

ESTADÍSTICA

Idoia Lizarraga Baztán

INTRODUCCIÓN DE LA ESTADÍSTICA EN UN PROYECTO DE 2º ESO

TFM 2019

upna
Universidad
Pública de Navarra
Nafarroako
Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS
MÁSTER UNIVERSITARIO EN
FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE
EDUCACIÓN SECUNDARIA

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Director:

José Antonio Moler Cuiral, Departamento de Matemáticas

**Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato,
Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas**

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

**Introducción de la Estadística en un proyecto de
2º ESO**

Idoia Lizarraga Baztán

ÍNDICE

Introducción general.....	7
Parte I:	9
La estadística en el currículo vigente y en los libros de texto	9
Capítulo 1	13
La estadística en el currículo vigente	13
1.1. Contenidos en Educación Primaria	13
1.2. Contenidos en ESO	14
1.3. Contenidos en Bachillerato	15
1.4. Tabla de contenidos de estadística en el currículo vigente.....	16
Capítulo 2	17
Los criterios de evaluación de la estadística en el currículo vigente.....	17
2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria	17
2.2. Criterios de evaluación en ESO	18
2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato.....	18
2.4. Tabla de los criterios de evaluación de la estadística en el currículo vigente	19
Capítulo 3	21
Los estándares de aprendizaje evaluables de la estadística en el currículo vigente	21
3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria	21
3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO	22
3.4. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato	22
Capítulo 4.....	25
Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la estadística en el currículo vigente.....	25
4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º de Primaria (ANAYA).....	25
4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de la ESO (SM).....	27
4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de la ESO (ANAYA)	28
4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de la ESO (SM académicas).....	30
4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de la ESO (SM académicas).....	32
Capítulo 5	35
Resultados	35
5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto.....	35
5.2. Coherencia de los libros de texto en relación al currículo.....	37

Introducción de la estadística en un proyecto de 2º ESO

Parte II:.....	39
Análisis de un proceso de estudio de la estadística en 2º ESO	39
Capítulo 6.....	43
La estadística en el libro de texto de referencia	43
6.1. Objetos matemáticos involucrados.....	43
6.2. Análisis global de la unidad didáctica.....	44
6.3. Otros aspectos relevantes	45
Capítulo 7.....	47
Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica	47
7.1. Dificultades	47
7.2. Errores y su posible origen.....	48
Capítulo 8.....	51
El proceso de estudio	51
8.1. Distribución del tiempo de la clase	51
8.2. Actividades adicionales planificadas.....	52
8.3. Actividad autónoma del alumnado prevista	52
Capítulo 9.....	53
Experimentación	53
9.1. Muestra y diseño de la experimentación	53
9.2. El cuestionario.....	54
9.2. Cuestiones y comportamientos esperados.....	68
9.4. Resultados	69
9.5. Discusión de los resultados	71
Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas.....	73
Síntesis	73
Conclusiones	74
Cuestiones abiertas.....	75
Referencias.....	77
ANEXOS.....	79
Anexo I: Unidad Didáctica del libro de texto.....	79

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la incorporación de las matemáticas al estudio por proyectos.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre estadística, que se ha puesto en marcha en dos aulas de Hijas de Jesús Pamplona en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

La estadística en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la estadística en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cinco capítulos. En el primer, segundo y tercer capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo vigente que hacen referencia a la estadística en cada uno de los grados. En el cuarto se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de matemáticas de 2º de la ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el quinto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

La estadística en el currículo vigente

Este capítulo recoge la presencia de la estadística en el currículo vigente según la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). El estudio se centra en los ciclos de primaria, secundaria y bachiller y se hace referencia a los contenidos de la estadística y a los criterios de evaluación presentes en dicho currículo.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

Para conocer la estadística implicada a lo largo de este ciclo se ha consultado el Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

Dentro de las asignaturas troncales de esta etapa se encuentra la asignatura de matemáticas. Los contenidos dentro de cada asignatura se organizan en bloques y uno de los bloques correspondientes a esta asignatura es el de estadística y probabilidad.

En este bloque se recogen los contenidos presentes a lo largo de este ciclo relacionados con estos ámbitos y se definen los siguientes:

- Gráficos y parámetros estadísticos.
- Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos.
- Construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas.
- Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango.
- Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales.
- Análisis crítico de las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.
- Carácter aleatorio de algunas experiencias.
- Iniciación intuitiva al cálculo de probabilidad de un suceso.

La etapa de la Educación Primaria está dividida en ciclos y la forma de trabajar la estadística en cada uno de ellos es distinta y va aumentando la complejidad progresivamente. Según recoge Carmen Batanero en su estudio sobre la estadística en la educación obligatoria, durante el primer ciclo, en el que el alumnado tiene entre seis y siete años, se utilizan técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos y se trabaja con datos de tipo cualitativos, con descripciones verbales y con gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos (pictogramas o gráficos de barras). Durante el segundo ciclo, cuando tienen entre ocho y

nueve años, utilizan tablas de datos, comienzan a usar técnicas de recuento de datos, encuestas, observaciones y mediciones. Se relacionan las tablas de doble entrada y los gráficos sencillos con los fenómenos familiares y la vida cotidiana. Por último, en el tercer ciclo, con edades de entre diez y once años, comienzan a ver distintas formas de representar la información, diferentes gráficos estadísticos. Se trabaja con la media aritmética, la moda y el rango aplicados a situaciones familiares.

1.2.Contenidos en ESO

Al igual que en la Educación Primaria, los contenidos para la Educación Secundaria Obligatoria vienen estipulados en el currículo vigente y en este caso se recogen en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

En este caso la asignatura de matemáticas también forma parte de las asignaturas troncales de este ciclo. Durante los cursos de 1º y 2º de la ESO, los contenidos presentes en el bloque de estadística son los siguientes:

- Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas.
- Variables cualitativas y cuantitativas.
- Frecuencias absolutas y relativas.
- Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.
- Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias.
- Medidas de tendencia central.
- Medidas de dispersión.
- Fenómenos deterministas y aleatorios.
- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.
- Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
- Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

En los cursos de 3º y 4º de la ESO, se realiza una división de las matemáticas en dos itinerarios distintos. Por un lado se encuentran las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y por otro las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, el enfoque y la aplicación que se le da a la estadística es distinta en cada caso pero los contenidos son los mismos.

En 3º de la ESO se introducen el significado, cálculo y aplicaciones de la media, moda, cuartiles y mediana. Los datos se agrupan en intervalos y se añade el histograma a las gráficas que ya conocían. La media y la desviación típica se interpretan conjuntamente y

se utilizan las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.

Es en 4º de la ESO cuando se introduce la estadística bidimensional, diagramas de dispersión y correlación. Las medidas de centralización y dispersión se utilizan para realizar estudios detallados, comparaciones, valoraciones y poder analizar la representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos.

1.3.Contenidos en Bachillerato

En el caso de Bachillerato ocurre algo parecido a lo que sucede en 3º y 4º de la ESO. Se siguen itinerarios distintos. Todos los contenidos de estadística presentes en el currículo de estos cursos aparecen recogidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

En primer lugar, en las matemáticas I de 1º de Bachillerato se trabajan los siguientes contenidos relacionados con la estadística:

- Estadística descriptiva bidimensional
- Tablas de contingencia.
- Distribución conjunta y distribuciones marginales.
- Medias y desviaciones típicas marginales.
- Distribuciones condicionadas.
- Independencia de variables estadísticas.
- Estudio de la dependencia de dos variables estadísticas. Representación gráfica: Nube de puntos.
- Dependencia lineal de dos variables estadísticas. Covarianza y correlación: cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal.
- Regresión lineal. Estimación. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas.

El alumnado que ha elegido este itinerario, en 2º de Bachillerato cursará matemáticas II, en las que, en lo que a conceptos relacionados con estadística se refiere, se trabajan los modelos de distribución normal y binomial. En este curso, este bloque se centra en conceptos probabilísticos.

En el itinerario de las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se trabaja a parte de esos conceptos, más en profundidad la dependencia o independencia entre dos variables y la covarianza y correlación. En 2º de Bachiller en este itinerario, se estudia la estadística paramétrica, parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra, el tamaño y la representatividad de una muestra, la estimación por intervalos de confianza, error y tamaño muestral. Estos conceptos son los más complejos estudiados hasta el momento

1.4. Tabla de contenidos de estadística en el currículo vigente

	PRIMARIA	ESO					BACHILLERATO			
CONTENIDO	3º Ciclo	1º y 2º	3º Aplicadas	3º Académicas	4º Aplicadas	4º académicas	1º Mat.I	1º CCSS	2º Mat.II	2º CCSS
Recogida y clasificación de datos	Datos cualitativos del entorno	Población, muestra, individuo. Var. cualitativas y cuantitativas.	Métodos de selección de una muestra estadística	Métodos de selección de una muestra estadística	×	Fases y tareas de un estudio estadístico	×	×	×	Métodos selección, tamaño y representatividad de una muestra
Tablas	Frecuencia absolutas y relativas	Frecuencia absolutas y relativas	Fr. Absoluta, relativas, acumuladas. Intervalos	Fr. Absoluta, relativas, acumuladas. Intervalos	×	×	T.Contingencia	T.Contingencia	×	×
Gráficos	Gráficos sencillos	Barras, sectores, pol.frecuencias	Gr. Estadísticas. Cajas y bigotes	Gr. Estadísticas. Cajas y bigotes	Gr. Estadísticas	Gr. Estadísticas	Nube de puntos	Nube de puntos	×	×
Medidas de centralización	Iniciación intuitiva	Se introducen algunas	Cálculo par. Posición.	Cálculo par. Posición	Interp par. Posición	Interp par. Posición	Des.Típica marginal	Des.Típica marginal y condicionada	×	Media y desviación de la media muestral
Medidas de dispersión	×	Se introducen algunas	Cálculo par. Dispersión.	Cálculo par. Dispersión.	Interp par. Dispersión	Interp par. Dispersión	Des.Típica marginal	Des.Típica marginal y condicionada	×	Desviación de la media muestral
Est. Bidimensional	×	×	×	×	Intro diagramas de dispersión	Diagramas de dispersión	Correlación y covarianza	Correlación y covarianza	×	×
Inferencia, probabilidad modelos de distrib.de probabilidad	×	Cálculo prob. Laplace	×	×	×	×	×	Variables aleatorias. Normal y binomial	Normal y binomial	Interv. Confianza

Tabla 1. Contenidos de estadística en el currículo vigente

Capítulo 2

Los criterios de evaluación de la estadística en el currículo vigente

En este segundo capítulo se van a analizar los criterios de evaluación de la estadística presentes en el currículo vigente para los ciclos de primaria, ESO y Bachillerato, al igual que en el capítulo anterior. Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, los criterios de evaluación *“son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura”*.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

Consultando el bloque correspondiente a la estadística en la asignatura de matemáticas en el Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, se pueden observar los siguientes criterios de evaluación:

- Recoger y registrar una información cuantificable, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales, comunicando la información.
- Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.
- Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado.
- Observar y constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición.
- Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.

Como se puede observar, el objetivo es que sean capaces de relacionar los conceptos básicos de estadística con su entorno cotidiano para ir sacando conclusiones con la ayuda de recogidas de datos, organización en tablas y gráficos sencillos.

2.2. Criterios de evaluación en ESO

Para conocer los criterios de evaluación del bloque de estadística para los cursos de la ESO, se accede al Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Para el caso de 1º de la ESO los criterios establecidos son los siguientes:

- Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.
- Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada.

El resto de criterios de evaluación que aparecen en el currículo tienen que ver con la probabilidad estudiada en estos cursos. Aunque como se ha comentado en el capítulo anterior en los cursos de 3º y 4º aparecen dos itinerarios distintos, los criterios de evaluación coinciden en las dos variantes para los dos cursos.

En 3º de la ESO se añade a los criterios de evaluación el objetivo de calcular e interpretar los parámetros de posición y dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas, así como analizar información estadística de medios de comunicación valorando su representatividad y fiabilidad. Además de estos criterios de evaluación, en 4º de la ESO se suma la interpretación de parámetros estadísticos en distribuciones unidimensionales y bidimensionales utilizándolos medios más adecuados y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Para la asignatura de matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales en 1º de Bachillerato, los criterios de evaluación se centran en la descripción y comparación de conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con la economía y otros fenómenos sociales, así como en la interpretación de relaciones entre variables y cuantificación y representación de relaciones lineales. A estos criterios, se le añaden en el curso de 2º de Bachillerato los relacionados con procedimientos estadísticos que permiten estimar parámetros desconocidos de una población con una fiabilidad o un error prefijados y la construcción de intervalos de confianza.

En el caso del otro itinerario, en la asignatura de Matemáticas I de 1º de Bachillerato, los criterios de evaluación para la parte de estadística son prácticamente los mismos que en el caso de las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º de Bachillerato, pero aquí los contextos con los que se relaciona la estadística pertenecen al mundo científico. En Matemáticas II de 2º de Bachillerato, solamente se añade a los criterios de evaluación la identificación de fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.

2.4. Tabla de los criterios de evaluación de la estadística en el currículo vigente

CONTENIDO	PRIMARIA	ESO					BACHILLERATO			
	3º Ciclo	1º y 2º	3º Aplicadas	3º Académicas	4º Aplicadas	4º académicas	1º Mat.I	1º CCSS	2º Mat.II	2º CCSS
Utilización vocabulario apropiado [1]	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Recogida y clasificación de datos [2]	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Construcción e interpretación de gráficas [3]	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓
Cálculo de parámetros de posición y dispersión [4]	×	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×
Estadística bidimensional [5]	×	×	×	×	×	×	✓	✓	×	×
Inferencia estadística y probabilidad [6]	×	✓	×	×	×	×	×	✓	✓	✓
Investigación medios de comunicación [7]	×	×	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	✓

Tabla 2. Criterios de evaluación de la estadística en el currículo vigente

Capítulo 3

Los estándares de aprendizaje evaluables de la estadística en el currículo vigente

Al igual que en los capítulos anteriores, en este se va a realizar un análisis de los estándares de aprendizaje evaluables de la estadística en el currículo vigente para los ciclos de Educación Primaria, ESO y Bachillerato. Tal y como dice el Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, los estándares de aprendizaje evaluables “son especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables”.

3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

Los estándares de aprendizaje evaluables presentes en el bloque de estadística del currículo de Educación Primaria que aparecen en el Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, son los siguientes:

- Identifica datos cualitativos y cuantitativos en situaciones familiares.
- Recoge y clasifica datos cualitativos y cuantitativos, de situaciones de su entorno, utilizándolos para construir tablas de frecuencias absolutas y relativas.
- Aplica de forma intuitiva a situaciones familiares, las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango.
- Realiza e interpreta gráficos muy sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales, con datos obtenidos de situaciones muy cercanas.
- Realiza un análisis crítico argumentando sobre las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.
- Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento, creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.
- Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas.

En general, los estándares de aprendizaje evaluables en esta etapa se centran en que se vaya formando el pensamiento crítico del alumnado relacionado con los contenidos de estadística impartidos, siendo la dificultad de los cálculos, los problemas y las reflexiones la adecuada para cada nivel.

3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO

En el caso de 1º y 2º de la ESO los estándares de aprendizaje evaluables para el bloque de estadística recogen que el alumnado pueda definir y aplicar los conceptos de población, muestra e individuo, que reconozca y ponga ejemplos de variables estadísticas tanto cualitativas como cuantitativas, que organice datos en tablas y calcule frecuencias absolutas y relativas y los represente gráficamente. Que calcule y emplee las medidas de centralización estudiadas para resolver problemas, que interprete gráficos estadísticos sencillos recogidos en medios de comunicación y que emplee herramientas tecnológicas para organizar los datos, generar gráficos, calcular medidas de tendencia central y el rango de variables estadísticas cuantitativas.

En 3º de la ESO las diferencias en los estándares de aprendizaje evaluables entre las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas son mínimas. En ambos itinerarios se añade a los estándares de los cursos anteriores que el alumnado distinga entre muestra y población justificando las diferencias en problemas contextualizados, que valore la representatividad de una muestra través del procedimiento de selección, en casos sencillos, que relacione los distintos tipos de frecuencias en las tablas y que construya gráficos en relación con problemas que tengan que ver con situaciones de problemas sociales, económicos y de la vida cotidiana. Con respecto a las diferencias entre los dos itinerarios, en el caso del cálculo de las medidas de posición, en el caso de las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, los parámetros de dispersión se calculan e interpretan con calculadoras y hojas de cálculo para comparar la representatividad de la media y describir los datos, en este caso es más completo que en el otro itinerario.

Para 4º de la ESO, los estándares de aprendizaje que no estaban presentes en el curso anterior hacen referencia a algún tipo de representación gráfica como los diagramas de dispersión y a la interpretación crítica de datos de tablas y gráficos. Las diferencias entre los dos itinerarios, son, al igual que en el caso anterior, que en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se añade que el alumnado seleccione una muestra aleatoria y valore la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas y que represente diagramas de dispersión e interprete la relación existente entre las variables.

3.4. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato

En 1º de Bachillerato no existen diferencias entre los estándares de aprendizaje evaluables entre las matemáticas I y las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Estos recogen los objetivos relacionados con la elaboración de tablas bidimensionales con variables discretas y continuas, el cálculo y la interpretación de los parámetros estadísticos más usuales en variables bidimensionales, el cálculo de distribuciones

marginales y condicionadas, la dependencia o independencia entre variables y la interpretación mediante el cálculo del coeficiente de correlación lineal.

En 2º de Bachillerato hay más diferencias entre un itinerario y el otro. En el caso de matemáticas II, los estándares de aprendizaje evaluables hacen referencia a distribuciones normales y binomiales pero en las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se profundiza más y se añade que el alumnado construya intervalos de confianza para la media poblacional en diferentes casos y además que relacione el error y la confianza de un intervalo de confianza con el tamaño muestral en situaciones reales.

En este capítulo no se va a añadir una tabla con los estándares de aprendizaje evaluables de la estadística en el currículo vigente, ya que sería la misma tabla que en el capítulo 2, ya que, como se ha dicho anteriormente en la introducción de este capítulo, los estándares de aprendizaje evaluables son extensiones de los criterios de evaluación.

Capítulo 4

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con la estadística en el currículo vigente

En este capítulo se va a hacer referencia a ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto relacionados con la estadística en el currículo vigente. Las semanas de docencia correspondientes al Practicum II se desarrollaron en 2º de la ESO, por lo tanto, los ejercicios tipos que se van a presentar pertenecen a dos cursos inferiores, al curso citado y dos cursos superiores, es decir, son ejercicios tomados de libros de 6º de Primaria, 1º de la ESO, 2º de la ESO, 3º de la ESO y 4º de la ESO.

Al no haber elegido itinerario todavía en 2º de la ESO, podrían tomarse los libros tanto de las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas como de las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, pero en este caso se presentarán ejercicios tipo de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Se añade en cada ejercicio los criterios y estándares presentes [*].

4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º de Primaria (ANAYA)

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Se trata de que el alumnado clasifique y distinga entre las variables cuantitativas y cualitativas dadas. [2]

Ejemplo:

- 1** Clasifica las variables siguientes en cualitativas o cuantitativas:
- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) La estatura. | d) El número de calzado. |
| b) El deporte favorito. | e) El número de hijos. |
| c) La edad. | f) La música preferida. |

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: El alumnado tiene que hacer una interpretación del gráfico, identificando el tipo de variable representada y las frecuencias que aparecen en él. [2][3]

Ejemplo:



Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Utilizando la tabla de frecuencias, el objetivo es calcular la media y la moda de los datos que se presentan. [3][4]

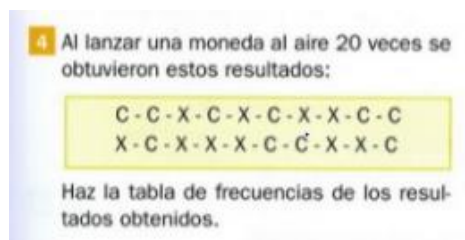
Ejemplo:



Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Observando los resultados, tienen que ser ellos los que construyan una tabla de frecuencias. [2][3]

Ejemplo:



4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de la ESO (SM)

Actividad tipo: Cuestión.

Descripción: Se plantea una situación en la que se debe identificar la población, muestra e individuos. [2]

Ejemplo:

1. Antes de sacar al mercado un nuevo zumo, se selecciona a 500 personas para estudiar su aceptación. ¿Cuáles son la población, muestra e individuos del estudio?

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Tienen que construir una tabla de frecuencias y responder a una pregunta que se les plantea, interpretando la tabla. [2][3]

Ejemplo:

32. Para analizar los resultados de la evaluación de un curso de 2.º ESO, el tutor ha realizado un recuento de las asignaturas suspensas de cada alumno. Los resultados son:

4	4	2	1	2	2	4	4	2	3
4	3	2	5	2	4	5	3	6	4
2	1	-3	2	2	1	4	4	5	2

- a) Construye la tabla de frecuencias.
 b) El alumno puede pasar de curso si tiene menos de 3 asignaturas suspensas. ¿Qué porcentaje de alumnos estarían en esta situación?

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: A partir de unos datos, tienen que crear una tabla de frecuencias de datos agrupados y representarlos después en un histograma. [2][3]

Ejemplo:

18. En un reconocimiento médico se ha determinado el nivel de calcio en sangre de varios pacientes:

9,7	9,6	8,2	7,1	7,8	9,8	8,9	10,1
10	8,5	8,9	9,1	9,5	9,6	10	7,6
8,3	8,3	8,4	10,1	10,2	9,3	9,4	9,4
9,5	7,7	8,1	8,6	8,1	8	9,2	9
9,9	8,8	8,8	7,9	7,6	8,4	8,5	9,5
9,1	9,4	9,9	10,2	8,6	9,6	9,5	10

- a) Construye la tabla de frecuencias de datos agrupados.
 b) Representa los datos en un histograma.

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Se trata de un ejercicio de cálculo de parámetros de posición y dispersión.[3]

Ejemplo:

41. Un pediatra hace un estudio sobre la edad, en meses, a la que los bebés comienzan a caminar y obtiene los siguientes datos de 12 bebés: 12, 13, 12, 11, 15, 12, 13, 10, 14, 11, 12 y 13 meses.



- a) Halla la moda y la media de los datos.
- b) Calcula la mediana.
- c) Halla la desviación media.
- d) Calcula la varianza y la desviación típica.

4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de la ESO (ANAYA)

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Ejercicio sobre cálculo de parámetros y comparación entre dos distribuciones distintas. [4]

Ejemplo:

2. Halla la \bar{x} y la DM de las siguientes distribuciones. Representálas y compáralas:

a)

x	2	3	4	5	6	7
f	2	4	12	8	3	1

b)

x	1	2	3	4	6	7	12
f	9	7	3	3	1	1	6

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Se trata de interpretar un diagrama de caja e indicar los parámetros de posición. [3]

Ejemplo:

3. El siguiente diagrama de caja representa la distribución de las notas de una clase de 30 estudiantes.



Interpétalo e indica los parámetros de posición.

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Con los datos de la tabla de doble entrada, tienen que responder a las preguntas interpretando la información dada. [3][4]

Ejemplo:

22. A los estudiantes de una clase se les ha preguntado por los puntos obtenidos en un test de cuatro preguntas. Los resultados son los siguientes:

	CHICAS	CHICOS	TOTAL
0	1	4	5
1	4	7	11
2	6	3	9
3	5	0	5
4	4	2	6
TOTAL	20	16	36

- Con estos datos, halla la \bar{x} y la Me de las chicas, de los chicos y del total.
- ¿Qué proporción de chicas han obtenido más de dos puntos? ¿Y de chicos?
- ¿Qué conclusión obtienes?

Actividad tipo: Problema.

Descripción: Se trata de una actividad de comprensión y reflexión sobre el significado del concepto media. [4]

Ejemplo:

24. La edad media de un grupo de diez personas es 13 años.

- ¿Es posible que al incorporarse una persona al grupo haga que la edad media sea 10 años? Explica por qué.
- Bruno, el profesor, se ha incorporado al grupo y la media ahora es de 15 años. ¿Qué edad tiene Bruno?
- ¿Qué edad debe tener una persona para aumentar en 1 año la media del grupo inicial?

4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de la ESO (SM académicas)

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Se trata de relacionar gráficos y tablas de distintos tipos. [2][3]

Ejemplo:

19. En una encuesta sobre comercio en Internet se han obtenido los resultados que se muestran en estos gráficos:



Estudio anual de Redes Sociales. Enero 2015. eLOGIa-iabspain

- Construye la tabla de frecuencias asociada a cada gráfico.
- Representa los datos de la segunda gráfica en un diagrama de sectores.

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: En este ejercicio hay que calcular parámetros de posición y reflexionando sobre ellos, tratar de responder a la pregunta que se plantea. [3][4]

Ejemplo:

31. El número de caras obtenidas al lanzar cuatro monedas al aire 180 veces ha sido el siguiente.

N.º de caras	0	1	2	3	4
f_i	5	28	52	65	30

- Representa el diagrama de barras.
- Halla la moda, la media, la mediana y los cuartiles.
- ¿Crees que las monedas están trucadas? ¿Por qué?

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Deben calcular parámetros de dispersión y sacar conclusiones a partir del diagrama de cajas y bigotes que representen con los datos. [3][4]

Ejemplo:

36. Se ha realizado una encuesta a 50 personas sobre el número de veces que han ido al teatro en el pasado año.

N.º veces	0	1	2	3	4	5	6
f_i	1	1	8	12	6	18	4

- Calcula el recorrido, la varianza y la desviación típica.
- Dibuja el diagrama de caja y bigotes. ¿Es simétrica la distribución?

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Es un ejercicio en el que, calculando los parámetros de posición y dispersión, tienen que comparar dos situaciones distintas. [4]

Ejemplo:

43. Los asistentes a las cinco salas de los multicines Betaville un fin de semana han sido:

366, 432, 526, 208 y 664

Ese mismo fin de semana los asistentes a las 6 salas de los cines Aragón fueron respectivamente:

322, 401, 182, 550, 680 y 405



Calcula:

- La media, la desviación típica y el coeficiente de variación de los asistentes a cada cine.
- Compara la dispersión de los datos de los cines Aragón con la de los Betaville.
- Si los costes de mantenimiento de las salas de ambos cines son similares, ¿cuál obtuvo, en promedio, más beneficio por sala?

4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de la ESO (SM académicas)

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: En este ejercicio tienen que identificar de qué tipo es la variable estadística, hacer una tabla de frecuencias completa y responder a las preguntas con ayuda de esa tabla. [1][2][3]

Ejemplo:

3. Los resultados de una encuesta a 40 jóvenes sobre el número de horas que utilizan una consola el fin de semana son:

4	2	3	7	6	4	3	7	6	8
3	4	3	5	3	2	1	0	5	4
3	7	8	0	1	6	4	5	7	6
1	4	3	7	5	4	3	1	0	3

a) ¿De qué tipo es la variable estadística?
 b) Haz una tabla de frecuencias indicando la frecuencia absoluta, relativa, y las frecuencias acumuladas de cada dato.
 c) ¿Qué porcentaje utiliza la consola menos de 3 horas? ¿Y más de 6?

Actividad tipo: Ejercicio.

Descripción: Ejercicio sobre distribuciones bidimensionales en el que tienen que interpretar los datos de la tabla y responder a una pregunta sobre la correlación existente entre los datos. [1][3][5]

Ejemplo:

16. Las puntuaciones obtenidas por 40 personas en dos test que miden la comprensión lectora (X) y el cálculo numérico (Y) han sido:

$X \backslash Y$	20	30	40	50
20	3	4	2	1
30	5	2	2	1
40	1	3	4	2
50	0	1	3	6

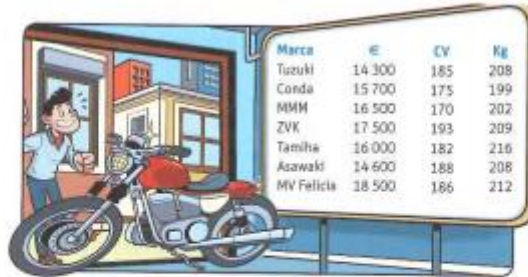
a) ¿Cuántas personas han obtenido 30 puntos en comprensión lectora? ¿Y 50 puntos en cálculo numérico?
 b) ¿Hay correlación entre ambas habilidades?

Actividad tipo: Problema.

Descripción: Problema sobre relaciones entre variables y correlación, además se añade la representación en forma de nube de puntos. [1][2][3]

Ejemplo:

52. Luis quiere comprarse una moto de 1000 c.c. Compara precios, potencia y peso de varios modelos.



Marca	€	CV	Kg
Tuzuki	14 300	185	208
Conda	15 700	175	199
MMM	16 500	170	202
ZVK	17 500	193	209
Tamiya	16 000	182	216
Asawaki	14 600	188	208
MV Felicia	18 500	186	212

- Representa la nube de puntos en la que X es el precio en miles de euros e Y la potencia. Halla el coeficiente de correlación. Explica el tipo de relación entre las dos variables.
- Representa la nube de puntos en la que X sea la potencia e Y el peso. ¿Qué puedes indicar de la correlación entre ambas?

Actividad tipo: Problema.

Descripción: A partir de unos datos, tienen que elegir la forma más adecuada de representarlos, calcular parámetros de posición y dispersión y responder a la pregunta. [1][2][3][4]

Ejemplo:

50. Las notas de 8 alumnos en un examen de Matemáticas han sido: 4, 5, 6, 4, 7, 9, 3 y 5.

- Representa los datos en un gráfico adecuado.
- Calcula la media y la desviación típica.
- El profesor premia a sus alumnos y les sube 2 puntos a cada uno. ¿Qué les sucede a la media y a la desviación típica?

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo, se va a realizar un análisis de las presencias y ausencias en los libros de texto consultados en los temas correspondientes a estadística, así como de la coherencia de los libros de texto en relación con el currículo vigente, estudiado en los capítulos 1,2 y 3, para los cursos de 6º de Primaria, 1º de la ESO, 2º de la ESO, 3º de la ESO y 4º de la ESO.

El objetivo de este capítulo no es buscar fallos en los libros de texto, si no tener una visión objetiva de la forma en la que se presenta el contenido en los libros, las ventajas y desventajas que tiene hacerlo de una manera o de otra, y detectar posibles puntos de mejora en la forma de presentar los conceptos y los ejercicios.

5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

6º de Primaria:

En cuanto al libro escogido para 6º de Primaria, de la Editorial Anaya, es bastante completo en lo que a los contenidos se refiere. Cuenta con distintos tipos de ejercicios en relación con gráficos y diagramas sencillos. En algunos se trata de representar unos datos dados, y en otros, a partir de un gráfico, el alumnado tiene que responder a una serie de preguntas interpretando el mismo. Aparecen distintos tipos de gráficos, como diagramas de barras, polígonos de frecuencias, diagramas de sectores o histogramas.

También hay actividades relacionadas con las tablas de frecuencias, en los que tienen que realizar tablas de frecuencias, así como responder a preguntas relacionadas con la interpretación de las mismas.

Con respecto a las medidas de centralización, en este libro aparecen ejercicios en los que se debe calcular la media, la moda y la mediana. Ni en las páginas en las que se explican los conceptos ni en ninguna de las actividades de toda la unidad aparece nombrado el rango.

1º de la ESO:

En el libro de la Editorial SM, aparecen todos los conceptos de la estadística correspondientes a este curso. Al principio se tratan los conceptos de población, muestra e individuo, después se pasa a las tablas de frecuencias y gráficos estadísticos, se habla de los datos agrupados y de su representación en histogramas, y por último aparecen las medidas de posición y dispersión.

En todos los apartados hay una primera parte de explicación teórica, un ejemplo resuelto después y ejercicios relacionados con el concepto correspondiente. Los ejercicios están marcados según el nivel de dificultad, y este va aumentando progresivamente.

Introducción de la estadística en un proyecto de 2º ESO

Al final de la unidad, aparece una variedad de ejercicios relacionados con todos los conceptos implicados, así como actividades para pensar más y una última actividad de tipo autoevaluación. En este libro no deja de aparecer ningún concepto, es más, en el caso de las variables cuantitativas, también se especifican las variables de tipo discretas y continuas y dentro de las tablas de frecuencias, se explican también las frecuencias relativas y absolutas acumuladas.

2º de la ESO:

En este caso se ha escogido el libro de la Editorial Anaya ya que, llama la atención el avance en los conceptos que se produce. A parte de los contenidos que marca el currículo, este libro se adelanta introduciendo tablas de doble entrada y diagramas de caja y bigotes, que no aparecen en el currículo hasta el curso siguiente.

Los ejercicios son muy completos y en este caso hay más ejercicios que en otros libros que tienen que ver con la interpretación, reflexión y obtención de conclusiones a partir de gráficas y parámetros de posición y dispersión.

3º de la ESO:

El libro de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de la Editorial SM, es un libro muy completo en lo que al contenido de estadística se refiere. Se adapta correctamente a los contenidos que el currículo marca y estos están distribuidos de una forma coherente y ordenada a lo largo de la unidad. En primer lugar se explican los términos estadísticos, se pasa a un apartado de gráficas, para después profundizar en los datos agrupados y su representación. Se tratan también las medidas de posición y dispersión, se introducen los diagramas de cajas y bigotes, así como la relación entre la media y la desviación típica.

La organización de la unidad es la misma que en los demás libros de esta editorial, con una explicación inicial, un ejemplo y a continuación los ejercicios relativos al concepto. Hay bastantes actividades al final de la unidad y un apartado de actividades clave, pero no hay un apartado concreto de problemas.

4º de la ESO:

Con el libro de 4º de la ESO ocurre lo mismo que con el de 3º de la ESO, el libro consultado es de la misma Editorial y por tanto la organización de la unidad didáctica es la misma. También es un libro muy completo en el bloque de estadística, aparecen todos los conceptos correspondientes a este nivel.

Además de los conceptos del curso pasado, aparecen como novedad las distribuciones bidimensionales, con sus respectivas relaciones y representaciones. Algo que quizás no sea del todo completo en el apartado de medidas de posición y dispersión es la interpretación, el análisis y la utilización de las mismas. Para cada una de ellas aparece una definición y la forma de calcular, pero no se especifica situaciones concretas o la utilidad que pueden tener estos parámetros en situaciones reales.

5.2. Coherencia de los libros de texto en relación al currículo

En general, todos los libros analizados se adaptan correctamente al currículo en lo que a contenidos se refiere, exceptuando el caso del rango en 6º de Primaria, que no aparece en toda la unidad. Sin embargo, sí aparece la mediana, concepto que, no especifica el currículo y que en mi opinión es de demasiada dificultad para ese nivel.

Como ya se ha dicho anteriormente, los libros cumplen con las especificaciones marcadas por el currículo, y hay una gran variedad de ejercicios y actividades para trabajar todos los contenidos explicados.

La forma de trabajar los conceptos es en general, con ejercicios de tipo cálculo y representación más que de interpretación. Es una buena herramienta plantear ejercicios que tengan que ver con situaciones familiares o conocidas para el alumnado, como por ejemplo los ejercicios relacionados con deportes, compras, notas, ocio... creo que es una buena forma de captar su atención y que puedan ver la utilidad de la estadística más allá de la asignatura de matemáticas.

Por otro lado, como he comentado anteriormente, creo que estaría bien que aparecieran más ejercicios de interpretación, en los que se viera el sentido de cada concepto, su utilidad y la ayuda que pueden suponer para sacar conclusiones en diferentes situaciones. Entiendo que en determinados niveles la interpretación esté más limitada, pero creo que el objetivo del estudio de la estadística no debería ser hacer cálculos, ya que estos se facilitan mucho a través de las nuevas herramientas tecnológicas, incluidas en algún curso también, si no el aprovechar los recursos para reflexionar y tener conciencia de la utilidad de los mismos.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de la estadística en 2º ESO

En la segunda parte del Trabajo Fin de Máster se realiza un estudio sobre la introducción de las matemáticas, y más concretamente la parte de estadística, en un proyecto de 2º de la ESO.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se analiza el contenido matemático en el libro de texto de referencia. El siguiente capítulo recoge las dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica. En los dos últimos capítulos se desarrolla el proceso de estudio y la experimentación llevada a cabo.

Hay un apartado final correspondiente a la síntesis, las conclusiones y cuestiones abiertas.

Capítulo 6

La estadística en el libro de texto de referencia

En este capítulo se va a analizar el libro de matemáticas de 2º de la ESO de la Editorial Anaya. El objetivo de la revisión del libro ha sido tener una visión general de los contenidos de estadística implicados en este nivel y la forma de estudiados y trabajarlos, para después integrarlos dentro de un proyecto interdisciplinar y ver realmente si el alumnado comprende y es capaz de aplicar y utilizar las herramientas aprendidas en otros contextos. Todo esto se explicará de forma más explícita en los capítulos referentes al estudio realizado en el aula.

En primer lugar se recogerán los objetos matemáticos involucrados en el tema seleccionado de este libro para después presentar un análisis global de la unidad didáctica.

6.1. Objetos matemáticos involucrados

Según Godino y Batanero, se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- Situaciones - Problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- Propositiones (enunciados sobre conceptos, ...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

Comenzando con los elementos lingüísticos, se van a dividir estos en términos, notaciones y gráficos.

Los términos que aparecen en la unidad son los siguientes: muestra, población, individuo, media, moda, mediana, simétrica, asimétrica, recorrido, rango, desviación media, parámetro de dispersión, varianza, tablas de frecuencias, parámetros de posición, cuartiles, recorrido intercuartílico, diagrama de caja y bigotes, diagrama de barras, histograma, distribución, tablas de doble entrada, diagrama de sectores...

Las notaciones utilizadas son x_i , N , f_i , h_i , Fi , Hi , Pi , Me , Mo , $Q1$, $Q2$, $Q3$... entre otras y los gráficos implicados en la unidad son los gráficos de barras, diagramas de sectores, histogramas y diagramas de cajas y bigotes.

Con respecto a las situaciones y problemas que se plantean, la mayoría son ejercicios de cálculo aunque también hay algunos problemas con preguntas de reflexión sobre el significado de los conceptos estudiados y las conclusiones que se pueden sacar utilizándolos.

Algunos de los conceptos que se introducen mediante definiciones a lo largo de la unidad son media, moda, mediana, rango o recorrido, desviación media...

Durante la unidad se introducen algunas proposiciones que son enunciados sobre algunos conceptos como pueden ser:

- Las variables cuantitativas solo toman valores numéricos y las cualitativas no toman valores numéricos.
- En variables cuantitativas, el valor de la moda es poco representativo.
- La desviación media complementa a la media diciéndonos cómo de alejados de ella están los datos.
- El diagrama de caja está estrechamente ligado a las medidas de posición. Con él se visualiza la distribución, destacando los tres valores, $Q1$, Me y $Q3$.

Los procedimientos dependen del contenido aunque para todos, aparece una explicación inicial, después un ejemplo resuelto y a continuación ejercicios para practicar. En algunos casos como puede ser el de los cuartiles, las explicaciones son más detalladas ya que son conceptos nuevos de mayor dificultad que algunos como la media o la moda, que ya han estudiado y practicado en cursos anteriores.

Se utilizan argumentos para justificar la introducción de algunos conceptos en la unidad como por ejemplo el siguiente: *“El análisis de las tablas de doble entrada es muy formativo. Conviene que los estudiantes de este nivel se inicien en la interpretación y búsqueda de información en estas tablas”*.

6.2. Análisis global de la unidad didáctica

La unidad de estadística es la correspondiente al tema 14 en el libro escogido. En primer lugar aparece una presentación de la unidad, junto con los conocimientos mínimos, los complementos importantes, un esquema de la unidad, la anticipación de tareas y la adaptación curricular.

La unidad comienza con una introducción en la que se recuerdan los diagramas de barras y de sectores estudiados el curso anterior a través de unos ejercicios. Hay un primer punto en el que se trata la confección de una tabla y su gráfica, así como ejercicios para recordar estos conocimientos.

Después, en el segundo punto se tratan los parámetros de centralización, la media, la mediana y la moda, y se recuerdan los tipos de variables estudiadas anteriormente, cuantitativas y cualitativas. A continuación hay un apartado en el que se explica la utilidad de la media y la mediana para estudiar asimetrías. El apartado tres trata de esta misma forma los parámetros de dispersión. Al final de cada uno de ellos aparecen ejercicios para practicar lo aprendido.

El libro hace hincapié en el cálculo de la media y de la desviación media en tablas de frecuencias dedicando una página con sus respectivos ejercicios a esto.

En el punto cuatro se explican los parámetros de posición a través de un ejercicio y en este apartado, al igual que en los anteriores, aparecen ejercicios para practicar acompañando a la explicación. Después se introducen tanto los diagramas de cajas y bigotes como las tablas de doble entrada al final de la unidad.

En todos los apartados explicativos, aparecen unas sugerencias junto con una recomendación de actividades de refuerzo y ampliación. En algunos de ellos aparece una parte de pensamiento crítico en la que se plantean formas alternativas de resolver los ejercicios, colaborando con los demás, en grupos...

Al final de la unidad aparece una gran variedad de ejercicios y problemas relacionados con los conceptos estudiados así como sus correspondientes soluciones, para que el alumnado pueda practicar, e ir autoevaluándose, ya que los ejercicios, además de las soluciones, llevan indicado el nivel de dificultad.

Como ya se ha comentado anteriormente, todos los apartados se organizan de la misma manera con una primera explicación, que incluye algunas definiciones o propiedades, un ejercicio resuelto a modo de ejemplo y unas actividades relacionadas con lo estudiado.

6.3. Otros aspectos relevantes

Cabe destacar que en el Centro Hijas de Jesús, donde se ha llevado a cabo el estudio, todo el alumnado dispone de su propio ChromeBook y por tanto el trabajo con el libro de texto se complementa con ejercicios y actividades que el profesorado comparte vía Classroom con ellos.

Capítulo 7

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se van a comentar los errores y dificultades previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica de estadística. Aunque el estudio se haya centrado en el alumnado de 2º de la ESO, muchos de los errores y dificultades que van a citarse se repiten a lo largo de los cursos y de las etapas formativas.

El estudio de los errores y de las dificultades en el aprendizaje es una herramienta muy útil para el docente, ya que, permite saber cuáles son los puntos débiles del alumnado o los conceptos más susceptibles de ser malinterpretados o más difíciles de comprender y así poder tratarlos con mayor profundidad.

Son muchos autores los que estudian los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, aunque es necesario decir que la estadística es una de las ramas de las matemáticas que menos atención ha recibido hasta el momento.

7.1. Dificultades

Hay distintos tipos de dificultades que pueden ser generadoras de errores y siguiendo la agrupación que realiza Di Blasi Regner en su estudio sobre dificultades y errores, se distinguen los siguientes tipos de dificultades:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos: con ayuda del lenguaje habitual y los signos matemáticos se comunican los objetos matemáticos. Pueden surgir problemas relacionados con el uso del lenguaje ordinario, ya que este no es tan exacto y preciso como el lenguaje matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático: tienen que ver con la lógica de la matemática. Es importante utilizar tanto las demostraciones formales como el pensamiento lógico, el uso de una no tiene que hacer que desaparezca la otra, tiene que ser algo simultáneo. Es importante trabajar las dos formas de pensamiento.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza: en estas dificultades se ven implicados el currículo de matemáticas, los métodos de enseñanza y la institución escolar. Se consideran cuatro dificultades presentes en el currículo de matemáticas: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en esta ciencia, la naturaleza lógica de la matemática escolar, la necesidad de contenidos anteriores

y el nivel de abstracción requerido. Los métodos de enseñanza deben estar en concordancia tanto con el currículo como con los elementos organizativos de la institución escolar. La institución escolar tiene que tener en cuenta las dificultades que pueden originarse para organizar y planificar tanto las clases, las aulas, el reparto de alumnado... para disminuir al máximo posible la aparición de dificultades.

- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo del alumnado: la capacidad de razonamiento, el estadio del desarrollo intelectual y cognitivo del alumnado tiene mucha influencia en las dificultades que aparecen y por tanto es un aspecto muy importante a tener en cuenta por el profesorado a la hora de diseñar el material de enseñanza.
- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales: se sabe que la actitud general ante las matemáticas suele ser una actitud pasiva, con miedo, negativa...esto puede provocar situaciones de bloqueo que pueden dar lugar a dificultades.

7.2. Errores y su posible origen

Tal y como define Batanero basándose en el estudio realizado por Brousseau en 1983, un obstáculo tiene las siguientes características:

- *“Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento. El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente”.*
- *“El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber”.*
- *“Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica”.*

Brousseau identificó tres tipos de obstáculos:

- Obstáculos ontogénicos o psicogenéticos: se deben a las características o el estadio del desarrollo del alumnado. A modo de ejemplo, es necesario el razonamiento proporcional para comprender la idea de probabilidad.
- Obstáculos didácticos: tienen que ver con la situación de enseñanza, las elecciones didácticas que se realizan en cada caso. Como por ejemplo la introducción de simbolismos cuando el alumnado quizás requiere la visualización de ejemplos.
- Obstáculos epistemológicos: están relacionados con el significado de un concepto o con el concepto en sí mismo. Un ejemplo puede ser el significado de la mediana, la visualización de la posición que representa.

A continuación se van a concretar algunos de los errores y dificultades que pueden surgir relacionados con el aprendizaje de la estadística.

En relación con las gráficas y las tablas de frecuencias, los problemas aparecen cuando la lectura de los datos incluye una interpretación e integración de los datos en el gráfico. Esto requiere una habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas para poder llegar a sacar conclusiones o realizar predicciones. La elección del tipo de gráfico y la elección de la escala también puede dar lugar a dificultades, como por ejemplo la elección de un polígono de frecuencias para representar variables cualitativas. Relacionado con esto, los errores de carácter técnico más comunes suelen ser la omisión de las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos, no especificar el origen de coordenadas o no proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes.

Con respecto al cálculo de parámetros, la media es uno de los que más dificultades suele presentar, no solo su interpretación, sino también su cálculo. Es frecuente que cuando los datos se agrupan en intervalos, el alumnado olvide que cada uno de los intervalos debe ponderarse de modo distinto al calcular la media. La mediana es otro concepto que da lugar a confusiones, una gran parte del alumnado entiende la mediana como valor central, pero no tienen claro a qué secuencia numérica se refiere ese valor central.

Si se habla de las medidas de dispersión, un error habitual es ignorar la dispersión de los datos cuando se realizan comparaciones entre dos o más muestras o poblaciones. El concepto de desviación no queda claro, no se hace demasiado énfasis en el.

Capítulo 8

El proceso de estudio

Debido a las distintas necesidades que presentan los diversos perfiles del alumnado del centro Hijas de Jesús, el centro ha aumentado su oferta educativa tras haberse inspirado en otras instituciones del mundo. Esto se materializa en un seguimiento que puede ir desde los 0 hasta los 21 años. Cuenta con nueve unidades de educación infantil, trece de educación primaria, ocho de ESO y cuatro de bachiller. Además, cuenta con dos con dos Unidades de Currículo Específico (UCE), un Programa de Currículo Adaptado (PCA), un aula de diversificación curricular, una de PMAR y dos CFPE, uno de alojamiento y lavandería y otro de auxiliar administrativo.

El método educativo empleado en el centro se denomina MEDAP (Método Educativo de Acompañamiento Personalizado) y destaca por su atención individualizada. Rompiendo con el imperante academicismo basado en la memorización de datos y en el concepto de aula como grupo homogéneo, el MEDAP se orienta hacia un aprendizaje dinámico en un aula concebida como grupo heterogéneo per se. Este método pone el énfasis en la persona no sólo como sujeto cognoscente o nivel intelectual sino también en el ámbito social y emocional.

El MEDAP se aplica a través de proyectos y del llamado ABP, unido al uso y la importancia de las nuevas tecnologías. El Aprendizaje Basado en Proyectos destaca por su carácter interdisciplinar, que implica a profesores de distintas disciplinas. El estudiante es retado a resolver un problema mediante la colaboración con el resto de los compañeros y la identificación de los pasos que deberá seguir; así como las estrategias para atajar dicho problema. Por su parte, el proyecto-resultado consiste en la presentación de los logros conseguidos al resto de la clase. Esto fomenta la responsabilidad y la autonomía del alumnado.

El alumnado puede elegir entre varias opciones previamente propuestas en base a sus gustos e intereses. Todo esto fomenta, a su vez, el buen ambiente entre aulas ya que no solo participa una clase, sino que se juntan entre varias. Durante todas las actividades se emplean ChromeBooks u ordenadores enfocados en el ámbito académico, además de libros de texto que son facilitados por los propios profesores.

8.1. Distribución del tiempo de la clase

La duración del proyecto era de tres semanas. La unidad didáctica de estadística había sido impartida dos semanas antes del comienzo del proyecto, por lo tanto, se supone que los conocimientos ya estaban adquiridos e interiorizados.

En el horario de 2º de la ESO, tanto en las ternas AB, como en CD, todos los días se dedican las dos primeras horas a trabajar el proyecto correspondiente y los viernes, las dos primeras y las dos últimas horas también se trabaja en el proyecto. Al ser proyectos interdisciplinarios, algunas asignaturas cuentan con menos horas de clase durante la semana, ya que estas se suponen incluidas dentro de los proyectos.

En las horas de proyectos, las aulas se abren para trabajar dos clases juntas, por tanto, el alumnado de las clases A y B trabajan juntos y el de las clases C y D también. La forma de trabajar del centro trajo consigo unas reformas que permiten que las clases puedan juntarse fácilmente, ya que cuentan con puertas correderas entre las aulas.

La unidad didáctica de estadística se impartió en dos semanas. La asignatura de matemáticas cuenta con cuatro horas semanales repartidas en cuatro días de la semana. Por lo tanto, se dedicaron aproximadamente 8 horas a la unidad, ya que las clases tienen una duración de 55 minutos.

Para el estudio realizado se emplearon las cuatro horas de proyectos de la primera semana del proyecto. En las dos primeras horas se trabajó con las ternas C y D y en las dos segundas con las ternas A y B. En este caso, las clases trabajaron por separado, ya que mientras en una clase se realizaban las actividades propuestas en el estudio, que más adelante se detallarán, en la otra trabajaban preparando la toma de decisiones. Cuando trabajan por separado, lo denominan “multitarea”.

8.2. Actividades adicionales planificadas

Al ya haberse impartido la unidad de estadística correspondiente a este curso, el objetivo de este estudio fue comprobar si el alumnado había interiorizado y era capaz de utilizar los conceptos aprendidos para hacer interpretaciones y sacar conclusiones dentro de un contexto fuera de la asignatura de matemáticas, en este caso, dentro del proyecto sobre energías que estaban llevando a cabo.

Por tanto, la estadística tenía que estar implícita en el proyecto. La actividad adicional que se planificó fue la realización de unas fichas, en las que aparecían gráficas, tablas y preguntas relacionadas con aspectos del proyecto. Todo esto se explicará en el siguiente capítulo.

8.3. Actividad autónoma del alumnado prevista

Durante las dos semanas en las que se estudió la unidad didáctica de estadística, el alumnado trabajó con el libro de texto y con las actividades adicionales que la profesora les facilitaba a través de Classroom. Se alternaba la teoría impartida en clase con la práctica a través de ejercicios y problemas, tanto individuales, como en grupo. Por último, se realizó un examen al terminar la unidad. Con respecto al trabajo dentro del proyecto, todo se realiza en grupo, excepto algún entregable relacionado con los problemas de calor y energía. Se intenta que el profesorado tenga un papel secundario y que sean ellos quienes se apoyen en los compañeros para resolver las dudas.

Capítulo 9

Experimentación

En este capítulo se va a desarrollar cual fue la muestra y diseño de la experimentación, también se van a presentar las fichas con las que trabajó el alumnado, se van a comentar las cuestiones y comportamientos esperados y por último, se comentarán los resultados y se realizará una discusión de los mismos.

9.1. Muestra y diseño de la experimentación

Como ya se ha comentado en capítulos anteriores, el estudio se realizó en el centro Hijas de Jesús, en el curso de 2º de la ESO. En este caso, el objetivo era introducir la estadística en el nuevo proyecto que iban a comenzar, ya que hasta el momento era algo que no se había planteado. El título del proyecto era “¿Invertimos bien nuestras energías?”. En este proyecto, el alumnado trabajaba en grupos de cuatro personas con el objetivo de elegir la mejor energía para hacer que el pueblo “Villaenergíalimpia” fuera autosuficiente. Cada grupo tenía 8 opciones de energías distintas para estudiar a fondo y elegir para hacer autosuficiente su pueblo. Siempre trabajan en grupos de cuatro personas, así que, en este caso, cada persona del grupo se hacía experto en dos energías, las trabajaba con los expertos de otros grupos en las mismas energías para después explicárselas a sus compañeros de grupo. Así, todos los miembros del grupo conocerían las 8 energías propuestas.

Durante las tres semanas que duraba el proyecto, se intercalaban clases teóricas o de explicación de ejercicios y clases en las que ellos trabajaban de forma autónoma, para al final, realizar una exposición en la que defendían la opción que habían elegido. Todos los integrantes del grupo tenían que hablar durante la exposición y con respecto a la elección de la energía, solo se les dijo que la elección tenía que estar bien argumentada, y argumentar también por qué habían descartado las demás opciones.

Cada aula cuenta con un número aproximado de 25 personas, y al haber cuatro aulas para el curso de segundo de la ESO, A, B, C y D, el estudio se realizó a un número aproximado de 100 alumnos. Durante las clases de proyectos, se fomenta el apoyo a la diversidad y la heterogeneidad en los grupos, es por eso que a algunos de los grupos se suma el alumnado de PMAR y también algunos alumnos y alumnas de la UCE. Es necesario decir que en el caso de los grupos que trabajaban con alumnado de UCE, la elección fue entre 6 energías y no 8, ya que los chicos y chicas de UCE trabajan con un material distinto y tampoco acudieron a la presentación de la elección final. En el caso de los grupos con alumnado de PMAR, el trabajo fue exactamente el mismo, no hubo ninguna adaptación.

Más concretamente, las fichas fueron realizadas por los 30 grupos que hay entre las cuatro clases. Por lo tanto, si las realizaron 30 grupos y en cada grupo hay cuatro integrantes, el total de la muestra serían 120 personas. Hay que decir que casi nunca se da el caso en el que todos los alumnos y alumnas han acudido a clase en un día, por tanto, la muestra sería algo más pequeña si restamos los ausentes ese día. Como ya se ha dicho, las fichas se realizaron en la primera semana del proyecto, ya que lo que se pretendía es que estas tuvieran una función introductoria en el proyecto y el alumnado tuviera una primera visión global del tema, es por eso que los gráficos que aparecen en las fichas fueron escogidos con un criterio apoyado en los objetivos del proyecto.

Se decidió que las fichas se realizaran de forma grupal ya que están acostumbrados a esa forma de trabajo y no se pensó en las fichas como un examen de estadística para ver lo que sabía cada uno, si no en una forma de ver la capacidad que tienen de utilizar las herramientas que conocen en un entorno fuera de las matemáticas, por tanto, consideré que ayudarse entre los miembros del grupo y que cada uno aporte sus ideas es una herramienta más muy útil a lo largo de la vida.

9.2. El cuestionario

En este apartado se van a presentar los tres cuestionarios que se repartieron a los grupos. Cada grupo solo hacía uno de ellos, ya que, por razones de organización, solo disponía de una hora para realizar el estudio en cada clase. Las fichas se repartieron de manera aleatoria de forma que más o menos el mismo número de grupos realizaran cada una de ellas.

El objetivo de las fichas no fue el de que el alumnado tuviera que buscar la información por su cuenta, ya que pienso que es algo demasiado complicado para el tema en cuestión y para su nivel, por tanto las gráficas y tablas se les proporcionaban y lo que se pretendió fue elaborar unas preguntas que permitieran analizar el nivel de comprensión de los conceptos y que a su vez, les proporcionaran información útil para aprovechar en su toma de decisiones del proyecto.

El tema de las energías es muy amplio y tiene muchas opciones. Se decidió hacer una ficha sobre formas de generar la energía, otra sobre consumo y otra sobre el impacto en el medio ambiente. Se escogió que fueran estas y no otras, por lo visual de la información, porque no son temas demasiado abstractos ni complejos y porque son datos importantes e interesantes que conocer durante el proceso de formación. Se creyó que entrar a analizar temas de precios, por ejemplo, iba a ser algo complicado para este nivel.

Las fichas se repartieron en papel y las hicieron a mano, ya que también se pensó en proporcionarles las fuentes donde aparecían estas tablas y gráficos, y que fueran ellos quienes las buscaran, y aprovecharan así para conocer dónde se puede obtener este tipo de información y la cantidad de estudios que hay relacionados con el tema, pero como

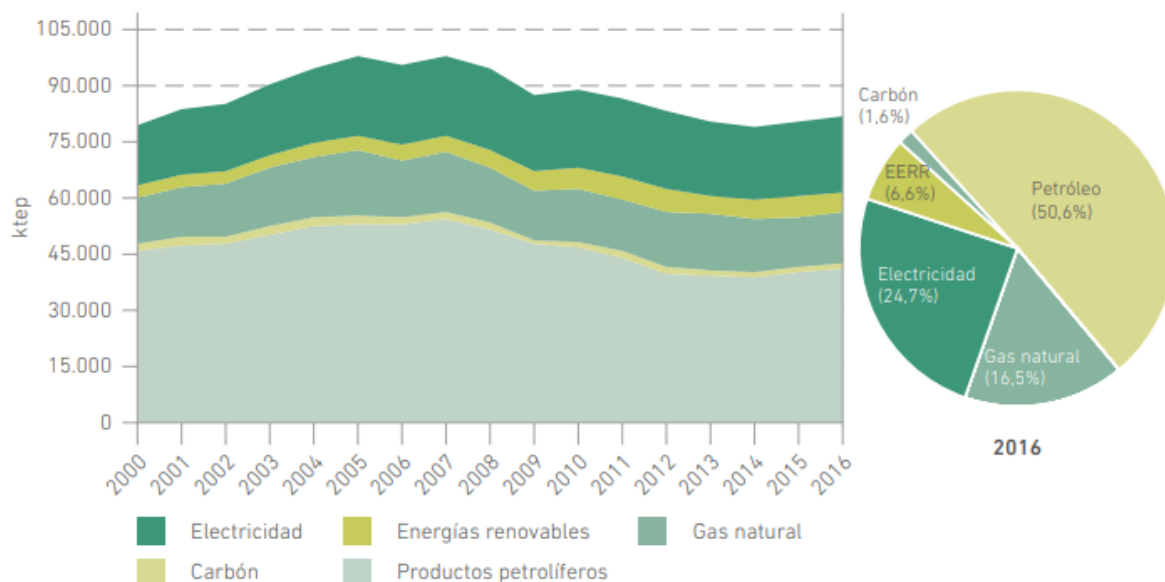
ya se ha dicho, el tiempo era limitado y el objetivo tampoco era la búsqueda de información a este nivel.

A continuación se presentan las tres fichas elaboradas:

FICHA 1 – GENERACIÓN

A continuación, se presentan distintos gráficos y tablas relacionados con el sistema eléctrico. Vuestra misión será analizar e interpretar lo que veis y responder a las preguntas que se os plantean.

Gráfico 1: Evolución del consumo de energía final por fuentes, 2000-2016



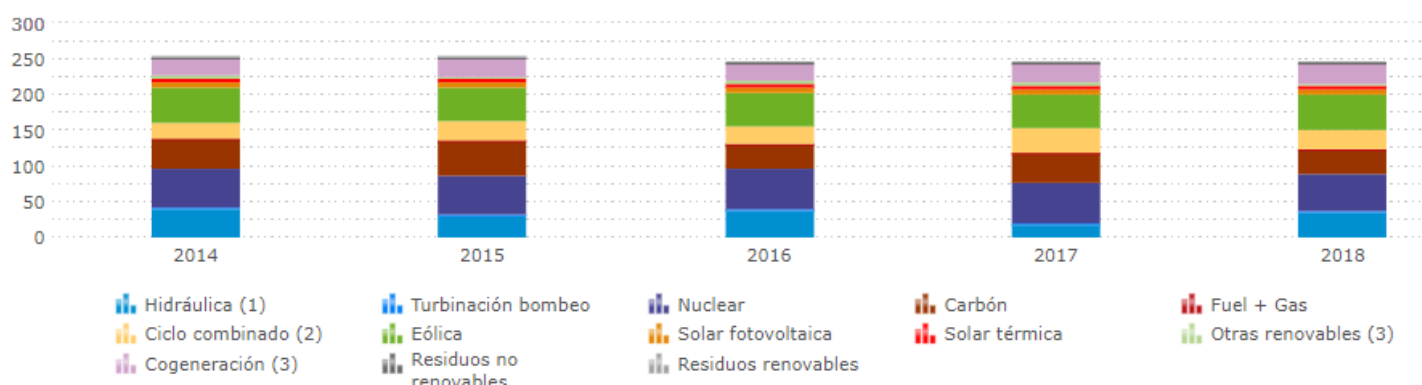
Fuente: Memoria Anual IDAE 2016

Unidad de medida: ktep (1000 toneladas equivalentes de petróleo)

1. ¿En qué año se produce el mayor consumo de energías renovables?
2. ¿En qué año se produce el menor consumo de electricidad?
3. Aproximadamente, ¿cuál es la diferencia de consumo de electricidad entre el año que más se consume y el que menos? ¿Con qué medida de dispersión se corresponde este resultado?
4. ¿A cuántos grados equivale el porcentaje de consumo de gas natural en el año 2016 en el diagrama de sectores?

5. ¿Cómo se refleja en el consumo de energía la crisis económica que hubo a nivel mundial a partir del año 2008?
6. ¿Es similar el comportamiento que se observa entre las distintas fuentes?
7. ¿Entre qué años se produjo el descenso más pronunciado del consumo de energía?
8. El aumento del consumo indica que la economía no va mal, ¿cuándo empezó a remontar el consumo de energía?
9. ¿Cuál es la fuente de energía de la que más dependemos?

Gráfico 2: Evolución de la estructura de la generación eléctrica peninsular, 2014-2018



	2014	2015	2016	2017	2018
Hidráulica ⁽¹⁾	39,2	28,4	36,1	18,4	34,1
Turbinación bombeo	3,4	2,9	3,1	2,2	2,0
Nuclear	54,8	54,7	56,0	55,5	53,2
Carbón	41,1	50,8	35,0	42,4	34,9
Fuel + Gas	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Ciclo combinado ⁽²⁾	21,1	25,0	25,5	33,6	26,4
Eólica	50,6	47,7	47,3	47,5	48,9
Solar fotovoltaica	7,8	7,8	7,6	8,0	7,4
Solar térmica	5,0	5,1	5,1	5,3	4,4
Otras renovables ⁽³⁾	4,3	3,8	3,4	3,4	3,5
Cogeneración ⁽³⁾	24,1	25,2	25,9	28,2	29,0
Residuos no renovables	0,5	0,7	0,6	0,7	0,7
Residuos renovables	1,8	2,3	2,5	2,5	2,3

Ciclo combinado: se transforma la energía térmica del gas natural en electricidad mediante dos ciclos consecutivos: el que corresponde a una turbina de gas convencional y el de una turbina de vapor.

Cogeneración: se obtienen energía eléctrica y energía térmica a la vez a partir de la energía primaria.

Fuente: Red Eléctrica de España (Estadísticas del Sistema Eléctrico)

Unidad de medida: TWh(Teravatio-hora)

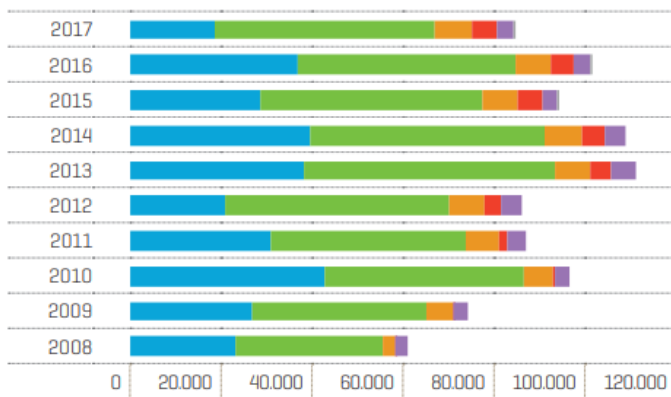
1. ¿Qué tipo de energía ha aumentado la que más su utilización para la generación de energía eléctrica en estos últimos años?
2. ¿Qué tipo de energía era la más utilizada en el año 2015 para producir energía eléctrica? ¿Ha cambiado la situación?

3. ¿Cuál es el riesgo o el peligro de la energía nuclear?

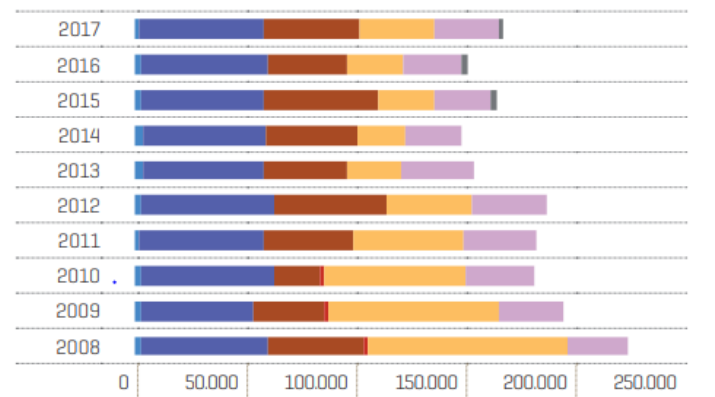
4. Representa en un diagrama de barras la generación de energía eléctrica en el año 2018

Gráfico 3: Evolución de la producción de energía eléctrica renovable y no renovable peninsular, 2008-2017

RENOVABLES



NO RENOVABLES



HIDRÁULICA EÓLICA SOLAR FOTOVOLTAICA SOLAR TÉRMICA
OTRAS RENOVABLES RESIDUOS RENOVABLES ⁽²⁾

TURBINACIÓN BOMBEO ⁽¹⁾ NUCLEAR CARBÓN FUEL/GAS CICLO COMBINADO
COGENERACIÓN RESIDUOS NO RENOVABLES ⁽²⁾

Fuente: El Sistema Eléctrico Español (2017)

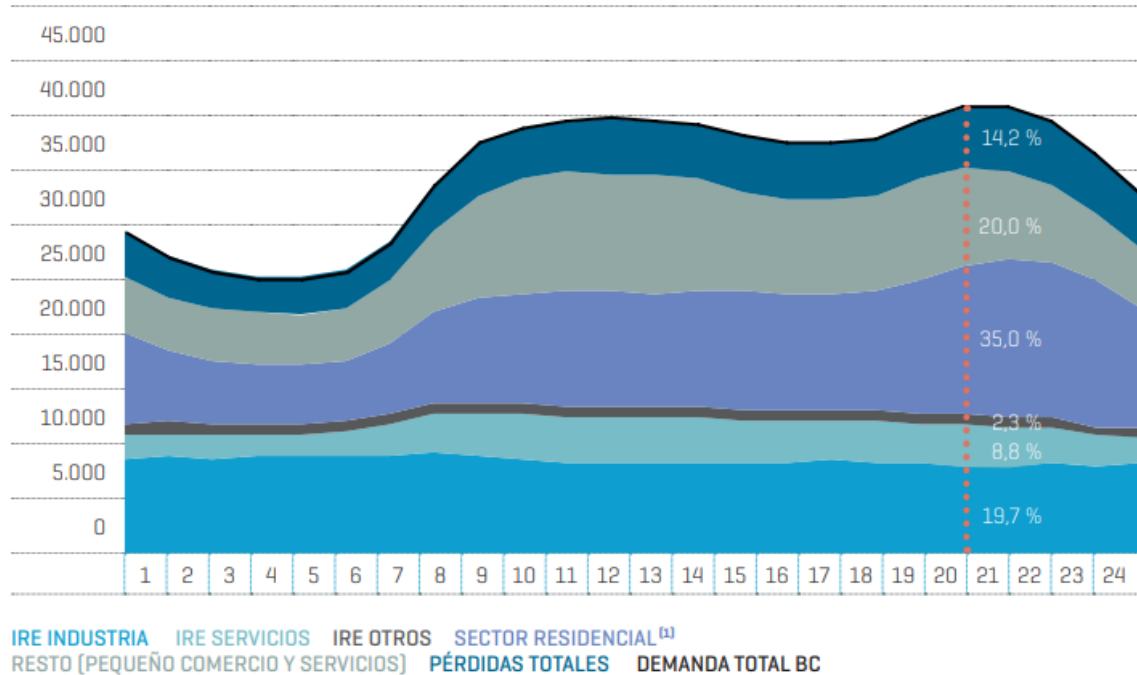
Unidad de medida: GWh(Gigavatio-hora)

1. ¿Cuál es la energía renovable más utilizada para la producción de energía eléctrica?
2. ¿Qué se utiliza más, energías renovables o energías no renovables? ¿En qué te has fijado para dar tu respuesta?
3. Aproximadamente, ¿cuál ha sido el consumo medio (en GWh) de energías renovables en esos 10 años?
4. Y ¿cuál ha sido el consumo medio (en GWh) de energías renovables entre los años 2013 y 2017?
5. ¿Son iguales las respuestas de las dos preguntas anteriores? Si hay diferencias, ¿a qué pueden deberse?
6. A la vista de los dos gráficos, ¿cuál de las producciones es más estable, la de energías renovables o la de no renovables?
7. ¿Qué tendencias parecen seguir cada uno de los gráficos?

FICHA 2 – CONSUMO

A continuación, se presentan distintos gráficos y tablas relacionados con el sistema eléctrico. Vuestra misión será analizar e interpretar lo que veis y responder a las preguntas que se os plantean.

Gráfico 1: Descomposición de la máxima demanda eléctrica horaria 2017- 18 de enero



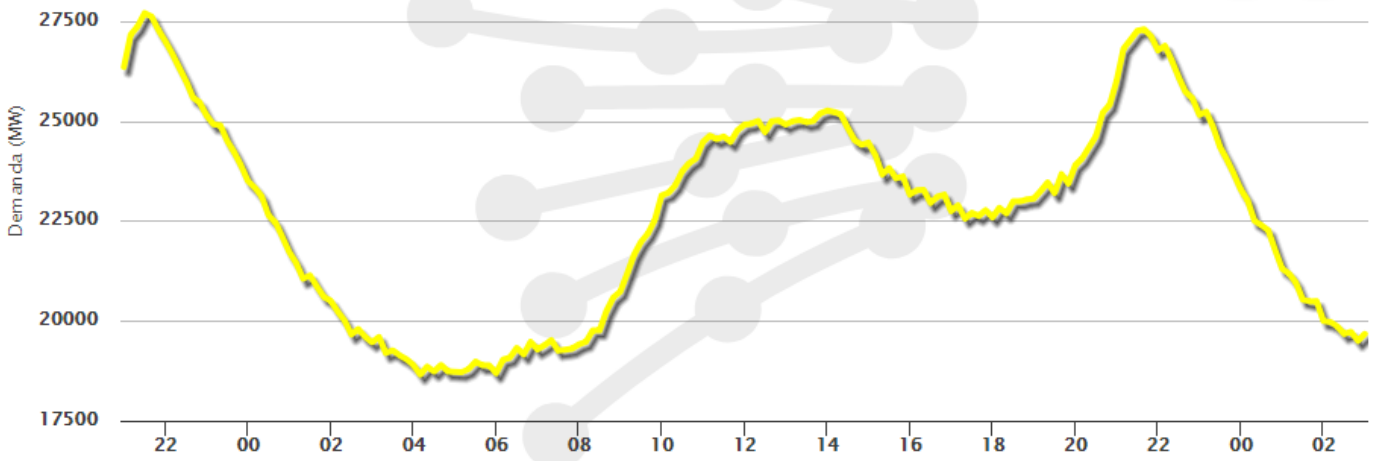
IRE (Índice de Red Eléctrica)

Fuente: El Sistema Eléctrico Español (2017)

Unidad de medida: MWh(Megavatio-hora)

1. ¿Cuál es el sector que menos variaciones de consumo de electricidad tiene a lo largo del día? ¿A qué crees que se debe esto?
2. ¿Qué porcentaje de la demanda eléctrica total se corresponde al sector residencial?
3. ¿En qué momento del día se produce el mayor consumo de electricidad en el sector servicios?
4. ¿Cuál es la diferencia de consumo de electricidad (en MWh) entre el sector industrial y el sector residencial a las diez de la noche?

Gráfico 2: Seguimiento de la demanda de energía eléctrica (sector residencial) 2019- 21 de abril

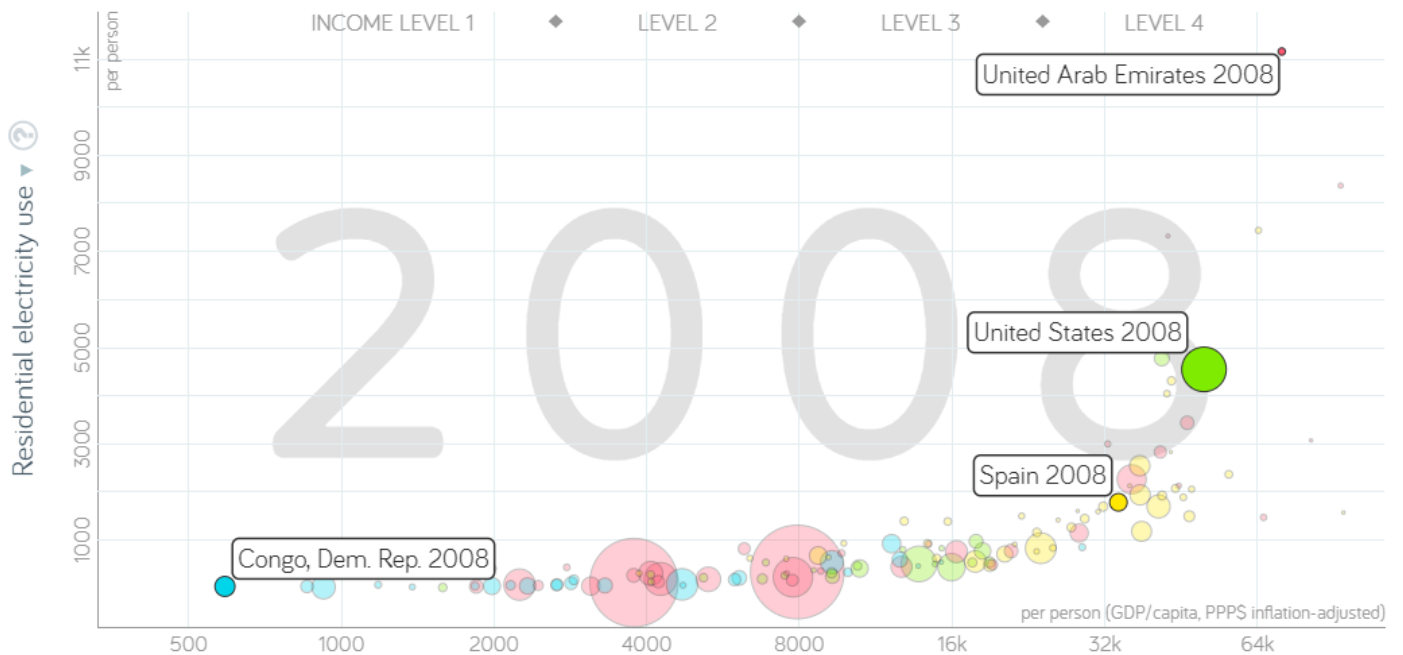


Fuente: Red Eléctrica de España

Unidad de medida: MW(Megavatio)

1. ¿En qué momentos del día se producen las mayores demandas de energía? En relación con el sector residencial, ¿por qué crees que es a estas horas cuando más energía eléctrica se demanda?
2. Realiza una tabla en la que aparezcan las horas o momentos del día con la demanda de energía eléctrica que le corresponda (en MW).
3. ¿Cuál es la demanda media de electricidad correspondiente al 21 de abril de 2019?

Gráfico 3: Consumo de electricidad por persona según los ingresos por persona en cada país



Fuente: Gapminder(2008)

Unidad de medida: KWh(Kilovatio-hora)

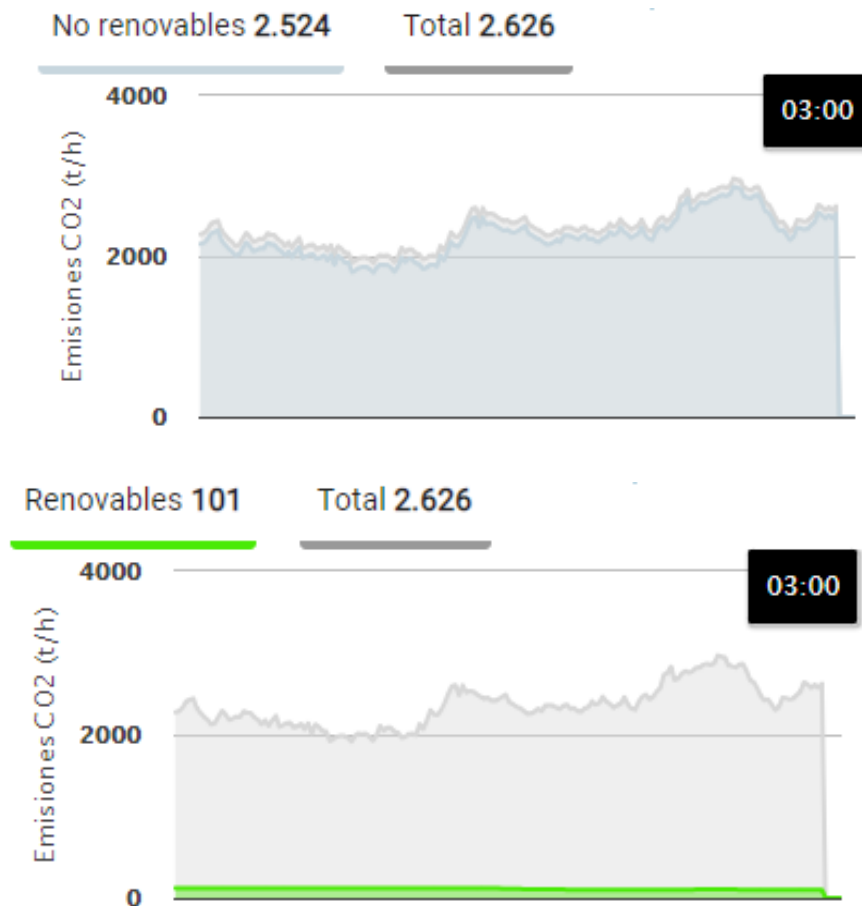
Ingresos por persona (Dollars)

1. ¿Qué puedes decir de la relación entre el consumo de electricidad por persona y los ingresos?
2. ¿Por qué crees que puede haber tantas diferencias entre unos países y otros?
3. ¿Qué países crees que se encuentran cerca del Congo en lo que a consumo de electricidad por persona se refiere?
4. ¿Y cuáles podrían estar próximos a España?
5. Si en el gráfico está representado el consumo por persona según los ingresos y China tiene miles de millones más habitantes que España, ¿dónde se localizará en el gráfico?

FICHA 3 – IMPACTO EN EL MEDIO AMBIENTE

A continuación, se presentan distintos gráficos y tablas relacionados con el sistema eléctrico. Vuestra misión será analizar e interpretar lo que veis y responder a las preguntas que se os plantean.

Gráfico 1: Seguimiento de la demanda de energía eléctrica (CO2 asociado) 2019 - 21 de abril



Fuente: Red Eléctrica de España

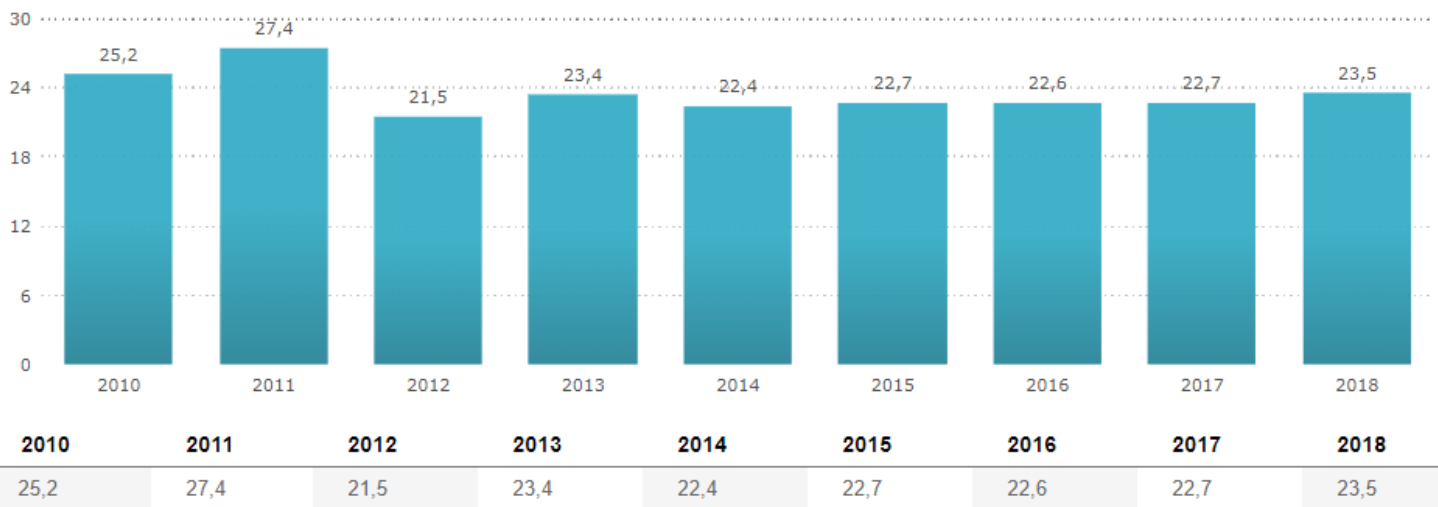
Unidad de medida: t/h(Toneladas-hora)

1. ¿Qué porcentaje del total de emisiones de CO2 representan las energías no renovables? ¿Y las energías renovables?

2. Representa los resultados anteriores en un diagrama de sectores

3. Con estos datos correspondientes al 21 de abril de 2019, ¿podríamos concluir que las energías renovables generan emisiones de CO₂ mucho más bajas que las energías no renovables? Justifica tu respuesta

Gráfico 2: Costes ambientales, 2010-2018

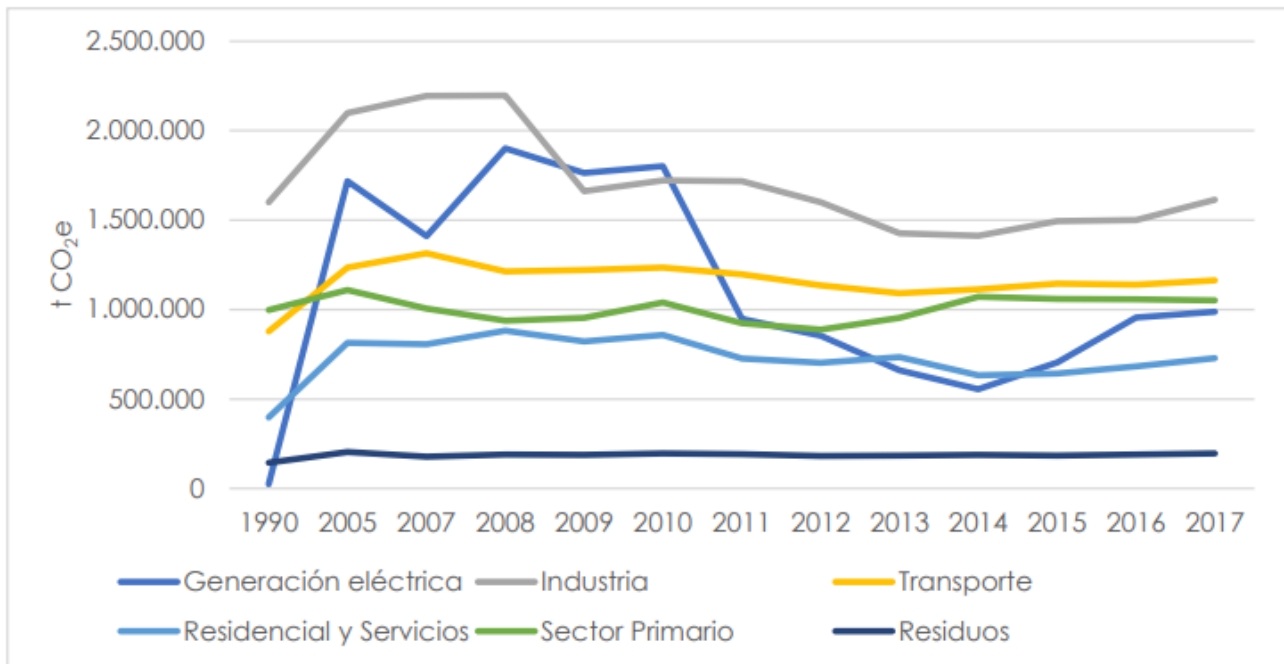


Fuente: Red Eléctrica de España

Unidad de medida: millones de €

1. ¿Cuál ha sido el año que más costes ambientales se han generado?
2. ¿Cuál sería el coste ambiental medio de los últimos cinco años que aparecen en el gráfico? ¿Crees que hay un coste estable en los últimos años?
3. Se podría decir que cada vez estamos más concienciados con el medio ambiente y que la media de los últimos años ha disminuido con respecto a la de los años anteriores? Justifica tu respuesta
4. ¿Es la representación un histograma? Si no lo es, ¿crees que sería apropiado representar los datos en un histograma?

Gráfico 3: Evolución de las emisiones de GEI (Gases efecto invernadero) en Navarra por sectores, 1990-2017



Fuente: Gobierno de Navarra, 2017 (Departamento de Desarrollo Rural, Medio Ambiente y Administración Local)

Unidad de medida: tCO₂e (Toneladas CO₂ equivalente)

1. Realiza un resumen de la evolución de las emisiones de GEI a lo largo de los años representados en el gráfico
2. ¿Cuál es el sector que más emisiones de GEI genera?
3. ¿Cuál de los sectores es el más estable en lo que se refiere a emisiones de GEI?
4. En el año 2017, aproximadamente ¿Qué porcentaje del total de las emisiones de GEI corresponde al sector generación eléctrica? ¿Por qué crees que este sector es tan inestable a lo largo de los años?
5. Con los resultados del año 2017, ¿se puede predecir que las emisiones del año 2018 van a ser mayores que las del 2017?

9.2. Cuestiones y comportamientos esperados

En cuanto a las cuestiones y comportamientos esperados, no podemos basarnos en experiencias anteriores de este tipo, porque las matemáticas no se han incluido en el aprendizaje por proyectos hasta el momento y este es un material nuevo, que ha sido exclusivamente elaborado por mí en coordinación con el tutor de este proyecto y con los tutores del centro de este curso. Aunque el currículo de 2º de la ESO se centra solo en probabilidad, en el centro se explican también cuestiones de estadística descriptiva que repasan los conceptos de 1º de la ESO e introducen algunos de 3º de la ESO, de ahí la introducción de la estadística en el proyecto.

Los resultados esperados son similares tanto en las cuatro clases como dentro de cada clase entre los distintos grupos, ya que son grupos heterogéneos en los que hay alumnado con todo tipo de características en cada uno de ellos, y por tanto no hay grupos que destaquen ni por ser excelentes ni por lo contrario.

Con respecto al general de las fichas, estaba claro que iban a surgir dudas de cómo realizarlas, dónde, el material que podían utilizar... Se esperaba que preguntaran si el trabajo era individual o en grupo, si tenían que utilizar la calculadora, si tenían que utilizar el transportador, si los cálculos tenían que ser “exactos” o no, si tenían que realizarlo en los mismos papeles que se les entregaron, el tiempo del que disponían para realizar la ficha...

En todas las fichas se incluye al menos un gráfico de líneas y en las cuestiones se pregunta por rangos, estabilización de una variable, cambios de tendencia... no es esperable que surjan dificultades en cuanto a la interpretación de los gráficos ya que es algo que han trabajado anteriormente. También se piden representaciones gráficas a partir de los datos, concepto que ha sido trabajado en cursos anteriores.

Una pregunta que esperaba pero que a la vez me llama mucho la atención y que la repiten constantemente cada vez que se propone una actividad, sobre todo en las horas de proyectos pero también en asignaturas como matemáticas en este caso, es si la actividad que van a realizar cuenta para nota. En varias ocasiones surgió este debate con el alumnado durante la realización del Practicum II y el profesorado apuntaba que están más preocupados por las calificaciones que por aprender y que, en general, solo se esfuerzan cuando saben o se les dice que algo va a contar para nota.

Concretamente dentro de cada una de las fichas, había alguna pregunta de más complejidad, en las que también esperaba que surgiera alguna duda. En la ficha 1, se espera que las mayores dificultades aparezcan en la gráfica 3, ya que se preguntan cuestiones que con un gráfico de líneas podrían verse de forma más clara y es necesario que tengan la capacidad de ver bandas en las barras del mismo color para responder a las preguntas que tienen que ver con tendencias. Con respecto a la ficha 2, es esperable que surjan dudas en el gráfico de puntos, ya que, aunque en clase se aclaró que cada color representa un continente y que el área de los círculos representa el tamaño de su

población, es un contenido nuevo, que no se trabaja hasta 4º de la ESO. La complejidad y a la vez el interés de la gráfica 1 de la ficha tres es que el alumnado se dé cuenta de que en las energías renovables apenas se ve la emisión ya que apenas hay nada que representar.

9.4. Resultados

A continuación, se va a presentar una tabla con los resultados obtenidos para cada una de las preguntas de cada ficha. Al ser la muestra bastante grande, lo que se va a indicar es si la respuesta es correcta o no, válida, ya que por ejemplo en los ejercicios en los que había que realizar cálculos se les dijo que estos podían ser aproximados.

Los resultados se van a dividir por ternas. En una tabla se presentarán los resultados de las fichas de las clases A y B y en otra los resultados de las clases C y D, para ver si hay alguna diferencia que pueda hacer notar el ambiente de trabajo o de la forma en la que se aprovechan las horas de proyectos en cada una de las ternas.

Resultados ficha 1:

		GRUPOS AB					GRUPOS CD					TOTAL
		1^	2	3*	4	5	1	2	3	4*	5*	ACIERTOS
Ficha 1	Gráfico 1	1										10
		2										9
		3										5
		4										6
		5										8
		6										8
		7										7
		8										4
		9										6
	Gráfico 2	1										6
		2										4
		3										2
		4										4
	Gráfico 3	1										10
		2										6
		3										6
		4										5
		5										4
		6										3
		7										3

Tabla 3. Resultados ficha 1.

*Nota: Los grupos que aparecen con el símbolo * son aquellos en los que había un alumno o alumna de PMAR y los grupos con el símbolo ^ son aquellos en los que había un alumno o alumna de UCE.*

Los recuadros en verde significa que la respuesta fue la correcta o válida, los recuadros en blanco significa que la respuesta estaba mal contestada o sin contestar.

Resultados ficha 2:

			GRUPOS AB					GRUPOS CD					TOTAL
			1	2	3*	4	5	1	2*	3	4	5^	ACIERTOS
Ficha 2	Gráfico 1	1	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	9
		2	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	9
		3	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	8
		4	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	5
	Gráfico 2	1	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	10
		2	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	9
		3	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	8
	Gráfico 3	1	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	6
		2	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	4
		3	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	6
		4	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	5
		5	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	2

Tabla 4. Resultados ficha 2.

Resultados ficha 3:

			GRUPOS AB					GRUPOS CD					TOTAL
			1	2	3	4^	5	1*	2	3^	4	5^	ACIERTOS
Ficha 3	Gráfico 1	1	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	10
		2	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	10
		3	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	8
	Gráfico 2	1	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	10
		2	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	8
		3	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	2
		4	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	2
	Gráfico 3	1	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	5
		2	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	10
		3	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	8
		4	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	4
		5	█	█	█	█	█	█	█	█	█	█	2

Tabla 5. Resultados ficha 3.

En la última columna de cada tabla, se ha señalado el número de grupos que han acertado o han contestado correctamente a cada pregunta. Se han marcado en rojo aquellas preguntas a las que la mitad o menos de los grupos han contestado correctamente.

9.5. Discusión de los resultados

Con respecto al número de grupos que acertaron bien las preguntas dentro de cada ficha, hay que decir que en la primera ficha, tan solo el 55% de las preguntas fueron contestadas correctamente por la mitad o más de los grupos, en el caso de la ficha 2, aproximadamente el 77% de las preguntas fueron contestadas exitosamente por la mitad o más de los grupos y para la tercera ficha, esto ocurrió con alrededor del 69% de las preguntas. Se puede concluir entonces, que la ficha que mejores resultados obtuvo fue la ficha número 2, la relacionada con el consumo, y la ficha con menos respuestas correctas fue la primera ficha, relacionada con las formas de generación de la energía.

Como ya se ha comentado anteriormente, los grupos son muy heterogéneos y por tanto no se observan diferencias notables en los grupos en los que hay alumnado de PMAR o de UCE.

En la ficha uno no hubo apenas diferencias entre los resultados de una terna y la otra. Hubo prácticamente el mismo número de preguntas acertadas y falladas tanto en las clases A y B como en las clases C y D. Las preguntas que más problemas ocasionaron fueron la que preguntaba por el riesgo de la energía nuclear y las dos últimas preguntas, en la que se pregunta por la estabilidad de las producciones de las energías renovables y no renovables y en la que se pide una descripción de las tendencias que parecen seguir cada uno de los gráficos.

Sin embargo, en el caso de la ficha número 2, el porcentaje de preguntas falladas en el grupo AB fue del 42% aproximadamente, mientras que en la terna CD este porcentaje fue del 23%. En este caso, el gráfico que más dificultades produjo fue el de Gapminder, en el que se relacionaba la renta per cápita por habitante con el consumo de electricidad por persona en cada país. Las preguntas que más falló el alumnado fueron aquellas en las que se preguntaba por la razón de las diferencias entre unos países y otros y la pregunta en la que se pedía que localizaran aproximadamente a China en el gráfico.

En la tercera ficha ocurrió exactamente lo mismo que en la primera, apenas hubo diferencias entre las dos ternas. Las preguntas que menos respuestas correctas obtuvieron fueron dos relacionadas con el gráfico de costes ambientales, una de ellas preguntaba por lo concienciados o no que estamos con el medio ambiente viendo los resultados de la gráfica, y la otra hacía referencia a si representar los datos del gráfico en un histograma sería apropiado en este caso. Es importante anotar que la explicación de los histogramas se adelanta en este caso, porque realmente no es un concepto correspondiente a 2º de la ESO. Por último, también surgieron dificultades a la hora de responder a algunas de las preguntas del gráfico de la evolución de las emisiones de

GEI en Navarra, sobre todo a la que les pedía calcular el porcentaje que representaban las emisiones que generaba el sector eléctrico sobre el total y el porqué de la inestabilidad de este sector a lo largo de los años y también la última pregunta en la que se cuestionaba si con los resultados del gráfico se podía predecir lo que ocurriría en 2018.

En general, analizando las tres fichas conjuntamente, se ve que las preguntas con más dificultades fueron las relacionadas con predicciones o proyecciones, o aquellas cuestiones que puede que fueran más abiertas en las que necesitaran información adicional a parte de los datos de los que disponían.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Síntesis

En general, parece que los grupos se tomaron en serio la realización de las fichas, y no se notaron actitudes pasivas ni se puede apreciar nada de eso en los resultados después de analizarlas.

Cabe resaltar que en algunos de los casos, las últimas preguntas de las fichas no estaban contestadas por falta de tiempo, ya que como se ha dicho, tan solo tuvieron una hora para realizarlas.

Todas las cuestiones o dificultades previstas aparecieron de una manera o de otra. Surgieron preguntas sobre la forma de realizar las fichas, sobre la utilización de la calculadora, sobre el significado de algunas de las gráficas...

Las actividades que más problemas ocasionaron fueron las relacionadas con comparaciones dentro de las tablas o gráficos o con predicciones o suposiciones a través de los datos que tenían. La mayoría de las preguntas relacionadas con cálculos o representaciones no dieron lugar a problemas, excepto la que tenía que ver con el histograma.

En mi opinión, la razón de estas dificultades tiene que ver con la forma en la que se impartió la unidad didáctica, que es como se suele hacer normalmente, profundizando más en los cálculos que en las reflexiones y en la utilidad de los conceptos en otros contextos. Por tanto, la mayoría de los grupos no fueron capaces de hacer predicciones, o si las hicieron, no supieron justificar sus respuestas. Con respecto al histograma, no ven su utilidad y en qué casos es apropiado representar los datos mediante histogramas, no queda clara la diferencia que hay con el gráfico de barras, aunque como ya se ha dicho, es un concepto que se ha adelantado a este curso.

El gráfico de Gapminder fue una prueba para ver la capacidad que tienen de relacionar e interpretar conjuntamente la información, aunque creo que este gráfico era de demasiada dificultad para los contenidos estudiados en este curso.

No hubo diferencias notables entre clases ni tampoco entre los grupos que tenían alumnado de clases de PMAR o UCE, por tanto, queda comprobado que los grupos son heterogéneos y no se hacen separaciones por niveles en el centro.

Conclusiones

Después de haber realizado el presente estudio y haber analizado los resultados de las fichas del alumnado, se puede llegar a varias conclusiones:

- La atención a la diversidad, la inclusión, y la variedad de alumnado de distintos perfiles en las aulas, enriquece mucho los grupos y para nada entorpece o dificulta el ritmo del proyecto.
- No hay diferencias notables entre las aulas, el ambiente de trabajo y el aprovechamiento de las horas es muy similar en ambas ternas, aunque el profesorado sea distinto.
- Con respecto a los contenidos estadísticos, el alumnado está acostumbrado a trabajar con operaciones y cálculos y no surgen dificultades en las cuestiones que tienen que ver con esto.
- Sin embargo, los problemas vienen cuando se trata de interpretar resultados, entender el significado de los parámetros, realizar predicciones o darle un sentido a los conceptos matemáticos estudiados en otro contexto relacionado con el proyecto en cuestión.
- Los contenidos no están claramente entendidos ni diferenciados, por lo tanto no se cumple con algunas especificaciones del currículo en algunos casos, como por ejemplo con el significado y la utilidad de los histogramas, quizás no sea lo más acertado adelantar conceptos y sería conveniente afianzar primero los conocimientos previos.
- Al ser una novedad la introducción de las matemáticas en el proyecto y al ser un material nuevo, se podrían aprovechar los resultados para realizar algún ajuste. Sería conveniente que las fichas fueran menos extensas o que se dedicara más tiempo a su realización. También sería recomendable introducir más preguntas que invitaran a la reflexión y a la interpretación de los resultados, más que al cálculo y representación, aunque se podría comenzar con gráficos más sencillos y no adelantar conceptos ni introducir contenidos posteriores.

Cuestiones abiertas

Este estudio puede dejar dos cuestiones abiertas para futuras líneas de investigación:

- Utilización de los recursos tecnológicos: el alumnado dispone de sus propios ChromeBooks individuales, por lo que sería interesante que se trabajara la unidad con ayuda de estas herramientas, que puede que consiguieran hacer más visibles algunos conceptos con aplicaciones como puede ser GeoGebra. También sería una forma de introducir la búsqueda de información y de fomentar un trabajo más autónomo por parte del alumnado.
- Introducción de las matemáticas en el producto final de un proyecto: los productos finales suelen ser exposiciones orales, narrativas, en las que por el momento, no se ha incluido ningún aspecto matemático. Creo que sería una buena idea que en algún proyecto, las matemáticas estuvieran incluidas en el producto final y pudieran verse como algo a parte de entregables con ejercicios y actividades que realizar, como algo con sentido y de gran utilidad a lo largo de la vida en muchos ámbitos.

Referencias

- Batanero, C. Didáctica de la Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
- Batanero, C. et al, 1994, Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. En International Journal of Mathematics Education in Science and Technology
- Batanero, C. et al, 2013, La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español, Matemática, Educación e Internet, Revista Digital
- Consumo de electricidad por persona según los ingresos por persona en cada país, 2008, Gapminder
- Di Blasi Regner, M. et al, 2003, Dificultades y Errores: Un estudio de caso. Comunicación breve presentada en el II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería
- El Sistema Eléctrico Español, 2017, Red Eléctrica de España
- Estadísticas del Sistema Eléctrico, 2018, Red Eléctrica de España
- Godino, J. D.; Batanero, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble
- Inventario de emisiones de gases efecto invernadero en Navarra, 2017, Gobierno de Navarra
- Matemáticas, 1º de la ESO, SM
- Matemáticas, 2º de la ESO, ANAYA
- Matemáticas, 3º de la ESO académicas, SM
- Matemáticas, 4º de la ESO académicas, SM
- Matemáticas, 6º de Primaria, ANAYA
- Principales indicadores ambientales, 2018, Red Eléctrica de España
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato
- Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria
- Seguimiento de la demanda de energía eléctrica, 2019, Red Eléctrica de España

ANEXOS

Anexo I: Unidad Didáctica del libro de texto

14

Estadística

● Presentación de la unidad

- Para esta unidad, la recopilación de materiales de prensa puede resultar de excelente utilidad. En cualquier diario encontraremos numerosos gráficos referidos a asuntos que interesan al alumnado: deportes, temas ambientales, etc.
- Los estudiantes pueden recopilar material y confeccionar carpetas, que luego pueden intercambiar unos con otros. El mundo del baloncesto es, en particular, un medio que usa mucho las estadísticas y que los estudiantes están acostumbrados a seguir por la televisión.
- Los contenidos de la unidad podrían clasificarse del siguiente modo:
 - Elaboración e interpretación de tablas y gráficos estadísticos: en este nivel, las tablas o gráficos que elabore el alumnado han de ser sencillas o se les ha de proporcionar mucha ayuda. Lo importante es que se inicien en esta tarea.
 - Cálculo de parámetros: solo algunos de ellos y muy sencillos.

● Conocimientos mínimos

- Interpretación de una tabla o una gráfica estadística.

- Conocimiento del significado de frecuencia y cálculo de la de un valor en una colección de datos.
- Construcción de un diagrama de barras o un histograma a partir de una tabla de frecuencias.
- Cálculo de la media, la mediana y la moda en un conjunto de datos aislados.

● Complementos importantes

- Interpretación de una tabla de doble entrada.
- Elaboración de un diagrama de sectores.
- Cálculo del rango y de la desviación media de un conjunto aislado de valores.
- Obtención de la media y la desviación media de un conjunto de valores dados en tablas de frecuencias.
- Cálculo de la mediana y los cuartiles. Representación de estos en un diagrama de caja.

Como vías de profundización e investigación se propone:

- Identificación de algunos errores o «abusos estadísticos» en informaciones dadas por el profesorado. En este nivel no es presumible que el estudiante pueda encontrarlos espontáneamente en

Esquema de la unidad

LAS VARIABLES ESTADÍSTICAS

son

CUANTITATIVAS

CUALITATIVAS

cuando

cuando

TOMAN VALORES NUMÉRICOS

TOMAN VALORES NO NUMÉRICOS

que se pueden resumir mediante

que se pueden resumir mediante

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

TABLAS DE FRECUENCIAS

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

que pueden ser

que pueden ser

que pueden ser

CENTRALIZACIÓN

DISPERSIÓN

POSICIÓN

como son

como son

como son

- La media
- La mediana
- La moda

- El rango
- La desviación media

- La mediana
- Los cuartiles

con datos agrupados, de doble entrada...

- Diagramas de barras
- Histogramas
- Diagramas de caja y bigotes

los medios de comunicación. Es imprescindible que el profesor o la profesora «prepare» algunos casos especialmente llamativos.

- Disponer de conocimientos suficientes para decidir qué tipo de gráfico es el ideal para una distribución según el tipo de variable que se estudie.
- Recopilación de informaciones de periódicos, revistas, libros..., y elaboración de una tabla estadística con ellas.
- Elaboración de una tabla de doble entrada que recoja los datos de cierta información.

● Anticipación de tareas

- Recordar qué es una tabla de frecuencias y cómo se calculan los parámetros estadísticos.
- Buscar información en los medios de comunicación en los que salgan tablas y gráficas estadísticas.
- Buscar gráficas estadísticas engañosas en las que se tergiversa la realidad.
- Mostrar cómo calcular parámetros estadísticos con distintos tipos de calculadora.

● Adaptación curricular

En la parte de “Recursos fotocopiables” se ofrece una adaptación curricular de esta unidad 14 del libro del alumnado, para cuya elaboración se han tenido en cuenta los conocimientos mínimos que aquí se proponen.

La lectura inicial servirá para reforzar la comprensión lectora y para ejercitar los dos aspectos que justifican el estudio de las matemáticas: el práctico y el intelectual.

Los contenidos, si se adaptan a esos mínimos exigibles, o bien no han sufrido cambio alguno, o bien se han modificado ligeramente para adecuarlos al posible nivel de los estudiantes a quienes va dirigido. Lo mismo cabe decir de los ejercicios prácticos que se proponen.

Si algún contenido supera los mínimos, o bien se ha suprimido, o bien se ha adaptado para ajustarlo a los requisitos exigidos.

Finalmente, los ejercicios y los problemas con los que finaliza la unidad se han reducido en cantidad y se han modificado o bajado de nivel hasta adaptarse a lo convenido. Lo mismo cabe decir de la autoevaluación.

En la siguiente tabla se recoge una relación de actividades para atender y trabajar el aprendizaje cooperativo, el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, la interdisciplinariedad, el emprendimiento y la resolución de problemas. Unas están propuestas en el libro del alumnado (L.A.), y aquí se hace referencia a ellas indicando la página y la actividad, y otras, como se indica, se sugieren en esta Propuesta Didáctica (P.D.).

Una selección de estas sugerencias están marcadas en el libro del alumnado con un icono; aquí se han marcado con (*).

APRENDIZAJE COOPERATIVO	PENSAMIENTO COMPRESIVO	PENSAMIENTO CRÍTICO	INTERDISCIPLINARIEDAD
Pág. 278. Actividad sugerida en esta P.D.	Pág. 279. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 277. Actividades 1, 2 y 3	Pág. 276. Actividad sugerida en esta P.D.
Pág. 280. Actividad sugerida en esta P.D.	Pág. 280. Ejercicio resuelto (*)	Pág. 281. Actividad 3	
Pág. 281. Piensa y practica (*)	Pág. 282. Ejercicio resuelto	Pág. 283. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	
Pág. 285. Piensa y practica (*)	Pág. 284. Ejercicio resuelto	Pág. 285. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	
Pág. 286. Actividades 1 y 2	Pág. 285. Ejercicio resuelto	Pág. 286. Actividad 1 b) (*)	
Pág. 287. Actividad 5 (*)	Pág. 292. Actividad “Conoce otras medias” (*)	Pág. 288. Actividades 13 y 14	
Pág. 289. Toda la página		Pág. 289. Actividades 20 (*) y 21	

TIC	EMPRENDIMIENTO	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Pág. 276. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 278. Actividad 1 (*)	Todos los problemas propuestos en el L.A. están encuadrados en este apartado. Aquí se señalan algunos que tienen especial interés.
	Pág. 283. Actividad 2 (*)	Pág. 290. Actividad “Aprende a resolver problemas” (*)
	Pág. 287. Actividad 4 (*)	Pág. 291. Actividad sugerida en esta P.D.
	Pág. 288. Actividad 8 (*)	Pág. 293. Actividad “Entrénate resolviendo problemas” (*)
	Pág. 292. Actividad “Interpreta y exprésate” (*)	

14 Estadística

Los censos y recuentos estadísticos se hallan presentes en todas las civilizaciones desde tiempos antiquísimos, pero se limitaban a la recogida de datos y, a lo sumo, a su exposición clara y ordenada.



Existen papiros egipcios de hace más de 5000 años donde hay constancia de censos de población y de bienes. Tal era su dedicación a estos asuntos que concibieron una divinidad llamada *Safnit*, "Señora de los libros".

También los babilonios guardaban en tablillas de arcilla los recuentos estadísticos que realizaban hasta el punto de que en el siglo VIII a.C. se construyó una biblioteca donde se recopilaban estos documentos.

En distintos pasajes de la Biblia se recogen censos hechos por los judíos. Especialmente en el libro Números, del Pentateuco, donde se describe con detalle el censo realizado por Moisés a la salida de Egipto en el siglo XIV a.C.

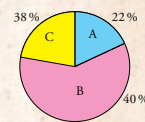
La estadística como ciencia comienza a des-puntar en el siglo XVII con los estudios demográficos del inglés John Graunt. En ellos, los datos se analizaban para obtener conclusiones bien fundamentadas.

Los gráficos estadísticos son de gran ayuda ya que, de un simple vistazo, muestran de manera bastante precisa cómo se distribuye una población (personas, animales, países...) con respecto a una determinada característica (edad, altura...). Sin embargo, en muchas ocasiones, los gráficos pueden ser engañosos con el fin de tergiversar la realidad para provecho de quien los hace. Veamos algunos casos:

Sectores caprichosos

En un pueblo hay tres candidatos (A, B y C) para ser alcalde. Se ha llevado a cabo una encuesta una semana antes de los comicios y se han obtenido estos datos: A: 22%; B: 40% y C: 38%.

El candidato B, viéndose ganador, muestra a sus compañeros de partido este gráfico para alentarlos. ¿Te parece razonable? ¿Crees que muestra la realidad de los resultados de la encuesta?



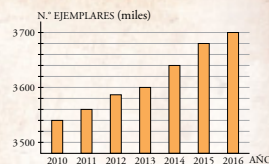
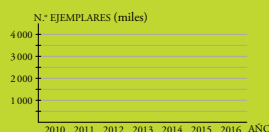
1 Realiza de forma aproximada en tu cuaderno un diagrama de sectores que muestre los resultados objetivamente.

Exagerando el crecimiento

En una gran editorial, el director general ha pedido a los responsables comerciales que le muestren los datos de ventas (por número de ejemplares). Han preparado una gráfica como la de la derecha.

¿Crees que el número de ejemplares vendidos ha aumentado mucho en estos 7 años? ¿Te parece fiable esta gráfica?

2 Dibuja en tu cuaderno un diagrama de barras sobre unos ejes como estos que muestren los mismos datos.



Efecto de los gráficos tridimensionales

En un pueblo hay dos gasolineras, A y B. Las ventas durante un año se han repartido de esta forma:

Gasolinera A: 1 millón de litros

Gasolinera B: 1/2 millón de litros

3 ¿Cuál de estas dos situaciones crees que representa mejor las ventas? Razónalo.



Al iniciar la unidad

- Podemos destacar dos ideas fundamentales extraídas de esta lectura:
 - En todas las épocas y civilizaciones, los gobernantes han deseado conocer y cuantificar sus posesiones (bienes y personas) y, para ello, han promovido inventarios y censos.
 - La estadística como ciencia pretende no solo almacenar datos sino estudiar relaciones entre ellos. En esto, John Graunt fue pionero.

Cuestiones para detectar ideas previas

- Conocer los conceptos básicos estadísticos.
- Utilizar las tablas de frecuencias.
- Saber representar una distribución en un gráfico estadístico adecuado.
- Recordar la media, la mediana y la moda.

TIC



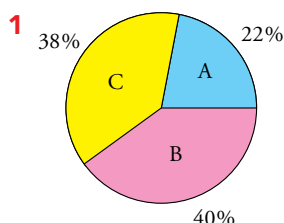
- Ampliar la información sobre la evolución y el tratamiento de la estadística a lo largo de la historia.
- Averiguar qué matemáticos han destacado en sus aportaciones a la evolución de la estadística.

Interdisciplinariedad

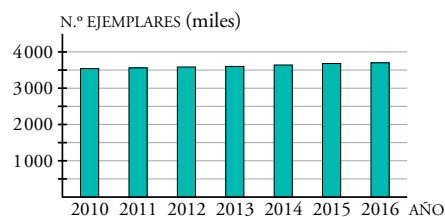


Elaborar un informe indicando las necesidades que demandaría el uso de la estadística en una sociedad antigua (por ejemplo, en el imperio romano), en la sociedad de la Edad Media, en la sociedad de la Edad Moderna (por ejemplo, en la sociedad del Renacimiento en una ciudad italiana), en la Revolución Industrial y en la sociedad actual.

Soluciones de las actividades



2 El número de ejemplares no ha aumentado tanto, pero tomando esa escala, parece que ha aumentado más.



3 La situación (II) es la que mejor representa las ventas, pues la relación entre los dos bidones es más parecida a 2:1, que es lo que indican las ventas.

ANOTACIONES

2 Parámetros de centralización

Los parámetros estadísticos son valores que se obtienen a partir de la distribución y que resumen alguna de sus características globales.

La media, la mediana y la moda se llaman **parámetros de centralización** porque son valores alrededor de los cuales se distribuyen los datos.

Recordemos en qué consisten y cómo se calculan.

Ejemplo

A 10 estudiantes les han preguntado por el número de tíos y tías que tienen. Las respuestas han sido las siguientes: 3, 5, 4, 3, 5, 6, 8, 2, 1, 3.

Su **media** es $\bar{x} = \frac{3+5+4+3+5+6+8+2+1+3}{10} = \frac{40}{10} = 4$

Para hallar la **mediana**, se ordenan los datos de menor a mayor. La mediana es el dato que está en el lugar central. En este caso, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 8, como hay un número par de datos, dos de ellos (3 y 4) ocupan el lugar central. La mediana es el promedio de ellos, $Me = 3,5$.

Su **moda** es $Mo = 3$, porque es el dato más frecuente (está 3 veces).

- La **media** de varias cantidades es la suma de todas ellas dividida por el número de las que hay.
- Se llama **mediana** de un conjunto de datos numéricos al que, colocándolos en orden, ocupa el lugar central. Si hay un número par de datos, se asigna la mediana al valor intermedio entre los dos centrales.
- La **moda** es el dato con mayor frecuencia.

La media y la mediana solo pueden hallarse para variables cuantitativas. La moda puede asignarse a cualquier tipo de variable.

Recuerda

Las **variables cuantitativas** solo toman valores numéricos y las **cuantitativas** no toman valores numéricos.

Ejercicio resuelto

Hallar \bar{x} , Me y Mo en estas distribuciones:

- a) N.º de mascotas que tienen 13 estudiantes de una clase.
3, 2, 0, 0, 3, 2, 0, 2, 0, 1, 4, 6, 3
- b) Estación del año en la que nacieron 10 personas:
P, V, V, O, P, I, I, V, O, V

a) Media: $\bar{x} = \frac{3+2+0+0+3+2+0+2+0+1+4+6+3}{13} = \frac{26}{13} = 2$

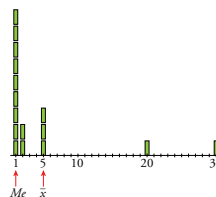
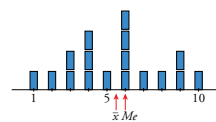
Mediana: Se ordenan los datos: 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 6 $\rightarrow Me = 2$

Moda: $Mo = 0$ (el dato que está más veces).

b) Es una variable cualitativa y no se le puede asignar ni media ni mediana. Su moda es $Mo = V$ (pues el número de personas nacidas en verano, 4, es mayor que en las demás estaciones).

Piensa y practica

1. Halla \bar{x} , Me y Mo de cada una de las siguientes distribuciones:
- a) Grupo sanguíneo de 15 personas:
A, A, B, AB, AB, A, A, B, A, 0, AB, A, A, B, AB
- b) Edades de varios estudiantes:
12, 15, 12, 16, 10, 11, 12, 10, 11, 12, 9, 9, 10, 8
- c) Número de asignaturas suspendidas en la evaluación:
0, 1, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 0, 0, 0, 1

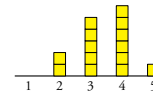


En la web

Actividades guiadas para practicar los parámetros de centralización.

Piensa y practica

2. Halla la media y la mediana de las siguientes distribuciones. Utiliza los resultados para dilucidar si son más o menos simétricas. Después, represéntalas y comprueba cómo de simétricas o asimétricas son.
- A: 1, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10
- B: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9
- C: 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 9
3. Di, a simple vista, si esta distribución es simétrica o asimétrica. Halla, después, la media y la mediana para comprobar tu estimación.



La media y la mediana para estudiar asimetrías

Vamos a ver con unos ejemplos cómo los valores de la media, \bar{x} , y de la mediana, Me , de una distribución de variable cuantitativa sirven para apreciar si esta es simétrica, o bien más o menos asimétrica.

DISTRIBUCIONES APROXIMADAMENTE SIMÉTRICAS

Esta distribución, ①, (edades de los niños y las niñas de una piscina infantil) es casi simétrica:

① 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10

Su media es $\bar{x} = 5,47$. Su mediana es $Me = 6$.

La media y la mediana toman valores próximos.

En una distribución completamente simétrica, \bar{x} y Me coinciden.

Una distribución aproximadamente simétrica tiene valores \bar{x} y Me próximos.

DISTRIBUCIONES ASIMÉTRICAS

La siguiente distribución, ②, corresponde a los sueldos mensuales (en miles de euros) de los empleados en una pequeña empresa:

② 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 5, 20, 30

Su media es $\bar{x} = 4,875$. Su mediana es $Me = 1$.

En una distribución muy asimétrica, \bar{x} y Me toman valores poco próximos.

¿QUÉ PASA CON LA MODA?

En variables cuantitativas, el valor de la moda es poco representativo. Supongamos que los sueldos de la distribución ② fueran ligeramente distintos:

0,96; 0,97; 0,98; 0,99; 1; 1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 2; 5; 5; 20; 30

La media es la misma, $\bar{x} = 4,875$; la mediana varía un poco, $Me = 1,035$. Sin embargo, la moda, que antes valía 1, ahora vale 5: ¡menudo salto!

La moda es un parámetro poco útil para las distribuciones de variables cuantitativas.

Sugerencias

- Empezamos repasando el concepto y el cálculo de la media, la mediana y la moda en distribuciones muy sencillas.
- En la página de la derecha se hace uso de estos parámetros para hacer ver que la media y la mediana son valores próximos si la distribución es casi simétrica, pero que pueden ser distantes si es asimétrica.

Aprendizaje cooperativo

Estas actividades y, en general, todas las que tienen por objetivo la fijación de los contenidos recién aprendidos se pueden resolver individualmente y después corregir en pequeño grupo, contrastando las soluciones y resolviendo entre ellos las discrepancias. Solo en caso de bloqueo recurrirán al docente.

Refuerzo y Ampliación

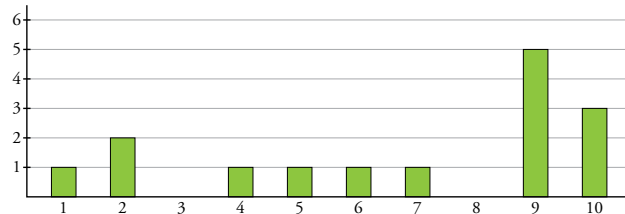
Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:
Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 24. Ejercicios 3 y 4 de la pág. 25.
Ampliación: Ejercicios 5 y 6 de la pág. 25.
- Del fotocopiable TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD:
Refuerzo: Ejercicio 3 de la ficha A.
Ampliación: Ejercicios 1, apartado a), y 4 de la ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

- 1 a) Por no ser cuantitativa la variable, solo podemos hallar la moda, que es el grupo sanguíneo A.
- b) $\bar{x} = 11,21$; $Me = 11$; $Mo = 12$
- c) $\bar{x} = 1,19$; $Me = 1$; $Mo = 0$

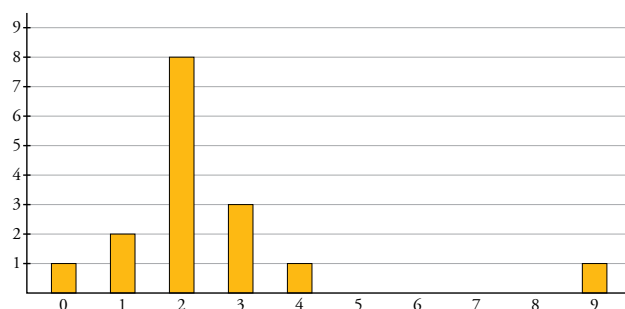
2 A: $\bar{x} = 6,8$; $Me = 9 \rightarrow$ La distribución no es muy simétrica.



B: $\bar{x} = 4,625$; $Me = 5,5 \rightarrow$ La distribución es más simétrica que A.



C: $\bar{x} = 2,5$; $Me = 2 \rightarrow$ De las tres distribuciones, es la más simétrica.



3 La distribución es bastante simétrica: $\bar{x} = 3,43$; $Me = 3,5$

3 Parámetros de dispersión

Los parámetros de centralización dan una visión muy parcial de la distribución. Deben ser complementados con otros parámetros que informan sobre el grado de dispersión de los datos. Veamos algunos de ellos:

Recorrido o rango

El **recorrido** o **rango** de una distribución es la diferencia entre los valores extremos.

$$\text{RECORRIDO} = \text{valor mayor} - \text{valor menor}$$

En las distribuciones de la página anterior, sus recorridos son:

$$\text{RECORRIDO DE (I)} = 10 - 1 = 9 \quad \text{RECORRIDO DE (II)} = 30 - 1 = 29$$

Desviación media: un parámetro de dispersión ligado a la media

La **desviación media**, DM, de una distribución es un parámetro asociado a su media; es el promedio de las distancias a la media de los valores de todos los individuos.

Por ejemplo, consideremos la distribución 5, 8, 10, 11, 15, 17 cuya media es 11. Observa que las distancias de los datos a la media son positivas.

DATOS	5	8	10	11	15	17	De 5 a $\bar{x} = 11$ es $11 - 5 = 6$.
DISTANCIA A LA MEDIA	6	3	1	0	4	6	De 15 a $\bar{x} = 11$ es $15 - 11 = 4$.

El promedio de las distancias a la media se calcula así:

$$\text{DM} = \frac{6 + 3 + 1 + 0 + 4 + 6}{6} = \frac{20}{6} = 3,33$$

Varianza y desviación típica

Si en lugar del promedio de las distancias a la media hallamos el promedio de sus cuadrados, el parámetro así obtenido se llama **varianza**.

La raíz cuadrada de la varianza se llama **desviación típica**.

El próximo curso manejarás estos parámetros con soltura. Ahora nos conformamos con hallar sus valores para los datos del ejemplo:

$$\text{Varianza} = \frac{6^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 + 4^2 + 6^2}{6} = 16,33$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{16,33} = 4,04$$

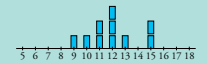
Ejercicio resuelto

Hallar la desviación media de las siguientes distribuciones:

(III) 5, 7, 8, 9, 11, 13, 13, 15, 16, 18



(IV) 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15



(III) Su media es $\bar{x} = 11,5$.

DATOS	5	7	8	9	11	13	13	15	16	18	
DISTANCIA A 11,5	6,5	4,5	3,5	2,5	0,5	1,5	1,5	3,5	4,5	6,5	SUMA → 35

$$\text{Desviación media: DM} = \frac{\text{suma de las distancias a } \bar{x}}{10} = \frac{35}{10} = 3,5$$

(IV) Su media es $\bar{x} = 12$.

DATOS	9	10	11	11	12	12	12	13	15	15	
DISTANCIA A 12	3	2	1	1	0	0	0	1	3	3	SUMA → 14

$$\text{Desviación media: DM} = \frac{14}{10} = 1,4$$

Los datos de (III) (DM = 3,5) están más dispersos que los de (IV) (DM = 1,4).

Piensa y practica

1. Halla el recorrido, la DM y la desviación típica en las distribuciones A, B y C de la actividad 2 de la página anterior.

ANOTACIONES

Sugerencias

- Es interesante que el alumnado entienda la necesidad de las medidas de dispersión para completar la información que nos dan las de centralización.
- La desviación media complementa a la media diciéndonos cómo de alejados de ella están los datos. El curso próximo, este papel lo desempeñará la desviación típica, de mucho más interés estadístico. De hecho, la desviación media solo tiene valor didáctico, pues es más sencilla que la desviación típica y, en este nivel, tiene un papel similar a ella.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

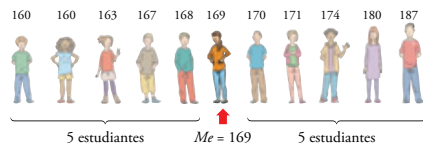
- Del cuaderno n.º 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:
Refuerzo: Ejercicios 11, 12, 13 y 14 de la pág. 28.
- Del fotocopiable TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD:
Refuerzo: Ejercicio 4 de la ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

- 1
- A → $\begin{cases} \text{Recorrido: } 10 - 1 = 9 \\ \text{DM: } 2,77 \\ \text{Desviación típica: } 3,12 \end{cases}$
- B → $\begin{cases} \text{Recorrido: } 9 - 1 = 8 \\ \text{DM: } 2,67 \\ \text{Desviación típica: } 3 \end{cases}$
- C → $\begin{cases} \text{Recorrido: } 9 - 0 = 9 \\ \text{DM: } 1,19 \\ \text{Desviación típica: } 1,9 \end{cases}$

4 Parámetros de posición

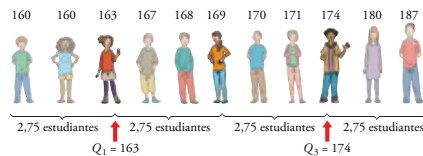
Los 11 componentes de un grupo se han colocado en fila ordenados según sus estaturas. Como ya sabes, la mediana es la medida del que ocupa el lugar central; en este caso, el sexto lugar.



¿Qué tiene que ver el **sexto lugar** con el número de individuos, 11? La mitad de 11 es 5,5, y por tanto, la mediana correspondería a la medida de la persona que ocupa el lugar 5,5. Como las personas no se pueden partir, será la persona que va después de la quinta, es decir, la sexta.

Si en lugar de dividir este grupo en 2 partes lo hacemos en 4 partes iguales, ¿dónde quedarían las particiones? Como hay 11 personas, la cuarta parte es $11 : 4 = 2,75$.

Q_1 deja a su izquierda "2,75 personas", Q_3 deja a su izquierda "8,25 personas" por tanto, lo situamos en el valor correspondiente a la tercera persona, es decir, en 163.



Estos dos nuevos puntos se llaman **cuartiles**: Q_1 es el primer cuartil y Q_3 es el tercer cuartil. El segundo es la mediana: $Q_2 = Me$. Los cuartiles dividen la población en 4 partes iguales. La mediana y los cuartiles son **medidas de posición**.

Recorrido intercuartílico

El **recorrido intercuartílico** es la distancia entre los cuartiles primero y tercero:

$$\text{Recorrido intercuartílico} = Q_3 - Q_1$$

La mediana juega el papel de parámetro de centralización. El recorrido intercuartílico es un parámetro de dispersión asociado a ella.

Ejercicio resuelto

Calcular la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución de notas de 13 estudiantes:

1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 10

Es claro que la mediana es $Me = 5$: 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 10

Como hay 13 estudiantes, la cuarta parte es 3,25.

El primer cuartil tiene 3,25 estudiantes por debajo de él, por tanto corresponde a la nota del cuarto estudiante, $Q_1 = 3$; el tercer cuartil tiene 9,75 estudiantes por debajo de él, por lo que corresponde a la nota del décimo, $Q_3 = 7$.

Piensa y practica

1. Calcula la mediana y los cuartiles de: 13, 12, 15, 19, 12, 12, 13, 14, 15, 14, 13, 18, 17, 9, 8.

En la web Actividades guiadas para practicar los parámetros de posición.

ANOTACIONES

Sugerencias

- Otra forma de analizar una distribución estadística es mediante las medidas de posición. El alumnado puede imaginar todos los datos ordenados de menor a mayor y, estando así, partir el conjunto en cuatro partes iguales, con el mismo número de elementos. Los puntos, los valores, en donde se producen los cortes son Q_1 , Me y Q_3 .
- Los puntos anteriores, los cuartiles, dan una información interesante sobre la distribución.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:
Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 30. Ejercicios 3 y 4 de la pág. 31.
Ampliación: Ejercicios 5 y 6 de la pág. 31.
- Del fotocopiable TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD:
Ampliación: Ejercicio 2 de la ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 $Me = 13$; $Q_1 = 12$; $Q_3 = 15$

ANOTACIONES

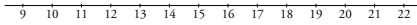
Diagrama de caja

Una forma de representar los parámetros de posición, mediana y cuartiles es lo que se denomina **diagrama de caja**, también conocido por diagrama de caja y bigotes.

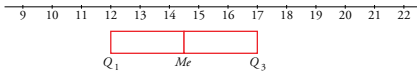
Ejemplo

En el banquete de una boda han juntado a todos los primos en una mesa. Sus edades ordenadas son las siguientes: 9, 9, 10, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 17, 19, 22. Observamos que $Me = 14,5$, $Q_1 = 12$ y $Q_3 = 17$. Para representar estos datos en un diagrama de caja, damos estos pasos:

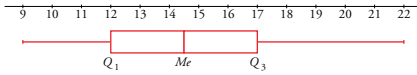
1. Trazamos una recta numérica que comprenda todos los valores que aparecen, del 9 al 22.



2. Dibujamos una caja que vaya de $Q_1 = 12$ a $Q_3 = 17$. Dividimos la caja en dos partes por el valor $Me = 14,5$.



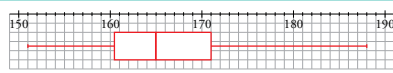
3. Desde el lateral izquierdo de la caja trazamos una recta horizontal hacia la izquierda que llegue hasta el menor valor, 9, y desde el derecho trazamos otra recta horizontal hacia la derecha que llegue hasta el mayor valor, 22.



Ejercicio resuelto

Las estaturas de un grupo de jóvenes se representan mediante el diagrama de caja de la derecha.

Interpretar e indicar cuáles son los parámetros de posición.



A la vista del diagrama podemos decir que $Q_1 = 160,5$, $Me = 165$ y $Q_3 = 171$. Además, el más bajo mide 151 cm, y el más alto, 188 cm.

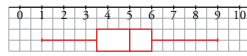
Por tanto, un 25% de los jóvenes mide entre 151 cm y 160,5 cm; otro 25%, entre 160,5 y 165 cm; otro 25%, entre 165 cm y 171 cm, y el último 25% (los más altos) miden entre 171 cm y 188 cm.

Piensa y practica

2. Representa mediante un diagrama de caja y bigotes las siguientes calificaciones de 35 individuos:

- 0 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6
6 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 10 10

3. El siguiente diagrama de caja representa la distribución de las notas de una clase de 30 estudiantes.



Interprétalo e indica los parámetros de posición.

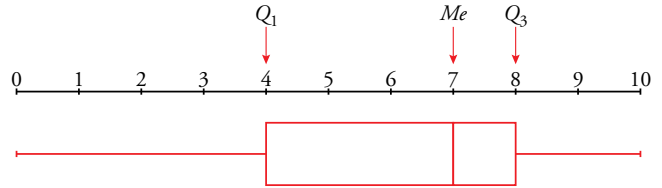
Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:
Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 30. Ejercicios 3, 4, 5 y 6 de la pág. 31.
- Del fotocopiable TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD:
Refuerzo: Ejercicio 5 de la ficha A.
Ampliación: Ejercicio 3 de la ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

2



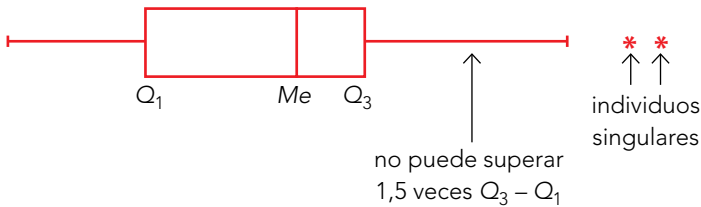
3

A la vista del diagrama podemos decir que $Q_1 = 3,5$; $Me = 5$; $Q_3 = 6$. Además, la nota más baja ha sido un 1, y la más alta, un 9. Por tanto, un 25% de los estudiantes ha sacado entre un 1 y un 3,5; otro 25% ha obtenido notas entre 3,5 y 5; otro 25% ha estado entre 5 y 6, y el último 25%, entre 6 y 9.

ANOTACIONES

Sugerencias

- El diagrama de caja está estrechamente ligado a las medidas de posición. Con él se visualiza la distribución, destacando los tres valores, Q_1 , Me y Q_3 .
- En la confección de estos diagramas se prescribe que las ramas laterales, "bigotes", no superen en longitud a una vez y media la longitud total de la caja. ¿Qué ocurre cuando uno o más individuos se separan de Q_1 o Q_3 (por debajo de Q_1 o por encima de Q_3) más de esta longitud? En tal caso, se singularizan estos individuos describiéndolos mediante asteriscos:



- No obstante, creemos que en este curso no conviene entrar en estas complicaciones. Para evitarlo, todos los casos estudiados (resueltos o propuestos) carecen de "individuos singulares".

Pensamiento crítico

Para la actividad 2 se sugiere:

Las alumnas y los alumnos resuelven la actividad individualmente. Después, en gran grupo, un estudiante expone sus soluciones, justificándolas y otro las acepta o rebate. La actividad finaliza con un turno de palabra, para los que aún tengan dudas o deseen aportar algo nuevo, plantear nuevas preguntas, etc.

5 Tablas de doble entrada



En un centro escolar hay 180 alumnas y alumnos del primer ciclo de ESO. Se realiza entre ellos una encuesta en la que se les pregunta sobre sus aficiones deportivas:

F	23
BC	37
P	6
AT	26
AJ	11
BM	13
N	64

¿Cuál de los siguientes deportes practicas más asiduamente?

Fútbol (F), baloncesto (BC), pádel (P), atletismo (AT), ajedrez (AJ), balonmano (BM), ninguno de ellos (N).

Los resultados se reflejan en la tabla de frecuencias de la derecha.

La información anterior podría mejorarse si conociéramos, además, los resultados por cursos (1.º y 2.º). Se tiene así una **tabla de doble entrada**:

	1.º	2.º	TOTAL
F	12	11	23
BC	20	17	37
P	3	3	6
AT	14	12	26
AJ	5	6	11
BM	7	6	13
N	39	25	64
TOTALES	100	80	180

Sobre ella, podemos ver datos del tipo:

- ¿Cuántos estudiantes de 2.º juegan al ajedrez? → 6 estudiantes.
- ¿Cuántos estudiantes de 1.º practican atletismo? → 14 estudiantes.
- ¿Cómo evoluciona la práctica de baloncesto al cambiar de curso? → 20 en 1.º y 17 en 2.º.

Para efectuar comparaciones, como la de la última pregunta, es preferible recurrir a las proporciones respecto a los totales correspondientes:

Practican baloncesto en 1.º: 20 de 100; es decir, $\frac{20}{100}$, o bien el 20%.

Practican baloncesto en 2.º: 17 de 80; es decir, $\frac{17}{80}$, o bien el 21,25%.

Por tanto, la práctica de baloncesto aumenta al pasar de 1.º a 2.º.

Piensa y practica

1. Observando la tabla de doble entrada anterior, responde a las siguientes preguntas:

- ¿Qué porcentaje de los estudiantes de 1.º juegan al fútbol? ¿Y de los de 2.º?
- ¿Se puede decir que los alumnos de 2.º participan más en deportes que los de 1.º?

2. En la tabla de arriba, ahora nos dicen que en 1.º hay 55 chicas y 45 chicos, y en 2.º, 42 chicas y 38 chicos. Repártelos en chicas y chicos teniendo en cuenta el tipo de deporte que prefieren (inventa tú el reparto). Has de hacer una tabla de doble entrada con estas columnas: 1.º CHICAS, 1.º CHICOS, 1.º TOTAL, 2.º CHICAS, 2.º CHICOS, 2.º TOTAL y TOTAL.

286

ANOTACIONES

Sugerencias

- El análisis de las tablas de doble entrada es muy formativo. Conviene que los estudiantes de este nivel se inicien en la interpretación y búsqueda de información en estas tablas. Eso se pretende en esta página y con los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) El 12% de los estudiantes de 1.º y el 13,75% de los estudiantes de 2.º juegan al fútbol.

b) De 1.º, el 61% hace alguna actividad.

De 2.º, el 68,75% hace algún deporte. Luego sí, los de 2.º participan más en deportes.

2

	1.º CHICOS	1.º CHICAS	1.º TOTAL	2.º CHICOS	2.º CHICAS	2.º TOTAL	TOTAL
F			12			11	23
BC			20			17	37
P			3			3	6
AT			14			12	26
AJ			5			6	11
BM			7			6	13
N			39			25	64
TOTALES	45	55	100	38	42	80	180

NOTA: los huecos vacíos tienen respuesta libre siempre y cuando sumen por columnas y filas lo que pone.

ANOTACIONES

Tablas de doble entrada

17. En una clase con 36 estudiantes se realiza una encuesta con esta pregunta: *¿Qué prefieres, playa o montaña?* Los resultados son:

	CHICAS	CHICOS	TOTAL
PLAYA	12	3	15
MONTAÑA	8	13	
TOTAL			36

Completa en tu cuaderno la tabla y responde:

- a) ¿Qué significa el 3 de la primera fila? ¿Y el 8?
- b) ¿Qué significa el 15 que hay en el total?
- c) De un total de 16 chicos, hay 13 que prefieren montaña. Esto significa $13/16 = 0,8125$; es decir, 81,25%. Averigua el porcentaje de chicas que prefieren montaña.



18. Esta tabla se refiere a los estudiantes de un curso durante el primer trimestre.

	ESTUDIA MENOS DE 2 H DIARIAS	ESTUDIA MÁS DE 2 H DIARIAS	TOTAL
SUSPENDE MÁS DE 2	16	4	
SUSPENDE 0, 1 o 2	2	10	
TOTAL			

Completa en tu cuaderno la tabla y responde:

- a) ¿Cuántos estudiantes hay en total?
- b) ¿Qué proporción de los estudiantes suspende más de dos asignaturas?
- c) ¿Qué proporción de los que estudian más de dos horas diarias suspende más de dos asignaturas?
- d) ¿Qué proporción de los que suspenden más de dos asignaturas estudian más de dos horas diarias?
- e) Extrae alguna conclusión de los resultados.

19. En una clase de 30 estudiantes se han contado los chicos y las chicas que tienen gafas. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con los resultados:

	GAFAS	NO GAFAS	TOTAL
CHICAS	6		17
CHICOS			
TOTAL	14		

20. Se han seleccionado al azar 100 personas de entre 25 y 30 años. Se les ha preguntado:

- ¿Eres miope? (Sí/No)
 - ¿Seguiste estudiando después de los 18 años? (Sí/No)
- Estos son los resultados:

MIOPE	ESTUDIOS	
	SÍ	NO
SÍ	21	19
NO	14	

Completa la tabla en tu cuaderno y responde:

- a) ¿Cuántos miopes hay en total? ¿Cuál es el porcentaje de miopes?
- b) Entre las 35 personas que estudiaron más, ¿qué porcentaje de miopes hay?
- c) Compara el porcentaje de miopes entre las personas que estudiaron más años y entre las que estudiaron menos años.
- d) Extrae alguna conclusión de los resultados.

21. En un encuentro de estudiantes europeos se les ha preguntado por la zona de Europa donde nacieron y por su tono de ojos. Estos son los resultados:

	TIPO DE OJOS		TOTAL
	CLAROS	OSCUROS	
EUROPA DEL NORTE	36	32	
EUROPA CENTRAL	17	47	
EUROPA DEL SUR	6	62	
TOTAL			

- a) Completa la tabla en tu cuaderno.
- b) ¿Qué proporción de estudiantes tiene los ojos claros?
- c) ¿Qué proporción de estudiantes de Europa del norte tiene los ojos claros? ¿Y los de Europa del sur?
- d) ¿Qué proporción de estudiantes hay de cada zona europea?
- e) ¿Obtienes alguna conclusión?

20

MIOPE	ESTUDIOS	
	SÍ	NO
SÍ	21	19
NO	14	46

- a) Hay 40 miopes. Es el 40%.
- b) Hay un 60%.
- c) El 60% de los que estudiaron más años.

El 29,23% de los que estudiaron menos años.

Hay más miopes entre los que siguieron estudiando.

- d) Parece ser (si damos validez a los datos de esta tabla) que estudiar mucho produce miopía.

21 a)

	CLAROS	OSCUROS	TOTAL
EUROPA DEL NORTE	36	32	68
EUROPA CENTRAL	17	47	64
EUROPA DEL SUR	6	62	68
TOTAL	59	141	200

- b) Un 29,5% de los estudiantes tiene los ojos claros.
- c) El 52,9% de los estudiantes de Europa del norte tiene los ojos claros, mientras que solo el 8,82% de los estudiantes de Europa del sur los tiene claros.
- d) De Europa del norte hay un 34%, de Europa central un 32% y de Europa del sur un 34%.
- e) Que la gente tiene los ojos más claros en el norte y más oscuros en el sur.

ANOTACIONES

17

	CHICAS	CHICOS	TOTAL
PLAYA	12	3	15
MONTAÑA	8	13	21
TOTAL	20	16	36

- a) Significa que hay 3 chicos que prefieren playa y 8 chicas que prefieren montaña.
- b) Que entre chicos y chicas hay 15 que prefieren playa.
- c) $8/20 = 0,4$; es decir, el 40% de las chicas prefieren montaña.

18

	ESTUDIA MENOS DE 2 H DIARIAS	ESTUDIA MÁS DE 2 H DIARIAS	TOTAL
SUSPENDE MÁS DE 2	16	4	20
SUSPENDE 0, 1 o 2	2	10	12
TOTAL	18	14	32

- a) Hay 32 estudiantes.
- b) El 62,5% suspende más de dos asignaturas.
- c) El 28,57% de los que estudian más de dos horas.
- d) El 20% estudia más de dos horas y suspende más de dos asignaturas.
- e) Que los estudiantes dedican una media de 2 horas al día a estudiar y que los que suspenden más de 2 asignaturas superan el 60% del total.

19

	GAFAS	NO GAFAS	TOTAL
CHICAS	6	11	17
CHICOS	8	5	13
TOTAL	14	16	30

Ejercicios y problemas

Aprende a resolver problemas

En una peña se han formado dos grupos: uno de JÓVENES y otro de MAYORES DE 40. Se ha pasado una encuesta entre ellos en la que se ha hecho la siguiente pregunta: ¿Cuántas veces a la semana sales a correr? Los resultados se dan en la tabla de la derecha teniendo en cuenta a qué grupo pertenece cada uno.

Calcula e interpreta la media y la mediana de cada grupo y del total.

	JÓVENES	MAYORES	TOTAL
0	6	23	29
1	15	20	35
2	13	6	19
3	3	1	4
4	2	0	2
5	1	0	1
TOTAL	40	50	90

Comprueba que has entendido el enunciado.

¿Cuántos jóvenes hay? ¿Y mayores? ¿Para qué sirven las columnas del total?

¿Con estos datos, cómo se calcula la media y la mediana de cada columna? ¿Qué significan?



Piensa el camino que vas a seguir para resolver el problema. ¿Qué necesitas saber?

¿Cómo se procede para completar la tabla? ¿Qué significa la columna de la derecha?

— Para hallar el total de cada celda de la derecha, hay que ir sumando las dos celdas de su izquierda. Por ejemplo, el total de 0 es $6 + 23 = 29$.
— La columna de la derecha corresponde a los resultados del número de veces que salen a correr todos los integrantes de la peña.

¿Qué hay que hacer para hallar la media? ¿Y la mediana?

— Para hallar la media de cada grupo, se añade a cada columna otra más con el producto de cada dato por su frecuencia. La media de cada grupo es el total de la nueva columna partido por el total de la de su izquierda.

	J	f · J	M	f · M	TOTAL	f · TOTAL
0	6	0	23	0	29	0
1	15	15	20	20	35	35
2	13	26	6	12	19	38
3	3	9	1	3	4	12
4	2	8	0	0	2	8
5	1	5	0	0	1	5
TOTAL	40	63	50	35	90	98

$$\bar{x}_{\text{JÓVENES}} = \frac{63}{40} = 1,575 \quad \bar{x}_{\text{MAYORES}} = \frac{35}{50} = 0,7 \quad \bar{x}_{\text{TOTAL}} = \frac{98}{90} = 1,089$$

— Para hallar la mediana, contamos las frecuencias hasta la mitad y vemos a qué dato corresponde. $Me_{\text{JÓVENES}} = 1$; $Me_{\text{MAYORES}} = 1$; $Me_{\text{TOTAL}} = 1$.

¿Cómo se interpretan los datos que hemos obtenido?

— Es curioso que la mediana de los jóvenes coincida con la de los mayores y, sin embargo, las medias difieren tanto (una es más del doble que la otra). Esto puede interpretarse como que los mayores no tienen tiempo de salir a correr, pero muchos de ellos se obligan a correr al menos un día. Los jóvenes con más fuerza y más tiempo corren más a menudo, pero tampoco tanto como para que la mediana suba de 2.

290

ANOTACIONES

Aprende a resolver problemas



En este apartado, mediante el seguimiento de un ejemplo, se pretende ofrecer modelos, estrategias y pautas para resolver problemas.

- Detenerse en la comprensión del enunciado.
- Reflexionar sobre el proceso. Decidir los datos y pasos necesarios para llegar a la solución.
- Describir el proceso. Explicar el significado de cada operación y del dato que se obtiene con ella.
- Presentar la solución.

Para explotar al máximo los objetivos de este apartado, podemos pedir a los alumnos y a las alumnas que intenten resolver previamente el problema, buscando cada uno su propio camino. Y después, en gran grupo, contrastar los distintos procesos seguidos, la calidad de cada exposición, etc. Terminaremos analizando el desarrollo que incluye la página.

ANOTACIONES

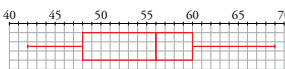
Resuelve problemas

22. A los estudiantes de una clase se les ha preguntado por los puntos obtenidos en un test de cuatro preguntas. Los resultados son los siguientes:

	CHICAS	CHICOS	TOTAL
0	1	4	5
1	4	7	11
2	6	3	9
3	5	0	5
4	4	2	6
TOTAL	20	16	36

- a) Con estos datos, halla la \bar{x} y la Me de las chicas, de los chicos y del total.
- b) ¿Qué proporción de chicas han obtenido más de dos puntos? ¿Y de chicos?
- c) ¿Qué conclusión obtienes?

23. Este diagrama de caja representa la distribución de los pesos de un grupo de estudiantes de una clase.



Completa estas frases observando el diagrama:

- a) El 50% de los estudiantes de esta clase pesa ... o menos.
- b) El 25% de los estudiantes pesa ... o menos.
- c) El 25% de los estudiantes pesa ... o más.
- d) El 50% de los pesos centrales varía entre ... y ...
- e) El 75% de los estudiantes pesa ... o más.
- f) El ... de los estudiantes de esta clase pesa 60 kg o menos.

24. La edad media de un grupo de diez personas es 13 años.

- a) ¿Es posible que al incorporarse una persona al grupo haga que la edad media sea 10 años? Explica por qué.
- b) Bruno, el profesor, se ha incorporado al grupo y la media ahora es de 15 años. ¿Qué edad tiene Bruno?
- c) ¿Qué edad debe tener una persona para aumentar en 1 año la media del grupo inicial?

Problemas "+"

25. Halla la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución de notas de los estudiantes de una clase:

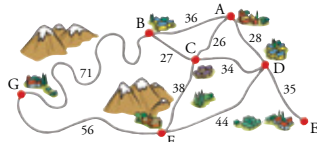
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	1	1	0	5	6	11	6	2	1	0

Ten en cuenta que aunque los datos estén en una tabla de frecuencias, los puedes tomar como si estuvieran ordenados.

Representa los resultados en un diagrama de caja y bigotes.

26. En un campamento con 100 chicos y chicas, se les da la opción de piragüismo o equitación: hay 29 chicos que han elegido cayac y 34 chicas que prefieren montar a caballo. Representa los datos en una tabla y halla la proporción de chicas que hay entre los que eligieron cayac.

27. El siguiente mapa nos da la distancia, en kilómetros, de cada tramo de carretera.



Esta tabla resume la distancia, en kilómetros, entre cada dos pueblos de la comarca.

	A	B	C	D	E	F
B		36				
C	26	27				
D	28	61	34			
E						
F						
G						
	A	B	C	D	E	F

- a) Comprueba que los datos que hay en la tabla son correctos.
- b) Complétala en tu cuaderno, de modo que en la tabla aparezca la menor de las distancias posibles entre cada dos localidades.

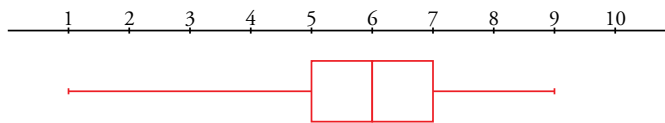
291

24 a) Es imposible, porque tendría que tener edad negativa para que la media disminuyera.

b) Bruno tiene 35 años.

c) Debe tener 10 años más de los que tiene.

25 $Me = 6$; $Q_1 = 5$; $Q_3 = 7$



26

	CAYAC	EQUITACIÓN	TOTAL
CHICAS	17	34	51
CHICOS	29	20	49
TOTAL	46	54	100

Proporción de chicas que hay entre los que eligieron cayac: $\frac{17}{46} = 0,37$

Un 37% de los que eligieron cayac eran chicas.

27

	A	B	C	D	E	F
B	36					
C	26	27				
D	28	61	34			
E	63	96	69	35		
F	64	65	38	44	79	
G	107	71	94	100	135	56

Resolución de problemas



En pequeño grupo, para esta página y todas las que plantean tandas de problemas se sugiere:

- Un tiempo de reflexión individual destinado a interiorizar los problemas y planear los procesos de resolución.
- Un tiempo de puesta en común, exponiendo los bloqueos y comentando los procesos que se pretende seguir.
- Un tiempo de resolución individual.
- Un tiempo de puesta en común de las soluciones y corrección de estas detectando errores y llegando a acuerdos.

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

22 a) Chicas: $\bar{x} = 2,35$; $Me = 2$

Chicos: $\bar{x} = 1,31$; $Me = 1$

Total: $\bar{x} = 1,88$; $Me = 2$

- b) Un 45% de chicas ha obtenido más de dos puntos frente a un 12,5% de chicos.
- c) Que las chicas han hecho mejor el test que los chicos.

23 a) El 50% de los estudiantes de esta clase pesa 56 kg o menos.

- b) El 25% de los estudiantes pesa 48 kg o menos.
- c) El 25% de los estudiantes pesa 60 kg o más.
- d) El 50% de los pesos centrales varía entre 48 kg y 60 kg.
- e) El 75% de los estudiantes pesa 48 kg o más.
- f) El 75% de los estudiantes de esta clase pesa 60 kg o menos.

ANOTACIONES

Área con líneas horizontales para anotaciones.

Taller de matemáticas

Lee e infórmate

Conoce otras medias

- Un ciclista sube los 40 km que hay de A a B a 10 km/h y los baja a 40 km/h. ¿Cuál es su velocidad media, v_m , en todo el recorrido?

Estamos tentados a decir que $v_m = \frac{40+10}{2} = 25$ km/h. Pero... ¡cuidado! No es cierto.

Sube en 4 h (40 km a 10 km/h) } Tarda 5 h en hacer 80 km $\rightarrow v_m = \frac{\text{recorrido total}}{\text{tiempo real}} = \frac{80 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 16$ km/h

Baja en 1 h (40 km a 40 km/h)

Es decir, la velocidad media no es la media de las velocidades.

¿Qué relación existe entre la v_m y las velocidades v_1 , v_2 de ida y vuelta?

Comprueba que $\frac{1}{v_m} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$. Este extraño promedio, v_m , se llama **MEDIA ARMÓNICA**.

- Queremos formar un cuadrado cuya superficie sea igual que la del rectángulo.

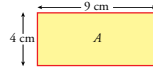
¿Cuánto medirá su lado?

Tampoco funciona hallar la media de los lados del rectángulo: $\frac{4+9}{2} = 6,5$ cm.

EN EL RECTÁNGULO
 $A = 4 \cdot 9 = 36 \text{ cm}^2$



EN EL CUADRADO
 $36 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$



¿Qué relación hay entre el lado, l , del cuadrado y los lados, a y b , del rectángulo?

Como puedes comprobar, $l = \sqrt{a \cdot b}$. Se llama **MEDIA GEOMÉTRICA**.

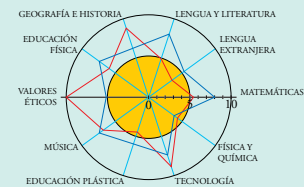
- En resumen, dados los números x e y :

$$\text{MEDIA O MEDIA ARITMÉTICA} = \frac{x+y}{2} \quad \text{MEDIA GEOMÉTRICA} = \sqrt{x \cdot y} \quad \text{MEDIA ARMÓNICA} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$



Interpreta y exprésate

En un colegio las notas vienen acompañadas de una curiosa gráfica. Observa la de Bruno y contesta.

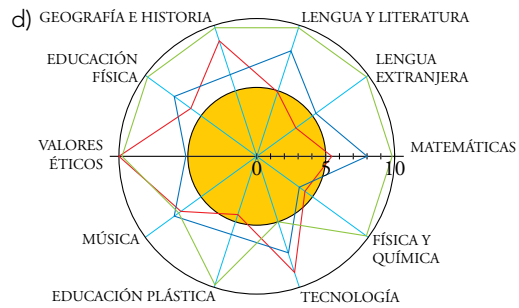


a) ¿Qué crees que significan los dos círculos que aparecen en la gráfica?

b) ¿Crees que a Bruno se le da bien la Física y Química?

c) ¿Qué asignaturas ha suspendido?

d) Su compañera Bea ha tenido casi todo sobresalientes. Únicamente ha sacado un notable en Música y un aprobado en Tecnología. Dibuja en tu cuaderno su gráfica.



ANOTACIONES

Lee e infórmate



Conoce otras medias

- En esta página se ofrece al estudiante una primera aproximación al concepto y significado tanto de la media geométrica como de la media armónica.
- Puede ser interesante que los estudiantes hagan una primera lectura de forma individual para luego, en grupo, comentar las dudas que surjan.
- Es importante hacer ver al alumnado que no siempre que se encuentran ante la palabra "media" han de pensar en la media aritmética, sino que dependiendo del contexto en el que se halle el término puede significar cosas distintas.

Interpreta y exprésate



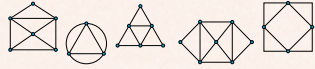
- Entender este diagrama para expresar las notas individuales y compararlo con las de la media es de gran ayuda para interpretar otro tipo de diagramas que seguro se encontrarán en muchas ocasiones.
- Se les podría pedir como trabajo extra que cada uno hiciera en casa un diagrama con sus notas y con las notas medias de la clase que, previamente, ha proporcionado el docente.

Soluciones

- Los dos círculos son para delimitar notas; dentro del primero están las suspensas y entre el primero y el segundo las aprobadas.
- No, porque ha suspendido.
- Bruno ha suspendido Física y Química, Educación Plástica y Lengua Extranjera.

Entrena resolviendo problemas

• Comprueba que todas estas figuras se pueden dibujar sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces sobre el mismo tramo:



Sin embargo, no lo conseguirás con estas otras:



¿Podrías decir cuándo una figura se puede dibujar y cuándo no en las condiciones mencionadas?

• Fíjate en el número de vértices o nudos con un número par o impar de ramas.

• Busca la manera de dibujar cada figura sin levantar el lápiz y sin repasar ningún tramo.



- a) ¿Desde cuántos puntos se puede iniciar el trazado de la figura A?
- b) ¿Y el de la figura B?

Autoevaluación

1. En un club de jugadores de videojuegos se ha anotado el número de partidas ganadas por cada uno de sus miembros. Estos son los resultados:

4, 4, 5, 3, 3 2, 1, 4, 2, 3 4, 3, 5, 5, 1
2, 0, 1, 0, 3 4, 2, 5, 3, 2 3, 2, 4, 1, 0

- a) Confecciona con estos datos una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.
- b) Representalos en un diagrama de barras.
- c) Dibuja el correspondiente diagrama de sectores.

2. Calcula la media, la mediana, la moda y la desviación media de las siguientes distribuciones:

- a) 10, 12, 19, 15, 8, 10, 10
- b) 0, 3, 3, 3, 3, 4, 5
- c) 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 5, 7

3. Halla la media, la desviación media y el recorrido de la siguiente distribución:

x	2	3	4	5	6	7	8	9
f	4	8	6	3	1	2	0	1

En la web Resoluciones de estos ejercicios.

4. Halla la mediana y los cuartiles de esta distribución: 23, 25, 26, 28, 31, 31, 34, 36, 36, 37, 38, 38, 39, 40. Representa los datos obtenidos en un diagrama de caja y bigotes.

5. En una pecera tenemos 20 peces: 10 rojos y 10 grises. En una esquina ponemos un foco de calor que eleva la temperatura de esta zona. Los peces se distribuyen así:

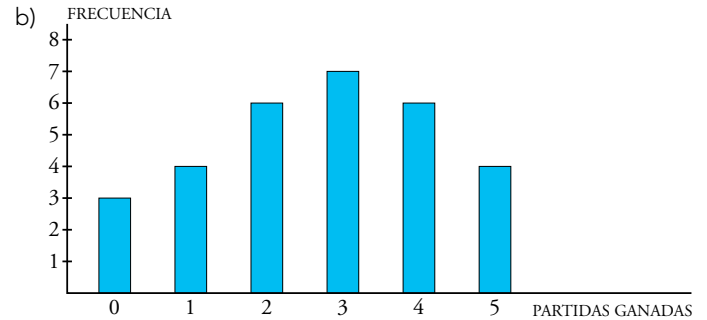
	CALOR	FRÍO	TOTAL
ROJOS	9		10
GRISES	3		10
TOTAL			20

- a) Completa la tabla en tu cuaderno.
- b) ¿Cuántos peces rojos y cuántos grises permanecen en la parte fría?
- c) ¿Qué porcentaje de peces prefiere agua caliente?
- d) ¿Qué porcentaje de peces rojos prefiere el agua caliente?
- e) De entre los peces que prefieren el agua caliente, ¿qué porcentaje son rojos?

Soluciones de la autoevaluación

1 a)

x	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL
0	3	0,1	10%
1	4	0,13	13%
2	6	0,2	20%
3	7	0,24	24%
4	6	0,2	20%
5	4	0,13	13%
TOTAL	30	1,00	100



2 a) $\bar{x} = 12$; $Me = 10$; $Mo = 10$; $DM = 2,85$

b) $\bar{x} = 3$; $Me = 3$; $Mo = 3$; $DM = 0,86$

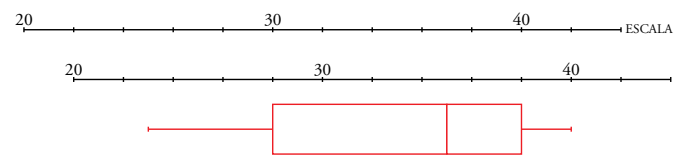
c) $\bar{x} = 4$; $Me = 4$; $Mo = 3$ y 4 ; $DM = 1,17$

3 $\bar{x} = 4$

$DM = 1,28$

Recorrido = $9 - 2 = 7$

4 $Q_1 = 28$; $Me = 35$; $Q_3 = 38$



5 a)

	CALOR	FRÍO	TOTAL
ROJOS	9	1	10
GRISES	3	7	10
TOTAL	12	8	20

b) Hay 1 rojo y 7 grises.

c) El 60% (12/20).

d) El 90% (9/10).

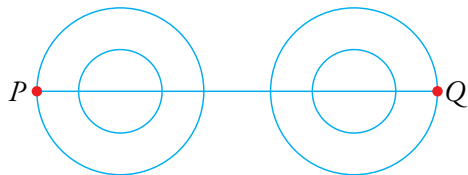
e) El 75% (9/12).

Entrena resolviendo problemas

Se incluyen en este apartado una serie de problemas o retos, independientes de formulaciones teóricas y del programa de contenidos, cuyo objetivo es practicar estrategias de elaboración personal en la resolución de problemas de lógica matemática. El estudiante recurrirá, por supuesto, a sus conocimientos matemáticos, pero también a la experimentación, al tanteo, al descubrimiento por ensayo-error, o a cualquier otro camino que le lleve a la solución. Se pretende, además, ofrecer un espacio, fuera de programa, en el que, mediante actividades o situaciones más distendidas, experimentar el placer de razonar y superar retos.

Soluciones

- Una figura se puede dibujar sin pasar dos veces por el mismo tramo si el número de vértices con un número impar de ramas es 0 o 2.
- La figura A se puede trazar, según las normas dadas, comenzando desde cualquiera de los puntos P o Q aquí marcados:



- La figura B se puede trazar comenzando en cualquiera de sus puntos.

ANOTACIONES

ANOTACIONES

A series of horizontal dashed lines for writing notes.