudiantes de este curso debido a su edad.

2º de ESO

En este curso ya aparecen actividades en los libros de texto en las que los alumnos tienen que analizar funciones para hablar de sus propiedades, centrándose sobre todo en las funciones lineales.

Lo único que no suele venir recogido directamente en los libros de texto son actividades relacionadas con el uso de las TIC's, por lo que es labor del docente incentivar la utilización de herramientas adecuadas a las actividades propuestas.

3° de ESO

Tal como ocurre con el currículo, hay dos libros de texto diferenciando las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y aplicadas.

En estos libros se observa un aumento en el número de problemas respecto a cursos anteriores. Las actividades suelen estar relacionadas con situaciones propias de la vida real, con el fin de que el alumno vea el sentido de aquello que está estudiando de una forma más clara. Esto conlleva un aumento de la aparición de gráficas, las cuales tienen que analizar los alumnos.

También aparecen por primera vez las funciones cuadráticas, junto a su representación gráfica y fórmula.

4° de ESO

De nuevo tenemos dos libros de texto, uno para las enseñanzas académicas y otro para las aplicadas.

Observamos que los contenidos que aparecen en los libros de texto de este curso son muy parecidos a los del curso anterior, dándole de nuevo mucha importancia a los problemas que relacionan las matemáticas con situaciones reales, diferenciándose del curso anterior solamente por actividades un poco más complejas o completas.

El único contenido que no aparece en el libro de texto que hemos consultado para este curso académico y que sí aparece recogido en el currículo es el referente a la tasa de variación media.

Parte II:

**Análisis de un proceso de estudio de las funciones
en 2ºESO.**

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de enseñanza de funciones llevado a cabo con dos grupos de estudiantes de 2º de ESO.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el capítulo 5 se muestran las funciones en el libro de texto de referencia. En el capítulo 6 se presentan los errores y dificultades previstos en clase. En el capítulo 7 se recoge la organización previa de las sesiones.

Las conclusiones y resultados que se extraen del examen de ambas clases se exponen en el capítulo 8. El objetivo aquí es verificar si los alumnos han comprendido los contenidos estudiados en las sesiones anteriores al examen.

Para finalizar, se incluyen las síntesis y conclusiones del trabajo realizado así como algunas cuestiones abiertas derivadas del análisis llevado a cabo.

Capítulo 5.

Las funciones en el libro de texto de referencia

En este capítulo se analiza el libro de texto de la editorial Anaya que se ha utilizado como soporte para la preparación de las distintas sesiones. En concreto, se estudian todos los conceptos trabajados en la unidad dedicada a las funciones, realizando un análisis global de la estructura de la unidad didáctica.

5.1. Objetos matemáticos involucrados.

(Godino et al., 2006) utilizan una ontología para describir los objetos matemáticos involucrados en una lección: lenguaje, conceptos, procedimientos, situaciones, propiedades y argumentos. En los siguientes apartados se muestran los objetos matemáticos involucrados en la unidad didáctica referente a funciones.

5.1.1. Lenguaje

El lenguaje se divide en tres objetos matemáticos según su naturaleza: verbal, gráfico y simbólico. En la siguiente tabla se recogen los objetos matemáticos de este tipo encontrados en el libro de texto.

Tipo de lenguaje	Contenido
Verbal	Correspondencia, función, variable dependiente e independiente, representación gráfica, ejes cartesianos, enunciado. Crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimo absoluto, constante, ordenada, porcentaje. Función de proporcionalidad, ecuación, proporcional, valores directamente proporcionales, recta, constante de proporcionalidad, pendiente, tabla de valores. Función lineal, función afín, matemáticas aplicadas, matemáticas superiores, ordenada en el origen. Función constante, recta paralela, eje X, eje Y, distancia.
Gráfico	Representación en eje cartesianos, crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimo absoluto, tablas de valores, funciones proporcionales, pendiente de una recta, funciones afines, funciones constantes.
Simbólico	Expresiones algebraicas, por ejemplo $y = 2x - 5$. Números naturales. Símbolos generales: ${}^{\circ}C$.

5.1.2. Conceptos

Se distinguen los conceptos que ya son conocidos por los alumnos (conceptos previos) por su estudio en cursos anteriores, y los que son nuevos para ellos (conceptos emergentes). Ambos tipos son recogidos de forma resumida en la siguiente tabla.

Tipo de concepto	Contenido
Previos	Representación gráfica, ejes cartesianos, ordenada, porcentaje, función de proporcionalidad, ecuación, valores directamente proporcionales, recta, constante de proporcionalidad, tabla de valores, ordenada en el origen, recta paralela, eje X, eje Y, distancia.
Emergentes	Correspondencia, función, variable dependiente e independiente, crecimiento, decrecimiento, constante, máximo y mínimo absoluto, pendiente, función lineal, función afín, matemáticas aplicadas, matemáticas superiores, función constante.

5.1.3. Procedimientos

Los procedimientos encontrados en el libro son los siguientes:

- Determinar de forma gráfica si una relación entre variables es o no una función.
- Determinar de forma gráfica el crecimiento y decrecimiento de una función, así como su máximo y mínimo absoluto y las zonas en la que es constante.
- Asociar a cada gráfica su ecuación correspondiente.
- Dada la ecuación de una recta, completar la tabla de valores y a partir de ésta realizar la representación gráfica.
- Dada la representación gráfica de una recta, escribir su ecuación correspondiente.
- Dada la ecuación de una recta, hacer su representación gráfica.
- Determinar la ecuación de una recta dado dos puntos por los que pasa y hacer la correspondiente representación gráfica.
- Dada la representación gráfica de una recta, hallar su pendiente.

5.1.4. Situaciones

- Problemas descontextualizados en los que se pide la representación gráfica de una función partiendo de su expresión algebraica.
- Problemas descontextualizados en los que se pide determinar algunas características de una función a partir de su gráfica o expresión algebraica.
- Problemas contextualizados en los que se pide determinar la expresión algebraica de una función a partir de un enunciado.
- Problemas contextualizados en los que se pide interpretar las características de una función a partir de su representación gráfica.

5.1.5. Propiedades

- Una función relaciona dos variables designadas por x (variable independiente) e y (variable dependiente) y asocia a cada valor de x un único valor de y .
- Una función es creciente en un tramo cuando al aumentar la x aumenta la y . Es decreciente si, al aumentar la x , disminuye la y . Si mantiene el mismo valor todo el tramo, se dice que es constante en ese tramo.
- El punto en el que la ordenada toma mayor valor se llama máximo de la función, y aquel en el que la ordenada toma el menor valor, mínimo.
- Se llama función de proporcionalidad a la que relaciona dos valores directamente proporcionales. Tiene la ecuación $y = mx$ y se representa mediante una recta que pasa por el punto $(0,0)$.
- La constante de proporcionalidad, m , se llama pendiente de la recta y tiene que ver con su inclinación. Si m es positiva, la recta es creciente. Si m es negativa, la recta es decreciente.
- En matemáticas superiores se llaman funciones lineales a las del tipo $y = mx$. A estas otras, $y = mx + n$ se las llama funciones afines.
- La ecuación $y = mx + n$ se representa mediante una recta de pendiente m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$. A n se llama ordenada en el origen.
- Dos ecuaciones con la misma pendiente se representan mediante rectas paralelas.
- Cuando $n = 0$ se trata de una función de proporcionalidad, $y = mx$.
- La función $y = k$, en la que el valor de y no depende de x , se llama función constante. Se representa por una recta paralela al eje X, a una distancia k de este.
- La pendiente de una función constante es 0.
- La función constante $y = k$ es una función lineal, $y = mx + n$, en la que $m = 0$.

5.2. Análisis global de la unidad didáctica.

A continuación, se analiza la unidad didáctica referente a funciones del libro de matemáticas de 2º de ESO en la que aparecen además de los conceptos y procedimientos, los problemas, el lenguaje y los argumentos de una forma articulada y sistemática, requiriendo cada uno de estos objetos una atención especial en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Únicamente hay un tema dedicado a las funciones en este libro de texto. Es el tema número 13, se titula “Funciones” y comienza con una portada que explica la importancia de las funciones para relacionar numéricamente las variables que intervienen en cualquier fenómeno.

El tema se divide en seis secciones, en los que aparecen los siguientes contenidos conceptuales:

1. Función.
2. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.
3. Funciones de proporcionalidad.
4. Pendiente de una recta.
5. Funciones lineales.
6. Funciones constantes.

Visto desde un modo genérico, el tema está estructurado de la siguiente forma:

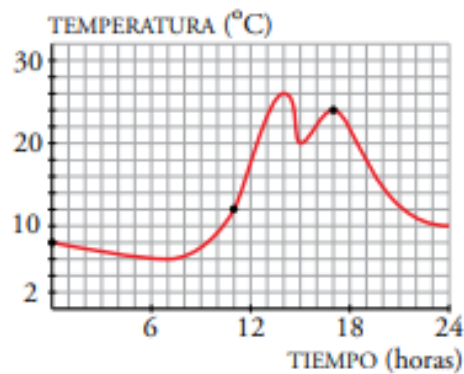
- Al principio de cada sección aparece el título, que muestra el contenido que se va a explicar en esa parte.
- A continuación, aparece un ejemplo concreto que permite entender el contenido que se va a estudiar.
- Más adelante aparece una definición más formal del contenido a estudiar.
- Después de esto se muestran ejercicios resueltos que permiten a los alumnos ver de forma práctica como utilizar esa teoría.
- Para finalizar, se propone la resolución de ejercicios y cuestiones para que el alumno pueda poner en práctica lo aprendido. A esta sección el libro la llama “Piensa y practica”.

Es un tema en el que aparecen muchas gráficas y/o ilustraciones que sirven de apoyo para que los alumnos puedan comprender mejor los contenidos que son nuevos para ellos.

También, aparecen en los márgenes de las hojas bastantes notas con el título de “En la web”, que incitan a los alumnos a que pongan en práctica los distintos conceptos explicados en el tema. De igual forma, aparecen notas con el título “Ten en cuenta” que sirven a modo de observaciones.

Al final del tema hay dos hojas con ejercicios y problemas referentes a las distintas secciones de la unidad didáctica, los cuales tienen un indicador de dificultad que va desde 1 hasta 3, siendo 1 el más sencillo y 3 el más complicado. Justo al final de la última hoja aparece una sección de autoevaluación con tres ejercicios.

Por lo mencionado anteriormente podemos apreciar que el libro explica los conceptos de una manera muy visual, mostrando con cada explicación un ejemplo gráfico que ayude a entender el concepto.



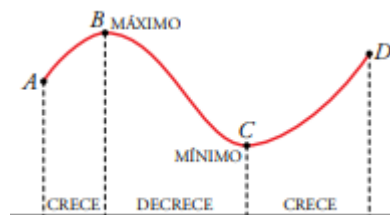
- 3.** En la gráfica de arriba (temperatura a lo largo del día):
- ¿Podemos decir que la mínima temperatura se dio a las 7 de la mañana? ¿Cuál fue?
 - ¿Cuándo se dio la máxima temperatura? ¿Cuál fue?
 - ¿En qué momentos la temperatura fue de 18 °C?
 - Durante 1 h, aproximadamente, el sol estuvo oculto por las nubes. ¿A qué hora crees que fue?
 - Indica una temperatura que se haya repetido en cuatro momentos distintos.

https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf (Pág. 161)

En esta actividad, el autor usa la gráfica para explicar el concepto de función como una relación entre dos variables y , aunque el ejercicio parece sencillo, el alumno es posible que necesite recordar conocimientos previos, pudiendo tener dificultades debido al hecho de que cada cuadrado en el eje de ordenadas no corresponde a una unidad, tal como pasa en el eje de abscisas.

Además, el alumno tendrá que utilizar sus conocimientos sobre el mundo para poder interpretar el hecho de que el Sol esté oculto hace que la temperatura disminuya ligeramente. Se espera también, que el alumno justifique sus respuestas, compartiendo sus soluciones con el profesor y sus compañeros.

Cuando el libro explica los conceptos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos lo hace de una forma muy intuitiva apoyado en una gráfica, lo que hace que la mayoría de los alumnos entiendan inmediatamente estos conceptos debido a su sencillez.



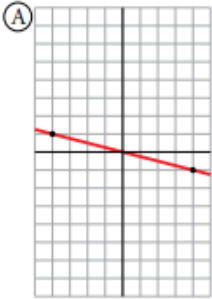
https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf (Pág. 162)

Para las funciones proporcionales el libro recurre a tres ejemplos concretos que son directamente proporcionales, con el fin de que el alumno sea capaz de identificar mediante una gráfica o una tabla si una función es o no de proporcionalidad. Además, hace una primera mención a la pendiente de una recta, cuya definición se verá en la siguiente página del libro.

Los ejercicios en esta hoja tienen como objetivo el que el alumno entienda la pendiente como la inclinación de la recta, pudiendo ser positiva, negativa o nula.

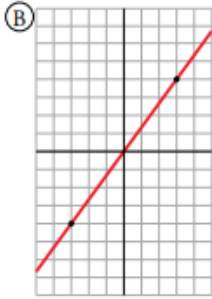
1. Asocia a cada una de las gráficas la ecuación que le corresponda:

a) $y = 4x$



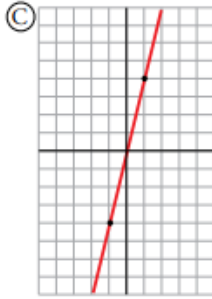
(A)

b) $y = \frac{4}{3}x$




(B)

c) $y = \frac{-1}{4}x$



(C)


d) $y = -3x$

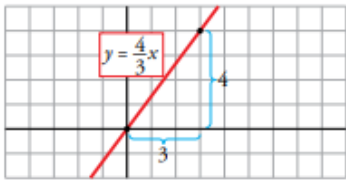


(D)

https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf (Pág. 164)

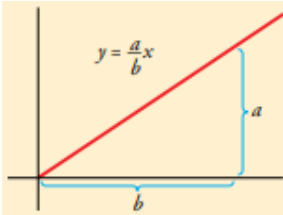
En la cuarta sección del tema aparecen cinco ejemplos concretos que explican cómo calcular la pendiente de cada una de las rectas, con los que el alumno aprenderá a calcular de una forma mecánica la pendiente de una recta de la que tenga su gráfica.



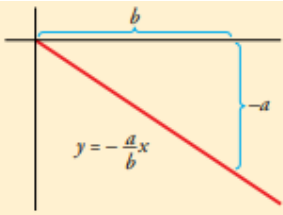


Su pendiente es $\frac{4}{3}$.

Cada vez que la x avanza 3 unidades, la y sube 4 unidades.



$y = \frac{a}{b}x$

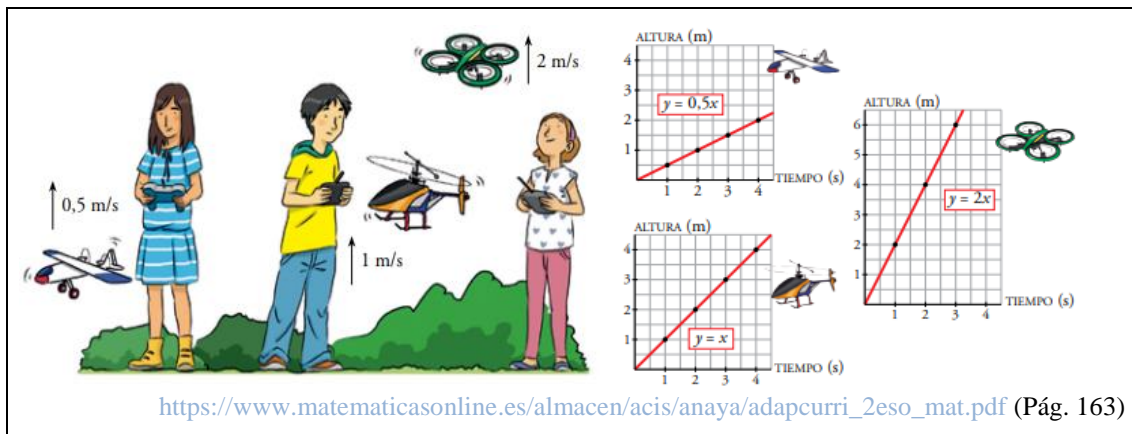


$y = -\frac{a}{b}x$

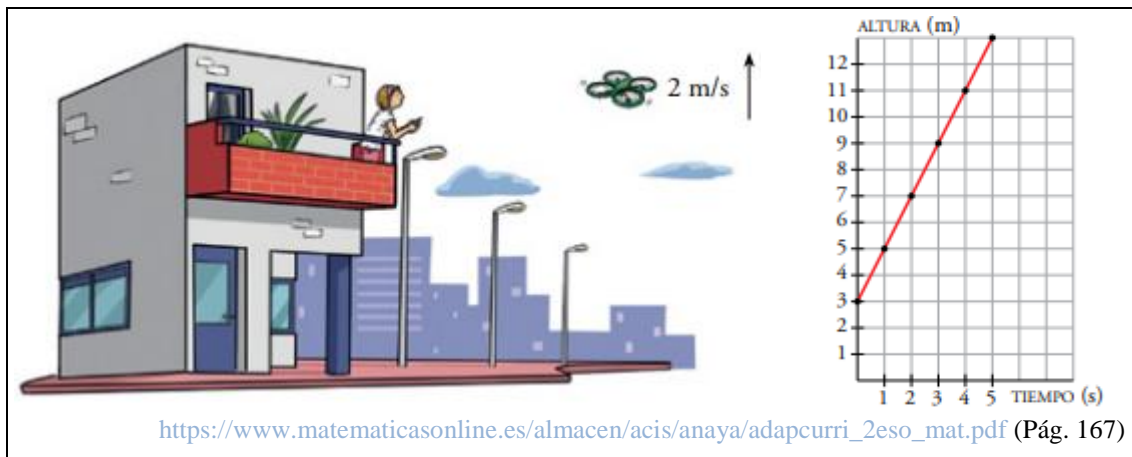
https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf (Pág. 165-166)

Justo después aparecen las funciones lineales, que aparecen relacionadas con las secciones anteriores del tema con ayuda de las ilustraciones que han utilizado para conceptualizar los ejemplos mostrados.

Así pues, para las funciones proporcionales se utilizan estos dibujos:



Mientras que para las funciones lineales se utiliza este otro:



Con ellos se pretende enfatizar la importancia de que una recta pase o no por el origen. Es por ello que aparecen las siguientes observaciones al margen de la hoja:

Nota

En matemáticas superiores se llaman **funciones lineales** a las del tipo $y = mx$.

A estas otras, $y = mx + n$, se las llama **funciones afines**.

Sin embargo, en matemáticas aplicadas como, por ejemplo, en economía, se llaman lineales a las funciones que se representan mediante rectas.

Así lo hacemos aquí:

lineales $\rightarrow y = mx + n$
 de proporcionalidad $\rightarrow y = mx$

Como curiosidad, cabe mencionar que la diferencia entre funciones lineales y afines aparece únicamente escrito como una nota al margen de la hoja.

https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf (Pág. 167)

Para terminar la unidad didáctica se tratan las funciones constantes: $y = k$. De nuevo se pone como ejemplo el caso de los tres amigos anteriores, haciendo volar ahora sus artefactos siempre a la misma altura. Aquí se relacionan las funciones constantes con las funciones lineales, explicando que no son más que rectas cuya pendiente es 0.

5.3 Otros aspectos relevantes.

Cabe mencionar que el tutor del centro ha llevado a cabo una organización diferente a la mostrada aquí, siempre cumpliendo con lo mencionado en el currículo oficial del BON, salvo pequeños ajustes que hace el profesorado del departamento para enseñar los contenidos de manera que sean mejor entendidos por los alumnos.

En este sentido, el tutor en el centro prepara sus propios apuntes, que reparte entre los alumnos. En ellos se explican todos los contenidos del curso, buscando siempre la contextualización de aquello que esté explicando.

De hecho, uno de sus principales objetivos es que los alumnos entiendan o vean la aplicación de aquello que están estudiando, y no se limiten a resolver ejercicios de una forma meramente mecánica sin comprender lo que están haciendo o para qué les sirve.

Capítulo 6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se presentan las posibles dificultades y errores que cabe esperar que tengan los alumnos mientras se les explica el tema relacionado con las funciones, así como la forma de prepararnos para poder resolver esas dudas de forma rápida y entendible por todos.

6.1. Dificultades.

Según Martín M. Socas (1997): “Las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de las Matemáticas”.

Vamos a clasificar las dificultades según obedecen a la naturaleza de su origen:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos: que tienen que ver con el lenguaje en la comprensión y la comunicación de los objetos matemáticos y el lenguaje cotidiano como mediador en la interpretación de los signos. (Herrera Ruiz, 2010)

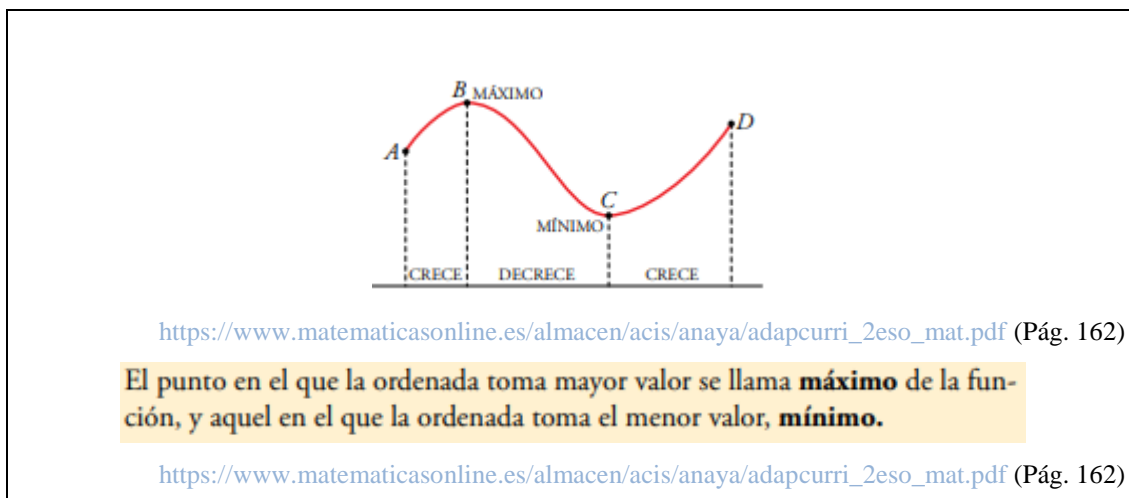
El lenguaje cotidiano puede expresar su significado a pesar de tener errores morfosintácticos tales como faltas de ortografía o rotura de reglas gramaticales. Por el contrario, el lenguaje matemático al ser más preciso y estar sometido a reglas exactas, puede no transmitir su significado si no se interpretan de forma exacta sus signos.

Este hecho sumado a que palabras como raíz, primo, función, índice, etc., tienen significados diferentes en Matemáticas y en el lenguaje habitual, hace que el uso de tales palabras puede producir dificultades derivadas de la confusión semántica implicada.

Poniéndolo en relación con el tema tratado de funciones, las principales dificultades de este tipo que cabe encontrarse en el aula son:

- Confundir cuál es el eje de ordenadas y cuál el de abscisas o confundir el eje de ordenadas con el de coordenadas, creyendo que hacen referencia a lo mismo.
- A la hora de definir un punto en el plano, como por ejemplo el (1,3), referirse a él como (3,1).
- Debido a que en las semanas anteriores estuvieron trabajando con la proporcionalidad y vieron las funciones directamente proporcionales junto a sus propiedades, podrían creer que todas las demás funciones tienen que compartir sus características, como, por ejemplo, pasar por el origen de coordenadas, o ser líneas rectas.
- Entender qué quiere decir exactamente “La función asocia a cada valor de x un único valor de y ”.

- Distinguir entre máximo/mínimo absoluto y relativo, debido a que en la gráfica del libro no se hace mención de los puntos A y D y definen estos conceptos de la siguiente forma:



- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático: se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático; por ejemplo, los dibujos en la pizarra o las imágenes estandarizadas pueden generar errores.

Como ejemplos de este tipo de dificultades encontramos:

- Muchos alumnos que creen que los triángulos solo tienen una altura, debido a que cuando el profesor dibuja un triángulo en la pizarra o ven los dibujos en los libros, el triángulo suele aparecer apoyado sobre uno de sus lados.
- Cuando el profesor dibuja dos líneas y dice que son paralelas, o cuando dibuja una circunferencia o una hipérbola, son casos en los que los alumnos tienen que abstraerse y no ver el dibujo en sí, porque no refleja fielmente el objeto o concepto que el profesor está explicando, sino ver a lo que el profesor se está refiriendo.
- Los problemas que tienen un contexto que no tiene sentido en el mundo real, como el suponer que todas las personas trabajan con la misma eficiencia. En este tipo de problemas, los alumnos con una actitud crítica podrían no responder como esperamos.
Esto acarrea que algunos alumnos no respondan a la pregunta que realiza el problema, sino a una meta-pregunta: ¿qué espera el profesor que yo haga?

Dentro de este tipo de dificultades en el tema de funciones, podemos encontrar:

- Si el profesor siempre dibuja ejemplos de funciones en el primer cuadrante, algunos alumnos podrían interpretar que cualquier otra línea que estuviese dibujada en otro cuadrante automáticamente deja de ser función.
- A la hora de representar funciones lineales, hay que tener especial cuidado con que los alumnos no interpreten las funciones lineales como segmentos que son siempre positivos, sino como rectas infinitas que pueden ser tanto positivas y negativas o tener un único signo en el caso de ser constantes.

- Tal como viene explicado el cálculo de la pendiente de una recta en el libro, es posible que a un alumno que está viendo esta propiedad por primera vez le surjan una serie de preguntas o dudas:
 - ¿La pendiente se calcula de igual forma si la gráfica no pasa por el origen?
 - Si con la gráfica de la función dada no puedo apreciar con bastante certeza dos puntos exactos que pertenezcan a la recta, ¿cojo dos puntos de forma aproximada?
 - ¿Siempre tengo que tener el (0,0) como punto de partida, o si miro en otros dos puntos cualesquiera siempre obtendré lo mismo?
 - ¿La "b" siempre tiene que ser positiva?

Éstas son cuestiones que considero que el profesor debería aclarar mientras está explicando esta lección con el fin de poder evitar errores de interpretación.

- En una de las páginas del libro encontramos el siguiente ejercicio:

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = -2x + 5$

b) $y = x - 3$

c) $y = \frac{2}{3}x - 4$

d) $y = \frac{3}{2}x + 4$

e) $y = -x - 1$

f) $y = 0,8x - 6$

g) $y = \frac{3}{5}x + 1$

h) $y = -0,625x + 1$

https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf (Pág. 168)

La posible dificultad radica en que en el apartado h) se proporciona una pendiente que no está dada como un número entero o fracción, sino como un número decimal el cual la mayoría de los alumnos no sabe pasar a fracción. Por lo tanto, cualquier alumno que quiera resolver este apartado utilizando lo aprendido en la sección “pendiente de una recta” le será imposible y tendrá que optar por representar la función con ayuda de una tabla.

- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas: los métodos de enseñanza utilizados deben ser acordes con la organización institucional escolar y con la secuencia curricular.

La institución debe propiciar una organización escolar que tienda a reducir las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas dependiendo de los materiales curriculares, de los recursos y de los estilos de enseñanza.

Los elementos básicos a considerar como dificultades en el currículo de Matemáticas serían las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en esta ciencia, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de la Matemática escolar.

En cuanto a los métodos de enseñanza, hay que considerar el lenguaje utilizado, ya que debe adaptarse a las capacidades de comprensión de los alumnos, la secuenciación de las unidades didácticas de aprendizaje, que debe estar adaptada a la lógica interna de la Matemática, el respeto al ritmo individual con el que trabaja cada alumno y los recursos y la representación adecuada.

Dentro de este tema de funciones, nos encontramos con las siguientes dificultades de este tipo:

- El tutor comentó que el centro se ha organizado para ver el tema de funciones en 3º de ESO y centrarse en otros temas en 2º de ESO, ya que se han percatado que es un tema que se entiende mucho mejor en 3º debido al nivel de madurez de los alumnos.

Por lo que, a la hora de organizar las distintas sesiones, se buscarán unas explicaciones apoyadas en gráficas buscando la contextualización de todos los contenidos.


- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos: hay que tener en cuenta en qué etapa del desarrollo cognitivo se encuentran los estudiantes, sus características y capacidades a la hora de diseñar los recursos y estrategias en la enseñanza.

Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de Matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información muy valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza.

Con respecto a este tipo de dificultad, está muy relacionado lo mencionado justo en el punto anterior.

Dentro de este tema de funciones, nos encontramos con las siguientes dificultades de este tipo:

- El siguiente ejercicio resuelto requiere que el alumno haga una correcta interpretación de la lectura del ejercicio:

<p><i>El London Eye es una noria mirador de 136 m de altura que está en el centro de Londres.</i></p> <p><i>Escribir la ecuación de la función que relaciona el tiempo que gira la noria y la distancia a la que se encuentra del centro una determinada cabina.</i></p>	<p>Como la altura es de 136 m, la distancia de una cabina al centro es:</p>	
	$136 : 2 = 68 \text{ m}$	
	<p>Por tanto, la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia de una cabina al centro de la noria es una función constante de ecuación:</p>	
	$y = 68$	

https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf (Pág. 169)

El alumno tiene que relacionar la altura de la noria con la distancia de una cabina al centro de la misma, y suponer que esta distancia es justamente la mitad de la altura (para lo cual las cabinas deben rozar el suelo cuando pasen justo por encima de éste), todo ello ignorando el hecho de que la noria gira, ya que es un hecho inherente al pensar en una noria, pero que carece de significado en este ejercicio.

- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas: son muchos los alumnos que, aun siendo de los más capacitados, no les gustan las Matemáticas y tienen sentimientos de tensión o miedo hacia ellas.

Hay muchos aspectos que influyen en esta aversión, como pueden ser la actitud de algunos profesores de Matemáticas hacia sus alumnos, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático y las creencias sociales que hay sobre la naturaleza de las Matemáticas: son fijas e inmutables, irreales y abstractas, no tienen una relación directa con la realidad, o constituyen un misterio solo accesible para unos pocos. Es por todo esto que es lógico que pueda aparecer esa ansiedad y miedo al tratar con los contenidos matemáticos.

En lo relacionado con el tema de funciones, hay que tener cuidado en estos aspectos:

- Procurar que los nuevos contenidos fuesen presentados de una forma visual, con ayuda de Geogebra.
- Contextualizar cada concepto con su importancia o utilización en la vida real.
- Relacionar los nuevos contenidos con temas anteriores los cuales ya dominaban en su mayoría.
- Hacer preguntas dirigidas con el fin de que fuesen los propios alumnos quienes descubran los nuevos conceptos con mi ayuda.

6.2. Errores y su posible origen.

Según Martin M. Socas (1997), “el error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción”. Es por ello que el error puede considerarse como una parte inseparable del aprendizaje, debiendo investigar los distintos tipos de errores que cometan nuestros alumnos, discutiendo con ellos la presencia y concepción de estos errores, para lograr un reajuste de sus ideas.

Algunas de las características que podemos encontrar en los errores son las siguientes:

- Surgen, por lo general, de forma espontánea y sorprendiendo al profesor.
- Son persistentes y difíciles de superar, ya que requieren que el alumno haga una reorganización de sus conocimientos.
- Son sistemáticos o debidos al azar, siendo los sistemáticos más comunes y reveladores de los procesos mentales que han llevado al estudiante a realizar una comprensión errónea; mientras que los cometidos debido al azar son ocasionales.
- Se deben en muchas ocasiones a que el alumno no comprende perfectamente el significado de los símbolos y conceptos con los que trabaja, por lo que no toma conciencia del error.
- Se deben a una comprensión o a un procesamiento incorrecto que hace el alumno de la información proporcionada por el profesor.

Podemos abordar los errores desde dos niveles, uno individual en el que los alumnos de forma aislada cometen errores puntuales; y otro colectivo, en el que distintos alumnos cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje.

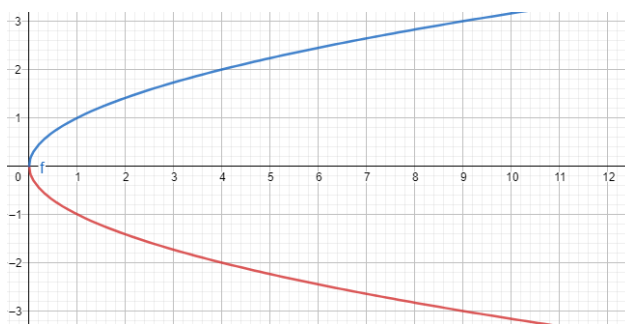
Según sea el origen de los errores, podemos clasificarlos en tres grandes grupos:

- Errores que tienen su origen en un obstáculo.
- Errores que tienen su origen en ausencia de sentido, que, al originarse en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación (semiótico, estructural y autónomo), podemos diferenciar estos errores en tres etapas distintas:
 - Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.
 - Errores de procedimiento, como derivados del mal uso de la propiedad distributiva; relativos al uso de recíprocos o errores de cancelación.
 - Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

A continuación, procedemos a nombrar los errores encontrados en las distintas sesiones:

1ª sesión:

Tras la explicación del significado e identificación gráfica de una función, se pregunta a los alumnos qué sucede con la raíz cuadrada, que gráficamente se representa como sigue:



¿Este gráfico es el correspondiente a una función? ¿Sí? ¿No? ¿Depende?

El objetivo es crear el debate en la clase, ya que los alumnos ya conocen la función raíz cuadrada, pero el gráfico contradice a lo que se acaba de explicar referente a las funciones.

Este error puede deberse al hecho de que el alumno no comprenda perfectamente la definición de $f(x) = \sqrt{x}$.

2ª sesión:

Una vez explicada la teoría, se señalan las múltiples aplicaciones del cálculo de máximos y mínimos de distintas funciones en distintos ámbitos como puede ser la medicina con el tiempo de reacción de un fármaco, o el marketing donde a menudo se busca lograr el máximo beneficio con el mínimo coste.

Para ello se pone como ejemplo los botes de Cola Cao o Nesquik, analizando por qué la compra del formato familiar resulta más económica.

El origen de este error puede deberse al obstáculo de intentar utilizar la regla de 3 en todas las situaciones, aunque no sean proporcionales las variables estudiadas.

La finalidad de realizar estas observaciones es que vean que aquello que están estudiando tiene su utilidad en la vida cotidiana y se usa con más frecuencia de la que creen, aparte de intentar llamar un poco más su atención e interés.

3ª sesión:

Al explicar las funciones cuadráticas, se pregunta a los alumnos si saben a qué es igual la expresión $(x + 2)^2$, con el fin de explicar la fórmula de la identidad notable y su demostración tanto analítica como geométrica. Más de la mitad de la clase afirma que $(x + 2)^2 = x^2 + 4$ y solamente un alumno levanta la mano cuando se pregunta si alguien no está de acuerdo, aunque sin saber dar un motivo en ese momento.

Éste es un error recurrente que suele estar presente en la mayoría de los alumnos de forma bastante persistente aun con el paso de los años y cuyo origen está ligado a un mal uso de la aritmética.

Capítulo 7.

El proceso de estudio.

En este capítulo se presenta tanto la organización seguida en la preparación de las cinco sesiones de docencia autónoma del tema referente a funciones, como la forma en la que hemos distribuido el tiempo de cada sesión, especificando el tipo de docencia elegido en cada caso (si ha sido magistral, dialógica, etc.). Asimismo, se incluyen las tareas, situaciones adicionales planificadas y la relación con el proceso de aprendizaje.

Cabe destacar el hecho de que la organización previa de las sesiones ha sido la misma para los dos grupos de estudio en este trabajo. Por lo tanto, en este capítulo no se hará distinción entre los grupos A y B y se referirá en todo momento a la organización de la docencia de un grupo de 2º de ESO genérico.

7.1. Distribución del tiempo de la clase.

En esta sección se expone el tipo de docencia que ha habido en cada sesión, y el tiempo que se ha empleado en explicar los nuevos contenidos, hacer ejercicios o preguntar a los alumnos. Además, hay que destacar que al finalizar la explicación de los contenidos de cada sesión, se han destinado unos minutos para contextualizar lo explicado, con el fin de que los alumnos puedan ver una utilidad real a lo que están aprendiendo.

Para que toda esta información quede mejor organizada y se vea de forma más clara la vamos a presentar en las siguientes tablas.

1ª sesión

Contenido	Explicación del concepto de función, así como de las distintas formas de trabajar con ellas: mediante una tabla, una gráfica o una fórmula matemática.
Tiempo	25 minutos
Responsable	Profesor
Tipo de docencia	Magistral.

Contenido	Se les entrega a los alumnos una hoja de actividades (mostrada en la sección 7.3.), la cual tienen que resolver por parejas y entregar una hoja por pareja al finalizar la clase, para que el profesor pueda evaluar el porcentaje de contenido asimilado y comprendido por los alumnos.
Tiempo	25 minutos
Responsable	Alumnos
Tipo de docencia	Colaborativa.

Se comienza la clase preguntando a los alumnos sobre la idea que tienen respecto a lo que es una función y si saben poner algún ejemplo conocido. Al no saber muy bien que contestar, se les entrega la hoja de teoría prevista y se les muestran varios ejemplos en la pizarra sobre distintas funciones que ya han visto en el tema de proporcionalidad.

El tutor del centro aprovecha para relacionarlo con las funciones peso y velocidad que han visto en física los días anteriores. Una vez explicadas las variables dependientes e independientes, se les pregunta si saben citar alguna función con la que hayan trabajado en matemáticas, a lo que un alumno responde que el área de un cuadrado, siendo el $\text{Área} = \text{lado}^2$.

Para terminar, se les pregunta si conocen alguna función con la que ya hayan trabajado que tenga más de una variable independiente. Al no saber qué contestar se les ayuda con varias pistas, como que trabajaron con esa función la semana anterior en una actividad que requería hacer un trabajo de manualidades. Identificaron que la función a que nos referíamos era el volumen, sin mencionar la palabra paralelepípedo puesto que no se acordaban de ella.

Finalmente, se les reparte la hoja de ejercicios para que la completen por parejas y la entreguen al finalizar la clase.

2ª sesión

Contenido	Explicación en la pizarra sobre los puntos y zonas más destacables a estudiar de las funciones: continuidad, discontinuidad, crecimiento, decrecimiento (o zona constante), máximos y mínimos y puntos de corte con los ejes. El objetivo es que los alumnos puedan identificar estas propiedades en una gráfica.
Tiempo	30 minutos
Responsable	Compartida
Tipo de docencia	Dialógica.

Contenidos	Se entrega a los alumnos una nueva hoja de actividades (mostrada en la sección 7.3.), que tienen que resolver por parejas y entregar al finalizar la clase, para que el profesor pueda evaluar el porcentaje de contenido asimilado y comprendido por los alumnos.
Tiempo	20 minutos
Responsable	Alumno
Tipo de docencia	Colaborativa.

Se comienza la sesión explicando los principales errores que hubo en la resolución de la hoja de ejercicios de la sesión anterior siendo el más recurrente el saber distinguir si una gráfica corresponde a una función o no.

Para este propósito se muestran ejemplos específicos que contradicen algunos de los conceptos erróneos más extendidos, como el pensar que toda función tiene que pasar por el origen o ser siempre positiva. Se remarca de una forma visual que lo único que tienen que comprobar es que a cada valor de x , le corresponde un único valor de y .

Posteriormente, se explican en la pizarra las principales propiedades de las funciones con ayuda de una gráfica. En este momento, una alumna pregunta ejemplos de funciones discontinuas que aparezcan en la vida cotidiana. Al no encontrar ningún ejemplo sencillo, se le felicita por la pregunta y se le dice que en la siguiente sesión se proporcionará un ejemplo.

Finalmente, se procede a dibujar dos funciones en la pizarra con cuidado de que se distingan bien sus puntos y zonas a estudiar, para que los alumnos las estudien por parejas y entreguen el ejercicio al finalizar la clase.

3ª sesión

Contenido	Explicación de los distintos tipos de funciones, como son las funciones directamente proporcionales o lineales, las funciones afines y las inversamente proporcionales o hipérbolas. Se introducen las funciones cuadráticas y la identidad notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Tiempo	35 minutos
Responsable	Profesor
Tipo de docencia	Constructivista.

Contenido	Con la ayuda de Geogebra, se pregunta a los alumnos que ocurre con las funciones cuadráticas según se modifican las variables a, b y c de la fórmula $ax^2 + bx + c = 0$.
Tiempo	15 minutos
Responsable	Compartida
Tipo de docencia	Adidáctica

Se comienza la clase poniendo como ejemplo de función discontinua en la vida cotidiana el pago de un parking de un supermercado, en el que se paga 3€ por cada hora que se permanece estacionado. Según esta tarifa, dos personas que hayan estacionado su vehículo durante 5 minutos y 57 minutos respectivamente, deberán pagar 3€, mientras que una tercera persona cuyo vehículo ha estado estacionado durante 1 hora y 2 minutos, deberá pagar 6€.

Se explica a los alumnos que en la siguiente sesión harán una tarea individual, de 50 minutos de duración y referente a lo que se les ha explicado en estas 3 sesiones. Los alumnos preguntan si se trata de un examen y si cuenta para nota, a lo que se les responde que cuenta lo mismo que el resto de actividades que han realizado.

Se les explica en la pizarra los diferentes tipos de funciones empezando por las que ya conocen, que son las funciones directamente proporcionales, afines, e inversamente proporcionales, escribiendo el nombre, la gráfica y la fórmula genérica con un ejemplo de cada una de ellas.

Una vez explicadas estas tres funciones se procede a explicar las funciones cuadráticas de la misma forma, pero en mayor detalle ya que son nuevas para los alumnos. Se le da mucha importancia a la utilización de este tipo de funciones en la vida real, como puede ser en arquitectura con el puente de San Francisco o la Sagrada Familia y en los deportes como en el lanzamiento de jabalina o los lanzamientos en baloncesto.

Para conocer si saben identificar este tipo de funciones se ponen varias fórmulas en la pizarra, aprovechando para explicar la identidad notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y demostrarla tanto analítica como geoméricamente.

Al terminar las dos demostraciones se aprecia que los alumnos comprenden mejor la demostración geométrica que la analítica. Aun así, una alumna hace ver que no entiende, por lo que se le explica de una forma más detallada el caso gráfico. Finalmente, la alumna vuelve a contestar que sigue sin entenderlo, por lo que el tutor en el centro hace continuar la clase diciéndole que en el próximo tema lo explicará con más conceptos que harán que lo entienda mejor y que no tiene que preocuparse por ello. Una vez vista la teoría referente a las parábolas de una forma magistral se les enseña, con ayuda del proyector y Geogebra, cómo varían las parábolas según se modifican los valores de sus coeficientes, haciendo preguntas a los alumnos para comprobar que entienden qué sucede según se modifica cada uno de ellos por separado.

4ª sesión

Contenido	Evaluación formativa.
Tiempo	40 minutos
Responsable	Alumno
Tipo de docencia	Estudio autónomo: los alumnos disponen de los 40 minutos que dura la sesión para realizar el examen (mostrado en la sección 8.2.) referente al tema de funciones.

La sesión comienza con un examen para ver hasta dónde han entendido los alumnos la explicación de las sesiones anteriores.

A los 40 minutos se recogen todos los exámenes y el profesor procede a explicarles el resto de las identidades notables en los minutos que quedan hasta terminar la sesión.

5ª sesión

Contenido	El profesor explica en la pizarra la solución a los ejercicios del examen, preguntando a los alumnos cómo se resuelve cada apartado para aclarar las últimas dudas generales que pueda haber.
Tiempo	25 minutos
Responsable	Compartida
Tipo de docencia	Dialógica.

Al haber tenido muy poco tiempo para corregir los ejercicios de la sesión anterior, se resuelven en la pizarra para que los alumnos copien las respuestas y se les explica el método de evaluación que se va a tener en cuenta a la hora de puntuar.

Para tener una idea previa de cómo lo han hecho, se pregunta a los alumnos cuántos de ellos han contestado cada una de las posibles respuestas para algunos ejercicios del examen. De esta manera se puede detectar algún error colectivo y así resolverlo antes de que termine la sesión.

Una vez corregidos todos los ejercicios se les comunica que ha sido un placer darles clase y que en las siguientes semanas se les entregará el examen corregido, tras lo cual el tutor en el centro sigue con el temario correspondiente.

7.2. Actividades adicionales planificadas.

Para la explicación de los contenidos de cada sesión, se utiliza un ejemplo concreto para que los alumnos vean cómo se resuelve un ejercicio típico o entiendan mejor el concepto explicado.

A continuación, aparecen los ejercicios que se resolvieron en clase según la sesión, así como la teoría que se les entregó a los alumnos.

1ª sesión

Al comienzo de la sesión se entrega una hoja de teoría a los alumnos en la que tienen una explicación no tan formal de lo que es una función, de la que nos servimos para explicarles posteriormente que las funciones son una relación entre dos variables, una variable dependiente y otra independiente, explicación que los alumnos tienen que escribir en la hoja que se les ha entregado para completar los apuntes.

Se utilizan los conocimientos que ya poseen de física para ponerles el ejemplo de la función peso: $P = m \cdot g$, y se pregunta si sabrían identificar cuáles son las variables dependiente e independiente.

Además, se pregunta si sabrían decir alguna otra función que conozcan y con la que hayan trabajado, a lo que un alumno responde que el área de un cuadrado, señalando que $\text{Área} = \text{lado} \cdot \text{lado}$.

Al finalizar se explica que la fórmula que aparece en la hoja entregada no se corresponde con la gráfica y tabla mostradas justo encima, que sí están relacionadas entre sí. Para que se entienda mejor esto, un voluntario sale a la pizarra y con la ayuda del resto de la clase, dibuja la tabla y la gráfica correspondiente en la pizarra.

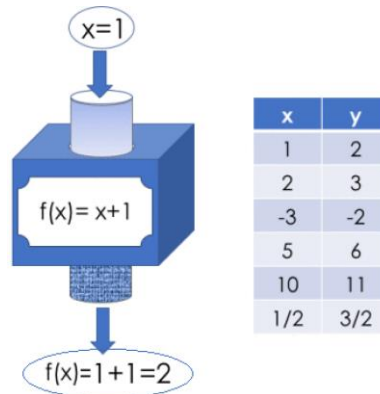
La hoja con la teoría que se les entrega a los alumnos es la siguiente:

FUNCIONES

¿Qué es una función?

Podemos entender función como una “máquina”, en la que nosotros metemos un valor “ x ”, y la máquina nos devuelve un **único** valor numérico. En matemáticas a una función se le denota por $f(x)$.

Ejemplo: $f(x) = x + 1$



<https://marielmatesblog.files.wordpress.com/2017/05/maquina-de-funciones-ej1-e1495783579709.png?w=560>

Así, si nosotros por ejemplo metemos el valor $x = 3$, la función en este caso nos dará el valor 4, ya que $f(3) = 3 + 1 = 4$

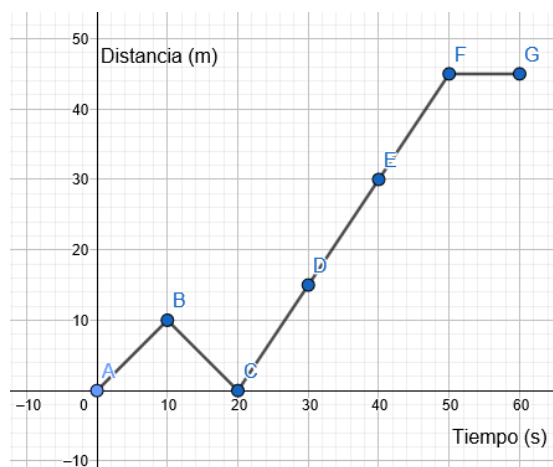
Para trabajar con funciones, podemos hacerlo mediante:

1. Una tabla

Ejemplo: recogemos la distancia de una persona que va a comprar el pan a la esquina, pero se le olvida el dinero.

Tiempo (s)	0	10	20	30	40	50	60
Distancia a la casa (m)	0	10	0	15	30	45	45

2. Una gráfica:



3. Mediante una fórmula:

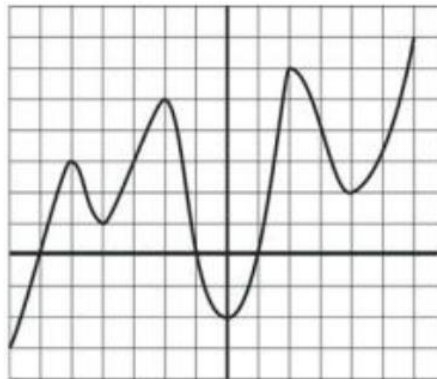
$$f(x) = 2x - 3$$

2ª sesión

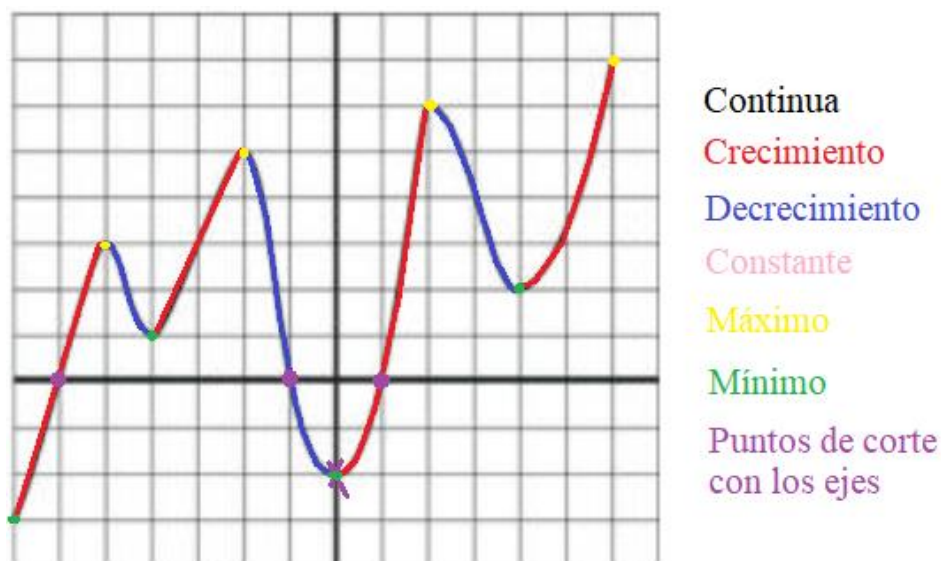
Se anotan los puntos y zonas importantes a estudiar de las funciones en la pizarra de la siguiente forma:

- Continuidad / Discontinuidad
- 2. Crecimiento
- 3. Decrecimiento
- 4. Función constante
- 5. Máximos
- 6. Mínimos
- 7. Puntos de corte con los ejes

Una vez que los alumnos los han copiado en sus cuadernos, se dibuja en la pizarra una gráfica parecida a la siguiente:



Con ayuda de toda la clase, se pregunta dónde se encuentran cada uno de estos puntos y zonas que han apuntado, pidiendo además una justificación a sus respuestas. Al final el gráfico de la función queda algo así:



Como se observa, el objetivo de esta actividad no es que los alumnos sepan explicar con un lenguaje formal todos estos conceptos, sino que sepan identificar visualmente dónde se encuentran.

Sesión 3

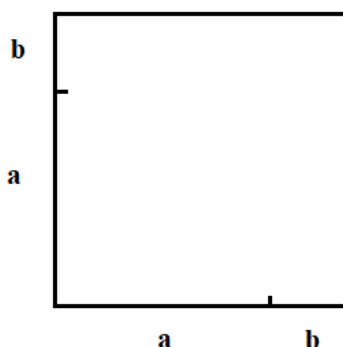
Con la introducción a las funciones cuadráticas, se aprovecha para explicar la identidad notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Antes de explicarla, se pregunta a qué es igual la expresión $(x + 2)^2$, a lo que más de la mitad de la clase responde que a $x^2 + 4$, mientras que sólo un alumno no está de acuerdo, aunque no sabe explicar el motivo.

Por lo tanto, procedemos a comprobarlo de un modo analítico planteando en la pizarra:

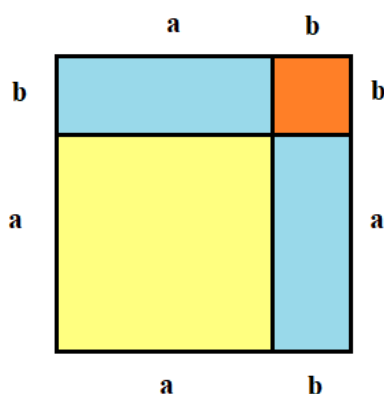
$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x + 2 \\ \hline \end{array}$$

Con preguntas retóricas se calcula el producto hasta obtener la solución $x^2 + 4x + 4$.

Para que se pueda entender un poco mejor de dónde ha salido el término $4x$ y antes de generalizar la fórmula de la identidad notable, se dibuja un cuadrado en la pizarra de lado $a + b$



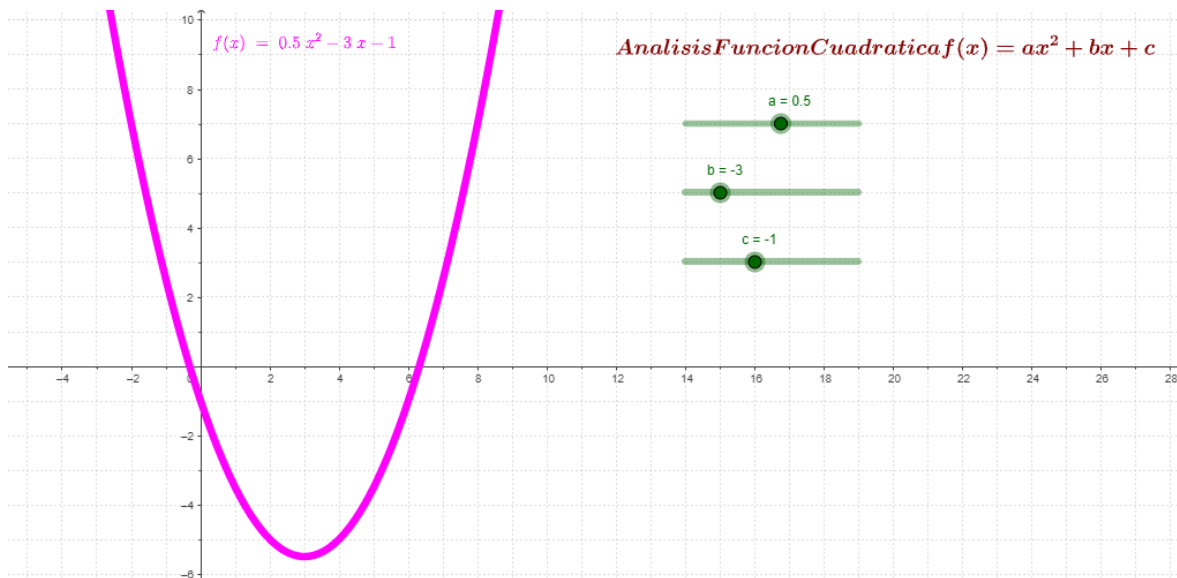
Al preguntar si sabrían decirme cuál es el área de ese cuadrado, algún alumno me responde que el área es igual a lado por lado, y al preguntar si puede decirlo de una forma más concreta con el ejemplo que hay dibujado en la pizarra, responde que $(a + b)(a + b)$. A continuación, se pregunta si están de acuerdo a que el área de ese cuadrado sería igual a la suma del área de los siguientes cuadrados y rectángulos:



Como todos los alumnos estaban de acuerdo, pregunto si sabrían decir cuál es el área de cada uno de ellos por separado, con lo que finalmente entre todos se llega a que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, comprobando que efectivamente era lo que habíamos obtenido con la igualdad $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

Después, con ayuda de Geogebra, se busca que los alumnos entiendan y vean cómo cambian las funciones cuadráticas al variar sus coeficientes de forma independiente, haciendo hincapié en si las ramas de la parábola van hacia arriba o hacia abajo según sea el coeficiente a , o en que el coeficiente c nos indica donde corta la función al eje Y .

Se finaliza la sesión argumentando cada uno de estos hechos y contextualizando la utilización de las parábolas en la arquitectura, para la construcción de puentes o edificios, en los deportes, etc.



<https://www.geogebra.org/m/zVjtM7Gg>

5ª sesión

En la última sesión se resuelven en la pizarra los ejercicios que se plantearon en el examen de la sesión anterior. Tratando de eliminar los últimos errores de concepto que pudieran quedar entre los alumnos y procurando que el tema quedase entendido en su totalidad.

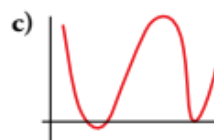
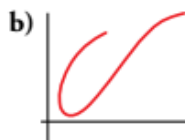
7.3. La tarea: actividad autónoma del alumno previstas

En esta sección mostramos los ejercicios y problemas propuestos a los alumnos, que deberán entregar al finalizar cada clase. Estas actividades nos permitirán establecer el grado de entendimiento que tienen los alumnos con respecto a los conceptos y contenidos explicados. De nuevo, esta sección se organiza según las actividades propuestas en las distintas sesiones.

1ª sesión

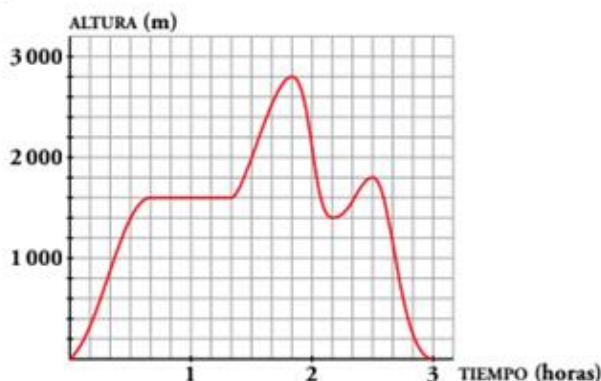
En los últimos 25 minutos de la primera sesión se entrega la siguiente hoja de ejercicios a los alumnos. El objetivo es valorar si los conceptos explicados han sido entendidos por la mayoría y conocer las dificultades y errores que pueda haber para explicarlos en la sesión siguiente.

Di cuáles de las gráficas corresponden a funciones y cuáles no son funciones, justificando las respuestas:

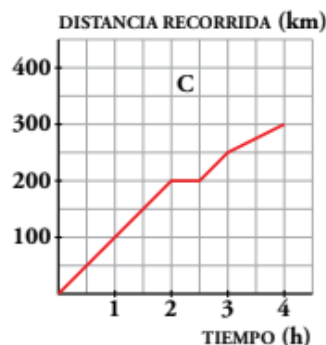
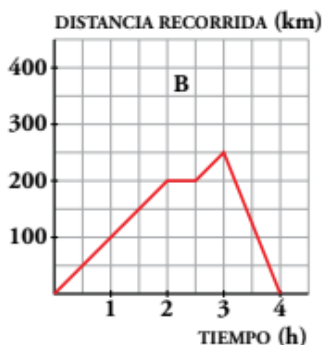
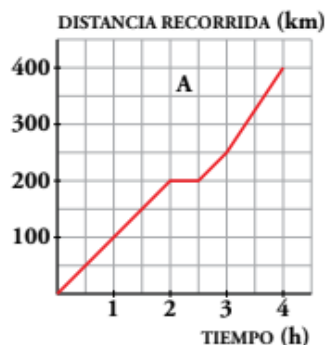


En la gráfica de abajo puedes ver la altura de una avioneta durante sus tres horas de vuelo.

- a) ¿Cuánto tiempo permanece estable? ¿A qué altura?
- b) ¿Cuánto tarda en estabilizar la altura?
- c) ¿Cuándo llega al máximo? ¿Qué altura alcanza?
- d) Haz un breve resumen de la evolución de la altura de la avioneta desde que despega hasta su aterrizaje.



Indica cuál de estas gráficas representa la distancia recorrida por un vehículo a lo largo de 4 h de viaje, sabiendo que a las 2 h para a descansar durante media hora y a las 3 h sube un puerto:



¿Cuánto ha durado el viaje? ¿Cuánto ha recorrido?

https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf (Pág. 161,162 y 170)

Los alumnos resuelven los ejercicios propuestos por parejas y entregan el documento al finalizar la clase. En la siguiente sesión se les proporciona la corrección de la actividad.

En la corrección del primer ejercicio se encontraron los siguientes errores:

- Hubo varios alumnos que comentaron que ninguna de las tres gráficas correspondía a una función, justificándolo con el hecho de que ninguna pasaba por el origen de coordenadas. El error tiene su origen en el estudio previo de las funciones directamente proporcionales, en el que se les había remarcado el hecho de que éstas pasan por el origen de coordenadas y son funciones.

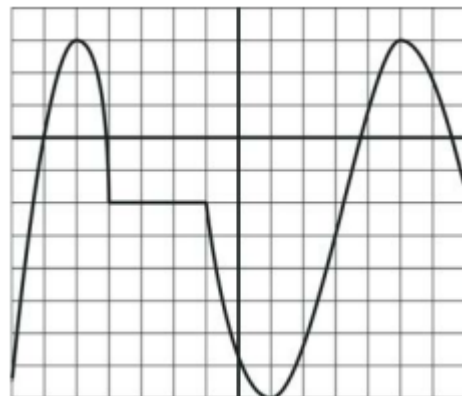
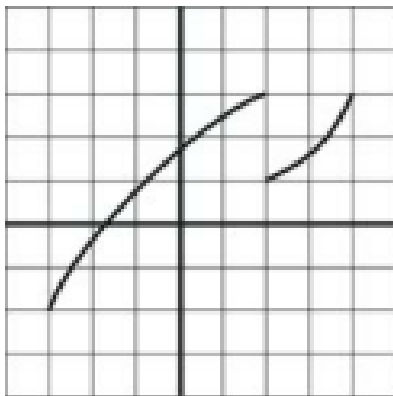
Como consecuencia de esto, los alumnos extrapolaron esta propiedad al resto de funciones.

- Algún alumno respondió que sólo las gráficas positivas son funciones. El error nuevamente tiene su origen en utilizar conocimientos que el alumno da por verdaderos, como es el recordar algunos ejercicios de proporcionalidad directa cuyas gráficas eran rectas representadas en el primer cuadrante, y extrapolarlos a estos casos.

2ª sesión

En los últimos 20 minutos se dibujan en la pizarra las funciones en las que tienen que identificar por parejas los puntos y zonas más importantes de las funciones explicados previamente en esta sesión.

Estudia las siguientes funciones. (Continuidad, discontinuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de corte con los ejes)



- Cuando los alumnos entregan las hojas se observa que ninguna de sus gráficas era idéntica a la dibujada en la pizarra, por lo que algunos puntos o zonas eran más complicados de estudiar.

Fueron muy pocos los alumnos que identificaron el comienzo y el final de la función con un mínimo y un máximo¹, respectivamente. El origen de este error puede deberse a varios motivos:

- Los alumnos identificaron únicamente los puntos más altos y más bajos en la gráfica, es decir, identificaron únicamente los máximos y mínimos absolutos.
 - Dedujeron que la gráfica no empezaba ni terminaba en esos puntos, sino que la gráfica se prolongaba indefinidamente y por lo tanto esos puntos no eran ni mínimos ni máximos.
- Algunos alumnos identifican el comienzo y el final de la zona constante de la función como un mínimo y un máximo, respectivamente. Este error puede deberse al hecho de que en esos puntos la función deja de decrecer, y, por lo tanto, se crean dos picos que, visualmente, pueden dar a pensar que son mínimos y máximos.
 - Algún alumno analizó la gráfica discontinua como si se tratase de dos funciones continuas distintas y, en algún caso aislado, el alumno dibujó una prolongación en la discontinuidad para que la gráfica fuese continua.

El primer error puede tener su origen en la utilización de un conocimiento con el que el alumno se siente más cómodo debido a que ya lo entiende; mientras que, en el segundo caso, un posible origen es que el alumno considere que la gráfica tiene que estar unida para que sea una función, debido a que hasta ese momento todas las representaciones gráficas que han visto son de funciones continuas.

4ª sesión

En esta sesión los alumnos realizan el examen de todos los contenidos explicados en las sesiones anteriores, lo resuelven de forma individual y disponen de los 50 minutos para terminarlo.

La principal finalidad de esta prueba es comprobar los conocimientos adquiridos por los dos grupos de 2º de ESO. No obstante, se informará a los alumnos una vez terminado el examen, que aquellos que saquen una buena nota serán recompensados con un aumento en su nota de evaluación, mientras que aquellos alumnos a los que no se les haya dado tan bien el examen, no serán penalizados de ninguna forma. El diseño, desarrollo y resultado derivados de este examen se analizan en profundidad en el siguiente capítulo.

¹ Se dice que un punto $P = (x_0, f(x_0))$ es un mínimo o máximo de f si existe un entorno reducido de centro x_0 , en símbolo $E(x_0)$, donde $\forall x \in E(x_0)$ se cumple que $f(x) > f(x_0)$, o $f(x) < f(x_0)$ respectivamente. Siendo x cualquier punto perteneciente al dominio de la función f .

Capítulo 8. Experimentación.

En este capítulo se presenta el cuestionario realizado por los alumnos de 2º de ESO junto con un estudio objetivo de los resultados obtenidos.

8.1. Muestra y diseño de la experimentación.

El estudio se lleva a cabo en dos grupos bastante homogéneos de 2º de ESO, teniendo el grupo A 28 alumnos y el grupo B 32 alumnos. Debido a la ausencia de diferencias entre ambos grupos, tanto por los alumnos como por la forma de impartir las clases, se hablará de un 2º de ESO genérico.

A continuación, se incluyen las dos hojas que constituyen el examen que los alumnos de 2º de ESO realizaron en la 4ª sesión. Posteriormente, en la siguiente sección se hará un análisis de cada pregunta individualmente a la vez que se muestran los criterios de corrección.

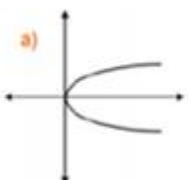
Hoja I:

Nombre y apellidos: _____ **Curso:** _____

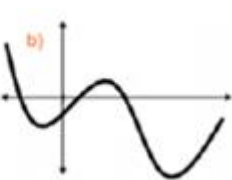
Fecha: _____ **Nota:** _____

1. Di cuáles de las siguientes gráficas son funciones y cuáles no. Justifica tu respuesta: (2 puntos)

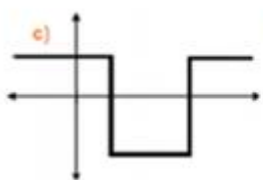
a)




b)



c)

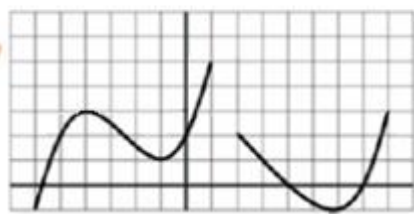


d)

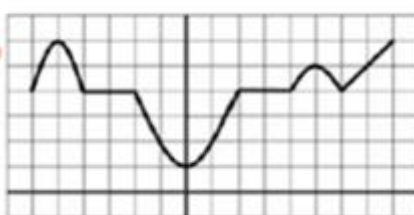


2. Estudia las siguientes funciones. (Continuidad, discontinuidad, crecimiento, decrecimiento, puntos de corte con los ejes, máximos y mínimos,) (4 puntos)

a)



b)



Hoja II:

3. Escribe a la derecha de cada ecuación si se trata de una función lineal, afín, cuadrática o hipérbola, explicando en cada caso el por qué. (2 puntos)

a) $y = -\frac{x}{3}$

b) $y = 5x^2 + 2^3x - 1$

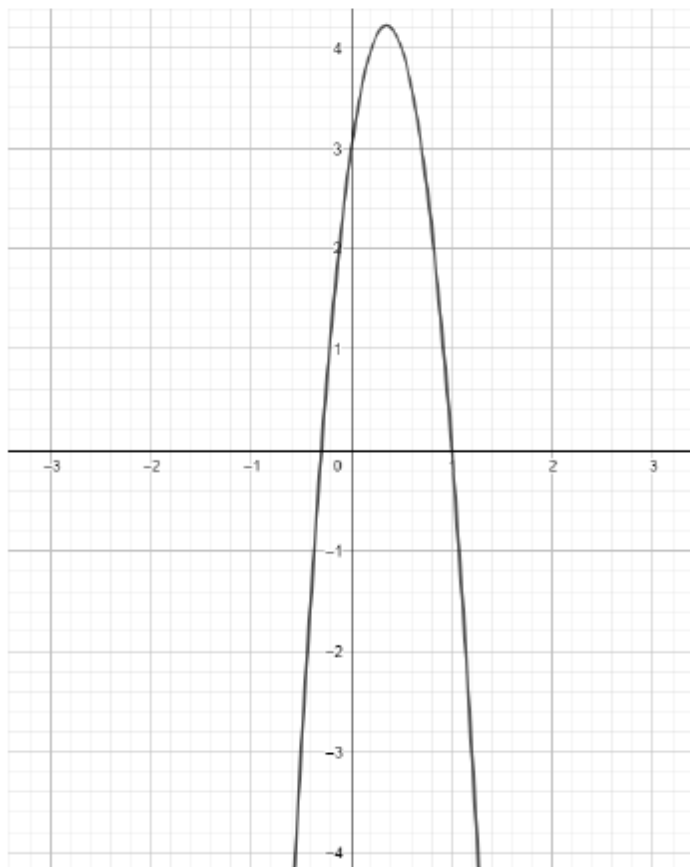
c) $xy = 1$

d) $y = -4x + 3$

4. Calcula la siguiente expresión: (1 punto)

$(x + 3)^2 =$

5. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la que corresponde a la siguiente gráfica? ¿Por qué? (1 punto)



a) $y = 10x^2 + 4$

b) $y = -10x + 5$

c) $y = -10x^2 + 7x + 3$

d) $y = 10x^2 - 7x - 2$

8.2. El cuestionario.

El examen tiene como objetivo detectar el nivel de comprensión de los alumnos en el tema de funciones. La evaluación de las actividades se realizará según los siguientes criterios:

- Primera actividad:
En cada apartado, por cada identificación correcta + 0,25 puntos y por cada justificación correcta +0,25 puntos.
- Segunda actividad:
 - Apartado a): hay 17 puntos y zonas a identificar entre todas las propiedades. Por lo tanto, por cada punto o zona bien identificada + 0,12 puntos, pudiendo llegar a obtener un 2,08.
 - Apartado b): hay 17 puntos y zonas a identificar entre todas las propiedades. Por lo tanto, por cada punto o zona bien identificada + 0,12 puntos, pudiendo llegar a obtener un 2,08.

Por lo tanto, un alumno que tuviera todo el ejercicio perfecto, podría llegar a obtener 4,16 puntos.

Como no se ha enseñado en clase un método formal para identificar los puntos o zonas, será válido cualquier método que permita identificar de forma clara cada propiedad con la zona correspondiente de la gráfica.

- Tercera actividad:
Por cada nombre de función correcto + 0,25 puntos y por cada justificación correcta +0,25 puntos.
- Cuarta actividad:
Cualquier explicación es válida en este ejercicio, tanto la analítica, como la geométrica o la utilización de la fórmula. Si un alumno tiene el planteamiento bien, pero se ha equivocado en los cálculos se le contará 0'25, 0'5 o 0'75, según la naturaleza o gravedad del error o errores cometidos. El alumno que obtenga como solución $x^2 + 9$ tendrá un 0 en este apartado.
- Quinta actividad:
El alumno que escoja la opción c) tendrá +0,5 puntos, y por una explicación razonable tendrá +0,5. Como explicación sirve cualquiera de las siguientes:
 - Mencionar que es la única función que tiene el coeficiente a negativo.
 - Mencionar que es la única que corta al eje Y en $y = 3$.
 - Hacer una tabla de valores y comprobar que el resto de funciones no pasan por esos puntos.
 - Cualquier otra justificación que tenga coherencia matemática.

No optarán a la puntuación máxima aquellos alumnos que lo justifiquen diciendo que la opción c) corta al eje X en $x = 1$ al igual que la gráfica, ya que la opción d) también cumple esta propiedad.

8.3. Cuestiones y comportamientos esperados.

En esta sección se nombran las cuestiones que podrían preguntar los alumnos en el examen, además de las respuestas que cabe esperarse.

Para explicar la forma en la se espera que los alumnos hagan el examen, como las preguntas donde es más probable que fallen o las que se supone que respondan la mayoría correctamente, se analizan en las distintas actividades por separado.

- Primera actividad:

Como ya se hizo un ejercicio muy similar en clase que además se corrigió, resolviendo las principales dudas, se espera que esta pregunta sea correctamente contestada por la mayoría de los alumnos. No obstante, cabe mencionar que el apartado c) es un poco más complicado que el resto, ya que los alumnos no han visto en clase ningún ejemplo en el que la gráfica tuviera zonas completamente verticales.

- Segunda actividad:

En este ejercicio se espera cierta heterogeneidad, ya que no se ha explicado un método formal para identificar las propiedades en la gráfica, por lo que pueden utilizar cualquier método que consideren oportuno, como el numerar todas las propiedades y poner los números correspondientes en la gráfica, dibujarla con diferentes colores, señalarlas con flechas, etc. Como observación, al haber un número tan elevado de zonas o puntos que identificar en cada función, es fácil olvidarse o no identificar alguna, por lo que es más sencillo ir perdiendo puntos.

- Tercera actividad:

En las primeras semanas del Practicum II, los alumnos vieron la proporcionalidad y aprendieron a identificar correctamente las funciones directa e inversamente proporcionales además de las afines. Por ello, se decide incluir dos funciones que no sean de este tipo para comprobar si los alumnos realmente tienen claro cómo es cada tipo de función, o solo se guían por funciones que se asemejan a lo que ya saben. Es por esto que se espera que haya bastantes alumnos que consideren que la función a) $y = -\frac{x}{3}$ es una hipérbola, y que la función c) $xy = 1$ digan que es lineal. Por contrapartida, se espera que la mayoría clasifique bien las opciones b) y d) al ser las más comunes.

- Cuarta actividad:

En este ejercicio se espera que ningún alumno presente la solución $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, ya que en la sesión 3 se hizo mucho hincapié en el desarrollo correcto de la identidad notable.

- Quinta actividad:

En las explicaciones de las funciones cuadráticas, se mostró gráficamente la forma en que las parábolas cambian según se modifican sus coeficientes. Además se resaltó la importancia de los coeficientes a y c de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ explicando que el coeficiente a era el responsable de que las ramas de la parábola miren hacia arriba o hacia abajo y de la anchura de la parábola, mientras que el coeficiente c solamente hace que la parábola suba o baje y nos indique el punto de corte con el eje Y . Por todo ello, se espera que la mayoría acierte señalando la opción c).

8.4. Resultados.

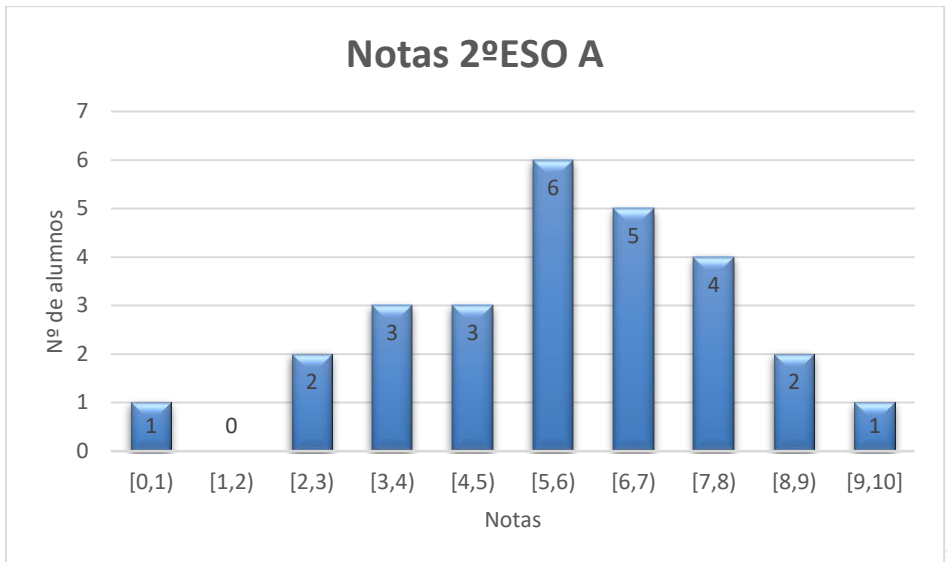
Los resultados obtenidos por los alumnos de 2º de ESO en el examen se van a analizar distinguiendo el grupo al que pertenecen.

En primer lugar, se muestran las notas de los 27 alumnos que hicieron el examen en el grupo A y los 31 alumnos que hicieron el examen en el grupo B, utilizando una columna para cada grupo.

Después, mediante la ayuda de gráficos, se muestran las notas obtenidas por los alumnos de cada clase en cada pregunta junto con la media y desviación típica correspondiente a cada grupo.

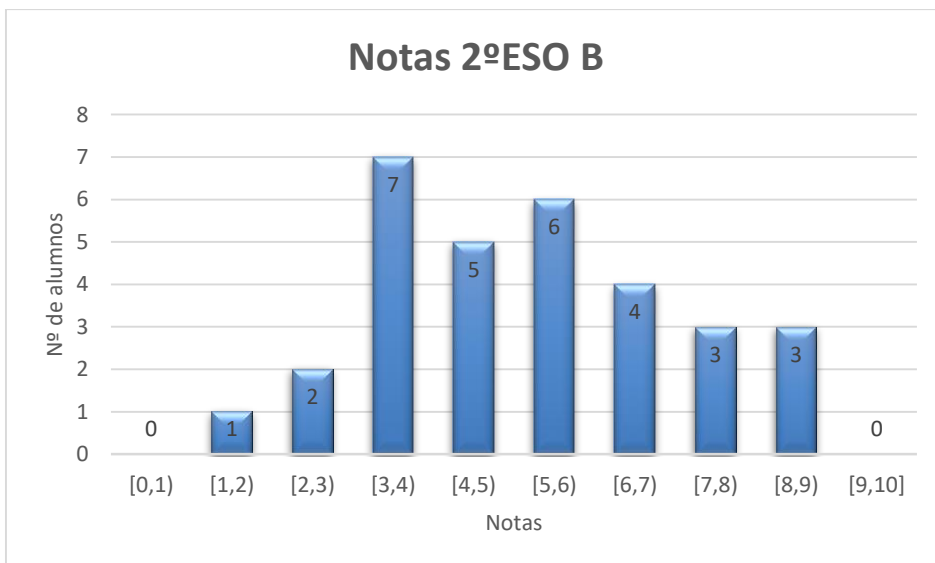
Como observación señalamos que el alumno que tiene un 0 en el examen en el grupo A únicamente escribió su nombre en el examen.

Grupo A	Grupo B
0,00	1,74
2,61	2,34
2,94	2,97
3,10	3,00
3,30	3,10
3,41	3,19
4,30	3,20
4,66	3,22
4,75	3,33
5,00	3,44
5,00	4,05
5,24	4,32
5,24	4,34
5,40	4,62
5,67	4,70
6,04	5,01
6,24	5,45
6,40	5,56
6,63	5,65
6,72	5,76
7,10	5,92
7,35	6,18
7,50	6,43
7,74	6,50
8,00	6,75
8,34	7,00
9,24	7,50
	7,51
	8,24
	8,47
	8,86



		Porcentaje
Aprobados	18	66,67%
Suspensos	9	33,33%
Total	27	

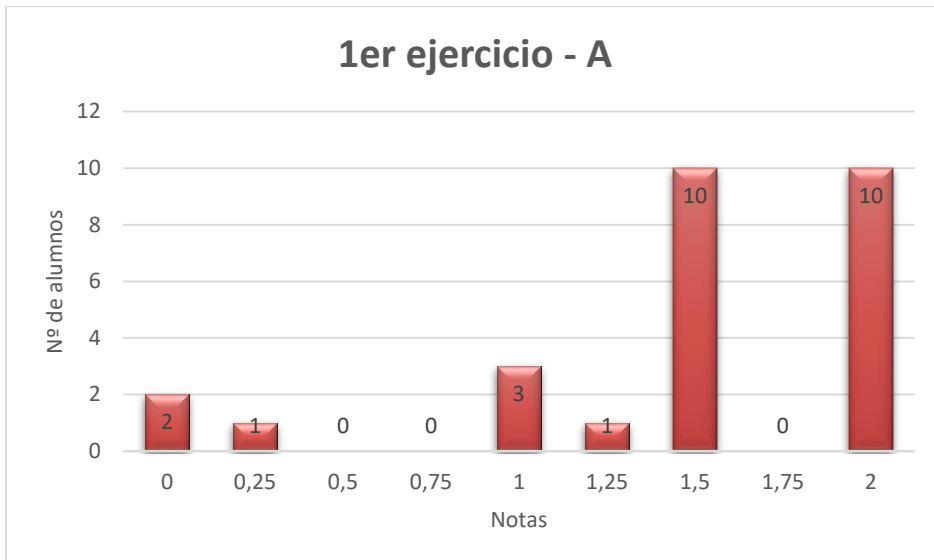
Media	5,48
Desviación	2,07



		Porcentaje
Aprobados	16	51,61%
Suspensos	15	48,39%
Total	31	

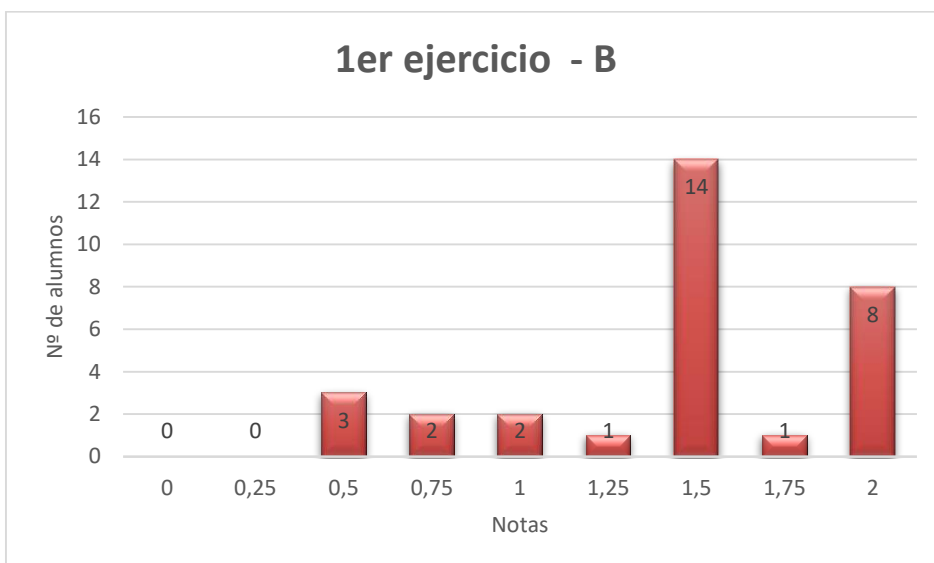
Media	5,11
Desviación	1,92

² En los gráficos, se utiliza el color azul para los histogramas mientras que el color rojo es utilizado para los diagramas de barras



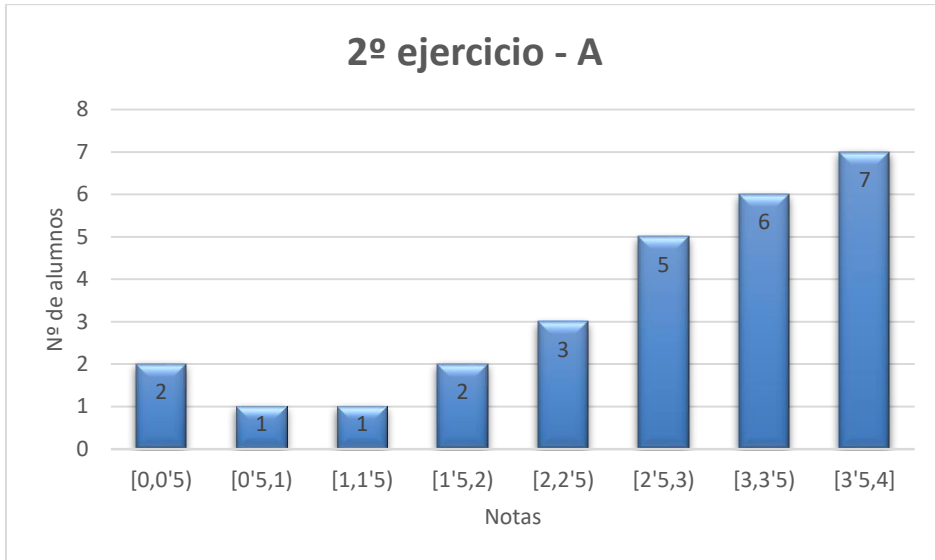
		Porcentaje
Aprobados	24	88,89%
Suspensos	3	11,11%
Total	27	

Media	1,46
Desviación	0,6



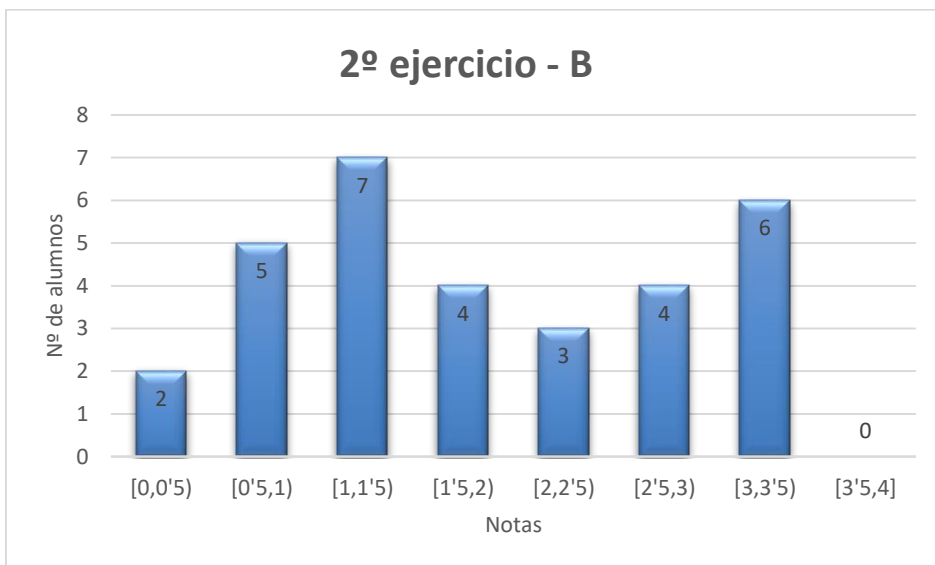
		Porcentaje
Aprobados	26	83,87%
Suspensos	5	16,13%
Total	31	

Media	1,45
Desviación	0,47



		Porcentaje
Aprobados	21	77,78%
Suspensos	6	22,22%
Total	27	

Media	2,7
Desviación	1,1



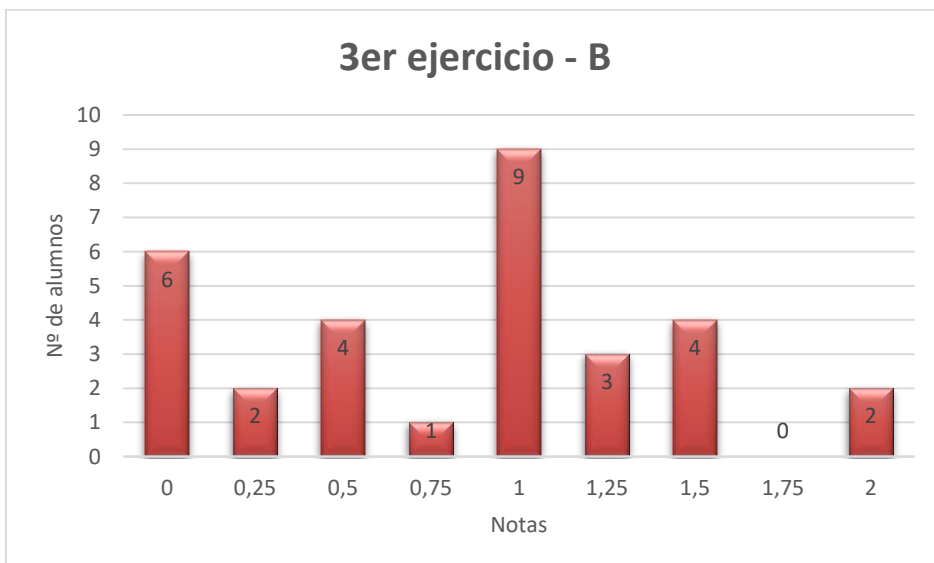
		Porcentaje
Aprobados	13	41,94%
Suspensos	18	58,06%
Total	31	

Media	1,82
Desviación	0,97



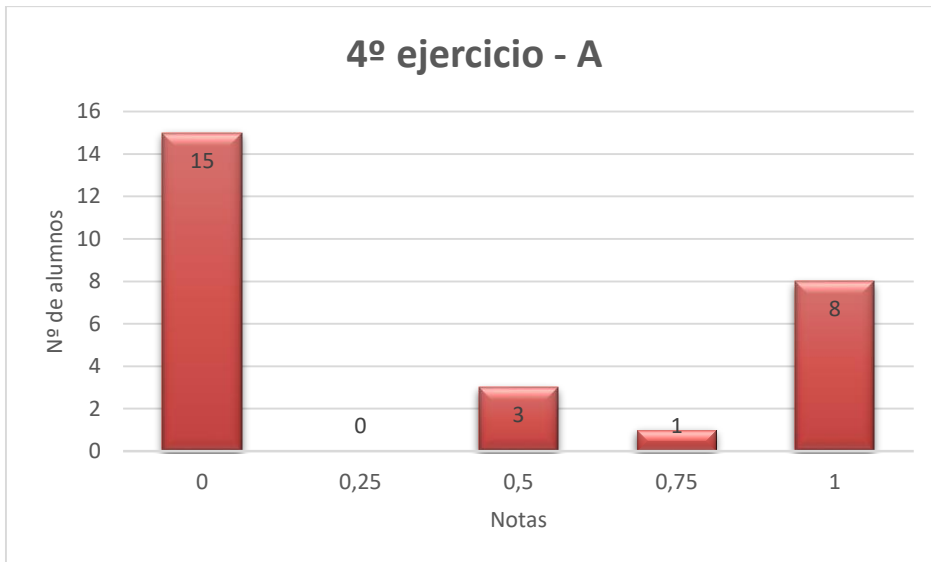
		Porcentaje
Aprobados	9	33,33%
Suspensos	18	66,67%
Total	27	

Media	0,58
Desviación	0,51



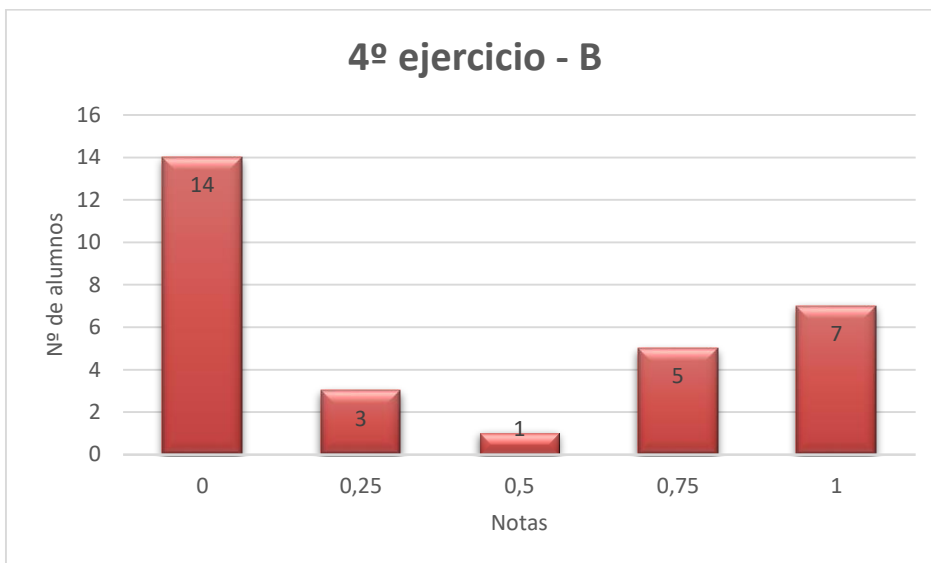
		Porcentaje
Aprobados	18	58,06%
Suspensos	13	41,94%
Total	31	

Media	0,84
Desviación	0,59



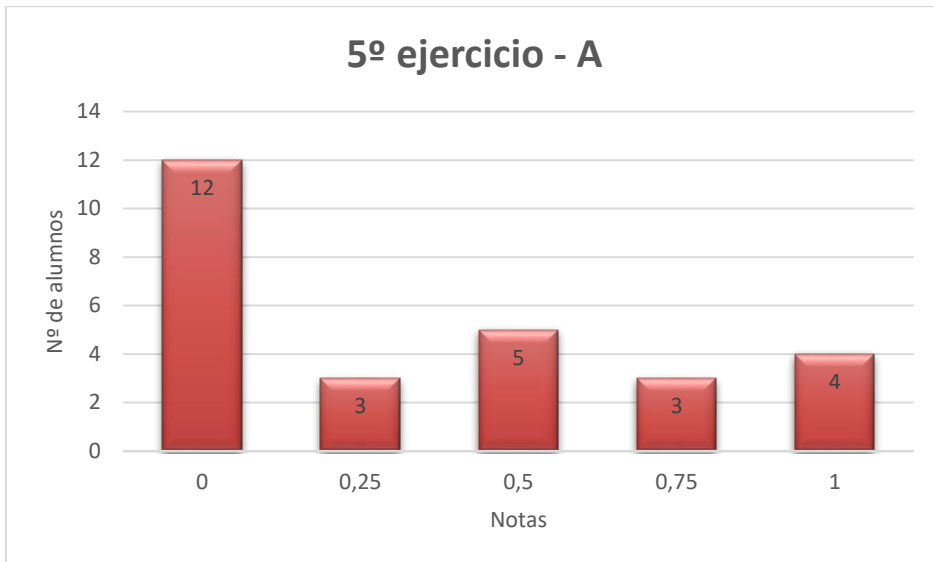
		Porcentaje
Aprobados	12	44,44%
Suspensos	15	55,56%
Total	27	

Media	0,38
Desviación	0,46



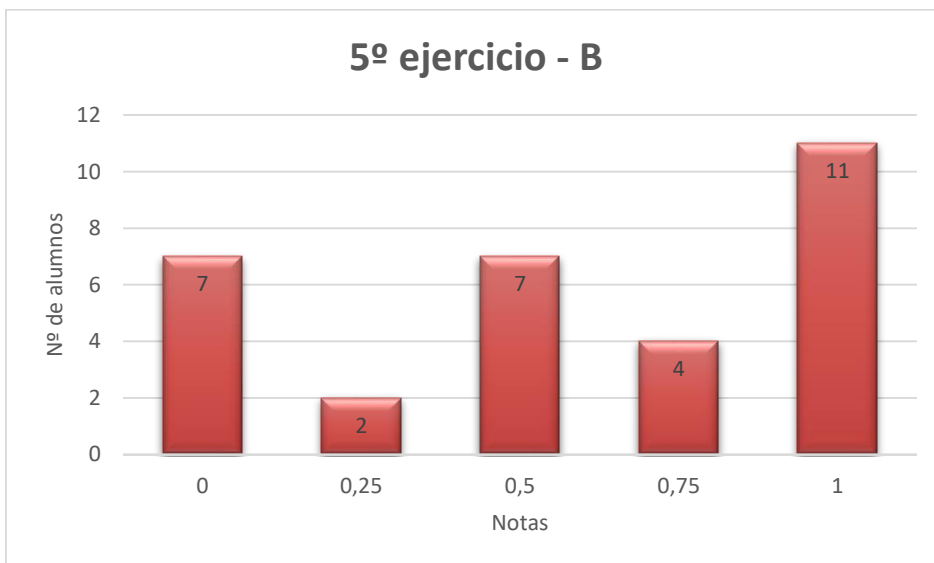
		Porcentaje
Aprobados	13	41,94%
Suspensos	17	54,84%
Total	31	

Media	0,41
Desviación	0,43



		Porcentaje
Aprobados	12	44,44%
Suspensos	15	55,56%
Total	27	

Media	0,35
Desviación	0,38



		Porcentaje
Aprobados	22	70,97%
Suspensos	9	29,03%
Total	31	

Media	0,58
Desviación	0,39

8.5. Discusión de los resultados.

Una vez obtenidos y organizados los datos, se procede a analizarlos.

- Calificaciones por grupo:

Al comparar únicamente la media y desviación típica se podría llegar a concluir que no hay diferencias significativas entre ambos grupos, debido a la similitud entre los resultados de estas medidas.

Por el contrario, si nos fijamos en los histogramas y en los porcentajes de alumnos que han aprobado el examen, se concluye que los alumnos de 2º de ESO A han comprendido de una forma global un poco mejor la unidad didáctica que los alumnos de 2º de ESO B, ya que, en el grupo A han aprobado un 66'67% de los alumnos mientras que en el grupo B han aprobado el 51'61% de los alumnos.

De forma global, se considera que son buenos resultados debido a que han aprobado 34 alumnos frente a los 24 que han suspendido, teniendo en cuenta además que el temario se ha impartido en tan solo tres días.

- Primera actividad:

Los resultados en el primer ejercicio son muy positivos, debido a que la mayoría de los alumnos en ambos grupos tienen 1,5 puntos o más sobre 2.

Como conclusión podemos afirmar que los alumnos de ambos grupos saben distinguir si una gráfica corresponde o no a una función y el por qué.

- Segunda actividad:

En este ejercicio se puede apreciar que el grupo A ha obtenido, en general, mejores resultados que el grupo B. Mientras que la media de las calificaciones del grupo A ha sido de 2,7, en el grupo B la media baja hasta un 1,82, siendo la desviación típica en ambos grupos muy similar.

Otra diferencia significativa es que 7 de los 27 alumnos del grupo A obtuvieron una puntuación superior o igual al 3,5 sobre 4, mientras que ninguno de los 31 alumnos del grupo B ha obtenido una puntuación superior o igual a 3,5.

Estos resultados pueden deberse al hecho de haber impartido la sesión 2, en la que se explicaba la teoría y conceptos recogidos en esta pregunta, primero en el grupo B. Como consecuencia en el grupo A se impartieron esos contenidos teniendo en cuenta las dudas que se habían producido en el otro grupo, y esto pudo hacer que los alumnos comprendieran los contenidos de una forma más clara.

De forma global, sería recomendable explicar de nuevo todas las propiedades de las funciones para conseguir que los alumnos que no han conseguido aprobar, comprendan mejor estos contenidos.

- Tercera actividad:

En este ejercicio, por el contrario, son más favorables los resultados en el grupo B que en el A. El motivo de estos resultados puede ser análogo al ejercicio anterior, ya que se estos contenidos se impartieron primero en el grupo A y posteriormente en el B.

De forma global, debido a que más de la mitad de los alumnos no ha conseguido alcanzar o superar la puntuación media en este ejercicio, se considera que los alumnos de 2º de ESO no tienen completamente afianzados el saber identificar los diferentes tipos de funciones según la fórmula proporcionada.

- Cuarta actividad:

Los resultados obtenidos son muy similares en ambos grupos.

De forma global, cabe destacar dos hechos:

- El 50% de los alumnos de 2º de ESO han sacado un 0 en este ejercicio.
- Prácticamente el 25% de los alumnos ha respondido perfectamente al ejercicio.

Es por este último hecho que se consideran positivos los resultados obtenidos en este ejercicio, debido a que solo se utilizaron 10 minutos para explicar esta igualdad notable, y se consiguió que 1 de cada 4 alumnos identificasen $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$, lo cual es un obstáculo incluso en cursos posteriores.

- Quinta actividad:

Se observan unos mejores resultados en el grupo B que en el grupo A, ya que tanto la media como el porcentaje de alumnos que han aprobado el ejercicio es bastante mayor en el grupo B que en el A, siendo la desviación típica prácticamente idéntica en ambos grupos.

Estos resultados pueden deberse a no haber dispuesto de tanto tiempo para la utilización del proyector en el grupo A debido a un problema con la pantalla.

De forma general, son buenos resultados debido a que más de la mitad de los alumnos de 2º de ESO han sabido contestar correctamente a este ejercicio. Aun así, sería conveniente poder repasar con un poco más de tiempo este contenido con ayuda del proyector en el grupo A, debido al número elevado de ceros que hay en este grupo.

Como conclusión final se señala la satisfacción global con los resultados obtenidos debido al elevado número de alumnos aprobados con relación al poco tiempo del que se ha podido disponer para explicar todos los contenidos.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

En este Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de enseñanza de funciones en 2º de ESO que está dividido en dos grandes partes, en la primera se relaciona y se hace un análisis de los libros de texto y el currículo, mientras que en la segunda parte nos centramos en la organización llevada a cabo en el proceso de enseñanza.

Más concretamente, en la parte I se analiza tanto del currículo como los libros de texto desde 6º de Educación Primaria hasta 4º de ESO, haciendo un análisis más detallado de 2º de ESO debido a que es el curso objetivo. Para los cursos referentes a 3º y 4º de ESO se ha optado por escoger los libros de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas y Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas respectivamente, debido a las similitudes entre ambos itinerarios en el currículo oficial en el bloque de funciones.

La finalidad de este estudio consiste en verificar si existe una coherencia entre el currículo y los libros de texto que justifique el uso de los libros como material de apoyo.

En la parte II se analiza de una forma más exhaustiva el tema referente a funciones del libro de 2º de ESO mediante un análisis ontosemiótico. Posteriormente se justifica la organización del desarrollo de las clases en base a las dificultades y errores previstos. Por último, se presentan tanto las actividades propuestas a los alumnos como las respuestas obtenidas, discutiendo estos resultados y aportando las conclusiones extraídas.

Conclusiones generales del trabajo

En la parte I, se observa una evolución en el currículo desde la inexistencia de un bloque de funciones en 6º de Educación Primaria hasta un lenguaje más formal y una búsqueda de relacionar las matemáticas con la realidad en 3º y 4º de ESO. Además, se observa como los libros de texto recogen los contenidos que aparecen en el currículo, siendo común el encontrar en los libros de texto más materia que la estrictamente necesaria.

En la parte II se concluye que el libro de texto ha sido una buena herramienta de apoyo para el desarrollo del tema de funciones, pero no indispensable, debido a que en la práctica se ha profundizado un poco más en los contenidos que los recogido en el libro. Cabe destacar como el libro incentiva a los alumnos a utilizar métodos tecnológicos en distintas secciones llamadas “En la web”.

Debido a la forma tan gráfica y visual de explicar el contenido tanto en la pizarra como con ayuda de Geogebra, que en gran medida resulta ser muy intuitivo, se ha observado como de forma genérica los alumnos han comprendido los distintos contenidos explicados.

Los resultados del cuestionario fueron en general positivos debido al número de aprobados, cercano al 59% de alumnos aprobados en 2º de ESO, y al escaso número de sesiones que se utilizaron para explicar toda la unidad didáctica.

Por todo ello se concluye que los alumnos han adquirido unas nociones básicas referentes al tema de funciones, siendo aun así recomendable, el repaso de las identidades notables y estudio gráfico de funciones con el fin de afianzarlas.

Cuestiones abiertas

Las principales cuestiones abiertas que se dejan en este trabajo son las siguientes:

- ¿Qué debería hacerse para conseguir que los alumnos comprendan y recuerden la identidad notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?

Ya que es un error que no aparece exclusivamente en 2º de ESO, si no en cursos posteriores, llegando a aparecer en algunos alumnos que cursan Bachillerato.

- ¿Debería formalizarse la necesidad de contextualizar todos los contenidos?

El objetivo es que los alumnos vean la utilidad en el mundo real de cada nuevo contenido aprendido y que cada vez menos en estas edades exista la idea generalizada de que las matemáticas no tienen utilidad práctica y solamente son un conjunto de mecanismos para resolver las actividades que aparecen en el libro de texto.

Referencias

Alonso Garzón, G., Ferrero de Pablo, L., Isabel Bernal, E. y Martín Martín, P. Anaya. En: *Matemáticas* 6. [Versión electrónica]. Recuperado de: <https://es.slideshare.net/JUDIMENDIPRL/matemticas-6-anaya> (pp. 43 y 164)

BOLETIN OFICIAL DE NAVARRA (BON) (2014). Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra. Pamplona. Recuperado de (19/02/2017): https://www.navarra.es/home_es/Actualidad/BON/Boletines/2014/174/.

BOLETIN OFICIAL DE NAVARRA (BON) (2015). Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra. Pamplona. Recuperado de (19/02/2017): https://www.navarra.es/home_es/Actualidad/BON/Boletines/2015/127/.

Colera Cañas, R, Colera Jimenez, J., Gaztelu Albero, I. y Oliveira González, M^a. J. Anaya. Anaya. En: *ESO3 MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS APLICADAS*. [Versión electrónica]. Recuperado de: <https://docs.google.com/a/iesboliches.org/viewer?a=v&pid=sites&srcid=aWVzYm9saWNoZXMub3JnfG1hdGVtYXRpY2FzfGd4OjIwMzg4ZWYyMjRjZWlyOGY>

Colera Jimenez, J., Gaztelu Albero, I. y Oliveira González, M^a. J. Anaya. Anaya. En: *ESO 4 MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS*. [Versión electrónica]. Recuperado de: <https://docs.google.com/a/iesboliches.org/viewer?a=v&pid=sites&srcid=aWVzYm9saWNoZXMub3JnfG1hdGVtYXRpY2FzfGd4OjY3NTM1ODc1ZGY4MTY5NzE>

Colera Jimenez, J., Gaztelu Albero, I. y Oliveira González, M^a. J. Anaya. En: *ESO 4 MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS APLICADAS*. [Versión electrónica]. Recuperado de: <https://docs.google.com/a/iesboliches.org/viewer?a=v&pid=sites&srcid=aWVzYm9saWNoZXMub3JnfG1hdGVtYXRpY2FzfGd4OjRkYTYzODZmYzRjMDExZjU>

Godino, J.D., Font, V., and Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. Recuperado de: *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (pp.131-155).

J. Colera Jimenez, Ignacio Gaztelu Albero y Ramón Colera Cañas. Anaya. En: *ESO1 MATEMÁTICAS*. [Versión electrónica]. Recuperado de: <https://www.edu.xunta.gal/centros/iesagraleboris/system/files/solucionario1.pdf> (pp. 332-357).

Santillana Educación, S.L. En: *2ESO Matemáticas*. [Versión electrónica]. Recuperado de: https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/anaya/adapcurri_2eso_mat.pdf (pp. 160-171).

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto

A. Unidad didáctica del libro de texto

13

Funciones



Las funciones nacen de la necesidad de describir cuantitativamente algunos fenómenos físicos con el fin de darles explicación.



Las leyes de la naturaleza relacionan variables. Por ejemplo:

- La distancia recorrida por un vehículo en una hora depende de la velocidad a la que se desplaza.
- La cantidad de masa forestal de un bosque depende del tiempo que haya transcurrido desde que empezó a formarse.

Aunque esa relación había sido advertida desde mucho tiempo atrás, fue **Galileo**, a mediados del siglo XVII, el primero que, experimentando, intentó relacionar numéricamente las variables que intervienen en el fenómeno. Estas relaciones numéricas permitieron dar forma algebraica a las funciones.

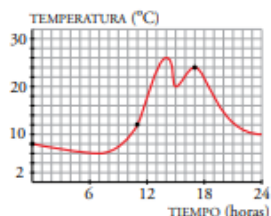


Descartes, filósofo y matemático francés del siglo XVII, concibió la manera de plasmar gráficamente las funciones sobre unos ejes cartesianos. (Recuerda: "cartesiano" viene de *Cartesius*, la expresión latina de Descartes).

La palabra "función" para designar estas relaciones, así como su definición precisa, llegaron en siglos posteriores. 

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Concepto de función

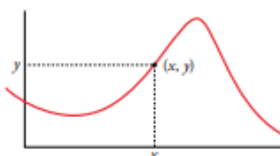


La gráfica del margen describe la temperatura ambiente, en un cierto lugar, en cada instante de un día.

Cada punto de la gráfica relaciona un valor del eje horizontal (tiempo: hora del día) con otro del eje vertical (temperatura: °C):

- A las 0 h (12 de la noche), la temperatura era de 8 °C.
- A las 11 h, la temperatura era de 12 °C.
- A las 17 h (5 de la tarde), la temperatura era de 24 °C.

Es una función que hace corresponder a cada instante una temperatura.



Una **función** relaciona **dos variables**. En general se designan por x e y :

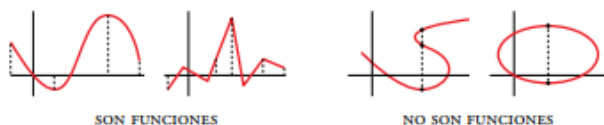
- x es la **variable independiente**.
- y es la **variable dependiente** (su valor depende del valor de x).

La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y .

Para apreciar con claridad el comportamiento de una función, esta se representa gráficamente sobre unos ejes cartesianos.

Ejercicio resuelto

Representar dos gráficas que sean funciones y otras dos que no lo sean. Explicar por qué cada una es o no función.



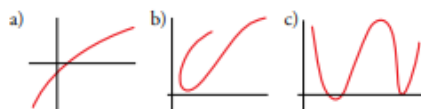
SON FUNCIONES

NO SON FUNCIONES

- Las dos primeras gráficas son funciones porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y .
- Las dos siguientes no son funciones, ya que a algunos valores de x les corresponden varios valores de y .

Piensa y practica

1. Di cuáles de las gráficas corresponden a funciones y cuáles no son funciones, justificando las respuestas:



2. Dibuja en tu cuaderno dos gráficas que correspondan a funciones y otras dos que no correspondan.

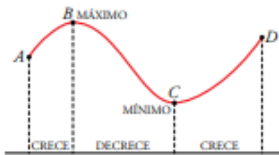
3. En la gráfica de arriba (temperatura a lo largo del día):

- a) ¿Podemos decir que la mínima temperatura se dio a las 7 de la mañana? ¿Cuál fue?
- b) ¿Cuándo se dio la máxima temperatura? ¿Cuál fue?
- c) ¿En qué momentos la temperatura fue de 18 °C?
- d) Durante 1 h, aproximadamente, el sol estuvo oculto por las nubes. ¿A qué hora crees que fue?
- e) Indica una temperatura que se haya repetido en cuatro momentos distintos.

En la web Practica el concepto de función, así como su interpretación.

Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

2 Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos



Las funciones se analizan y se describen de izquierda a derecha. La función del margen es *creciente* desde *A* hasta *B*, porque los valores de la ordenada son cada vez mayores. Es *decreciente* de *B* a *C*, porque, recorriendo ese tramo de izquierda a derecha, los valores de la *y* son cada vez menores. Finalmente, vuelve a ser *creciente* en el tramo de *C* a *D*.

El valor *máximo* lo toma en el punto *B*, y el *mínimo*, en el *C*.

Una función es **creciente** en un tramo cuando al aumentar la *x* (es decir, al recorrerla de izquierda a derecha), aumenta la *y*.

Es **decreciente** si, al aumentar la *x*, disminuye la *y*.

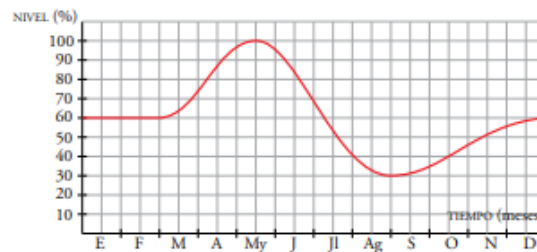
Si mantiene el mismo valor en todo el tramo, se dice que es **constante** en ese tramo.

El punto en el que la ordenada toma mayor valor se llama **máximo** de la función, y aquel en el que la ordenada toma el menor valor, **mínimo**.

Veamos esto con un ejemplo de la evolución del nivel de agua (en porcentaje) en un determinado embalse a lo largo de un año:

Evolución del nivel del embalse

- Enero y febrero: constante, 60 %.
- Principios de marzo hasta mediados de mayo: crece de 60 % a 100 %.
- Medios de mayo hasta final de agosto: decrece de 100 % a 30 %.
- Principios de septiembre hasta final de año: crece desde 30 % hasta 60 %.



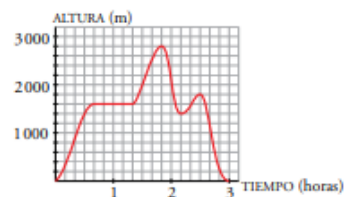
- En los dos primeros meses se mantiene estable (constante).
- Tiene un tramo creciente desde principios de marzo hasta mediados de mayo, que es cuando alcanza su máximo.
- Decrece hasta final de agosto, cuando llega a su mínimo.
- A partir de entonces, vuelve a crecer hasta final de año.

En la web

Practica los conceptos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función.

Piensa y practica

- En la gráfica de la derecha puedes ver la altura de una avioneta durante sus tres horas de vuelo.
 - ¿Cuánto tiempo permanece estable? ¿A qué altura?
 - ¿Cuánto tarda en estabilizar la altura?
 - ¿Cuándo llega al máximo? ¿Qué altura alcanza?
 - Haz un breve resumen de la evolución de la altura de la avioneta desde que despega hasta su aterrizaje.



3

Funciones de proporcionalidad: $y = mx$

Andrea tiene un avión teledirigido; Helio, un helicóptero teledirigido, y Diana, un dron para grabar imágenes desde las alturas. El avión asciende medio metro por segundo; el helicóptero, un metro cada segundo, y el dron, dos metros por segundo.

Hoy, los tres amigos, han salido al campo a volar sus aparatos.



Veamos cuáles son las alturas de estos en función del tiempo que ascienden.

- AVIÓN: 0,5 m/s

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	...	x
ALTURA (m)	0	0,5	1	1,5	2	...	$0,5x$

La altura a la que sube el avión se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = 0,5x$$

- HELICÓPTERO: 1 m/s

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	...	x
ALTURA (m)	0	1	2	3	4	...	x

La altura que alcanza el helicóptero se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

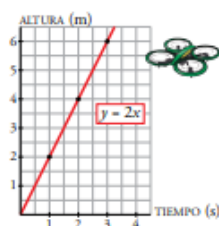
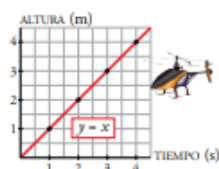
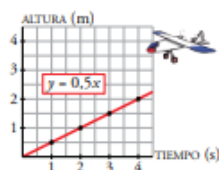
$$y = x$$

- DRON: 2 m/s

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	...	x
ALTURA (m)	0	2	4	6	8	...	$2x$

La altura a la que sube el dron se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = 2x$$

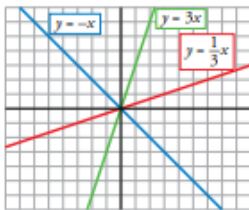


Nombre y apellidos: Fecha:

La altura que alcanza el helicóptero de Helio es **proporcional** al tiempo que está ascendiendo. Lo mismo ocurre con la altura del avión y la del dron. Por eso, estas funciones que relacionan las alturas con el tiempo:

$$y = 0,5x \qquad y = x \qquad y = 2x$$

se llaman *funciones de proporcionalidad*.



Se llama **función de proporcionalidad** a la que relaciona dos valores directamente proporcionales.

Tiene la ecuación $y = mx$.

Se representa mediante **una recta** que pasa por el punto $(0, 0)$.

La constante de proporcionalidad, m , puede ser positiva o negativa. Se llama **pendiente** de la recta y tiene que ver con su inclinación.

Ejercicio resuelto

Representar las funciones de proporcionalidad cuyas ecuaciones son:

a) $y = -2x$

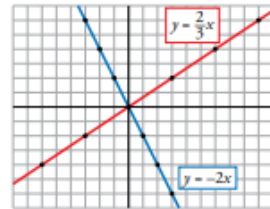
b) $y = \frac{2}{3}x$

a)

x	0	1	2	3	-1	-2
y	0	-2	-4	-6	2	4

b) Para obtener ordenadas (y) enteras, daremos a las abscisas (x) valores múltiplos de 3:

x	0	3	6	9	-3	-6
y	0	2	4	6	-2	-4



Piensa y practica

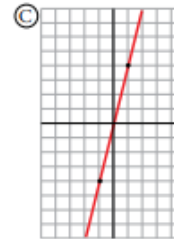
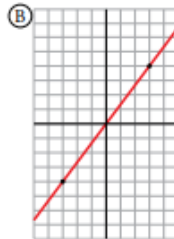
1. Asocia a cada una de las gráficas la ecuación que le corresponda:

a) $y = 4x$

b) $y = \frac{4}{3}x$

c) $y = -\frac{1}{4}x$

d) $y = -3x$



2. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad dadas por su ecuación. Completa en cada caso la tabla correspondiente en tu cuaderno.

a) $y = -\frac{1}{2}x$

x	0	2	4	6	-2	-4
y						

b) $y = \frac{2}{5}x$

x	0	5	10	15	-5	-10
y						

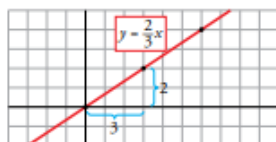
En la web Practica el concepto de función de proporcionalidad.

Nombre y apellidos: Fecha:

4

Pendiente de una recta

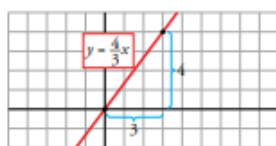
• La ecuación de esta recta es $y = \frac{2}{3}x$:



Su pendiente es $\frac{2}{3}$.

Por cada 3 unidades que avanza la x , la y sube 2 unidades.

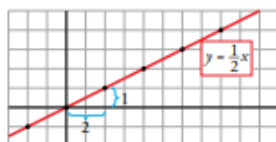
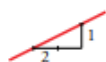
• La ecuación de esta recta es $y = \frac{4}{3}x$:



Su pendiente es $\frac{4}{3}$.

Cada vez que la x avanza 3 unidades, la y sube 4 unidades.

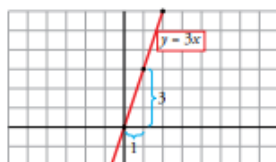
• La ecuación de esta recta es $y = \frac{1}{2}x$:



Su pendiente es $\frac{1}{2}$.

Cuando la x avanza 2 unidades, la y sube 1 unidad.

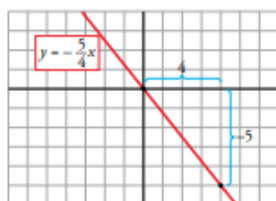
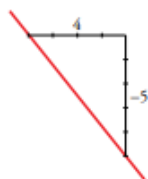
• La ecuación de esta recta es $y = 3x$:



Su pendiente es $3 = \frac{3}{1}$.

Cuando la x avanza 1 unidad, la y sube 3 unidades.

• La ecuación de esta recta es $y = -\frac{5}{4}x$:



Su pendiente es $-\frac{5}{4} = \frac{-5}{4}$.

Cuando la x avanza 4 unidades, la y baja 5 unidades.

Nombre y apellidos: Fecha:

En la web

Practica el concepto de pendiente de una recta.

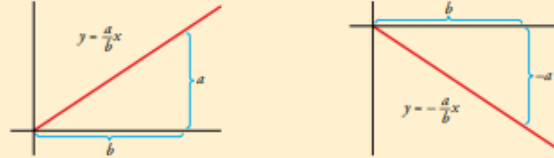
En la web

Concepto de pendiente de una recta.

La **pendiente** m de una recta $y = mx$ es la medida de su crecimiento:

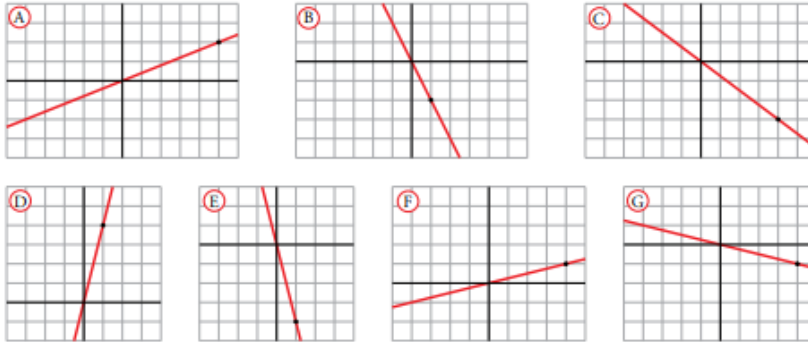
- Si m es positiva, la recta es creciente.
- Si m es negativa, la recta es decreciente.

Las rectas $y = \frac{a}{b}x$, $y = -\frac{a}{b}x$, siendo a y b números naturales, se representan del siguiente modo:



Piensa y practica

1. Escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

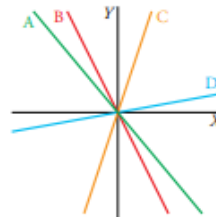


2. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad basándote en sus pendientes:

- | | | | |
|--------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| a) $y = x$ | b) $y = 2x$ | c) $y = 3x$ | d) $y = -5x$ |
| e) $y = -2x$ | f) $y = \frac{2}{5}x$ | g) $y = -\frac{1}{3}x$ | h) $y = -\frac{5}{2}x$ |

3. Indica cuál de estas puede ser la pendiente de cada una de las rectas representadas a la derecha.

- a) $m = 3$
- b) $m = 1/4$
- c) $m = -1$
- d) $m = -7/3$



Nombre y apellidos: Fecha:

5 Funciones lineales: $y = mx + n$

Nota

En matemáticas superiores se llaman **funciones lineales** a las del tipo $y = mx$.

A estas otras, $y = mx + n$, se las llama **funciones afines**.

Sin embargo, en matemáticas aplicadas como, por ejemplo, en economía, se llaman lineales a las funciones que se representan mediante rectas.

Así lo hacemos aquí:

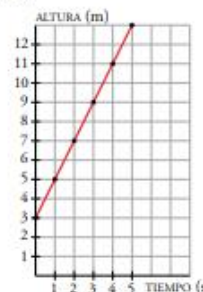
- lineales $\rightarrow y = mx + n$
- de proporcionalidad $\rightarrow y = mx$

En la web
Practica el concepto de función lineal.



Diana quiere hacer volar su dron desde su terraza, que está a 3 metros de altura. El dron sube a una velocidad de 2 metros cada segundo. Por tanto, la altura del dron en función del tiempo que esté subiendo es:

- 0 segundos $\rightarrow 3$ m
- 1 segundo $\rightarrow 3 + 1 \cdot 2 = 5$ m
- 2 segundos $\rightarrow 3 + 2 \cdot 2 = 7$ m
- 3 segundos $\rightarrow 3 + 3 \cdot 2 = 9$ m
- 4 segundos $\rightarrow 3 + 4 \cdot 2 = 11$ m
- 5 segundos $\rightarrow 3 + 5 \cdot 2 = 13$ m



TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5	...	x
ALTURA (m)	3	5	7	9	11	13	...	$3 + 2x$

En la web
Practica el concepto de función lineal.

La altura se obtiene en función del tiempo mediante la ecuación:

$$y = 3 + 2x$$

En la web
Practica con funciones $y = mx + n$.

Ten en cuenta
Las funciones representadas mediante rectas tienen por ecuación:

$$y = mx + n$$

Si $n = 0$, estamos en el caso de una función de proporcionalidad:

$$y = mx$$

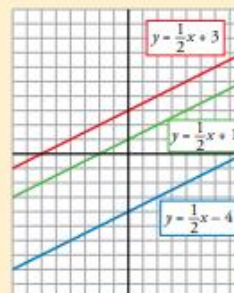
La ecuación $y = mx + n$ se representa mediante una recta de **pendiente** m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

n se llama **ordenada en el origen**.

Dos ecuaciones con la misma pendiente se representan mediante rectas paralelas.

Las funciones $y = mx + n$ se llaman **funciones lineales**.

Cuando $n = 0$ se trata de una función de proporcionalidad, $y = mx$.



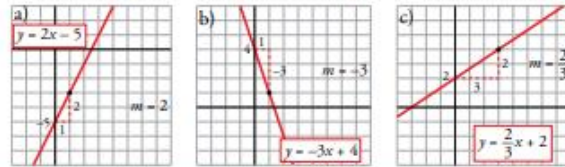
Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Ejercicios resueltos

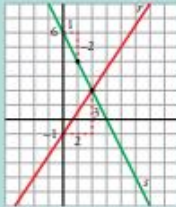
1. Representar estas funciones:

- a) $y = 2x - 5$
- b) $y = -3x + 4$
- c) $y = \frac{2}{3}x + 2$

- a) Para representar $y = 2x - 5$, nos fijamos en que $m = 2$ y $n = -5$. Por tanto, dibujaremos una recta que pase por $(0, -5)$ y cuya pendiente sea 2 (avanza 1, sube 2).
- b) Procediendo de forma análoga al caso anterior, dibujaremos una recta que pase por $(0, 4)$ y cuya pendiente sea -3 (avanza 1, baja 3).
- c) La recta pasará por $(0, 2)$ y su pendiente será $\frac{2}{3}$ (avanza 3, sube 2).



2. Deducir las ecuaciones de las dos rectas representadas.



Al ser rectas, la ecuación de ambas es $y = mx + n$.

- Ecuación de r :
Pasa por $(0, -1)$. Por tanto, $n = -1$.
Cuando avanza 2, sube 3. Su pendiente es $m = \frac{3}{2}$.
Su ecuación es: $y = \frac{3}{2}x - 1$.
- Ecuación de s :
Pasa por $(0, 6)$. Por tanto, $n = 6$.
Cuando avanza 1, baja 2. Su pendiente es $m = \frac{-2}{1} = -2$.
Su ecuación es: $y = -2x + 6$.

3. Escribir la ecuación de la recta, r , que tiene ordenada en el origen 3 y pendiente $-0,4$.

Podemos escribir la ecuación con esa pendiente:
$$y = 3 - 0,4x$$

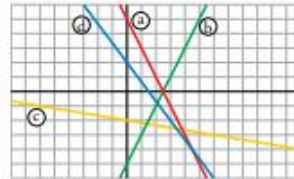
O expresar la pendiente mediante una fracción para poder representarla más fácilmente:
$$y = 3 - \frac{2}{5}x$$

Piensa y practica

1. Representa las siguientes funciones:

- a) $y = -2x + 5$
- b) $y = x - 3$
- c) $y = \frac{2}{3}x - 4$
- d) $y = \frac{3}{2}x + 4$
- e) $y = -x - 1$
- f) $y = 0,8x - 6$
- g) $y = \frac{3}{5}x + 1$
- h) $y = -0,625x + 1$

2. Escribe las ecuaciones de estas funciones:



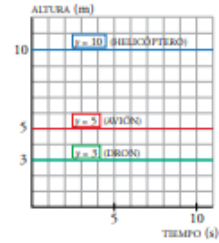
En la web Practica la asociación entre funciones lineales y sus correspondientes representaciones gráficas.

168

Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

6 Funciones constantes: $y = k$

Andrea, Helio y Diana han vuelto a hacer volar sus artefactos, pero esta vez cada uno lo mueve solo en horizontal, siempre a la misma altura. Helio pasea su helicóptero desde su terraza, a 10 m de altura; Andrea ha lanzado su avión por la ventana a 5 m del suelo, y Diana se ha subido a una escalera para que su dron se mantenga a 3 m de altura.



Avión de Andrea:

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	...
ALTURA (m)	5	5	5	5	5	...

La altura, en función del tiempo, es $y = 5$ para el avión de Andrea.

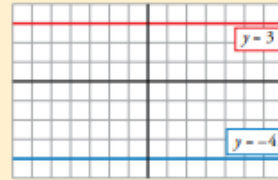
Ten en cuenta

La función constante $y = k$ es una función lineal, $y = mx + n$, en la que $m = 0$.

La función $y = k$, en la que el valor de y no depende de x , se llama **función constante**.

Se representa por una recta paralela al eje X , a una distancia k de este.

La pendiente de una función constante es 0.



Ejercicio resuelto

El London Eye es una noria mirador de 136 m de altura que está en el centro de Londres.

Escribir la ecuación de la función que relaciona el tiempo que gira la noria y la distancia a la que se encuentra del centro una determinada cabina.

Como la altura es de 136 m, la distancia de una cabina al centro es:

$$136 : 2 = 68 \text{ m}$$

Por tanto, la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia de una cabina al centro de la noria es una función constante de ecuación:

$$y = 68$$



Piensa y practica

1. Representa las siguientes funciones:

- a) $y = 7$
- b) $y = -3$
- c) $y = 0$

2. a) Representa la recta que pasa por estos puntos:

$A(-2, 3)$ $B(5, 3)$

b) Sin hacer ningún cálculo, ¿podrías dar la ecuación de la recta anterior?

3. ¿Cuál es la ecuación del eje X ?

4. Escribe la ecuación de las siguientes funciones:

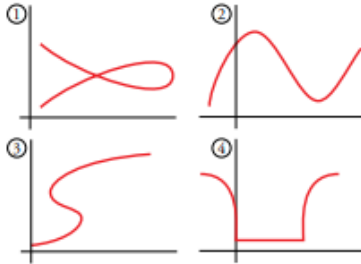


Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Ejercicios y problemas

Concepto de función

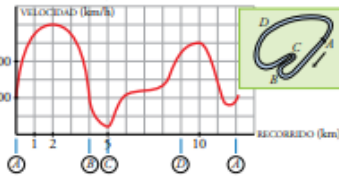
1. ¿Cuáles de estas gráficas corresponden a una función y cuáles no? Explica por qué.



2. a) ¿Puede una recta vertical, paralela al eje Y , ser la representación gráfica de una función?
 b) ¿Y una recta horizontal?
 c) ¿Y una circunferencia?

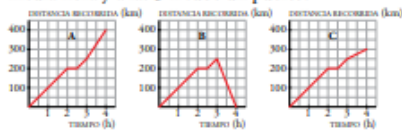
Interpretación de gráficas

3. Esta gráfica describe la velocidad de un coche de carreras en cada lugar de ese circuito:



- a) Di en qué tramos la velocidad es creciente y en cuáles es decreciente.
 b) ¿A qué crees que se deben los aumentos y las disminuciones de velocidad?
 c) Señala el máximo y el mínimo de esta función.

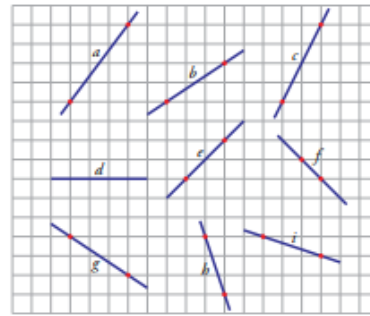
4. Indica cuál de estas gráficas representa la distancia recorrida por un vehículo a lo largo de 4 h de viaje, sabiendo que a las 2 h para a descansar durante media hora y a las 3 h sube un puerto:



¿Cuánto ha durado el viaje? ¿Cuánto ha recorrido?

Funciones lineales

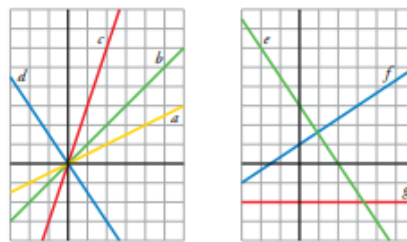
5. Calcula la pendiente de cada una de las siguientes rectas:



6. Representa las siguientes funciones sin la ayuda de una tabla de valores:

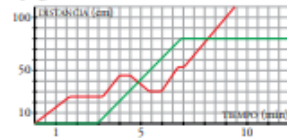
- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $y = 2x$ | b) $y = \frac{1}{2}x$ |
| c) $y = -3x$ | d) $y = \frac{4}{3}x$ |
| e) $y = -\frac{2}{5}x$ | f) $y = \frac{3}{4}x$ |
| g) $y = -\frac{1}{2}x - 2$ | h) $y = -3x + 5$ |
| i) $y = -\frac{4}{3}x + 1$ | j) $y = -\frac{2}{5}x + 4$ |
| k) $y = -1$ | l) $y = 4$ |
| m) $y = 3$ | n) $y = x$ |

7. Escribe la ecuación de cada una de las siguientes funciones, fijándote en la pendiente y la ordenada en el origen de cada una:



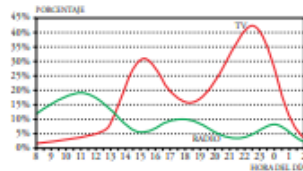
Resuelve problemas

8. Sara y Daniel ponen a competir, en una carrera, a sus caracoles; uno de ellos lleva una pegatina roja, y otro, una pegatina verde.



- El verde tarda en salir y se para antes de llegar.
 a) ¿Cuánto tiempo está parado en cada caso? ¿A qué distancia de la meta se para definitivamente?
 b) ¿Cuántos centímetros y durante cuánto tiempo marcha el rojo en dirección contraria?
 c) Describe la carrera.

9. Estas gráficas corresponden a los porcentajes de personas que ven la televisión o escuchan la radio a ciertas horas del día.

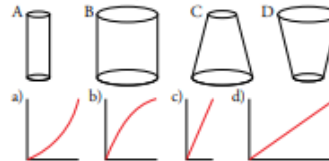


- a) Describe la curva correspondiente a la televisión: dónde es creciente, dónde es decreciente, máximos, mínimos... Relacionala con las actividades cotidianas: levantarse, acostarse, comida, cena...
 b) Haz lo mismo con la curva de la radio.
 c) Compara las dos curvas y relaciónalas.

10. Un grifo tiene un caudal constante. Estas son las gráficas de la función nivel de agua-tiempo y los vasos correspondientes.



Ahora asocia tú cada gráfica a su vaso:



11. En un parque hay una tienda donde se alquilan patines, a 0,50 € la hora; monopatinés, a 1 €/h, y bicicletas, a 2 €/h.

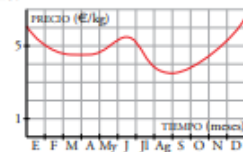


El coste del monopatín, y , en función del tiempo que se utilice, x , viene dado por la ecuación $y = x$.

- a) Calcula la ecuación que relaciona el coste de los patines en función del tiempo que se utilice.
 b) Halla la ecuación que relaciona el coste de la bicicleta en función del tiempo.
 c) Representa en los mismos ejes coordenados las tres funciones de proporcionalidad.
 d) ¿Cuáles son las pendientes de las tres rectas? ¿Qué representan en este contexto?

Autoevaluación

1. a) Describe la evolución del precio de la miel a lo largo de un año.

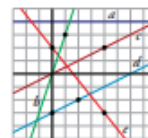


- b) ¿En qué tramos la función es creciente y en cuáles es decreciente?
 c) ¿Cuándo es mínimo el precio y cuál es?

2. Representa estas funciones:

a) $y = -\frac{5}{3}x$ b) $y = 2x - 5$ c) $y = 4$

3. Escribe la ecuación de cada una de estas funciones:



Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Educación secundaria obligatoria

Tutora: Laura Portero Egea, Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas.

17/06/2019